

Exercices de révision pour les oraux : Série 2.

1 QCM

1. Rebonds d'un ballon

Réponses : La composante verticale de la vitesse orientée vers le haut est responsable de la hauteur du sommet obtenu pour la parabole. Comme la hauteur est de plus en plus petite, la valeur maximale de la vitesse v_y doit diminuer au cours du temps. Cela exclut immédiatement les graphiques a) et b). Au moment du choc sur le sol, il y a un changement de signe brutal de v_y en un temps très bref puisque la durée du contact ballon-sol tend vers zéro. On ne peut pas avoir le graphique c). La bonne réponse est le graphique d).

2. Une montgolfière

Réponses : le poids du volume d'air extérieur déplacé doit être au moins égale au poids total de la montgolfière. On peut traduire cela en masse : $\rho_0 V_0 = \Pi_a = m + \rho_{\text{air chaud}} V_0$ où ρ_0 est la masse volumique de l'air extérieur. On peut en déduire que $\rho_0 = \frac{m}{V_0} + \rho_{\text{air chaud}}$. En utilisant la loi des gaz parfaits, on peut exprimer la masse volumique des gaz, cela donne $\frac{P_0 M}{RT_0} = \frac{m}{V_0} + \frac{P_0 M}{RT_c}$ où T_c est la température de l'air chaud. On obtient l'équation $T_c = \frac{T_0}{1 - \frac{mRT_0}{MP_0V_0}}$. On trouve $T_c = 352 \text{ K}$ ce qui correspond à 79°C . Il s'agit de la réponse a).

3. Presbytie

Réponses : soit A' le point image sur la rétine d'un objet A_1 tel que $\overline{OA_1} = -75 \text{ cm}$, le point image est sur la rétine. On doit avoir la vergence de l'œil V_1 qui vérifie $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA_1} = V_1$. Lorsque l'œil possède la lentille de contact de vergence V , on a une vergence pour l'ensemble $V_1 + V$. Le point objet est maintenant A_2 tel que $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA_2} = V_1 + V$ car A' est toujours l'image sur la rétine avec $\overline{OA_2} = \frac{1}{3}\overline{OA_1}$. On déduit des deux équations que $V = -\frac{2}{OA_1} = \frac{8}{3} \text{ m}^{-1}$. Cela donne $V \simeq 2,7 \text{ m}^{-1} = 2,7\delta$. La bonne réponse est d).

4. Balle suspendue

Réponses : on note θ_0 l'angle entre la verticale et la direction du fil (2), l'équilibre initial donne $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + m\vec{g} = \vec{0}$. En projetant, on obtient $T_2 \cos \theta_0 = mg$ d'où $T_2 = \frac{mg}{\cos \theta_0} > mg$. Cela exclut la proposition a). Quand on coupe le fil (1), on se retrouve avec un pendule pesant traditionnel tel que $\vec{T}_2' + m\vec{g} = m\vec{a} = m\ell(\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - \dot{\theta}^2\vec{e}_r)$. En projetant les forces, on obtient d'une part l'équation du mouvement du pendule $m\ell\ddot{\theta} = -mg \sin \theta$ et d'autre part $-T_2' + mg \cos \theta = -m\ell\dot{\theta}^2$. Au moment où on coupe le fil (1), on a $\theta = \theta_0$ et surtout $\dot{\theta} = 0$, on voit donc que l'équation précédente est $T_2' = mg \cos \theta_0 < mg$. La bonne réponse est la réponse b).

2 Exercices

5. Décomposition en série de Fourier

Réponses : Le signal est de période $f = 100 \text{ Hz}$, il provient du redressement double alternance d'un signal de fréquence $f_0 = 50 \text{ Hz}$, sa forme est $u(t) = U_0 |\sin 2\pi f_0 t|$ sur une période $[0, T = 1/f]$, $\sin 2\pi f_0 t > 0$, $u(t) = \frac{2U_0}{\pi} [1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n f t}{4n^2 - 1}]$, $i_{DC} = 0,19 \text{ A}$, l'harmonique de rang 1 étant prédominante $i_{AC} = 0,027 \text{ A}$, $P = 0,72 \text{ W}$.

6. Erreur de quantification

Réponses : l'erreur d'arrondi prend ses valeurs dans l'intervalle $[-\frac{q}{2}; +\frac{q}{2}]$; on obtient une dent de scie de période identique à celle de l'échantillonnage T_e que l'on peut décrire par $\varepsilon(t) = q \frac{t}{T_e}$ pour le signal entre $[-\frac{T_e}{2}; \frac{T_e}{2}]$ qui encadre la date $t = 0$; la moyenne est nulle sur une période, la moyenne quadratique $\sigma^2 = \frac{q^2}{T_e} \int_0^{T_e/2} q^2 \frac{t^2}{T_e^2} dt = \frac{q^2}{12}$, on a donc $\varepsilon_{eff} = \frac{q}{2\sqrt{3}}$, la plage de conversion Δs est telle que $q = \frac{\Delta s}{2^n - 1}$ on a donc $\frac{\varepsilon_{eff}}{\Delta s} \simeq \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{3}}$, pour 8 bits on trouve $\frac{\varepsilon_{eff}}{\Delta s} = 10^{-3}$ et pour 12 bits $\frac{\varepsilon_{eff}}{\Delta s} = 7 \times 10^{-5}$; les résultats restent valables car on a toujours un signal triangulaire, il n'y a que le signe qui change; l'échantillonnage est rapide et la plage de conversion grande devant le pas de quantification, on peut considérer localement que tout signal est assimilable à un triangle.

7. Critère de Shannon

Réponses : le cas limite est $f = F_e/2$ on prélève deux échantillons par période; dans les deux cas on a $f_{max} < F_e/2$ le critère de SHANNON est respecté; l'échantillonnage introduit, entre autres, les fréquences $F_e - f$ pour la

téléphonie on a $F_e - f_{max} = 4,6 \text{ kHz}$ la zone de transition est donc de $[3,4 \text{ kHz}; 4,6 \text{ kHz}]$ alors que pour le CD audio c'est $[20 \text{ kHz}; 24,1 \text{ kHz}]$; en valeur relative on a dans le premier cas $\frac{1,2}{3,4} = 0,35$ alors que pour le CD c'est $\frac{4,1}{20} = 0,21$; pour ne pas récupérer de fréquences non présentes dans le signal de départ il faut des filtres passe-bas, celui nécessaire au signal audio doit avoir une atténuation plus forte que pour le signal téléphonique car il y a doit y avoir une bonne atténuation sur un intervalle relatif de fréquence plus petit.

8. Cristal peuplé de dipôles

Réponses : l'énergie d'un dipôle est $-\vec{p} \cdot E\vec{e}_z$. Pour les 4 orientations sur \vec{e}_x et \vec{e}_y , on a une énergie nulle $E_2 = 0$ avec une dégénérescence de 4. Pour une orientation sur $+\vec{e}_z$, on a $E_1 = -pE = -\epsilon$ et $E_3 = \epsilon$ pour l'orientation $-\vec{e}_z$. La probabilité d'être dans l'état d'énergie 1 est $P_1 = A \exp \frac{\epsilon}{k_B T}$, pour l'état d'énergie E_2 , c'est $P_2 = 4A$. Enfin pour l'état d'énergie E_3 , c'est $P_3 = A \exp -\frac{\epsilon}{k_B T}$. Par normalisation de la loi de probabilité, on a $1 = A(2 \text{ch} \frac{\epsilon}{k_B T} + 4)$. Cette expression permet de préciser l'expression des probabilités. Le moment dipolaire moyen est $\langle \vec{p} \rangle = P_1 p \vec{e}_z + P_3 (-p \vec{e}_z) + P_2 (\pm p \vec{e}_x \pm p \vec{e}_y) = (P_1 - P_3) p \vec{e}_z$. Après calcul, on trouve

$$\langle \vec{p} \rangle = p \vec{e}_z \frac{\text{sh} \frac{\epsilon}{k_B T}}{2 + \text{ch} \frac{\epsilon}{k_B T}}$$

Une température peut être qualifiée d'élévée si l'on peut écrire $k_B T \gg \epsilon$. En effectuant

un développement limité à l'ordre 1 en $\frac{\epsilon}{k_B T}$, on arrive à $\langle \vec{p} \rangle = \vec{e}_z \frac{p}{3} \frac{\epsilon}{k_B T}$. Nous allons utiliser les angles des coordonnées sphériques d'axe Oz que sont θ et φ . L'orientation du dipôle est $+\vec{e}_r$, l'énergie du dipôle dans le champ électrique $-pE \cos \theta = -\epsilon \cos \theta$. Il faut raisonner en cherchant la probabilité élémentaire d'avoir la direction de \vec{p} dans l'angle solide élémentaire $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$, elle est donnée par $dP = A' \exp -\frac{\epsilon \cos \theta}{k_B T} \sin \theta d\theta d\varphi$ où A' est la constante de normalisation de la loi de probabilité que l'on détermine en intégrant θ entre 0 et π et φ entre 0 et 2π . On a $1 = A' 2\pi \int_0^\pi \exp -\frac{\epsilon \cos \theta}{k_B T} \sin \theta d\theta$. On trouve $1 = A' 2\pi [\frac{k_B T}{\epsilon} \exp -\frac{\epsilon \cos \theta}{k_B T}]_0^\pi$. On trouve $A' = \frac{1}{4\pi} \frac{\epsilon}{k_B T} \text{sh} \frac{\epsilon}{k_B T}$. Compte tenu de l'invariance par rotation autour de l'axe Oz , seule la composante de \vec{p} projetée sur \vec{e}_z va contribuer au moment dipolaire moyen. On a $\langle \vec{p} \rangle = \vec{e}_z p \int_{\theta=0}^\pi \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos \theta A' \exp -\frac{\epsilon \cos \theta}{k_B T} \sin \theta d\theta d\varphi$. On a donc $\langle \vec{p} \rangle = \vec{e}_z A' 2\pi p I$ avec $I = \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta \exp -\frac{\epsilon \cos \theta}{k_B T} d\theta$. On va pouvoir procéder à une intégration par partie en remarquant que $I = \frac{k_B T}{\epsilon} \int_0^\pi \cos \theta (\frac{\epsilon}{k_B T} \sin \theta \exp -\frac{\epsilon \cos \theta}{k_B T}) d\theta$. On peut poser $u = \cos \theta$ et $v' = \frac{\epsilon}{k_B T} \sin \theta \exp -\frac{\epsilon \cos \theta}{k_B T}$ d'où $u' = -\sin \theta$ et $v = \exp -\frac{\epsilon \cos \theta}{k_B T}$. On arrive à $I = \frac{k_B T}{\epsilon} ([\cos \theta \exp -\frac{\epsilon \cos \theta}{k_B T}]_0^\pi + \int_0^\pi \sin \theta \exp -\frac{\epsilon \cos \theta}{k_B T} d\theta)$. Après calcul, on arrive à $I = \frac{2k_B T}{\epsilon} (\frac{k_B T}{\epsilon} \text{sh} \frac{\epsilon}{k_B T} - \text{ch} \frac{\epsilon}{k_B T})$. On peut alors déterminer l'expression du moment dipolaire

moyen : $\langle \vec{p} \rangle = \vec{e}_z p \frac{k_B T}{\epsilon} (1 - \frac{\frac{\epsilon}{k_B T}}{\tanh \frac{\epsilon}{k_B T}})$. Pour les températures élevées, on obtient le même résultat que pour le

cas discret. Il faut effectuer un développement limité à l'ordre 3 de $\tanh \frac{\epsilon}{k_B T} = \frac{\epsilon}{k_B T} + \frac{1}{3}(\frac{\epsilon}{k_B T})^3$. On arrive alors à $\langle \vec{p} \rangle = \vec{e}_z \frac{p}{3} \frac{\epsilon}{k_B T}$. L'énergie moyenne est pour un dipôle $E_{1dip} = \langle -\vec{p} \cdot E\vec{e}_z \rangle = -\langle \vec{p} \rangle \cdot E\vec{e}_z$. Pour la description

discrete des orientations du dipôle en sommant sur les N dipôles, on a $\langle E_{dis} \rangle = -N k_B T \frac{\epsilon}{k_B T} \frac{\text{sh} \frac{\epsilon}{k_B T}}{2 + \text{ch} \frac{\epsilon}{k_B T}}$. Pour

le modèle continu, on a $\langle E_{cont} \rangle = -N k_B T (1 - \frac{\frac{\epsilon}{k_B T}}{\tanh \frac{\epsilon}{k_B T}})$. À haute température, on a pour les deux cas la

même expression $\langle E \rangle = -\frac{1}{3} N k_B T \frac{\epsilon^2}{k_B^2 T^2}$. On peut constater que si $T \rightarrow \infty$ alors l'énergie moyenne tend vers

zéro. Cela est logique avec le fait qu'il y aura tellement d'agitation thermique que toutes les orientations sont équiprobables, il y aura autant de contributions positives à l'énergie que de contributions négatives. Si on tient compte de l'énergie cinétique, il faut commencer par dire que l'on a deux rotations avec les angles θ et φ et des énergies cinétiques de la forme $\frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}^2$ et $\frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}^2$. Ce sont deux formes quadratiques qui vont contribuer à l'énergie moyenne par le terme $\frac{1}{2} k_B T$. On peut donc rajouter à l'énergie des dipôles la contribution $N k_B T$. On peut aussi s'interroger sur le fait que le centre d'inertie du dipôle n'est certainement pas fixé au sommet du cube du réseau cristallin ! Il possède 3 degrés de liberté qui interviennent dans l'énergie cinétique sous la forme $\frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ ce qui amène une contribution supplémentaire de $\frac{3}{2} N k_B T$. Toutefois si l'on prend en compte cette énergie, il ne faut pas oublier que l'atome peut bouger de sa position moyenne dans le réseau cristallin mais ne pas la quitter car une force de rappel va agir. Cette force de rappel est modélisable par une force linéaire et donc une énergie potentielle élastique quadratique en x^2 , y^2 et z^2 qui va contribuer elle aussi à l'énergie pour $\frac{3}{2} N k_B T$. L'énergie du cristal est la somme de toutes les contributions. Il faut encore avoir conscience qu'en fonction de la température certaines seront gelées et d'autres actives.

