

## Exercices de révision pour les oraux : Série 1.

### 1 QCM

#### 1. Le Soleil

D'après la loi de STEFAN-BOLTZMANN, la puissance  $P$  émise par un corps noir sphérique, est liée à son rayon  $R$  et sa température  $T$ . La longueur d'onde du maximum du spectre du Soleil est actuellement d'environ 500 nm. Quand le Soleil deviendra une géante rouge, son rayon sera 200 fois plus grand et sa puissance rayonnée 4 000 fois plus importante.

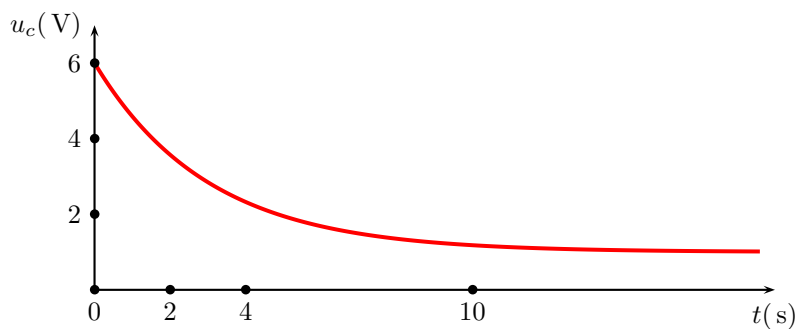
1. Quelle sera environ la nouvelle longueur d'onde du maximum d'émission en supposant que le Soleil se comporte toujours comme un corps noir ?

Proposition de réponses :

- a)  $5 \times 10^4$  nm      b)  $5 \times 10^3$  nm      c)  $9 \times 10^2$  nm      d)  $9 \times 10^3$  nm

#### 2. Décharge d'un condensateur

On souhaite mesurer une capacité inconnue à l'aide d'un circuit  $RC$  série alimenté par un générateur idéal de tension  $E$ . Ce dernier passe à la date  $t = 0$  d'une valeur  $E_1 = 6$  V à une valeur  $E_2 = 1$  V. On observe la tension aux bornes du condensateur évoluer selon le graphique de la figure 1 pour une résistance  $R = 10$  k $\Omega$ .



1. Quelle est la valeur de  $C$  ?

Proposition de réponses :

- a) 40  $\mu$ F      b) 30  $\mu$ F      c) 400  $\mu$ F      d) 300  $\mu$ F

#### 3. Microscope neutronique

Afin de mesurer la distance entre les atomes d'un cristal, on utilise un faisceau de rayons X de longueur d'onde de l'ordre de 0,1 nm.

1. Si on utilise un faisceau de neutrons dans le même but, quel doit être l'ordre de grandeur de l'énergie des neutrons ?

Proposition de réponses :

- a)  $10^{-20}$  J      b)  $10^{-17}$  J      c)  $10^{-10}$  J      d)  $10^{-7}$  J

#### 4. Automobiles

Un automobiliste démarre en ligne droite avec une accélération constante  $a_1 = 3,0$  m·s $^{-2}$ . Un autre automobiliste démarre, au même instant, de la position  $x_0 = 200$  m devant la première voiture, avec une accélération constante  $a_2 = 2,0$  m·s $^{-2}$ .

1. Au bout de combien de temps se rejoignent-ils ?

Proposition de réponses :

- a) 10 s      b) 20 s      c) 30 s      d) 40 s

## 2 Exercices

### 5. Diode de roue libre

Cette expression doit être comprise comme sur un vélo, l'avancée du vélo ne correspond pas nécessairement à une rotation du pédalier. Le pédalier est en quelque sorte découplé de la rotation des roues sauf, bien sûr, si on décide de pédaler pour maintenir ou augmenter la vitesse du vélo. La diode de roue libre se rencontre dans les dispositifs d'alimentation électrique d'un moteur. Un moteur électrique est équivalent, du point de vue électrique, à l'association en série d'une bobine d'inductance  $L$  et d'un conducteur ohmique de résistance  $R$ . Le montage électrique est celui de la figure 2. La diode est utile car si on veut ouvrir l'interrupteur  $K$  pour cesser d'alimenter le moteur électrique - comme on arrête de pédaler - alors la bobine qui n'aime pas les variations rapides du courant va créer par autoinduction une tension à ses bornes qui peut être très élevée et endommager les circuits électriques. La diode permet d'éviter ce phénomène en dissipant l'énergie stockée dans la bobine par effet JOULE.

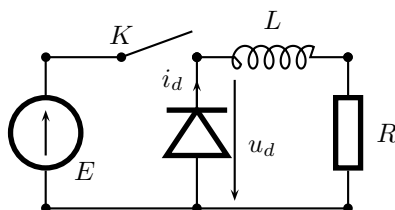


FIGURE 2 – Le moteur électrique et la diode de roue libre

1. La diode présente les caractéristiques de fonctionnement suivantes : si  $u_d \leq 0$  alors  $i_d = 0$  et si  $i_d \geq 0$  alors  $u_d = 0$ . Représenter la caractéristique courant-tension  $i_d = f(u_d)$ . Avec quel dipôle électrique peut-on faire la comparaison ?
2. Établir, lorsque l'interrupteur  $K$  est fermé, le régime de fonctionnement de la diode.
3. L'interrupteur  $K$  est fermé depuis longtemps, on estime que le régime permanent est atteint. Quelle est l'intensité  $I$  qui circule dans le moteur électrique ?
4. À une date choisie comme étant origine ( $t = 0$ ), on ouvre l'interrupteur  $K$ . Établir l'expression de l'intensité  $i(t)$  circulant dans le moteur en fonction du temps.
5. En réalité la diode présente une tension de seuil  $u_s = 0,7 \text{ V}$  sur la plupart des diodes courantes. Cette tension de seuil modifie le fonctionnement de la diode qui devient : si  $u_d \leq u_s$  alors  $i_d = 0$  et si  $i_d \geq 0$  alors  $u_d = u_s$ . Reprendre la question précédente.

### 6. Filtrage et impédance itérative

Le dipôle  $AB$  est étudié en régime sinusoïdal forcé de pulsation  $\omega$ . L'impédance de charge est notée  $Z$ , voir la figure 3.

