

Exercices : 26 - Ondes électromagnétiques

— Solutions —

A. Structure de l'onde

1. Caractérisation d'une OPPS

Réponses : c) ; c) ; a) ; a) ; b) et d) ; b) ; d) ; a) ; c) ; b) et d).

2. Onde Laser

Réponses : $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}(\frac{1}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y)$, $\vec{E} \perp \vec{k}$, $\vec{B} \perp \vec{k}$, $\vec{E} \perp \vec{B}$, $\vec{\Pi}$ selon \vec{k} , $k = 1,29 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$, $\Pi_0 = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = 10^6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$, $E_0 = 2,8 \times 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, $B_0 = 9,1 \times 10^{-5} \text{ T}$, $dW_1 = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} S dx'$, $dW_2 = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} S dt$, $dW_1 = dW_2$, $v_{\text{énergie}} = \frac{dx'}{dt} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0 c} = c$.

B. Ondes dans le vide

3. Ondes stationnaires

Réponses : $\vec{E} = 2E_0 \sin \frac{\omega}{c} x \sin \omega t \vec{e}_y$, $\vec{B} = 2\frac{E_0}{c} \cos \frac{\omega}{c} x \cos \omega t \vec{e}_z$, séparation (x, t) , $x_{NE} = n\frac{\lambda}{2}$, $x_{VE} = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$.

4. Création d'un champ électromagnétique

Réponses : l'invariance du problème parallèlement au plan (xOy) montre que les composantes des champs électrique et magnétique ne dépendent que de z et de t . Tout plan parallèle à (xOz) est de symétrie positive pour \vec{j}_s donc $\vec{B} = B(z, t) \vec{e}_y$. Tout plan parallèle à (yOz) est de symétrie négative pour \vec{j}_s donc $\vec{E} = E(z, t) \vec{e}_x$. Les courants surfaciques sont sources d'ondes dont les champs ne dépendent que de z et t donc elles sont forcément planes et ainsi se propagent perpendiculairement à (xOy) . Or, ces ondes sont solutions de l'équation de D'ALEMBERT et donc sont une superposition d'oepp et, en vertu du principe de causalité, elles ne peuvent que s'éloigner du plan (xOy) . Ainsi, $\vec{E}(z > 0, t) = f(t - z/c) \vec{e}_x$ et $\vec{E}(z < 0, t) = f(t + z/c) \vec{e}_x$. Il est important de noter que la fonction f est la même par raison de symétrie positive par (xOy) . Ensuite, puisqu'on a des oepp dans le vide, on a le droit d'utiliser la relation de structure $\vec{B} = \vec{u} \wedge \vec{E}/c$, d'où $\vec{B}(z > 0, t) = \frac{1}{c} f(t - z/c) \vec{e}_y$ et $\vec{B}(z < 0, t) = -\frac{1}{c} f(t + z/c) \vec{e}_y$ ce qui respecte encore les symétries. Il reste à écrire les relations de passage. Ici, la relation utile est celle sur le champ magnétique tangentiel (puisque on donne \vec{j}_s). On en déduit que $\frac{2}{c} f(t) \vec{e}_y = \mu_0 \vec{j}_s \vec{e}_x \wedge \vec{e}_z$ donc $f(t) = -\frac{\mu_0 c}{2} j_s = -\frac{\mu_0 c}{2} J_0 \cos \omega t$. En conclusion, le champ électromagnétique solution est $\vec{E}(z > 0, t) = -\frac{\mu_0 c}{2} J_0 \cos[\omega(t - z/c)] \vec{e}_x$, $\vec{E}(z < 0, t) = -\frac{\mu_0 c}{2} J_0 \cos[\omega(t + z/c)] \vec{e}_x$ et $\vec{B}(z > 0, t) = -\frac{\mu_0}{2} J_0 \cos[\omega(t - z/c)] \vec{e}_y$, $\vec{B}(z < 0, t) = \frac{\mu_0}{2} J_0 \cos[\omega(t + z/c)] \vec{e}_y$. La relation de passage sur le champ électrique normal donne $\sigma = 0$. Il est possible d'avoir $\sigma = 0$ et $\vec{j}_s \neq \vec{0}$ si le \vec{j}_s résulte par exemple du mouvement de familles de porteurs de charges contraires mais de vitesses différentes.

5. Onde cylindrique

Réponses : $\Delta V = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$, $\Delta \vec{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$, LORENTZ : $\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$, $\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_z(r, t)}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ et $V = 0$ en l'absence de potentiel statique, $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \frac{\partial A_z}{\partial r}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2}$, $\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r \frac{df}{dr}) = -\frac{\omega^2}{c^2} f$, $\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0$, $f_0(r) = \frac{\alpha}{\sqrt{r}} \exp(-i\omega r/c)$, $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{e}_r$, $\vec{E}_0(r) = -\frac{i\omega\alpha}{\sqrt{r}} \vec{e}_z$, $\vec{B}_0(r) = \frac{ik\alpha}{\sqrt{r}} \vec{e}_\theta$, $\vec{\Pi} = \frac{\omega^2 \alpha^2}{\mu_0 c} \frac{1}{r} \sin^2(\omega t - kr) \vec{e}_r$, $\alpha = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{P_0 \mu_0 c}{\pi h}}$, $\vec{E} = \sqrt{\frac{P_0 \mu_0 c}{\pi h}} \frac{1}{\sqrt{r}} \sin(\omega t - kr) \vec{e}_z$, $\vec{B} = -\sqrt{\frac{P_0 \mu_0 c}{\pi h}} \frac{1}{\sqrt{r}} \sin(\omega t - kr) \vec{e}_\theta$.

6. Biprisme

Réponses : $\theta \simeq (n-1)A$, $\vec{E}_1 = E_0 \vec{e}_x \exp[j(\omega t - \frac{2\pi \cos \theta}{\lambda} y + \frac{2\pi \sin \theta}{\lambda} z)]$, $\vec{B}_1 = -\frac{E_0}{c} \exp[j(\omega t - \frac{2\pi \cos \theta}{\lambda} y + \frac{2\pi \sin \theta}{\lambda} z)][\sin \theta \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z]$, pour \vec{E}_2 et \vec{B}_2 changer θ en $-\theta$, $\vec{E} = 2E_0 \vec{e}_x \exp[j\omega t \exp -j \frac{2\pi y \cos \theta}{\lambda} \cos \frac{2\pi z \sin \theta}{\lambda}]$, $\vec{B} = \frac{2E_0}{c} \exp[j\omega t \exp -j \frac{2\pi y \cos \theta}{\lambda} [\exp -j \frac{\pi}{2} \sin \theta \sin \frac{2\pi z \sin \theta}{\lambda} \vec{e}_y - \cos \theta \cos \frac{2\pi z \sin \theta}{\lambda} \vec{e}_z]]$, $\vec{\Pi} = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c} [\frac{1}{4} \sin 2(\omega t - \frac{2\pi y \cos \theta}{\lambda}) \sin \theta \sin \frac{4\pi z \sin \theta}{\lambda} \vec{e}_z + \cos^2(\omega t - \frac{2\pi y \cos \theta}{\lambda}) \cos \theta \cos^2 \frac{2\pi z \sin \theta}{\lambda} \vec{e}_y]$, $< \vec{\Pi} >_t = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos \theta (1 + \cos \frac{2\pi 2 \sin \theta z}{\lambda}) \vec{e}_y$, fonction d'interférences d'interfrange $i = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}$.