9. Polariseur à neutrons

Réponses : On a $\vec{L} = r\vec{e}_r \wedge m_e v \vec{e}_\theta = m_e r v \vec{e}_z$. Le moment magnétique est de la forme $\vec{M} = -i\pi r^2 \vec{e}_z$ puisque le courant est dans le sens contraire du mouvement de l'électron. On a de plus $i = \frac{e}{T}$ où T est la période mise par l'électron pour faire un tour : $T = \frac{2\pi r}{v}$. On en déduit que $\vec{M} = -\frac{e r v}{2} \vec{e}_z$. Le rapport gyromagnétique est donc $\gamma_e = -\frac{e}{2m_e}$. Les neutrons vont avoir tendance à aligner leur moment magnétique dans le même sens et la même direction que celle du champ magnétique. Pour un neutron polarisé positivement, on a $V_+(x) = V_0 - \vec{M} \cdot \vec{B}$ avec

$\vec{M} = \gamma \frac{\hbar}{2} \vec{e}_z$ et $\vec{B} = B \vec{e}_z$ sans oublier que $\gamma < 0$ pour le neutron. On a donc un potentiel $V_+ = V_0 + |\gamma| \frac{\hbar}{2} B = V_0 + \omega_L \frac{\hbar}{2}$. Pour les neutrons de polarisation négative, on a $V_- = V_0 - \omega_L \frac{\hbar}{2}$. En Mécanique classique si $E > V_+$ alors les neutrons possèdent assez d'énergie pour passer dans le domaine $x > 0$, on ne pourra pas polariser le faisceau de neutrons puisqu'il est inchangé. De la même façon, si $E < V_-$ alors tous les neutrons sont réfléchis en $x = 0$. On ne peut toujours pas polariser le faisceau. Par contre si $V_- < E < V_+$, alors on obtient un faisceau de neutrons réfléchis polarisé positivement car ils sont tous réfléchis et un faisceau transmis polarisé négativement car ils sont tous transmis. L'équation de SCHRÖDINGER spatiale est $\frac{d^2\varphi}{dx^2} + (k^2 - k_0^2 \pm \frac{m\omega_L}{\hbar})\varphi = 0$. En fonction de la polarisation du neutron étudié, on doit résoudre $\frac{d^2\varphi}{dx^2} + G\varphi = 0$ et $\frac{d^2\varphi}{dx^2} + F\varphi = 0$. $F < 0$ et $G > 0$ correspondent à $V_0 - \omega_L \frac{\hbar}{2} < E < V_0 + \omega_L \frac{\hbar}{2} = V_+$. Les neutrons polarisés positivement vont intégralement se réfléchir en $x = 0$. Les neutrons transmis sont donc polarisés négativement. On s'intéresse aux neutrons polarisés négativement pour trouver leur taux de réflexion et de transmission sur la marche de potentiel. On doit donc résoudre l'équation différentielle $\frac{d^2\varphi}{dx^2} + G\varphi = 0$ pour $x > 0$ tout en sachant qu'il ne peut pas y avoir de neutrons qui viennent de $x \rightarrow +\infty$. On a donc $\varphi_2(x) = A_2 \exp i\sqrt{G}x$. Dans la partie négative, la fonction d'onde doit vérifier $\frac{d^2\varphi}{dx^2} + k^2\varphi = 0$ ce qui donne $\varphi_1(x) = A_1 \exp ikx + B_1 \exp -ikx$ où A_1 correspond à l'amplitude incidente et B_1 celle réfléchie. On note $B_1 = rA_1$ le coefficient de réflexion en amplitude et $A_2 = tA_1$ celui de transmission. La continuité de la fonction d'onde en $x = 0$ donne $1 + r = t$ et la continuité de $\frac{d\varphi}{dx}$ toujours en $x = 0$ donne $k(1 - r) = \sqrt{G}t$. La résolution du système donne $r = \frac{k - \sqrt{G}}{k + \sqrt{G}}$ et $t = \frac{2k}{k + \sqrt{G}}$. Le coefficient de réflexion des flux de neutrons est $R = r^2 = \left(\frac{k - \sqrt{G}}{k + \sqrt{G}}\right)^2$. Par conservation du nombre de neutrons polarisés négativement, on a $T = 1 - R$. En utilisant l'expression de G , on arrive à $R = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{V_0^2}{E^2} + \frac{\hbar\omega_L}{2E}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{V_0^2}{E^2} + \frac{\hbar\omega_L}{2E}}}\right)^2$. Si on considère que $V_0 \simeq E$ comme indiqué par l'énoncé et que l'écart ne donne pas un terme significatif pour $1 - \frac{V_0^2}{E^2}$ par rapport au terme $\frac{\hbar\omega_L}{2E}$, on peut simplifier l'expression du coefficient de réflexion. On arrive à $R = \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{\hbar\omega_L}{2E}}}{1 + \sqrt{\frac{\hbar\omega_L}{2E}}}\right)^2$. On peut tenter encore un développement limité pour aboutir à $R = 1 - 2\sqrt{|g|\frac{eB\hbar}{mE}}$. On trouve numériquement que $R = 96,8\%$ et donc $T = 3,2\%$. Il y a 3,2% des neutrons transmis parmi les neutrons incidents polarisés négativement. Cela représente seulement 1,6% de la totalité des neutrons incidents, le taux de polarisation est donc de 1,6%.

10. Pendule électrostatique

Réponses : $E_m = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\frac{\ell}{2}\theta^2$ à l'ordre le plus bas, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$, on rajoute l'énergie potentielle électrostatique $E_{pot,elc} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}\right)$ avec $PB^2 = \ell^2(1 - \cos\theta)^2 + (\ell\sin\theta - a)^2$ et $PC^2 = \ell^2(1 - \cos\theta)^2 + (\ell\sin\theta + a)^2$, on développe pour $PB^2 = 2\ell^2(1 - \cos\theta) + a^2 - 2a\ell\sin\theta$, on ne conserve pas les termes d'ordres supérieurs à 2, $PB^2 = a^2 - 2a\ell\theta + \ell^2\theta^2 = a^2(1 - \frac{2\ell}{a}\theta + \frac{\ell^2}{a^2}\theta^2)$, avec $u = \frac{\ell\theta}{a} \ll 1$ on obtient $\frac{1}{PB} = \frac{1}{a}(1 + \varepsilon)^{-1/2} = \frac{1}{a}(1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3\varepsilon^2}{8})$ avec $\varepsilon = -2u + u^2$, on trouve $\frac{1}{PB} = \frac{1}{a}(1 + u + u^2)$, pour l'autre distance, il suffit de changer u en $-u$ et on arrive alors à $\frac{1}{PC} = \frac{1}{a}(1 - u + u^2)$, finalement on arrive à $E_{pot,elc} = -\frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 a} (1 + \frac{\ell^2}{a^2}\theta^2)$, $\omega'_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell} - \frac{qQ}{\pi\epsilon_0 a^3 m}}$ pour $Q < mg\frac{\pi\epsilon_0 a^3}{\ell q}$, il n'y a plus nécessairement oscillations autour de la position $\theta = 0$ comme avec seulement la pesanteur, cela dépend de la charge Q et aussi de la distance a .

11. Forces centrales en $1/r^n$

Réponses : Par le théorème du moment cinétique, on montre que le moment cinétique est constant, le mouvement est donc plan (voire rectiligne) et la loi des aires est vérifiée $C = r^2\dot{\theta}$, $E_m = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}) - \frac{km}{(n-1)r^{n-1}} = \text{Cte}$, on trouve $U(r) = \frac{C^2}{2r^2} - \frac{2k}{(n-1)r^{n-1}}$, pour $n < 2$, on obtient une courbe avec un minimum correspondant au mouvement circulaire et des trajectoires liées pour $E < 0$ et des états de diffusion pour $E \geq 0$, pour $n = 2$, on a une hyperbole positive ou négative en fonction du signe de $C^2 - k$ avec des mouvements de diffusion ou des mouvements liés réciproquement, pour $n > 2$, on a une courbe avec un maximum correspondant à un mouvement circulaire et toujours des mouvements liés et des mouvements de diffusion, dans tous les cas la nature du mouvement sera déterminée par la condition $\dot{r}^2 > 0$.

12. Pendule pesant à ressort

Réponses : À l'équilibre $mg = k(\ell_{eq} - \ell_0)$ d'où $\ell_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$. La position est $\vec{OM} = (\ell_{eq} + r)\vec{e}_r$, la vitesse $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + (\ell_{eq} + r)\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, l'accélération $\vec{a} = [\ddot{r} - (\ell_{eq} + r)\dot{\theta}^2]\vec{e}_r + [(\ell_{eq} + r)\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}]\vec{e}_\theta$. La relation de la Dynamique donne $m\vec{a} = m\vec{g} - k(\ell_{eq} + r - \ell_0)\vec{e}_r$. Le système différentiel comporte les deux équations : $\ddot{r} - (\ell_{eq} + r)\dot{\theta}^2 = -g(1 - \cos\theta) - \omega_0^2 r$ et $(\ell_{eq} + r)\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = -g\sin\theta$. On va faire les développements habituels sur les fonctions

trigonométriques en allant à l'ordre 2 : $\sin \theta = \theta$ et $\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$. Dans l'équation différentielle précédente, on suppose que $2\dot{r}\dot{\theta} \ll g \sin \theta$. On obtient l'équation traditionnelle du pendule pesant : $\ddot{\theta} + \omega_1^2 \theta = 0$. Cela signifie que l'on néglige l'influence du mouvement radial de la masse m sur son mouvement orthoradial, cela est raisonnable car $\alpha \ll \pi$. Ainsi, on peut supposer $r \ll \ell_{eq}$. La solution est $\theta(t) = \alpha \cos \omega_1 t$. L'équation différentielle du mouvement radial est $\ddot{r} - \ell_{eq} \dot{\theta}^2 - r \dot{\theta}^2 = -\frac{g}{2} \theta^2 - \omega_0^2 r$. On va garder les termes $\ell_{eq} \dot{\theta}^2$ et $\frac{g}{2} \theta^2$ qui sont de l'ordre 2 mais on élimine $r \dot{\theta}^2$ qui est d'ordre 3. On obtient l'équation différentielle $\ddot{r} + \omega_0^2 r = -\frac{g}{2} \theta^2 + \ell_{eq} \dot{\theta}^2$. Avec la solution trouvée avant, on a $\ddot{r} + \omega_0^2 r = \frac{g\alpha^2}{4} (1 - 3 \cos 2\omega_1 t)$. Avec les conditions initiales, on obtient la solution $r(t) = \frac{g\alpha^2}{4} \left[\frac{1}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t) + \frac{3}{4\omega_1^2 - \omega_0^2} (\cos 2\omega_1 t - \cos \omega_0 t) \right]$. Avec les deux solutions trouvées, on voit que le terme $2\dot{r}\dot{\theta}$ évolue en $g\alpha^3$ ce qui est bien du troisième ordre comme prévu, l'approximation réalisée est justifiée.

13. Cylindre de gaz en rotation

Réponses : La densité volumique initiale est $n_0 = \frac{N}{\pi R^2 H}$, la loi des gaz parfaits donne $p_0 = n_0 k_B T_0$, la loi de la statique des fluides est $\vec{\text{grad}} p = \mu \vec{g}$ avec $\mu = \frac{mp}{k_B T_0}$, on trouve $n(z) = \frac{n_0 H}{\ell_c (1 - \exp - \frac{z}{\ell_c})} \exp - \frac{z}{\ell_c}$ et donc $p(z) = p_0 \frac{H}{\ell_c (1 - \exp - \frac{z}{\ell_c})} \exp - \frac{z}{\ell_c}$ avec $\ell_c = \frac{k_B T_0}{mg}$, on trouve que $\ell_c \simeq 30 \text{ km}$ et donc $\ell_c \gg H$, on peut considérer la densité de particules comme la pression comme uniforme dans le cylindre, on négligera la pesanteur par la suite ; $\vec{\text{grad}} p = -\mu \vec{a}_{\text{ent}} = \mu \omega^2 r \vec{e}_r$ d'où $\frac{dp}{dr} = \frac{m\omega^2}{k_B T_0} r$ et avec $\frac{dp}{p} = \frac{dn}{n}$, on arrive à $n(r) = n(r=0) \exp \frac{m\omega^2}{2k_B T_0} r^2$, on pose $a = \sqrt{\frac{2k_B T_0}{m\omega^2}} \simeq 1 \text{ km}$, avec la conservation du nombre de particules, on trouve $n(r) = \frac{n_0 R^2}{a^2 (\exp \frac{R^2}{a^2} - 1)} \exp \frac{r^2}{a^2}$ et $p(r) = \frac{p_0 R^2}{a^2 (\exp \frac{R^2}{a^2} - 1)} \exp \frac{r^2}{a^2}$; la densité au centre est inférieure à n_0 puis elle augmente rapidement elle repasse par la valeur n_0 au voisinage de $r = R/\sqrt{2}$ et croît jusqu'à $r = R$; on utilise l'identité thermodynamique $dH = C_p dT = T dS + V dP$ comme la température est fixée, on a $T_0 dS = -V dP$, ici on doit considérer une petite quantité dN de particules dont la pression passe de p_0 à $p(r)$, on a $d^2 S = -dN k_B \frac{dp}{p}$ d'où $dS = -k_B n(r) 2\pi H r dr \ln \frac{p(r)}{p_0}$, on pose $b = \frac{R}{a}$ et $u = \frac{r}{a}$, on a $\frac{p(r)}{p_0} = f(u) = \frac{b^2}{\exp b^2 - 1} \exp u^2$ et par conséquent $\Delta S = -k_B n_0 2\pi H a^2 \int_0^b u f(u) \ln f(u) du$, on trouve une fonction qui est très voisine de zéro pour $b \ll 1$ ce qui est notre cas puisque $R \ll a$, elle ne fait que décroître puisque pour $b \simeq 0, 1$, on trouve $\Delta S < 0$, on a augmenté l'ordre dans le système, n'oublions pas que l'on impose toujours la température T_0 et que les molécules sont moins dispersées dans le volume disponible qu'avant.