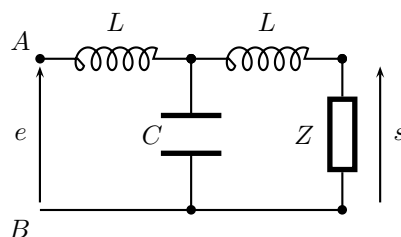


FIGURE 3 – Impédance itérative

1. Déterminer l'impédance  $Z(\omega)$  pour que l'impédance équivalente au dipôle  $AB$  se confonde avec  $Z(\omega)$ . On suppose que cette condition est réalisée par la suite. Donner les expressions de  $R_0$  valeur de  $Z(\omega)$  pour  $\omega \rightarrow 0$  et de  $\omega_c$  valeur de  $\omega$  pour laquelle on a  $Z(\omega) = 0$ .
2. On impose maintenant  $Z = R_0$  et on attaque le dipôle par un générateur de force électromotrice  $e_g(t) = E_0 \cos \omega t$  et de résistance interne  $R_0$ . Déterminer la fonction de transfert  $\underline{H} = s/e$  et tracer les diagrammes de Bode correspondants. On posera  $x = \omega/\omega_c$ .
3. Si l'on considère la fonction de transfert  $\underline{H}' = s/e_g$ , on arrive au résultat suivant :

$$\underline{H}' = \frac{1}{2 + 4(jx) + 4(jx)^2 + 2(jx)^3}$$

Expliquer le comportement en basse fréquence de cette fonction de transfert.

## 7. Modulation

Sur le schéma de la figure 4, on représente la structure d'un modulateur faisant intervenir deux circuits multiplieurs de coefficient  $k$ , deux déphaseurs introduisant un déphasage de  $-90^\circ$  ainsi qu'un sommateur. On pose les signaux  $s_p(t) = S_p \cos \omega_p t$  de fréquence  $f_p = 10$  MHz et  $s_m(t) = S_m \cos \Omega t$  de fréquence comprise entre 100 Hz et 10 kHz.

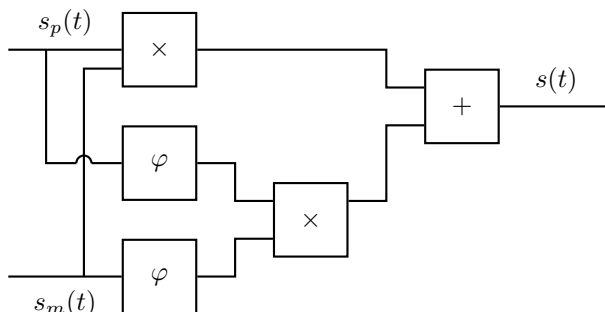


FIGURE 4 – Structure du modulateur

1. Préciser l'expression de  $s(t)$  et la bande spectrale occupée. Commentaire ?
2. Soit un filtre linéaire de fonction de transfert de la forme :

$$\underline{H} = \frac{1 - jx}{1 + jx}$$

où  $x$  est la fréquence réduite. Quel est son gain ? Est-il exploitable pour réaliser les circuits déphaseurs précédents ?

3. Soit le montage représenté à la figure 5 où chaque bloc  $D_i$  est un déphaseur d'ordre 1 de pulsation caractéristique  $\omega_i = 1/R_i C_i$  avec  $R_i$  et  $C_i$  des valeurs de résistances et capacités. Soit  $f_i$  la fréquence associée. Compléter le tableau suivant :

$i$	1	2	3	4	5	6
$f_i$ (Hz)	52		4 702	212		19 195
$R_i$ (kΩ)		26,4	10		1	0,1
$C_i$ (nF)	1 000	10		100	96	

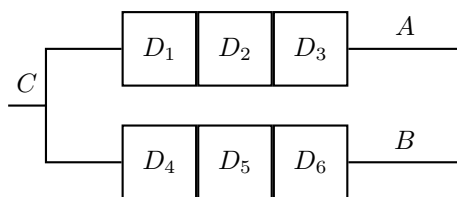


FIGURE 5 – Succession de déphaseurs

4. Expliquer le fonctionnement et l'intérêt du dispositif avec les six déphaseurs sachant que le signal d'entrée est  $C$  et les signaux de sortie  $A$  et  $B$ .

## 8. Gallium

Les noyaux atomiques d'un certain métal ont un spin 1 ; ce spin peut se trouver dans l'un des trois états quantiques  $m = -1$ ,  $m = 0$  ou  $m = +1$ . À chaque spin est associé un moment quadripolaire électrique qui interagit avec le champ électrique interne du cristal, les interactions entre spins différents étant négligeables. En raison de l'interaction champ électrique-quadripôle, les niveaux  $m = -1$  et  $m = +1$  ont la même énergie, supérieure d'une valeur  $\epsilon$  à l'énergie du niveau  $m = 0$  choisi comme référence.

1. Calculer l'énergie moyenne molaire  $E_m$  et la capacité thermique molaire  $C_m$  associées à l'existence des quadripôles nucléaires.

2. Discuter l'évolution de la capacité thermique molaire  $C_m$  avec la température.
3. Le noyau de Gallium possède un moment quadrupolaire et on peut mesurer expérimentalement sa capacité thermique molaire, pour  $T$  en kelvin comprise entre 0,003 et 0,020 :

$$C_m(T) = 4,3 \cdot 10^{-4} T^{-2} + 0,596 T$$

en  $\text{mJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

Les conditions expérimentales sont telles que la supraconductivité naturelle à basse température du Gallium est supprimée et celui-ci se comporte comme un métal ordinaire. Discuter la loi expérimentale et en déduire  $\epsilon$  en eV.

### 9. Rampe de potentiel

Un électron, d'énergie  $\mathcal{E}$ , en mouvement libre le long de l'axe  $Ox$  depuis la gauche, pénètre dans une région  $x \geq 0$  où règne un champ électrique uniforme, indépendant du temps,  $\vec{E} = E\vec{e}_x$  avec  $E > 0$ .

1. Quelle est l'expression de l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_p$  sachant que l'on choisit  $\mathcal{E}_p(0) = 0$  ?
2. Expliquer le comportement classique de l'électron en précisant les relations quantitatives pertinentes. Sachant que  $E = 10^5 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ , calculer une abscisse remarquable  $x_0$  pour  $\mathcal{E} = 10 \text{ eV}$ .
3. On s'intéresse à présent à une approche quantique. Expliciter l'origine et le sens physique de la relation suivante :

$$\frac{d^2\psi}{dX^2} - X\psi = 0 \quad \text{où} \quad X = \alpha(x - x_0)$$

avec  $\alpha$  un coefficient que l'on déterminera en précisant sa dimension physique et son unité SI.

4. La résolution approchée non demandée de l'équation différentielle précédente fournit :

$$\begin{cases} \psi(x < x_0) \simeq \frac{C_1}{(x_0 - x)^{1/4}} \cos\left[\frac{2}{3}\alpha^{3/2}(x_0 - x)^{3/2}\right] \\ \psi(x > x_0) \simeq \frac{C_2}{(x - x_0)^{1/4}} \exp\left[-\frac{2}{3}\alpha^{3/2}(x - x_0)^{3/2}\right] \end{cases}$$

Donner une représentation de la probabilité de détection de l'électron suivant la position dans l'espace, on pourra utiliser une calculatrice ou un ordinateur pour faire la représentation de la densité de probabilité. Commenter la figure obtenue.

