

# Devoir surveillé de Sciences Physiques n°5 du 09-01-2025

— Durée : 4 heures. Solutions —

## Problème n°1 – Glissement dans un bol

Adapté Oral 2023

1. On étudie la masse  $m$  dans le référentiel galiléen constitué par le bol. Elle subit son poids et la force de contact  $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ . Il y a non glissement tant que  $T < fN$  où  $T$  et  $N$  sont les normes de  $\vec{T}$  et  $\vec{N}$ . Supposons que la masse soit en équilibre de non glissement alors  $\vec{N} + \vec{T} + m\vec{g} = \vec{0}$ . On projette cette relation sur la base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  des coordonnées polaires associées à l'angle  $\theta$ . On obtient alors  $N = mg \sin \theta$  et  $T = mg \cos \theta$ . La condition de non glissement devient  $\cos \theta < f \sin \theta$  ce qui revient à écrire que  $\tan \theta > \frac{1}{f}$ . L'angle limite est donc

$$\theta_{\text{lim}} = \arctan \frac{1}{f}. \text{ Il y a glissement pour } \theta < \theta_{\text{lim}}. \text{ Avec } f = 0,2, \text{ on trouve } \theta_{\text{lim}} = 78,7^\circ.$$

2. On se trouve, tant qu'il y a contact avec le bol, en présence d'un mouvement circulaire non uniforme, l'accélération est  $\vec{a} = -a\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + a\ddot{\theta} \vec{e}_\theta$ . La relation de la Dynamique est  $m\vec{a} = \vec{N} + \vec{T} + m\vec{g}$ . En projetant, on obtient  $-ma\dot{\theta}^2 = mg \sin \theta - N$  et  $ma\ddot{\theta} = mg \cos \theta - T$ . Comme la condition de glissement est assurée au départ du mouvement, on a  $T = fN$ . On obtient dans un premier temps  $ma\ddot{\theta} = mg \cos \theta - fmg \sin \theta - fma\dot{\theta}^2$ . On utilise  $\omega_0^2 = g/a$  pour simplifier l'équation différentielle qui est

$$\ddot{\theta} + f\dot{\theta}^2 = \omega_0^2(\cos \theta - f \sin \theta).$$

3. On pose  $\psi = \dot{\theta}^2$ . Si on dérive par rapport au temps, cela conduit à  $\dot{\psi} = 2\dot{\theta}\ddot{\theta}$ . Mais  $\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\psi}{d\theta} \dot{\theta}$ . Dans le cas où la vitesse est non nulle - ce qui cohérent avec l'étude du glissement -, on peut en déduire que  $\ddot{\theta} = \frac{1}{2} \frac{d\psi}{d\theta}$ . L'équation différentielle proposée s'obtient alors immédiatement :

$$\frac{d\psi}{d\theta} + 2f\psi = 2\omega_0^2(\cos \theta - f \sin \theta).$$

4. L'équation différentielle précédente devient  $\frac{d\varphi}{d\theta} + 2f\varphi = 2(\cos \theta - f \sin \theta)$  du premier ordre à coefficients constants avec un second membre de type harmonique. La solution de l'équation homogène est de la forme  $\varphi_g = A \exp -2f\theta$ , la solution particulière est harmonique de la forme  $\varphi_p = B \cos \theta + C \sin \theta$ . L'équation différentielle étant linéaire, la forme de la solution est donc la somme :

$$\varphi = A \exp -2f\theta + B \cos \theta + C \sin \theta.$$

Les constantes  $B$  et  $C$  se déterminent en testant la solution particulière dans l'équation différentielle,  $A$  se détermine grâce à la condition initiale qui indique qu'on lâche la masse  $m$  et donc  $\dot{\theta}_{t=0} = 0$  ce qui conduit à  $\varphi = 0$  à la date  $t = 0$  qui correspond à l'angle  $\theta_0$  initial caractérisant l'endroit d'où on lâche  $m$ .

5. Le passage au temps réduit conduit à  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt_r} \omega_0$  et aussi à  $\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt_r^2} \omega_0^2$ . Dans ces conditions, on obtient bien

l'équation différentielle en grandeurs adimensionnées proposée par l'énoncé :

$$\frac{d^2\theta}{dt_r^2} + f \left( \frac{d\theta}{dt_r} \right)^2 = \cos \theta - f \sin \theta.$$

6. Nous avons vu que  $N = mg \sin \theta + ma\dot{\theta}^2$ . La composante réduite de la force normale est donc  $\eta = \frac{N}{mg} =$

$\sin \theta + \frac{a}{g} \dot{\theta}^2$ . On obtient

$$\eta = \sin \theta + \left( \frac{d\theta}{dt_r} \right)^2.$$

Nous sommes toujours sur la phase de glissement, il y a donc

$T = fN$  et donc  $\tau = f\eta$ . Cela permet d'écrire

$$\tau = f \left( \sin \theta + \left( \frac{d\theta}{dt_r} \right)^2 \right).$$

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de pesanteur :  $E_m = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 - mga \sin \theta$ . On a choisi comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur, le plan horizontal passant par  $O$ . Si on passe à l'énergie mécanique

réduite, on obtient  $e_m = \frac{E_m}{mga} = \frac{1}{2} \frac{\dot{\theta}^2}{\omega_0^2} - \sin \theta$ . Cela permet de conclure sur :

$$e_m = \frac{1}{2} \left( \frac{d\theta}{dt_r} \right)^2 - \sin \theta.$$

7. Les lignes manquantes du programme sont :

# Expression des frottements solides

```
def T(theta, dtheta):
```

```
    if abs(dtheta) < epsilon:
```

```
        if abs(np.cos(theta)) < f*np.sin(theta):
```

```
            return np.cos(theta)
```

```
        elif dtheta > 0:
```

```
            return f*(np.sin(theta)+dtheta**2)
```

```
        else:
```

```
            return -f*(np.sin(theta)+dtheta**2)
```

```
        elif dtheta < 0:
```

```
            return f*(np.sin(theta)+dtheta**2)
```

```
        else:
```

```

return-f*(np.sin(theta)+dtheta**2)

# Conversion en degrés de l'angle theta
thetadeg=theta*180/np.pi