14. Profil de température en régime stationnaire

Réponses : $\lambda_0(T(x) - T_1) + \frac{b}{2}(T^2(x) - T_1^2) = -\frac{T_1 - T_2}{a} x (\lambda_0 + \frac{b}{2}(T_2 + T_1))$, $P = S \frac{T_1 - T_2}{a} (\lambda_0 + \frac{b}{2}(T_2 + T_1))$, $\dot{S}_{cr} = S \frac{(T_1 - T_2)^2}{a T_1 T_2} (\lambda_0 + \frac{b}{2}(T_2 + T_1))$.

15. Guide d'ondes et ondes TM

Réponses : Ox , TM car $\vec{B} \perp Ox$, non plane car B_z fonction de y , $\vec{E} = \frac{c^2}{\omega} (-i \frac{dB_z}{dy} \vec{e}_x + k B_z \vec{e}_y) \exp [i(\omega t - kx)]$, $\frac{d^2 B_z}{dy^2} + (\frac{\omega^2}{c^2} - k^2) B_z = 0$ solutions exponentielles réelles, affines, sinusoidales, $\frac{dB_z}{dy} \Big|_{y=0,a} = 0$, solutions sinusoidales du type $B_z = B_0 \cos \frac{n\pi y}{a}$, $\langle \vec{\Pi} \rangle_{y,t} = \frac{B_0^2}{4\mu_0} \frac{c^2 k}{\omega} \vec{e}_x$, $P_{moy} = \frac{B_0^2}{4\mu_0} \frac{c^2 k}{\omega} ab$ avec $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2}$.

16. Condensateur cylindrique et effet Hall

Réponses : $\vec{E} = \frac{V_0}{r \ln \frac{R_2}{R_1}} \vec{e}_r$, $Q_0 = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{V_0 2\pi h}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$, $C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{2\pi h}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$, $R = \frac{1}{\gamma} \frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi h}$, $\gamma = \frac{n e^2 \tau}{m}$, $j_r = \frac{\gamma}{1 + \frac{\gamma^2 B_0^2}{n^2 e^2}} E_r - \frac{\gamma^2 B_0}{1 + \frac{\gamma^2 B_0^2}{n^2 e^2}} E_\theta$, $j_\theta = \frac{\gamma}{1 + \frac{\gamma^2 B_0^2}{n^2 e^2}} E_\theta + \frac{\gamma^2 B_0}{1 + \frac{\gamma^2 B_0^2}{n^2 e^2}} E_r$, $C_{B_0} = C$ et $R_{B_0} = (1 + \frac{\gamma^2 B_0^2}{n^2 e^2}) R$.

17. Détecteur large

Réponses : surface élémentaire $dS = 2\pi f \sin i f di = f^2 2\pi \sin i di$, surface totale $S = 2\pi f^2 (1 - \cos i_{max}) = 2\pi f^2 (1 - \sqrt{1 - \frac{R^2}{f^2}})$, avec $R \ll f$ on retrouve $S = \pi R^2$, dS reçoit l'éclairement élémentaire $dE = K' (1 + \cos \frac{2\pi 2e \cos i}{\lambda}) dS$, $E = K' S \left(1 - \text{sinc} \pi \frac{2e}{\lambda} \frac{R^2}{f^2} \cos 2\pi \frac{2e}{\lambda} (2 - \frac{R^2}{f^2}) \right)$, $E = \frac{E_{max}}{2} \left(1 - \text{sinc} \pi \frac{2e}{\lambda} \frac{R^2}{f^2} \cos 2\pi \frac{2e}{\lambda} (2 - \frac{R^2}{f^2}) \right)$; lorsque R augmente le contraste $\mathcal{C} = \left| \text{sinc} \pi \frac{2e}{\lambda} \frac{R^2}{f^2} \right|$ diminue vite le détecteur ne distingue plus les franges, pour bien détecter les franges, il faut que le détecteur soit petit mais il reçoit alors d'autant moins d'énergie, un compromis est nécessaire.

18. Miroir de Lloyd

Réponses : Rayons parallèles, $x \in [f \frac{h}{l+d}; f \frac{h}{d}]$ donc $0,5 \text{ cm} \leq x \leq 2 \text{ cm}$, $\delta = \frac{\lambda}{2} + 2h \frac{x}{f}$, $I = I_0(1 - \cos 2\pi \frac{2hx}{\lambda f})$, $i = \frac{\lambda f}{2h} = 50 \mu\text{m}$, FB pour p tel que $\frac{x_1}{i} \leq p + \frac{1}{2} \leq \frac{x_2}{i}$, $99,5 \leq p \leq 399,5$, 300 franges non observables à l'œil nu.

19. Synthèse du iodure d'hydrogène

Réponses : 0,11 mol de $\text{H}_{2\text{gaz}}$ et de $\text{I}_{2\text{gaz}}$, 0,78 mol de HI_{gaz} .

20. Obtention de carbonate de calcium

Réponses : $\Delta_r H^\circ = -69,1 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ exothermique, $\Delta_r S^\circ = -15,5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ diminution du désordre, si T augmente déplacement dans le sens (2) endothermique, $\Delta_r \nu_{\text{gaz}} = 0$ pas d'influence de p , un ajout de $\text{CO}_{2\text{gaz}}$ va être consommé (loi de modération) par un déplacement dans le sens (1), $\Delta_r G^\circ = -64,5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$, $K_0 = 2 \times 10^{11}$, $\ln K_0 = \frac{8311}{T} - 1,86$, $\Delta_r G^\circ = 200 - 4,2T$, à $T = 298 \text{ K}$ $\Delta_r G^\circ = -1052 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$, $Q = 1$, $\Delta_r G = \Delta_r G^\circ = -1052 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$ $\Delta_r G < 0$ sens (1), la calcite est stable.

21. Cinétique d'ordre 2

Réponses : $v = k [\text{RCI}] [\text{OH}^-]$, $Dc_0 = kVc_{eq}^2$, $c_{eq} = 0,106 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

22. Oxydation d'un alliage nickel-chrome

Réponses : un alliage est une solution solide, une seule phase d'où $v = 1$, si on fixe la température l'état d'équilibre final sera entièrement déterminé, $p_{\text{O}_2} = p^\circ \frac{1}{a_{\text{Ni}}} \exp \frac{2\Delta_r G^\circ}{RT}$, $p_{\text{O}_2} = 4 \times 10^{-16} \text{ bar}$, $p_{\text{O}_2} = p^\circ \frac{1}{a_{\text{Cr}}^{4/3}} \exp \frac{2\Delta_r G^\circ}{3RT}$, $p_{\text{O}_2} = 2,6 \times 10^{-30} \text{ bar}$, les deux doivent se former selon la Thermodynamique, cinétique.

3 Python Centrale

23. Le mercure

Réponses : $Z = 80$ d'où $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^2 4d^{10} 5p^6 6s^2 4f^{14} 5d^{10}$, la couche de valence est la couche 6 avec la $6s^2$. Ce sont ces électrons qui vont quitter l'atome de mercure en premier. On peut prévoir en effet de stabilisation en perdant les deux électrons de cette couche. Le degré d'oxydation du mercure le plus probable est donc $+II$. Le degré $+I$ en perdant un seul des deux électrons est toutefois possible mais moins favorable que l'autre. En classant par nombres d'oxydation croissants, les entités du mercure, on peut attribuer les domaines selon $A = \text{Hg}^{2+}$, $B = \text{Hg}_2^{2+}$, $C = \text{Hg}_{liq}$ et $D = \text{HgO}_s$. On s'intéresse au couple géré par $2\text{Hg}^{2+} + 2e^- \rightleftharpoons \text{Hg}_2^{2+}$ de loi de NERNST $E = E^\circ + 0,03 \log \frac{[\text{Hg}^{2+}]^2}{[\text{Hg}_2^{2+}]}$ avec $[\text{Hg}^{2+}] = 0,005 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et $[\text{Hg}_2^{2+}] = 0,0025 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ pour tenir compte de l'équipartition de l'élément mercure à la frontière et de la concentration totale de $0,01 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. On lit sur le graphique proposé $E = 0,73 \text{ V}$ à la frontière, on en déduit que $E^\circ = 0,79 \text{ V}$ pour ce couple. On se trouve en milieu acide pour la frontière verticale qui fait l'objet de la question. On a donc l'équilibre $\text{Hg}^{2+} + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{HgO}_s + 2\text{H}^+$ de constante d'équilibre $K^\circ(T) = \frac{[\text{H}^+]^2}{[\text{Hg}^{2+}]}$. À la frontière, on a $pH = 2$ pour $[\text{Hg}^{2+}] = 0,01 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. On trouve donc que $K^\circ(T) = 10^{-2}$. Écrivons l'équation de transfert électronique du couple concerné : $2\text{HgO}_s + 4\text{H}^+ + 2e^- \rightleftharpoons \text{Hg}_2^{2+} + 2\text{H}_2\text{O}$. On obtient, en écrivant la loi de NERNST, une pente de $-0,12 \text{ V}$ par unité pH . Pour la cinétique, on a une seconde expérience avec dégénérescence de l'ordre puisque $[\text{Fe}^{2+}] \gg [\text{Hg}^{2+}]$. On a donc $v = -\frac{1}{2} \frac{d[\text{Hg}^{2+}]}{dt} = k' [\text{Hg}^{2+}]^q$. En utilisant le programme *Python* fourni pour chercher une régression linéaire, on trouve clairement que $q = 1$ en utilisant une régression linéaire sur le logarithme du rapport des concentrations fourni. Dans la première expérience, on a des proportions stœchiométriques et donc $v = -\frac{1}{2} \frac{d[\text{Hg}^{2+}]}{dt} = k [\text{Hg}^{2+}]^{p+1}$. En utilisant le programme *Python*, on trouve que $p = 1$ cette fois en obtenant une régression linéaire pour l'inverse du rapport des concentrations fourni. On a donc un ordre global 2 pour cette réaction.

4 X-ENS

24. Astre polytropique

- La loi de la statique des fluides appliquée pour $r \leq R$ donne $\overrightarrow{\text{grad}} P = \mu(r) \vec{G}(r)$ où $\vec{G}(r) = G(r) \vec{e}_r$ et le champ de gravitation en r . En appliquant le théorème de GAUSS gravitationnel à une surface sphérique de rayon r , on arrive à $\vec{G} = -\frac{Gm(r)}{r^2} \vec{e}_r$ où $m(r)$ est la masse contenue à l'intérieur de la sphère de rayon r . On en déduit que $\frac{dP}{dr} = -\frac{\mu(r)Gm(r)}{r^2}$. La loi polytropique est $P(r) = C\mu(r)^2$. En dérivant par rapport à r , on obtient $\frac{dP}{dr} = 2C\mu(r) \frac{d\mu}{dr}$. En comparant les deux expressions du gradient de pression et en simplifiant par $\mu(r)$, on arrive à $2Cr^2 \frac{d\mu}{dr} = -Gm(r)$. En dérivant par rapport à r , on obtient $2r \frac{d\mu}{dr} + r^2 \frac{d^2\mu}{dr^2} = -\frac{G}{2C} \frac{dm}{dr}$. Or, la masse dm correspond à celle contenue dans une mince couche d'épaisseur dr au niveau du rayon r : $dm = \mu(r)4\pi r^2 dr$. En divisant par r l'équation différentielle obtenue, on arrive à $r \frac{d^2\mu}{dr^2} + 2 \frac{d\mu}{dr} = -\frac{2\pi G}{C} \mu r$ ce qui conduit bien à :
$$r \frac{d^2\mu}{dr^2} + 2 \frac{d\mu}{dr} + \frac{2\pi G}{C} r \mu = 0$$
- On a $\frac{dr\mu}{dr} = \mu + r \frac{d\mu}{dr}$. On peut calculer la dérivée seconde $\frac{d^2r\mu}{dr^2} = 2 \frac{d\mu}{dr} + r \frac{d^2\mu}{dr^2}$. L'équation différentielle est donc $\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{2\pi G}{C} f = 0$. Cette équation a pour solution $f(r) = A \cos \frac{r}{\ell} + B \sin \frac{r}{\ell}$ avec $\ell = \sqrt{\frac{C}{2\pi G}}$ la longueur caractéristique telle que la période spatiale est $2\pi\ell$. La masse volumique est donc $\mu(r) = \frac{A}{r} \cos \frac{r}{\ell} + \frac{B}{r} \sin \frac{r}{\ell}$. Pour déterminer les constante d'intégration, il faut commencer par dire que $\mu(r)$ ne peut pas diverger en $r = 0$, il s'en suit que $A = 0$. La solution est donc $\mu(r) = \frac{B}{r} \sin \frac{r}{\ell}$. En $r = R$, l'astre se termine et on peut logiquement proposer que la pression à la surface est donc nulle. On a donc $\sin \frac{R}{\ell} = 0$ puisque la solution $B = 0$ n'a aucune intérêt physique ! On a donc $\frac{R}{\ell} = n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}$. Cette situation pose un problème puisqu'il n'est pas concevable que la masse volumique devienne négative. Il n'y a pas d'autre choix que de considérer $n = 1$, la masse volumique s'annule pour la première fois à la limite de l'astre. La solution est donc $\mu(r) = \frac{B}{r} \sin \pi \frac{r}{R}$. Cette solution évite la singularité en $r = 0$ et respecte la condition limite en $r = R$. Il faut déterminer B , cela peut se faire par la donnée de la masse M de l'astre. En effet, on a $M = \int_0^R \mu(r)4\pi r^2 dr$. On a donc $M = 4\pi B \int_0^R r \sin \pi \frac{r}{R} dr$. On peut encore écrire $M = \frac{4\pi B R^2}{\pi} \int_0^\pi u \sin u du$ où on a posé $u = \pi \frac{r}{R}$. On effectue une intégration par partie. On pose $f = u$ et $g' = \sin u$ d'où $f' = 1$ et $g = -\cos u$. L'intégrale est donc $I = [-u \cos u]_0^\pi + \int_0^\pi \cos u du = \pi$. On a donc $M = 4\pi B R^2$. Cela permet de finaliser l'expression de la masse volumique dans l'astre polytropique :
$$\mu(r) = \frac{M}{4R^2 r} \sin \pi \frac{r}{R}$$