### 10. Oscillateur à moteur

Un chariot de masse  $M$  et de longueur  $L$  peut coulisser avec des frottements de type fluide de coefficient  $h$  sur l'axe horizontal  $Ox$ . Un moteur, situé en  $A$ , solidaire du chariot, permet la rotation de l'équerre  $AIP$  autour de l'axe vertical  $AI$  : la masse  $m$  de ce système est concentrée au point  $P$ . La vitesse de rotation  $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$  est maintenue constante. La longueur  $IP$  est notée  $r$ . On supposera qu'à l'instant initial, le ressort n'est pas allongé est qu'à ce moment  $IP$  est colinéaire à  $Ox$ . Le ressort possède une constante de raideur  $k$  et une longueur à vide  $l_0$ , voir la figure 6.

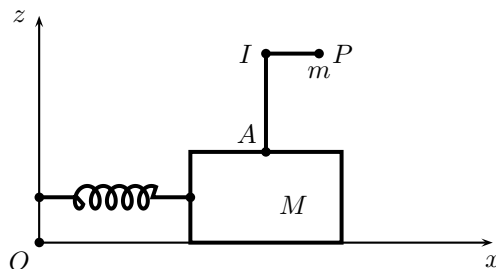


FIGURE 6 – Oscillateur à moteur

1. Étudier la position du système en régime permanent.
2. Déterminer la puissance instantanée  $P_{mot}$  délivrée par le moteur.
3. Évaluer le couple  $\Gamma_{mot}$  exercé par le moteur sur l'équerre. Vérifier la conformité avec la question précédente.

### 11. Satellite accéléré

Un satellite de masse  $m$  est sur une orbite circulaire de rayon  $r_0$  à la vitesse  $v_0$ . On lui communique une petite variation de vitesse  $\delta v_0$  positive ou négative, le satellite restant dans un état lié. La vitesse supplémentaire donnée est dans la même direction que celle de la vitesse initiale.

1. Décrire le type de trajectoire qu'on pourra obtenir.
2. Exprimer le demi grand axe  $a$  de la trajectoire, ainsi que l'excentricité  $e$  au premier ordre en  $\delta v_0/v_0$ .
3. Déterminer la variation relative de période  $\delta T_0/T_0$ .

### 12. Réacteur nucléaire

On étudie un réacteur nucléaire modélisé par un cylindre verticale invariant dans le plan horizontal selon les coordonnées  $x$  et  $y$ . Seule la coordonnée  $z$  est pertinente pour décrire le système. Le bas du cylindre est constitué du combustible sur une hauteur  $h = 1$  m. On trouve au-dessus une réserve d'eau liquide de hauteur  $H = 10$  m et ensuite de l'air à la pression atmosphérique  $p^\circ = 1$  bar et à la température  $T_0 = 298$  K, voir le schéma de la figure 7.

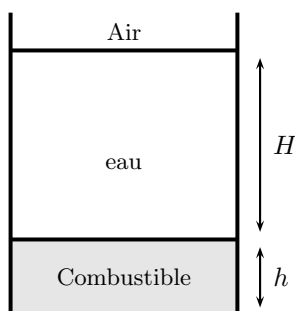


FIGURE 7 – Réacteur nucléaire

On précise que le combustible dégage une puissance volumique  $Q$ , que l'eau de masse molaire  $M = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  possède une masse volumique supposée invariable  $\rho_0$  et une conductivité thermique  $\lambda = 0,6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

1. La température d'ébullition de l'eau donnée par la loi :

$$T^{eb} = a \ln \frac{p}{p^\circ} + b$$

avec  $a = 27 \text{ K}$  et  $p$  la pression de l'eau. Donner la valeur de  $b$ . Déterminer l'expression en fonction de  $z$  de la température d'ébullition de l'eau  $T^{eb}(z)$ . Tracer l'allure du graphique correspondant.

2. Montrer que si  $Q > Q_{max}$  alors l'eau se met à bouillir dans le réacteur nucléaire. Déterminer la valeur de  $Q_{max}$ .
3. On donne à présent  $Q = 5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}$ . Déterminer la température du combustible.
4. La chaleur latente massique (enthalpie massique) de vaporisation de l'eau est donnée par la formule :

$$L_{vap} = \frac{RT^2}{Mp^{sat}} \frac{dp^{sat}}{dT}$$

où  $p^{sat}$  est la pression de vapeur saturante. On donne  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ . Déterminer  $L_{vap}$  à la surface du combustible.

5. Déterminer la masse d'eau vaporisée par seconde et par mètre carré au-dessus du combustible lorsque  $Q = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}$ .

### 13. Oscillations d'un piston

On considère une enceinte de volume  $V_0$  contenant un gaz parfait de coefficient  $\gamma = c_p/c_v$  indépendant de la température. Cette enceinte est surmontée d'un col de volume  $Sh$  où  $S$  est la section du col, voir la figure 8. Le gaz contenu dans l'enceinte est à la température  $T_0$  et à la pression  $p_0$  qui sont la température et la pression ambiante. À la date  $t = 0$ , on lâche un piston étanche depuis la position  $z = 0$  dans le col de l'enceinte. Le piston de section  $S$  glisse sans frottement sur les parois du col, tout en interdisant que du gaz s'échappe de l'enceinte. Le col de l'enceinte est relativement fin, on a  $Sh \ll V_0$ . Le piston possède une masse  $m$ .

1. Dans le cas réel, le piston subit des frottements de glissement même s'ils sont relativement faibles. Après un certain nombre d'oscillations dans le col, le piston finit par s'arrêter à une position repérée par  $z_{eq}$  et reste indéfiniment dans cette position. Expliquer qualitativement l'existence d'oscillations. À quel régime d'oscillation correspond la situation décrite ? Déterminer  $z_{eq}$  et discuter son existence.

