

Devoir de Sciences Physiques n°1 du 11-09-2024

— Solutions —

Problème n° 1 – Haut-parleur électrodynamique

CCP PC 2016

A. Étude temporelle du fonctionnement

1. Le haut-parleur de convertisseur électromécanique car il reçoit de l'énergie électrique et produit une onde mécanique.

2. On utilise les coordonnées polaires et la base associée. L'élément de longueur du fil constituant la bobine est $\vec{\ell} = r_{\text{bobine}} d\theta \vec{e}_\theta = d\ell \vec{e}_\theta$, le champ magnétique est $\vec{B} = B\vec{e}_r$ et la vitesse $\vec{v} = v\vec{e}_z$. On calcule le produit vectoriel : $\vec{v} \wedge \vec{B} = vB\vec{e}_\theta$, on peut en déduire que $(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = Bvd\ell$. On a donc $e = \int_{\text{bobine}} Bvd\ell$. On trouve $e(t) = v(t)\ell B$.

3. La loi des mailles donne facilement $u(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt} - e(t)$. Avec l'expression de la force électromotrice que l'on vient de calculer, on obtient la relation attendue : $u(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt} - B\ell v(t)$.

4. Par définition, la force élémentaire de LAPLACE est $d\vec{f}_L = i(t)d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i(t)d\ell \vec{e}_\theta \wedge B\vec{e}_r$. On obtient donc : $d\vec{f}_L = -i(t)Bd\ell \vec{e}_z$.

5. Dans l'expression de la relation de la Dynamique fournie, le terme $-i(t)\ell B\vec{e}_z - kz(t)\vec{e}_z$ représente la force de LAPLACE qui s'exerce sur la totalité de la bobine, $-kz(t)\vec{e}_z$ la force élastique de rappel de la membrane du haut-parleur. Cette force est la conséquence du fait que lorsque la bobine se déplace sous l'effet de la force de LAPLACE, elle déforme la membrane qui tend à revenir dans sa position naturelle d'équilibre. On suppose évidemment que l'on reste dans le domaine de linéarité de déformation de cette membrane. La force $-\lambda\vec{v}$ correspond à l'interaction entre la membrane et l'air qui est un fluide qui possède une certaine viscosité même si elle n'est pas très élevée. Cette viscosité est fondamentale pour que la membrane puisse transmettre de l'énergie à l'air et donc puisse produire l'onde sonore. On notera enfin que le poids de la membrane n'intervient pas dans la relation de la Dynamique, ceci est normal parce qu'il est compensé par une force normale à l'axe $z'z$. Finalement l'équation différentielle mécanique est : $m\frac{d^2z}{dt^2} + \lambda\frac{dz}{dt} + kz = -i(t)\ell B$.

B. Régime sinusoïdal forcé

6. On obtient pour l'équation électrique : $\underline{u} = (R + jL\omega)\underline{i} - B\ell\underline{v}$. Pour l'équation mécanique, on travaille dans un premier temps avec \underline{z} . On passera à la vitesse ensuite avec $\underline{v} = j\omega\underline{z}$. On a donc : $[(k - m\omega^2) + j\lambda\omega]\underline{z} = -B\ell\underline{i}$.

7. On passe de la position à la vitesse comme indiqué à la question précédente. Cela permet d'écrire $[(k - m\omega^2) + j\lambda\omega]\underline{v} = -\ell B(j\omega)\underline{i}$. On en déduit que $\underline{v} = -\frac{\ell B(j\omega)}{[(k - m\omega^2) + j\lambda\omega]}\underline{i}$. On remplace cette expression de la vitesse dans l'équation électrique et on obtient l'expression $\underline{u} = [R + jL\omega + \frac{B^2\ell^2(j\omega)}{(k - m\omega^2) + j\lambda\omega}]\underline{i}$. L'impédance du haut-parleur est donc :

$$\underline{Z} = R + (j\omega) \left[L + \frac{B^2\ell^2}{(k - m\omega^2) + j\lambda\omega} \right].$$

8. On a $\underline{Z}_e = R + jL\omega$ et $\underline{Z}_m = \frac{B^2\ell^2(j\omega)}{(k - m\omega^2) + j\lambda\omega}$.

9. On peut raisonner sur l'admittance motionnelle $\underline{Y}_m = \frac{1}{B^2\ell^2} \frac{k + \lambda(j\omega) + m(j\omega)^2}{j\omega}$. En factorisant, on arrive à $\underline{Y}_m = \frac{\lambda}{B^2\ell^2} + \frac{m}{B^2\ell^2}(j\omega) + \frac{k}{B^2\ell^2} \frac{1}{(j\omega)}$. Cette expression correspond bien à la forme $\underline{Y}_m(\omega) = \frac{1}{\underline{Z}_m(\omega)} = jC_m\omega + \frac{1}{jL_m\omega} + \frac{1}{R_m}$ à condition de poser $R_m = \frac{B^2\ell^2}{\lambda}$, $C_m = \frac{m}{B^2\ell^2}$ et $L_m = \frac{B^2\ell^2}{k}$. Les applications numériques conduisent bien à : $C_m = 250 \mu\text{F}$, $L_m = 12,8 \text{ mH}$ et $R_m = 16 \Omega$.

10. Les règles d'association des admittances nous disent que des admittances en parallèle s'ajoutent pour constituer une admittance équivalente. Les trois éléments électriques caractérisés par R_m , L_m et C_m sont donc associés en parallèle. La représentation du schéma équivalent du haut-parleur est fourni à la figure 1.

11. On a posé $\underline{Z} = R + jL\omega + \frac{1}{\underline{Y}_m} = R + jL\omega + \frac{R_m}{1 + jR_m(C_m\omega - \frac{1}{L_m\omega})}$. On multiplie par le complexe conjugué au niveau de l'impédance motionnelle et on obtient alors $\underline{Z} = R + jL\omega + \frac{R_m(1 - jR_m(C_m\omega - \frac{1}{L_m\omega}))}{1 + R_m^2(C_m\omega - \frac{1}{L_m\omega})^2}$. En séparant

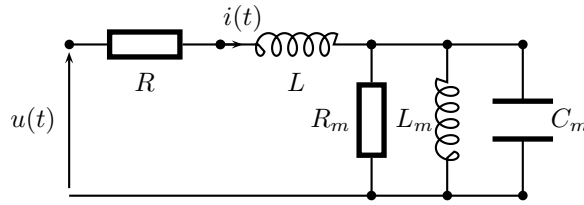


FIGURE 1 – Modélisation électrique complète du haut-parleur

les parties réelle et imaginaire, on arrive effectivement à l'expression demandée pour la résistance équivalente (partie réelle) : $R_T = R + \frac{R_m}{1 + R_m^2 (C_m \omega - \frac{1}{L_m \omega})^2}$. La partie imaginaire est $X_T = j\omega \frac{L - R_m^2 (C_m \omega - \frac{1}{L_m \omega})}{1 + R_m^2 (C_m \omega - \frac{1}{L_m \omega})^2}$.

12. En utilisant l'expression précédente, on voit que $\lim_{\omega \rightarrow 0} R_T = R$. En regardant le graphique proposé, on trouve donc que $R = 8 \Omega$. La résonance se produit pour $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_m C_m}}$. Sur le graphique, on trouve que $\omega_0 \simeq 560 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Comme on a $\omega_0 = 2\pi f_0$, on trouve bien que $f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_m C_m}} = 89 \text{ Hz}$.

C. Étude énergétique

13. L'équation électrique est $u(t) = Ri + L \frac{di}{dt} - B\ell v(t)$. Pour passer à la puissance, il faut multiplier par $i(t)$. On obtient alors $u(t)i(t) = Ri^2(t) + Li \frac{di}{dt} - B\ell v(t)i(t)$. Avec $Li \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}Li^2)$, on arrive bien à la forme donnée par l'énoncé $u(t)i(t) = \frac{dE_{\text{magn}}}{dt} + P_J(i(t)) + P_L(v(t))$ avec l'énergie magnétique stockée dans la bobine $E_{\text{mag}} = \frac{1}{2}Li^2(t)$, la puissance dissipée par effet JOULE $P_J(t) = Ri^2(t)$ et la puissance de la force de LAPLACE $P_L(t) = -i(t)B\ell v(t) = \vec{f}_L \cdot \vec{v}$. Quant à $u(t)i(t)$ c'est la puissance fournie par le générateur qui alimente le haut-parleur.

14. Pour établir le bilan de puissance mécanique, on multiplie l'équation obtenue par la relation fondamentale de la Dynamique par la vitesse $v(t)$. On a donc $m \frac{dv}{dt} v + \lambda v^2 + kz \frac{dz}{dt} = -i(t)B\ell v(t) = P_L(t)$. En utilisant le fait que $m \frac{dv}{dt} v = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2)$ et $kz \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}kz^2)$, on arrive à la forme proposée avec $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ qui représente l'énergie cinétique du mobile, $E_{pe} = \frac{1}{2}kz^2$ qui représente l'énergie potentielle élastique du haut-parleur et enfin $P_A(t) = \lambda v^2$ qui est la puissance fournie à l'air, puissance qui sert à former l'onde sonore émise par le haut-parleur.

15. La puissance de la force de LAPLACE figure dans les deux bilans de puissance, c'est justement ce qui permet de comprendre la conversion d'énergie électrique en énergie mécanique ou bien le contraire en fonction du dispositif construit. On peut l'éliminer et obtient aussitôt l'équation $u(t)i(t) = \frac{dE_{\text{magn}}}{dt} + P_J(i(t)) + \frac{dE_M(t)}{dt} + P_A(v(t))$ où $E_M = \frac{1}{2}mv^2(t) + \frac{1}{2}kz^2(t)$ représente l'énergie mécanique du mobile.

16. Commençons par rappeler la définition d'une moyenne pour un signal périodique sur la puissance moyenne $\langle P_S(t) \rangle$ fournie par l'alimentation électrique : $\langle P_S(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} P_S(t) dt$. Dans l'équation bilan de puissance que nous avons établi à la question précédente, on doit calculer des moyennes de dérivées. Prenons l'exemple de l'énergie magnétique. On a $\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{di}{dt} dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} di(t) = \frac{1}{T} (i(t_0 + T) - i(t_0)) = 0$ car le signal est périodique et car alors $i(t_0 + T) = i(t_0)$. Lors du calcul de la moyenne, tous les termes faisant intervenir une dérivée vont s'annuler, il ne reste plus que les autres termes. c'est pourquoi, on arrive à l'équation : $\langle P_S(t) \rangle = R \langle i^2(t) \rangle + \lambda \langle v^2(t) \rangle$. Le terme utile est celui qui est responsable de la mise en mouvement de l'air, c'est donc le terme $\langle P_u(t) \rangle = \lambda \langle v^2(t) \rangle$. Le rendement correspond à la puissance utile rapportée à la puissance coûteuse à savoir la puissance fournie par le générateur qui alimente le haut-parleur. On a donc $\eta = \frac{\lambda \langle v^2(t) \rangle}{\langle P_S(t) \rangle} = \frac{\langle P_A(t) \rangle}{\langle P_S(t) \rangle}$.

17. On sait que $\langle P_A(t) \rangle = \langle P_S(t) \rangle - \langle Ri^2(t) \rangle$ puisqu'il faut retirer l'effet JOULE. On a donc : $\eta = 1 - \frac{R \langle i^2(t) \rangle}{\langle P_S(t) \rangle}$. Le haut-parleur est modélisé par l'équation $u(t) = R_T i(t) + L_T \frac{di}{dt}$. Multiplions par $i(t)$, on a donc $u(t)i(t) = R_T i^2(t) + \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}L_T i^2)$. Lorsque l'on calcule la moyenne, on obtient comme dans le précédent calcul $\langle u(t)i(t) \rangle = R_T \langle i^2(t) \rangle$ car le terme en dérivée ne contribue pas à la moyenne. On en déduit donc que $\eta = 1 - \frac{R}{R_T}$.

18. Le rendement est maximal lorsque la résistance R_T est maximale. Cela se produit lorsque $f = f_0$, la résistance R_T vaut alors $R_T = R + R_m$. Le rendement est donc $\eta(\omega_0) = 1 - \frac{R}{R + R_m} = \frac{R_m}{R + R_m}$. L'application numérique donne $\eta_{\text{max}} = \frac{2}{3} = 0,67$. Cette valeur correspond bien au graphique proposé.

19. L'utilisation du haut-parleur est intéressante dans sa bande passante. C'est ici autour de la fréquence de 89 Hz , sinon le rendement décroît assez vite. L'oreille humaine entend les sons de fréquence comprise entre $f_b = 20 \text{ Hz}$ et $f_h = 20 \text{ kHz}$.

20. Chaque haut-parleur va présenter une bande passante de taille inférieure à l'intervalle $f_h - f_b = \Delta f$. On

ne peut pas trouver un haut-parleur universel de qualité, c'est-à-dire de bande passante très large et plat sans résonance. Il faut donc utiliser plusieurs haut-parleurs pour obtenir par **recouvrement** des bandes passantes, le rendu le plus homogène possible du signal riche en fréquences qui constituent la musique que l'on veut écouter.

Problème n° 2 – Rebonds d'une balle sur une surface en mouvement périodique

X MP 2024

A. Une modélisation du comportement viscoélastique d'un solide lors d'un choc contre une surface rigide

1. On applique la relation fondamentale de la dynamique à M dans le référentiel matérialisé par l'axe Ox que l'on suppose galiléen pour cette étude. Comme on néglige le poids, il n'y a pas de réaction de compensation de ce dernier à prendre en compte. Toutes les forces sont parallèles à l'axe Ox . On a donc $m\ddot{s} = -ks - \lambda\dot{s}$ ce qui évolue en $\ddot{s} + \frac{\lambda}{m}\dot{s} + \frac{k}{m}s = 0$. On constate que $2\alpha = \frac{\lambda}{\sqrt{km}} = \frac{\lambda}{m}\sqrt{\frac{m}{k}}$ ce qui permet d'écrire que $\frac{\lambda}{m} = 2\alpha\omega_0$ où α est le coefficient d'amortissement. L'équation différentielle du mouvement est donc $\ddot{s} + 2\alpha\omega_0\dot{s} + \omega_0^2s = 0$. Pour trouver les racines de l'équation caractéristique, on a utilisé le discriminant réduit $\Delta' = (\alpha^2 - 1)\omega_0^2 < 0$ puisque $\alpha < 1$. Les racines sont $r = -\alpha\omega_0 \pm i\sqrt{1 - \alpha^2}\omega_0$. La forme générale de la déformation de l'objet est donc $s(t) = \exp(-\alpha\omega_0 t)(A \cos \omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}t + B \sin \omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}t)$. À la date $t = 0$, on a $s = 0$, on en déduit que $A = 0$. La solution devient $s(t) = B \exp(-\alpha\omega_0 t) \sin \omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}t$. On détermine la constante d'intégration B par la condition sur la vitesse initiale. On a $\dot{s}(t) = B \exp(-\alpha\omega_0 t)(-\alpha\omega_0 \sin \omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}t + \omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2} \cos \omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}t)$. À $t = 0$, on a donc $V_0 = B\omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}$. On peut donc conclure que la déformation de l'objet est $s(t) = \frac{V_0}{\omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}} \exp(-\alpha\omega_0 t) \sin \omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}t$.

Ici, il y a une équivoque sur la définition de la durée de validité I_c de la loi précédente. En effet, la durée de validité de la loi précédente s'étend jusqu'à ce que la force exercée par la surface rigide s'annule. C'est bien à ce moment-là que le contact entre le pied et la surface rigide cesse. Il faut donc trouver le moment où la force totale comprenant à la fois l'action modélisée par le ressort et celle modélisée par l'amortisseur s'annule. Au vu de la forme de l'expression donnée à la question 2., on peut comprendre que cette durée I_c correspond, pour l'énoncé, au moment où l'objet étudié retrouve sa forme initiale à savoir le moment où $s(t = I_c) = 0$. C'est la demi-pseudo période. Cette réponse peut être acceptée lorsque le coefficient de frottement est très faible $\alpha \ll 1$ mais est très discutable lorsque α est assez proche de 1. L'énoncé aurait dû inciter à considérer le temps de retour à la forme initiale. En réalité, lorsque $s(t) = 0$ pour la première fois après le contact avec la surface rigide, la force élastique est nulle mais la force d'amortissement ne l'est pas puisque la vitesse est non nulle et orientée dans le sens de l'axe Ox puisque la vitesse est négative dans cette phase. Si l'on suit à la lettre l'énoncé, il faut trouver la date à laquelle il n'y a plus de force et donc la date à laquelle $\ddot{s}(t) = 0$. Avec l'expression de $s(t)$, on peut calculer $\dot{s}(t) = V_0 \exp(-\alpha\omega_0 t)(-\frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \sin \omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}t + \cos \omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}t)$ et l'accélération $\ddot{s}(t) = -V_0\omega_0 \exp(-\alpha\omega_0 t)(\frac{1 - 2\alpha^2}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \sin \omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}t + 2\alpha \cos \omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}t)$. Pour faire une étude graphique de la situation, on travaillera avec des grandeurs adimensionnées et un temps adimensionné $\theta = \omega_0 t$. Pour l'abscisse, on aura $s_a(\theta) = \frac{\omega_0 s}{V_0} = \exp(-\alpha\theta) \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \sin \sqrt{1 - \alpha^2}\theta$. Pour la vitesse, cela donne $\dot{s}_a(\theta) = \frac{\dot{s}}{V_0} = \exp(-\alpha\theta)(\frac{-\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \sin \sqrt{1 - \alpha^2}\theta + \cos \sqrt{1 - \alpha^2}\theta)$. Enfin, pour l'accélération on va pouvoir obtenir $\ddot{s}_a(\theta) = \frac{\ddot{s}}{\omega_0 V_0} = -\exp(-\alpha\theta)(\frac{1 - 2\alpha^2}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \sin \sqrt{1 - \alpha^2}\theta + 2\alpha \cos \sqrt{1 - \alpha^2}\theta)$. Sur le graphique de la figure 2, on peut voir représentées, avec des échelles verticales arbitraires, la position, la vitesse et l'accélération adimensionnées dans le cas d'un coefficient de frottement faible devant 1 à savoir $\alpha = 0,05$. Dans la suite du sujet, on sera proche de ce cas-là comme on le verra avec une valeur $\alpha \simeq 0,03$. Sur le graphique de la figure 2, on peut aussi voir une seconde situation avec $\alpha = 0,4$ ce qui n'est plus faible devant 1.

Comme dans la suite, le coefficient de frottement est faible, on choisira de définir I_c comme la durée pour que l'objet retrouve sa taille initiale à savoir $s(I_c) = 0 = \frac{V_0}{\omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}} \exp(-\alpha\omega_0 I_c) \sin \omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2} I_c$ d'où nécessairement $\omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2} I_c = \pi$. On obtient donc : $I_c = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}}$.

2. On commence par exprimer la vitesse à la date $t = I_c$, on a $\dot{s} = V_1 = \dot{s}(t = I_c) = V_0 \exp(-\alpha\omega_0 I_c) \cos \pi$. On peut alors écrire $-V_1 = V_0 \exp(-\alpha\omega_0 I_c)$. Cela permet de trouver le coefficient de restitution lors du choc défini par $r = -\frac{V_1}{V_0}$. En utilisant l'expression de I_c trouvée avant, on arrive à $r = \exp(-\frac{\alpha\pi}{\sqrt{1 - \alpha^2}})$, ce qui correspond à l'expression proposée par l'énoncé. Cela sous-entend que l'énoncé s'est automatiquement placé dans le contexte d'un coefficient faible. On observe que si l'on fait disparaître du modèle les phénomènes de dissipation énergétique en annulant le coefficient de frottement, $\alpha = 0$ impose $r = 1$, c'est un choc élastique sur une paroi avec inversion de la vitesse normale à la paroi. Par contre, si le coefficient de frottement tend vers 1, on obtient alors $r \rightarrow 0$. La

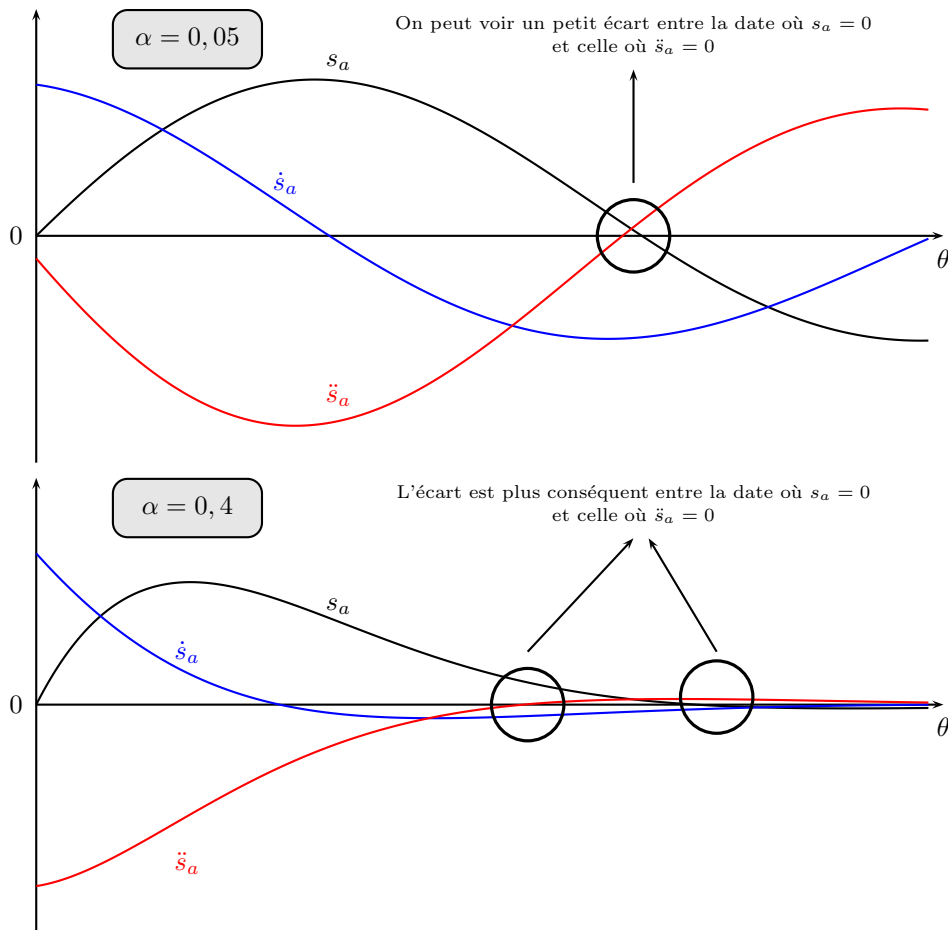


FIGURE 2 – Étude graphique de la cinématique de la déformation de l'objet étudié

vitesse V_1 est nulle après le choc, on peut dire que l'objet s'est collé à la surface. C'est un choc complètement inélastique. Toute l'énergie cinétique initiale a été dissipée dans la déformation de l'objet. La définition de r est le rapport $r = -\frac{V_1}{V_0}$, ce coefficient ne peut pas dépendre de V_0 parce toutes les lois utilisées dans le modèle sont linéaires.

3. Il faut déterminer le temps de vol. C'est un mouvement sous l'effet unique de la pesanteur. On a donc $\ddot{z} = -g$ et $\dot{z} = -gt + V_n$ pour une date $t = 0$ prise avec comme origine le choc n . Au sommet de la trajectoire, la vitesse s'annule. Cela se produit à la date t_s telle que $t_s = \frac{V_n}{g}$. La durée de la descente étant la même, il s'écoule la durée $\tau_n = t_{n+1} - t_n = \frac{2V_n}{g}$. On peut généraliser en écrivant que $\tau_1 = \frac{2V_1}{g}$. On voit donc que $\frac{\tau_n}{\tau_1} = \frac{V_n}{V_1} = r^{n-1}$. On peut donc prendre le logarithme pour obtenir $\ln \frac{\tau_n}{\tau_1} = \ln r^{n-1} = (n-1) \ln r$. Cette expression nous permet de comprendre le graphique proposé qui indique que $\frac{\tau_n}{\tau_1}$ est une fonction affine de n . C'est plutôt satisfaisant au vu des points qui ont été enregistrés. La pente du graphique est $\ln r \simeq -\frac{0,9}{10} = -0,09$. Cela montre que l'on peut faire l'hypothèse r proche de 1, ainsi $r = \exp -0,09 \simeq 1 - 0,09 = 0,91$ par développement limité. On peut aussi calculer le coefficient de frottement α en écrivant que $\ln r = -\frac{\alpha\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}} = -0,09$. En supposant que $\alpha^2 \ll 1$, on peut se contenter de $\alpha\pi = 0,09$ et donc $\alpha \simeq 0,03$. Cette valeur valide très bien l'hypothèse de simplification de $\sqrt{1-\alpha^2} \simeq 1$.

B. Synchronisation des rebonds d'une balle sur une surface en mouvement vertical oscillant

4. On doit raisonner en vitesse relative par rapport à la paroi, la vitesse d'entraînement étant \vec{v}_s puisque les deux référentiels sont en translation l'un par rapport à l'autre. On a donc $\vec{v}_{rel}^- = \vec{v}^- - \vec{v}_s = (v^- - v_s)\vec{e}_z$ et $\vec{v}_{rel}^+ = \vec{v}^+ - \vec{v}_s = (v^+ - v_s)\vec{e}_z$. Le coefficient de restitution est $r = -\frac{v_{rel}^+}{v_{rel}^-} = -\frac{v^+ - v_s}{v^- - v_s}$. En organisant cette relation, on obtient celle proposée par l'énoncé $v^+ = -rv^- + (1+r)v_s(t_i)$ où la vitesse v_s est évaluée au moment du contact qui est noté t_i .

Condition de synchronisation

5. On applique la formule précédente pour la date t_n avec $v_s(t_n) = \dot{z}_s(t_n) = a\omega \cos \omega t_n = a\omega \cos \phi_n$. On obtient $v_n^+ = -rv_n^- + (1+r)a\omega \cos \phi_n$. Le mouvement que l'on étudie s'effectue uniquement sous l'effet de la pesanteur. On a donc $\ddot{z} = -g$ et par intégrations successives $\dot{z} = -g(t - t_n) + v_n^+$ et $z(t) = -\frac{1}{2}g(t - t_n)^2 + v_n^+(t - t_n) + z_s(t_n)$ en tenant compte des expressions de la vitesse et de la position à la date t_n pour déterminer les constantes d'intégration. Comme le choc suivant d'ordre $n+1$ s'effectue à une date $t_{n+1} = t_n + \tau_n$, on peut en déduire la relation $z_s(t_{n+1}) = z_s(t_n) + v_n^+ \tau_n - \frac{1}{2}g\tau_n^2$ ainsi que celle sur les vitesses $v_{n+1}^- = v_n^+ - g\tau_n$. Avec la relation établie à la question précédente, on peut écrire que $v_{n+1}^+ = -rv_n^+ + rg\tau_n + (1+r)a\omega \cos \phi_{n+1}$.

6. Il y a synchronisation si la durée entre deux chocs correspond à la période des oscillations de la surface rigide. On a donc $t_{n+1} - t_n = \tau_n = T = \frac{2\pi}{\omega}$. Cela impose $\cos \phi_n = \cos \phi_{n+1}$ puisque l'on a $\phi_{n+1} = \phi_n + 2\pi$. Le rebond s'effectue toujours à la même altitude $z_s(t_{n+1}) = z_s(t_n)$. On en déduit que $v_n^+ - \frac{1}{2}g\tau_n = 0$ d'où $v_n^+ = \frac{g\tau_n}{2} = \frac{gT}{2}$. Avec l'expression de la période, on peut conclure sur $v_n^+ = \frac{\pi g}{\omega}$. On exploite la relation de la question précédente entre v_{n+1}^+ et v_n^+ avec la relation $v_{n+1}^+ = v_n^+$. Cela donne dans un premier temps $v_{n+1}^+ = -rv_n^+ + 2rv_n^+ + (1+r)a\omega \cos \phi_n$. Cela permet d'arriver à $v_n^+(1-r) = (1+r)a\omega \cos \phi_n$. À l'aide de l'expression $v_n^+ = \frac{\pi g}{\omega}$, on obtient bien l'expression attendue $\cos \phi_n = \frac{1-r}{1+r} \frac{\pi}{\Gamma}$ avec $\Gamma = \frac{a\omega^2}{g}$. On notera que Γ compare l'accélération d'un point de la surface oscillante à l'accélération de la pesanteur.

7. Comme $0 \leq r \leq 1$ et $\gamma \geq 0$, on a nécessairement $0 \leq \frac{1-r}{1+r} \frac{\pi}{\Gamma} \leq 1$. Plus le coefficient de restitution r est faible, plus la contrainte sur Γ est importante puisque $\Gamma \geq \pi \frac{1-r}{1+r}$. Cela montre que pour obtenir la synchronisation, il y aura besoin d'une pulsation élevée. Par contre si $r \rightarrow 1^-$, on pose $r = 1 - \epsilon$ avec $\epsilon \ll 1$ d'où la condition $\Gamma \geq \frac{\pi}{2}\epsilon$ qui revient à dire $\Gamma \geq 0$. Il est toujours possible de synchroniser les rebonds de la balle de ping pong¹.

8. On reprend la notation précédente à savoir $r = 1 - \epsilon$. On en déduit que $\epsilon = \frac{2a\omega^2 \cos \phi_n}{\pi g}$ avec $\omega = 2\pi f$. On a donc $\epsilon = \frac{8\pi a f^2 \cos \phi_n}{g}$ avec $a = 10^{-4} \text{ m}$, $f = 25 \text{ Hz}$, $\cos \phi_n \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $g \simeq 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. On trouve $\epsilon \simeq 0,1$ et par conséquent $r \simeq 0,9$.

Condition de stabilité

9. Nous avons $z_s(t'_{n+1}) = z_s(t'_n) + v_n^{'+}(t'_{n+1} - t'_n) - \frac{1}{2}g(t'_{n+1} - t'_n)^2$. En utilisant le fait que $\phi'_n = \omega t'_n$ et $\phi'_{n+1} = \omega t'_{n+1}$, on a : $a \sin \phi'_{n+1} = a \sin \phi'_n + \frac{v_n^{'+}}{\omega}(\phi'_{n+1} - \phi'_n) - \frac{g}{2\omega^2}(\phi'_{n+1} - \phi'_n)^2$.

10. On reprend l'expression calculée à la question 5., on peut obtenir la relation qui était demandée par l'énoncé à savoir $v_{n+1}^+ = -rv_n^+ + \frac{rg}{\omega}(\phi'_{n+1} - \phi'_n) + (1+r)a\omega \cos \phi'_{n+1}$.

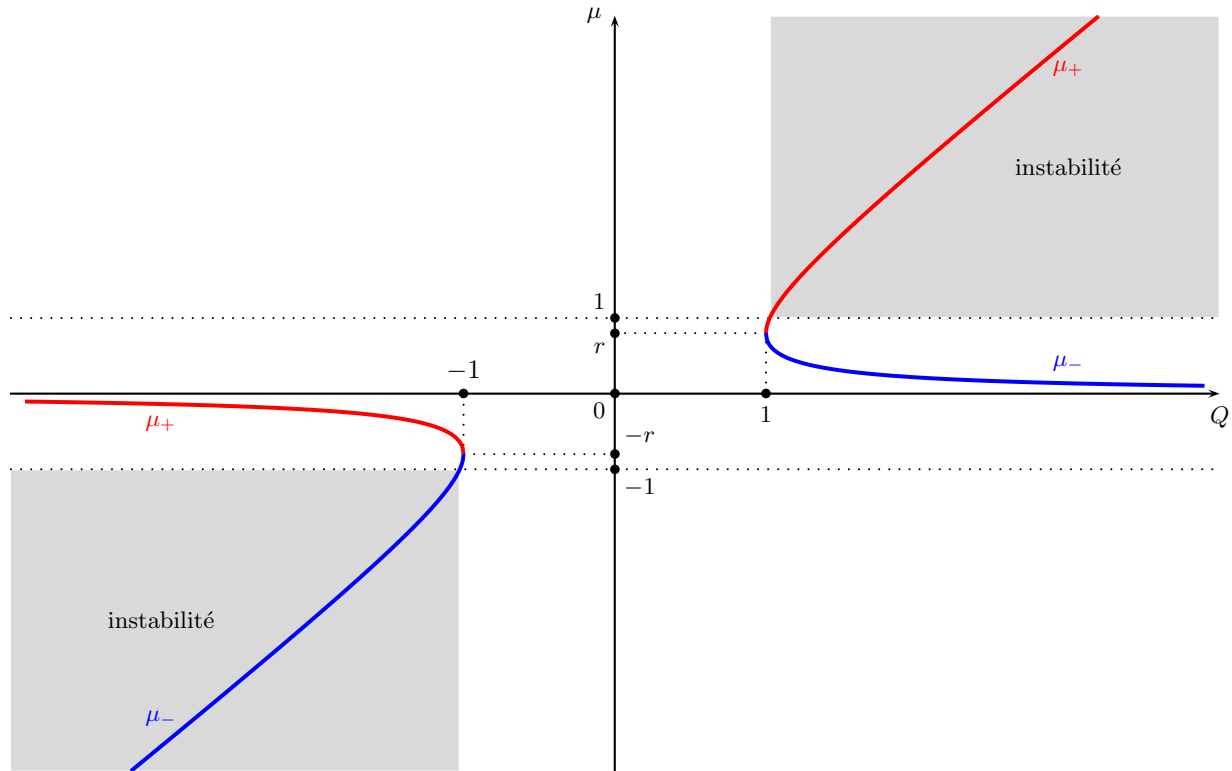
11. On a $\varepsilon_{n+1} = A\varepsilon_n + B\eta_n$ et $\eta_{n+1} = C\varepsilon_n + D\eta_n$. On peut écrire que $\eta_n = \frac{\varepsilon_{n+1} - A\varepsilon_n}{B}$ puisque $B = \frac{1+r}{2} \neq 0$. On peut décaler l'indice d'une unité pour avoir $\eta_{n+1} = \frac{\varepsilon_{n+2} - A\varepsilon_{n+1}}{B}$. On utilise ces deux expressions dans celle reliant η_n et η_{n+1} pour arriver à la relation attendue $\varepsilon_{n+2} = (A+D)\varepsilon_{n+1} + (BC-AD)\varepsilon_n$.

12. Pour qu'il y ait une convergence, il faut que $|\mu| < 1$.

13. Avec $\varepsilon_n = K\mu^n$, on constate que $\varepsilon_{n+1} = \mu\varepsilon_n$ et $\varepsilon_{n+2} = \mu^2\varepsilon_n$. En supposant logiquement que $\varepsilon_n \neq 0$, on obtient l'équation du second degré que doit vérifier μ : $\mu^2 - (A+D)\mu + (AD-BC) = 0$. On commence par vérifier que l'on a bien $DA - BC = r^2$ puisque $A = 1$ et $BC = -\pi(1-r)(1+r) \tan \phi_n$. Ensuite, on pose $A + D = 1 + r^2 - \pi(1-r^2) \tan \phi_n = 2Qr$. On a donc $2Qr = 1 + r^2 - \pi(1-r^2) \tan \phi_n$.

14. Si $|Q| \leq 1$, on constate que le discriminant réduit de l'équation du second degré $\Delta' = r^2(Q^2 - 1) \leq 0$. Les solutions sont de la forme $\mu = Qr \pm ir\sqrt{1-Q^2}$. On voit donc que $|\mu| = r$ dans tous les cas. Comme $r < 1$, il y a toujours convergence vers 0 de la suite. Il y a donc **stabilité**. Si on note ψ l'argument de μ , on peut écrire que $\mu = r \exp i\psi$. Par conséquent $\varepsilon_n = Kr^n \exp in\psi$. Si l'on passe en réel - en supposant que K est réel même si cela ne changerait rien sur le fond s'il était complexe - on obtient $\varepsilon_n = Kr^n \cos n\psi$. Il y a convergence vers 0 mais avec des changements de signe qui peuvent se produire en raison de l'évolution du signe de $\cos n\psi$. C'est une convergence alternée si l'on peut dire.

15. On étudie maintenant le cas $|Q| > 1$ puisque le cas de l'égalité à 1 a déjà été vue avec la stabilité assurée du fait de $r < 1$. Le discriminant réduit est donc positif et on obtient les deux solutions réelles suivantes $\mu_+ = Qr + r\sqrt{Q^2 - 1}$ et $\mu_- = Qr - r\sqrt{Q^2 - 1}$. Le graphique montrant l'évolution des deux racines en fonction de Q est réalisé à la figure 3 pour $r = 0,8$.

FIGURE 3 – Étude graphique de l'influence de Q sur la stabilité

16. Comme on peut le voir sur la figure 3, il y a deux domaines d'instabilité lorsque $|\mu| > 1$. Pour la stabilité, commençons par la solution μ_+ . Cela se produit lorsque $Qr + \sqrt{Q^2r^2 - r^2} < 1$ que l'on peut écrire $\sqrt{Q^2r^2 - r^2} < 1 - Qr$. On élève au carré pour avoir $Q^2r^2 - r^2 < 1 + Q^2r^2 - 2Qr$. La condition est alors $\boxed{2Qr < 1 + r^2}$. Passons à l'autre cas de figure, on a $\mu_- = Qr - \sqrt{Q^2r^2 - r^2} > -1$ qui s'écrit encore $-Qr + \sqrt{Q^2r^2 - r^2} < 1$. On isole la racine $\sqrt{Q^2r^2 - r^2} < 1 + Qr$ et on élève au carré. On a alors $Q^2r^2 - r^2 < 1 + Q^2r^2 + 2Qr$. Cela conduit à la condition $\boxed{2Qr > -(1 + r^2)}$. Les deux conditions se résument en $|2Qr| < 1 + r^2$.

17. Nous avons vu que $2Qr = 1 + r^2 - \pi(1 - r^2) \tan \phi_n < 1 + r^2$. Cette première inégalité conduit immédiatement à $-\tan \phi_n < 0$ et donc la première partie de la relation d'ordre à démontrer. Ensuite, nous avons vu que $2Qr > -(1 + r^2)$. Toujours en utilisant l'expression de $2Qr$, on arrive à $1 + r^2 - \pi(1 - r^2) \tan \phi_n > -(1 + r^2)$ ou bien encore $\pi(1 - r^2) \tan \phi_n < 2(1 + r^2)$. On peut donc bien conclure sur l'inégalité $0 < \tan \phi_n < \frac{2}{\pi} \frac{1+r^2}{1-r^2}$.

On a donc bien $\boxed{F(r) = \frac{2}{\pi} \frac{1+r^2}{1-r^2}}$. La signification de $\tan \phi_n > 0$ est que la phase $\phi_n \in]0, \frac{\pi}{2}]$ modulo π . Comme ϕ_n croît nécessairement avec n et donc le temps puisque $\phi_n = \omega t_n$, il faut que l'on se retrouve obligatoirement dans le premier quadrant ou le troisième pour assurer la condition de stabilité de la synchronisation. Pour l'autre égalité, on a une fonction $F(r)$ qui est croissante lorsque r augmente puisque $\frac{dF}{dr} = \frac{2}{\pi} \frac{4r}{(1-r^2)^2}$. Si $r = 0$ alors $\tan \phi_n < \frac{2}{\pi}$. Il y aura stabilité de la synchronisation pendant très peu de temps parce que l'on va vite atteindre la valeur $\frac{2}{\pi}$ pour la tangente. Au contraire si $r \rightarrow 1^-$, on a $F(r) \rightarrow \infty$. On peut trouver la stabilité sur des durées très longues.

18. L'inégalité proposée peut encore s'écrire $\Gamma_{\min} < \frac{Y}{X} < \Gamma_{\max}$ car $X \neq 0$. On peut donc multiplier par X pour obtenir $\Gamma_{\min}X < Y < \Gamma_{\max}X$. Dans le plan (X, Y) , les deux bornes de Y sont des droites linéaires passant par l'origine et de pentes différentes. On peut voir cela sur le schéma de la figure 4.

Si on fixe une amplitude pour les oscillations de la surface rigide a , on fixe une valeur de Y . On se rend compte alors qu'il existe une plage de valeurs de X comprise entre les deux droites de telle sorte qu'il y ait stabilité. Cela signifie que la synchronisation stable est possible pour une gamme de valeurs de pulsations ω et donc de période T . C'est logique parce le contact entre la balle et la surface peut s'effectuer à un moment où la surface ne possède pas de vitesse comme lorsque $z_s = \pm a$ ou au contraire lorsqu'elle possède une vitesse importante quand $x = 0$ avec une vitesse soit orientée vers le haut ou soit orientée vers le bas. Les cas décrits ici sont les cas extrêmes mais bien sûr tous les cas intermédiaires sont possibles ce qui provoque cet intervalle continu de pulsation permettant d'obtenir la stabilité de la synchronisation.

1. ou tennis de table pour ne vexer personne...