25. Peut-on mesurer la pression de l'air avec un pendule ?

Réponses :

Soit O origine du repère et du référentiel galiléen (laboratoire). On note m la masse du pendule, ℓ la longueur repérant depuis O son centre d'inertie G tel que $\overrightarrow{OG} = \ell \vec{e}_r$ et J son moment d'inertie par rapport à un axe horizontal passant par O . Si on étudie le pendule dans le cadre d'un modèle simple, on peut considérer la liaison pivot parfaite au niveau de l'axe de rotation passant par O . On pourra alors écrire la conservation de l'énergie mécanique en notant θ l'angle entre la direction de \overrightarrow{OG} et la verticale comme l'on fait habituellement pour l'étude du pendule pesant. On a donc $E_m = \text{Cte} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - mg\ell \cos \theta$. En dérivant par rapport au temps, on arrive à l'équation différentielle non linéaire du pendule pesant : $J\ddot{\theta} + mg\ell \sin \theta = 0$. Si l'on travaille pour des petits angles, on peut linéariser et écrire l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique $J\ddot{\theta} + mg\ell \theta = 0$ qui possède une période d'oscillation $T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mg\ell}}$. Si le pendule est de taille très petite de telle sorte que l'on puisse considérer toute sa masse concentrée au centre d'inertie G alors $J = m\ell^2$. La période des oscillations se simplifie et devient $T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$. D'une façon générale, le moment d'inertie du pendule s'écrira $J = \alpha m\ell^2$ où α est un coefficient numérique. La période des oscillations est $T = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha \ell}{g}}$. En se basant sur le fonctionnement du pendule le plus traditionnel, on peut tenir compte de la poussée d'ARCHIMÈDE en considérant bien sûr le pendule comme non ponctuel... Son volume est noté V et la masse volumique de l'air $\rho_a = \frac{P_a M_a}{RT_a}$ où M_a est la masse molaire de l'air. Le pendule subit son poids et la poussée d'ARCHIMÈDE ce qui modifie son énergie potentielle : $E_{pot} = -(m - \rho_a V)g\ell \cos \theta = -(1 - \frac{\rho_a V}{m})mg\ell \cos \theta$. Dans ce cas-là, il est indispensable de considérer un moment d'inertie $J = \alpha m\ell^2$. On peut donc obtenir une période des oscillations $T' = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha \ell}{(1 - \frac{\rho_a V}{m})g}}$. On peut constater que $\frac{T'^2}{T^2} = 1 - \frac{\rho_a V}{m}$. On peut donc mesurer la pression de l'air en mesurant T en l'absence de poussée d'ARCHIMÈDE ce qui veut dire que l'on a fait le vide... et T dans l'air. On a
$$P_a = \frac{RT_a}{M_a} \frac{m}{V} (1 - (\frac{T}{T'})^2)$$

Dans l'étude précédente, nous n'avons pas tenu compte des frottements aussi bien au niveau de la liaison pivot que ceux engendrés par l'air. Il est assez raisonnable de considérer un couple de frottement (ou pour l'air un moment de frottement) de la forme $-h\dot{\theta}$ en projection sur l'axe de rotation. On a alors $\frac{dE_m}{dt} = -h\dot{\theta}^2$. Dans cette expression, on peut sans doute écrire que $h = h_{pv} + h_a$ où l'on distingue la contribution de la liaison pivot h_{pv} de celle de l'air h_a . Le coefficient h_a est en relation de proportionnalité avec la viscosité de l'air dont la relation avec la pression P_a n'est pas linéaire même si elle peut l'être aux faibles pressions devant la pression atmosphérique. L'équation différentielle du mouvement du pendule est donc $\alpha m \ell^2 \ddot{\theta} + (h_{pv} + h_a)\dot{\theta} + (1 - \frac{\rho_a V}{m})mg\ell\theta = 0$ pour les petits angles. Les frottements étant, selon toute vraisemblance, modestes, on aura un régime pseudo-périodique amorti avec un temps caractéristique d'amortissement de la forme $\tau' = \frac{2\alpha m \ell^2}{h_{pv} + h_a}$. Comme dans l'autre étude, on peut imaginer faire le vide et avoir un nouveau temps caractéristique $\tau = \frac{2\alpha m \ell^2}{h_{pv}}$ puisque les frottements ne concernent que la liaison pivot.

On peut encore envisager une troisième méthode pour mesurer la pression de l'air. On fait tourner le pendule autour d'un axe vertical en régime permanent à la vitesse de rotation ω . On attend le régime permanent et on mesure l'angle du cône formé par le pendule. Dans le référentiel tournant, non galiléen, le pendule subit son poids (ou son poids apparent si l'on prend en compte la poussée d'ARCHIMÈDE), la tension mécanique qui le maintient en liaison avec le point O et la force d'inertie d'entraînement. Commençons par ne pas prendre en compte la poussée d'ARCHIMÈDE. Le poids est de norme mg , la tension de norme T . Le mouvement du pendule s'effectue selon un angle θ_0 par rapport à la verticale. La force d'inertie est de norme $m\omega^2 \ell \sin \theta_0$. En projetant la relation d'équilibre dans le référentiel tournant $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$, on peut écrire que $T \cos \theta_0 = mg$ et $T \sin \theta_0 = m\omega^2 \ell \sin \theta_0$. L'angle est donné par $\cos \theta_0 = \frac{g}{\omega^2 \ell}$. Ces résultats sont valables si on fait le vide comme dans le cas précédent. Si l'on ne fait pas le vide, alors $T \cos \theta_1 = (m - \rho_a V)g$ et $T \sin \theta_1 = m\omega^2 \ell \sin \theta_1$. On trouve un angle θ_1 donné par $\cos \theta_1 = (1 - \frac{\rho_a V}{m}) \frac{g}{\omega^2 \ell}$. Pour mesurer la pression de l'air, il faut arriver à mesurer les angles $\theta_1 = \theta_0 + \epsilon$ et θ_0 . On a donc $\cos \theta_1 = (1 - \frac{\rho_a V}{m}) \cos \theta_0$. En passant aux développements limités $\cos(\theta_0 + \epsilon) = \cos \theta_0 \cos \epsilon - \sin \theta_0 \sin \epsilon = \cos \theta_0 - \epsilon \sin \theta_0$. On a donc $\epsilon \sin \theta_0 \frac{\rho_a V}{m} \cos \theta_0$. La pression est donnée par : $P_a = \frac{m}{V} \epsilon \tan \theta_0 \frac{RT_a}{M_a}$.

Les méthodes proposées sont des méthodes de principe mais il ne sera pas facile de les mettre en œuvre parce que la poussée d'ARCHIMÈDE est environ 1 000 fois plus faible dans l'air que dans l'eau. Il faudra des instruments de grande qualité et obtenir un très bon vide pour faire l'expérience sans poussée d'ARCHIMÈDE.

26. James Webb Telescope

Réponses :

1. On confond le barycentre du système Soleil-Terre avec le centre du Soleil. On appelle r_1 la distance qui sépare le télescope du centre du Soleil et r_2 la distance du télescope au centre de la Terre. Comme on envisage que le satellite est situé derrière la Terre, cela signifie que $r_1 > r_2$. Si Ω est la vitesse angulaire orbitale de la Terre autour du Soleil, il est indispensable que le télescope possède la même vitesse pour toujours bien rester dans l'ombre de la Terre. Le centre de la Terre se situe à la distance $r_1 - r_2$ du centre du Soleil. En ne considérant que la force gravitationnelle, la relation de la Dynamique dans le référentiel héliocentrique galiléen appliquée à la Terre donne $-\frac{GM_S M_T}{(r_1 - r_2)^2} \vec{e}_r = -M_T \Omega^2 (r_1 - r_2) \vec{e}_r$. La vitesse angulaire orbitale de la Terre autour du Soleil est donnée par $\Omega^2 = \frac{GM_S}{(r_1 - r_2)^3}$. Si le satellite se situe derrière la Terre, il n'en subit pas moins la force gravitationnelle du Soleil et aussi celle de la Terre qui sont deux forces attractives. Pour rester en permanence sur l'axe Terre-Soleil comme nous l'avons supposé, le satellite doit lui aussi vérifier la relation de la Dynamique $-\frac{GM_S m}{r_1^2} \vec{e}_r - \frac{GM_T m}{r_2^2} \vec{e}_r = -m\Omega^2 r_1 \vec{e}_r$. On trouve ainsi une seconde expression de $\Omega^2 = \frac{GM_S}{r_1^3} + \frac{GM_T}{r_2^2 r_1}$. La situation du télescope est d'être positionné au voisinage du point de LAGRANGE L2 qui vérifie la relation des distances et masses suivante : $\frac{M_S}{(r_1 - r_2)^3} = \frac{M_S}{r_1^3} + \frac{M_T}{r_2^2 r_1}$. Les distances sont $r_1 = 150 \times 10^6$ km et $r_2 = 1,5 \times 10^6$ km. On peut aussi dire que le point L2 correspond à une situation d'équilibre dans le référentiel géocentrique tournant attaché qui est bien sûr non galiléen. Cet équilibre est traduit par la somme des deux forces gravitationnelles précédemment évoquées et par la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{i,ent} = -m\vec{a}_{ent} = m\Omega^2 r_1 \vec{e}_r$ souvent qualifiée de centrifuge. Cet équilibre n'est pas stable parce que si l'on imagine une petite augmentation de r_1 à Ω fixé, on voit que la force d'inertie d'entraînement augmente et que les forces gravitationnelles diminuent rapidement (r_2 augmente aussi), le télescope est plutôt éjecté vers l'extérieur. Au contraire si r_1 et donc r_2 diminuent, la force centrifuge diminue alors que les forces gravitationnelles augmentent fortement. Le télescope retombe sur Terre si l'on peut dire. Dans la proposition de l'énoncé, on se place implicitement dans le référentiel géocentrique qui tourne à Ω autour du Soleil dans la suite puisque la force autour d'un point d'équilibre est un développement perturbatif de la force d'équilibre qui au vu de l'énoncé est $\vec{F}_{eq} = \vec{0}$.

2. Pour faciliter l'écriture, on transforme les notations $\delta x \rightarrow x$ et de même pour les autres coordonnées. On applique la relation de la Dynamique dans le référentiel géocentrique tournant à Ω au tour du point d'équilibre. La seule force à prendre en compte est celle fournie par l'énoncé. Le satellite obéit à $m(\ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z) = 9m\Omega^2 x\vec{e}_x - 3m\Omega^2 y\vec{e}_y - 4m\Omega^2 z\vec{e}_z$. Cela donne trois équations différentielles $\ddot{x} - 9\Omega^2 x = 0$, $\ddot{y} + 3\Omega^2 y = 0$ et $\ddot{z} + \Omega^2 z = 0$. Les solutions de l'équation différentielle sont $y(t) = y_m \cos(\sqrt{3}\Omega t + \varphi_y)$ et $z(t) = z_m \cos(2\Omega t + \varphi_z)$ ce qui montre clairement que le mouvement sera borné sur une trajectoire non fermée du fait des pulsations différentes et non rationnelle pour l'une d'elle. Par contre sur l'axe Ox , on aura une solution $x(t) = \lambda \exp(-3\Omega t) + \mu \exp(3\Omega t)$. La solution en $\exp(3\Omega t)$ montre clairement la divergence de cette coordonnée au cours du temps. On peut dire que l'équilibre est stable dans le plan Oyz mais instable sur l'axe Ox . Toutes les constantes d'intégration sont obtenues à l'aide de conditions initiales qu'il faudrait préciser. Notons pour finir que la solution en $x(t)$ possède une existence que très éphémère parce que dès que x va augmenter nettement, la proposition de force perturbative $\delta \vec{f}$ ne sera plus valable du tout. Il faudrait alors faire une résolution numérique du problème sans approximation sur les forces gravitationnelles pour obtenir le tracé de la trajectoire. Heureusement pour le télescope James Webb, celui-ci possède des moteurs qui vont lui permettre de corriger en permanence sa trajectoire pour rester au voisinage du point de LAGRANGE L2.