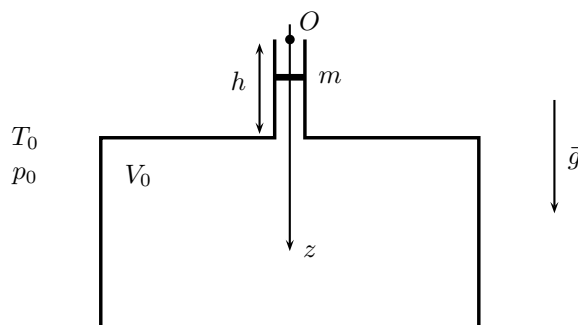


FIGURE 8 – Enceinte avec col - Oscillations d'un piston

- On néglige maintenant les frottements et on étudie ce qui correspond aux premières oscillations du piston. On suppose que ces oscillations sont relativement rapides et que, pendant cette phase, le gaz contenu dans l'enceinte n'a pas le temps d'effectuer des transferts thermiques avec l'extérieur. Déterminer la pulsation des oscillations.
- Établir, toujours dans le cadre de la question précédente, l'équation horaire  $z(t)$  du mouvement du piston. À quelle condition, le piston ne tombe-t-il pas dans l'enceinte de volume  $V_0$ ? Commenter le résultat obtenu.

#### 14. Entrée dans une zone de champ magnétique

Un cadre carré, de résistance électrique totale  $R$  et d'autoinductance négligeable, de côté  $\ell$  et de masse  $m$ , est astreint à se déplacer sur une glissière horizontale sans frottement. On repère par  $x(t)$  la position de son côté droit. Il arrive depuis  $x = -\infty$  avec la vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ . Il pénètre dans la zone  $x > 0$  grisée sur le schéma de la figure 9 où règne un champ magnétique uniforme  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ . La zone de champ magnétique est d'extension spatiale  $L = 4\ell$ . On prend pour origine des temps l'instant où le cadre commence à entrer dans le champ magnétique.

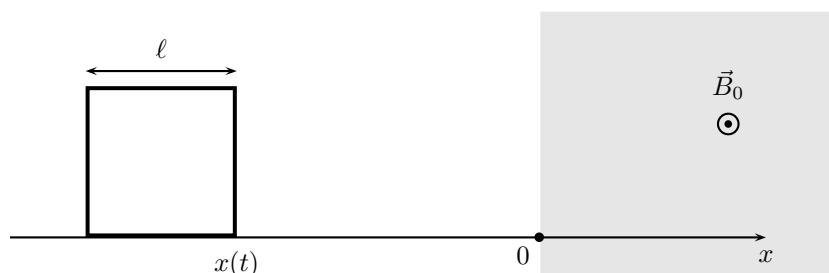


FIGURE 9 – Cadre conducteur pénétrant dans une zone de champ magnétique

- Effectuer une analyse qualitative du mouvement du cadre.
- Établir l'équation du mouvement du cadre pour tout  $x$ .
- On souhaite que le cadre ait une vitesse  $\vec{v}_s = \alpha v_0 \vec{e}_x$ , avec  $\alpha < 1$ , une fois qu'il est sorti de la zone de champ magnétique. Déterminer l'intensité du champ magnétique  $\vec{B}_0$  qui permet d'aboutir à une telle vitesse.

#### 15. Solénoïde épais

On considère un solénoïde constitué d'un milieu conducteur compris entre les rayons  $R_1$  et  $R_2 > R_1$  d'axe  $Oz$ . L'intérieur du solénoïde est vide, on considérera que le solénoïde est infini. Dans le milieu conducteur circulent des courants indépendants du temps décrits par la densité volumique de courant  $\vec{j} = j_0 \vec{e}_\theta$ .

- Déterminer le champ magnétique créé en tout point de l'espace par ce solénoïde.
- Donner l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique. En déduire l'énergie magnétique du solénoïde pour une longueur  $h$  de ce dernier.

#### 16. Diffraction par un CD

On éclaire la face d'un CD contenant les informations avec un laser monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ . Le CD est orienté à  $45^\circ$  par rapport à l'horizontal envoyant ainsi des rayons lumineux sur le plafond de la salle. Le faisceau laser lui est horizontal, voir le schéma de la figure 10.

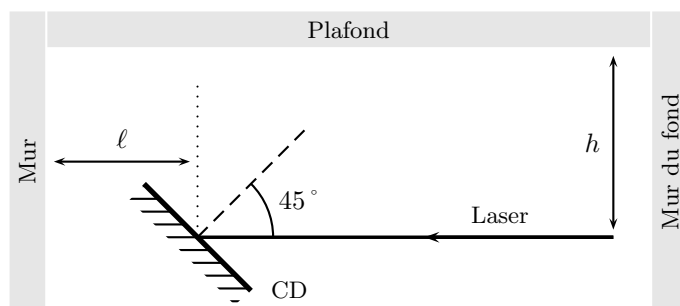


FIGURE 10 – CD agissant comme un miroir diffractant la lumière laser

Le CD est disposé à  $h = 1,30$  m du plafond. Sur le CD, l'information est stockée sur une spirale linéaire qui part du centre et qui va vers l'extérieur. Le pas de la spirale est  $a = 1,6 \mu\text{m}$ . Le CD est installé à  $\ell = 1$  m du mur, la longueur totale de la pièce est  $L = 5$  m.

1. Expliquer qualitativement pourquoi on observe plusieurs taches lumineuses au plafond.
2. Déterminer le nombre de taches lumineuses observées au plafond.
3. Déterminer la position des taches observées ;

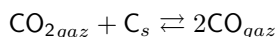
### 17. Système de trois fentes

On considère un système de trois fentes infinies et infiniment fines séparées par la longueur  $a$ . Elles sont éclairées par une source monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  placée au foyer objet d'une lentille convergente de distance focale  $f$ . On place un écran d'observation dans le plan focale image d'une seconde lentille convergente de distance focale  $f$ .

1. Déterminer l'éclairement obtenu en un point  $M$  de coordonnées  $x$  sur l'écran.
2. On étudie maintenant le cas où les fentes sont de largeur  $b$  finie avec  $b < a$ . Déterminer à nouveau l'éclairement en  $M$ .

### 18. Équilibre de Boudouard

On considère l'équilibre de BOUDOUARD :

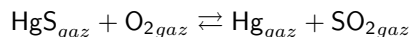


	$\text{CO}_{\text{gaz}}$	$\text{CO}_{2\text{gaz}}$
$\Delta_f G^\circ (\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1})$	-137,2	-394,4
$\Delta_f H^\circ (\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1})$	-110,5	-393,5

1. Donner l'expression de la constante d'équilibre  $K$  en fonction des activités des constituants du système, puis en fonction des pressions partielles des gaz.
2. Calculer  $\Delta_r G^\circ$  et  $K$  à 298 K.
3. Dans une enceinte de volume  $V = 10$  L, on introduit à 298 K, un excès de carbone graphite et 0,1 mol de  $\text{CO}_2$ . Calculer l'enthalpie libre de réaction initiale du système, que peut-on en conclure ?
4. Calculer les pressions partielles des gaz à l'équilibre.
5. Comment évoluera l'équilibre précédent si on augmente la température ?
6. Comment évoluera l'équilibre précédent si on augmente la pression ?