```

8. On constate sur la figure donnant la vitesse angulaire, que comme l'angle initial  $\theta_0 = 10^\circ < 78,7^\circ$ , il y a bien glissement et la vitesse angulaire augmente jusqu'à passer par un maximum vers un angle de  $70^\circ$  environ. S'il n'y avait pas de frottement, on sait que le maximum de la vitesse angulaire serait obtenu pour un angle de  $90^\circ$ . Toujours dans le cas sans frottement, on remonterait sur l'autre côté du bol jusqu'à une position symétrique par rapport à l'axe du bol repérée par l'angle de  $150^\circ$ . On constate que la vitesse angulaire s'annule plus tôt comme prévu. Cela se produit vers  $118^\circ$ . Sur le graphique, on constate que  $\frac{d\theta}{dt_r}$  devient négatif après cette position. Cela signifie qu'il y a glissement dans l'autre sens. En effet, il faut commencer par se poser la question du glissement ou du non-glissement. On raisonne sur la partie gauche du bol par rapport à son axe vertical. Il y aura glissement si  $\theta > 102,3^\circ (90 + 12,3)$ . Avec un angle d'arrêt d'environ  $118^\circ$ , le mobile va glisser dans l'autre sens et  $\frac{d\theta}{dt_r} < 0$ . Ensuite, la vitesse angulaire s'annule à nouveau pour un angle d'environ  $75^\circ$ . La condition de non glissement n'est toujours pas atteinte mais de peu... Le mobile repart dans le sens de croissance de  $\theta$  mais pour un très bref moment car lorsque la vitesse s'annule à nouveau, on est dans la situation d'arrêt définitif vers  $81^\circ$ . Sans frottement une position d'équilibre ne pourrait être que  $90^\circ$ . Sur le graphique de l'énergie  $e_m$ , on voit qu'elle ne fait que diminuer ce qui est rassurant avec des frottements toujours opposés au mouvement. Enfin, on peut voir que la force réduite  $\eta = N/mg$  ne s'annule jamais, il y a toujours contact entre le mobile et le bol. Cela valide l'étude du mouvement de glissement jusqu'à l'arrêt.

9. Lorsque l'on compare l'évolution de l'angle  $\theta$  au voisinage de la date  $t = 0^+$ , on voit que dans la première simulation, il y a une tangente horizontale et qu'il y a une tangente strictement positive pour la seconde. Malgré l'imprécision des échelles, on peut penser que l'angle de départ initial est toujours  $\theta_0 = 10^\circ$ . C'est bien sûr la vitesse initiale qui est non nulle et positive :  $\left. \frac{d\theta}{dt_r} \right|_0 > 0$ . On constate que l'angle dépasse  $180^\circ$  ce qui fait que si le bol n'est pas prolongé, ce qu'il se passe après sur les graphiques n'a pas de sens. Prolongeons fictivement le bol au-delà de  $180^\circ$ . Sur le graphique, on voit que  $\eta = N/mg$  s'annule pour un angle d'environ  $205^\circ$  qui est important. Cet angle élevé est la conséquence de l'énergie cinétique initiale donnée au mobile. Il monte beaucoup plus haut sur l'autre côté du bol par rapport à la première simulation. Mais il y a un problème, il ne fait pas un looping complet, il va perdre le contact lorsque  $N = 0$  et tomber sous l'effet de la chute libre. La suite de la simulation numérique n'a pas de validité ! Le programme informatique n'a pas pris en compte cette possibilité.

## Problème n° 2 – Ralentissements et freinages

X MP 2015

### A. Marées et synchronisations d'oscillateurs

#### Étude qualitative

##### Cas statique

1. La force subie par  $G_1$  est  $\vec{F}_1 = -\frac{GmM}{(d-b)^2}\vec{e}_x$ . Si l'on effectue un développement limité, on trouve :

$$\vec{F}_1 = -\frac{GmM}{d^2}\left(1 + 2\frac{b}{d}\right)\vec{e}_x.$$

2.  $G_1$  subit la force  $\vec{F}_1$  et la force exercée par  $G_2$  qui a pour expression  $\vec{f}_{2\text{ sur }1} = \frac{Gm^2}{4b^2}\vec{e}_x$ . La force totale est donc  $\vec{F}_{\text{tot }1} = \vec{e}_x \left[ \frac{Gm^2}{4b^2} - \frac{GmM}{d^2}\left(1 + 2\frac{b}{d}\right) \right]$ . Comme  $G_1$  est immobile dans le référentiel  $Oxy$  non galiléen, on a  $\vec{F}_{\text{tot }1} + \vec{f}_{i,\text{ent}} = \vec{0}$  avec  $\vec{f}_{i,\text{ent}} = m\Omega_r^2(d-b)\vec{e}_x$ . En tenant compte de l'expression de  $\Omega_r$ , on obtient la relation suivante pour qu'il y ait dislocation du système :  $\frac{Gm^2}{4b^2} - \frac{GmM}{d^2}\left(1 + 2\frac{b}{d}\right) + \frac{GmM}{d^2}\left(1 - \frac{b}{d}\right) < 0$ . Le bilan des forces précédent est négatif car cela correspond à une accélération négative pour  $G_1$  dans le référentiel  $Oxy$  et donc à un éloignement de  $G_1$  par rapport à  $G_2$ . En développant le calcul et en simplifiant les termes qui doivent l'être, on arrive à la condition :  $\frac{m}{4b^3} < \frac{3M}{d^3}$ . Il existe donc bien une limite en dessous de laquelle le satellite se brise. On trouve :  $d_m = b\left(\frac{12M}{m}\right)^{1/3}$ .