27. Glaçon dans un verre d'eau

Réponses :

1. L'eau situé loin du glaçon est à 10°C alors qu'à la surface de celui-ci, elle va être à 0°C . Il va donc s'installer une densité de courant de transfert thermique par conduction dirigée de l'extérieur vers le glaçon. En régime indépendant du temps, la puissance que recevra le glaçon le fera fondre progressivement. Le gradient de température va dépendre du rayon $R(t)$ du glaçon, il va évoluer au cours du temps. On va supposer que cela ne remet pas en cause l'hypothèse de régime stationnaire. Il sera indispensable d'étudier l'évolution de $R(t)$ en considérant la fonte d'une petite couche de glace pendant une durée infinitésimale dt .
2. On commence par raisonner pour une couche d'eau située entre r et $r + dr$ avec $r > R(t)$. Un bilan de puissance en régime indépendant permet de montrer que $j_{cond} 4\pi r^2 = \text{Cte}$. Avec la loi de FOURIER, on a $j_{cond} = -\lambda \frac{dT}{dr}$. Ce bilan énergétique permet de mettre en place la loi qui permettra de trouver l'évolution de la température dans l'eau $T(r)$. On peut aussi partir de l'équation de diffusion thermique $\Delta T = \frac{\rho_{eau} c_{eau}}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$. En utilisant le laplacien fourni par l'énoncé ou le raisonnement local, on arrive à la même conclusion : $r^2 \frac{dT}{dr} = \text{Cte}'$. La loi donnant la température dans l'eau est $T(r) = \frac{A}{r} + B$. On utilise les conditions aux limites $r \rightarrow \infty$ pour trouver que $B = T_1$ et $r = R(t)$ avec $T = T_0$. On en déduit que $T = T_1 - (T_1 - T_0) \frac{R(t)}{r}$. La densité de courant de transfert thermique est $\vec{j}_{cond} = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{e}_r = -\lambda(T_1 - T_0) \frac{R(t)}{r^2} \vec{e}_r$. La puissance entrante dans le glaçon est $P = -j_{cond} 4\pi r^2 = 4\pi\lambda(T_1 - T_0)R(t)$. Maintenant, on dit que pendant une durée dt , le glaçon voit son rayon diminuer de $-dR(t)$ et donc la masse de glace $-\mu 4\pi R^2(t) dR(t)$ ($dR(t) < 0$). On a donc $-\mu 4\pi R^2(t) dR(t) L_f = 4\pi\lambda(T_1 - T_0)R(t) dt$. On a donc l'équation différentielle $R(t) dR = -\frac{\lambda(T_1 - T_0)}{\mu L_f} dt$. Le rayon évolue selon $R^2(t) = R_0^2 - \frac{2\lambda(T_1 - T_0)}{\mu L_f} t$.

Le temps de fonte du glaçon est $t_{\text{fonte}} = \frac{R_0^2 \mu L_f}{2\lambda(T_1 - T_0)}$. On trouve $t_{\text{fonte}} \simeq 40 \text{ min}$.

28. Fil électrique résistif

Réponses :

1. Le problème est considéré comme invariant par translation sur l'axe Oz qui est l'axe du cylindre ainsi que par rotation d'angle θ autour de celui-ci. Le champ électrique dans le fil est donc $\vec{E} = \frac{U}{\ell} \vec{e}_z$ et le vecteur densité de courant obéit à la loi d'OHM $\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}$. On a donc une loi linéaire entre tension et intensité où la résistance électrique est $R_1 = \rho_1 \frac{\ell}{\pi a^2}$. Du fait de l'effet JOULE, la température du fil électrique n'est pas T_0 mais $T_1 > T_0$. Compte tenu de la taille du fil, on supposera que la température est homogène à l'intérieur du fil et ne dépend pas de r . Si cela n'était pas le cas, il faudrait prendre en compte la conductivité thermique du cuivre $\lambda = 380 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Considérer la température uniforme revient à supposer celle-ci infinie. Comme la résistivité du cuivre dépend de la température, on a $\rho(T_1) = \rho_0 \exp \alpha(T_1 - T_0)$ où ρ_0 est la résistivité thermique à la température T_0 . Pour connaître la température, il faut traduire l'équilibre thermique : toute la puissance produite par effet JOULE doit être évacuée par convection au niveau de la surface latérale du fil électrique. On a donc $h 2\pi a \ell (T_1 - T_0) = \rho_0 \exp \alpha(T_1 - T_0) \frac{\ell}{\pi a^2} I^2$. La solution de cette équation est numérique, on pose $\theta = T_1 - T_0$. Avec les valeurs numériques fournies pour le fil, on en déduit que $\theta = \frac{\rho_0 I^2}{2\pi^2 a^3 h} \exp \alpha \theta$ qui devient $\theta = 8,6 \times 10^{-2} \exp 10^{-7} \theta$. On peut aussi avoir une

approche tenant compte des valeurs numériques que l'on doit prendre en compte. Si l'on se place à la température T_0 , on a une résistance électrique $R_0 = \rho_0 \frac{\ell}{\pi a^2} = 5 \times 10^{-3} \Omega$, la puissance dissipée par effet JOULE est $P_0 = R_0 I^2 = 5 \times 10^{-3} \text{ W}$. Cette puissance est faible, on en déduit que le fil ne va quasiment pas monter en température. On peut donc linéariser la relation donnant θ en posant $\beta = \frac{\rho_0 I^2}{2\pi^2 a^3 h}$, on obtient $\theta = \beta \exp \alpha \theta$ qui peut s'écrire $\theta = \beta(1 + \alpha \theta)$ par un développement limité à l'ordre 1. Cela permet de trouver l'écart de température $\theta = \frac{\beta}{1 - \alpha \beta} \simeq 0,1^\circ \text{C}$. On a donc une loi fonctionnelle pour la résistance

qui peut être assimilée à $U = \frac{\rho_0 \ell}{\pi a^2} I$.

29. Sursauts radio rapides

Réponses : nous savons que dans un plasma, les ondes électromagnétiques se propagent à condition de posséder une fréquence supérieure à la fréquence spécifique du plasma. De plus, nous savons que la vitesse de phase et que la vitesse de groupe dépendent de la fréquence. Cela peut expliquer l'arrivée en décalé au cours du temps des différents paquets d'onde du sursaut radio rapide. Nous commencerons par vérifier que les fréquences détectées sont bien supérieures à f_p la fréquence plasma de l'Univers. Nous savons que sous la stimulation du champ électrique et du champ magnétique d'une onde, les charges du plasma sont mises en mouvement. Nous avons montré que l'effet de la force $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ est négligeable devant celui de la force $q\vec{E}$ à condition que la charge q soit non relativiste. Nous négligerons toute force gravitationnelle devant $q\vec{E}$ ainsi que les forces de frottements consécutives aux chocs avec les entités du milieu. Ceci est plutôt justifié étant donné la très faible densité de particules. Le mouvement des électrons est à l'origine d'une densité volumique de courant, celle des ions assurant la neutralité du milieu sera négligée du fait de la masse des ions très importante par rapport aux électrons. L'équation du mouvement des électrons est $m \frac{d\vec{v}}{dt} = m(i\omega)\vec{v} = -e\vec{E}$. On note n la densité d'électrons, on a une densité volumique de courant $\vec{j} = \frac{ne^2}{m(i\omega)}\vec{E} = \gamma\vec{E}$. On suppose que l'onde est transversale ou que la perturbation de l'onde électromagnétique est modérée de telle sorte que la neutralité locale est assurée. On en déduit les équations de MAXWELL dans le contexte du plasma : $\text{div } \vec{E} = 0$, $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\text{div } \vec{B} = 0$, $\text{rot } \vec{B} = \mu_0(\gamma\vec{E} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$. En utilisant $\text{rot } \text{rot } \vec{E} = -\text{grad } \text{div } \vec{E} - \Delta \vec{E}$, on arrive en combinant les équations de MAXWELL à l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique : $\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$. On teste une forme onde plane polarisée rectilignement $\vec{E} = \vec{e}_x E_0 \exp i(\omega t - kz)$, on obtient la relation de dispersion de type KLEIN-GORDON : $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ à condition de poser la pulsation de plasma $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}$. La fréquence plasma est $f_p = \frac{1}{2\pi} \omega_p$. Avec $n = 0,2 \text{ m}^{-3}$, on trouve $f_p = 4 \text{ Hz}$. Il y a propagation pour toutes les fréquences $f > f_p$, ce qui montre que le modèle du plasma est acceptable pour les ondes du sursaut radio parce que leurs fréquences sont supérieures, même très supérieures à la fréquence plasma. On a $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{f_p^2}{f^2}}}$ et en différentiant la relation

de dispersion, on obtient $v_g v_\varphi = c^2$. La vitesse de groupe est $v_g = c \sqrt{1 - \frac{f_p^2}{f^2}}$. Le signal reçu est constitué par une succession de paquets d'ondes possédant des fréquences caractéristiques autour de 1 GHz. La durée Δt_1 correspondra à l'arrivée sur Terre du paquet d'ondes de fréquence $f_1 = 1,50 \text{ GHz}$ est telle que $\Delta t_1 = \frac{L}{v_g(f_1)}$ où L est la distance de la source du rayonnement à la Terre. On note pour la fréquence $f_2 = 1,25 \text{ GHz}$, la durée $\Delta t_2 = \frac{L}{v_g(f_2)}$. Le décalage temporel à l'arrivée est $\tau = \Delta t_2 - \Delta t_1 \simeq 0,3 \text{ s}$ d'après l'image fournie. Comme

$f \gg f_p$, on peut faire un développement limité de chaque vitesse de groupe selon $v_g(f) = c(1 - \frac{1}{2} \frac{f_p^2}{f^2})$. On peut en déduire l'expression du temps de décalage à l'arrivée $\tau = \frac{L}{2c} f_p^2 (\frac{1}{f_2^2} - \frac{1}{f_1^2})$. La distance parcourue par le sursaut radio est donc $L = \frac{2c\tau f_1^2 f_2^2}{f_p^2(f_1^2 - f_2^2)}$. On trouve numériquement $L = 5,8 \times 10^{25} \text{ m}$. Cette distance n'est pas très parlante dans cette unité, nous allons utiliser l'année-lumière qui est la distance par la lumière pendant une année terrestre $1 \text{ al} = 9,5 \times 10^{15} \text{ m}$. On a donc $L \simeq 6$ milliards d'années-lumière. L'âge de l'Univers étant estimé à 14 milliards d'années, on peut dire que le sursaut radio a voyagé une bonne partie de l'âge de l'Univers avant de nous parvenir.

30. Radiomètre de Crookes

Réponses :

1. Pour comprendre le problème, il faut comprendre que le faisceau lumineux transporte de la quantité de mouvement. C'est plus simple en pensant aux photons dont la quantité de mouvement initiale est $\vec{p} = \frac{h}{\lambda} \vec{e}_x$. Un photon qui arrive sur la face absorbante subit une force de la part du miroir qui modifie sa quantité de mouvement. Par le principe des actions réciproques, cela signifie que ce photon a exercé une force sur le miroir. Sur la face réfléchissante, le photon subit une plus importante variation de quantité de mouvement. Si on prend l'exemple de la situation où $\theta = 0$ alors le photon absorbé voit sa quantité de mouvement varier de $-\frac{h}{\lambda} \vec{e}_x$ alors que pour le photon réfléchi, c'est $-\frac{2h}{\lambda} \vec{e}_x$. La force exercée est donc plus

importante sur le miroir qui possède sa face réfléchissante éclairée. Le bras de levier pour chaque miroir est le même : ℓ . Par conséquent, le moment positif de la face réfléchissante est plus grand que la valeur absolue du moment négatif pour la face absorbante. Cela implique que le moment total est positif, la rotation s'effectue bien dans le sens de l'angle θ défini sur le schéma. Même si nous avons raisonné pour $\theta = 0$, ce que nous avons dit reste valable jusqu'à $\theta = \pi/2$. Ensuite, les rôles des miroirs sont intervertis et la rotation toujours favorisée dans le sens $\theta > 0$.

- Le champ magnétique de l'onde est donné par la relation de structure $\vec{B} = \frac{E_0}{c} \vec{e}_z \cos(\omega - kx)$. On en déduit le vecteur de POYNTING $\vec{\Pi} = \vec{e}_x \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx)$. On raisonne en moyenne temporelle par rapport à la fréquence des ondes lumineuses : $\langle \vec{\Pi} \rangle_t = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2} \vec{e}_x$. On note \vec{e}_r le vecteur unitaire de la direction radiale associée à θ et \vec{e}_θ le vecteur unitaire orthoradial. La puissance moyenne reçue au niveau de chaque miroir est $P_{moy} = \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot s \vec{e}_\theta = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2} \cos \theta$. On note $\frac{dN}{dt}$ le nombre de photons d'énergie $\frac{hc}{\lambda}$ arrivant sur chaque miroir. On a donc $P_{moy} = \frac{dN}{dt} \frac{hc}{\lambda}$, cela permet de déterminer $\frac{dN}{dt} = \frac{\lambda}{h} \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} s \cos \theta$. Sur la face absorbante, la force exercée par le rayonnement sur le miroir est $\vec{F}_a = \frac{dN}{dt} (\frac{h}{\lambda} \vec{e}_x - \vec{0})$. Seule la composante projetée sur \vec{e}_θ possède un moment avec le bras de levier ℓ , on a donc un moment résultant $\mathcal{M}_a = -\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} s \ell \cos^2 \theta$. Pour le miroir qui présente sa face réfléchissante au rayonnement, la force est $\vec{F}_r = \frac{dN}{dt} (\frac{h}{\lambda} \vec{e}_x - \vec{p}')$ où \vec{p}' est le vecteur quantité de mouvement du photon après la réflexion. La réflexion suit la loi de DESCARTES. Comme l'angle d'incidence est θ , ce sera aussi l'angle de réflexion en valeur absolue. Comme seule la composante sur \vec{e}_θ va posséder un moment positif ici, on trouve une contribution double de la précédente : $\mathcal{M}_r = \varepsilon_0 E_0^2 s \ell \cos^2 \theta$. Il faut effectuer la somme des moments des forces mais comme le poids est sur l'axe vertical par équilibre indispensable de la structure et que la liaison pivot est parfaite, on n'aura que la somme des moments précédents. Le théorème du moment cinétique est donc $J\ddot{\theta} = \mathcal{M}_a + \mathcal{M}_r = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} s \ell \cos^2 \theta$. Si l'on effectue la moyenne sur un tour : $\langle \ddot{\theta} \rangle_{\text{tour}} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4J} s \ell$.

