# Contact - Lois de Coulomb

Les actions de contact entre deux solides seront décrites selon les lois de COULOMB dans le cadre du programme. Seuls les frottements de glissement seront considérés. Il est important de noter que les actions de contact sont en quelque sorte des forces adaptatives, cela signifie qu'elles évoluent en fonction du contexte mécanique des solides en contact. Elles ne dépendent pas que de la nature des deux solides et de la surface de contact. La force de contact et en particulier sa composante dite de frottement est souvent perçue comme nocives au mouvement, nous montrerons par la suite qu'elle est, dans de nombreux cas, indispensable à la mise en mouvement autonome d'un système déformable. La science qui étudie les frottements est la *tribologie*.

## 1 Aspect historique

L'homme étudie les actions de contact depuis la préhistoire ! Il y a plus de 400 000 ans, nos ancêtres hominidés d'Algérie, de Chine et de Java utilisaient le frottement pour fabriquer leurs outils de pierre. Il y a 200 000 ans, les Néandertaliens faisaient du feu en frottant deux pièces de bois l'une contre l'autre, technique qui peut s'avérer décisive lorsque l'on participe à certaines émissions de télévision à l'heure actuelle.... Dans l'Antiquité, les ouvriers égyptiens réussirent à transporter de grandes statues de pierre et les blocs de construction des pyramides en les poussant sur des traîneaux qui reposaient sur des rondins de bois car il n'était pas possible de les faire glisser. Les forces de frottement auraient été trop importantes.

La tribologie moderne a commencé il y a un peu plus de 500 ans, quand LÉONARD DE VINCI énonça dans ses carnets les lois qui décrivent le mouvement d'un solide parallélépipédique sur une surface plane. Cependant, ce travail resta longtemps inconnu car ces carnets ne furent pas publiés avant de très nombreuses années (quelques centaine...) ! Au XVII$^{e}$ siècle, le physicien français AMONTONS redécouvrit les lois du frottement après avoir étudié le glissement sec entre deux surfaces planes. Celles-ci furent complétées, avec des analyses expérimentales fines, par le physicien français COULOMB, au XVIII$^{e}$ siècle. Les propriétés mises alors en évidence sont les suivantes (les deux premières sont d'AMONTONS et la troisième de COULOMB) :

- La force de contact qui s'oppose au glissement est proportionnelle à la *charge normale*, c'est-à-dire à la composante de la force perpendiculaire à l'interface des corps qui glissent l'un contre l'autre.
- Contrairement à ce que l'intuition suggère, l'intensité de la force de frottement de glissement ne dépend pas de l'aire de contact : un petit pavé glissant sur une surface subit autant de frottement qu'un pavé plus grand mais de poids égal.
- La force de frottement est indépendante de la vitesse une fois le mouvement commencé. Quelle que soit la vitesse à laquelle on pousse un bloc, la résistance ne change pas. Ces propriétés vont être précisées et formalisées dans la suite. Elles ont été largement complétées depuis par des modèles très élaborés mais il ne s'agit pas dans ce cours de partir sur des choses complexes sur les actions de contact !

## 2 Vitesse de glissement

### 2.1 Modèle du contact ponctuel

On considère un contact ponctuel entre deux solides $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ localisé en un lieu géométrique ponctuel $I$. Appelons $I_1 \in \mathcal{S}_1$ et $I_2 \in \mathcal{S}_2$ les points des solides $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ qui coincident avec le point $I$ au moment du contact. Sur la figure 1, les lieux géométriques des points $I$, $I_1$ et $I_2$ sont distingués pour plus de clarté mais il faut considérer qu'au moment du contact, on a $I_1 = I_2 = I$.

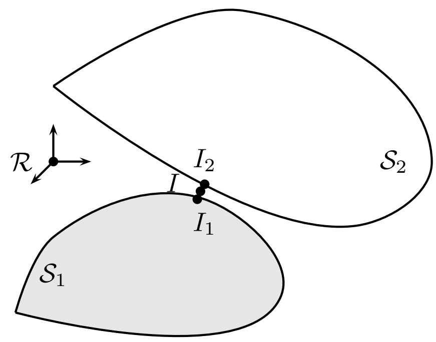


FIGURE 1 – Modèle du contact ponctuel

### 2.2 Définition

Soit $\mathcal{R}$ un référentiel quelconque, on définit les vitesses des points $I_1$ et $I_2$ par rapport à ce référentiel par $\vec{v}_{I_1\in\mathcal{S}_1/\mathcal{R}}$ et $\vec{v}_{I_2\in\mathcal{S}_2/\mathcal{R}}$. La vitesse de glissement du solide $\mathcal{S}_2$ par rapport au solide $\mathcal{S}_1$ est définie par :

$$\vec{v}_{\mathrm{g}\,2/1} = \vec{v}_{I_2\in\mathcal{S}_2/\mathcal{R}} - \vec{v}_{I_1\in\mathcal{S}_1/\mathcal{R}}$$

Du fait de cette définition, on constate immédiatement que la vitesse de glissement de $\mathcal{S}_1$ par rapport à $\mathcal{S}_2$ de la vitesse de glissement de $\mathcal{S}_2$ par rapport à $\mathcal{S}_1$. Toujours du fait que la vitesse de glissement est une différence de vitesse, on peut en déduire qu'elle est indépendante du choix du référentiel $\mathcal{R}$ utilisé pour évaluer les vitesses des points $I_1$ et $I_2$.

### 2.3 Non glissement

Il n'y a pas de glissement lorsque la vitesse de glissement définie avant s'annule :

$$\text{Non glissement} \qquad \vec{v}_{\mathrm{g}\,2/1} = \vec{v}_{\mathrm{g}\,1/2} = \vec{0}$$

On en déduit donc que $\vec{v}_{I_2\in\mathcal{S}_2/\mathcal{R}} = \vec{v}_{I_1\in\mathcal{S}_1/\mathcal{R}}$. La situation de *non glissement* est une situation relativement courante. En effet, elle n'impose pas automatiquement l'absence totale de mouvement du solide $\mathcal{S}_2$ par rapport au solide $\mathcal{S}_1$ puisque le contact est ponctuel. On peut même envisager qu'un ensemble de points vérifient au même instant la condition de non glissement sans encore empêcher le mouvement de $\mathcal{S}_2$ par rapport à $\mathcal{S}_1$. C'est, par exemple, le cas d'une roue en contact avec le sol, le lieu des points étant alors le segment correspondant à la largeur de la roue qui touche le sol. Le *non glissement* est très souvent supposé (à juste titre…) dans ce genre de situation et la roue se déplace bien par rapport au sol. Dans ce cas très fréquent de nos études de mécanique, on parle de *roulement sans glissement*.

À contrario, si les solides $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ présentent, par exemple, deux surfaces planes en contact et que la condition de non glissement est supposée en un des lieux géométriques $I$ de contact alors il n'est plus possible d'envisager de mouvement de $\mathcal{S}_2$ par rapport à $\mathcal{S}_1$ sans modification de la nature de la zone de contact.

## 3 Les lois de Coulomb

### 3.1 Glissement

Dans ce cas de figure la vitesse de glissement est non nulle. On considère l'action du solide $\mathcal{S}_1$ considéré comme un support sur le solide $\mathcal{S}_2$. Cette force notée $\vec{R}_2$ et appliquée au point $I_2$ sera toujours décomposée en deux forces perpendiculaires. La composante normale $\vec{N}_2$ est perpendiculaire la surface de contact en $I$ et orientée du solide $\mathcal{S}_1$ vers le solide $\mathcal{S}_2$. La composante tangentielle notée $\vec{T}_2$ est contenue dans le plan tangent à la surface de contact en $I$. De plus, cette force souvent qualifiée de *force de frottement* s'oppose au mouvement du solide $\mathcal{S}_2$ par rapport au solide $\mathcal{S}_1$. Elle est colinéaire et de sens opposé à $\vec{v}_{\mathrm{g}\,2/1}$, vitesse de glissement de $\mathcal{S}_2$ par rapport à $\mathcal{S}_1$. Enfin selon la loi de COULOMB, la norme de $\vec{T}_2$ est proportionnelle à la norme de $\vec{N}_2$. Physiquement, cela signifie que plus il y a d'appui du solide $\mathcal{S}_2$ sur le solide $\mathcal{S}_1$, plus la force de frottement sera importante :

$$\text{Glissement} \qquad \vec{v}_{\mathrm{g}\,2/1} \neq \vec{0} \qquad |T_2| = f_d N_2$$

où $f_d$ est le coefficient de frottement dynamique de l'interaction $\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2$. Le coefficient de frottement dynamique peut encore se définir par l'angle $\varphi_d$ que fait le vecteur $\vec{R}_2$ avec sa composante normale $\vec{N}_2$, voir le schéma de la figure 2. On a en effet $f_d = \tan\varphi_d$.

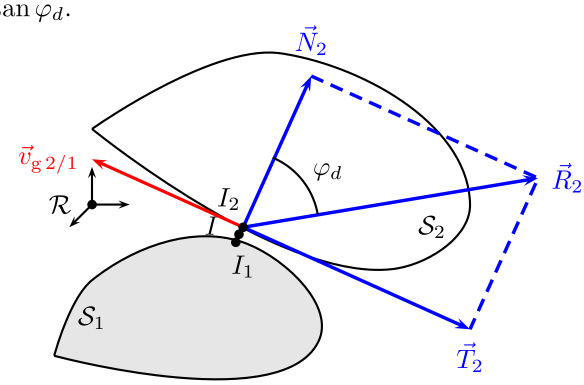


FIGURE 2 – Situation de glissement

On retiendra que dans une situation de glissement, si l'on arrive à connaître la composante normale $N_2$ de la force de contact, alors on connaît aussitôt la norme de la force tangentielle $|T_2|$. Ceci est très important dans le cadre de la résolution d'un problème de mécanique. Dans le cas d'un mouvement de glissement sans frottement, on aura $f_d = 0$. La force de contact n'a pas de composante tangentielle, la réaction du support se limite à $\vec{N}_2$ qui sera perpendiculaire à la vitesse de glissement.

## 3.2 Non glissement

Contrairement au cas précédent, la vitesse de glissement est nulle : $\vec{v}_{g\,2/1} = \vec{0}$. Dans ce cas de figure, les lois de Coulomb ne nous renseignent pas complètement sur la force de contact.

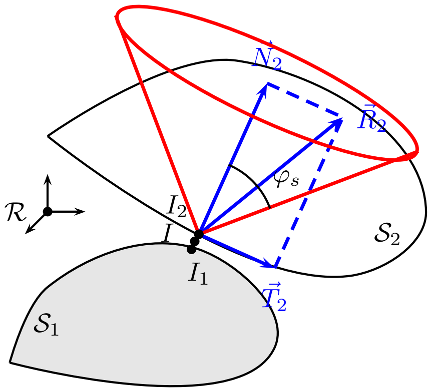


Figure 3 – Situation de non glissement

En général, elle présente toujours une composante normale et une composante tangentielle. Mais la relation entre ces deux composantes devient une inégalité :

$$\text{Non glissement} \qquad \vec{v}_{g\,2/1} = \vec{0} \qquad |T_2| \leq f_s N_2$$

où $f_s$ est le coefficient de frottement statique de l'interaction $\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2$. Le coefficient de frottement statique peut encore se définir par l'angle maximal $\varphi_s$ que pourra faire le vecteur $\vec{R}_2$ avec sa composante normale $\vec{N}_2$, voir le schéma de la figure 3. La force $\vec{R}_2$ est contenue dans le cône d'angle $\varphi_s$ et de sommet $I_2$. La situation de non glissement est incompatible avec l'absence de frottements puisque ce sont justement les frottements qui sont responsables du non glissement. La composante tangentielle $\vec{T}_2$ dont on ne peut évaluer qu'un majorant est toujours non nulle à l'exception des situations exceptionnelles comme celles du contact d'un objet présentant une surface plane posé sur un support parfaitement horizontal. Dans ce dernier cas où l'objet est immobile par rapport au support pour respecter la condition de non glissement, la composante tangentielle est exceptionnellement nulle.

Comme nous venons de le voir, la connaissance de la force tangentielle $\vec{T}_2$ n'est que partielle dans le cas du non glissement. Une autre difficulté concerne la direction et le sens de $\vec{T}_2$. Elles ne pourront être déterminées à coup sûr qu'après avoir étudié le problème mécanique complet. On peut toutefois, dans les cas les plus courants, prévoir assez correctement la direction et le sens de la force tangentielle dans le cas du non glissement. Prenons l'exemple simple d'un objet de masse $m$ immobile posé sur un plan incliné. On comprend aisément que le non glissement, c'est-à-dire ici l'immobilité par rapport au support, résulte du fait que la force de contact réussit à contrebalancer le poids. Voir la figure 4.

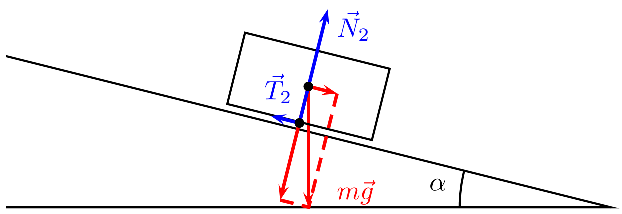


Figure 4 – Non glissement sur un plan incliné

La composante tangentielle $\vec{T}_2$ est donc orientée selon la ligne de plus grande pente et elle est dirigée vers le haut. Sa norme est donc $T_2 = mg\sin\alpha$. La composante normale est $N_2 = mg\cos\alpha$. Si $f_s$ est le coefficient de frottement statique, on a donc $mg\sin\alpha \leq f_s mg\cos\alpha$ ce qui revient à écrire que $\tan\alpha \leq f_s$. Tant que cette condition sera respectée, les frottements seront suffisants pour empêcher l'objet de glisser le long du plan incliné. Au-delà de l'angle limite $\alpha_s = \arctan f_s$, le glissement va se produire. On aura dès cet instant $T_2 = f_d mg\cos\alpha$ où $f_d$ est le coefficient de frottement dynamique.

Dans des situations de non glissement moins évidentes que celle-ci, il sera sans doute plus difficile de trouver le sens de la force tangentielle. Le sens physique peut nous le permettre en déterminant le sens de la vitesse de glissement qui devrait se produire si l'on se plaçait à la limite du glissement. Nous rencontrerons ce type de réflexion lorsque nous étudierons des mouvements d'objets qui roulent sans glisser. Par rapport à une situation de glissement, la connaissance de la composante normale $\vec{N}_2$ de permettra d'accéder à la connaissance de la force tangentielle $\vec{T}_2$ mais dans l'étude du problème de mécanique, on disposera de l'équation issue de la condition de roulement sans glissement qui fixera une relation entre des paramètres de repérage du mouvement des solides.

### 3.3 Coefficients de frottements

Comme nous venons de le voir, les loi de COULOMB du frottement de glissement font apparaître deux coefficients de frottements. Le coefficient de frottement statique $f_s$ est, en général, un peu plus grand que le coefficient de frottement dynamique $f_d$. Toutefois, ils sont très voisins au point que $\frac{f_s - f_d}{f_s} \ll 1$. Si bien que très souvent, on les confond pour simplifier les études mécaniques et on ne parle plus que du coefficient de frottement généralement noté $f = f_d = f_s$. Le tableau qui suit donne des exemples de coefficients de frottement.

| Nature de l'interaction | Coef. frott. statique $f_s$ | Coef. frott. dynamique $f_d$ |
|---|---|---|
| acier sur acier graissé | 0,10 | 0,05 |
| acier sur acier (sec) | 0,60 | 0,40 |
| bois sur bois | 0,50 | 0,40 |
| courroie sur poulie acier | 0,35 | 0,30 |
| garniture de frein sur disque de frein | 0,40 | 0,35 |
| pneu sur route | 0,70 | 0,60 |
| pneu de Formule 1 à température sur piste | 1,50 | 1,40 |

On remarquera que le coefficient de frottement est en général inférieur à 1 mais que dans certains cas, il va dépasser cette valeur. Avec un coefficient $f = 1,50$, on comprend mieux pourquoi une Formule 1 est capable de prendre des virages relativement fermés à des vitesses très élevées sans glisser !

## 4 Puissance des forces de contact

### 4.1 Système étudié $\mathcal{S}_2$

Dans ce premier paragraphe, on ne considérera que le problème mécanique du solide $\mathcal{S}_2$. La force de contact exercée par $\mathcal{S}_1$ est une force extérieure. On rencontre souvent ce cas lorsque le solide $\mathcal{S}_1$ est un support immobile du référentiel $\mathcal{R}$ pour lequel $\vec{v}_{I_1/\mathcal{R}} = \vec{0}$. Dans ce cas, la puissance des forces de contact est celle de la force $\vec{R}_2$ qui s'applique au point $I_2$. Évaluée dans $\mathcal{R}$, cette puissance est donnée par :

$$P_{\vec{R}_2/\mathcal{R}} = (\vec{N}_2 + \vec{T}_2) \cdot \vec{v}_{I_2/\mathcal{R}}$$

Puisque nous étudions un cas particulier pour lequel $\vec{v}_{I_1/\mathcal{R}} = \vec{0}$, la vitesse de glissement de $\mathcal{S}_2$ par rapport à $\mathcal{S}_1$ est donc $\vec{v}_{g\,2/1} = \vec{v}_{I_2/\mathcal{R}}$. La composante normale $\vec{N}_2$ est par conséquent perpendiculaire à $\vec{v}_{I_2/\mathcal{R}}$. La puissance de la force de contact se résume donc à $P_{\vec{R}_2/\mathcal{R}} = \vec{T}_2 \cdot \vec{v}_{I_2/\mathcal{R}}$. Cette puissance sera nulle dans deux cas particuliers. Tout d'abord si $\vec{v}_{I_2/\mathcal{R}} = \vec{0}$, il n'y a pas de glissement. Il arrive que ce cas soit finalement peu intéressant car il peut correspondre à l'immobilité de $\mathcal{S}_2$ par rapport à $\mathcal{S}_1$ mais la plupart du temps cette situation sera celle rencontrée dans le cadre du roulement sans glissement d'une roue par exemple. Le second cas correspond à $\vec{T}_2 = \vec{0}$ : il n'y a pas de frottement. L'étude du mouvement de $\mathcal{S}_2$ par rapport au support $\mathcal{S}_1$ fixe s'effectue très souvent, dans ces conditions, en utilisant la conservation de l'énergie mécanique.

### 4.2 Système étudié $\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2$

On considère le système constitué par les deux solides. Dans ce cas, l'interacion de contact est une interaction intérieure. Cette interaction obéit au principe des actions réciproques. Le solide $\mathcal{S}_1$ subit de la part du solide $\mathcal{S}_2$ une force $\vec{R}_1 = -\vec{R}_2$ appliquée au point $I_1$, voir le schéma de la figure 5. Ces deux forces sont des forces intérieures au système $\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2$. Par conséquent, elles n'interviennent pas dans la relation de la dynamique ou le théorème du moment cinétique mais il ne faut oublier de les prendre en compte dans les théorèmes énergétiques comme le théorème de l'énergie cinétique. Il est donc très important de savoir évaluer la puissance de ces forces intérieures de contact.

On a pour le solide $\mathcal{S}_1$, une puissance $P_{\vec{R}_1/\mathcal{R}} = (\vec{N}_1 + \vec{T}_1) \cdot \vec{v}_{I_1/\mathcal{R}}$ et pour le solide $\mathcal{S}_2$ la puissance $P_{\vec{R}_2/\mathcal{R}} = (\vec{N}_2 + \vec{T}_2) \cdot \vec{v}_{I_2/\mathcal{R}}$. Par le principe des actions réciproques, on a $\vec{R}_1 = -\vec{R}_2$. En privilégiant la force $\vec{R}_2$, on

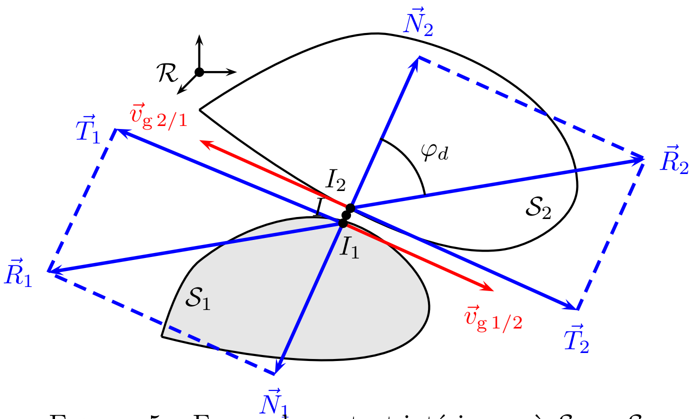


FIGURE 5 – Forces de contact intérieures à $\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2$

peut donc écrire que $P_{\text{int}} = (\vec{N}_2 + \vec{T}_2)\cdot(\vec{v}_{I_2/\mathcal{R}} - \vec{v}_{I_1/\mathcal{R}})$. On voit donc apparaître la vitesse de glissement $\vec{v}_{g\,2/1} = \vec{v}_{I_2/\mathcal{R}} - \vec{v}_{I_1/\mathcal{R}}$. De plus, la force $\vec{N}_2$ est, selon les lois de COULOMB, perpendiculaire à la vitesse de glissement. Par conséquent, la puissance des forces de contact est :

$$P_{\text{int}} = \vec{T}_2 \cdot \vec{v}_{g\,2/1} = -|T_2|\,|v_{g\,2/1}|$$

Si l'on avait privilégié la force $\vec{R}_1$ dans le calcul, on aurait obtenu exactement le même résultat mais exprimé différemment $P_{\text{int}} = \vec{T}_1 \cdot \vec{v}_{g\,1/2}$ puisque les deux vecteurs figurant dans cette expression sont les opposés des deux de l'expression établie avant. La puissance des forces intérieures de contact est indépendante du référentiel d'évaluation puisque la vitesse de glissement en est elle-même indépendante. De plus, les vecteurs $\vec{T}_2$ et $\vec{v}_{g\,2/1}$ sont colinéaires et de sens contraire, cela permet d'écrire l'équation avec les normes des vecteurs. La puissance des forces intérieures de contact est nulle dans deux cas importants :

— il n'y a pas de frottement $f = 0$ et $T_2 = 0$,
— il n'y a pas de glissement $v_{g\,2/1} = 0$ (Cas fréquent : roulement sans glissement).

# 5 Point d'application d'une force de contact non ponctuelle

## 5.1 Rappel

En général, nous n'aurons pas à nous préoccuper du point d'application d'une force de contact non ponctuelle car la possibilité d'une rotation du système ne sera pas envisagée. Les forces de contact sont des forces qui s'adaptent en permanence à l'évolution des conditions de l'interaction entre deux objets que l'on ait ou non un mouvement relatif de l'un par rapport à l'autre. Cela rend difficile les choses. Nous allons toutefois voir que l'on peut préciser le lieu d'application d'une résultante de force de contact a posteriori.

On considère une force répartie sur une surface comme peut l'être une force de contact. Soit $\mathrm{d}\vec{f}$ la force élémentaire s'exerçant sur la surface $\mathrm{d}S$. Voir le schéma de la figure 6.

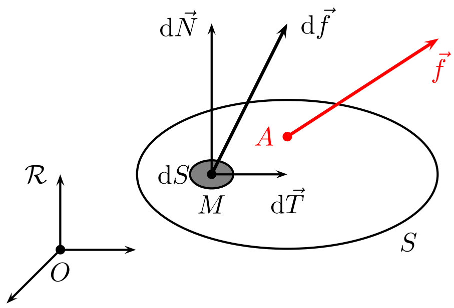


FIGURE 6 – Force de contact répartie (ici sur une surface)

La définition du point d'application d'une force répartie est liée à la notion de moment des forces. Soit $\vec{f}$ la force résultante de l'ensemble des forces $\mathrm{d}\vec{f}$ : $\vec{f} = \iint_S \mathrm{d}\vec{f} = \iint_S \frac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}S}\mathrm{d}S$. Le moment au point d'application $A$ de cette force doit être égal la somme des moments des forces élémentaires calculés en ce même point $A$. Sur le plan de l'écriture, cela donne :

$$\overrightarrow{OA} \wedge \vec{f} = \iint_S \overrightarrow{OM} \wedge \mathrm{d}\vec{f}$$

On peut aussi traduire l'égalité précédente par la phrase : le moment de la résultante est égal à la résultante des moments. On peut aussi caractériser le point d'application de la force répartie en se dispensant d'utiliser une origine comme le point $O$. Pour comprendre la forme intrinsèque de la relation obtenue, il s'agit de prendre $O = A$ et on obtient un point d'application $A$ qui doit vérifier :

$$\iint_S \overrightarrow{AM} \wedge \mathrm{d}\vec{f} = \vec{0}$$

Ce que nous venons de voir pour une une force répartie sur une surface se généralise bien évidemment à toute autre distribution qu'elle soit linéique ou volumique.

## 5.2 Non rotation du système

Nous avons étudier la situation d'une caisse parallélépipédique bien lourde sur un plan incliné sans nous préoccuper du point d'application de la force de contact. Nous allons le faire maintenant en exploitant les lois de la Mécanique. Nous supposons pour commencer que l'objet est à l'équilibre sur le plan incliné, voir la figure 7. Il faut traduire le fait que la somme des forces est nulle (équilibre de non translation) et que la somme des moments des forces l'est tout autant (équilibre de non rotation). Nous rajouterons une force de poussée supplémentaire, tout en assurant du fait que la caisse ne bouge toujours pas.

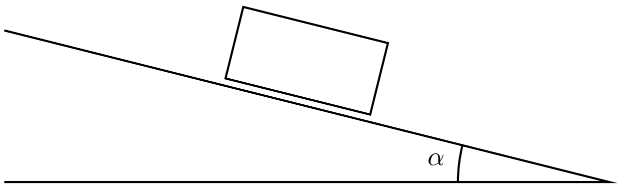


FIGURE 7 – Point d'application de la force de contact

# 6 Une application particulière des frottements pour attacher...

## 6.1 Présentation de la situation

Attacher son cheval devant un saloon grâce à la corde en cuir fixée au licou (ou licol) est un summum de l'existence pour un cow-boy. Ce dernier, qui a fait beaucoup de physique dans sa courte vie, a retenu que quelques tours de corde autour de la barrière en bois suffisaient pour qu'il ait toutes les chances [1] de retrouver sa monture en sortant. Pour le marin (breton de préférence), la problématique est la même lorsqu'il veut amarrer son bateau au port.

Nous allons étudier l'évolution de la tension qui règne dans une corde enroulée autour d'un cylindre. L'objectif est d'estimer la tension que peut exercer le bateau sur la corde à la limite du glissement, on observera la photographie de la figure 8.

FIGURE 8 – Amarrage d'un bateau

Pour organiser le raisonnement, on travaillera à partir de la figure 9. On isole un morceau de corde défini par l'angle $\mathrm{d}\theta$. On effectue un bilan des forces sur celui-ci où on trouvera une tension à gauche, une tension à droite, la composante normale de contact entre la corde et le cylindre et la composante tangentielle. Le coefficient de frottement sera $f = 0,5$.

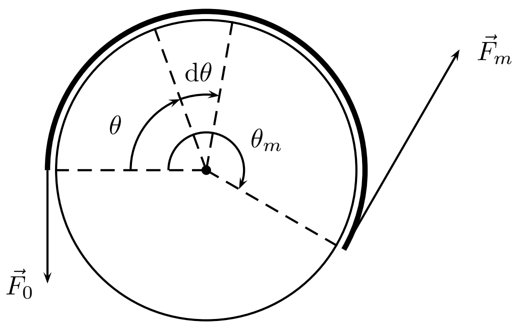


FIGURE 9 – Modélisation de l'enroulement d'une corde sur un cylindre

1. Cela depend encore de ses consommations au comptoir du saloon...

## 6.2 Modélisation

On néglige le poids. On isole un morceau de corde compris entre $\theta$ et $\theta + \mathrm{d}\theta$. On effectue l'étude dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On effectue le bilan des forces :

— Tension exercée par partie gauche de la corde sur le système : $-F_\theta\,\vec{e}_\theta$
— Tension exercée par la partie droite de la corde sur le système : $+F_{\theta+\mathrm{d}\theta}\,\vec{e}_{\theta+\mathrm{d}\theta}$
— Composante normale de l'action de contact : $\mathrm{d}N\vec{e}_r$
— Composante tangentielle de l'action de contact $-\mathrm{d}T\vec{e}_\theta$

Il est plutôt attendu de voir la tension $\vec{F}$ de la corde augmenter avec l'angle $\theta$ - ce que nous montrerons -. Dans ces conditions, si le glissement se produisait, il serait dans le sens de l'orientation de l'angle $\theta$. On peut aussi se dire que le rôle de l'enroulement est de faire diminuer la force de tension exercée par le bateau au sein de la corde. Quoi qu'il en soit, le glissement tendrait à se produire vers le bateau. Il est donc logique que la composante tangentielle de contact soit orientée dans le sens contraire à savoir en $-\vec{e}_\theta$ d'où l'écriture $-\mathrm{d}T\vec{e}_\theta$.

À la limite du glissement, on évoquera l'égalité issue de la loi de Coulomb : $\mathrm{d}T = f\mathrm{d}N$.

L'équilibre du morceau de corde impose :

$$-F_\theta\,\vec{e}_\theta + F_{\theta+\mathrm{d}\theta}\,\vec{e}_{\theta+\mathrm{d}\theta} + \mathrm{d}N\vec{e}_r - \mathrm{d}T\vec{e}_\theta = \vec{0}$$

On peut diviser l'ensemble de l'équation par $\mathrm{d}\theta$ pour obtenir :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(F\,\vec{e}_\theta\right) + \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\theta}\,\vec{e}_r - \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\theta}\,\vec{e}_\theta = \vec{0}$$