3. Pour le système Terre-Lune, on a  $M = 162m$ , on en déduit que :  $d_m = 8190 \text{ km}$ . Le rayon de la Terre est de  $6400 \text{ km}$ , on a donc  $d_m > R_T$ . Au moment de son détachement de la Terre le morceau de proto-Lune aurait subi des effets de marée importants. On peut penser que ce morceau de proto-Lune se serait disloqué en de nombreux petits morceaux. L'hypothèse paraît peu plausible.

##### Déformation de la planète pendant sa révolution

4. La force gravitationnelle subie par  $m'$  est :  $\vec{F}_g = -GMm'\frac{\vec{TP}}{TP^3}$ . On va décomposer le vecteur en passant par  $O$  :  $\vec{F}_g = -GMm'\left(\frac{\vec{TO}}{TP^3} + \frac{\vec{OP}}{TP^3}\right)$ . Il faut effectuer un développement limité de  $TP^3$ . On écrit que  $TP^2 = d^2 + r^2 +$

$2rd \cos \theta$ . En ne conservant que le terme de premier ordre puisque  $r \ll d$ , on obtient  $TP^3 = d^3(1 + \frac{3r}{d} \cos \theta)$ . On va faire intervenir ce développement limité sur le terme en  $\frac{\vec{TO}}{TP^3}$ . Par contre, sur le terme en  $\frac{\vec{OP}}{TP^3}$ , on va considérer que  $TP^3 \simeq d^3$  à l'ordre 0 puisque le vecteur  $\vec{OP}$  est déjà du premier ordre. La force gravitationnelle est donc  $\vec{F}_g = -\frac{GMm'}{d^2}(1 - \frac{3r}{d} \cos \theta)\vec{e}_x - \frac{GMm'}{d^3}(r \cos \theta \vec{e}_x + r \sin \theta \vec{e}_y)$ . Le terme de marée est tel que  $\vec{F}_g = -\frac{GMm'}{d^2}\vec{e}_x + \vec{F}$ . On en déduit bien que :  $\boxed{\vec{F} = \frac{GMm'r}{d^3} [2 \cos \theta \vec{e}_x - \sin \theta \vec{e}_y]}$ .

5. Sur le schéma de la figure 1. On raisonne tout d'abord pour  $0 < \theta < \pi/2$ , on obtient les forces au point  $P$ . Pour le point  $P'$  symétrique de  $P$ , il faut considérer  $\theta' = \theta + \pi$ . Dans les deux cas, on peut constater que la force de marée est dirigée globalement vers l'équateur de la sphère. Il va se former un bourrelet équatorial. Ce bourrelet tend à donner à la sphère une forme d'ellipsoïde que l'on peut voir représenté à la figure 1 dans deux cas différents de position de la sphère dans sa trajectoire.

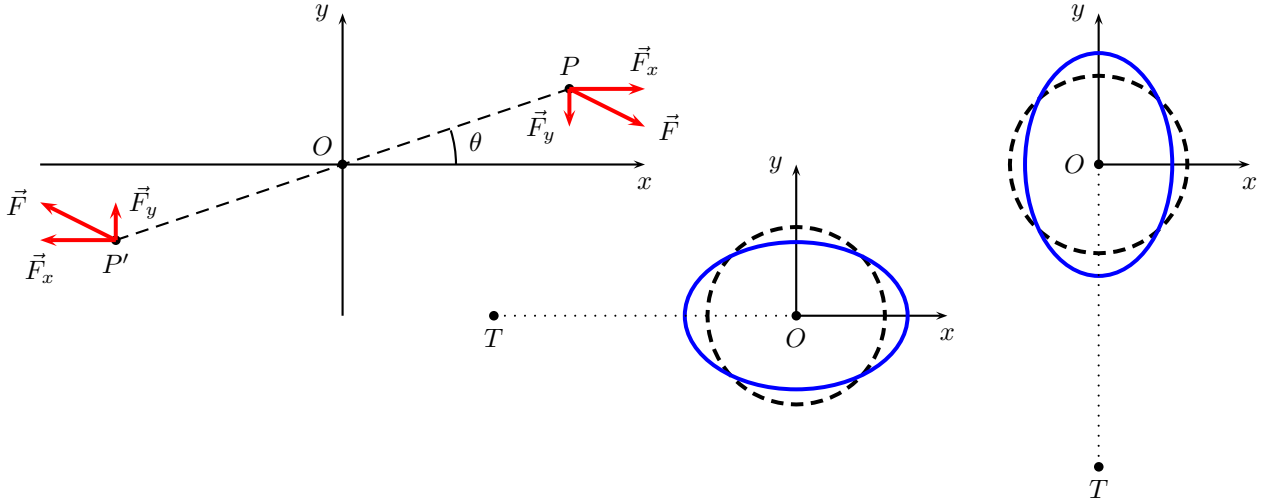


FIGURE 1 – Sens des forces de marées

## Synchronisation des périodes

### Considérations énergétiques

6. Les directions des axes de rotation de la Terre et de la Lune sont différentes.

7. L'énergie cinétique de révolution correspond à la translation circulaire sur un cercle de rayon  $GO$  pour la Lune et  $GT$  pour la Terre avec une vitesse angulaire  $\Omega(t)$ . On a donc :  $E_{c,rev} = \frac{1}{2}M\Omega^2 GT^2 + \frac{1}{2}2m\Omega^2 GO^2$ . En tenant compte de l'expression fournie par l'énoncé, expression qui introduit la masse réduite du système  $\mu$ , on peut en conclure que :  $\boxed{E_{c,rev} = \frac{1}{2}\mu d^2 \Omega^2(t)}$ .