### 19. Élaboration du mercure

Le mercure se prépare exclusivement à partir de  $\text{HgS}$  par grillage à l'air vers  $700^\circ\text{C}$ , sous pression atmosphérique :



Le gaz de grillage circule dans des batteries de tubes, refroidis à l'eau, afin de condenser le mercure. Ce dernier est enfin purifié par distillation sous vide.

1. En prenant initialement un mélange de 1 mole de  $\text{HgS}$  et 5 moles d'air, trouver le taux de conversion de  $\text{HgS}$  à l'équilibre connaissant l'enthalpie libre standard de la réaction à  $700^\circ\text{C}$  :  $\Delta_r G^\circ = -309 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

## 20. Élaboration du chrome

Le chrome se prépare essentiellement par réduction de  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  par l'aluminium. Ici, nous envisageons deux autres méthodes. On fournit les données thermodynamiques suivantes :

	$\text{Cr}_{\text{solide}}$	$\text{Cr}_2\text{O}_{3\text{solide}}$	$\text{H}_{2\text{gaz}}$	$\text{H}_2\text{O}_{\text{gaz}}$
$\Delta_f H^\circ$ en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$	0	-1139,7	0	-241,8
$S^\circ$ en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$	23,8	81,2	130,6	188,7

Les masses molaires atomiques utilisées sont :  $\text{H} = 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;  $\text{O} = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;  $\text{Cr} = 52 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

- Historiquement, le premier réducteur utilisé fut le dihydrogène. Comment, selon vous, produit-on industriellement le dihydrogène ? Écrire l'équation bilan de la réaction.
- Écrire le bilan de la réduction de l'oxyde de chrome par le dihydrogène à 400 K ? Donner l'expression de l'enthalpie libre standard de la réaction en fonction de  $T$ . Calculer la constante de cet équilibre à 400 K. Comment évolue-t-elle avec la température ?
- À  $T = 1200 \text{ K}$ , on charge un réacteur avec 100 kg de  $\text{Cr}_2\text{O}_3$ . Quelle est la masse de  $\text{H}_2$  à utiliser pour obtenir une réduction totale ?
- En supposant que l'on puisse imposer la valeur du rapport  $R$  des pressions partielles en  $\text{H}_2$  et  $\text{H}_2\text{O}$  à l'équilibre, quelle valeur faut-il donner à  $R$  pour passer d'une atmosphère oxydante à une atmosphère réductrice de l'oxyde de chrome à  $T = 1200 \text{ K}$  ?

Un autre procédé utilisé pour obtenir le chrome est l'électrolyse d'une solution aqueuse de trioxyde de chrome. Les données industrielles sont les suivantes : on électrolyse une solution aqueuse de  $\text{CrO}_3$  à  $250 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$  avec une tension d'électrolyse de l'ordre de 5 V et une densité de courant de  $30 \text{ A} \cdot \text{dm}^{-2}$ . Le rendement électrochimique est d'environ 30%.

- Interpréter qualitativement ce faible rendement en précisant la nature des sous-produits formés. Calculer la masse de chrome déposée par heure et par mètre carré de surface d'électrode.

## 21. Équilibres d'oxydoréduction

On considère les couples :  $\text{Cr}^{3+}/\text{Cr}^{2+}$  de  $E^\circ = -0,41 \text{ V}$  et  $\text{Hg}^{2+}/\text{Hg}_2^{2+}$  de  $E^\circ = 0,91 \text{ V}$ . On effectue un mélange et lorsque celui-ci est fait mais avant toute réaction, on a  $[\text{Cr}^{2+}] = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  et  $[\text{Hg}^{2+}] = 0,3 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

- Écrire l'équation de la réaction chimique qui se produit.
- Calculer sa constante d'équilibre.
- Déterminer le potentiel  $E_{eq}$  d'équilibre atteint.
- Reprendre les questions précédentes avec :  $[\text{I}_2] = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  dans une solution de  $\text{pH} = 6$  maintenue à ce  $\text{pH}$  grâce à une solution tampon. On donne :  $\text{I}_2/\text{I}^-$  de  $E^\circ = 0,54 \text{ V}$  et  $\text{IO}_3^-/\text{I}_2$  de  $E^\circ = 1,19 \text{ V}$ .



### 3 Python Centrale

#### 22. Foudre et électrocution

Lors d'un coup de foudre, l'air est ionisé dans un canal entre le sol et le nuage orageux. Un coup de foudre est une décharge électrique caractérisée par des courants de fortes amplitudes et de courtes durées. Lors de la décharge d'un coup de foudre, on a réalisé l'enregistrement représenté à la figure 11.

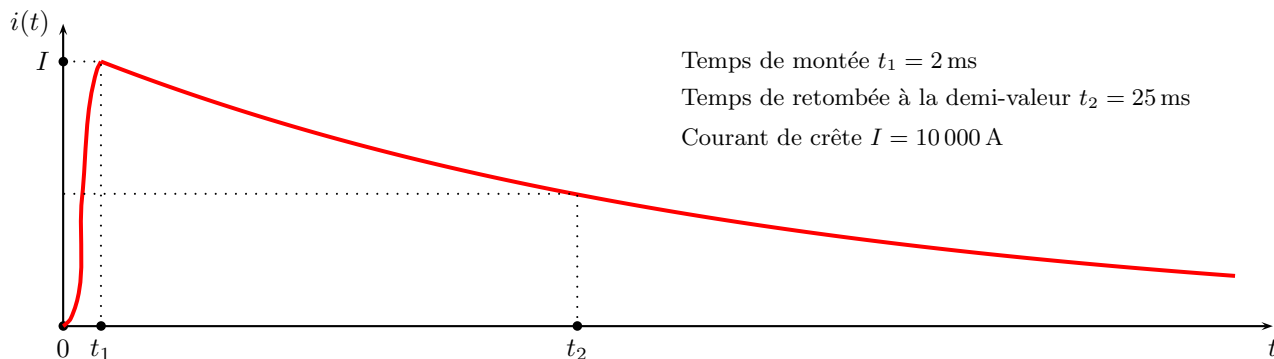


FIGURE 11 – Évolution du courant de foudre

On assimile par la suite la fonction  $i(t)$  par une fonction affine par morceaux. On modélise un éclair par un fil rectiligne, parcouru par un courant  $i(t)$  uniformément réparti dans le fil. On se place dans l'approximation des régimes quasi stationnaires. L'activité électrique orageuse a en général pour effet de recharger la Terre négativement. Par temps orageux, il peut être dangereux de chercher à s'abriter près d'un arbre. L'éclair traversant l'arbre est modélisé par un fil rectiligne vertical qui prend fin au niveau du sol, où l'on suppose que la densité volumique de courant est radiale, de la forme  $\vec{j} = j(r, t)\vec{e}_r$ , expression dans laquelle  $\vec{e}_r$  est le vecteur radial des coordonnées sphériques. On note  $\gamma$  la conductivité électrique du sol.