31. L'atome d'hydrogène

Réponses :

- La fonction d'onde proposée est la fonction d'onde spatiale qui dépend de l'angle φ repérant la position de l'électron sur le cercle. Pour un électron d'énergie E , la fonction d'onde est $\Psi(\varphi, t) = \exp(-i\frac{E}{\hbar}t) \frac{1}{N} \exp(ik\varphi)$ où k est sans dimension, analogue du vecteur d'onde pour des ondes se déplaçant dans un espace faisant intervenir une coordonnée linéaire comme x par exemple. La densité de probabilité de présence de l'électron à une position comprise entre φ et $d\varphi$ est donnée par $dP = |\Psi|^2 d\varphi$. Comme $|\Psi|^2 = \frac{1}{N^2}$, on constate que cette probabilité est uniforme, indépendante de φ . L'électron occupe de façon équiprobable toutes les positions possibles sur le cercle. En appliquant la condition de normalisation à la loi de probabilité, on trouve que $1 = \frac{1}{N^2} 2\pi$ d'où $N = \sqrt{2\pi}$. La fonction d'onde doit aussi vérifier la périodicité de 2π , cela signifie que $\psi(\varphi + 2\pi) = \psi(\varphi)$. Cela provoque alors la condition $\exp(ik2\pi) = 1$ d'où la condition $k2\pi = 2\pi n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ puisqu'une valeur négative indiquerait le même état mais avec un sens de parcours du cercle dans l'autre sens. On peut donc retenir la fonction d'onde $\Psi = \exp(-i\frac{E_n}{\hbar}t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(in\varphi)$. On peut trouver le niveau d'énergie associé à cet état stationnaire quantique en écrivant l'équation de SCHRÖDINGER spatiale : $-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi + V\psi = E_n\psi$ avec $V = 0$ puisque le quanton est libre sur le cercle. Ici, si on note R_n le rayon du cercle sur lequel se déplace l'électron, le laplacien est $\Delta\psi = \frac{1}{R_n^2} \frac{d^2\psi}{d\varphi^2} = -\frac{n^2}{R_n^2} \psi$. On en déduit que : $E_n = n^2 \frac{\hbar^2}{2mR_n^2}$.
- L'électron sur son orbite circulaire possède un moment cinétique orbital défini par $\vec{L} = R_n \vec{e}_r \wedge m v \vec{e}_\theta = m R_n v \vec{e}_z$. À ce moment cinétique est associé un moment magnétique puisque la charge $-e$ se déplaçant sur un cercle correspond à une boucle de courant d'intensité $i = \frac{ev}{2\pi R_n}$. On a donc un moment magnétique $\vec{M} = -\frac{e}{2m} \vec{L}$. Si on applique le théorème du moment cinétique, on a $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \wedge \vec{B}_0 = \frac{e\vec{B}_0}{2m} \wedge \vec{L}$. Cette équation est typique du mouvement de **précession** du moment cinétique autour de l'axe porté par \vec{B}_0 à la vitesse de rotation $\frac{e\vec{B}_0}{2m}$. Cette approche est pour l'instant purement classique mais en Mécanique quantique le moment cinétique ainsi que sa projection sur l'axe de \vec{B}_0 sont quantifiés. Les choses ne sont pas aussi simples. De plus, l'électron possède un moment magnétique de spin qui intervient aussi en s'ajoutant au moment magnétique orbital.
- On peut retenir un modèle avec quantification sur deux niveaux d'énergie $\pm MB_0$, on se place alors dans le cas de l'effet ZEEMAN normal qui voit le dédoublement d'un niveau d'énergie. L'effet ZEEMAN anormal présente plus de deux niveaux d'énergie. Revenons à la situation des deux niveaux d'énergie pour reprendre le cours sur le sujet avec des lois de probabilités $p_1 = \frac{1}{2\cosh u} \exp u$ où $u = \frac{MB_0}{k_B T}$.

et $p_2 = \frac{1}{2\cosh u} \exp -u$. On trouve une énergie moyenne $\overline{E} = -MB_0 \tanh u = -MB_0 \tanh \frac{MB_0}{k_B T}$. Si on raisonne pour une mole d'atome d'hydrogène, cela donne $\overline{E}_{mol} = -\mathcal{N}_A MB_0 \tanh u$. On peut alors calculer la capacité thermique molaire $C_{V,mol} = \frac{d\overline{E}_{mol}}{dT} = \frac{d\overline{E}_{mol}}{du} \frac{du}{dT}$. On trouve $C_{V,mol} = Ru^2(1 - \tanh^2 u)$ qui peut encore s'écrire $C_{V,mol} = R \frac{u^2}{\cosh^2 u}$. Pour les niveaux d'énergie élevés, on peut alors considérer l'énergie comme variant continûment et avoir une approche classique du problème. On note θ l'angle des coordonnées sphériques compté à partir de l'axe d'orientation de \vec{B}_0 et φ le second angle des coordonnées sphériques en rotation autour de l'axe de \vec{B}_0 (invariance par rapport à φ). L'énergie magnétique d'un dipôle magnétique présentant l'angle θ est $-\vec{M} \cdot \vec{B}_0 = -MB_0 \cos \theta$. La probabilité de trouver un dipôle dans cet état d'énergie est liée à l'orientation de \vec{M} et donc à l'angle solide $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$. La loi de probabilité est de la forme $dP = \frac{1}{Z} (\exp -\frac{MB_0}{k_B T} \cos \theta) \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{1}{Z} (\exp -u \cos \theta) \sin \theta d\theta d\varphi$ où Z est la fonction de partition qui permet la normalisation de la loi de probabilité $1 = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} dP$. On a $Z = \frac{2\pi}{u} \int_0^{\pi} (\exp u \cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2\pi}{u} [-\exp u \cos \theta]_0^{\pi} = \frac{2\pi}{u} 2 \sinh u$. La fonction de partition est donc $Z = 4\pi \frac{\sinh u}{u}$. L'énergie moyenne est $\overline{E} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$ avec $\beta = \frac{1}{k_B T} = \frac{u}{MB_0}$. Après calcul, on trouve $\overline{E}_{mol} = RT(1 - u \coth u)$ avec $u = \frac{MB_0}{k_B T}$. En dérivant par rapport à la température cette énergie, on trouve la capacité thermique : $C_{V,mol} = R(1 - (\frac{u}{\sinh u})^2)$.

32. Peut-on mesurer l'épaisseur et l'indice d'une lame de verre avec un Michelson ?

Réponses :

Si l'on utilise un interféromètre de MICHELSON en lame d'air, on sait que les interférences sont localisées à l'infini ou projetées dans le plan focal image d'une lentille convergente. La différence de marche pour des rayons parallèles d'incidence i est $\delta = 2e \cos i$ où e est l'épaisseur de la lame d'air. Dans une interférences de ce type à deux ondes en situation monochromatique, l'intensité obtenue est de la forme $I = 2I_0(1 + \frac{2\pi 2e \cos i}{\lambda})$. L'intensité est fixée pour une valeur de i donnée, les franges d'interférences sont des anneaux. Dans l'approximation des petits angles qui assurent le stigmatisme de la lentille convergente de projection, on peut écrire que $\cos i = 1 - \frac{i^2}{2}$ et que $\tan i \simeq i = \frac{r}{f}$. Pour un ordre p donné, le rayon de l'anneau correspondant est $r = f \sqrt{2 - \frac{p\lambda}{e}}$. Si $p \in \mathbb{N}$, alors on a un anneau brillant. Le cas du contact optique est particulier puisque c'est la situation où $e = 0$. La différence de marche est nulle et, par conséquent, la condition $\delta = 2e \cos i = p\lambda$ conduit à $p = 0 \forall i$. Tout le disque éclairé (on suppose que les miroirs sont des disques) est donc une seule et même frange brillante. Ce moment particulier est repérable expérimentalement puisque d'une situation à anneaux, on voit, en rapprochant du contact optique, leur nombre diminuer dans l'image jusqu'à ce qu'il ne se forme plus qu'un disque homogène en terme d'éclairement maximal. Imaginons que l'on place après avoir positionné le miroir mobile M_1 au contact optique, une lame de verre d'indice n et d'épaisseur e parallèlement au plan du miroir sur le chemin allant de la séparatrice au miroir M_1 . On augmente alors la différence de marche de $2(n-1)e$. On doit voir des anneaux puisque la différence de marche n'est plus nulle. Si on veut retrouver le contact optique, il faut rapprocher le miroir mobile M_1 de la séparatrice de la quantité ajoutée. Si le positionnement de M_1 était x_0 sur l'échelle repère présente sur l'interféromètre au premier contact optique, on aura un second positionnement à $x_1 < x_0$ (si x croît lorsque l'on s'éloigne de la séparatrice) tel que $x_0 - x_1 = 2(n-1)e$. Le repérage de x_0 et de x_1 nous fournit une première relation entre e et n mais il ne permet pas la détermination de n et de e séparément. On peut imaginer utiliser un pied à coulisse pour mesurer e et en déduire donc n grâce à l'interféromètre mais ce n'était vraisemblablement pas l'orientation de la question posée. Le repérage du contact optique en lumière monochromatique est tout à fait réalisable mais on a beaucoup plus de sensibilité en utilisant une source de lumière blanche. En effet l'expression de l'intensité lumineuse est de la forme $I = 2I_0(1 + \mathcal{C}(\Delta\lambda) \cos \frac{2\pi 2e \cos i}{\lambda_0})$ avec λ_0 la longueur d'onde importante du spectre de la lumière blanche et $\Delta\lambda$ sa largeur spectrale et \mathcal{C} la fonction de contraste. Comme la source blanche est très large sur le plan spectral, la fonction de contraste décroît très vite autour du contact optique. On ne repérera des franges colorées que très près du contact optique, cela permettra d'être beaucoup plus précis pour sa détermination.

Nous allons utiliser une variante de la première méthode pour obtenir une seconde relation entre n et e . À partir de la position précédente, donnons un petit angle θ que l'on suppose mesuré avec précision, à la lame de verre. Cela modifie la différence de marche comme nous allons le voir après le calcul. Ainsi, il faudra à nouveau déplacer M_1 pour retrouver le contact optique. Le calcul de la différence de marche est réalisé à partir du schéma de la figure 1.

Nous allons calculer la moitié de la différence de marche (aller). C'est $\delta_{1/2} = n(AB) - (AC)$ avec $(AB) = \frac{e}{\cos \varepsilon}$ et $(AC) = AB \cos(\theta - \varepsilon)$. On en déduit que $\delta_{1/2} = (AB)(n - \cos(\theta - \varepsilon)) = \frac{e}{\cos \varepsilon}(n - \cos(\theta - \varepsilon))$. Il ne faut pas oublier que θ et ε sont liés par la loi de la réfraction de DESCARTES $\sin \theta = n \sin \varepsilon$. Comme nous

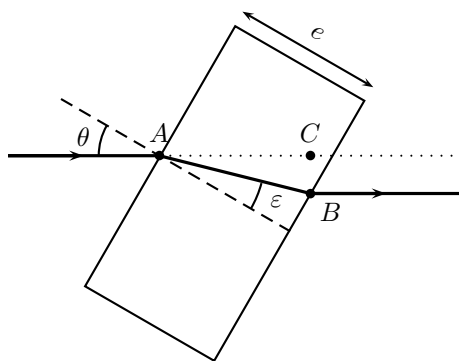


FIGURE 1 – Rotation d'un petit angle de la lame de verre

supposons l'angle θ petit, il en sera forcément de même de ε . On peut donc écrire que $\theta \simeq n\varepsilon$. On obtient alors $\delta_{1/2} = (n - \cos(\frac{n-1}{n}\theta)) \frac{e}{\cos \frac{\theta}{n}}$. On effectue les développements limités à l'ordre 2 de chacun des cosinus. Cela donne $\delta_{1/2} = (n - 1 + \frac{(n-1)^2\theta^2}{2n^2})e(1 + \frac{\theta^2}{2n^2})$. Après calcul, on obtient $\delta_{1/2} = (n-1)e + \frac{n-1}{2n}\theta^2 e$. La nouvelle différence de marche est $\delta' = 2(n-1)e + \frac{n-1}{n}\theta^2 e$. On constate donc qu'il faut à nouveau rapprocher le miroir M_2 de la lame séparatrice pour compenser l'augmentation de la différence de marche. On obtient une abscisse $x_2 < x_1$ telle que : $x_1 - x_2 = \frac{n-1}{n}e\theta^2$. On peut proposer le cheminement suivant pour la détermination des caractéristiques de la lame de verre. On a $x_1 - x_2 = \frac{n-1}{n}e\theta^2 = \frac{x_0 - x_1}{2} \frac{\theta^2}{n}$. L'indice de réfraction est donné par $n = \frac{x_0 - x_1}{2(x_1 - x_2)}\theta^2$ et ensuite l'épaisseur de la lame $e = \frac{x_0 - x_1}{2(n-1)}$.