8. Pour déterminer l'expression de l'énergie cinétique totale, il faut prendre en compte les deux rotations propres des deux astres. Pour celle de la Terre, cela représente  $\frac{1}{2}\frac{2}{5}MR^2\omega^2$  alors que pour la Lune, cela va être  $\frac{1}{2}\frac{2}{5}2mR_L^2\Omega^2$ . On obtient alors l'expression suivante :  $E_c = \frac{1}{2}\mu d^2 \Omega^2(t) + \frac{1}{5}MR^2\omega^2 + \frac{1}{5}2mR_L^2\Omega^2$ . Comme la masse de la Terre et la masse de la Lune sont telles que  $M = 81(2m)$ , on constate que  $\mu \simeq 2m$ , on se retrouve avec  $E_c = \frac{1}{5}MR^2\Omega^2 + (\frac{1}{2}\mu d^2 + \frac{1}{5}2mR_L^2)\Omega^2$ . Comme  $d^2 \gg R_L^2$ , on peut sans peine négliger l'énergie de rotation propre de la Lune pour aboutir à la formule proposée par l'énoncé :  $\boxed{E_c = \frac{1}{5}MR^2\omega^2 + \frac{1}{2}\mu d^2 \Omega^2}$ .

9. Le moment cinétique va se décomposer comme pour l'énergie cinétique en des effets liés à la translation circulaire et des effets de la rotation propre qui sont  $J_T\omega$  et  $J_L\Omega$ . Les moments d'inertie ne sont pas fournis mais l'expression fournie de l'énergie cinétique est de la forme  $\frac{1}{2}J'\omega'^2$  avec  $J' = \frac{2}{5}m'r'^2$ . Pour la translation, il faut revenir à la définition du moment cinétique pour un point :  $\vec{L} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$  avec ici  $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$  ce qui fait que sur l'axe perpendiculaire au plan du mouvement, on a la forme  $L = mr^2\omega$ . On obtient alors  $\sigma_G = MGT^2\Omega + 2mGO^2\Omega + \frac{2}{5}MR^2\omega + \frac{2}{5}2mR_L^2\Omega$ . On utilise à nouveau la relation introduisant la masse réduite et on fait la même approximation en négligeant la contribution de la rotation propre de la Lune, on obtient finalement  $\sigma_G \simeq \mu d^2\Omega + \frac{2}{5}MR^2\omega$ . L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique évaluée avant et de l'énergie potentielle gravitationnelle  $-\frac{GM2m}{d}$ . L'énergie mécanique est alors :  $\boxed{E_m = \frac{1}{5}MR^2\omega^2 + \frac{1}{2}\mu d^2 \Omega^2 - \frac{GM2m}{d}}$ .

10. La relation de la dynamique appliquée à la Terre dans le référentiel barycentrique du système Terre-Lune considéré comme galiléen est  $-\frac{GM2m}{d^2}\vec{e}_x = -M\Omega^2 GT\vec{e}_x$ . La définition du barycentre est telle que  $M\vec{TT}\vec{T} + 2m\vec{TO} = (M + 2m)\vec{TG}$  d'où la relation  $TG = \frac{2m}{M+2m}d$ . En utilisant cette expression dans la relation de la dynamique, on arrive à  $\frac{GM2m}{d^2} = M\Omega^2 \frac{2m}{M+2m}d$ . On obtient alors la relation évoquée par l'énoncé :  $\boxed{\Omega^2 d^3 = G(M + 2m)}$ .

Si l'on avait appliqué la relation de la dynamique à la Lune, on aurait obtenu la même relation qui a bien la forme de la loi de KÉPLER. Si l'on différentie cette relation, en raisonnant en logarithme, on arrive à  $2\frac{\delta\Omega}{\Omega} + 3\frac{\delta d}{d} = 0$  et par conséquent :  $\frac{\delta\Omega}{\Omega} = -\frac{3}{2}\frac{\delta d}{d}$ .

**11.** Le système est isolé, il y a conservation du moment cinétique donc :  $\mu d^2\Omega + \frac{2}{5}MR^2\omega = \text{Cte}$ . Dans cette relation,  $d$ ,  $\omega$  et  $\Omega$  sont fonction du temps. Si on différentie, il faut bien en tenir compte :  $2d\delta d\Omega\mu + \mu d^2\delta\Omega + \frac{2}{5}MR^2\delta\omega = 0$ . En utilisant la relation établie à la question précédente, on arrive à  $\delta\omega = -\frac{5}{4}\frac{d\Omega\mu}{MR^2}\delta d$  et ensuite à  $\delta\omega = \frac{5}{6}\frac{\mu d^2}{MR^2}\delta\Omega$ . On peut donc établir la relation demandée par l'énoncé :  $\frac{\delta\omega}{\delta\Omega} = \frac{5}{6}\frac{2m}{M+2m}\frac{d^2}{R^2}$ .

**12.** Il faut maintenant différentier l'énergie mécanique :  $dE_m = \frac{2}{5}MR^2\omega\delta\omega + \frac{1}{2}\mu(2d\delta d\omega^2 + 2\Omega\delta\Omega d^2) + \frac{GM2m}{d^2}\delta d$ . On utilise l'expression  $\frac{GM2m}{d^2} = \frac{M2m}{M+2m}\Omega^2 d$  pour faire progresser la mise en forme du calcul ainsi que la relation donnant  $\delta d$  en fonction de  $\delta\Omega$  et évidemment la relation entre  $\delta\omega$  et  $\delta\Omega$ . Après calculs, on obtient effectivement l'expression proposée dans l'énoncé :  $dE_m = \frac{2}{5}MR^2(\omega - \Omega)\delta\omega$ .

### Stabilité du système Terre-Lune

**13.** L'énergie mécanique diminue  $dE_m < 0$ . Comme  $\omega > \Omega$ , on en déduit que  $\delta\omega < 0$ . Le coefficient de proportionnalité est positif entre  $\delta\omega$  et  $\delta\Omega$ . On en déduit que  $\delta\Omega < 0$ . Les deux rotations ralentissent. La distance  $d$ , elle, augmente au cours du temps puisque  $\delta d > 0$ . Avec l'indication fournie, on peut constater que la distance augmente de 3,5 m par siècle. On posant  $\Delta t$  pour la durée d'un siècle, on a  $\frac{\delta d}{\Delta t} = 9,2 \times 10^{-9}$  par siècle. On a donc  $|\delta\Omega| = 1,4 \times 10^{-8}\Omega = \frac{1,4 \times 10^{-8}}{27}\omega = 5,2 \times 10^{-10}\omega$  par siècle. On a donc  $|\delta\omega| = 35,6|\delta\Omega| = 1,85 \times 10^{-8}$  pour un siècle. La durée d'un jour est  $T_{1j} = \frac{2\pi}{\omega}$ . On peut donc écrire que  $|\frac{\delta T_{1j}}{T_{1j}}| = |\frac{\delta\omega}{\omega}|$  d'où  $|\frac{\delta T_{1j}}{T_{1j}}| = 1,85 \times 10^{-8}$  pour un siècle. La durée d'un jour aura augmenté de  $\boxed{1,6 \text{ ms}}$  dans un siècle.