- Déterminer l'expression du champ électrique  $\vec{E} = E(r, t)\vec{e}_r$  dans le sol.
- Un être humain se trouve à la distance moyenne  $d = 1 \text{ m}$  de l'arbre et la distance entre ses deux pieds est  $p = 50 \text{ cm}$ . Déterminer l'expression, en fonction de  $p$  et  $d$ , des potentiels au niveau des pieds de l'être humain. En déduire l'expression de la différence de potentiel entre les pieds  $U_p$ , ou tension de pas.
- Compléter le programme *Python* nommé *2015-019* pour représenter la tension  $U_p(t)$  entre les pieds de l'être humain. On prendra  $\gamma = 1,5 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ .
- En étudiant le tableau ci-dessous, déterminer si l'être humain est en danger.

Tension de contact (V)	50	75	100	150	230	300	400	500
Impédance du corps ( $\Omega$ )	1 725	1 625	1 600	1 550	1 500	1 480	1 450	1 430
Courant dans le corps (mA)	29	46	62	97	153	203	276	350
Temps de passage maximal (s)	$\geq 5$	0,60	0,40	0,28	0,17	0,12	0,07	0,04

- On considère maintenant le téléphone portable que cet être humain possède dans sa poche. On donne  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ . Élaborer un modèle permettant d'estimer l'impact du champ magnétique sur le téléphone portable.
- Compléter le programme pour qu'il représente l'évolution de la force électromotrice induite dans le téléphone au cours du temps.

## 4 X-ENS

### 23. Élastique sur une demi-boule

Un élastique circulaire de masse  $m$ , de longueur au repos  $\ell_0$  et de raideur  $k$  est placé autour d'une demi-boule de rayon  $R$ . La boule est placée sur le plan horizontal. On recherche l'angle  $\theta$  pour lequel l'élastique est à l'équilibre sur la demi-boule, voir le schéma de la figure 12.

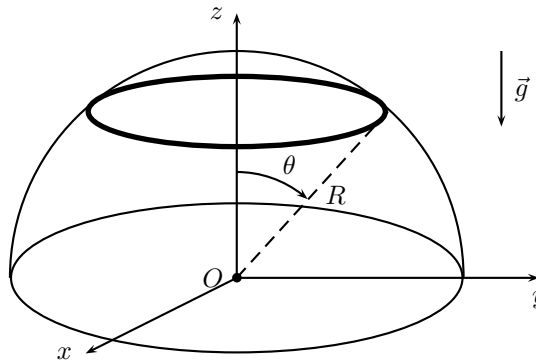


FIGURE 12 – Élastique autour d'une demi-boule

1. Déterminer l'angle  $\theta$  à l'équilibre en fonction des paramètres du problème. On négligera les frottements entre la boule et l'élastique. Discuter le résultat.
2. Reprendre le problème en considérant que le coefficient de frottement est  $\mu$  constant sur toute la surface de la demi-boule.

### 24. Deux cylindres superposés

On considère deux cylindres, identiques, de masse  $m$  et de rayon  $R$ . Ils sont superposés tout en étant placés contre un mur vertical. Dans cette étude, on néglige tous les frottements. Ainsi les cylindres ne peuvent se mettre en rotation et rouler l'un sur l'autre par exemple. Leur vitesse de rotation sera toujours considérée comme nulle. Il y a glissement sans frottement aussi bien contre le mur vertical, que sur le sol horizontal qu'entre les deux cylindres. Voir le schéma de la figure 13. À la date  $t = 0$ , une petite perturbation déclenche un léger glissement du cylindre inférieur vers la droite.

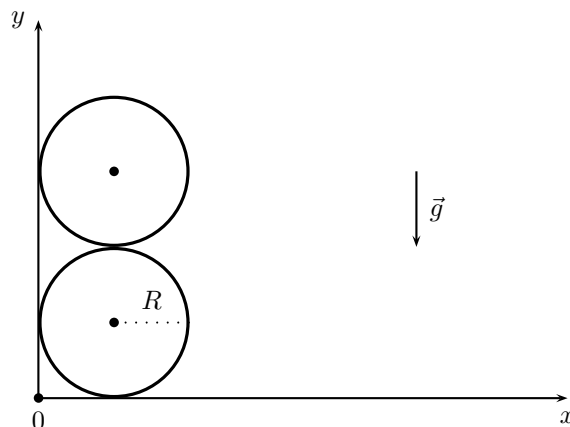


FIGURE 13 – Les deux cylindres superposés à la date  $t = 0$

1. Décrire le mouvement des cylindres.
2. Déterminer la vitesse finale du cylindre inférieur.
3. Analyser la situation finale sur le plan énergétique.

### 25. Interaction trou noir - étoile

On considère un trou noir de masse  $M_0 = 10^{37}$  kg et de rayon  $R_0$ . Une étoile, de masse  $m_e = 10^{30}$  kg et de rayon  $R_e = 10^9$  m, se déplace sous l'influence gravitationnelle du trou noir sur une trajectoire parabolique caractérisée

par une constante des aires  $C_e = 10^{19} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . On envisage l'étoile dans une phase d'approche du trou noir. On suppose que le potentiel gravitationnel auquel est soumise l'étoile de la part du trou noir est de la forme :

$$V(r) = -\frac{\mathcal{G}M_0}{r - R_0} \quad \text{pour } r > R_0 \quad \text{sinon } V \rightarrow -\infty$$

On rappelle une valeur approchée de la constante de gravitation universelle :  $\mathcal{G} = 6,7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ .

1. Donner l'expression de  $R_0$  sachant que pour une particule de matière placée à la surface du trou, la vitesse de libération est la vitesse de la lumière  $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Calculer numériquement  $R_0$ , commenter.
2. L'orbite de l'étoile présente-t-elle un point de rayon minimal ?
3. L'étoile peut-elle rester intact ou sera-t-elle disloquée lors de son approche du trou noir ?

## 26. Satellite à voile du Soleil

On considère un satellite en orbite circulaire autour du Soleil. Il est muni d'une voile solaire, que l'on assimile à un objet parfaitement réfléchissant et que l'on suppose initialement repliée.

1. La voile est dépliée l'instant initial, en un temps supposé négligeable. Décrire la trajectoire du satellite en fonction d'un paramètre sans dimension que l'on introduira.
2. Dans le cas d'une trajectoire ouverte, quelle est la vitesse du satellite loin du Soleil ?

## 27. Pendule aimanté

On considère un pendule constitué d'une tige de longueur  $\ell$  et de masse négligeable en rotation autour d'un axe horizontal sans frottement. Au bout de cette tige est fixé un aimant permanent qui sous l'effet du poids va osciller à proximité d'une bobine caractérisée par un coefficient d'autoinductance  $L$  et une résistance interne  $R$ . Les deux extrémités du fil constituant la bobine sont reliées par un fil court-circuit de résistance totalement négligeable. Le pendule oscille par rapport à la verticale en faisant un angle  $\theta$  avec celle-ci. En fonction de l'angle  $\theta(t)$  du pendule, le flux du champ magnétique provoqué par l'aimant dans la bobine est donné par :

$$\phi(t) = \phi_0 + \phi_b \theta(t)$$

On suppose que l'angle  $\theta(t)$  évolue de la façon suivante :

$$\theta(t) = A(t) \cos \omega t$$

où  $A(t)$  est l'amplitude des petites oscillations sur une période autour de la date  $t$ , sachant que cette amplitude varie peu sur la période des oscillations. On indique que  $\omega$  est la pulsation des petites oscillations lorsque l'on retire la bobine du voisinage du pendule.

1. Déterminer l'expression de  $\omega$ .
2. On commence par négliger l'autoinduction de la bobine. Déterminer l'expression de l'amplitude  $A(t)$  des oscillations du pendule.
3. Comment les choses sont-elles modifiées si on ne néglige plus l'autoinduction de la bobine ?

## 28. Freinage dans un tuyau

Une expérience classique de mise en évidence du freinage à induction consiste à faire chuter verticalement un petit aimant dans un tube métallique. Pour faire cette étude, il est préférable de changer de référentiel. On étudiera le freinage d'un tube possédant une vitesse verticale orientée vers le haut qui se déplace autour d'un petit aimant de moment magnétique fixe  $\vec{M} = M\vec{e}_z$ . Le tube est aussi d'axe vertical  $Oz$ . Le moment magnétique est placé à l'origine du repère de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  utile dans le problème. Le tube possède un rayon  $R$ , une longueur  $L$  et une épaisseur  $e$  telles que  $L \gg R \gg e$ . Le tube possède une masse  $m$  et une conductivité électrique  $\gamma$ . Voir le schéma de la figure 14.

On rappelle l'expression du champ magnétique dipolaire dans le système des coordonnées sphériques :

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

On donne aussi l'intégrale :  $\int_0^\pi \sin^6 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{5\pi}{128}$

On notera que l'angle  $\theta$  des coordonnées sphériques a une fonction particulière ici puisque c'est l'angle qui définit la position de la portion de tube étudiée.

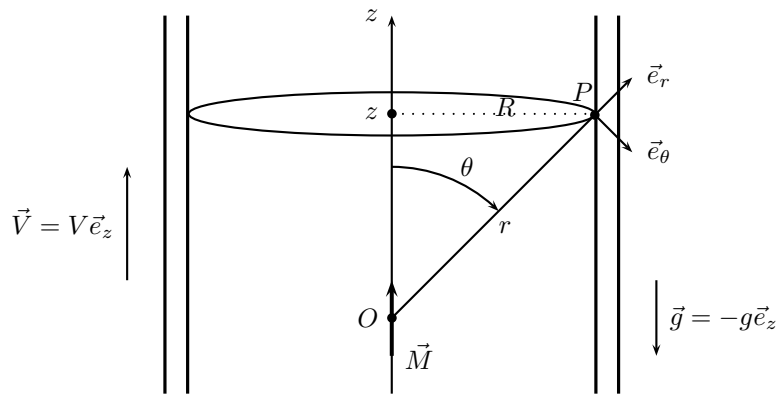


FIGURE 14 – Le tube et l'aimant

1. Déterminer l'expression du courant induit  $di$  dans une portion infinitésimale du tube définie par les angles  $\theta$  et  $\theta + d\theta$ .
2. En déduire la force élémentaire  $dF_z \vec{e}_z$  qui s'exerce sur la portion de tube étudiée.
3. Déterminer la force de freinage totale subie par le tube ainsi que l'équation du mouvement du tube. Commenter.

### 29. Ligne d'émetteurs

On considère de petites enveloppes végétales qui sont susceptibles d'éclater lorsqu'elles sont exposées à un soleil brûlant l'été et que leur mûrissement est avancé. Leur taille est suffisamment petite par rapport à la taille totale de la ligne courbe qu'elles forment pour que l'on puisse considérer la ligne comme constituée par un ensemble continu d'émetteurs d'ondes sonores. Les petites enveloppes émettent un son caractéristique et très bref lorsqu'elles éclatent. On suppose qu'en partant d'une extrémité de la ligne, toutes les enveloppes éclatent successivement de telles sortent qu'on puisse considérer que tout se passe comme si un émetteur d'impulsions sonores se déplaçait le long de la ligne à une vitesse  $V$ . On considère que la ligne est contenue dans un plan. On considère un récepteur sonore ponctuel situé en un point  $O$  de position quelconque par rapport à la ligne. Il est en capacité de recevoir toutes les ondes sonores émises, ce récepteur est omni-directionnel. Les ondes sonores se déplacent à la célérité  $c$ . On s'interroge sur l'existence d'un point  $O$  tel que toutes les ondes sonores émises par la ligne arrivent en même temps en  $O$ .

1. Analyser qualitativement la situation en comparant  $V$  et  $c$  et expliquer que le point  $O$  recherché peut bel et bien exister.
2. Établir l'équation de la courbe non droite du plan qui permet d'atteindre l'objectif. Commenter.

### 30. Double oscillateur

On considère deux particules quantiques de même masse  $m$  se déplaçant uniquement selon un axe  $Ox$ . L'abscisse de la première particule est notée  $x_1$ , celle de la seconde est  $x_2$ . Ces deux particules sont plongées dans un potentiel (énergie potentielle...) harmonique imposé par l'extérieur dont l'expression est :

$$V_{ext}(x_1, x_2) = \frac{1}{2} m \omega^2 (x_1^2 + x_2^2)$$

Les deux particules interagissent entre-elles. Cette interaction est bien représentée par le potentiel :

$$V_{int}(x_1, x_2) = \frac{1}{4} m \alpha^2 (x_1 - x_2)^2$$

Pour effectuer cette étude d'un système de deux corps, il faut la décomposer en deux. On étudie l'évolution du centre d'inertie de l'ensemble d'abscisse  $X = \frac{x_1 + x_2}{2}$  affecté de la masse totale  $2m$ . L'étude des mouvements de chaque particule autour du barycentre s'effectue en utilisant la notion de mobile réduit de masse  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m}{2}$  d'abscisse  $Y = x_1 - x_2$ .

Dans un changement de variables  $(x, y) \rightarrow (u, v)$ , la règle de dérivation est illustrée par la formule suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

1. Étudier le mouvement des deux particules en Mécanique classique.

On décrit maintenant le système des deux quantons grâce à une fonction d'onde  $\psi(t, x_1, x_2)$ .

2. Quelle interprétation peut-on proposer pour cette fonction d'onde dépendant des coordonnées des deux particules ?
3. Quelle équation de SCHRÖDINGER pourrait-on écrire pour cette fonction d'onde ? Proposer une méthode pour déterminer les niveaux d'énergie de ce système de deux quantons ?

### 31. Combinaison d'un prisme et d'un réseau

On considère un prisme de verre d'indice  $n = 1,50$  et d'angle au sommet  $\alpha = 30^\circ$ . Il est éclairé, sous incidence normale, par une lumière parallèle monochromatique de longueur  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ . Sur sa face d'entrée, on a collé un réseau de diffraction de pas  $a = 2 \mu\text{m}$ , qui fonctionne par transmission. Pour observer le phénomène optique, on utilise, de l'autre côté du prisme, une lentille convergente de focale  $f = 1,00 \text{ m}$  ainsi qu'un écran placé dans le plan focal image de cette lentille. On précise que le positionnement de la lentille est tel que son axe optique soit confondu avec la direction de propagation de la lumière prévue par les lois de l'Optique géométrique. Voir le schéma de la figure 15 où les fentes du réseau qui diffractent sont représentées par un point au vu de leur perpendicularité au plan de la figure.

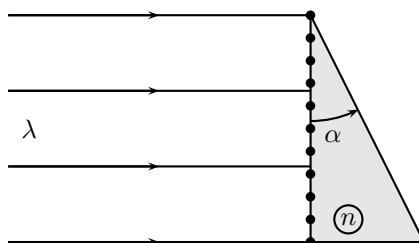
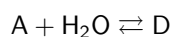


FIGURE 15 – Réseau collé sur la face d'entrée d'un prisme

1. Décrire précisément ce que l'on voit sur l'écran.

### 32. Cinétique de la formation d'un diol et autres...

Soit la réaction d'hydrolyse d'un aldéhyde en diol schématisée par :



L'eau est en excès, un diol est un composé carboné qui présente deux fonctions alcool de la forme  $-OH$ .

On donne les pourcentages à l'équilibre en diol : 38% à  $25^\circ\text{C}$  et 30% à  $35^\circ\text{C}$ .

1. Calculer  $K^\circ$  à chaque température ainsi que l'enthalpie standard de réaction  $\Delta_r H^\circ$  de cette réaction.
2. On introduit les constantes de vitesse  $k_1$  et  $k_2$  des sens direct et indirect de l'équilibre étudié. On suppose l'ordre 1 par rapport à  $A$  et l'ordre 1 par rapport à  $D$ . À  $t = 0$ ,  $[A] = a$  et  $[D] = 0 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Calculer  $[D](t)$ .
3. Vérification expérimentale. On étudie l'absorbance de la solution à une longueur d'onde où seul  $A$  agit :

temps (min)	1	5	10	15	20	25	$\infty$
absorbance	1,08	1,05	1,02	0,98	0,95	0,92	0,44

Vérifier le modèle précédent et calculer les constantes de vitesse  $k_1$  et  $k_2$ .

4. Réaliser le tracé du diagramme potentiel-pH du fer. On donne  $pK_s(\text{Fe}(\text{OH})_2) = 15$ ,  $pK_s(\text{Fe}(\text{OH})_3) = 38$ ,  $E^\circ(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}) = -0,44 \text{ V}$ ,  $E^\circ(\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}) = 0,77 \text{ V}$ . La concentration de tracé choisie est  $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .
5. Donner la configuration électronique de  $\text{Fe}$ ,  $\text{Zn}$ ,  $\text{Cu}$ ,  $\text{Cu}^{2+}$ ,  $\text{Fe}^{2+}$ ,  $\text{Zn}^{2+}$ . On donne  $Z(\text{Fe}) = 26$ ,  $Z(\text{Cu}) = 29$  et  $Z(\text{Zn}) = 30$ .

## 5 Situation-problèmes

### 33. Guépard

Le guépard<sup>1</sup> est un animal très rapide capable d'atteindre la vitesse de  $90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  en quelques secondes, on prendra 5 s pour les calculs. On considère qu'il a effectué une course globale d'une minute en maintenant cette vitesse après la phase d'accélération. Pendant cette course, son rendement énergétique est de l'ordre de 60%. Après une telle course, son temps moyen de repos est de l'ordre de 15 minutes. Pendant la phase de repos, sa température corporelle diminue de  $0,2 \text{ }^{\circ}\text{C} \cdot \text{mn}^{-1}$  pour revenir à  $38 \text{ }^{\circ}\text{C}$ . On considère un guépard mâle de masse 50 kg, la moyenne de la masse des guépards mâles étant de 48 kg. Ce type de course est réalisée lorsqu'il chasse.



FIGURE 16 – Guépard en pleine course

1. Évaluer l'ordre de grandeur de l'accélération moyenne du guépard ?
2. Quelle distance a-t-il parcouru à la poursuite de sa proie ?
3. Quelle est la puissance moyenne développée par le guépard pendant cette phase de course ?
4. Quelle est la température corporelle du guépard en fin de course ?
5. Si vous deviez modéliser le guépard par une machine thermique ditherme, que feriez-vous ?
6. Quel serait le rendement de cette machine thermique ? Commenter.

### 34. Lampe de vélo

La figure 17 montre la photographie d'une lampe de vélo. La puissance de cette lampe est d'une dizaine de watts, elle fonctionne avec des DEL (Diodes Electro Luminescentes) ou LED en anglais. Ce type de dipôle est une source lumineuse fondamentalement quantique. Elle est alimentée par 3 piles rechargeables LR03 de 1,2 V. Deux d'entre elles sont représentées sur la photo de droite de la figure 17. Dans la DEL, on suppose que la production d'un photon correspond au passage d'un électron dans la jonction constituant la DEL. Données quantiques :  $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  et  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ .

1. Déterminer la tension minimale permettant aux DEL d'émettre de la lumière.
2. Déterminer l'autonomie de la lampe.

---

1. Problème et données extraits du sujet ENS 2013 Second Concours. La donnée de la phase d'accélération a été corrigée.



FIGURE 17 – La lampe de vélo et 2 des 3 accumulateurs qu'elle utilise