

# Diffusion électromagnétique

JR Seigne MP\*, Clemenceau  
Nantes

March 4, 2025

## 1 Préliminaires

Histoire

Modèle planétaire de Bohr

## 2 Électron élastiquement lié

Le modèle

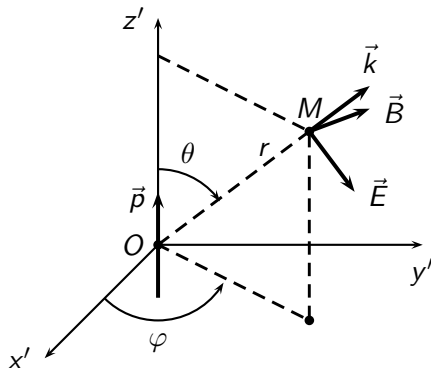
Puissance moyenne rayonnée

## 3 Observations

Couleur du ciel

Polarisation

Le rayonnement électromagnétique dipolaire du dipôle oscillant a été étudié. Dans la zone de rayonnement, il produit localement une onde plane. Nous nous appuierons sur ces résultats.



## Théorie de Rayleigh

Rayleigh, en 1871, explique la couleur du ciel par une diffusion de la lumière par les molécules considérées comme des dipôles.

L'onde rayonnée est caractérisée par :

$$\vec{E} = -\frac{p_0 \omega^2}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} \sin \theta \exp i(\omega t - kr) \vec{e}_\theta$$

La puissance correspond au carré des champs. Celle-ci sera en  $\omega^4$ . Avec  $k = \omega/c$  et  $\lambda = 2\pi c/\omega$ , on a :

$$P_{ray,dip} = P_m \frac{L^4}{\lambda^4}$$

$$\frac{P_{bleu}}{P_{rouge}} = \left( \frac{\lambda_{rouge}}{\lambda_{bleu}} \right)^4 = 1,67^4 = 8$$

avec  $\lambda_{rouge} = 0,75 \mu\text{m}$  et  $\lambda_{bleu} = 0,45 \mu\text{m}$ .

## Argumentation simplifiée

Une molécule petite devant la longueur d'onde  $\lambda$  de la lumière qui la stimule produit un champ électrique d'amplitude  $E_s$  proportionnelle à son volume  $V$  et à l'amplitude  $E_m$  du champ incident. Par conservation de l'énergie rayonnée, le champ diminue avec l'inverse de la distance  $r$ . Le champ électrique rayonné est :

$$E_s = \alpha \frac{V}{r} E_m$$

Afin que cette loi de décroissance soit dimensionnellement homogène avec  $\beta$  coefficient sans dimension, il n'y a d'autre choix que de faire intervenir la seule longueur caractéristique non encore utilisée : la longueur d'onde  $\lambda$  !

$$E_s = \beta \frac{V}{r \lambda^2} E_m \text{ d'où } P_{ray,dip} = P_m \frac{L^4}{\lambda^4}$$

# Modèle de Bohr

Atome d'hydrogène avec un électron en mouvement circulaire et uniforme de rayon  $a$  autour du proton. L'écriture de la relation de Dynamique pour l'électron de masse  $m$  donne :

$$-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \vec{e}_r = -\frac{mv^2}{a} \vec{e}_r$$

L'énergie mécanique du système est :

$$E_{mec} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

Ce modèle planétaire est de moment dipolaire  $p = ea$  d'où :

$$\langle P_{ray} \rangle = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p^2 \omega^4}{3c} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p^2 \omega^4}{3c^3}$$

## Bilan énergétique

La pulsation  $\omega$  est reliée à la vitesse  $v$  par  $v = a\omega$  :

$$\langle P_{ray} \rangle = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^3 \frac{e^6}{3m^2 c^3 a^4}$$

Le système perd de l'énergie en rayonnant :

$$\frac{dE_{mec}}{dt} = -\langle P_{ray} \rangle \quad \text{d'où} \quad \frac{da}{dt} = -\frac{2e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 3m^2 c^3} \frac{1}{a^2}$$

$$\left( \frac{a}{a_0} \right)^3 = 1 - \frac{e^4}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m^2 c^3 a_0^3} t$$

L'atome classique n'est pas stable sauf si on l'approvisionne en énergie... C'est ce que fait la lumière du Soleil. Mais, c'est, toutefois, l'atome quantique qu'il faut utiliser.

## Onde excitatrice

Onde électromagnétique plane sinusoïdale polarisée rectilignement :

$$\vec{E} = \vec{e}_x E_m \exp i(\omega t - kz)$$

En milieu suffisamment dilué, la relation de structure donne :

$$\vec{B} = \vec{e}_y \frac{E_m}{c} \exp i(\omega t - kz)$$

Le vecteur de Poynting de l'onde est :

$$\vec{\Pi} = \vec{e}_z \frac{E_m^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \quad \text{d'où} \quad \langle \vec{\Pi} \rangle_t = \vec{e}_z \frac{\varepsilon_0 E_m^2}{2} c$$

Puissance moyenne traversant une section unitaire perpendiculairement à l'axe  $Oz$  est  $\frac{\varepsilon_0 E_m^2}{2} c$ .



## Aspect mécanique

- Force électrique :  $-e E_m \exp i\omega t \vec{e}_x$ . On néglige la force magnétique.
- Force de rappel de l'électron à sa position d'équilibre :  $-m\omega_0^2 x \vec{e}_x$ .
- Force de frottement visqueux :  $-\frac{m}{\tau} \dot{x} \vec{e}_x$ .

Relation de la Dynamique projetée sur  $Ox$  :

$$m\ddot{x} = -eE_m \exp i\omega t - m\omega_0^2 x - \frac{m}{\tau} \dot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} + \omega_0^2 x = -\frac{eE_m}{m} \exp i\omega t$$

## Moment dipolaire

En testant une solution complexe  $\underline{x} = \underline{X}_m \exp i\omega t$ , on obtient :

$$[(\omega_0^2 - \omega^2) + j\frac{\omega}{\tau}]\underline{X}_m = -\frac{eE_m}{m}$$

Le moment dipolaire est donné par la forme générale  $\underline{p} = \underline{p}_m \exp i\omega t$ . Il est défini par :

$$\underline{p} = e(-\underline{x}) \quad \text{et} \quad \underline{p}_m = -e\underline{X}_m$$

On arrive au carré du module du moment dipolaire :

$$|\underline{p}_m|^2 = \frac{e^4 E_m^2}{m^2} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}$$

## Calcul de la puissance

D'après l'expression de la puissance moyenne rayonnée dans la zone de rayonnement :

$$\langle P_{ray} \rangle = \frac{|\underline{p}_m|^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

Avec l'expression  $\underline{p}_m$  et en cherchant à adimensionner le facteur dépendant de  $\omega$  :

$$\langle P_{ray} \rangle = P_\infty \frac{\omega_0^2 \tau^2 u^2}{1 + \omega_0^2 \tau^2 \left(u - \frac{1}{u}\right)^2}$$

avec les expressions suivantes :

$$P_\infty = \frac{e^4 E_m^2}{12\pi m^2 \epsilon_0 c^3} \quad \text{et} \quad u = \frac{\omega}{\omega_0}$$

## Diffusion Rayleigh

Le cas  $\omega \ll \omega_0$ , c'est-à-dire  $u \ll 1$ , correspond à la situation des molécules de l'atmosphère puisque les fréquences associées sont  $f \simeq 10^{15}$  Hz et  $f_0 \simeq 10^{17}$  Hz. L'expression de la puissance rayonnée devient :

$$\langle P_{ray} \rangle = \frac{e^4 E_m^2}{12\pi m^2 \varepsilon_0 c^3} \frac{\omega^4}{\omega_0^4} = P_\infty \frac{\omega^4}{\omega_0^4} = P_\infty \frac{\lambda_0^4}{\lambda^4}$$

Cette expression constitue la base de l'explication de la couleur bleu du ciel.

$$\frac{P_{\text{bleu}}}{P_{\text{rouge}}} = \left( \frac{\lambda_{\text{rouge}}}{\lambda_{\text{bleu}}} \right)^4 = 1,67^4 = 8$$

avec  $\lambda_{\text{rouge}} = 0,75 \mu\text{m}$  et  $\lambda_{\text{bleu}} = 0,45 \mu\text{m}$ .

# Diffusion Thomson

Le cas  $\omega \gg \omega_0$ , c'est-à-dire  $u \gg 1$ , correspond à la diffusion des rayons X ou  $\gamma$  puisqu'il faut  $f \gg f_0 \simeq 10^{17}$  Hz (UV).

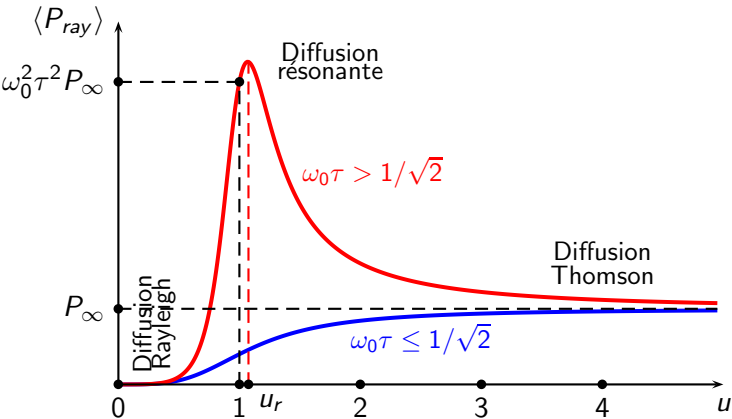
L'expression de la puissance rayonnée devient :

$$\langle P_{ray} \rangle = P_{\infty} \frac{\omega_0^2 \tau^2 u^2}{1 + \omega_0^2 \tau^2 \left( u - \frac{1}{u} \right)^2} \simeq P_{\infty} \frac{\omega_0^2 \tau^2 u^2}{\omega_0^2 \tau^2 u^2} \simeq P_{\infty}$$

Cette expression montre que la puissance rayonnée est indépendante de la longueur d'onde excitatrice pourvu que  $\lambda \ll \lambda_0$ .

# Cas général

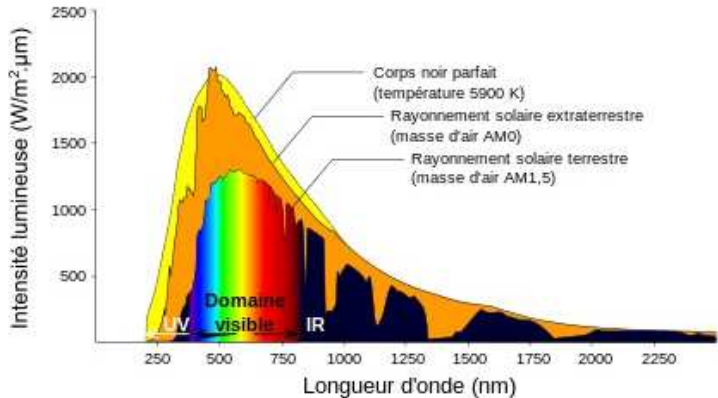
Dans le cas général, la puissance rayonnée peut ou non présenter une résonance.



# Spectre solaire

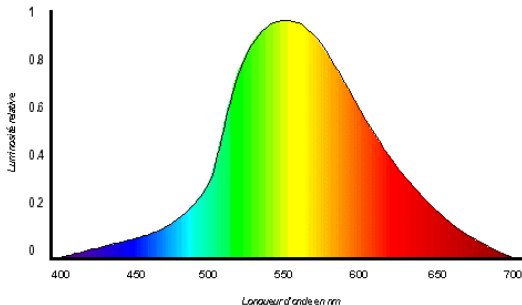
Bohren et Frasen ont soulevé, puis éliminé, une objection à la théorie de Rayleigh : pourquoi le ciel n'est-il pas violet ?

La composante violette de la lumière solaire est moins intense que la composante bleue.



## Sensibilité de l'œil

Notre œil est beaucoup moins sensible au violet qu'au bleu, comme le montre la courbe de sa réponse.



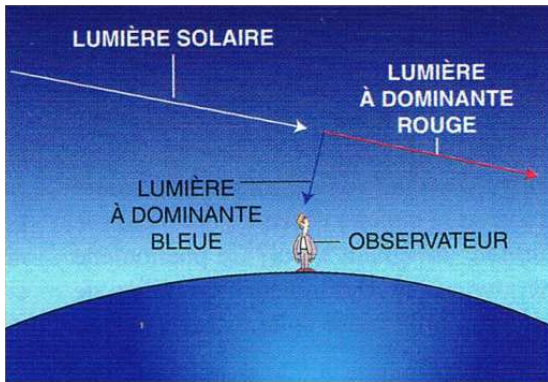
Sensibilité spectrale de l'œil moyen

Dans l'ensemble, l'œil se comporte comme un filtre passe-bande. Le bleu s'impose sur le violet.



## Soleil et ciel rougeoyant

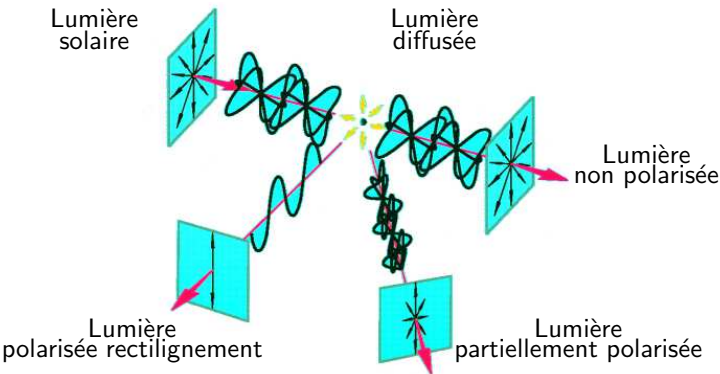
La diffusion - dans toutes les directions - du bleu étant prédominante, la lumière directe s'appauvrit en composantes bleues.



La lumière directe tend à devenir rouge !

La lumière du Soleil n'est pas polarisée mais...

La lumière diffusée peut être perçue comme polarisée ! Arago a particulièrement étudié ce phénomène que l'on explique par la nature plane de l'onde émise par les dipôles qui rayonnent la lumière diffusée.



# Effet d'un polariseur rectiligne

On peut voir qu'en fonction de l'orientation d'un polariseur rectiligne présent devant l'objectif de l'appareil photo, l'intensité lumineuse du ciel est très atténuée.



## Photographie grand angle

Perpendiculairement à la direction de propagation de la lumière, la lumière devrait être polarisée rectilignement. En pratique, ce n'est pas le cas : les particules diffusantes sont asymétriques et d'orientations aléatoires, les diffusions sont multiples. . .