**14.** Pour 500 millions d'années, on obtiendrait environ 222 heures. Cela ne correspond pas du tout. L'intervalle entre deux lunaisons dépend du rapport des vitesses de rotation. On note  $L_u = \frac{\omega}{\Omega}$ . Par différentiation, on obtient :  $\frac{dL_u}{L_u} = \frac{\delta\omega}{\omega} - \frac{\delta\Omega}{\Omega}$ . On arrive à  $\frac{dL_u}{L_u} = \frac{\delta\omega}{\omega} \left(1 - \frac{\delta\Omega\omega}{\delta\omega\Omega}\right)$ . On a donc :  $\frac{dL_u}{L_u} = \frac{\delta\omega}{\omega} \left(1 - \frac{27}{35,6}\right)$ . Comme  $\delta\omega < 0$ , on en déduit que  $dL_u < 0$ . On a donc :  $|\frac{dL_u}{L_u}| < |\frac{\delta\omega}{\omega}|$ . La lunaison diminue au fil du temps. En valeur absolue, elle diminue moins que la durée du jour.

**15.**  $\omega$  diminue plus vite que  $\Omega$ . À un moment donné, on arrivera à  $\boxed{\omega = \Omega}$ . Il n'y aura plus d'énergie dissipée par effet de marée puisque  $dE_m$  est proportionnel à  $(\omega - \Omega)$ . À ce moment-là, on va poser  $\omega = \Omega = \omega_f$ . On note aussi la distance Terre-Lune  $d = d_f$ . Le moment cinétique qui est une constante, est le même à la date  $t = 0$  et à la date où il y a synchronisation des vitesses de rotation. Le moment cinétique s'écrit  $\sigma_G = (\mu d_f^2 + \frac{2}{5}MR^2)\omega_f$ . Ce moment cinétique doit être égal à sa valeur actuelle  $\sigma_G = (\frac{\mu d^2}{27} + \frac{2}{5}MR^2)\omega = 4,9 \times 10^{38} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . La relation de forme KÉPLER vérifiée est  $\Omega^2 d^3 = (\frac{\omega}{27})^2 d^3 = \omega_f^2 d_f^3 = 4 \times 10^{14} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ . Dans l'expression du moment cinétique, on va négliger la contribution du terme en  $R^2$  par rapport à celui en  $d_f^2$ . On obtient alors les deux relations suivantes :  $\omega_f d_f^2 = 4 \times 10^{11} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  et  $\omega_f^2 d_f^3 = 4 \times 10^{14} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ . On trouve alors que  $d_f = 530 \times 10^6 \text{ m}$  et  $\omega_f = 1,6 \times 10^{-6} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . La valeur de la distance  $d_f$  autorise l'approximation réalisée même si la marge n'est pas très grande. La durée du jour est donc  $T_f = \frac{2\pi}{\omega_f}$ . Cela correspond à  $\boxed{45 \text{ jours}}$  actuels.

**16.** On passe de  $\omega = 7,3 \times 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  d'aujourd'hui à  $\omega_f = 1,6 \times 10^{-6} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . La vitesse de rotation a perdu environ 98% de sa valeur. Comme  $\frac{\delta\omega}{\omega} \simeq 10^{-8}$  par siècle. Il faudra environ  $10^8$  siècles pour y arriver. Cela représente  $\boxed{10^{10} \text{ ans}}$ . Cela correspond grosso modo à l'âge de l'Univers.

**17.** La perte d'énergie correspond à la valeur absolue de la variation d'énergie mécanique entre  $E_{m,i} = \frac{1}{5}MR^2\omega^2 + \frac{1}{2}\mu d^2(\frac{\omega}{27})^2 - \frac{GM2m}{d} = 2,2 \times 10^{29} \text{ J}$  et l'état final où  $E_{m,f} = \frac{1}{5}MR^2\omega_f^2 + \frac{1}{2}\mu d_f^2\omega_f^2 - \frac{GM2m}{d_f} = -3 \times 10^{28} \text{ J}$ . On a donc  $|\Delta E| = 2,5 \times 10^{29} \text{ J}$ . Pour comparer à l'activité du Soleil, on écrit que  $|\Delta E| = P_S \Delta t$  où  $P_S$  est la puissance rayonnée par le Soleil. On trouve alors que  $\Delta t = 625 \text{ s}$ . Cela fait environ 10 minutes.

## Problème n° 3 – Un morceau de Scotch®

Centrale MP 2017

### A. Principe de l'essai de pelage

1. On peut citer la liaison covalente qui est responsable des liaisons entre atomes dans une molécule. Cette liaison est beaucoup plus forte que la liaison de VAN DER WAALS. Elle est responsable de la cohésion et de la stabilité des molécules. On peut proposer les ordres de grandeurs suivants :  $E_{cov} \simeq 100 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  et  $E_{vdW} \simeq 10 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ . On pourra donc souvent écrire que :  $E_{cov} \gg E_{vdW}$ .

2. La force dérive de l'énergie potentielle selon  $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_{LJ} = -\frac{dE_{LJ}}{dr} \vec{e}_r$ . On obtient donc l'expression de la force  $\vec{F} = +\frac{12\alpha}{r^{13}} \vec{e}_r - \frac{6\beta}{r^7} \vec{e}_r$ . On voit clairement une force attractive qui vient du terme en  $1/r^6$  puisqu'elle est orientée selon  $-\vec{e}_r$  alors que la force venant du terme en  $1/r^{12}$  est répulsive puisque orientée par  $+\vec{e}_r$ .