7. Réflexions obliques

Réponses : on a $\vec{k}_i = \frac{2\pi}{\lambda}(-\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_z) = \frac{\omega}{c}(-\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_z)$ puisque l'onde doit vérifier la relation de dispersion de D'ALEMBERT dans le vide $k = \frac{\omega}{c}$. Le champ électrique de l'onde incidente est $\vec{E}_i = (E_0 \sin \theta \vec{e}_x + E_0 \cos \theta \vec{e}_z) \exp[i(\omega t + k \cos \theta x - k \sin \theta z)]$. La relation de passage du champ électrique entre le vide (1) et le conducteur (2) de normale $\vec{n}_{12} = -\vec{e}_x$ est $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_x$ où $\vec{E}_2 = \vec{0}$ puisque le champ électrique est nul

dans un conducteur parfait. \vec{E}_1 représente le champ électrique dans le vide somme du champ électrique incident et du champ électrique réfléchi. On donc $\vec{E}_i(x=0, z, t) + \vec{E}_r(x=0) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$. Nous allons projeter cette relation sur les trois axes. Sur \vec{e}_y , $E_{0ry} \exp i(\omega' t - k_{ry} y - k_{rz} z) = 0$. Cette relation doit être vraie $\forall t, \forall y, \forall z$, on a donc nécessairement $E_{0ry} = 0$. En projetant sur \vec{e}_z , on obtient $E_0 \cos \theta \exp i(\omega' t - k_{ry} y - k_{rz} z) + E_{0rz} \exp i(\omega' t - k_{ry} y - k_{rz} z) = 0$. La validité de l'équation précédente $\forall t$ impose $\omega' = \omega$, l'onde réfléchie possède la même pulsation que l'onde incidente. Comme les deux ondes se propagent dans le vide, la norme des deux vecteurs d'onde est la même $k_i = k = k_r$. L'équation projetée sur \vec{e}_z est valable $\forall y$, cela impose $k_{ry} = 0$. De la même façon, la validité $\forall z$ impose que $k_{rz} = k \sin \theta$. On a donc $k_{rx}^2 + k^2 \sin^2 \theta = k^2$ d'où $k_{rx} = k \cos \theta$. Il y a a priori deux solutions à savoir $k_{rx} = k \cos \theta$ et $k_{rx} = -k \cos \theta$. L'onde réfléchie ne peut se propager que selon x croissant, il faut retenir $k_{rx} = k \cos \theta$. L'équation projetée sur \vec{e}_z donne par conséquent : $E_{0rz} = -E_0 \cos \theta$. Il reste encore à déterminer l'amplitude de la composante du champ électrique réfléchi selon \vec{e}_x . On se situe dans le vide, on a donc $\text{div } \vec{E} = 0 = \text{div } \vec{E}_i + \text{div } \vec{E}_r = 0$. Mais comme l'onde incidente est une onde plane progressive transverse électrique, on a $\text{div } \vec{E}_i = -i \vec{k}_i \cdot \vec{E}_i = 0$. On en déduit donc que $\text{div } \vec{E}_r = 0 = -i \vec{k}_r \cdot \vec{E}_r = 0$. On a $k_{rx} E_{0rx} + k_{rz} E_{0rz} = 0$. On trouve $E_{0rx} = E_0 \sin \theta$. L'expression du champ électrique de l'onde réfléchie est donc $\vec{E}_r = (E_0 \sin \theta \vec{e}_x - E_0 \cos \theta \vec{e}_z) \exp i(\omega t - k \cos \theta x - k \sin \theta z)$. L'expression du champ électrique dans le vide est $\vec{E} = 2E_0 \sin \theta \cos(k \cos \theta x) \cos(\omega t - k \sin \theta z) \vec{e}_x - 2E_0 \cos \theta \sin(k \cos \theta x) \sin(\omega t - k \sin \theta z) \vec{e}_z$. On peut calculer \vec{B} à partir de $\vec{r} \otimes \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. On obtient $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = (\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}) \vec{e}_y$. En intégrant sans prendre en compte de composante statique du champ magnétique, on arrive à $\vec{B} = \frac{2E_0}{c} \cos(k \cos \theta x) \cos(\omega t - k \sin \theta z) \vec{e}_y$. La relation de passage est $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge (-\vec{e}_x)$ avec $\vec{B}_2 = \vec{0}$ puisque le conducteur est parfait. Comme $\vec{B}_1 = \vec{B}$, on arrive à $\vec{j}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos(k \cos \theta x) \cos(\omega t - k \sin \theta z) \vec{e}_z$. C'est l'onde incidente qui est à l'origine de la distribution de charges et de courants surfaciques. On peut maintenant calculer le vecteur de POYNTING $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c} (\cos \theta \cos(k \cos \theta x) \sin(k \cos \theta x) \cos(\omega t - k \sin \theta z) \sin(\omega t - k \sin \theta z) \vec{e}_x + \sin \theta \cos^2(k \cos \theta x) \cos^2(\omega t - k \sin \theta z) \vec{e}_z)$. On peut constater que $\langle \vec{\Pi} \rangle_t = \vec{e}_z \epsilon_0 E_0^2 c \sin \theta (1 + \cos(2\pi \frac{2 \cos \theta}{\lambda} x))$, on retrouve dans l'expression de cette moyenne temporelle, l'expression du terme d'interférences de FRESNEL. Il faut reprendre le problème avec un autre état de polarisation qui est maintenant de polarisation. On pratique exactement de la même façon pour retrouver le champ électrique en exprimant $\vec{E}_i = E_1 \exp i(\omega t + k \cos \theta x - k \sin \theta z)$ et $\vec{E}_r = -E_1 \exp i(\omega t - k \cos \theta x - k \sin \theta z) \vec{e}_y$. $\vec{E} = -2E_1 \sin(k \cos \theta x) \sin(\omega t - k \sin \theta z) \vec{e}_z$. Pour trouver le champ magnétique, on pratique une méthode différente de la partie précédente, on peut utiliser la relation de structure pour chaque onde plane (incidente comme réfléchie). On a $\vec{B}_i = \frac{1}{c} \vec{u}_i \wedge E \vec{e}_y$. On trouve $\vec{B}_i = -\frac{E_1}{c} \sin \theta \exp i(\omega t + k \cos \theta x - k \sin \theta z) \vec{e}_x - \frac{E_1}{c} \cos \theta \exp i(\omega t + k \cos \theta x - k \sin \theta z)$. On pratique de la même façon pour \vec{B}_r et on obtient : $\vec{B}_r = \frac{E_1}{c} \sin \theta \exp i(\omega t - k \cos \theta x - k \sin \theta z) \vec{e}_x - \frac{E_1}{c} \cos \theta \exp i(\omega t - k \cos \theta x - k \sin \theta z)$. Le champ magnétique total est donc la somme de ces deux champs. Cela devient $\vec{B} = (\frac{2E_1}{c} \sin \theta \sin(k \cos \theta x) \sin(\omega t - k \sin \theta z)) \vec{e}_x - (\frac{2E_1}{c} \cos \theta \cos(k \cos \theta x) \cos(\omega t - k \sin \theta z)) \vec{e}_z$. Il n'y a pas de charge surfacique $\sigma = 0$ car il n'y a pas de champ électrique sur \vec{e}_x dans les ondes étudiées. Par contre, il y aura aussi un courant surfacique $\vec{j}_s = \frac{2E_1}{\mu_0 c} \cos \theta \cos(k \cos \theta x) \cos(\omega t - k \sin \theta z) \vec{e}_y$. On calcule pour finir le vecteur de POYNTING $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{4E_1^2}{\mu_0 c} (-\cos \theta \sin(k \cos \theta x) \cos(k \cos \theta x) \sin(\omega t - k \sin \theta z) \cos(\omega t - k \sin \theta z) \vec{e}_x + \sin \theta \sin^2(k \cos \theta x) \sin^2(\omega t - k \sin \theta z) \vec{e}_z)$. Si on calcule la moyenne temporelle $\langle \vec{\Pi} \rangle_t = c \epsilon_0 E_1^2 \sin \theta (1 - \cos 2\pi \frac{2 \cos \theta}{\lambda} x)$. On retrouve à nouveau une expression de type fonction de FRESNEL des interférences.

8. Porte de four à micro-ondes

Réponses : la feuille métallique sert à réfléchir les ondes électromagnétiques utiles à la cuisson et internes au four. Le rôle des trous est de permettre de voir ce qu'il se passe depuis l'extérieur dans le four. On peut préciser que les deux rôles précédents ne sont pas contradictoires car les fréquences en jeu pour les ondes concernées dans les deux cas sont radicalement différentes :

- Les micro-ondes de fréquence $f = 2,5 \text{ GHz}$ correspondent à une longueur d'onde $\lambda_0 = c/f = 0,1 \text{ m}$ supérieure à la taille des trous (de l'ordre du millimètre) donc elles ne peuvent produire une onde progressive vers l'extérieur du four même via les trous (pas de diffraction possible non plus).
- Par ailleurs, pour voir dans le four, ce sont les ondes électromagnétiques du domaine visible qui sortent du four et leur longueur d'onde, entre 4.10^{-7} m et 8.10^{-7} m , est petite devant la taille des trous : les rayons lumineux passent bien par les trous et sont même descriptibles dans le cadre de l'optique géométrique (diffraction largement négligeable).

La fonction $\underline{E}_0(x)$ est manifestement écrite sous la forme d'un développement en série de FOURIER, ce qui est effectivement judicieux puisque la grille est périodique selon (Ox) . De plus, on voit que les termes en sinus du développement sont absents, ce qui est cohérent avec la symétrie du problème posé par rapport à l'axe (Oy) (parité de la fonction obligatoire dans ce cas). On peut préciser l'expression de la pulsation spatiale modale K_n , sachant que la périodicité de la grille est a : $K_n = n \frac{2\pi}{a}$. Enfin, la moyenne de la fonction $\underline{E}_0(x)$ est nulle d'après le résultat intégral fourni dans le sujet, donc $\underline{E}_{0, \text{amp}} = 0$. La grille métallique joue un rôle important dans la génération de l'onde à l'extérieur du four. En effet, l'onde intérieure incidente entraîne

l'existence de sources sur la grille et celles-ci génèrent, d'une part, l'onde réfléchie dans le four et, d'autre part, l'onde externe que l'on étudie dans ce sujet. On raisonne mode par mode puisque le problème posé est (implicitement) linéaire et on peut profiter du théorème de superposition. À l'extérieur du four, chaque mode vérifie l'équation des ondes électromagnétiques dans l'air assimilé au vide, qui est l'équation de D'ALEMBERT $\Delta \vec{E}_n - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_n}{\partial t^2} = \vec{0}$. On injecte la forme proposée par l'énoncé dans cette équation, ce qui fournit à tout instant et pour toute position extérieure $\left(-K_n^2 \underline{E}_n(z) + \underline{E}_n''(z) + \frac{\omega^2}{c^2} \underline{E}_n(z)\right) \cos(K_n x) \exp j\omega t, \vec{e}_y = \vec{0}$. Ainsi, $\underline{E}_n''(z) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - K_n^2\right) \underline{E}_n(z) = 0$. On veut que l'amplitude de l'onde s'atténue toujours en s'éloignant de la porte du four selon les z croissants (pour toute condition interne au four), donc il ne faut pas avoir $\omega^2/c^2 - K_n^2 \geq 0$ (on aurait des solutions sinusoïdales, ou affine pour le cas d'égalité à 0). La condition pertinente est ainsi, pour tout n , $K_n = n \frac{2\pi}{a} > \frac{\omega}{c}$ d'où la condition attendue sur le pas a : $a < \frac{2\pi c}{\omega} = \lambda_0$. Cela signifie que le pas a doit être inférieur à la longueur d'onde (sinon, il existe une onde progressive diffractée, la diffraction ne devenant négligeable que lorsque $a \gg \lambda_0$ (rendant l'approche d'optique géométrique valide)). La solution $\underline{E}_n(z)$ est dans ce cas de la forme $\underline{E}_n(z) = \underline{A}_n \exp -z/d_n + \underline{B}_n \exp z/d_n$ d'où $d_n = \frac{1}{\sqrt{K_n^2 - \omega^2/c^2}}$. Le terme avec \underline{B}_n en facteur est associé à une onde progressive suivant les z décroissants mais qui n'a aucune source dans le problème considéré, donc $\underline{B}_n = 0$. Il ne reste que l'autre terme et la condition limite en $z = 0^+$ donne $\underline{A}_n = \underline{E}_{n,\text{amp}}$. Par conséquent, $\underline{E}_n(z) = \underline{E}_{n,\text{amp}} \exp -z/d_n$. Finalement, l'onde extérieure est la superposition de modes de la forme complexe $\vec{E}_n(M, t) = \underline{E}_{n,\text{amp}} \cos(K_n x) \exp -z/d_n \exp j\omega t \vec{e}_y$ soit, en notation réelle et en posant $\underline{E}_{n,\text{amp}} = E_{n,\text{amp}} \exp j\varphi_n$, $\vec{E}_n(M, t) = E_{n,\text{amp}} \cos(K_n x) \exp -z/d_n \cos(\omega t + \varphi_n) \vec{e}_y$. Il s'agit de modes monochromatiques polarisés selon (Oy) , stationnaires selon (Ox) et évanescents (*i.e.* stationnaires atténués) selon (Oz) . Ne s'agissant pas d'une oep(m) dans le vide, on ne peut pas utiliser une relation de structure pour déterminer le champ magnétique du mode de rang n . On se rabat donc sur l'équation de MAXWELL-FARADAY :

$$\frac{\partial \vec{B}_n}{\partial t} = -\vec{rot} \vec{E}_n = - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ E_{n,y}(x, z, t) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ soit } \frac{\partial \vec{B}_n}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\frac{E_{n,\text{amp}}}{d_n} \exp -z/d_n \cos(K_n x) \exp j\omega t \\ 0 \\ K_n E_{n,\text{amp}} \exp -z/d_n \sin(K_n x) \exp j\omega t \end{pmatrix}.$$