33. Cémentation du cuivre

Réponses :

- La compacité représente le volume occupé par les atomes de cuivre rapporté au volume de la maille. On a $8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 4$ atomes par maille de volume total $V_a = 4 \times \frac{4}{3}\pi R^3$ où R est le rayon de l'atome. Le volume de la maille est $V_m = a^3$ si a est le paramètre de la maille. La condition de contact des atomes se situe sur la diagonale d'une face, on a donc $4R = a\sqrt{2}$. La compacité est donc $C = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 0,74$.
- Il y a 8 sites tétraédriques dans chaque maille avec un centre placé au centre de chaque petit cube de côté $a/2$. Sur la grande diagonale de ce petit cube, on a $\frac{a}{2}\sqrt{3} = 2(R + r_t)$. Toujours avec la condition $a = 2\sqrt{2}R$, on en déduit que $r_t = (\sqrt{\frac{3}{2}} - 1)R$. Pour les sites octaédriques, on en dénombre 1 au milieu de chaque arête partagé entre 4 mailles et 1 au centre. On a donc $12 \times \frac{1}{4} + 1 = 4$ sites en propre dans la maille. Sur une arête, on a donc $2(R + r_o) = a = 2\sqrt{2}R$ d'où la relation $r_o = (\sqrt{2} - 1)R$. Les sites octaédriques sont plus grands que les sites tétraédriques. Pour faire de l'insertion, il faut donc des atomes qui ont un rayon plus faible qu'environ 40% du rayon du cuivre.
- Le laiton est composé de cuivre et de zinc. Ces deux atomes sont proches dans la classification périodique, il n'y a pas de raison que les rayons atomiques du cuivre et du zinc soient très différents. On ne peut avoir que des alliages de substitution.
- On a $\text{Cu}^{2+} + \text{Fe}_s \rightleftharpoons \text{Cu}_s + \text{Fe}^{2+}$. On écrit la loi de NERNST pour chacun des deux couples, à l'équilibre il y a égalité des potentiels. On obtient donc la constante d'équilibre : $K^\circ = 10^{\frac{E_2^\circ - E_1^\circ}{0,03}} = 10^{26}$. On constate que $K^\circ \gg 1$, la réaction est très favorisée sur le plan thermodynamique, on peut la considérer comme totale. Des informations sur sa cinétique sont encore nécessaires pour savoir si elle s'effectuera rapidement ou non.
- La masse de cuivre représente $n_{\text{Cu}} = \frac{m_{\text{Cu}}}{M_{\text{Cu}}} = 15,8$ mol. La stoechiométrie de la réaction indique qu'il faut $n_{\text{Fe}} = 15,8$ mol de fer et donc une masse $m_{\text{Fe}} = n_{\text{Fe}}M_{\text{Fe}} = 0,88$ kg de fer.
- Les courbes intensité-potential sont fournies à la figure 2. Il faut calculer le potentiel de NERNST pour le couple du cuivre dans un premier temps car pour le fer, on a un potentiel qui n'est pas défini tant qu'il n'y a pas d'ions fer formés. En appliquant la loi de NERNST avec 1% seulement des ions cuivre consommés, on trouve $E_2 = 0,32$ V et $E'_2 = 0,26$ V pour une concentration de $0,002 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ d'ions cuivre. Pour le fer, c'est le contraire, on aura une concentration en ions Fe^{2+} de $0,002 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ au départ puis quasiment

de $0,2 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ à la fin. On va donc pouvoir écrire que $E_1 = -0,52 \text{ V}$ et ensuite $E'_1 = -0,46 \text{ V}$. Il n'y a pas de palier de diffusion pour le fer car le métal constitue l'électrode, il n'y a pas de problème de fer disponible sauf à considérer des détériorations de la surface. Pour le cuivre qui est un ion en solution, la diffusion jusqu'à l'endroit de la réduction (cathode) va intervenir. Le palier de diffusion est d'une hauteur a priori proportionnelle à la concentration de l'ion dans la solution. Dans la représentation proposée, on ne prend pas en compte le mur du solvant car on ne possède aucune information sur les surtensions des couples de l'eau sur le fer.

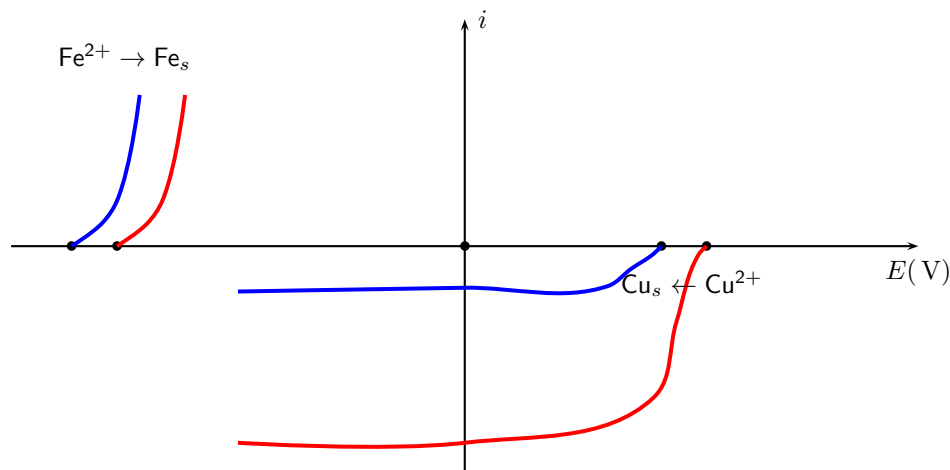


FIGURE 2 – Courbes intensité-potentiel de la cémentation du cuivre sur le fer

5 Situation-problèmes

34. Régulation thermique du grand dauphin

Réponses :

On comprend que la ration journalière sert à compenser les pertes thermiques avec l'eau qui l'entoure puisque celle-ci est sans doute vers 18°C . Elle sert aussi à lui donner les forces pour se déplacer mais nous ne pouvons pas estimer facilement ce poste de dépense énergétique. On le considérera comme assez inférieur à celui concernant le maintien de la température corporelle. Avec la donnée fournie du pouvoir énergétique du poisson ingurgité par le dauphin, on en déduit qu'il entre dans le système constitué par ce grand dauphin une énergie $R_a = 15 \times 4,18 \times 10^6 \text{ J}$. On trouve que $R_a = 6,3 \times 10^7 \text{ J}$.

On peut intuitivement comprendre que la conductivité thermique de la couche de graisse sera importante pour évaluer la puissance que perd le dauphin au profit de l'eau de l'océan. Plus elle sera faible, plus le dauphin sera bien isolé de l'extérieur et moins il perdra d'énergie. De plus, il est aussi compréhensible d'affirmer que plus l'écart de température ΔT entre le dauphin (36°C) et l'eau sera important, plus la puissance sera élevée. On peut estimer la température de l'eau de mer à 18°C et retenir un écart de température $\Delta T = 18 \text{ K} = 18^\circ\text{C}$ puisqu'il s'agit d'une différence de température. D'autre part, il est facile d'imaginer que plus la couche de graisse sera épaisse, moins la puissance perdue par le dauphin sera importante. On peut donc proposer une puissance perdue proportionnelle à λ_g , proportionnelle à ΔT et inversement proportionnelle à l'épaisseur e . On écrit donc que $P = \alpha \lambda_g \frac{\Delta T}{e}$. Un peu d'analyse dimensionnelle permet de voir que le paramètre α est une surface en m^2 . Les pertes thermiques se font à travers l'interface entre la peau du dauphin et l'eau de mer. La surface à prendre en compte est donc la surface enveloppe du dauphin que nous noterons S_e . Cette surface est une surface fermée qui définit le volume du dauphin. Il nous faut maintenant modéliser le dauphin pour pouvoir évaluer cette surface. Un modèle raisonnable est celui d'un cylindre de rayon R et de hauteur h . La surface latérale est $2\pi Rh$, elle est complétée par les deux surfaces en forme de disque présentes aux deux extrémités du dauphin, chacune d'expression πR^2 . On a donc $S_e = 2\pi R(h + R)$. La puissance perdue par le dauphin est donc $P_{th} = \lambda_g \frac{\Delta T}{e} 2\pi R(h + R)$. Si l'on note Δt la durée de calcul, c'est-à-dire un jour pour comparer à l'énergie apportée par la ration journalière, l'énergie perdue est donc $E_{th} = \lambda_g \frac{\Delta T}{e} 2\pi R(h + R) \Delta t$. On écrit l'égalité $E_{th} = R_a$ pour que le dauphin puisse rester en état stationnaire, en clair, qu'il puisse maintenir sa température corporelle.

Il faut donc estimer la valeur de la surface corporelle du dauphin. On peut aisément la situer à l'ordre du mètre carré mais nous allons essayer de l'estimer un peu plus précisément. Nous connaissons la taille du dauphin, on prendra donc $h = 3 \text{ m}$. Pour estimer son rayon R , on utilisera la donnée de sa masse. On peut situer la masse volumique du dauphin comme voisine de celle de l'eau. Elle n'est ni beaucoup plus grande, il aurait beaucoup de mal à rester en surface, elle n'est ni beaucoup plus petite, il aurait du mal à plonger un peu en profondeur. Si $\mu \simeq 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ est la masse volumique retenue, nous avons $m = \mu V = \mu \pi R^2 h$. On peut donc écrire que $R = \sqrt{\frac{m}{\mu \pi h}}$. On trouve $R = 18 \text{ cm}$ et donc un diamètre de 36 cm pour le dauphin. Cette valeur peut paraître petite mais il ne faut pas oublier que le dauphin présente des endroits de son corps beaucoup plus larges mais aussi d'autres beaucoup plus fins. La valeur trouvée paraît être un bon compromis.

Il ne reste plus qu'à écrire que $\lambda_g \frac{\Delta T}{e} 2\pi R(h + R)\Delta t = R_a$ et en déduire que $e = \frac{\lambda_g \Delta T S_c \Delta t}{R_a}$. L'application numérique conduit à $e = 1,8 \text{ cm}$. Cette valeur de l'épaisseur doit être un peu majorée puisque le dauphin doit utiliser une partie de sa ration journalière pour se déplacer et donc jouer comme le dauphin le fait souvent. On proposera donc une épaisseur $e = 2 \text{ cm}$ pour conclure. Cette valeur paraît tout à fait raisonnable.

35. Matelas de réception

Réponses :

Grâce à la photographie de la façade de la maison, on peut évaluer la hauteur de chute. Nous allons étudier uniquement le mouvement du centre d'inertie G de la jeune fille. Celui-ci doit passer au-dessus de la barrière du balcon. Comme le balcon est situé au second étage, on peut estimer $h = 6 \text{ m}$. La vitesse initiale du centre d'inertie sera considérée comme nulle : il est rare que la personne saute avec entrain... Elle le fera plutôt avec une certaine appréhension. Pendant le mouvement de chute, on négligera toute autre force que la pesanteur. Il va être très important de déterminer la vitesse v_0 du centre d'inertie de la jeune fille au moment de son arrivée sur le matelas. C'est la valeur de cette vitesse qui va fixer le degré d'écrasement du matelas et, par conséquent, la valeur de la décélération a subie par la jeune fille du fait du matelas. Afin de simplifier l'étude, nous proposerons de considérer que la force exercée par le matelas sur la jeune fille est constante et donc que la décélération a qui en résulte est aussi constante.

On étudie le mouvement de chute de la jeune fille dans le référentiel terrestre \mathcal{R} considéré comme galiléen. Puisque la vitesse initiale du centre d'inertie est nulle, le mouvement de G sera vertical. On choisit d'utiliser un axe Oz orienté vers le bas, l'origine O étant placée au sommet de la trajectoire. Le principe fondamental de la Dynamique permet d'écrire que $m\vec{a}_{G/\mathcal{R}} = m\vec{g} = mg\vec{e}_z$ puisque l'axe Oz est orienté vers le bas. L'accélération lors de la chute est $\ddot{z} = g$. La vitesse est par intégration $\dot{z} = gt$ puisque $\dot{z}_{t=0} = 0$. La position est donc donnée par $z = \frac{1}{2}gt^2$. Lorsque la jeune fille atteint le matelas, on a $z = h$. Nous en déduisons que le contact s'effectue à la date t_c telle que $h = \frac{1}{2}gt_c^2$. La vitesse est alors $v_0 = gt_c = \sqrt{2gh}$. Passons maintenant à l'étude de la phase du mouvement lorsque la jeune fille écrase le matelas. Nous avons noté a la valeur de la décélération consécutive à la force exercée par le matelas sur la jeune fille. Cette force est orientée vers le haut. On a $m\vec{a}_{G/\mathcal{R}} = mg\vec{e}_z + \vec{F}$ avec $\vec{F} = -F\vec{e}_z$ où l'on pose $F > 0$. Si l'on appelle a la décélération qui résulte de l'action du matelas, cela signifie que l'on pose $F = ma$. Dans ces conditions, l'accélération en valeur algébrique est négative - c'est-à-dire que l'accélération vectorielle est orientée vers le haut. La jeune fille subit alors une accélération $-(a - g) = -a + g$. Changeons l'origine des dates par rapport au calcul effectué pour la chute : on pose $t = 0$ à la date $t = t_c$ déterminée précédemment. Changeons aussi l'origine des abscisses z en posant $z = 0$ au moment où le contact entre la jeune fille et le matelas s'effectue. Pour la phase d'écrasement du matelas, on a donc $\ddot{z} = -(a - g)$ et donc $\dot{z} = v_0 - (a - g)t$ puisque la vitesse initiale pour cette phase du mouvement est v_0 . En intégrant encore une fois, on arrive à $z = v_0 t - \frac{1}{2}(a - g)t^2$. Le mouvement du centre d'inertie de la jeune fille s'arrête à la date t_{ar} lorsque $\dot{z} = 0 = v_0 - (a - g)t_{ar}$. Nous avons donc $t_{ar} = \frac{v_0}{a - g}$ et un enfoncement du matelas donné par

$$z_{ar} = z_{t_{ar}} = \frac{v_0^2}{2(a - g)}.$$

z_{ar} doit être inférieure à l'épaisseur e du matelas. De plus, pour ne pas être blessée, la jeune fille doit subir une décélération inférieure à $10g$. Ainsi, on doit avoir $a - g < 10g$. Compte tenu de l'expression de z_{ar} déterminée à la question précédente, on doit avoir $z_{ar} > \frac{v_0^2}{20g}$. Mais, de l'étude de la chute, nous pouvons déduire que $\frac{v_0^2}{2g} = h$. On en déduit que $z_{ar} > \frac{h}{10}$. L'épaisseur du matelas doit, dans le cadre du modèle que nous avons développé, respecter : $e > \frac{h}{10}$. Comme la hauteur a été estimée à $h = 6 \text{ m}$, on en déduit que $e > 60 \text{ cm}$. Comme on peut aisément le constater sur la photographie, le matelas utilisé a une épaisseur d'environ 20 cm. C'est nettement insuffisant, le risque de blessure est très important puisque la décélération serait voisine de $30g$.

6 Un peu de Relativité restreinte

Pour répondre à certaines questions, il est nécessaire de chercher des informations sur les notions de *temps propre*, de *longueur propre*, de dilatation des durées et de contraction des longueurs. On aura aussi besoin de l'expression des énergies en Relativité restreinte.

36. Culture cellulaire

Réponses : la durée du parcours dans le référentiel héliocentrique est $\Delta t = \frac{d_{TS}}{0,85c}$. Dans le référentiel de la navette, il y correspond une durée propre Δt_0 . La durée Δt est affectée du phénomène de dilatation des durées par rapport à la durée propre. On a $\Delta t = \gamma \Delta t_0$ avec $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Dans le référentiel de la navette, on a une durée $\Delta t_0 = \frac{d_{TS}}{0,85c} \sqrt{1-(0,85)^2}$. On trouve $\Delta t = 588$ s et donc $\Delta t_0 \simeq 310$ s. Cela représente $n = 31$ périodes (10 s) de doublement des effectifs de cellules. Le nombre de cellules est donc $N = 2 \times 2^{31} = 2^{32} = 4,3 \times 10^9$. On retient la réponse c).

37. Le LHC

Réponses : l'énergie de masse des protons est $m_p c^2 \simeq 940$ MeV. Cette énergie de masse est très petite devant l'énergie cinétique acquise pendant l'accélération. L'énergie totale $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \simeq pc$, cela signifie que les protons sont ultra-relativistes. Leur vitesse est très proche de celle de la lumière. Si on écrit $E = \gamma m_p c^2$, on trouve $\gamma \simeq 7450$, ce qui confirme que l'on peut attribuer la vitesse c aux protons pour un calcul d'ordre de grandeur. Les protons mettent une durée $\Delta t = \frac{2\pi R}{c}$ pour faire un tour d'anneau avec $2\pi R \simeq 27$ km. On trouve $\Delta t = 9 \times 10^{-5}$ s. Il passe donc dans une section donnée de l'anneau, $N_p e$ charges électrique avec $N_p = 3,36 \times 10^{14}$. L'intensité est donc $I = \frac{N_p e}{\Delta t} = 0,6$ A. La bonne réponse est la réponse c).

38. Vie des muons

Réponses : On calcule $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 10$, $2,2 \mu\text{s}$ est un temps propre pour le muon donc pour un observateur terrestre, il y a dilatation des durées $\tau' = \gamma \tau = 22 \mu\text{s}$. Le temps pour arriver sur terre dans le référentiel terrestre est $\Delta t_{\text{Terre}} = \frac{h}{0,0995c} = 33 \mu\text{s}$. Pour le muon, les deux événements (départ à h et arrivée sur Terre) sont localisés au même endroit à savoir sur lui, la durée est donc un temps propre. Du fait de la dilatation des durées, on a donc $\Delta t_{\text{Terre}} = \gamma \Delta t_{\text{muons}}$ d'où $\Delta t_{\text{muons}} = 3,3 \mu\text{s}$.

39. Énergie relativiste

Réponses : La formule donnant l'énergie est $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$. L'énergie au repos étant mc^2 , on a $E = 3mc^2$ d'où $E^2 = 9m^2 c^4$. On en déduit que $p^2 c^2 = 8m^2 c^4$ et par conséquent $p = \sqrt{8} mc$, c'est la réponse c).

40. Effet de phare

Réponses :

- La vitesse de la lumière est invariable dans tout référentiel galiléen, on a donc $v = v' = c$. Dans le référentiel \mathcal{R} qui est le référentiel de COPERNIC en fait, on a $v_x = c \cos \theta$ et $v_y = c \sin \theta$. C'est la même projection dans le référentiel terrestre \mathcal{R}' avec l'angle θ' : $v'_x = c \cos \theta'$ et $v'_y = c \sin \theta'$. On utilise la loi de composition des vitesses de la relativité restreinte - encore appelée transformation de LORENTZ - et on obtient $v'_x = \frac{c \cos \theta - u}{1 - \frac{u \cos \theta}{c}}$ et $v'_y = \frac{c \sin \theta}{\gamma(1 - \frac{u \cos \theta}{c})}$. En comparant les deux expressions de la composante sur x' de la vitesse, on écrit $c \cos \theta' = \frac{c \cos \theta - u}{1 - \frac{u \cos \theta}{c}}$. La relation attendue est donc : $\boxed{\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta}}$.
- On suggère de travailler sur des petits angles $\delta\theta$ et $\delta\theta'$ permettant de faire des développements limités. Le télescope est situé dans le référentiel terrestre \mathcal{R}' . Il s'éloigne de l'étoile qui est - a priori - immobile dans le référentiel de COPERNIC \mathcal{R} . Par développement limité à l'ordre 2, on a $\cos \delta\theta' = 1 - \frac{\delta\theta'^2}{2}$ et $\cos \delta\theta = 1 - \frac{\delta\theta^2}{2}$. On peut alors écrire que $1 - \frac{\delta\theta'^2}{2} = \frac{1 - \frac{\delta\theta^2}{2} - \beta}{1 - \beta + \beta \frac{\delta\theta^2}{2}}$. En factorisant $1 - \beta$ au numérateur et au dénominateur, on arrive à $1 - \frac{\delta\theta'^2}{2} = \frac{1 - \frac{\delta\theta^2}{2}}{1 + \frac{\beta \delta\theta^2}{2(1-\beta)}} = (1 - \frac{\delta\theta^2}{2(1-\beta)})(1 + \frac{\beta \delta\theta^2}{2(1-\beta)})$. On développe le produit en éliminant le terme d'ordre 4 en $\delta\theta^4$ pour aboutir à $1 - \frac{\delta\theta'^2}{2} = 1 - \frac{\delta\theta^2}{2} \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)$. Cela permet de relier les deux angles selon la relation : $\boxed{\frac{\delta\theta'^2}{\delta\theta^2} = \frac{1+\beta}{1-\beta}}$.

3. L'effet évoqué, ici, est l'effet DOPPLER relativiste. On a dit que les fréquences perçues sont différentes dans les deux référentiels et que $\nu' = \nu \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$. On peut retrouver cet effet relativiste, en étudiant l'effet DOPPLER classique tout en tenant compte de l'effet de dilatation des durées de la théorie de la relativité restreinte qui dit que les durées caractéristiques de l'étoile perçues dans \mathcal{R} sont des durées propres Δt et donc que ces durées $\Delta t' = \gamma \Delta t$.
4. Comme nous l'avons dit juste avant, il faut tenir compte de l'effet DOPPLER relativiste. On peut considérer que $\frac{1}{\delta t}$ est équivalent à une fréquence. Par conséquent, on écrira que $\frac{1}{\delta t'} = \frac{1}{\delta t} \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$. L'énergie pour un photon est $\epsilon = h\nu$ et donc $\epsilon' = h\nu'$. L'énergie est donc affectée du même coefficient que la fréquence. On a $\epsilon' = \epsilon \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$. La puissance est $\mathcal{P} = \frac{N\epsilon}{\delta t}$ avec la même forme pour celle perçue dans \mathcal{R}' . On peut donc relier les puissances par $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \left(\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \right)^2$ qui donne $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \frac{1-\beta}{1+\beta}$.
5. L'intensité est $I = \frac{\mathcal{P}}{\pi \delta \theta^2}$. Avec les relations que nous avons établies pour les angles et pour les puissances, on arrive aisément à : $I' = I \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^2$. Lorsque l'étoile s'éloigne de nous, on voit une intensité lumineuse plus petite que celle qu'elle possède dans son référentiel. L'effet de phare est obtenu lorsque l'étoile se rapproche de nous.

41. Atteindre le centre de la Voie lactée

Réponses :

1. Dans un premier temps, nous allons nous placer dans un cas purement classique. Déterminer le temps nécessaire pour atteindre le centre de la Voie Lactée. Déterminer la vitesse du vaisseau au point M . Commenter.
2. Dans un second temps, nous nous plaçons dans le cadre de la relativité restreinte. Nous admettons que la vitesse du vaisseau par rapport à la Terre dans le référentiel du vaisseau v est donnée par $v = c \tanh \frac{at}{c}$, avec t le temps qui s'est écoulé dans le vaisseau. Déterminer une expression simple du facteur de LORENTZ γ en fonction de t . En déduire, en s'appuyant sur un raisonnement infinitésimal, le temps nécessaire dans le référentiel du vaisseau, pour parcourir la distance entre T et C .
3. Nous allons nous intéresser à la masse de carburant nécessaire à la propulsion du vaisseau. Nous ferons le calcul dans le cas de la loi de la Mécanique non relativiste. Nous supposons que le vaisseau éjecte le résidu de combustion à une vitesse proche de la vitesse de la lumière par rapport à lui¹. En déduire la masse m_{carb} de carburant nécessaire en fonction de la masse utile m_0 et du temps de trajet du vaisseau. Donner l'ordre de grandeur du rapport $\frac{m_{carb}}{m_0}$. Commenter.
1. La durée de la phase d'accélération jusqu'à M est égale à la durée de la phase de décélération pour aller de M à C . Comme on a un mouvement à accélération constante étudié dans le cadre de la Mécanique classique. On a donc $\frac{D}{2} = \frac{1}{2}at_M^2$. Pour calculer D , on peut exprimer cela en traduisant la distance parcourue par la lumière à la vitesse c pendant la durée τ correspondant aux nombres d'années terrestres données. On trouve que $D = 2,5 \times 10^{20}$ m. On peut calculer $t_M = \sqrt{\frac{D}{a}} = 5 \times 10^9$ s ce qui représente 158 ans. Ce résultat doit tout de suite inquiéter parce que la lumière met plus de 13000 ans pour faire le même trajet, cela signifie que le vaisseau spatial dépasse allègrement la vitesse c ce qui remet en cause le modèle classique. Si on estime la vitesse maximale atteinte en fin d'accélération lors de l'arrivée au point M , on trouve $v_M = at_M = \sqrt{Da} = 5 \times 10^{10}$ m · s⁻¹ ce qui bien supérieur à $c = 3 \times 10^8$ m · s⁻¹ comme nous l'avions prévu. Le modèle relativiste doit être retenu.
2. On a $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2 \frac{at}{c}}}$. D'après le formulaire fourni, on peut voir que cette expression se simplifie un peu pour obtenir $\gamma = \cosh \frac{at}{c}$. Dans le référentiel du vaisseau la distance totale à parcourir sera une distance propre. Par rapport au référentiel terrestre, cette distance est plus courte en raison du phénomène de contraction des longueurs dû au facteur γ . Si l'on écrit la vitesse $v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{dx_1}{dt}$ où dx_1 représente une longueur dans le référentiel terrestre et dt une durée dans le référentiel propre du vaisseau. On a donc $dx_1 = c \tanh \frac{at}{c} \cosh \frac{at}{c} dt = c \sinh \frac{at}{c} dt$. On peut intégrer sans difficulté pour obtenir la relation entre la distance $D/2$ parcourue dans le référentiel terrestre et la durée propre mise dans le référentiel du vaisseau que nous notons $\tau/2$ pour atteindre le point M , en partant de $x_1 = 0$ à la date $t = 0$. On a donc $\frac{D}{2} = \frac{c^2}{a} (\cosh \frac{at}{c} - 1)$. Cela permet d'écrire que $\tau = \frac{2c}{a} \cosh^{-1} \left(1 + \frac{Da}{2c^2} \right)$. En utilisant le

1. Il est possible de l'atteindre dans le cas relativiste si tout est éjecté sous forme de lumière.

formulaire, on arrive à $\tau = \frac{2c}{a} \ln\left(1 + \frac{Da}{2c^2} + \sqrt{\frac{D^2a^2}{4c^4} + \frac{Da}{c^2}}\right)$. On trouve 52 ans. Cette durée est courte mais c'est une durée qui correspond au fait que la distance à parcourir dans le référentiel du vaisseau est plus courte que dans le référentiel terrestre.

3. La force de poussée que subit une fusée qui éjecte de la quantité de mouvement est telle que $ma = \mathcal{D}_m c$ où $\mathcal{D}_m = -\frac{dm}{dt}$ est la valeur absolue du débit massique qui correspond à la diminution de masse de la fusée et c la vitesse d'éjection de la matière par rapport à la fusée. Cette loi est établie dans le cadre de la Mécanique classique. On a donc $ma = -\frac{dm}{dt}c$ d'où l'équation différentielle $-\frac{dm}{m} = \frac{a}{c}dt$. On intègre entre la date $t = 0$ et l'arrivée en C à la date τ dans le référentiel du vaisseau. En effet, dans la phase de décélération, il faut retourner les réacteurs pour obtenir le freinage tout en maintenant exactement le même fonctionnement que dans la phase d'accélération. On intègre donc l'équation différentielle pour obtenir $m(t = 0) = m_C \exp \frac{a\tau}{c}$. La masse à l'arrivée est la masse utile, $m_C = m_0$ alors que la masse initiale est la masse utile plus la masse de carburant. On a donc $m_{carb} = m_0(\exp \frac{a\tau}{c} - 1) \simeq m_0 \exp \frac{a\tau}{c}$ puisque dans les calculs précédents, on a vu que $\frac{a\tau}{c} \simeq 55$ a minima pour le cas relativiste puisque dans le cas classique la durée de voyage est plus longue! On trouve $\frac{m_{carb}}{m_0} \simeq 10^{24}$. Cette valeur montre que maintenir une accélération constante pendant un tel voyage est totalement inenvisageable.