3. L'allure de  $E_{LJ}$  en fonction de  $r$  est fournie à la figure 2. La stabilité de la liaison entre les molécules est représentée par la différence d'énergie entre l'état stable marqué par le minimum d'énergie potentielle  $E_{LJ,min}$  qui représente l'état lié et le premier état de diffusion accessible à savoir le premier état permettant d'obtenir une distance infinie. Ce premier état de diffusion correspond à une énergie potentielle nulle  $E_{LJ} = 0$ . On a donc

$$E_{\text{liaison}} = -E_{LJ,min}.$$

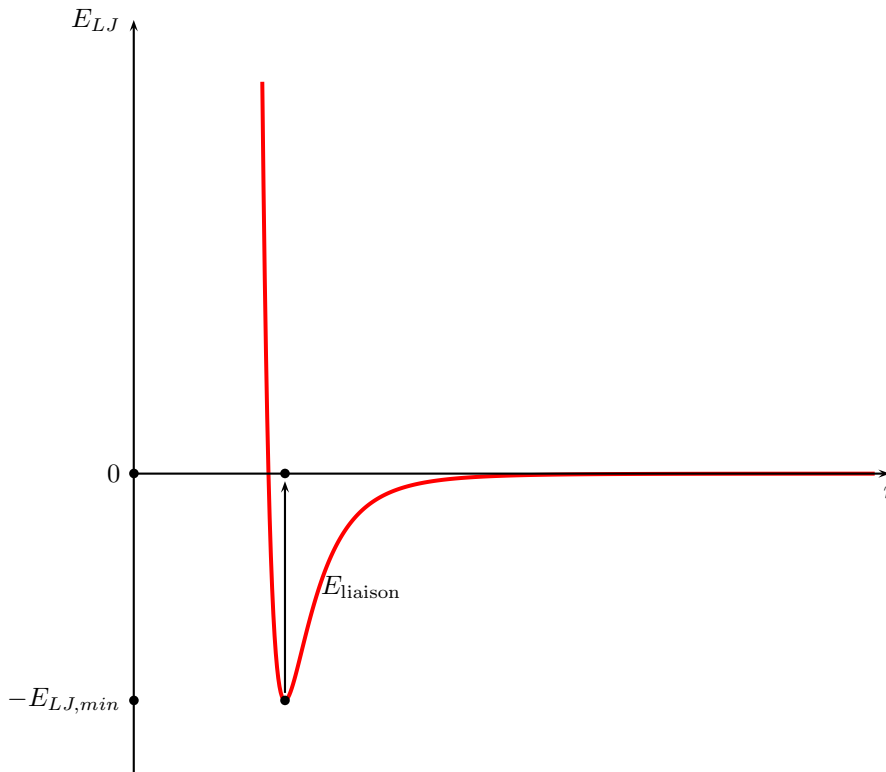


FIGURE 2 – Énergie potentielle de LENNARD-JONES

4. Les forces évoluent en  $1/r^{13}$  et  $1/r^7$ . Par conséquent, elles décroissent très vite avec la distance. L'interaction ne concerne donc qu'une très faible épaisseur des matériaux. Le travail de la force est proportionnel à la surface :

$$W_{adh} = \propto A.$$

5. Le déplacement élémentaire associé au point  $I$  est  $d\vec{OI}$ . Le vecteur position est  $\vec{OI} = x_L(1 - \cos\theta)\vec{e}_x + x_L \sin\theta\vec{e}_y$ . On a donc  $d\vec{OI} = dx_L(1 - \cos\theta)\vec{e}_x + dx_L \sin\theta\vec{e}_y$ . Le vecteur force est  $\vec{F}_p = -F_p \cos\theta\vec{e}_x + F_p \sin\theta\vec{e}_y$ . Le travail élémentaire est donc  $\delta W_p = \vec{F}_p \cdot d\vec{\ell}_I = -F_p(\cos\theta - \cos^2\theta)dx_L + F_p \sin^2\theta dx_L$ . On trouve que :

$$\delta W_p = F_p(1 - \cos\theta)dx_L.$$

6. Ce travail correspond au travail d'adhésion  $\delta W_p = \delta W_{adh} = \gamma dA = \gamma b dx_L$ . On en déduit donc que  $F_p(1 - \cos\theta) = \gamma b$ . La force est donc :

$$F_p = \frac{\gamma b}{1 - \cos\theta}.$$

7. On travaille à vitesse constante, on peut donc écrire que  $x_L(t) = V_0 t$  si au départ le point  $O$  est en dessous de la tige qui enroule le scotch.
8. La vitesse à la périphérie de l'enroulement est celle d'un mouvement circulaire de rayon  $r_0$  et de vitesse de rotation  $\Omega$ . Elle vaut donc  $V_0 = r_0 \Omega$ .
9. Pour  $\theta \simeq 90^\circ$ , la force de pelage sera minimale.

