Réflexion normale d'une onde électromagnétique

Les ondes électromagnétiques obéissent aux lois de DESCARTES lorsqu'elles rencontrent une interface où le milieu de propagation change de nature. Lorsqu'elles arrivent sur un conducteur parfait, elles se réfléchissent uniquement car, dans le conducteur parfait, les champs $\vec{E}_c$ et $\vec{B}_c$ sont nuls. Le champ électrique dans le vide résulte de la superposition du champ électrique de l'onde incidente et de celui de l'onde réfléchie. Il en va de même pour le champ magnétique. Ces deux champs vérifient les relations de passage :

— la composante tangentielle de $\vec{E}$ est continue
— la composante normale de $\vec{E}$ vérifie : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{n}_{12}$
— la composante normale de $\vec{B}$ est continue
— la composante tangentielle de $\vec{B}$ vérifie : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0\,\vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$

1 Onde incidente

L'onde incidente est caractérisée par le champ électrique :

$$\vec{E}_i = \vec{e}_x\,E_0\,\exp i(\omega t - kz)$$

Le champ électrique vérifie l'équation de D'ALEMBERT et donc la relation de dispersion : $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}$. Elle se propage sur l'axe Oz dans le sens des z croissant puisque le vecteur d'onde est $\vec{k}_i = k\vec{e}_z = \dfrac{\omega}{c}\vec{e}_z$. Le champ magnétique de l'onde incidente est donné par la relation de structure :

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i}{\omega} \wedge \vec{E}_i = \frac{E_0}{c}(\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x)\exp i(\omega t - kz) = \vec{e}_y\,\frac{E_0}{c}\,\exp i(\omega t - kz)$$

En $z = 0$, débute un milieu conducteur parfait d'extension indifférente en $z \geq 0$. L'onde incidente est représentée sur le schéma de la figure 1.

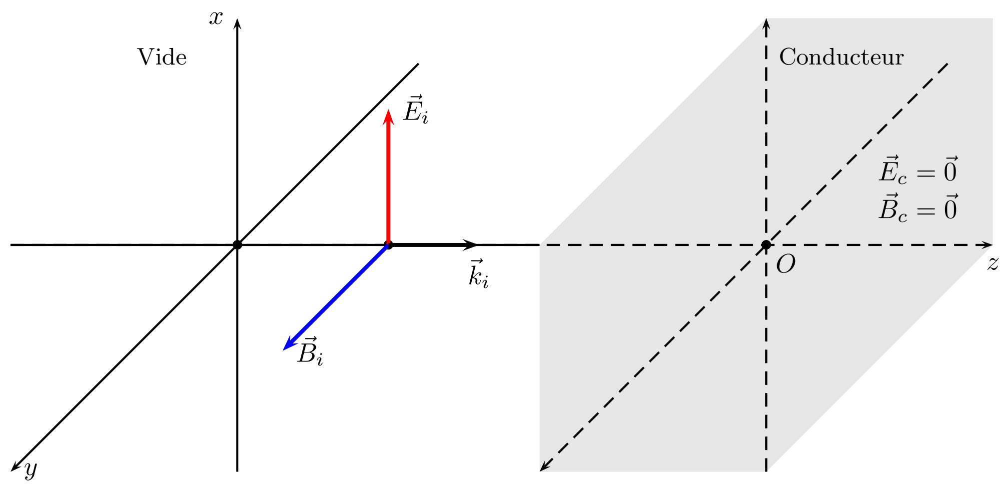

FIGURE 1 – Onde en incidence normale sur un conducteur parfait

2 Recherche générale de l'onde réfléchie

On ne suppose rien de particulier sur l'onde réfléchie, si ce n'est que c'est une forme OPPS. Le vecteur d'onde $\vec{k}_r$ possède comme norme $k_r = \sqrt{k_{rx}^2 + k_{ry}^2 + k_{rz}^2} = \dfrac{\omega'}{c}$ puisque cela ne dépend que du milieu de propagation et que l'on reste dans le même milieu qui est le vide (ou l'air). La pulsation ω' est supposée quelconque et a priori différente de ω. Le champ électrique de l'onde réfléchie a donc la forme générale :

$$\vec{E}_r = (E_{0rx}\vec{e}_x + E_{0ry}\vec{e}_y + E_{0rz}\vec{e}_z)\,\exp i\,(\omega' t - k_{rx}x - k_{ry}y - k_{rz}z)$$

