

Exercices de révision pour les oraux : Série 4.

1 QCM

1. Glaçons

Réponses : on écrit que pour cette transformation monobare adiabatique il y a conservation de l'enthalpie pour l'ensemble jus de fruit-glaçons. On note $T_1 = 30^\circ$ la température initiale du jus de fruit, $T_2 = 10^\circ\text{C}$ la température finale et $T_0 = 0^\circ\text{C}$ la température initiale des glaçons. On a $\Delta H = 0 = \Delta H_{\text{jus}} + \Delta H_{\text{glaçons}}$. Le jus de fruit reste liquide et voit sa température baisser, la masse de jus de fruit est $m_{\text{jus}} = 1\text{ kg}$. On a donc $\Delta H_{\text{jus}} = m_{\text{jus}}c_{\text{eau}}(T_2 - T_1)$. Les glaçons fondent puis montent de la température T_0 à la température T_2 . On a donc $\Delta H_{\text{glaçons}} = N\rho_g V(q + c_{\text{eau}}(T_2 - T_0))$. On en déduit que $N = \frac{m_{\text{jus}}c_{\text{eau}}(T_1 - T_2)}{\rho_g V(q + c_{\text{eau}}(T_2 - T_0))}$. On trouve $N = 24$, la bonne réponse est a).

2. Non glissement

Réponses : la personne ne possède pas d'accélération verticale, son poids est compensé par la composante normale de contact. On a donc $N = mg$. La composante tangentielle est donc $T < f_s mg$. À la limite du glissement, on a $T = f_s mg$. La force tangentielle est reliée à l'accélération de la personne qui est en mouvement circulaire uniforme : $T = m\omega^2 r$. On en déduit que $f_s = \frac{\omega^2 r}{g} = \frac{4\pi^2 f^2 r}{g} = \frac{4\pi^2 r}{T^2 g}$. On trouve $f_s \simeq 0,8$. La réponse est c).

3. Effet photoélectrique

Réponses : l'énergie d'un photon est $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$. Plus la longueur d'onde est courte, plus le photon possède d'énergie. Toutes les longueurs d'ondes plus courtes que pour le vert ($\lambda \simeq 530\text{ nm}$) pourront arracher des électrons à la cellule. Comme $\lambda_X < \lambda_{UV} < \lambda_{\text{bleu}} < \lambda_{\text{vert}} < \lambda_{\text{rouge}}$, on peut conclure que les X, les UV et le bleu peuvent arracher un électron. Pour le rouge, on ne peut pas conclure parce qu'on ne connaît pas l'énergie minimale d'extraction de l'électron. On sait seulement qu'elle est inférieure à l'énergie d'un photon vert. La bonne réponse est donc b).

4. Matelas et piscine

Réponses : on écrit qu'à l'équilibre initial, le poids du volume d'eau déplacé compense le poids du matelas et des poids. Cela donne $\rho_{\text{eau}} V_1 g = (M + 6m)g$ où V_1 est le volume d'eau déplacé. On note S la surface de la piscine supposée posséder un fond horizontal. On note h_1 la hauteur d'eau de la piscine à ce moment-là. On a $V_1 = \frac{M+6m}{\rho_{\text{eau}}}$ et un volume d'eau $V_{\text{eau}} = Sh_1 - V_1$. La hauteur est $h_1 = \frac{V_{\text{eau}} + \frac{M+6m}{\rho_{\text{eau}}}}{S}$. Dans la situation 2, on a un volume de fluide déplacé V_2 qui sera moindre puisque $V_2 = \frac{M+2m}{\rho_{\text{eau}}}$. Le volume d'eau est identique au total $V_{\text{eau}} = Sh_2 - V_2 - \frac{4m}{\rho_{\text{acier}}}$, en effet, il faut retirer le volume occupé par les boules en acier. On a donc $h_2 = \frac{V_{\text{eau}} + \frac{M+2m}{\rho_{\text{eau}}} + \frac{4m}{\rho_{\text{acier}}}}{S}$. Comme $\rho_{\text{acier}} > \rho_{\text{eau}}$, on peut voir que $h_2 < h_1$. Le niveau de l'eau va donc baisser, c'est la réponse a).

2 Exercices

5. Filtre à construire

Réponses : en continu, il passe un courant dans le circuit. Cela signifie que le condensateur ne peut pas être en série dans le circuit faute de quoi, il couperait toute composante continue et on ne mesurerait pas 15 mA. Le condensateur est donc en parallèle de L ou bien en parallèle de R . Pour déterminer l'agencement, il faut étudier les comportements limites en haute fréquence et en basse fréquence avec pour objectif d'avoir dans les deux cas $u_s = 0$. On notera toutefois que l'on pourrait avoir aussi des situations où $u_s = 0$ et $u_s = u_e$ dans les cas limites avec une courbe qui présente une résonance permettant de définir une bande passante assez fine mais cela ne correspond pas à ce que l'on entend par filtre passe-bande. Après avoir passé en revue les différents cas possibles, on retient que $D_1 = R$ et que $D_2 = L \parallel C$. En continu, D_2 présente une impédance nulle et on peut écrire que $E_0 = Ri_0$. On en déduit que $\boxed{R = 1\text{ k}\Omega}$. La fonction de transfert du filtre s'obtient par application du diviseur de tension : $\underline{H} = \frac{1}{1+jR(\bar{C}\omega - \frac{1}{L\omega})} = \frac{1}{1+jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$. On peut identifier les caractéristiques du filtre. Sa fréquence de résonance est donc $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ et son facteur de qualité $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$. Dans l'étude du filtre, on obtient $f_0 = 1,15\text{ kHz}$ ce qui permet de connaître la valeur de LC . Le facteur de qualité vérifie $Q = \frac{f_0}{\Delta f} = 3,4$. Il

permet d'obtenir la valeur de $\frac{C}{L}$. On peut donc en déduire que $C = 470 \text{ nF}$ et $L = 40 \text{ mH}$. En basse fréquence $f \ll f_0$, on aura un comportement dérivateur avec une pente dans le diagramme de BODE à $+20 \text{ dB}$ par décade alors qu'en haute fréquence $f \gg f_0$, le filtre sera un intégrateur avec une pente à -20 dB par décade. Pour une fréquence de 10 Hz (période de 100 ms), on est clairement en dérivateur du signal créneau mis en entrée. On obtiendra une suite d'impulsions alternées correspondant au passage du créneau de l'état haut à l'état bas et réciproquement. En haute fréquence pour $f = 100 \text{ kHz}$ (période de $0,01 \text{ ms}$), on obtiendra un signal triangulaire par intégration d'une fonction constante par morceau. Si l'on met en entrée un signal triangulaire, on obtient en basse fréquence un créneau par dérivation et une suite d'arches de parabole pour les hautes fréquences et l'intégration. Pour changer la bande passante, il faut modifier la résistance R car si on touche L ou C on va changer f_0 sauf si l'on change L et C tout en maintenant LC constant. On va donc changer le facteur de qualité Q en modifiant R . Si on prend une résistance plus grande, on aura une bande passante plus petite sans affecter ce qui a été dit avant. Par contre, si l'on met une résistance plus petite, la bande passante va devenir plus grande, il ne faudrait pas trop se rapprocher de 10 Hz sous peine de voir l'opération de dérivation proposée plus tout à fait valable, même chose pour l'autre côté.

6. Amplificateur opérationnel réel

Réponses : $\mu_0 \simeq 10^6$, $\omega_0 \simeq 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\frac{RC}{\omega_0} \frac{d^2 V_s}{dt^2} + [\frac{1}{\omega_0} + RC(1 + \frac{\mu_0}{2})] \frac{dV_s}{dt} + (1 + \frac{\mu_0}{2})V_s = -\frac{\mu_0}{2}V_e + \frac{\mu_0}{2}RC \frac{dV_e}{dt}$, oui V_s n'a pas tendance à diverger, oui V_s va avoir tendance à diverger et on va aller vers la saturation, filtre passe-bas.

7. Filtre passe-bas

Réponses : $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau}$; $\tau \frac{ds}{dt} + s = e$; $\frac{\tau}{T_e}(s_n - s_{n-1}) + s_n = e_n$, on obtient $s_n = \frac{\tau}{T_e + \tau}s_{n-1} + \frac{T_e}{T_e + \tau}$.

from pylab import "star" from math import factorial from matplotlib import animation

condition initiale sur la sortie

CI=0.

valeur de l'entrée (échelon)

E=2.

nombre total de points du calcul

Ntot=200

durée de l'intervalle de travail

Duree=20

constante de temps et de temps réduite Ctemps

Tau = 2.

dt=Duree/Ntot

Ctemps=Tau/dt

création d'une liste de valeur de la sortie initialisée à la valeur de départ

s=[CI]

relation fonctionnelle du filtre passe-bas et initialise le premier terme (pour le temps aussi)

t=[0]

sn=CI

for n in range(Ntot) : sn = (Ctemps/(1+Ctemps))*sn + (1/(1+Ctemps))*E s.append(sn) t.append(n*dt)

S.append ajoute à la liste s les termes sn successifs

x=linspace(0,Duree,1000)

def y(x) : return E*(1-exp(-x/Tau))

clf() nettoie d'une éventuelle figure précédente axis([0,Duree,0,1.2*E]) définit les axes

plot(t,s,marker='o',linestyle="",color='r') commande l'exécution du tracé, pas de ligne et des ronds rouges pour les points

plot(x,y(x)) commande l'exécution du tracé de l'exponentielle

title("Réponses analogique et numérique sur 200 points")

show() montre le tracé!

8. Modèle d'Einstein des solides

Réponses : $p_n = \frac{1}{z} \exp(-(n + \frac{1}{2})u)$ et $z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-(n + \frac{1}{2})u) = \exp(-\frac{u}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-nu)$ d'où $z = \frac{1}{2 \sinh \frac{u}{2}}$ et donc

$p_n = 2 \sinh \frac{u}{2} \exp(-(n + \frac{1}{2})u)$; $\bar{\epsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \hbar \omega (n + \frac{1}{2})$, on trouve bien $\bar{\epsilon}(T) = \frac{\hbar \omega}{2} \coth\left(\frac{\hbar \omega}{2k_B T}\right)$; $C_{V,mol} = \mathcal{N}_A \frac{d\bar{\epsilon}}{dT} =$

$\mathcal{N}_A \frac{\hbar^2 \omega^2}{4k_B T^2} \frac{1}{\sinh^2 \frac{\hbar \omega}{2k_B T}}$; à haute température $\frac{\hbar \omega}{2k_B T} \ll 1$ d'où $\sinh x \simeq x$, on trouve $C_{V,mol} \simeq \mathcal{N}_A k_B = R$, c'est la loi

de DULONG et PETIT, on a un oscillateur unidimensionnel à deux degrés de liberté quadratiques $E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ et $E_p = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$, il y a $\frac{1}{2} k_B T$ par degré de liberté; à basse température, on trouve que $C_{V,mol} \simeq 0$, une petite

variation de température ne change pas la répartition des particules qui sont toutes dans le niveau fondamental et y restent, on ne stocke pas d'énergie.

9. Puits de potentiel infini

Réponses : $i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x,t)$ puis $E\varphi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + V(x)\varphi(x)$. On a $\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \varphi(x) = 0$, on pose $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$. Les solutions sont $\varphi(x) = A \cos kx + B \sin kx$. La fonction d'onde doit s'annuler en $x = \pm a$, $A \cos ka - B \sin ka = 0$ et $A \cos ka + B \sin ka = 0$ d'où $\varphi(x) = B_n \sin n \frac{\pi x}{a}$ ou bien $\varphi(x) = A_n \cos(n + \frac{1}{2}) \frac{\pi x}{a}$. L'énergie est $E_{n'} = n'^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2}$ avec $n' \in \mathbb{N}^*$. On a $\Delta x \times \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$ avec $\Delta x \leq 2a$ du fait du confinement dans le puits, on a donc $\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{4a}$ ainsi l'énergie ne peut donc pas être nulle puisque $E = \frac{p^2}{2m}$. Par symétrie, la densité de probabilité $|\varphi(x)|^2$ est forcément paire, on a $\langle x \rangle = 0$. Or, nous savons que $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \frac{a}{\sqrt{3}}$. L'ordre de grandeur de l'écart-type minimal en impulsion est $\Delta p_x \simeq \frac{\sqrt{3}\hbar}{2a}$, on a donc une énergie minimale $E_{min} = \frac{3\hbar^2}{8ma^2}$, on est bien dans l'ordre de grandeur de l'énergie du niveau fondamental.

10. Oscillateur à deux points d'attache

Réponses : $l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{2k}$, $\ddot{x} + \ddot{y} + \frac{2k}{m}(x+y) = 0$, $\theta = \frac{x-y}{2a}$, $\frac{1}{3}ma^2\ddot{\theta} = ak(y-x)$, $\ddot{x} - \ddot{y} + \frac{6k}{m}(x-y) = 0$, $x = \frac{x_0}{2}[\cos \sqrt{\frac{2k}{m}}t + \cos \sqrt{\frac{6k}{m}}t]$, $y = \frac{x_0}{2}[\cos \sqrt{\frac{2k}{m}}t - \cos \sqrt{\frac{6k}{m}}t]$.

11. Chute d'une barre

Réponses : $\vec{v}_A = -\sqrt{6g\ell}\vec{e}_x$ et $v_A = 5,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $\Delta t = \sqrt{\frac{2\ell}{3g}} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\cos\theta}}$, $\Delta t = \sqrt{\frac{\ell}{3g}} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sin\theta/2}$, on trouve $\Delta t \simeq 2 \text{ s}$.

12. Capteur solaire thermique

Réponses : $N = 1000$, $\mathcal{D}_m c \frac{dT}{dx} = \frac{P_{sol}}{L} + \ell\sigma(T_0^4 - T^4(x)) + h\ell(T_0 - T(x))$, $T(x) = T_0 + \frac{P_{sol}}{\mathcal{D}_m c L}x$, $T_{sol} = T_0 + \frac{P_{sol}}{\mathcal{D}_m c} = 538 \text{ K}$, $T_c = T_0 + \frac{P_{sol}}{h\ell L}(1 - \exp(-\frac{h\ell L}{\mathcal{D}_m c}))$, $T_c = 533 \text{ K}$; $A = \frac{\ell\sigma}{\mathcal{D}_m c} = 1,36 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1} \cdot \text{K}^{-3}$, $B = \frac{P_{sol}}{\mathcal{D}_m c L} + \frac{\ell\sigma}{\mathcal{D}_m c}T_0^4 = 23,92 \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$, $T_1 = \frac{B}{A}$, $T_1 = 1152 \text{ K}$, $\arctan \frac{T_r}{T_1} + \arg \tanh \frac{T_r}{T_1} = 2AT_1^3 L + \arctan \frac{T_0}{T_1} + \arg \tanh \frac{T_0}{T_1}$, $T_r = 534,8 \text{ K}$, $T_s \simeq 529 \text{ K}$, $\eta = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 0,43$, $P_m = \eta \mathcal{D}_m c (T_c - T_f) = 411 \text{ kW}$, $P_{elec} = 329 \text{ kW}$, les tensions des alternateurs peuvent aller, en général, de 250 V à 25 kV.

13. Moteur thermique et source thermique de vapeur

Réponses : $W_a = -4,8 \times 10^8 \text{ J}$, $Q_{1a} = 2,26 \times 10^9 \text{ J}$, $W_b = -mc_{eau-liq}[T_1 - T_0 - T_0 \ln \frac{T_1}{T_0}]$ d'où $W_b = -3,9 \times 10^7 \text{ J}$, $Q_{1b} = 3,3 \times 10^8 \text{ J}$, $\eta = 0,20$, $\eta_{Carnot} = 0,215$.

14. Induction et moment dipolaire

Réponses : Induction par variation du flux de \vec{B} créé par la grande spire dans la petite spire,

$$i_{t \leq \tau} = \frac{3\mu_0 ma^2}{2R} \frac{v_0 \frac{t}{\tau}}{(r_0 + \frac{v_0 t^2}{2\tau})^4}, i_{t \geq \tau} = \frac{3\mu_0 ma^2}{2R} \frac{v_0}{(r_0 + v_0(t - \frac{\tau}{2}))^4}.$$

15. Rayonnement dipolaire électromagnétique

Réponses : $\vec{B} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 cr} k^2 \exp(-jkr) \vec{e}_\varphi$, $\vec{\Pi} = \frac{p_0^2 c \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 r^2} k^4 \cos^2(\omega t - kr) \vec{e}_r$, flux indépendant de r , $P_{moy}(\omega) = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$, bleu du ciel.

16. Fibre optique

Réponses : Il faut assurer la réflexion totale entre cœur et gaine, $n_c \sin i_1 = n_g \sin i_2$ et donc $\sin i_1 \leq \frac{n_g}{n_c}$, à l'entrée de la fibre on aura $n_a \sin \theta = n_c \sin i_1$ et donc $\sin \theta_{max} = n_c \cos i_{1,lim}$, on trouve numériquement $\theta_{max} = 10,5^\circ$, $ON = n_c \cos i_{1,lim}$ d'où $i_{1,lim} = 83^\circ$ et donc $n_g = n_c \sin i_{1,lim}$, on trouve $n_g = 1,489$, la distance géométrique la plus courte est L et la plus longue est celle qui concerne l'angle limite de la réflexion totale qui est faite de portion rectiligne sous l'angle $i_{1,lim}$ d'où la plus grande longueur $\frac{n_c}{n_g}L$, l'écart est donc $\Delta d = (\frac{n_c}{n_g} - 1)L$, la durée varie sur l'intervalle $\Delta t = \frac{n_c \Delta d}{c}$ où c est la vitesse de la lumière dans le vide, on a $\frac{\Delta t}{L} = \frac{n_c(n_c - n_g)}{n_g} \frac{1}{c} = 37 \text{ ns} \cdot \text{km}^{-1}$, pour $L = 10 \text{ km}$ on aura $\Delta t = 370 \text{ ns}$ et donc $f_{max} = \frac{1}{\Delta t} = 2,7 \text{ MHz}$.

17. Interférences et positionnement

Réponses : $\frac{e\alpha^2(n-1)}{2n} = \frac{\lambda}{10}$, $\alpha_{mini} = 7,6 \times 10^{-3} \text{ rad}$.

18. Équilibre homogène en phase gazeuse

Réponses : $\Delta_r G = RT \ln \frac{Q}{K}$, $K = 1, 2 \times 10^9 = \exp -\frac{\Delta_r G^\circ}{RT}$, $Q = 22, 5 \neq K$ réaction dans le sens 1 car $\Delta_r G < 0$, $K = 3$ et $\frac{1}{T_2} = \frac{1}{T_1} + \frac{R}{\Delta_r H^\circ} \ln \frac{K_1}{K_2}$ d'où $T_2 = 5950$ K irréaliste, $p = 2, 5 \times 10^{-9}$ bar irréaliste.

19. Équilibre hétérogène

Réponses : $v = 1$, $K = 0, 125$, $\Delta_r G^\circ(373 \text{ K}) = 6, 5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$, $n_{\text{O}_2} = 8 \times 10^{-3} \text{ mol}$ pour $V = 2 \text{ L}$, n_{O_2} augmente avec V , fin de l'équilibre à $V = 124 \text{ L}$.

20. Solubilité de l'hydroxyde d'aluminium

Réponses : $h^2 = 0, 2K_A$ d'où $h = 1, 4 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, $pH = 2, 85$, $0, 1 \text{ mol}$ de $\text{Al}(\text{OH})_3$ d'où $27s^4 = 10^{-32}$, $s = 4, 4 \times 10^{-9} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, $pH \simeq 7$, $\omega^2 = 0, 2K_B$, $pH = 11, 25$, la solution contient déjà des ions HO^- , la solubilité de $\text{Al}(\text{OH})_3$ sera plus faible.

21. Iodure de méthane

Réponses : On a par la loi des gaz parfaits $c_0 = \frac{p_0}{2RT_0} = 0, 02 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, l'équation différentielle donnant l'avancement est $\frac{dx}{dt} = k(c_0 - x)^2$, la loi cinétique est donc $\frac{1}{c_0 - x} - \frac{1}{c_0} = kt$, on trouve $k = \frac{1}{2c_0\tau}$, c'est-à-dire $k = 0, 125 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{s}^{-1}$.

3 Python Centrale

22. Filament d'ampoule

Réponses : Il y a une majorité de la puissance dissipée en chaleur donnée au gaz qui est dans l'ampoule mais aussi au verre de l'ampoule qui chauffe énormément. On note $T_{eq} = 2700 \text{ K}$ la température d'équilibre du filament. La surface latérale du filament est la surface par laquelle il rayonne. On note P_{lum} la puissance rayonnée par le filament. On a donc $P_{lum} = \sigma T_{eq}^4 \pi d \ell$ où d est le diamètre du filament. On peut donc calculer $\ell = \frac{P_{lum}}{\sigma T_{eq}^4 \pi d} \simeq 2 \text{ cm}$. La tension $U = 230 \text{ V}$ est la tension efficace du réseau électrique. On peut donc écrire que $P_{elec} = \frac{U^2}{R}$ où R est la résistance électrique du filament donnée par $R = \frac{1}{\gamma} \frac{4\ell}{\pi d^2}$. La conductivité électrique du tungstène est donc $\gamma = \frac{4\ell P_{elec}}{U^2 \pi d^2} = 3, 3 \times 10^4 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$. Cette conductivité est beaucoup plus faible qu'à la température ambiante, c'est normal à plus haute température, il y a beaucoup plus de chocs des électrons de conduction avec leur environnement. Cela nuit à leur déplacement et donc à la conductivité. On note la loi affine $R(T) = R_0 + a(T - T_0)$ où $T_0 = 293 \text{ K}$ sera considérée comme la température ambiante. Avec les valeurs numériques fournies, on trouve $R_0 = \frac{1}{\gamma_0} \frac{4\ell}{\pi d^2} = 1, 8 \Omega$. Ensuite, on écrit que $R_{eq} = \frac{1}{\gamma_{eq}} \frac{4\ell}{\pi d^2} = 485 \Omega$. En utilisant ce second point, on trouve $a = \frac{R_{eq} - R_0}{T_{eq} - T_0} = 0, 2 \Omega \cdot \text{K}^{-1}$. La température $T(t)$ va augmenter assez fortement rapidement et atteindre son asymptote à T_{eq} . Quand la température du filament augmente, on a une augmentation de la résistance électrique ce qui fait diminuer assez fortement l'intensité. Il y a possibilité d'équilibre puisque la puissance électrique transférée au filament diminue puisqu'elle est donnée par $P_{elec} = \frac{U^2}{R}$ avec U fixée et R qui augmente. On peut considérer la température du filament comme uniforme puisque sa conductivité thermique λ est assez élevée. Plus une conductivité thermique est élevée plus le coefficient de diffusion thermique $D_{th} = \frac{\lambda}{\rho c}$ sera grand traduisant pour un diamètre d un temps caractéristique du régime transitoire d'évolution thermique $D_{th} = \frac{d^2}{\tau_{th}}$ court puisque $\tau_{th} = \frac{d^2}{D_{th}}$. N'oublions pas aussi que sur le plan de la longueur du filament, on doit avoir une invariance du problème parce que l'intensité qui parcourt le filament est identique en tout point dans le cadre de l'ARQS. Le bilan de puissance du filament est $\rho c \frac{\pi d^2}{4} \ell \frac{dT}{dt} = \frac{U^2}{R_0 + a(T - T_0)} - \pi d \ell \sigma T^4$. C'est cette équation différentielle qui est programmée dans le fichier *Python* mis à disposition. On remarquera que l'on ne prend pas en compte toute convection avec le gaz contenu dans l'enveloppe. Cette équation est discutable mais comme on n'a aucune information sur ce phénomène pourtant évoqué. On complétera le programme informatique avec l'expression de $R = R_0 + a(T(t) - T_0)$ pour effectuer le tracé de l'évolution de la résistance électrique $R(t)$ au cours du temps. Pour le temps caractéristique, on trouve que $\tau_{th} \simeq 23 \mu\text{s}$ alors que le temps caractéristique d'évolution de la température que l'on voit après la résolution de l'équation différentielle est $\tau \simeq 1 \text{ ms}$. On voit donc que $\tau_{th} \ll \tau$, on peut dire que la température est uniforme dans le fil conducteur.

4 X-ENS

23. Oscillateurs sur un plateau tournant

Réponses : La masse subit son poids et la réaction normale du plateau $m\vec{g} + \vec{N} = \vec{0}$. On va supposer que les ressorts sont accrochés à une distance du point O telle qu'ils possèdent leur longueur à vide ℓ_0 si $M = O$. Si M est en O , il n'y a aucune force exercée. Si jamais les ressorts étaient tous comprimés, on aurait une position d'équilibre aussi sans résultante des forces, il en irait de même si tous les ressorts étaient étendus. Pour une position $M(x, y)$ quelconque, on aurait des forces de la forme de celle que l'on va établir pour le ressort 1 attaché au point O_1 de coordonnées $(\ell_0, 0)$. On a $\vec{f}_1 = -k(\ell_1 - \ell_0)\vec{e}_1$ avec $\vec{e}_1 = \frac{\vec{O_1M}}{O_1M}$. On peut écrire la force selon $\vec{f}_1 = -k(1 - \frac{\ell_0}{O_1M})\vec{O_1M}$ ce qui donne $\vec{f}_1 = -k(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{(x-\ell_0)^2+y^2}})((x-\ell_0)\vec{e}_x + y\vec{e}_y)$. La force \vec{f}_2 exercée par le ressort attaché en $O_2(0, \ell_0)$, est $\vec{f}_2 = -k(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{x^2+(y-\ell_0)^2}})(x\vec{e}_x + (y-\ell_0)\vec{e}_y)$. On passe au ressort attaché en $O_3(-\ell_0, 0)$ avec $\vec{f}_3 = -k(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{(x+\ell_0)^2+y^2}})((x+\ell_0)\vec{e}_x + y\vec{e}_y)$. Enfin pour le dernier ressort, on a $\vec{f}_4 = -k(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{x^2+(y+\ell_0)^2}})(x\vec{e}_x + (y+\ell_0)\vec{e}_y)$. Nous allons effectuer un développement à l'ordre 2 en x/ℓ_0 et y/ℓ_0 pour avoir une idée de la façon dont les choses se jouent. On trouve $\vec{f}_1 = -k[(x - \frac{2x^2+y^2}{2\ell_0})\vec{e}_x - \frac{xy}{\ell_0}\vec{e}_y]$ puis $\vec{f}_3 = -k[(x + \frac{2x^2+y^2}{2\ell_0})\vec{e}_x + \frac{xy}{\ell_0}\vec{e}_y]$ par changement $\ell_0 \rightarrow -\ell_0$. De la même façon, on a $\vec{f}_2 = -k[-\frac{xy}{\ell_0}\vec{e}_x + (y - \frac{x^2+2y^2}{2\ell_0})\vec{e}_y]$ et $\vec{f}_4 = -k[\frac{xy}{\ell_0}\vec{e}_x + (y + \frac{x^2+2y^2}{2\ell_0})\vec{e}_y]$. En restant au premier ordre et même au second... , on a $\vec{f} = -2k(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y)$. On a une accélération d'entraînement $\vec{a}_{ent} = -\omega^2(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y)$ et une accélération de CORIOLIS $\vec{a}_C = 2\omega\vec{e}_x \wedge (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y)$. En écrivant que $m\vec{a} = \vec{f} - m\vec{a}_{ent} - m\vec{a}_C$, on arrive au système $\ddot{x} = (\omega^2 - \omega_0^2)x + 2\omega\dot{y}$ et $\ddot{y} = (\omega^2 - \omega_0^2)y - 2\omega\dot{x}$ en posant $\omega^2 = \frac{2k}{m}$. Dans le cas particulier où $\omega = \omega_0$, on obtient $\ddot{x} + 4\omega_0^2 x = 0$ et donc $x = x_0 \cos 2\omega_0 t$ et $y = -x_0 \sin 2\omega_0 t$. Si $\omega \neq \omega_0$, on aura une recherche de solution en posant $u = x + iy$ et on obtient l'équation différentielle $\ddot{u} + 2i\omega\dot{u} + (\omega_0^2 - \omega^2)u = 0$. On trouve alors $x(t) = -x_0 \frac{2\omega - \omega_0}{2\omega_0} \cos(\omega + \frac{\omega_0}{2})t + x_0 \frac{2\omega + \omega_0}{2\omega_0} \cos(\omega - \frac{\omega_0}{2})t$ et $y(t) = x_0 \frac{2\omega - \omega_0}{2\omega_0} \sin(\omega + \frac{\omega_0}{2})t - x_0 \frac{2\omega + \omega_0}{2\omega_0} \sin(\omega - \frac{\omega_0}{2})t$. La puissance de la force de CORIOLIS est nulle, la force d'inertie d'entraînement dérive d'une énergie potentielle $E_{p,ent} = -\frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$, la force élastique dérive de l'énergie potentielle $E_{p,r} = k(x^2 + y^2)$. On pourra donc écrire que $\frac{dE_c}{dt} = -\frac{d(E_{p,ent} + E_{p,r})}{dt}$ sans entrer dans les calculs.

24. Modèle de gravitation à grande distance

Réponses : On a $x = \frac{G}{a_0}$. De plus, si l'on se situe près de la distribution de masse, on a G plus élevé que loin de celle-ci puisque la force de gravitation est décroissante avec la distance. Le cas $x \gg 1$ correspond donc à la gravitation traditionnelle de NEWTON. On a donc $f(\frac{1}{a_0} \|\vec{grad} \phi\|) = 1$. Il vient donc $\text{div} \vec{grad} \phi = \text{div} (-\vec{G}) = -\text{div} \vec{G} = 4\pi\mathcal{G}\rho$ qui conduit à l'équation locale de la gravitation $\text{div} \vec{G} = -4\pi\mathcal{G}\rho$. Si on envisage maintenant $x \ll 1$, on a $f(\frac{1}{a_0} \|\vec{grad} \phi\|) = \frac{G}{a_0}$, on en déduit que $\text{div} \frac{G}{a_0} \vec{G} = -4\pi\mathcal{G}\rho$. Avec $\vec{G}(r) = -G(r)\vec{e}_r$, on en déduit que $\text{div} (-G^2(r)\vec{e}_r) = -4\pi\mathcal{G}\rho a_0$. Comme on travaille loin de la distribution de masse, on a nécessairement $\rho = 0$. L'équation différentielle vérifiée par $G(r)$ est donc $\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 G^2(r))}{dr} = 0$. On en déduit que $r^2 G^2(r) = \alpha > 0$ et donc $G(r) = \frac{\sqrt{\alpha}}{r}$. Le champ gravitationnel décroît en $1/r$ et donc plus lentement qu'à l'extérieur d'une distribution à symétrie sphérique où on a $G(r) = \frac{\beta}{r^2}$. Pour le système solaire, on raisonnera uniquement à partir du Soleil qui domine toutes les autres masses. Pour le Soleil à sa surface, on a $G_0 = \frac{\mathcal{G}M_S}{R_S^2}$. À l'extérieur du Soleil, on a une évolution selon $G(r) = G_0 \left(\frac{R_S}{r}\right)^2$. On atteint la valeur de a_0 pour un rayon $r_c = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{a_0}} \simeq 10^{15}$ m. La taille du système solaire est $\ell \simeq 10^{13}$ m, on constate que $\ell \ll r_c$. Comme la correction s'effectue pour $r \gg r_c$, on en déduit qu'il faut observer très loin de nous pour mettre en évidence cette évolution de la théorie de la gravitation.

25. Petit chariot-bol

Réponses : En considérant l'ensemble $M + m$, on peut voir qu'il n'est soumis qu'à des forces verticales : le poids de m à savoir $m\vec{g}$, le poids du chariot $M\vec{g}$ et la composante normale \vec{N}_c de contact entre le chariot et le support plan horizontal. Cette force est bien verticale puisqu'il n'y a pas de frottements. Au contact de la surface hémisphérique, le mobile va voir sa quantité de mouvement évoluer de verticale à une quantité de mouvement ayant une composante verticale mais aussi horizontale. Or, la présence de forces verticales uniquement impose que la quantité de mouvement horizontale du système $M + m$ doit être constante et nulle puisque cette composante était nulle à la date $t = 0$ qui correspond au début du contact entre m et M . Comme le mobile m va posséder après le contact une composante horizontale orientée vers la gauche, il est indispensable que le chariot possède une composante horizontale orientée vers la droite. Pendant que le mobile va se déplacer vers la gauche, le chariot va se déplacer vers la droite et réciproquement. On aura en quelque sorte des oscillations du mobile et du chariot à

contre-temps. . . On notera que le chariot-bol constitue alors un référentiel non galiléen. On étudie le mouvement de m par rapport au chariot. On paramètre le mouvement en utilisant l'angle θ défini par rapport à la position du contact initial et dans le sens du mouvement du mobile. La vitesse du mobile par rapport à \mathcal{R}' référentiel attaché au chariot est $\vec{v}_{/\mathcal{R}'} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, la vitesse de m dans le référentiel du laboratoire considéré comme galiléen est $\vec{v}_{/\mathcal{R}} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{x}\vec{e}_x$ en notant Ox l'axe horizontal permettant de repérer la position de M . Dans le référentiel non galiléen, m subit son poids $m\vec{g}$, la force de contact \vec{N} normale à l'hémisphère et dirigée vers l'intérieur ainsi que la force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{i,ent} = -m\ddot{x}\vec{e}_x$. On travaillera dans la base de projection polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. On a donc $m\vec{g} = mg\sin\theta\vec{e}_r + mg\cos\theta\vec{e}_\theta$, $\vec{N} = -N\vec{e}_r$ et $\vec{f}_{i,ent} = -m\ddot{x}(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta)$. On obtient les équations différentielles $-R\ddot{\theta}^2 = -\frac{N}{m} + g\sin\theta - \ddot{x}\cos\theta$ et $R\ddot{\theta} = g\cos\theta + \ddot{x}\sin\theta$. Nous avons là deux inconnues cinématiques x et θ et une inconnue dynamique N pour un système de deux équations. C'est clairement insuffisant, on écrit alors la relation de la Dynamique à M dans le référentiel du laboratoire galiléen. M subit son poids et \vec{N}_c qui sont verticales mais aussi, par le principe des actions réciproques, la force $-\vec{N}$ exercées par m sur M . En projetant cette relation de la Dynamique sur l'axe Ox , on obtient $M\ddot{x} = -\vec{N} \cdot \vec{e}_x = N\vec{e}_r \cdot \vec{e}_x = N\cos\theta$. On obtient ainsi une troisième relation : $\ddot{x} = \frac{N}{M}\cos\theta$. En isolant $N = \frac{mM}{M+m\cos^2\theta}(R\ddot{\theta}^2 + g\sin\theta)$, on peut exprimer $\ddot{x} = \frac{m\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}(R\ddot{\theta}^2 + g\sin\theta)$ que l'on va pouvoir utiliser dans l'équation donnant $R\ddot{\theta}$. Après mise en forme, on obtient l'équation différentielle $\ddot{\theta} - \frac{\frac{m}{M}\cos\theta\sin\theta}{1+\frac{m}{M}\cos^2\theta}\dot{\theta}^2 - (\frac{1+\frac{m}{M}}{1+\frac{m}{M}\cos^2\theta})\frac{g}{R}\cos\theta = 0$. Cette équation pourra être résolue numériquement avec les conditions initiales $\theta(t=0) = 0$ et $\dot{\theta}(t=0) = \frac{\sqrt{2gh}}{R}$. On peut voir comme cas limite celui où on empêche le chariot de se déplacer, cela correspond à une situation où $m \ll M$. L'équation devient alors celle attendue à savoir $\ddot{\theta} - \frac{g}{R}\cos\theta$. Dans ce dispositif, l'énergie potentielle de la masse m au départ va devenir de l'énergie cinétique pour le chariot, de l'énergie mécanique (cinétique et potentielle) pour m . Si on équipe de roues le chariot tout en s'assurant qu'il y a roulement sans glissement, il n'y aura aucune dissipation d'énergie au niveau du contact entre les roues et le plan support horizontal. On en déduit que l'énergie potentielle de la masse m au départ se retrouvera dans les mêmes formes d'énergie que celles vues avant mais que du fait de la rotation des roues, le chariot embarquera plus d'énergie cinétique pour une même valeur de \dot{x} avec les roues que sans et qu'il y aura moins d'énergie disponible pour m .

26. Une étoile à l'équilibre

Réponses :

- Il y a la force de gravitation et les forces de pression internes liées à l'agitation thermique mais aussi liées au gradient de champ gravitationnel puisque le champ de gravitation augmente du centre de l'étoile à la surface de celle-ci.
- L'étoile est supposée homogène, cela suppose que sa masse volumique μ est une constante. On note R le rayon de l'étoile, T sa température et M sa masse. La loi de l'équilibre de l'hydrostatique est $\vec{grad}P = \mu\vec{G}$ où \vec{G} est le champ gravitationnel. Comme la symétrie sphérique est assurée, on a $\frac{dP}{dr} = -\mu G(r) = -\mu\frac{Gm(r)}{r^2}$. On se place à $r \leq R$ avec une masse $m(r) = \mu\frac{4}{3}\pi r^3$. La loi d'évolution de la pression est donnée par $\frac{dP}{dr} = -\frac{4\pi G\mu^2}{3}r$. En considérant la pression comme nulle à la surface de l'étoile, on obtient $P(r) = \frac{2\pi G\mu^2}{3}(R^2 - r^2)$. La pression moyenne dans l'étoile est $P_m = \frac{1}{R}\int_0^R P(r)dr$. On trouve $P_m = \frac{4\pi G\mu^2}{9}R^2$. Pour trouver l'énergie gravitationnelle de l'étoile, on va se placer à un moment où son rayon est r et sa masse $m(r)$, on va apporter, depuis l'infini, une masse $dm = \mu 4\pi r^2 dr$ sous forme d'une couche d'épaisseur dr et de rayon r pour conserver la symétrie sphérique. Considérons cette masse dm située à la distance r' du centre de l'étoile et établissons le travail élémentaire de la force gravitationnelle sur un déplacement élémentaire $dr'\vec{e}_r$, on a $\delta^2 W = -\frac{Gm(r)dm}{r'^2}dr'$. Le travail élémentaire pour amener la masse dm depuis l'infini jusqu'à la surface de l'étoile en construction est $\delta W = -\int_\infty^r \frac{Gm(r)dm}{r'^2}dr' = \frac{Gmdm}{r} = -dE_p$. On en déduit que $dE_p = -\frac{G\mu^2(4\pi)^2}{3}r^4 dr$. On peut donc intégrer cette expression pour obtenir l'étoile de rayon R : $E_p = -\frac{G\mu^2(4\pi)^2}{15}R^5 = -\frac{3GM^2}{5R}$. On trouve donc la relation $E_p = -\frac{12\pi R^3}{5}P_m$. Il est sans doute plus intéressant de relier la densité volumique d'énergie potentielle moyenne à la pression moyenne puisque ces deux grandeurs possèdent la même unité. On a $e_p = \frac{3E_p}{4\pi R^3} = -\frac{9}{5}P_m$.
- L'énergie totale de l'étoile est composée de l'énergie cinétique d'agitation thermique. On a donc une énergie cinétique de la forme $E_c = N\frac{3}{2}k_B T$ où N est le nombre d'entités présentes dans l'étoile. Il y a des noyaux d'hydrogène et d'hélium ainsi que des électrons. On peut faire intervenir un coefficient sans dimension α pour tenir compte de la proportion d'hélium par rapport à l'hydrogène et la masse d'un atome d'hydrogène. On peut donc écrire $N = \alpha\frac{M}{m_H}$ d'où l'énergie cinétique $E_c = \frac{3\alpha M}{2m_H}k_B T$. En ajoutant l'énergie potentielle gravitationnelle, on arrive à l'énergie suivante pour l'étoile : $E = \frac{3\alpha M}{2m_H}k_B T - \frac{3GM^2}{5R}$. Cette expression fait intervenir à la fois le rayon R et la température de l'étoile. Il faut établir un lien

entre les deux. La puissance émise par rayonnement à la surface de l'étoile est donnée par $\sigma T^4 4\pi R^2$. Nous allons faire l'hypothèse que le taux de réaction de fusion nucléaire par unité de temps est stable. Comme l'énergie rayonnée provient de la fusion nucléaire, on aura $T^4 R^2 = \beta^4$ constant où β est un réel positif. On peut donc écrire que $R = \frac{\beta^2}{T^2}$ et que l'énergie de l'étoile s'écrit : $E = 3MT\left(\frac{\alpha k_B}{2m_H} - \frac{GM}{5\beta^2}\right)$ en

priviliégiant la température ou encore $E = \frac{3M}{\sqrt{R}}\left(\frac{\alpha\beta k_B}{2m_H} - \frac{GM}{5\sqrt{R}}\right)$. On peut calculer $\frac{dE}{dT}$ et voir que le signe est fonction du facteur $\frac{\alpha k_B}{2m_H} - \frac{2GM}{5\beta^2}T$. La température $T_c = \frac{5\alpha\beta^2 k_B}{4GMm_H}$ permet de discriminer deux situations. Pour $T < T_c$, alors si T augmente, l'énergie augmente et le rayon diminue. Il va y avoir un problème à un moment donné, l'étoile va se transformer en étoile à neutrons ou en trou noir. Au contraire, si $T > T_c$ alors si la température augmente, alors R augmente et l'énergie de l'étoile diminue.

27. Condensateur à armatures mobiles

Réponses : On va supposer que la pile impose une tension U constante entre les deux pistons. Les deux pistons vont se charger avec des charges de signes opposés. On aura donc un effet d'attraction qui va se produire entre les deux pistons qui vont avoir tendance à se rapprocher. Mais en le faisant, l'air situé entre les deux pistons va voir sa pression augmenter alors que l'air situé entre chaque piston et les extrémités du cylindre verra au contraire sa pression baisser. Les forces attractives d'origine électrostatique vont être contre-balancées par la résultante des forces de pression d'où la possibilité d'avoir un nouvel état d'équilibre avec une distance entre les deux pistons que l'on va devoir évaluer. Comme les pistons sont nécessairement des conducteurs pour recevoir des charges, ils sont aussi des conducteurs thermiques. Cela signifie qu'à l'équilibre final, il y aura une température identique dans les trois compartiments du cylindre. On commencera par faire des hypothèses pour simplifier un peu la mise en place des équations amenant à la détermination de l'état final. Considérons qu'au départ, avant de brancher la pile, le cylindre est divisé en trois parties totalement équivalentes de longueur ℓ_0 , contenant n_0 moles d'air à la température T_0 et à la pression P_0 . La longueur totale du cylindre est donc $3\ell_0$. On va supposer que les deux pistons mobiles se déplacent de $x > 0$ dans des sens contraires évidemment puisqu'il y a symétrie des comportements. Dans l'équilibre final, le condensateur aura une épaisseur $\ell_0 - 2x$ et les compartiments de chaque côté seront de longueur $\ell_0 + x$. On considère que la température finale est la même comme évoqué avant, on la note T . Par contre, la pression dans le condensateur est plus élevée que pour les deux compartiments. On la note P_i , on note P la pression dans deux compartiments sur les côtés du cylindre. La capacité du condensateur est $C = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2}{\ell_0 - 2x}$, la charge qu'il porte (pour l'armature positive) est $Q = CU = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2}{\ell_0 - 2x} U$. La densité surfacique de charge des armatures est $\pm\sigma$ avec $\sigma = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{\varepsilon_0 U}{\ell_0 - 2x}$. Chaque armature du condensateur crée un champ électrique $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_x$. La force d'attraction d'une armature sur l'autre est $F = Q \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \pi R^2 \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$, le terme $\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$ correspond à ce que l'on appelle la pression électrostatique. En fait, lorsqu'il y aura équilibre mécanique, l'écart de pression des gaz entre l'intérieur du condensateur et l'extérieur doit être égal à la pression électrostatique. On a donc $P_i - P = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{U^2}{(\ell_0 - 2x)^2}$. On utilise la loi des gaz parfait en notant \mathcal{R} la constante molaire des gaz parfait pour ne pas confondre avec le rayon R du cylindre. On a, à l'équilibre initial, $P_0 \pi R^2 \ell_0 = n_0 \mathcal{R} T_0$. À l'équilibre final, on peut écrire $P \pi R^2 (\ell_0 + x) = n_0 \mathcal{R} T$ et $P_i \pi R^2 (\ell_0 - 2x) = n_0 \mathcal{R} T$. On en déduit que $P = \frac{\ell_0 - 2x}{\ell_0 + x} P_i$. Cela permet d'exprimer la pression à l'intérieur du condensateur en fonction de x selon $P_i = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{\ell_0 + x}{3x(\ell_0 - 2x)^2} U^2$. Nous allons écrire le premier principe de la Thermodynamique à l'ensemble des gaz des trois compartiments en négligeant les capacités thermiques du cylindre et des pistons. On a donc $3n_0$ moles d'air assimilé à un gaz parfait diatomique qui passent de la température T_0 à la température T . Leur variation d'énergie interne est $\Delta U = \frac{5}{2} 3n_0 \mathcal{R} (T - T_0)$. Cette variation d'énergie interne correspond à tous les transferts énergétiques réalisés, on a $\Delta U = W_{\text{pression ext}} + W_{\text{électrique}} + Q$. Comme le cylindre est indéformable et calorifugé, on a $W_{\text{pression ext}} = 0$ et $Q = 0$. Il ne reste que le travail électrique fourni par la pile. Comme le modèle ne comporte pas d'élément résistif, le travail électrique correspond à l'énergie stockée dans le condensateur à savoir $\frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \pi R^2}{\ell_0 - 2x} U^2$. En utilisant cette expression dans le premier principe ainsi que les lois des gaz parfaits, on arrive, dans un premier temps, à la relation $\frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{\ell_0 + x}{3x(\ell_0 - 2x)^2} U^2 - P_0 \ell_0 = \frac{1}{15} \varepsilon_0 \frac{U^2}{\ell_0 - 2x}$. Cela conduit à l'équation du second degré $4x^2 + (3L - \ell_0)x + 5L\ell_0 = 0$ en posant $L = \frac{\varepsilon_0 U^2}{30P_0\ell_0}$. De cette équation, on ne retiendra que la solution $0 < x < \frac{1}{2}\ell_0$ qui donnera la nouvelle position d'équilibre. Compte tenu de l'expression de L , on constate que pour des valeurs raisonnables $U \simeq 1 \text{ V}$, $\ell_0 \simeq 1 \text{ cm}$ et $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$, on aura L extrêmement faible $L \simeq 10^{-14} \text{ m}$. On peut donc simplifier l'équation du second degré pour obtenir $4x^2 - \ell_0 x = 0$. La solution $x = 0$ n'a pas de sens physique, on retiendra $x = \ell_0/4$.

28. Réflexion sur un miroir

Réponses : On comprend à l'aide des composantes du champ électrique que l'onde incidente se propage sur l'axe Ox dans le sens x croissant. Il est aussi clair que la normale au miroir est orientée sur $-\vec{e}_x$ en direction du vide. L'onde incidente évoluant dans le vide, le vecteur d'onde est $k = \frac{\omega}{c}$. Par les lois de DESCARTES, on sait que l'onde réfléchi aura pour direction et sens de propagation celui fixé par $-\vec{e}_x$. La pulsation L'expression générale du champ électrique de l'onde réfléchi est donnée par $\vec{E}_r = E_{0rx} \cos(\omega't + k'x + \varphi_x)\vec{e}_x + E_{0ry} \cos(\omega't + k'y + \varphi_y)\vec{e}_y + E_{0rz} \cos(\omega't + k'z + \varphi_z)\vec{e}_z$. La continuité du champ électrique impose que $\vec{E}_i(x=0) + \vec{E}_r(x=0) = \vec{0}$. Cette relation doit être vraie $\forall t, \forall y$ et $\forall z$. On en déduit que $E_{r0x} \cos(\omega't + \varphi_x) = 0$ qui impose que $E_{r0x} = 0$ puisque l'équation doit être vraie $\forall t$. On a aussi $E_{r0y} \cos(\omega't + \varphi_y) + E_0 \cos \omega t = 0$ vraie $\forall t$. il est donc indispensable que $\omega' = \omega$, le vecteur d'onde est donc aussi $k = \frac{\omega}{c}$ puisque l'onde évolue dans le vide. On doit donc valider l'égalité $E_{r0y} \cos(\omega t + \varphi_y) + E_0 \cos \omega t = 0$, cela impose que $\varphi_y = 0$ et $E_{r0y} = -E_0$, on remarquera que l'on aurait pu choisir $\varphi_y = \pi$ et $E_{r0y} = E_0$ sans rien changer au résultat. La dernière équation est $E_{r0z} \cos(\omega t + \varphi_z) + E_0 \sin \omega t = 0$ vraie $\forall t$. On peut choisir $E_{r0z} = -E_0$ et $\varphi_z = -\frac{\pi}{2}$. Finalement, le champ réfléchi est $\vec{E}_r = -E_0(\cos(\omega t + kx)\vec{e}_y + \sin(\omega t + kx)\vec{e}_z)$. En sommant les deux champs électriques incident et réfléchi, on obtient dans le vide $\vec{E}_{tot} = -2E_0(\sin \omega t \cos kx \vec{e}_y + \cos \omega t \sin kx \vec{e}_z)$. On peut calculer la densité volumique d'énergie électrique par $u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}_{tot}^2$, on arrive à $u_e = 2\varepsilon_0 E_0^2(\sin^2 \omega t \cos^2 kx + \cos^2 \omega t \sin^2 kx)$. Pour l'énergie électromagnétique totale, on peut affirmer que le champ magnétique de l'onde contribue de la même façon que le champ électrique à l'énergie. Ainsi, la densité volumique d'énergie électromagnétique est $u_{em} = 4\varepsilon_0 E_0^2(\sin^2 \omega t \cos^2 kx + \cos^2 \omega t \sin^2 kx)$. On peut toutefois retrouver ce résultat en déterminant le champ magnétique totale par la relation $\text{rot} \vec{E}_{tot} = -\frac{\partial \vec{B}_{tot}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x \wedge \vec{E}_{tot}$ que l'on intègre par rapport au temps sans prendre de constante d'intégration en l'absence de champ magnétostatique. On trouve $\vec{B}_{tot} = \frac{2E_0}{c}(-\sin \omega t \cos kx \vec{e}_y + \cos \omega t \sin kx \vec{e}_z)$. On a donc une onde stationnaire dans le vide. On a donc une densité d'énergie magnétique dans le vide $u_m = \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}_{tot}^2$. En utilisant le fait que $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, on montre bien que le champ magnétique contribue autant à l'énergie électromagnétique que le champ électrique.

29. Vélométrie laser

Réponses :

1. On peut envisager deux types de réponse à la question. Commençons par une situation où les deux nappes ne sont pas cohérentes ou ne sont pas synchrones. La superposition des deux nappes ne peut donc pas entraîner l'existence d'interférences. Plaçons les deux nappes à 90° l'une de l'autre comme sur le schéma de la figure 1.

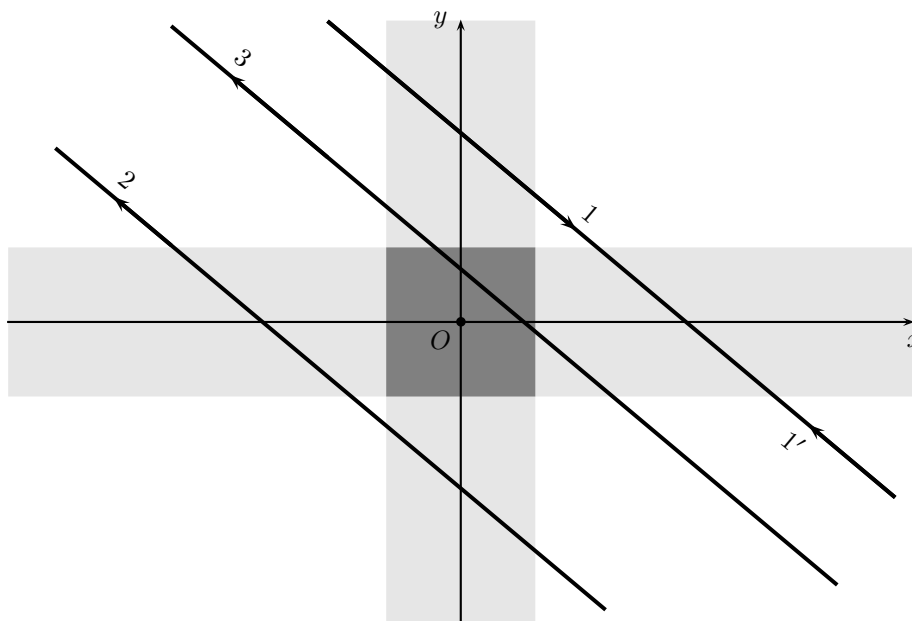


FIGURE 1 – Les deux nappes laser à 90°

Lorsque la particule va passer dans une nappe laser, elle va envoyer un signal constant proportionnel à l'intensité lumineuse d'éclairage. La durée sera du signal sera $\Delta t = \frac{\ell}{|\vec{v} \cdot \vec{e}_x|}$ ou bien $\Delta t = \frac{\ell}{|\vec{v} \cdot \vec{e}_y|}$. Si l'on prend l'exemple de la particule qui suit la trajectoire 1, on peut voir que c'est d'abord $v_x > 0$ qui sera

évaluée par la traversée de la nappe laser verticale. Ensuite, ce sera $|v_y| < v_x$ qui le sera au passage de la nappe horizontale. Le chronogramme obtenu pour 1 est donné à la figure 2. On peut constater que l'on peut pas distinguer, à ce stade, un trajet comme 2 par rapport au trajet 1. C'est la situation 3 qui va nous apporter la réponse. Dans ce cas, on a un créneau à deux étages si l'on peut dire. Comme les deux nappes laser superposent leur éclairage, on obtient le chronogramme particulier 3. En fait en décalant verticalement la nappe laser horizontale vers le haut ou vers le bas, donc en décalant la zone de superposition on peut espérer distinguer 2 de 1 à condition que le trajet de la particule se reproduise... ou bien que des particules toutes identiques reproduisent régulièrement les trajectoires étudiées. On notera que l'on a réglé le déclenchement de l'oscilloscope sur le signal montant.

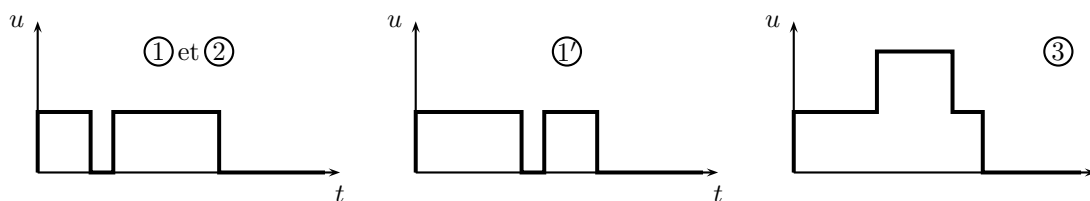


FIGURE 2 – Chronogrammes

Maintenant, on peut envisager que les nappes laser sont issues du même faisceau laser par dédoublement et que, par conséquent, elles sont synchrones et cohérentes. On oriente les deux nappes de telle sorte que le vecteur d'onde de la première fasse un angle α avec l'axe Ox , on a donc $\vec{k}_1 = \frac{2\pi}{\lambda}(\cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y)$. L'autre nappe est orientée selon un angle $-\alpha$ et donc $\vec{k}_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(\cos \alpha \vec{e}_x - \sin \alpha \vec{e}_y)$. Dans le losange où se superposent les deux nappes, on observe des interférences et des franges que la particule peut traverser. Dans le champ d'interférences, le déphasage entre les deux ondes en un point $M(x, y)$ est donné par $\varphi = (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{OM}$. On trouve facilement que $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} 2 \sin \alpha y$. Les intensités des deux nappes étant supposées identiques, on obtiendra une intensité donnée par la formule de FRESNEL : $I = 2I_0(1 + \cos 2\pi \frac{2 \sin \alpha}{\lambda} y)$. La vitesse de la particule est telle que $y = y_0 + v_y t$. La tension enregistrée sur l'oscilloscope proportionnelle à l'intensité lumineuse est : $f = \frac{2 \sin \alpha |v_y|}{\lambda}$. La mesure de cette fréquence peut être très précise et donnée beaucoup de précision à la mesure de la vitesse. Il faut remarquer qu'avec la disposition suivie, on mesure $|v_y|$. Pour mesurer $|v_x|$, il suffit de faire pivoter de $\pi/2$ les deux nappes, cela revient à raisonner sur un angle $\alpha + \frac{\pi}{2}$. Pour tirer parti de cette méthode, encore faut-il que la particule traverse le champ d'interférences. Si elle ne le fait pas, on se retrouve avec une situation similaire au cas précédent avec une particularité, c'est que l'angle entre les deux nappes laser est 2α et non pas 90° . Il faut le prendre en compte pour le calcul des vitesses en raisonnant sur une largeur de traversée $\frac{\ell}{\cos \alpha}$ au lieu de ℓ par exemple ou $\frac{\ell}{\sin \alpha}$.

30. Caractérisation d'équilibres

Réponses :

Ammoniac

- La réaction est : $\boxed{\text{N}_{2\text{gaz}} + 3 \text{H}_{2\text{gaz}} \rightleftharpoons 2 \text{NH}_{3\text{gaz}}}$.
- On construit un tableau d'avancement et on constate que le dihydrogène est en défaut. C'est lui qui va fixer l'avancement maximal possible. On pourra ainsi déterminer la quantité maximale de NH_3 que l'on peut espérer dans ces conditions. Le pourcentage de 24% doit être compris comme un pourcentage de cette valeur maximale.

	$\text{N}_{2\text{gaz}}$	+	$3 \text{H}_{2\text{gaz}}$	\rightleftharpoons	$2 \text{NH}_{3\text{gaz}}$	
$t = 0$	2 mol		1 mol		0	$n_{\text{tot}} = 3 \text{ mol}$
t_{eq}	$2 - \xi$		$1 - 3\xi$		2ξ	$n_{\text{tot}} = 3 - 2\xi$

Grâce au tableau d'avancement, on peut voir que $\xi_{\text{max}} = \frac{1}{3} \text{ mol}$. On a donc $\xi_{\text{réel}} = 0,08 \text{ mol}$, cela permet d'exprimer la composition détaillée du système. On trouve $n_{\text{N}_2} = 1,92 \text{ mol}$, $n_{\text{H}_2} = 0,76 \text{ mol}$, $n_{\text{NH}_3} = 0,16 \text{ mol}$ et $n_{\text{tot}} = 2,84 \text{ mol}$. on peut alors calculer la constante d'équilibre $K^\circ(T) = \frac{n_{\text{NH}_3}^2 n_{\text{tot}}^2}{n_{\text{N}_2} n_{\text{H}_2}^3} \left(\frac{p^\circ}{p}\right)^2$.

Toutes les valeurs numériques étant connues, on trouve $K^\circ(T) \simeq 6,1$. On peut reconstruire un tableau d'avancement avec $n_0 \text{ mol}$ de N_2 et $3n_0 \text{ mol}$ de H_2 au départ. On note α le taux de réaction de réaction, il représentera aussi le pourcentage de NH_3 formé. On trouve à l'équilibre les quantités de matière suivantes : $n_{\text{N}_2} = n_0(1-\alpha)$, $n_{\text{H}_2} = 3n_0(1-\alpha)$, $n_{\text{NH}_3} = 2n_0\alpha$ et $n_{\text{tot}} = 2n_0(2-\alpha)$. Cela permet d'exprimer la constante d'équilibre : $K^\circ(T) = \frac{16\alpha^2(2-\alpha)^2}{27(1-\alpha)^4} \left(\frac{p^\circ}{p}\right)^2$. Comme la température n'a pas changé, on peut utiliser la valeur

de la constante d'équilibre trouvée avant. Après simplification, on arrive à l'équation $\frac{\alpha(2-\alpha)}{(1-\alpha)^2} = 10,3$. On résout cette équation du second degré et on trouve $\alpha = 0,70$. Le pourcentage de NH_3 formé dans les conditions stœchiométriques est nettement plus élevé comme on pouvait s'en douter puisque l'on a $\boxed{70\%}$.

- Si on augmente la pression p , on va se placer hors-équilibre. Le quotient réactionnel $Q = \frac{n_{\text{NH}_3}^2 n_{\text{tot}}^2}{n_{\text{N}_2} n_{\text{H}_2}^3} \left(\frac{p^\circ}{p}\right)^2$ va être plus petit que la constante d'équilibre $K^\circ(T)$. Le système va évoluer pour que $Q \rightarrow K^\circ$ et donc le déplacement de la réaction s'effectuera dans le $\boxed{\text{sens direct}}$ pour que Q augmente. Ce raisonnement démontre la loi de modération de LE CHÂTELIER qui dit que le système va tendre à s'opposer à la perturbation qui l'a placé hors-équilibre. En effet, pour contrer une augmentation de pression, il faut tenter de la diminuer en évoluant dans le sens qui produit le moins de moles de gaz. Sur cette réaction, on a $\Delta_r n_{\text{gaz}} = 2 - (1 + 3) = -2$. C'est donc bien dans le sens direct qu'il y a modération.
- Pour pouvoir répondre, il faut exprimer la constante d'équilibre en fonction des paramètres bloqués à savoir le volume V et la température T . En utilisant la loi des gaz parfaits, on peut écrire que $p = n_{\text{tot}} \frac{RT}{V}$. La constante d'équilibre s'écrit alors : $K^\circ(T) = \frac{n_{\text{NH}_3}^2}{n_{\text{N}_2} n_{\text{H}_2}^3} \left(\frac{p^\circ V}{RT}\right)^2$. Si on ajoute du N_2 à V et T constants, on va réaliser à nouveau un quotient réaction $Q < K^\circ$ et la conclusion sera du même type qu'à la question précédente. L'évolution s'effectuera dans le $\boxed{\text{sens direct}}$. la lecture en terme de loi de modération est aisée puisque si l'on ajoute N_2 le système va tendre à consommer ce réactif qui est la cause de la mise hors-équilibre.

Eau oxygénée

- La formule de l'eau oxygénée est : $\boxed{\text{H}_2\text{O}_2}$.
- Il faut écrire chaque demi-équation électronique. On a tout d'abord $\text{MnO}_4^- + 8\text{H}^+ + 5\text{e}^- \rightleftharpoons 2\text{Mn}^{2+} + 4\text{H}_2\text{O}$ et ensuite $\text{H}_2\text{O}_2 \rightleftharpoons \text{O}_{2\text{gaz}} + 2\text{H}^+ + 2\text{e}^-$. Pour obtenir le bilan réactionnel, il faut équilibrer les transferts électroniques et donc multiplier par 2 la première équation et par 5 la seconde. On obtient, après simplifications, le bilan suivant $\boxed{2\text{MnO}_4^- + 5\text{H}_2\text{O}_2 + 6\text{H}^+ \rightleftharpoons 2\text{Mn}^{2+} + 5\text{O}_{2\text{gaz}} + 8\text{H}_2\text{O}}$.
- Pour déterminer la constante d'équilibre, on s'appuie sur l'unicité du potentiel $E_1 = E_2$. Ces potentiels sont donnés par la loi de NERNST : $E_1 = E_1^\circ + \frac{0,06}{5} \log \frac{[\text{MnO}_4^-][\text{H}^+]^8}{[\text{Mn}^{2+}]C^\circ}$ et $E_2 = E_2^\circ + \frac{0,06}{2} \log \frac{p_{\text{O}_2}[\text{H}^+]^2}{p^\circ[\text{H}_2\text{O}_2]C^\circ}$. On arrive, après calculs, à $\boxed{K^\circ = 10^{\frac{E_1^\circ - E_2^\circ}{0,006}} \simeq 10^{138}}$. On observe que $K^\circ \gg 1$. La réaction est quantitative et, par conséquent, utilisable pour effectuer un dosage, encore faut-il s'assurer qu'elle soit unique et cinétiquement rapide.
- On peut écrire un tableau d'avancement avec n_1 moles de MnO_4^- et n_2 moles de H_2O_2 . Il y a équivalence au moment où $n_1 - 2\xi_e = 0$ et $n_2 - 5\xi_e = 0$. Cela permet de retrouver la relation triviale entre les quantités de matières à l'équivalence : $\frac{n_1}{2} = \frac{n_2}{5}$. La relation permettant de trouver la concentration en eau oxygénée de la solution utilisée est alors $C_0 = \frac{2}{5}C \frac{V_e}{V_0}$. On trouve : $\boxed{C_0 = 1,44 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}$.
- Pour le repérage, on peut envisager de s'appuyer sur le fait que les ions MnO_4^- ont une $\boxed{\text{couleur violette}}$ très marquée alors que les autres ions sont incolores. Avant l'équivalence, MnO_4^- est en défaut, ils sont totalement consommés et la solution reste incolore. Une goutte après l'équivalence, il y a des ions MnO_4^- en trop, ils vont imposer leur couleur à la solution. Comme la teinte des ions permanganate est très marquée, on peut vite voir à une ou deux gouttes près le dépassement de l'équivalence. On peut envisager une méthode totalement différente basée sur une pile rédox. On plonge une électrode de platine dans la solution ainsi qu'une électrode de référence comme l'électrode au calomel. On relie chaque électrode aux entrées d'un voltmètre qui va mesurer la tension entre les deux électrodes. Autour de l'équivalence, la tension mesurée va très rapidement augmenter. C'est une méthode équivalente au suivi pH-métrique lors d'un dosage acido-basique.

5 Situation-problèmes

31. Un Microscope

Réponses :

La situation optimale pour l'œil est d'observer l'image ou l'objet en étant situé au Punctum Proximum ce qui représente une distance $\ell = 25$ cm pour un œil normal. Pour déterminer la taille d'un objet que l'on peut voir à l'œil nu, il faut connaître son pouvoir de résolution... C'est 1' d'angle : une minute d'angle $\alpha_0 = \frac{\pi}{180 \times 60} = 3 \times 10^{-4}$ rad, on peut aussi retenir la valeur en radian. Si l'on n'est pas trop sûr, on peut regarder son double-décimètre à 25 cm de ses yeux. On voit largement la graduation du mm, on peut essayer de dire que l'on commence à avoir des problèmes pour distinguer 0,1 mm. On va retrouver l'angle α_0 en faisant $\alpha_0 = \frac{10^{-4}}{2,5 \times 10^{-1}} = 4 \times 10^{-4}$ rad. On est très proche de la valeur retenue à savoir $\alpha_0 = 3 \times 10^{-4}$ rad. L'objet que l'on peut distinguer à travers l'instrument est donc 60 fois plus petit. La taille à 25 cm est $h_0 = \alpha_0 \times \ell = 75 \mu\text{m}$. Avec le microscope, on verra $h = \frac{h_0}{60} = 1,3 \mu\text{m}$. La diffraction provoque une divergence angulaire $\epsilon = \frac{\lambda}{a}$ si $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ est la longueur d'onde pertinente à savoir dans le spectre visible et a la taille qui provoque l'effet de diffraction le plus important. C'est la taille de l'objectif du microscope qui est faible. On retient un diamètre $a = 5$ mm. On trouve alors $\epsilon = 10^{-4}$ rad. On peut voir que cet angle est un peu inférieur à l'angle de résolution de l'œil. La diffraction n'est pas à prendre en compte.

32. Un œuf dur en rotation

Réponses :

Compte tenu de la forme de l'œuf, on va le modéliser par un cylindre de rayon R et de hauteur $\ell > R$. Le redressement de l'œuf est possible s'il possède assez d'énergie pour pouvoir faire monter son centre d'inertie de l'altitude $z_h = R$ lorsqu'on le fait tourner autour de son petit axe à l'altitude $z_v = \frac{\ell}{2}$ lorsqu'il tourne autour de son grand axe. En effet, on peut constater que la hauteur de l'œuf ℓ est supérieure à 2 fois le rayon R : $\ell > 2R$. La taille moyenne d'un œuf est d'environ $\ell = 6,0$ cm, si l'on utilise la figure pour faire le rapport d'échelle, on trouve que le rayon est $R = 2,2$ cm. Nous avons bien $\ell > 2R$. On va simplifier l'approche en considérant qu'il n'y a pas de pertes d'énergie mécanique lors du passage de la position horizontale à la position verticale. En position horizontale, l'énergie mécanique est $E_{mh} = \frac{1}{2}J_{Ox}\omega_h^2 + mgR$. Lorsque l'œuf est en position verticale, l'énergie mécanique s'exprime selon $E_{mv} = \frac{1}{2}J_{Oz}\omega_v^2 + mg\frac{\ell}{2}$. La conservation de l'énergie mécanique va nous permettre d'écrire que $J_{Ox}\omega_h^2 + mg2R = J_{Oz}\omega_v^2 + mg\frac{\ell}{2}$. La vitesse de rotation autour du grand axe est donnée par : $\omega_v^2 = \frac{J_{Ox}\omega_h^2 + mg(2R - \frac{\ell}{2})}{J_{Oz}}$. Comme le terme $2R - \frac{\ell}{2} < 0$, il n'est pas assuré que ω_v^2 soit positif. C'est ce qui amène une condition de minimum sur la vitesse de rotation ω_h . Nous allons donc écrire cette condition. On doit donc avoir $\omega_h^2 > \frac{mg(\ell - 2R)}{\frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}m\ell^2}$. On peut encore écrire que : $\omega_h > \sqrt{\frac{12g(\ell - 2R)}{3R^2 + \ell^2}}$. En prenant $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $\ell = 6,0$ cm et $R = 2,2$ cm, on arrive à la condition $\omega_h > 20 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ce qui représente environ 3 tours par seconde. Cela commence à être une belle vitesse de rotation, en essayant de le lancer, on risque d'envoyer l'œuf promener je ne sais où... Mais comme il est dur, s'il se casse c'est moins ennuyeux que s'il était frais... D'ailleurs, c'est l'occasion de parler de la rotation d'un œuf frais que l'on essaye de faire tourner. On constate que sa rotation s'arrête rapidement. Cela est la conséquence du fait que son intérieur est fluide et plutôt visqueux. On met en rotation la coquille qui entraîne le fluide mais cela met en jeu les forces de viscosité qui vont dissiper de l'énergie. Nous l'avons vu dans le cadre du cours de Mécanique, il ne faut pas oublier la puissance des forces intérieures pour un système déformable lorsque l'on effectue un bilan énergétique.