## B. Modélisation du comportement dynamique du ruban au cours de l'essai

10. Le référentiel est galiléen puisqu'il se déplace à une vitesse constante.
11. Pour obtenir la longueur du ressort, il faut repérer correctement les deux abscisses de ses deux extrémités. On a  $x_I(t) = V_p t + \ell_0$  et  $x_L(t)$ . La longueur est donc :  $\ell(t) = V_p t + \ell_0 - x_L(t)$ .
12. On a une vitesse nulle à l'extrémité  $L$  du ressort à la date  $t = 0$  :  $\dot{x}_L(0) = 0$ . Il n'y a donc pas de glissement. Au départ, la force est donc  $\vec{f} = -F_p \vec{e}_x$ . La force exercée par le ressort est  $\vec{f}_r = k(\ell(t) - \ell_0) \vec{e}_x$ . On peut donc écrire que  $k(\ell(t) - \ell_0) = k(V_p t - x_L(t)) < F_p$  pour que cela reste sans glissement. La limite du glissement se produit lorsque la force exercée par le ressort vaut  $F_p$ . On en déduit que  $t_0 = \frac{F_p}{k V_p}$ . Ce raisonnement utilise le fait que tant que le mobile ne glisse pas, il est immobile. La somme des forces qui s'appliquent sur lui est donc nulle :  $\vec{f}_r + \vec{f} = \vec{0}$ .
13. On étudie le mobile de masse  $m$  dans le référentiel du support du pelage qui est galiléen. Le mobile subit son poids compensé par la réaction normale du support de pelage. Il subit de plus la force liée à l'adhésion et la force exercée par le ressort. En projection sur l'axe  $Ox$ , on a donc :  $m \frac{d^2 x_L}{dt^2} = -(1 - \varepsilon) F_p + k(V_p t - x_L(t))$ . En ordonnant cette équation différentielle, on obtient la forme suivante :  $\frac{d^2 x_L}{dt^2} + \omega_0^2 x_L = \frac{k V_p t - (1 - \varepsilon) F_p}{m}$ . On a évidemment posé  $\omega_0$  la pulsation propre de l'oscillateur telle que  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ .
14. On effectue le changement de variable temporel proposé :  $t' = t - t_0$ . On peut donc écrire l'équation différentielle avec cette nouvelle variable :  $\frac{d^2 x_L}{dt'^2} + \omega_0^2 x_L = \omega_0^2 V_p t' + \varepsilon \frac{F_p}{m}$ . La solution générale de l'équation différentielle est  $_{gen} x_L(t) = C_1 \cos \omega_0 t' + C_2 \sin \omega_0 t'$ . La solution particulière peut être évaluée sous la forme  $_{part} x_L(t') = A t' + B$  puisque le second membre est une fonction affine. Comme nous avons  $\frac{d^2_{part} x_L}{dt'^2} = 0$ , on peut facilement trouver que  $A = V_p$  et aussi que  $B = \varepsilon \frac{F_p}{k}$ . Il est donc évident que  $C_3 = \varepsilon \frac{F_p}{k}$ . La solution complète de l'équation différentielle est  $x_L(t') = C_1 \cos \omega_0 t' + C_2 \sin \omega_0 t' + V_p t' + \varepsilon \frac{F_p}{m}$ . Il faut appliquer les conditions initiales sur la position et la vitesse :  $x_L(t' = 0) = 0$  et  $\left. \frac{dx_L}{dt'} \right|_{t=0} = 0$ . Tout d'abord pour la position, on a  $0 = C_1 + \varepsilon \frac{F_p}{m}$ . On en déduit :  $C_1 = -\varepsilon \frac{F_p}{k}$ . L'expression de la vitesse est  $\dot{x}_L(t') = \varepsilon \frac{F_p}{k} \omega_0 \sin \omega_0 t' + C_2 \omega_0 \cos \omega_0 t' + V_p$ . À la date  $t' = 0$ , on a donc  $\dot{x}_L(t' = 0) = C_2 \omega_0 + V_p = 0$ . On détermine la dernière constante de la solution de la position  $x_L(t')$  :  $C_2 = -\frac{V_p}{\omega_0}$ . Cela permet d'écrire l'expression de l'extrémité du ressort attachée à la masse  $m$  selon :  $x_L(t') = \varepsilon \frac{F_p}{k} (1 - \cos \omega_0 t') + \frac{V_p}{\omega_0} (\omega_0 t' - \sin \omega_0 t')$ .
15. À  $t' = 0$ , le mobile  $m$  est encore immobile. On a donc  $v_L(t' = 0) = 0$ . Cela nous permet de voir qu'il y a deux points solutions sur le portrait de phase proposé pour la vitesse  $V_p = 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et un seul sur celui effectué pour une vitesse  $V_p = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Il faut trouver l'expression de la force du ressort pour choisir définitivement. Cette force compense à  $t' = 0$  la force  $F_p$ , on a donc  $\ell(t' = 0) - \ell_0 = \frac{F_p}{k} = 1 \text{ mm}$ . Le glissement vient de cesser mais on part d'une vitesse nulle pour l'abscisse  $x_L$  de la masse  $m$ , la vitesse de cette extrémité du ressort est encore nulle. Par contre, en  $I$  à l'autre extrémité du ressort, on a toujours la vitesse  $V_p$ . Par conséquent, le ressort continue de s'allonger. On doit parcourir le portrait de phase à partir du point de départ, vers la droite, c'est-à-dire dans le sens trigonométrique. Voir les figures 3 et 4.