Le champ électrique tangent doit être continu en $z = 0$. Ce champ électrique tangent résulte de la superposition du champ tangent incident et du champ tangent réfléchi. On a donc :

$$\vec{E}_{\text{tangent}} = E_0\vec{e}_x \exp i\omega t + (E_{0rx}\vec{e}_x + E_{0ry}\vec{e}_y)\,\exp i\,(\omega' t - k_{rx}x - k_{ry}y)$$

Le champ électrique dans le conducteur étant nul, ce champ tangent doit être nul. On obtient donc les deux égalités suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} E_0 \exp i\omega t + E_{0rx}\exp i\,(\omega' t - k_{rx}x - k_{ry}y) & = & 0 \\ E_{0ry}\exp i\,(\omega' t - k_{rx}x - k_{ry}y) & = & 0 \end{array}\right.$$

Ces deux équations doivent vérifiées $\forall\, x$, $\forall\, y$ et $\forall\, t$. On en déduit que $E_{0ry} = 0$. Pour l'autre relation, il est indispensable que $\omega = \omega'$ pour avoir une validité $\forall\, t$. De la même façon, pour que la relation soit indépendante de x et de y, c'est-à-dire de l'endroit où l'onde arrive sur le plan $z = 0$, il faut que $k_{rx} = k_{ry} = 0$. Enfin, on doit assurer $E_0 + E_{0rx} = 0$. Après ces résultats, on constate que l'expression du champ de l'onde réfléchi s'est simplifié :

$$\vec{E}_r = (E_{0rx}\vec{e}_x + E_{0rz}\vec{e}_z)\,\exp i\,(\omega t - k_{rz}z)$$

Comme l'onde se propage uniquement sur l'axe Oz, il est indispensable de $k_{rz} = -k = -\dfrac{\omega}{c}$ pour que cela corresponde bien à une onde réfléchie se propageant dans le sens z décroissant. On a donc pour l'instant :

$$\vec{E}_r = (-E_0\vec{e}_x + E_{0rz}\vec{e}_z)\,\exp i\,(\omega t + kz)$$

On sait que $\operatorname{div}\vec{E} = \operatorname{div}(\vec{E}_i + \vec{E}_r) = 0$ parce que l'on est dans le vide. Or, $\operatorname{div}\vec{E}_i = \dfrac{\partial E_{ix}}{\partial x} = 0$. On doit donc avoir $\operatorname{div}\vec{E}_r = 0$. Or, $\operatorname{div}\vec{E}_r = \dfrac{\partial E_{rx}}{\partial x} + \dfrac{\partial E_{rz}}{\partial z} = 0$. Or, d'après l'expression précédente du champ électrique, on a $\dfrac{\partial E_{rx}}{\partial x} = 0$ et $\dfrac{\partial E_{rz}}{\partial z} = ikE_{0rz}\exp i\,(\omega t + kz) = 0$. La seule solution valable $\forall\, t$ et $\forall\, z$ est $E_{r0z} = 0$. Le champ réfléchi n'a pas de composante sur l'axe Oz, c'est-à-dire sur la normale au plan conducteur. Finalement, on a :

$$\vec{E}_r = -E_0\vec{e}_x\,\exp i\,(\omega t + kz) \quad \text{et} \quad \vec{B}_r = \frac{E_0}{c}\vec{e}_y \exp i\,(\omega t + kz)$$

3 Conclusion

Le champ électrique incident et le champ électrique réfléchi n'ont pas de composantes sur la normale $(-\vec{e}_z)$ au conducteur. Si l'on applique la relation de passage en $z = 0$ avec comme milieu 1 le conducteur et comme milieu 2 le vide, on a $\vec{E}_{\text{vide}} - \vec{E}_c = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}(-\vec{e}_z)$. On ne peut que conclure que sur la surface du conducteur parfait, on a :

$$\sigma = 0$$

Pour le champ magnétique en $z = 0$, on a $\vec{B}_{\text{vide}} = \dfrac{2E_0}{c}\vec{e}_y \exp i\omega t$. On applique là encore la relation de passage $\vec{B}_{\text{vide}} - \vec{B}_c = \mu_0\vec{j}_s \wedge (-\vec{e}_z)$. On en déduit qu'il existe une densité surfacique de courant à la surface du conducteur parfait :

$$\vec{j}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c}\,\exp i\omega t\,\vec{e}_x$$

Dans le vide, on a une onde stationnaire formée par la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie. On trouve alors des ventres de $\vec{E}$ (nœuds de $\vec{B}$) et des nœuds de $\vec{E}$ (ventres de $\vec{B}$). Deux ventres ou deux nœuds successifs sont séparés de $\dfrac{\lambda}{2}$, un nœud succède à un ventre après un parcours de $\dfrac{\lambda}{4}$ sur l'axe Oz.