On intègre en ne tenant pas compte du champ magnétique stationnaire (non ondulatoire) éventuel :

$$\vec{B}_n(M, t) = \begin{pmatrix} -\frac{E_{n,\text{amp}}}{j\omega d_n} \exp -z/d_n \cos(K_n x) \exp j\omega t \\ 0 \\ \frac{K_n E_{n,\text{amp}}}{j\omega} \exp -z/d_n \sin(K_n x) \exp j\omega t \end{pmatrix}.$$

On passe au vecteur de POYNTING du mode en explicitant d'abord les champs électrique et magnétique réels ! Le champ électrique réel a déjà été écrit à la question précédente et le champ magnétique réel est :

$$\vec{B}_n(M, t) = \begin{pmatrix} -\frac{E_{n,\text{amp}}}{\omega d_n} \exp -z/d_n \cos(K_n x) \sin(\omega t + \varphi_n) \\ 0 \\ \frac{K_n E_{n,\text{amp}}}{\omega} \exp -z/d_n \sin(K_n x) \sin(\omega t + \varphi_n) \end{pmatrix}.$$

Alors, $\vec{\Pi}_n(M, t) = \frac{\vec{E}_n \wedge \vec{B}_n}{\mu_0}$ permet d'accéder au résultat :

$$\vec{\Pi}_n(M, t) = \begin{pmatrix} \frac{K_n E_{n,\text{amp}}^2}{\mu_0 \omega} \exp -2z/d_n \cos(K_n x) \sin(K_n x) \times \cos(\omega t + \varphi_n) \sin(\omega t + \varphi_n) \\ 0 \\ \frac{E_{n,\text{amp}}^2}{\mu_0 \omega d_n} \exp -2z/d_n \cos^2(K_n x) \times \cos(\omega t + \varphi_n) \sin(\omega t + \varphi_n) \end{pmatrix}.$$

Comme $\langle \cos(\omega t + \varphi_n) \sin(\omega t + \varphi_n) \rangle = 0$, on déduit que $\langle \vec{\Pi}_n(M, t) \rangle = \vec{0}$. On en déduit que l'onde évanescence ne transporte pas de puissance moyenne électromagnétique à l'extérieur du four : cette puissance moyenne est intégralement réfléchie dans le four (en supposant le métal de la grille parfait sinon celle-ci peut s'échauffer un peu). Notons qu'il existe une puissance instantanée associée à l'onde évanescence mais celle-ci n'est notable que jusqu'à une distance de l'ordre de d_n de la porte du four. Le mode le plus étendu à l'extérieur du four est le fondamental ($d_1 > d_n$ si $n > 1$) pour lequel $d_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi^2}{a^2} - \frac{\omega^2}{c^2}}}$. Or, pour $f = 2,5 \text{ GHz}$, $a \ll \lambda_0 = 2\pi c/\omega$ donc

l'expression précédente se simplifie en $d_1 \simeq \frac{a}{2\pi} = 0,3 \text{ mm}$. Cette distance est faible devant l'épaisseur de 1 cm de la vitre de plastique donc on peut considérer que celle-ci est suffisante pour éviter à l'utilisateur du four d'être

touché par les ondes de cuisson. On suppose bien sûr ici que le plastique ne modifie pas l'ordre de grandeur de d_1 (ce qui est bien le cas car l'indice du plastique aux fréquences en jeu reste de l'ordre de l'unité). On peut aussi estimer le facteur d'atténuation η de l'amplitude de l'onde à $D = 1$ cm de la grille (en assimilant le plastique au vide) : $\eta \simeq \exp -D/d_1 \simeq \exp(-30)$. C'est effectivement extrêmement faible ! Il en sera toujours ainsi tant que la structure de la porte du four n'est pas altérée bien sûr !

9. Réflexion sur un miroir mobile et effet Doppler

Réponses : l'onde incidente est une oepm dans le vide se propageant suivant \vec{e}_x donc la relation de structure donne $\vec{B}_i = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}_i}{c} = -\frac{E_0}{c} \cos[\omega_i(t - \frac{x}{c})] \vec{e}_y$. On passe alors au champ électrique de l'onde incidente par utilisation de la formule de changement de référentiel de l'énoncé (avec $\vec{v}_e = \vec{v} = v\vec{e}_x$), d'où $\vec{E}_i' = (1 - \frac{v}{c}) E_0 \cos[\omega_i(t - \frac{x}{c})] \vec{e}_z$. On applique la même démarche qu'à la question précédente, en notant que l'oepm dans le vide se propage maintenant dans le sens des x décroissants, d'où $\vec{B}_r = \frac{E_r}{c} \cos[\omega_r(t + \frac{x}{c})] \vec{e}_y$ puis $\vec{E}_r' = (1 + \frac{v}{c}) E_r \cos[\omega_r(t + \frac{x}{c})] \vec{e}_z$. Le champ électrique total ne peut pas être orthogonal à la plaque sans être nul, donc $(\vec{E}_i' + \vec{E}_r')_{x=v t} = \vec{0}$ soit la relation $(\star) (1 - \frac{v}{c}) E_0 \cos[\omega_i(1 - \frac{v}{c})t] + (1 + \frac{v}{c}) E_r \cos[\omega_r(1 + \frac{v}{c})t]$ pour tout instant. Cela impose l'identification des pulsations des deux fonctions sinusoïdales (puisque l'onde incidente n'est pas nulle), d'où $(1 - \frac{v}{c})\omega_i = (1 + \frac{v}{c})\omega_r$ soit $\omega_r = \frac{c-v}{c+v}\omega_i$. Puisque le raisonnement a été mené dans la limite non relativiste, $v \ll c$ et on obtient la formule de l'effet DOPPLER classique (décalage entre pulsation de l'onde incidente et celle de l'onde réfléchi en raison d'un miroir mobile ici) $\omega_r \simeq \omega_i(1 - \frac{2v}{c})$. Bien entendu, on retrouve une pulsation inchangée pour $v = 0$. Il y a aussi identification des facteurs d'amplitude de la relation (\star) , d'où $E_r = \frac{v-c}{v+c} E_0$ soit, en restant cohérent avec l'approximation classique $v \ll c$ utilisée, $E_r \simeq -(1 - \frac{2v}{c})E_0$. Il y a un déphasage de π (modulo 2π) du champ électrique à la réflexion de l'onde dans \mathcal{R} mais celle-ci voit son amplitude légèrement modifiée quand même ! Bien entendu, on retrouve un coefficient de réflexion de -1 pour $v = 0$ (conformément à ce qui a été vu en cours). R représente le rapport de la puissance moyenne surfacique réfléchi avec la puissance moyenne surfacique incidente et constitue un coefficient de réflexion en puissance moyenne : il donne de façon quantitative le pourcentage de la puissance moyenne de l'onde incidente qui retourne vers l'émetteur par réflexion sur la paroi mobile. On raisonne ici dans le référentiel \mathcal{R} . On sait (ou on retrouve vite) que, pour une l'oepm dans le vide incidente, $\vec{\Pi}_i = \frac{E_i^2}{\mu_0 c} \vec{e}_x$ d'où $\langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_x$. De même, pour l'onde réfléchi (toujours dans \mathcal{R}), $\vec{\Pi}_r = -\frac{E_r^2}{\mu_0 c} \vec{e}_x$ d'où $\langle \vec{\Pi}_r \rangle = -\frac{E_r^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_x$. Alors $R = \frac{E_r^2}{E_0^2} \simeq 1 - \frac{4v}{c}$ dans la limite classique ($v \ll c$). On constate que $R < 1$, donc toute l'énergie de l'onde incidente ne revient pas, en moyenne, dans l'onde réfléchi ! Cela n'est pas dû à une absorption d'énergie par la plaque (puisque elle est parfaitement conductrice !) mais au fait qu'il y a de plus en plus d'énergie électromagnétique devant la plaque (qui libère de l'espace en se déplaçant).

10. Réception d'onde par un cadre

Réponses : le cadre est très loin et assez petit, d'après l'énoncé, pour considérer l'onde qu'il reçoit comme une oepm polarisée rectilignement ($a \ll r$). Voici la figure 1 (où le cadre est en fait incliné, de normale unitaire \vec{u} orientée en accord avec l'orientation de A à B du cadre).

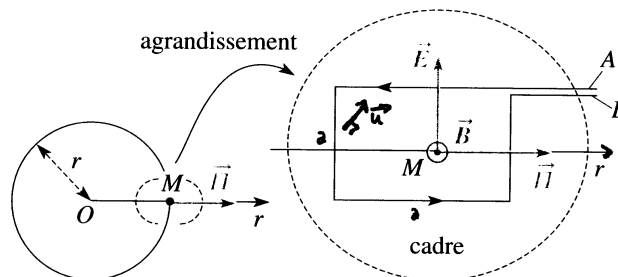


FIGURE 1 – Cadre détecteur d'une onde électromagnétique

La puissance moyenne \mathcal{P}_m de l'émetteur est rayonnée de façon isotrope donc elle se répartit à la distance r sur une sphère et $\mathcal{P}_m = 4\pi r^2 \langle \Pi \rangle > 0$ où $\vec{\Pi}$ est le vecteur de POYNTING. Pour l'oepm polarisée rectilignement, on a $\langle \Pi \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} c = \frac{c}{2\mu_0} B_0^2$ pour $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$ et $\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$. Alors, $\mathcal{P}_m = 4\pi r^2 \frac{B_0^2}{2\mu_0} c$. On cherche la tension donc on utilise la loi de FARADAY (issue de l'équation de MAXWELL-FARADAY avec les orientations adéquates) : $U = -\frac{d\phi}{dt} = -N a^2 \frac{d\vec{B} \cdot \vec{u}}{dt}$. Cette tension U est d'autant plus élevée en amplitude que \vec{B} est parallèle à \vec{u} (cadre à mettre dans le plan de la figure précédente). Dans ce cas (au signe près qui importe peu ici), $U = -N a^2 \frac{d}{dt} (B_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$. Or, $\lambda = c/\nu = 300$ m donc $\lambda \gg a$ et l'ARQS à l'échelle du cadre est justifiée

(retards propagatifs négligeables à cette échelle). Ainsi, $U \simeq -N a^2 \frac{d}{dt}(B_0 \cos \omega t)$. Alors $U = B_0 N a^2 \omega \sin \omega t$ d'où la tension efficace $U_{\text{eff}} = \frac{N a^2 \omega B_0}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \pi N a^2 \nu B_0$. Enfin, $U_{\text{eff}} = \sqrt{2} \pi N a^2 \nu \sqrt{\frac{2\mu_0}{c} \frac{\mathcal{P}_m}{4\pi r^2}} = 0,5 \text{ mV}$.

11. Pression de radiation

Réponses : Puisque le conducteur est parfait, il y a réflexion totale de l'onde incidente selon les lois de DESCARTES. L'onde réfléchie est dans le plan d'incidence et, en absolu, $\theta_i = \theta_r = \theta$. On écrit alors les vecteurs d'onde (de module $k_i = \omega_i/c$ pour des oeppm dans le vide) : $\vec{k}_i = \begin{pmatrix} k_i \sin \theta \\ 0 \\ k_i \cos \theta \end{pmatrix}$ et $\vec{k}_r = \begin{pmatrix} k_r \sin \theta \\ 0 \\ -k_r \cos \theta \end{pmatrix}$. Par linéarité des équations du problème, le champ réfléchi (réponse) a la même pulsation que le champ incident (excitation) : $\omega_i = \omega_r = \omega$ donc $k_i = k_r = k = \omega/c$. Si cela ne vous paraît pas évident, il suffit d'écrire les relations de passage et de voir que si les pulsations étaient différentes, toutes les ondes seraient nulles (par liberté de la base des exponentielles complexes en $\exp j\omega t$). D'ailleurs, c'est l'utilisation des relations de passage dans les milieux matériels (différentes de celles du vide!) et de la continuité de la phase des exponentielles complexes qui conduit aux relations de DESCARTES de la réflexion et de la réfraction entre deux milieux d'indices n_1 et n_2 . On considère maintenant plus précisément la polarisation rectiligne orthogonale au plan d'incidence. Voir la figure 2.

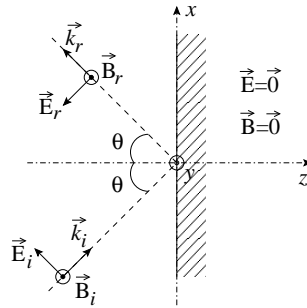


FIGURE 2 – Structures des ondes électromagnétiques

On raisonne en supposant le plan d'incidence de symétrie négative pour les sources du champ incident, donc le champ électrique réfléchi (qui est un effet) lui est orthogonal : la polarisation de l'onde réfléchie reste la même que celle de l'onde incidente (un raisonnement simple à partir des dipôles rayonnants excités dans le conducteur conduit au même résultat). Les expressions des champs électriques associés aux oeppm sont par conséquent $\vec{E}_i = E_{0,i} \vec{e}_y \exp j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})$ et $\vec{E}_r = E_{0,r} \vec{e}_y \exp j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})$. On déduit les expressions des champs magnétiques correspondants par la relation de structure des oeppm dans le vide : $\vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{E_{0,i}}{c} \exp j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}) \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{pmatrix}$

et $\vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} = \frac{E_{0,r}}{c} \exp j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r}) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{pmatrix}$. Il ne reste qu'à exploiter les relations de passage à l'interface $z =$

0 (sachant que le champ électromagnétique est nul dans un conducteur parfait). Puisque \vec{E}_T et \vec{B}_N sont continus, on déduit l'égalité (dans les deux cas) $E_{0,i} + E_{0,r} = 0$ (*). Le champ réfléchi est alors totalement défini en fonction de l'incident. Il ne reste plus qu'à exploiter les deux dernières relations de passage. En notant par un indice 1 le vide et un indice 2 le conducteur, on a $\underbrace{\vec{E}_{2,N}(z=0)}_{\vec{0} \text{ (cond. parf.)}} - \underbrace{\vec{E}_{1,N}(z=0)}_{\vec{0} \text{ (cf-polarisations)}}$

$= \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12} = 0 + \frac{E_{0,i}}{c} \cos \theta \exp j\omega t - \frac{\omega}{c} \sin \theta x - \frac{E_{0,r}}{c} \cos \theta \exp j\omega t - \frac{\omega}{c} \sin \theta x = \mu_0 \vec{j}_{s,y}$. Ainsi, en utilisant la relation (*), on déduit en notation réelle $\vec{j}_s = 2 \epsilon_0 c E_{0,i} \cos \theta \cos(\omega t - \frac{\omega}{c} \sin \theta x) \vec{e}_y$. On remarque que \vec{j}_s respecte la symétrie négative par le plan d'incidence des sources. Dans le cas d'une onde incidente polarisée orthogonalement au plan d'incidence, seuls des courants de surface sont générés pour conserver l'annulation du champ électromagnétique au sein du conducteur. La pression moyennée dans le temps exercée par l'onde sur le conducteur est la pression de radiation qui est $P_{rad} = \langle \frac{\mu_0 j_s^2}{2} - \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \rangle = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2 \theta$. Puisqu'il y a dualité onde-corpuscule, on doit retrouver le même résultat pour un ensemble de photons ! On adopte l'approche simplifiée suivante : les photons sont des billes de quantité de mouvement $h\nu_0/c$ chacune et ricochant sur la surface plane du conducteur. On peut donc supposer les lois de DESCARTES de la réflexion applicables (ce qui n'est en fait pas restrictif si l'on raisonnait en statistique) : après réflexion, le photon reste dans le plan d'incidence et l'angle de réflexion correspond à l'angle d'incidence ($\theta = \theta'$). De plus, le photon ne change pas de fréquence à la réflexion

(son énergie $h\nu_0$ est conservée par le choc élastique). La variation de quantité de mouvement pour un photon à la réflexion est $\vec{p}' - \vec{p} = -2 \frac{h\nu_0}{c} \cos\theta \vec{e}_z$. Or, le nombre de photons incidents pendant dt sur la surface S du conducteur correspond aux photons contenus dans le cylindre d'incidence de longueur $c dt$ et d'inclinaison θ , soit $dN = n_v c dt S \cos\theta$ où n_v est la densité particulaire des photons incidents. Alors, la variation de la quantité de mouvement du conducteur pendant dt est $d\vec{p}_{\text{conducteur}} = -dN(\vec{p}' - \vec{p}) = 2n_v h\nu_0 \cos^2\theta S dt \vec{e}_z$. L'écriture du principe fondamental de la dynamique pour le conducteur conduit alors à l'expression de la pression perçue par celui-ci : $P_{\text{rad}} = \frac{d\vec{p}_{\text{conducteur}}}{S dt} \cdot \vec{e}_z = 2n_v h\nu_0 \cos^2\theta$. Le résultat est le même que le précédent puisque l'énergie moyenne volumique du faisceau incident est, en corpusculaire $\langle e_i \rangle = n_v h\nu$ et, en ondulatoire, $\langle e_i \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$. Finalement, dans les deux cas, $P_{\text{rad}} = 2\langle e_i \rangle \cos^2\theta$. Autrement dit, que l'on raisonne avec une onde électromagnétique ou avec un ensemble de photons, on obtient la même pression de radiation : les visions ondulatoire et corpusculaire ne se contredisent pas. Toutefois, l'affaire se complique si l'on décide de réduire fortement le flux de photons ; on y reviendra lorsqu'on discutera de la dualité onde-corpuscule en physique quantique. On fait l'hypothèse que la bille est intégralement plongée dans le faisceau laser modélisé par une onde plane progressive monochromatique (le résultat obtenu pour r à la fin valide cette hypothèse sans problème !). De plus, on suppose l'aluminium parfaitement conducteur pour pouvoir utiliser la pression de radiation précédente. Dans le référentiel (supposé galiléen) d'étude, la bille (de rayon r et de masse volumique ρ) est soumise à son poids descendant de valeur $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$ et à la force due à la pression de radiation, de valeur estimable en raisonnant avec la section πr^2 de la bille et une incidence normale θ_0 , soit $P_{\text{rad}}(\theta = 0) \pi r^2$. La lévitation est assurée dès lors que $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = P_{\text{rad}}(\theta = 0) \pi r^2$ donc $r = \frac{3P_{\text{rad}}(\theta=0)}{4\rho g}$. Il reste à relier la puissance moyenne $\mathcal{P} = 1 \text{ W}$ du laser (sur une section $S = 1 \text{ mm}^2$ de l'espace) avec la pression de radiation. Il y a plusieurs façons de procéder. Par exemple, on peut s'appuyer sur la vitesse d'énergie $v_e = c$ des ondes dans le vide : par bilan d'énergie moyenne pendant Δt pour l'onde, on sait que $\langle \Pi \rangle \Delta t = \langle e_i \rangle c \Delta t$ donc $\langle \Pi \rangle = \langle e_i \rangle c$ (relation démontrable aussi par calcul direct de chaque valeur moyenne pour une onde plane dans le vide). Alors, la puissance moyenne du laser s'écrit $\mathcal{P} = \langle \Pi \rangle S = \langle e_i \rangle c S$ donc $P_{\text{rad}} = 2 \frac{\mathcal{P}}{cS}$. Finalement, $r = \frac{3\mathcal{P}}{2\rho g c S} \simeq 10^{-7} \text{ m}$ en prenant $\rho \simeq 3.10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ comme masse volumique de l'aluminium. C'est un rayon très faible ! En pratique, la lévitation de la sorte de la bille n'est pas facile. On pourrait être tenté de focaliser plus fortement le laser et/ou d'augmenter sa puissance mais, l'aluminium n'étant pas un conducteur idéalement parfait, il est le siège d'un effet Joule qui est de nature à le faire changer d'état (liquéfaction, voire sublimation ; cette dernière est d'ailleurs utilisée pour la découpe laser de métaux. Les voiles solaires sont utilisées pour les satellites pour modifier leur orientation ou leur trajectoire, sans consommation de carburant fossile, en exploitant la pression de radiation du Soleil.

C. Ondes dans les milieux matériels

12. Champs dans un câble coaxial

Réponses : $E(r) = E_0 \frac{R_1}{r}$, $\sigma_{r=R_1} = \epsilon_0 E_0 \exp[i(\omega t - kz)]$, $\sigma_{r=R_2} = -\epsilon_0 E_0 \frac{R_1}{R_2} \exp[i(\omega t - kz)]$;
 $\vec{B} = \frac{k}{\omega} E_0 \frac{R_1}{r} \exp[i(\omega t - kz)] \vec{e}_\theta$; $\vec{j}_{r=R_1} = \frac{1}{\mu_0} \frac{k}{\omega} E_0 \exp[i(\omega t - kz)] \vec{e}_z$, $\vec{j}_{r=R_2} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{k}{\omega} E_0 \frac{R_1}{R_2} \exp[i(\omega t - kz)] \vec{e}_z$;
 $\frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}$; $\langle u \rangle = \epsilon_0 E_0^2 \frac{R_1^2}{2r^2}$; $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \frac{k}{\omega} E_0^2 \frac{R_1^2}{r^2} \vec{e}_z$; $\langle \vec{\Pi} \rangle = \langle u \rangle \vec{v}_{en}$, $\vec{v}_{en} = c \vec{e}_z$.

13. Réflexion sur un plasma

Réponses : $k_t^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ avec $\omega_p = \sqrt{\frac{n \exp 2}{m \epsilon_0}}$, \vec{E}_{tan} continu, \vec{B}_n continu, \vec{B}_{tan} continu car pas de courant en $z = 0$, on suppose $\omega > \omega_p$, $\vec{k}_i = \frac{\omega}{c} [\cos\theta \vec{e}_z + \sin\theta \vec{e}_x]$, $\vec{k}_r = \frac{\omega}{c} [-\cos\theta' \vec{e}_z + \sin\theta' \vec{e}_x]$, $\vec{k}_t = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} [\cos\epsilon \vec{e}_z + \sin\epsilon \vec{e}_x]$, $\vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{E}_t$ en $z = 0$ vraie $\forall(x, t)$ impose $\omega = \omega_r = \omega_t$, $\sin\theta = \sin\theta'$ et $\sin\theta = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \sin\epsilon$, $E_0 + E_{0r} = E_{0t}$, $E_{0r} - E_0 = E_{0t} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \frac{\cos\epsilon}{\cos\theta}$, $E_{0r} = E_0 \frac{\cos\theta + \cos\epsilon \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{\cos\theta - \cos\epsilon \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$, réflexion totale pour $i \geq \arcsin \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ alors $E_{0r} = -E_0$, on suppose $\omega < \omega_p$, $k_t = -i \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}$, pas d'onde transmise, $E_{0r} = -E_0$ et toujours $\sin\theta' = \sin\theta$.

14. Ionosphère

Réponses : $\vec{j}_{tot} = -j \frac{n \exp 2}{\omega} (\frac{1}{m} + \frac{1}{M}) \vec{E} \simeq -j \frac{n \exp 2}{m \omega} \vec{E}$, v_φ élevée si le milieu est peu dense et $f_{mag}/f_{el} = v/v_\varphi$, $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 n \exp 2}{m}$, $v_\varphi = c / \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 n \exp 2}{m}}$, $v_g = c \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 n \exp 2}{m}}$, $f_0 = \frac{ec}{2\pi} \sqrt{\frac{n \mu_0}{m}}$, $f_0 = 9 \text{ MHz}$, écart de l'ordre de $\frac{f_0^2}{2f^2} \simeq 4 \times 10^{-3}$, $\|\vec{\Pi}\| = \frac{E_0^2}{2\mu_0 v_\varphi}$, $u = \frac{E_0^2}{4} (\epsilon_0 + \frac{1}{\mu_0 v_\varphi^2})$, $e_c = \frac{E_0^2}{4} \frac{n \exp 2}{m \omega^2}$, $v_e = \frac{\|\vec{\Pi}\|}{u + e_c} = v_g$. Comme on parle d'ondes monochromatiques, on s'intéresse à la vitesse de phase. On a $\Delta t_1 = \frac{c \Delta t}{v_{\varphi,1}}$ avec Δt correspondant à 4000 années. On a aussi $\Delta t_2 = \frac{c \Delta t}{v_{\varphi,2}}$ avec $\tau = \Delta t_1 - \Delta t_2$. On en déduit que $\frac{\tau}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega_2^2}}$. En effectuant un développement limité, on obtient $\frac{\tau}{\Delta t} = \frac{\omega_p^2}{2} (\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2})$ mais comme $\omega_2^2 = 10^4 \omega_1^2$, on peut en déduire que $\frac{\tau}{\Delta t} = \frac{\omega_p^2}{2\omega_1^2}$. On en déduit que $n = \frac{m \epsilon_0}{\exp 2} \frac{2\pi^2 c^2}{\lambda_1^2} \frac{\tau}{\Delta t}$. On trouve $n \simeq 10^3 \text{ m}^{-3}$. En appliquant la loi des gaz parfaits $p = 2nk_B T$

avec $T \simeq 3\text{ K}$ qui correspond à la température du fond diffus cosmologique, on trouve $p \simeq 10^{-19}\text{ Pa}$, ce qui correspond à 10^{-24} bar . Il y a un facteur 10^3 d'écart, on a une densité plus importante ou une température plus élevée.

15. Gaz interstellaire et effet Faraday

Réponses : pour une oepmm, les équations de MAXWELL-GAUSS et MAXWELL-FLUX donnent, avec les notations de l'énoncé, $-i\vec{k} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{n(e-e)}{\varepsilon_0} = 0$ et $-i\vec{k} \cdot \vec{B}_{\text{onde}} = 0$ puisque $\text{div } \vec{B}_1 = 0$. On en déduit immédiatement que l'onde est transverse. On peut même préciser les directions relatives des champs électrique et magnétique de l'onde car on a la relation de structure issue de l'équation de MAXWELL-FARADAY : $\vec{B}_{\text{onde}} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$. Le trièdre $(\vec{E}, \vec{B}_{\text{onde}}, \vec{k})$ est droit et direct. Dans un plasma, on peut négliger la force de frottement sur les électrons et la force magnétique due à l'onde car, dans le milieu peu dense où $v_\varphi \simeq c$ (à la louche), la relation de structure donne accès à $\left| \frac{F_{\text{magn. onde}}}{F_{\text{elec}}} \right| \simeq \left| \frac{v B_{\text{onde}}}{E} \right| \simeq \frac{v}{v_\varphi} \ll 1$. Par contre, on ne maîtrise pas du tout l'ordre de grandeur de la force magnétique statique due à \vec{B}_1 . Il ne faut surtout pas la négliger ; c'est sa présence qui provoque l'effet FARADAY. Il reste $m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}_1)$. Dans le cas d'une onde de vitesse $\vec{v} = \vec{v}_0 \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$, on tire $i m \omega \vec{v} = -e (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}_1)$. On note que le produit vectoriel ne pose pas de problème à cause de la vitesse complexe car le champ \vec{B}_1 est non complexe. De cette dernière équation, on déduit le vecteur densité de courant complexe : $\vec{j} = n e (\vec{v}_{\text{ions}} - \vec{v}_{\text{électrons}}) \simeq -n e \vec{v}_{\text{électrons}}$ en raison de l'inertie bien plus importante des ions (plus massifs). Ainsi, $-i m \omega \vec{j} = -n \exp 2 \vec{E} + e \vec{j} \wedge \vec{B}_1$ soit $\vec{j} = i \left[-\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \varepsilon_0 \omega \vec{E} + \frac{\omega_c}{\omega} \vec{j} \wedge \vec{e}_z \right]$. Après des calculs simples développant l'expression précédente sur les trois axes des coordonnées cartésiennes, on obtient la matrice de résistivité complexe :

$$[M] = \frac{i \omega}{\varepsilon_0 \omega_p^2} \begin{pmatrix} 1 & -i \omega_c / \omega & 0 \\ i \omega_c / \omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Posons oepmpc pour désigner une oepmm polarisée circulairement (la pointe du vecteur champ électrique dans un plan d'onde décrit un cercle et on distingue deux sens de parcours possibles par les termes droite et gauche). Pour une oepmpc droite, $\vec{E}_0 = E (\vec{e}_x + i \vec{e}_y)$ et le calcul de $[M] \vec{j} = \vec{E}$ donne $j_y = i j_x$, c'est-à-dire que le vecteur densité de courant a la même polarisation que le champ avec $\vec{j} = \gamma_{\text{droite}} \vec{E}$ où $\gamma_{\text{droite}} = -i \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega + \omega_c}$. La relation de dispersion s'obtient alors comme d'habitude en traduisant l'équation de MAXWELL-AMPÈRE pour l'oepmpc droite : $k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_p^2 \frac{\omega}{\omega + \omega_c}$ soit $k_{dr}^2 c^2 = \omega^2 - \omega_{p,dr}^2$ où $\omega_{p,dr} = \omega_p \sqrt{\frac{\omega}{\omega + \omega_c}}$. Pour une oepmpc gauche, une démarche analogue conduit à $k_{ga}^2 c^2 = \omega^2 - \omega_{p,ga}^2$ où $\omega_{p,ga} = \omega_p \sqrt{\frac{\omega}{\omega - \omega_c}}$. Dans les deux cas, on obtient des relations de dispersion de KLEIN-GORDON. Les vitesses de phase $v_\varphi = \omega/k$ sont alors $v_{\varphi,dr} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{p,dr}^2}{\omega^2}}}$ et $v_{\varphi,ga} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{p,ga}^2}{\omega^2}}}$. Il est rappelé qu'il n'est pas gênant d'avoir $v_\varphi > c$, la vitesse de phase ne représentant

pas la vitesse de propagation de l'énergie associée à un paquet d'ondes. En raison de la présence du champ magnétique statique, le problème de propagation d'ondes dans un plasma devient disymétrique et les oepmpc droites ne vont plus à la même vitesse que les gauches. Cela entraîne, comme on va le voir, l'existence d'un pouvoir rotatoire du milieu qui se traduit par la rotation de la polarisation rectiligne incidente autour de la direction de propagation, d'un angle β . On peut décomposer l'oepmpr incidente en deux oepmpc, droite et gauche, arrivant en $z = 0$: $\vec{E}(z < 0, t) = 2 E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x$

$$\vec{E}(z < 0, t) = \underbrace{\begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t - kz) \\ E_0 \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{circulaire gauche } \vec{E}_G} + \underbrace{\begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t - kz) \\ -E_0 \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{circulaire droite } \vec{E}_D}$$

D'après les caractéristiques de propagation de chaque oepmpc dans le milieu ($n_D = c/v_{\varphi,dr}$ et $n_G = c/v_{\varphi,ga}$), on obtient après le milieu :

$$\vec{E}_G(z > L, t) = \begin{pmatrix} E_0 \cos[\omega t - k(z - L) - kn_G L] \\ E_0 \sin[\omega t - k(z - L) - kn_G L] \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{E}_D(z > L, t) = \begin{pmatrix} E_0 \cos[\omega t - k(z - L) - kn_D L] \\ -E_0 \sin[\omega t - k(z - L) - kn_D L] \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ensuite, on somme ces ondes et on utilise la trigonométrie, d'où le champ après le milieu (dit chiral) :

$$\vec{E}(z > L, t) = \begin{pmatrix} 2E_0 \cos \left[k \frac{n_D - n_G}{2} L \right] \cos \left[\omega t - k(z - L) - k \frac{n_G + n_D}{2} L \right] \\ 2E_0 \sin \left[k \frac{n_D - n_G}{2} L \right] \cos \left[\omega t - k(z - L) - k \frac{n_G + n_D}{2} L \right] \\ 0 \end{pmatrix}$$

On reconnaît en sortie une oepm, mais de direction de polarisation qui a tourné d'un angle β autour de \vec{e}_z par rapport à l'oepm incidente : $\beta = \frac{\pi L}{\lambda_0} [n_D(\lambda_0) - n_G(\lambda_0)]$. λ_0 est la longueur d'onde dans le vide qui vérifie $k = 2\pi/\lambda_0$. On remarque que lorsque le plasma est peu dense (indices proches de l'unité) et lorsque $\omega \gg \omega_c$ (cas fréquent), alors on obtient après calcul $\beta \simeq \frac{L\omega_c}{4c} \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$. Dans ce cas, l'angle β est proportionnel à ω_c , donc au champ statique B_1 . Cela caractérise l'effet FARADAY.

D. Guides et cavités

16. Onde guidée entre deux plans conducteurs

Réponses : $B_x = -\frac{k}{\omega} E_0 f(x) \cos(\omega t - kz)$, $B_z = -\frac{1}{\omega} E_0 \frac{df}{dx} \sin(\omega t - kz)$, $f(x) = \cos \frac{n\pi x}{a}$ avec n impair, $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{a^2}$, $v_\varphi = c/\sqrt{1 - \frac{n^2\pi^2 c^2}{a^2 \omega^2}}$, $v_g = c\sqrt{1 - \frac{n^2\pi^2 c^2}{a^2 \omega^2}}$, $\langle \vec{\Pi} \rangle_x = \frac{kE_0^2}{4\omega\mu_0} \vec{e}_z$, $\langle u \rangle_x = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}$, $\langle \vec{\Pi} \rangle_x = \langle u \rangle_x$ $v_{\text{énergie}} \vec{e}_z$ d'où $v_{\text{énergie}} = \frac{k}{\omega\mu_0\varepsilon_0} = \frac{c^2}{v_\varphi} = v_g$.

17. Cavité résonante et circuit résonant LC

Réponses : $\frac{\omega^2}{c_0^2} = \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}$; $\vec{B} = \frac{E_0}{\omega} \left(\left[\frac{\pi}{a} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \exp -i(\omega t - \frac{\pi}{2}) \right] \vec{e}_y + \left[\frac{\pi}{b} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \exp -i(\omega t + \frac{\pi}{2}) \right] \vec{e}_x \right)$;
 $u_{el} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{8} \cos^2 \omega t$, $u_{mag} = \frac{1}{\mu_0 \omega^2} \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right) \frac{E_0^2}{8} \sin^2 \omega t$, $u = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{8}$; $\sigma_{z=0} = -\sigma_{z=c} = \varepsilon_0 E_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \exp -i\omega t$,
 $Q = \int \sigma dx dy = \varepsilon_0 E_0 \frac{4ab}{\pi} \exp -i\omega t$, $E_{el} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{8} \cos^2 \omega t (abc)$, $C = \frac{Q^2}{2E_{el}} = \frac{\varepsilon_0 64ab}{\pi^4 c}$; $LC = \frac{1}{\omega^2}$, $L = \frac{\mu_0 \pi^2 abc}{64(a^2 + b^2)}$,
courants surfaciques induits.