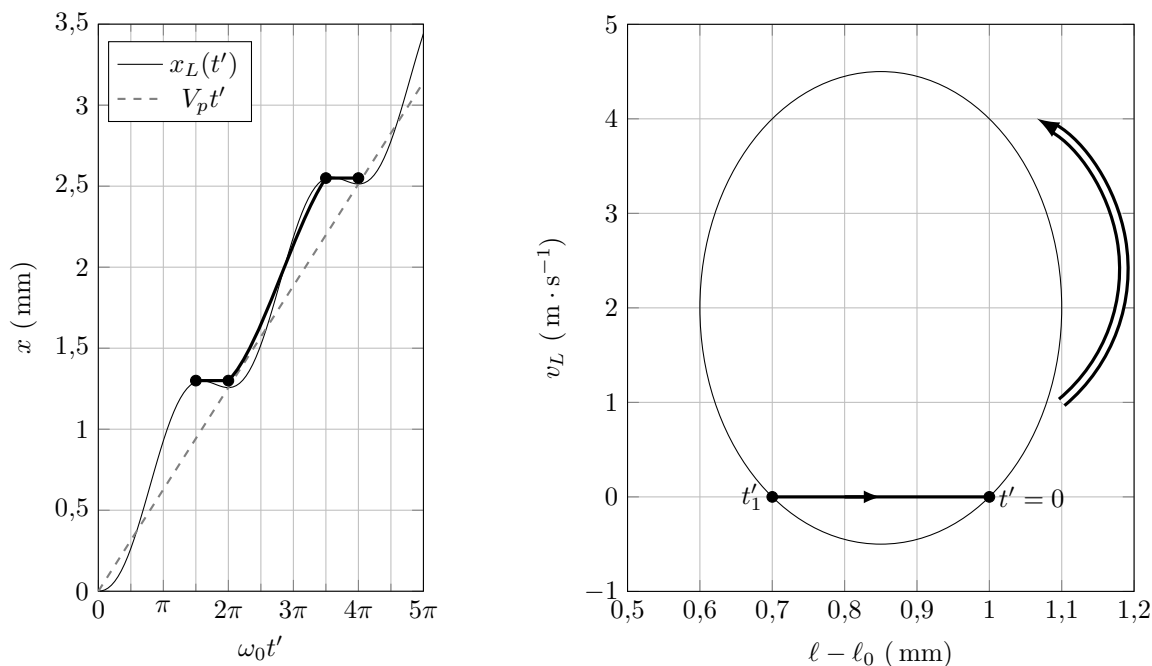
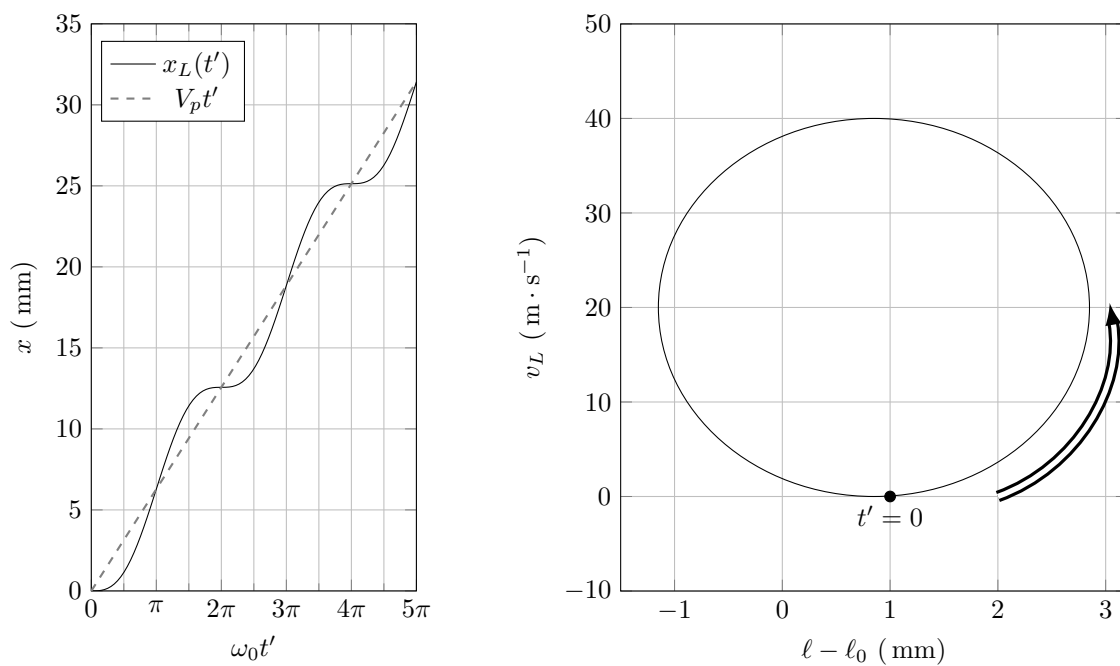
16. Pour que la phase de glissement dure toujours, il ne faut pas que la vitesse  $v_L$  s'annule à nouveau. On peut constater sur le graphique de la figure 4 que cette vitesse ne s'annule que lorsque l'on revient au point initial où la force exercée par le ressort sera suffisamment importante pour que la masse glisse à nouveau. Il n'y a pas vraiment de phase de *stick*. Par contre, dans le graphique de la figure 3, on peut voir que la vitesse s'annule pour  $\ell - \ell_0 = 0,7 \text{ mm}$  à la date  $t'_1$ . Il va y avoir une phase de collage. Pour déterminer la date  $t'_1$ , il faut voir qu'elle se produit pour  $\ell - \ell_0 = 0,7 \text{ mm}$ . Or, nous avons vu que  $\ell - \ell_0 = V_p t' - x_L(t) = V_p t' + V_p T_0 - x_L(t')$  et nous avons démontré que  $V_p T_0 = \frac{F_p}{k} = 1 \text{ mm}$ . On en déduit donc que  $x_L(t') - V_p t' = 1 - 0,7 = 0,3 \text{ mm}$ . Sur le graphique de gauche de la figure 2, cela correspond à  $\omega_0 t'_1 = \frac{3\pi}{2}$ . La date de collage est donc :  $t'_1 = \frac{3\pi}{2\omega_0} = 0,5 \text{ ms}$ .

**17.** Dans la phase de collage, on a  $v_L = 0$  et progressivement  $(\ell - \ell_0)$  augmente. Cela correspond au segment droit représenté entre la position à la date  $t'_1$  et la position initiale. À ce moment-là, le ressort retrouve une longueur de 1 mm et il est à même de contrer la force de frottement solide  $F_p$ . La durée de la phase de collage est telle que  $V_p \Delta t' = 0,3 \text{ mm}$ . Cela représente donc une durée  $\Delta t' = 0,15 \text{ ms}$  ce qui fait que  $\omega_0 \Delta t' = 1,5 \text{ rad} \simeq \pi/2$ . La courbe représentant l'évolution de  $x$  en fonction de  $\omega_0 t'$  est modifiée pour tenir compte de la phase de collage, voir la figure 3.

## DOCUMENT – RÉPONSE

Nom : SEIGNE

Prénom : Jean-Robert

FIGURE 3 – Résultats de la simulation numérique pour  $V_p = 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .FIGURE 4 – Résultats de la simulation numérique pour  $V_p = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .