

# Devoir surveillé de Sciences Physiques n°2 du 10-10-2024

— Durée : 4 heures. Solutions —

## Calculatrice interdite

### Problème n°1 – Au temps des Mayas

Mines MP 2020

#### A. Sonogramme

1. Le fondamental est le premier pic de fréquence  $f_1$ , le second pic est la première harmonique à la fréquence  $f_2 = 2f_1 = 3 \text{ kHz}$ . La fréquence du fondamental est donc  $f_1 = 1,5 \text{ kHz}$ . Les amplitudes sont proposées sur une échelle logarithmique en décibels. La définition de l'amplitude passe par une référence on a  $a_{\text{dB}} = 20 \log \frac{a}{a_{\text{ref}}}$ . Comme sur le graphique, on sait que le pic de la fondamentale possède une amplitude de 100 mV qui donne 0 dB, on en déduit que  $a_{\text{ref}} = 100 \text{ mV}$ . Pour la seconde harmonique, on a donc  $20 \log \frac{a_2}{a_{\text{ref}}} = -50 \text{ dB}$ . D'où  $a_2 = a_{\text{ref}} 10^{-2,5} = \frac{a_1}{316}$ . On trouve :  $a_2 = 0,3 \text{ mV}$ .

2. La condition de NYQUIST-SHANNON dit que la fréquence d'échantillonnage doit être au moins 2 fois la fréquence la plus grande du signal que l'on échantillonne. Comme l'énoncé nous invite à ne considérer que le spectre jusqu'à la seconde harmonique de fréquence  $f_2 = 3 \text{ kHz}$ , il faut donc  $f_e \geq 6 \text{ kHz}$ . Toutefois, d'après le graphique fourni, le spectre possède des fréquences allant jusqu'à 8 kHz, pour l'obtenir il faudrait échantillonner à 16 kHz. Pour la durée d'acquisition, on doit savoir - même si l'énoncé le rappelle - que la résolution en fréquence est inverse de cette durée. On a donc :  $T_a = \frac{1}{\delta f} = 10 \text{ ms}$ .

3. La durée  $\tau$  n'a rien à avoir avec la résolution puisque l'on fait un échantillonnage glissant pour suivre le spectre du son au cours du temps. Chaque spectre est calculé pour une durée  $T_a$  du signal, la résolution est toujours  $\delta f = \frac{1}{T_a}$  donc de 100 Hz. Il y a  $\frac{\tau}{T_a}$  spectres en abscisses. En ordonnée, on a une fréquence maximale  $f_M$  pour une résolution  $\delta f$  cela représente  $\frac{f_M}{\delta f}$  valeurs. À chaque valeur de fréquence et de date correspond un pixel. Le nombre de pixels total est donc :  $\frac{f_M}{\delta f} \frac{\tau}{T_a} = f_M \tau = 1750$ . Attention, ce nombre de pixels correspond à celui qui est présent dans le sonogramme proposé mais il ne faut pas oublier - même si cela n'était pas demandé - que pour obtenir ce sonogramme on a le double de ce nombre de pixels par effet de repliement du spectre mais que l'on filtre à la moitié de la fréquence d'échantillonnage pour ne montrer que ce qui a du sens physique.

4. Il ne faut pas que la fréquence change trop vite pendant la durée de calcul  $T_a$ . Il faut donc que  $\tau_d \gg T_a$ . Le sonogramme demandé est représenté à la figure 1. La fonction du temps est affine, on ne la représente que jusqu'à  $t = \tau_d/2$  et donc jusqu'à une division par 2 de la fréquence. L'harmonique de rang 2 suit forcément une loi affine dans ce modèle. Elle est aussi représentée sur le graphique.

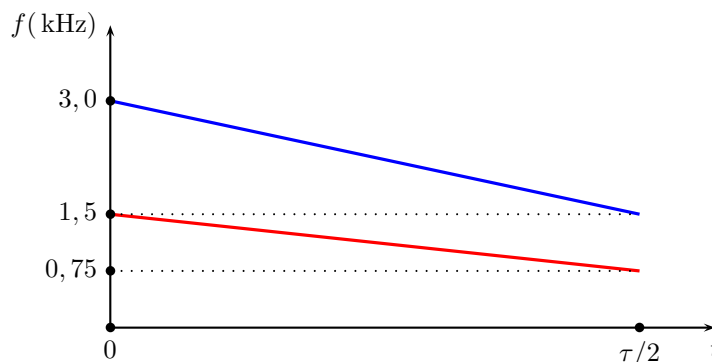


FIGURE 1 – Sonogramme modélisé

5. Le chant du quetzal débute à  $t_d = 60 \text{ ms}$  et se termine à  $t_f = 210 \text{ ms}$ . Il dure donc  $\tau_q = 150 \text{ ms}$ . La lecture des fréquences du spectre n'est pas très aisée sur le sonogramme fourni. Une chose est sûre : il faut choisir la fondamentale et ensuite multiplier par les entiers successifs pour obtenir les harmoniques. On peut proposer  $f_{q1} = 600 \text{ Hz}$ , puis  $f_{q2} = 1200 \text{ Hz}$ ,  $f_{q3} = 1800 \text{ Hz}$  et  $f_{q4} = 2400 \text{ Hz}$ .

## B. Diffraction du son par une marche de l'escalier

6. On considère une propagation idéale sans atténuation, sans dispersion. La seule chose à prendre en compte est le retard lié au temps de propagation. Pour aller de  $S$  à  $S_n$ , il y a une distance  $d_n$  parcourue à la vitesse  $c_s$ . La durée de propagation est donc  $\frac{d_n}{c_s}$ . L'onde en  $S_n$  à la date  $t$  correspond à l'onde qui est partie de  $S$  à la date  $t - \frac{d_n}{c_s}$ . On a donc :  $\Psi(S_n, t) = \Psi(S, t - \frac{d_n}{c_s}) = s(t - \frac{d_n}{c_s})$ . Après diffraction au niveau de  $S_n$ , l'onde revient en  $S$ , le décalage temporel par rapport à l'émission est donc le double du précédent. En prenant en compte le facteur  $\kappa$  lié à la diffraction, on a donc :  $\Psi'(S, t) = \kappa s(t - \frac{2d_n}{c_s})$ .

7. On a  $\phi'_n(t) = \omega(t - \frac{2d_n}{c_s})$ .

## C. Superposition constructive en $S$

8. On a  $\Delta\phi'_n = \frac{2\omega}{c_s}(d_{n+1} - d_n)$ .

9. Pour obtenir des fréquences audibles, il faut des interférences constructives. Cela signifie que le déphasage entre les deux ondes consécutives<sup>1</sup> envisagées est un multiple entier de  $2\pi$ . On a donc, si  $m \in \mathbb{N}$ , la relation  $\frac{2\omega}{c_s}(d_{n+1} - d_n) = 2\pi m$ . Avec  $\omega = 2\pi\nu_m$ , on en déduit les fréquences audibles :  $\nu_m = m \frac{c_s}{2(d_{n+1} - d_n)}$ .

10. En étant attentif au paramétrage de l'escalier fourni par l'énoncé, on peut constater que la distance  $d_n$  est l'hypoténuse d'un triangle rectangle de grand côté  $a + nb$  et de petit côté  $nb$ . On a donc  $d_n = \sqrt{(a + nb)^2 + n^2 b^2}$ . On peut donc calculer  $d_{n+1}^2 - d_n^2 = 2ab(1 + (2n + 1)\frac{b}{a})$ . En utilisant l'identité remarquable très fortement suggérée par l'énoncé, on peut écrire que  $d_{n+1}^2 - d_n^2 = (d_{n+1} - d_n)(d_{n+1} + d_n) = (d_{n+1} - d_n)2d_n$ . Cela nous permet d'exprimer la différence de marche  $d_{n+1} - d_n = \frac{d_{n+1}^2 - d_n^2}{2d_n}$ . On arrive à  $d_{n+1} - d_n = \frac{ab}{d_n}(1 + (2n + 1)\frac{b}{a})$ . La fréquence fondamentale ( $m = 1$ ) est donc  $\nu_1 = \frac{c_s d_n}{2ab} \frac{1}{1 + (2n + 1)\frac{b}{a}}$ . On peut identifier la fonction recherchée :

$$g(n) = \frac{1}{1 + (2n + 1)\frac{b}{a}}.$$

11. L'énoncé nous invite à éviter les calculs fastidieux puisque pour cette épreuve la calculatrice était interdite. On se contentera de dire que la plus grande valeur en abscisse sur le graphique correspond à  $d_N = 50 \text{ m}$ . Le début de l'écho se produit lorsque la réflexion s'effectue sur la première marche. On a donc  $t_1 = \frac{2d_0}{c_s} = 120 \text{ ms}$ . Pour la fin de l'écho, on a  $t_N = \frac{2d_N}{c_s} = 290 \text{ ms}$ . La durée de l'écho est donc de  $170 \text{ ms}$ .

12. On commence par repérer sur le graphique la valeur de  $g_n d_n$  dans chacun des deux cas. On trouve  $g_0 d_0 = 19,5 \text{ m}$  et  $d_N g_N = 14,7 \text{ m}$ . On trouve  $\nu_1(t_1) = 630 \text{ Hz}$  et  $\nu_1(t_N) = 480 \text{ Hz}$ .

13. L'allure du sonogramme de l'écho est réalisé à la figure 2. On peut y faire figurer les dates  $t_1$  et  $t_N$  et les ordonnées du fondamental. Pour les harmoniques, il suffit de multiplier les ordonnées par 2, 3 puis 4. L'allure du sonogramme pour une fréquence est de la même forme que la fonction  $g_n d_n$ , en gros de forme hyperbolique.

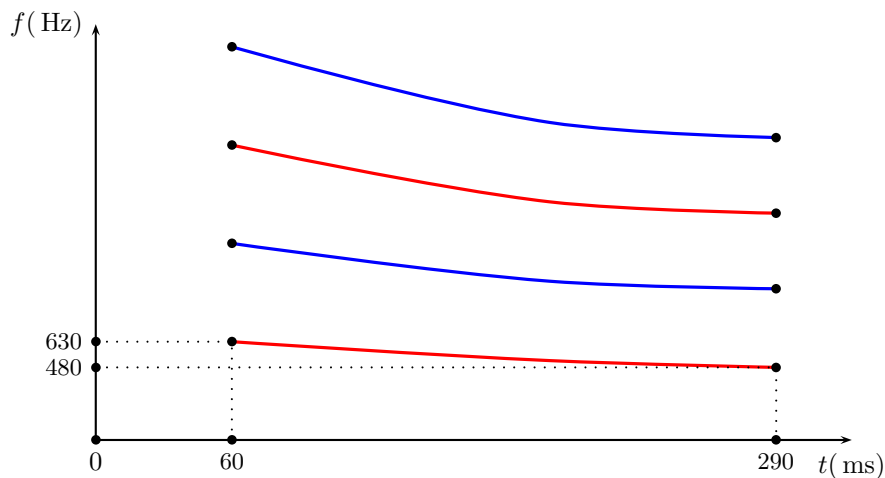


FIGURE 2 – Sonogramme plus réaliste

1. Le raisonnement suivi par l'énoncé peut être discuté car la situation n'est pas analogue à celle d'un réseau périodique de diffraction comme nous allons le comprendre ensuite en montrant que  $d_{n+1} - d_n$  dépend de  $n$ . Il n'y a pas de stabilité du déphasage avec  $n$ .

14. Il est difficile de conclure sur l'écart fréquentiel entre le sonogramme enregistré et le sonogramme calculé tant les harmoniques sont épaisses pour celui qui est issu de l'analyse du chant de l'oiseau. Un quetzal adulte possède un corps plus grand qu'un quetzal jeune. On supposera que cela fonctionne comme pour les instruments de musique, c'est-à-dire que la gamme de fréquence est d'autant plus aiguë que la taille est petite. On peut comparer la gamme des fréquences émises par un violon à celle émise par une contrebasse si l'on n'est pas convaincu. Avec un quetzal adulte, on aura donc une fondamentale de fréquence plus petite pour un son plus grave. En multipliant par les entiers 2, 3 ou encore 4, les écarts seront **moins grands** qu'avec une fréquence plus élevée au départ.

## Problème n° 2 – Modulation acousto-optique

X PSI 2021

### A. Génération d'ondes acoustiques

#### Étude fréquentielle de l'émetteur ultrasonore

1. C'est un filtre passe-bande de fréquence propre  $f_p = 39,8 \text{ kHz}$ . La bande passante à  $-3 \text{ dB}$  correspond aux fréquences telles que  $U = \frac{U_{\max}}{U_0\sqrt{2}} = \frac{0,35}{1,4} \simeq 0,25$ . On peut lire  $f_{c1} = 39,1 \text{ kHz}$  et  $f_{c2} = 40,6 \text{ kHz}$ . La bande passante est donc  $\Delta f = f_{c2} - f_{c1} = 1,5 \text{ kHz}$ . Le facteur de qualité est  $Q = \frac{f_p}{\Delta f} \simeq 27$ . C'est un filtre passe-bande très sélectif car  $Q \gg 1$ .

2. L'oreille humaine est sensible aux fréquences  $[20 \text{ Hz}; 20 \text{ kHz}]$ . Comme la fréquence propre du composant piézoélectrique est de l'ordre de  $40 \text{ kHz}$ , on peut bien parler d'émetteur ultrasonore.

#### Étude de la propagation des ondes acoustiques

3.  $\vec{v}$ ,  $\mu$  et  $p$  sont des grandeurs petites telles que l'on peut faire des approximations. Elles constituent l'ordre 1. Dans ces conditions,  $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$  est d'ordre 2, on le négligera devant  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ . La masse volumique est  $\rho = \rho_0 + \mu$ . De la même façon  $\mu\vec{v}$  sera d'ordre 2. Finalement pour rester à l'ordre le plus bas, on peut dire que le terme  $\rho(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}) \simeq \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ . Comme  $P = P_0 + p$ , on a  $\overrightarrow{\text{grad}} P = \overrightarrow{\text{grad}} p$ . L'équation d'EULER devient  $\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} p$ . De la même façon,  $\text{div } \rho\vec{v} \simeq \rho_0 \text{div } \vec{v}$  pour ne pas garder de terme d'ordre 2. Comme  $\rho = \rho_0 + \mu$ , on a  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \mu}{\partial t}$ . Cela conduit à une équation de conservation de la masse  $\rho_0 \text{div } \vec{v} + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$ . Enfin, la dérivée  $\frac{\partial \rho}{\partial P}$  sera assimilée à un taux de variation  $\frac{\partial \rho}{\partial P} = \frac{\rho - \rho_0}{P - P_0} = \frac{\mu}{p}$ , pour ne pas créer des termes d'ordre supérieur, on assimile  $\rho$  à  $\rho_0$ . On peut donc écrire la relation  $\chi_S \rho_0 = \frac{\mu}{p}$ .

4. On calcule  $\text{div } \overrightarrow{\text{grad}} p = \Delta p = -\rho_0 \text{div } \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}(\text{div } \vec{v})$ . On utilise l'expression approchée de la conservation de la masse  $\rho_0 \text{div } \vec{v} = -\frac{\partial \mu}{\partial t}$ . Cela permet de conclure par  $\Delta p = \frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2}$ . Grâce à  $\mu = \rho_0 \chi_S p$ , on obtient l'équation de D'ALEMBERT recherchée  $\Delta p(\vec{r}, t) - \frac{1}{c_a^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$  avec  $c_a = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}}$ .

5. On observe sur l'oscillogramme un décalage de 2,5 carreaux entre les deux signaux. Compte tenu de l'échelle, cela représente un écart temporel  $\Delta t = 0,500 \text{ ms}$ . On a donc  $c_a = \frac{0,17}{0,5 \times 10^{-3}}$  ce qui donne la valeur attendue  $c_a = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , dans les conditions habituelles de température et de pression. La valeur théorique est  $c_a = \frac{1}{\sqrt{1,2 \times 7 \times 10^{-6}}} \simeq 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ce qui confirme la validité du modèle de l'approximation acoustique retenu.

#### Propagation d'ondes acoustiques dans un cristal

6. On va appliquer la relation de la Dynamique à l'atome placé à l'équilibre à la position  $na$  dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. La longueur à vide des ressorts est  $a$  puisque le cristal est à l'équilibre lorsque tous les atomes sont à une position multiple de  $a$ . Les seules forces à prendre en compte sont les forces exercées par les deux ressorts. À gauche, on a  $\vec{F}_g = -K(a + u_n - u_{n-1} - a)\vec{e}_x = -K(u_n - u_{n-1})\vec{e}_x$ . La force exercée par le ressort à droite est  $\vec{F}_d = K(a + u_{n+1} - u_n - a)\vec{e}_x = -K(u_{n+1} - u_n)\vec{e}_x$ . La relation de la Dynamique projetée sur l'axe  $Ox$  est  $m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = -K(2u_n - (u_{n+1} + u_{n-1}))$ .

7. On constate les relations  $u_{n+1} = \exp iqa u_n$  et  $u_{n-1} = u_n \exp -iqa$ . Cela permet d'injecter dans l'équation différentielle précédente pour aboutir à  $-\omega^2 u_n = -K(2 - \exp iqa + \exp -iqa) = -2K(1 - \cos qa)$ . En utilisant

les règles de trigonométrie classiques, on peut encore écrire que  $m\omega^2 = 4K \sin^2 \frac{qa}{2}$ . Cela donne bien la relation  $\omega(q) = A \left| \sin \left( \frac{qa}{2} \right) \right|$  avec  $A = 2\sqrt{\frac{K}{m}}$ .

8. La condition de raccord en bout de chaîne est  $u_{N+1}(t) = u_1(t)$ . Elle impose  $\exp iNqa = 1$ . Cette équation a pour solution  $Nqa = p2\pi$  avec  $p \in \mathbb{Z}$ . On peut donc en déduire que  $q = pq_0$  avec  $q_0 = \frac{2\pi}{Na}$ .

9. On doit étudier la périodicité de la  $\omega(q) = 2\sqrt{\frac{K}{m}} \left| \sin \frac{qa}{2} \right|$ . Nous avons  $\sin \frac{qa}{2} = \sin 2\pi \frac{qa}{4\pi}$ . La période de cette fonction de  $q$  est donc  $\frac{4\pi}{a}$ . Comme on prend la valeur absolue, la période est divisée par deux puisque la fonction est impaire. La période de  $\omega(q)$  est donc celle de  $\left| \sin \frac{qa}{2} \right|$  à savoir  $\frac{2\pi}{a}$ . On peut donc légitimement étudier la relation de dispersion sur l'intervalle  $[-\frac{\pi}{a}; \frac{\pi}{a}]$  qu'on pourrait même réduire à sa partie des abscisses positives puisque la fonction va être paire.

10. La première zone de BRILLOUIN est représentée à la figure 3. On voit aussi sur cette figure la droite obtenue dans le cadre de la linéarisation de  $\omega(q)$  valable pour les petits vecteurs d'onde.

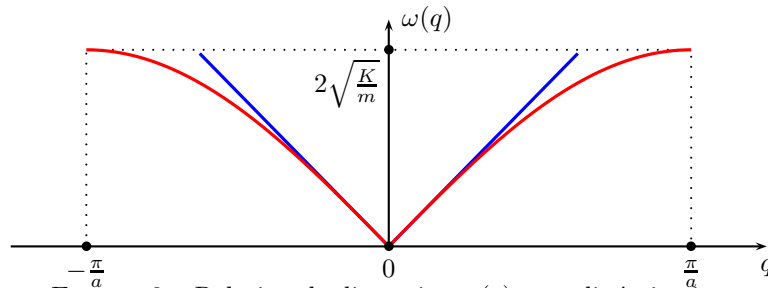


FIGURE 3 – Relation de dispersion  $\omega(q)$  et sa linéarisation

11. si  $|qa| \ll \pi$ , alors on peut écrire  $\sin \frac{qa}{2} \simeq \frac{qa}{2}$ . La relation de dispersion devient  $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} a q$ .  $q$  est l'analogue du vecteur d'onde pour une étude dans un milieu continu. Cette relation est du type  $\omega = kc$ . Le facteur de proportionnalité correspond à la célérité de propagation dans le milieu discontinu :  $c = \sqrt{\frac{K}{m}} a$ . On peut voir le tracé de la relation linéaire sur le graphique de la figure 3.

12. L'analogue évoqué pour le phonon est le **photon** qui va, dans le vide, obéir à la relation  $k = \frac{\omega}{c}$  avec  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ .

## B. Fonctionnement d'un transducteur piézoélectrique

13. La masse effective de l'armature est  $m$ . Cette armature subit une force de rappel qui est l'opposée de la force  $F$  indiquée par l'énoncé. On a donc  $\vec{F}_{rap} = -(\gamma Q + k\xi)\vec{e}_x$ . Dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, on a  $m \frac{d^2\xi}{dt^2} \vec{e}_x = -(\gamma Q + k\xi)\vec{e}_x - \alpha \frac{d\xi}{dt} \vec{e}_x$ . On obtient bien l'équation différentielle proposée :

$$m \frac{d^2\xi}{dt^2} + \alpha \frac{d\xi}{dt} + k\xi + \gamma Q = 0.$$

14. On a  $Q = CU - \gamma C\xi$  d'où  $\gamma Q = \gamma CU - \gamma^2 C\xi$  que l'on peut remplacer dans l'équation différentielle qui devient  $m \frac{d^2\xi}{dt^2} + \alpha \frac{d\xi}{dt} + (k - \gamma^2 C)\xi = -\gamma CU$ . On passe en complexes pour obtenir la fonction de transfert électromécanique :  $((k - \gamma^2 C) - m\omega^2 + i\alpha\omega)\underline{\xi}_0 = -\gamma CU_0$ . On a donc  $\underline{H}_{elm} = \frac{-\gamma C}{(k - \gamma^2 C) - m\omega^2 + i\alpha\omega}$ . En factorisant  $(k - \gamma^2 C)$ , on arrive à l'expression  $\underline{H}_{elm} = \frac{-\frac{\gamma C}{k - \gamma^2 C}}{1 - \frac{m\omega^2}{k - \gamma^2 C} + i \frac{\alpha\omega}{k - \gamma^2 C}}$ . Cela correspond bien à la forme proposée par

l'énoncé et cela permet d'identifier les facteurs caractéristiques de cette fonction de transfert :  $H_0 = \frac{-\gamma C}{k - \gamma^2 C}$ ,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k - \gamma^2 C}{m}} \text{ et } Q_{elm} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{m(k - \gamma^2 C)}.$$

15. On a  $|\underline{H}_{elm}(\omega)| = \frac{|H_0|}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + \frac{\omega^2}{Q_{elm}^2 \omega_0^2}}}$ . Comme le numérateur du module de dépend pas de  $\omega$ , on recherche un minimum du dénominateur en proposant la variable  $X = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ . On a donc à étudier la fonction  $f(X) = (1 - X)^2 + \frac{X}{Q_{elm}^2}$ . Par conséquent,  $\frac{df}{dX} = -2(1 - X) + \frac{1}{Q_{elm}^2} = 0$ . La solution est  $X = 1 - \frac{1}{2Q_{elm}^2}$ . Comme  $X \geq 0$ , il

est indispensable que l'on ait  $Q_{elm} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Si cette condition est vérifiée alors la fonction de transfert présentera un maximum, il y a résonance pour  $\omega_m = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q_{elm}^2}}$ .

16. Si  $Q_{elm} \gg 1$ ,  $\omega_m \simeq \omega_0$ . Pour  $\omega \gg \omega_m$ , on a  $|\underline{H}_{elm}| \rightarrow 0$ . Pour  $\omega \rightarrow 0$ , on aura  $|\underline{H}_{elm}| \rightarrow |H_0|$ . Enfin, à la résonance, on voit que  $|\underline{H}_{elm}| = Q_{elm}|H_0|$ . La courbe représentative du module de la fonction de transfert est fournie à la figure 4. Sur cette figure, le facteur de qualité est de 4 pour plus de lisibilité. Cela n'est pas représentatif de la situation réelle puisque le facteur de qualité est beaucoup plus grand et la résonance beaucoup plus aiguë.

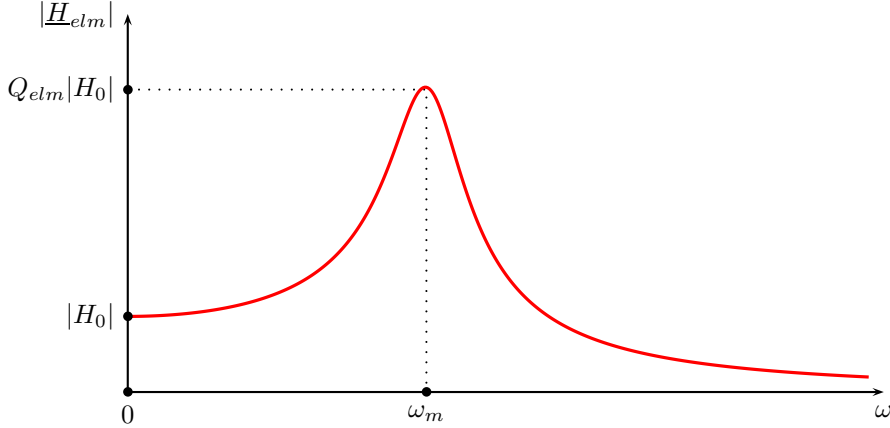


FIGURE 4 – Module de la fonction de transfert électromécanique

17. On a bien une fonction de transfert d'un **filtre passe-bande**, c'est très satisfaisant. On peut faire l'approximation  $\omega_m \simeq \omega_0$  puisque le facteur de qualité est  $Q \simeq 27$ .

#### Modèle électrocinétique d'un transducteur piézoélectrique

18. Les impédances de chaque branche sont en parallèle, on a  $\frac{1}{\underline{Z}_{AB}} = iC_0\omega + \frac{1}{R_m + i(L_m\omega - \frac{1}{C_m\omega})}$ . Nous allons poser  $\frac{1}{\underline{Z}_{AB}} = iC_0\omega \underline{D}$  avec  $\underline{D} = 1 + \frac{1}{iC_0\omega(R_m + i(L_m\omega - \frac{1}{C_m\omega}))}$ . En développant le calcul de  $\underline{D}$ , on arrive à la forme  $\underline{D} = \frac{1 + \frac{C_0}{C_m} - L_m C_0 \omega^2 + iR_m C_0 \omega}{C_0 C_m - L_m C_0 \omega^2 + iR_m C_0 \omega}$ . Dans cette expression, nous allons factoriser par  $iR_m C_0 \omega$ . On obtient la forme  $\underline{D} = \frac{1 + i(\frac{L_m}{R_m}\omega - (\frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_m})\frac{1}{R_m\omega})}{1 + i(\frac{L_m}{R_m}\omega - \frac{1}{R_m C_m \omega})}$ . Cette forme pour ce facteur prouve bien la mise en forme attendue par l'énoncé à savoir  $\underline{Z}_{AB} = \frac{1}{iC_0\omega} \frac{1 + iQ_r(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega})}{1 + iQ_a(\frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega})}$  en posant  $\frac{Q_r}{\omega_r} = \frac{L_m}{R_m}$  et  $Q_r \omega_r = \frac{1}{R_m C_m}$ . Cela permet de déterminer  $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{L_m C_m}}$  et  $Q_r = \frac{1}{R_m} \sqrt{\frac{L_m}{C_m}}$ . On pratique de la même façon pour l'autre membre et on obtient

$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{L_m \frac{C_m C_0}{C_m + C_0}}} \text{ et } Q_a = \frac{1}{R_m} \sqrt{\frac{L_m (C_m + C_0)}{C_m C_0}}.$$

$$|\underline{Z}_{AB}| = \frac{1}{C_0 \omega} \sqrt{\frac{1 + Q_r^2 (\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega})^2}{1 + Q_a^2 (\frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega})^2}}.$$

19. La détermination proposée des minima est assez approximative mais elle est exact si les numérateur et dénominateur évoluent rapidement ce qui est le cas compte tenu des facteurs de qualité qui sont attendus élevés. Ces minima s'obtiennent pour  $\omega = \omega_r$  et  $\omega = \omega_a$  respectivement au numérateur et au dénominateur. Ainsi, pour  $\omega_r$ , on a un minimum de  $|\underline{Z}_{AB}|$  et pour  $\omega_a$ , on a un maximum.

20. L'amplitude de la tension étant fixée par la source, la résonance est obtenue pour une intensité élevée et donc pour une impédance faible.  $\omega_r$  est la pulsation de résonance et  $\omega_a$  celle d'anti-résonance.

#### Lien entre le modèle électromécanique et le circuit équivalent

21. Nous avons la relation  $U = \frac{Q}{C} + \gamma \xi$ . Si l'on passe en complexes, on obtient  $\underline{U} = \frac{1}{iC\omega} \underline{I} + \gamma \underline{\xi}$ . Comme nous avons  $\underline{\xi} = \underline{H}_{elm} \underline{U}$ , on en déduit que  $(1 - \gamma \underline{H}_{elm}) \underline{U} = \frac{1}{iC\omega} \underline{I}$ . L'impédance est donc

$$\underline{Z} = \frac{1}{iC\omega} \frac{1}{1 - \frac{\gamma |H_0|}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + i \frac{\omega}{Q_{elm} \omega_0}}}.$$

C'est la forme recherchée pour comparer à  $\underline{Z}_{AB}$ .

22. Le facteur  $\underline{D} = 1 + \frac{1}{\frac{C_0}{C_m} - L_m C_0 \omega^2 + iR_m C_0 \omega} = 1 + \frac{\gamma |H_0|}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + i \frac{\omega}{Q_{elm} \omega_0}}$ . En factorisant  $\frac{C_0}{C_m}$ , on obtient l'égalité

$\frac{\frac{C_m}{C_0}}{1 - L_m C_m \omega^2 + i R_m C_m \omega} = \frac{\gamma |H_0|}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + i \frac{\omega}{Q_{elm} \omega_0}}$ . On peut en déduire que  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_m C_m}}$ ,  $\frac{C_m}{C_0} = \frac{\gamma C^2}{k - \gamma C^2}$  et enfin la troisième relation  $R_m C_m = \frac{\alpha}{\omega_0 \sqrt{m(k - \gamma^2 C^2)}}$ .

**23.** Le paramètre électrocinétique responsable de la dissipation est  $R_m$ . On retrouve bien dans son expression qu'il dépend de  $\alpha$  qui le facteur de dissipation mécanique puisqu'il intervient dans l'expression de la force de frottement fluide  $-\alpha \frac{d\xi}{dt} \vec{e}_x$ .

## C. Analyseur spectral

### Interaction entre un champ électromagnétique et les phonons

**24.** On a  $k = \frac{\omega}{c}$  pour un photon dans le vide avec  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  comme on l'a déjà vu avant.

**25.** La conservation de l'énergie impose que  $\hbar\omega + \hbar\Omega = \hbar\omega'$  puisque l'on traduit que l'énergie du photon incident et du phonon doit correspondre à l'énergie du photon émergent puisque l'on suppose que toute l'onde acoustique correspondant à ce phonon a été absorbée par le photon incident. On a donc  $\omega + \Omega = \omega'$ .

**26.** La longueur d'onde proposée est  $\lambda = 600 \text{ nm}$ , cela correspond à du rouge un peu orangé. D'après les relations de dispersion, on a  $\omega = kc = \frac{2\pi}{\lambda}c$ ,  $\Omega = \frac{2\pi}{\Lambda}c_s$  et  $\omega' = \frac{2\pi}{\lambda'}c$ . Si on remplace dans la relation de conservation de l'énergie, on obtient la relation suivante entre les longueurs d'ondes  $(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda})c = \frac{1}{\Lambda}c_s$ . En posant  $\lambda' = \lambda - \Delta\lambda$  avec  $\Delta\lambda \ll \lambda$ , on arrive à  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}c = \frac{1}{\Lambda}c_s$  d'où la formule  $\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{\Lambda} \frac{c_s}{c}$ . En utilisant la fréquence  $F = \frac{c_s}{\Lambda}$ , on peut écrire  $\Delta\lambda = \lambda^2 \frac{F}{c} = 0,24 \text{ pm}$ . On constate que  $\Delta\lambda \ll \Delta\lambda_{spec} = 1 \text{ nm}$ , le spectromètre optique traditionnel ne fonctionne pas.

**27.** La conservation de la quantité de mouvement est  $\vec{p}_i + \hbar\vec{q} = \vec{p}_f$ . Comme  $\vec{p}_i = \hbar\vec{k}_i$  et  $\vec{p}_f = \hbar\vec{k}_f$ , on en déduit l'égalité vectorielle  $\vec{k}_i + \vec{q} = \vec{k}_f$ . En projetant sur  $\vec{e}_y$  puis sur  $\vec{e}_x$ , on obtient les deux relations demandées  $q = k_f \sin \theta$  et  $k_i = k_f \cos \theta$ .

**28.** On a immédiatement  $\tan \theta = \frac{q}{k_i} = \frac{\lambda}{\Lambda}$ . Compte tenu du fait que  $\lambda = 6 \times 10^{-7} \text{ m}$  alors que  $\Lambda = 5 \times 10^{-5} \text{ m}$ , on voit tout de suite  $\tan \theta = 1,2 \times 10^{-2} \ll 1$  et donc  $\tan \theta \simeq \sin \theta \simeq \theta$ . Pour répondre à la question posée, on écrit que  $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = \frac{\lambda}{\Lambda}$ . En développant le calcul et en isolant  $\sin \theta$ , on arrive à :  $\sin \theta = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\Lambda^2}{\lambda^2}}}$ .

**29.** L'approximation a été réalisée à la question précédente :  $\theta \simeq \frac{\lambda}{\Lambda}$  puisque  $\lambda \ll \Lambda$ . Un changement de direction de propagation d'une onde est un phénomène de réfraction.

### Montage optique

#### Conjugaison des angles

**30.** Le schéma des rayons lumineux est réalisé à la figure de la figure 5.

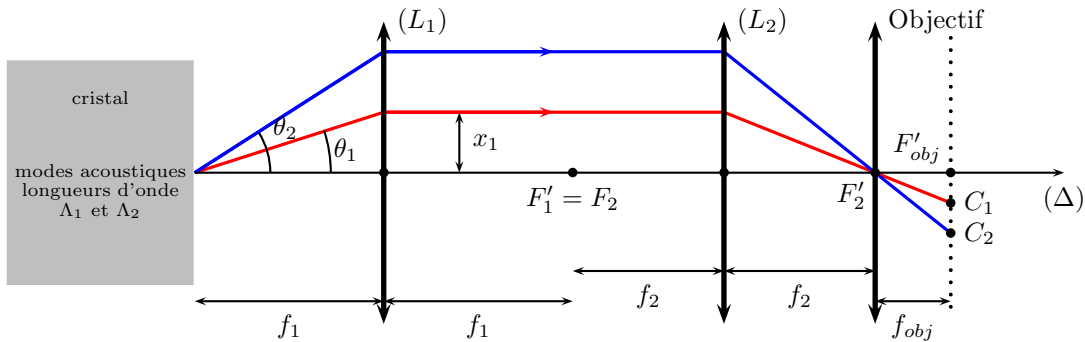


FIGURE 5 – Montage optique permettant la mesure des angles en sortie du cristal avec tracé des rayons lumineux.

**31.** Les angles sont petits, la distance entre le rayon et l'axe optique entre les lentilles  $L_1$  et  $L_2$  est  $x_1 = f_1 \theta_1$ , voir le schéma de la figure 5. On utilise d'autre part, le théorème de THALÈS dans les triangles qui pour sommet commun  $F'_2$ . On en déduit que  $\frac{F'_{obj} C_1}{x_1} = \frac{f_{obj}}{f_2}$ . On en déduit :  $F'_{obj} C_1 = \frac{f_1}{f_2} f_{obj} \theta_1$ .

**32.** Nous venons de voir que  $F'_{obj} C = \frac{f_1}{f_2} f_{obj} \frac{\lambda}{\Lambda}$ . On va différentier cette relation pour passer à la résolution au voisinage de  $\Lambda_0$ . On a  $d(F'_{obj} C) = -\frac{f_1}{f_2} f_{obj} \frac{\lambda}{\Lambda_0^2} d\Lambda$ . La résolution est fixée par la taille du pixel, on a donc  $d_{pix} =$

$\frac{f_1}{f_2} f_{obj} \frac{\lambda}{\Lambda_0^2} \Delta\Lambda$ . La résolution est donc :  $\Delta\Lambda = \frac{\Lambda_0^2}{\lambda} \frac{f_2}{f_1 f_{obj}} d_{pix}$ . Avec  $\Lambda_0 = 5 \times 10^{-5}$  m, on trouve  $\Delta\Lambda = 10^{-5}$  m. Cette résolution est suffisante mais il n'y a pas beaucoup de marge. Pour diminuer  $\Delta\Lambda$ , il faut diminuer  $f_2$  et augmenter  $f_1$  et si on peut en plus diminuer  $d_{pix}$  et  $f_{obj}$  il faut le faire.

### Superposition d'ondes lumineuses

33. On a  $\omega_1 = \omega$  et  $\omega_2 = \omega + \Omega$ .

34. Les équations de l'électromagnétisme sont linéaires. Si deux champs électriques  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  sont créés au moins point  $M$  de l'espace alors le champ électrique total est  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ .

35. On considère que les phases sont nulles  $\phi_1 = \phi_2 = 0$ . On a donc  $s_{tot}(M, t) = s_0(\cos\omega t + \cos(\omega + \Omega)t)$ . En utilisant la règle de trigonométrie  $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ , on arrive à  $s_{tot}(M, t) = 2s_0 \cos(\omega + \frac{\Omega}{2})t \cos \frac{\Omega}{2}t$ . On passe au carré  $s_{tot}^2 = 4s_0^2 \cos^2(\omega + \frac{\Omega}{2})t \cos^2 \frac{\Omega}{2}t$ . Il est alors préférable de linéariser en écrivant que  $s_{tot}^2 = s_0^2(1 + \cos(2\omega + \Omega)t)(1 + \cos\Omega t)$ . On passe à la moyenne temporelle sachant que les évolutions de  $\cos\Omega t$  sont très lentes par rapport à la durée de calcul de la moyenne puisque la période caractéristique associée à  $\Omega = 2\pi F$  est 5 ns à comparer à la durée d'intégration du signal sur la photodiode qui est de 10 ps. On peut considérer sur la durée de calcul de la moyenne que  $\cos\Omega t$  est une constante. Comme sur la durée de calcul la moyenne de  $\cos(2\omega + \Omega)t$  est nulle puisque sa période est beaucoup plus petite que 10 ps clairement de l'ordre de  $10^{-14}$  s puisque  $\lambda$  correspond au visible. Finalement, il ne reste plus que :  $\langle s_{tot}^2 \rangle = s_0^2(1 + \cos\Omega t)$  ce qui prouve bien ce qui était demandé.

### Traitement du signal obtenu

36. Il faut respecter le critère de SHANNON, ce qui signifie que pour arriver à mesurer 230 MHz ce qui nécessite un oscilloscope allant au moins jusqu'à 460 MHz qui est le double de la fréquence maximale des signaux attendus.

37. On considère que seulement la composante alternative  $u_{alt}(t)$  du signal  $u(t)$ , c'est donc  $u_{alt}(t) = s_0^2 \cos\Omega t$ . On a donc  $\omega_{alt} = \Omega$ . On a  $u_{ref}(t) = u_{ref,0} \cos\omega_{ref}t$  d'où le résultat du produit  $U_m(t) = \frac{K u_{alt,0} u_{ref,0}}{2} (\cos(\Omega + \omega_{ref})t + \cos(\Omega - \omega_{ref})t)$ .

38. On a choisi  $\omega_{ref} = 200$  MHz pour que  $\Omega - \omega_{ref} < 100$  MHz. Ainsi, on peut espérer échantillonner correctement le signal avec l'oscilloscope puisque la fréquence maximale que l'on aura à mesurer sera de 30 MHz.

39. Le filtre est un circuit  $RC$  série avec la tension de sortie mesurée aux bornes du condensateur. Comme on doit filtrer les hautes fréquences par rapport à 30 MHz, on peut choisir une fréquence de coupure  $f_c \simeq 100$  MHz. Comme sur un tel filtre, on a  $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$  en considérant  $R = 1$  kΩ et  $C = 1$  pF, on est bien placé.

40. On utilise le module de calcul de l'oscilloscope numérique FFT ce qui signifie *Fast Fourier Transform* pour un calcul rapide de transformée de FOURIER réalisé numériquement.

41. On lit sur le spectre les fréquences 1 MHz, 3 MHz et 11 MHz. Compte tenu de la fréquence de décalage  $F_{ref} = 200$  MHz, on trouve les trois modes acoustiques 201; 203; 211 MHz.

42. Cette fonction de modulation de l'intensité lumineuse d'un faisceau peut être mise à profit dans la propagation de l'information dans les fibres optiques.