

Devoir surveillé de Sciences Physiques n°6a du 07-02-2025

Sujet commun MP-MP*

— Durée : 3 heures – Solutions – Calculatrice interdite —

Problème n° 1 – Fonctions spéciales

Mines MP 2023

A. La fonction W de Lambert

Tir d'un projectile sans frottement

1. Un référentiel galiléen est référentiel dans lequel un système ne subissant pas de forces ou bien une résultante de forces nulle est soit à l'équilibre soit en mouvement rectiligne et uniforme. On dit que le principe d'inertie est respecté. Le référentiel terrestre peut être considéré comme galiléen pour des expériences de durée courte devant la durée de la journée et d'extension spatiale petite devant la distance parcourue par le lieu de l'expérience pendant la durée de l'expérience. Il n'y a aucun problème pour une durée $\Delta t = 10$ s et une extension de 1 à 10 m. On notera qu'en prenant dans le bilan des forces $m\vec{g}$ et non pas la force de gravitation exercée par la Terre, on dit implicitement que le référentiel terrestre en rotation uniforme par rapport au référentiel géocentrique est non galiléen... Mais voilà, on fait toujours ainsi !

2. Comme la force se résume au poids, on écrit $m\vec{g} = m\vec{a}$. On en déduit que $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = 0$ et $\ddot{z} = -g$. On intègre en tenant compte des conditions initiales qui veulent que la vitesse initiale est $\vec{v}_0 = v_0 \cos \theta_0 \vec{e}_y + v_0 \sin \theta_0 \vec{e}_z$. On a donc $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = v_0 \cos \theta_0$ et $\dot{z} = -gt + v_0 \sin \theta_0$. On intègre une seconde fois en tenant compte du fait que l'on part de l'origine O du repère à la date $t = 0$. Cela conduit à $x = 0$, $y = v_0 \cos \theta_0 t$ et $z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta_0 t$. Le mouvement est plan puisque $x = 0$ fixe un plan mais on peut voir les choses de façon plus physique en disant que le mouvement reste dans le plan formé par l'accélération - qui est un vecteur constant - et la vitesse initiale.

3. On établit l'équation de la trajectoire en remplaçant t par son expression en fonction de y dans l'équation donnant $z(t)$. On arrive à $z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} y^2 + \tan \theta_0 y$. C'est une parabole qui présente une symétrie pour la partie $z \geq 0$, en clair au-dessus du sol. Cette symétrie est par rapport au milieu de sa portée où se trouve son sommet.

4. Le sommet est obtenu lorsque la vitesse $\dot{z} = 0$. Cela se produit à la date $t = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g}$. En remplaçant dans les expressions des coordonnées que le sommet S est donc situé en $y_S = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{2g}$ et $z_S = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}$. La portée correspond, en imaginant que le sol est bien situé au niveau du point de départ de la trajectoire, à $z = 0$. La portée se trouve par le second zéro de l'équation parabolique mais comme il y a symétrie par rapport au sommet, on peut aussi dire que la portée est le double de l'abscisse du sommet. On a donc : $\ell = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$.

On retrouve le résultat bien connu que, pour obtenir une portée maximale, il faut, pour une vitesse initiale v_0 donnée, effectuer un tir avec un angle de 45° puisque l'on recherche le maximum de $\sin 2\theta_0$ et que la solution est bien sûr $\pi/4$.

Tir d'un projectile avec frottements

5. La force s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, la vitesse en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. On en déduit que α s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$. On peut construire un temps caractéristique tel que $\alpha = \frac{m}{\tau}$ ce qui fait $\tau = \frac{m}{\alpha}$. Le mouvement va rester plan puisque le plan du mouvement est formé par le vecteur vitesse initiale et \vec{g} et que la force de frottement est de même direction que la vitesse. L'accélération va rester dans le plan de \vec{v} et de \vec{g} .

6. En écrivant la relation de la Dynamique, dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on arrive à $\vec{a} = \vec{g} - \frac{\vec{v}}{\tau}$. Les équations différentielles que l'on obtient sont $\ddot{x} = -\frac{\dot{x}}{\tau}$, $\ddot{y} = -\frac{\dot{y}}{\tau}$ et $\ddot{z} = -g - \frac{\dot{z}}{\tau}$. On intègre une première fois $\dot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} = 0$ pour écrire que $\dot{x} = A \exp -\frac{t}{\tau}$. En utilisant les conditions initiales, on a $\dot{x} = 0$ d'où $A = 0$. On a donc $\dot{x} = 0 \forall t$ et donc $x = B$. Comme on part de l'origine du repère, on en déduit que $B = 0$ ce qui confirme le caractère plan du mouvement qui se déroulera dans le plan Oyz . Pour la composante de la vitesse sur Oy , on peut écrire que $\dot{y} = A' \exp -\frac{t}{\tau}$ avec $\dot{y} = v_0 \cos \theta_0$ à la date $t = 0$. On a donc $\dot{y} = v_0 \cos \theta_0 \exp -\frac{t}{\tau}$. On intègre $y(t) = -v_0 \tau \cos \theta_0 \exp -\frac{t}{\tau} + B'$. Comme $y = 0$ à la date $t = 0$, on peut écrire que $y(t) = v_0 \tau \cos \theta_0 (1 - \exp -\frac{t}{\tau})$. On doit maintenant intégrer $\ddot{z} + \frac{\dot{z}}{\tau} = -g$. On a une solution homogène et une solution particulière qui génère $\dot{z} = -g\tau + C \exp -\frac{t}{\tau}$. À $t = 0$, on a $\dot{z} = v_0 \sin \theta_0 = -g\tau + C$. On en déduit que $\dot{z} = (v_0 \sin \theta_0 + g\tau) \exp -\frac{t}{\tau} - g\tau$. En intégrant avec $z = 0$ à l'instant initial, on arrive à $z(t) = (v_0 \tau \sin \theta_0 + g\tau^2)(1 - \exp -\frac{t}{\tau}) - g\tau t$.

7. Dans la situation où $t \ll \tau$, on peut effectuer un développement limité de $\exp -\frac{t}{\tau} = 1 - \frac{t}{\tau} + \frac{t^2}{2\tau^2} + \dots$ en conservant l'ordre le plus bas nous apportant une information. Pour $y(t)$, on peut se contenter de l'ordre 1 et

écrire que $y(t) = v_0 \tau \cos \theta_0 (1 - 1 + \frac{t}{\tau}) = v_0 t \cos \theta_0$. Cette équation est similaire à celle obtenue en l'absence de frottements ce qui est logique puisqu'au départ de la trajectoire, les frottements n'ont pas encore beaucoup agi. On fait la même chose pour z mais comme l'équation sans frottements est en t^2 , il faut aller à l'ordre 2 d'où $z(t) = (v_0 \tau \sin \theta_0 + g \tau^2)(1 - 1 + \frac{t}{\tau} - \frac{t^2}{2\tau^2}) - g \tau t$. On trouve : $z(t) = v_0 \sin \theta_0 (1 - \frac{t}{2\tau} t - \frac{1}{2} g t^2)$. Si on ne conserve que l'ordre 1 alors $z(t) = v_0 \sin \theta_0 t$. Le bilan est que l'on a deux équations linéaires en t pour $y(t)$ et $z(t)$, le début de la trajectoire peut être assimilée à une droite fixée par la vitesse initiale. Si on va à l'ordre 2 alors on constate qu'il faut comparer $\frac{v_0 \sin \theta_0}{2} \frac{t^2}{\tau}$ à $\frac{g}{2} t^2$, comme $\tau \ll t$, on peut négliger le premier terme et on retrouve alors $z(t) = v_0 \sin \theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ qui est l'équation parabolique de la situation sans frottement.

8. Dans la situation où $t \gg \tau$, on va considérer que $\exp -\frac{t}{\tau} \rightarrow 0$. On a $y = v_0 \tau \cos \theta_0$, on voit que le mouvement se déroule sur une verticale puisque y ne varie plus avec t . On a $z(t) = v_0 \tau \sin \theta_0 + g \tau^2 - g \tau t$. Cette équation montre que le mouvement est uniforme puisque $\dot{z} = -g \tau$. C'est la vitesse limite : $v_\infty = -g \tau$. Pour explorer cette situation, encore faut-il que le mobile puisse aller en-dessous de $z = 0$...

9. L'allure globale de la trajectoire est formée par un départ plutôt rectiligne, puis une situation qui se rapproche de la parabole obtenue dans le cas sans frottements et enfin une portion quasi-rectiligne verticale. La trajectoire est représentée à la figure 1.

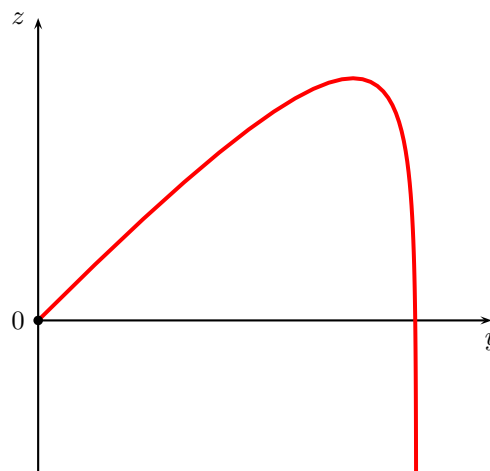


FIGURE 1 – Allure de la trajectoire du mouvement dans le champ de pesanteur uniforme avec des frottements fluides

10. L'allure de la trajectoire est fournie à la figure 2.

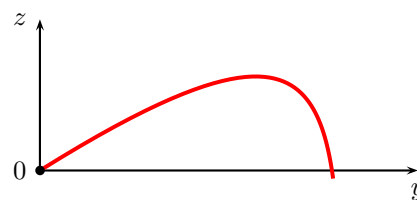


FIGURE 2 – Allure de la trajectoire pour un temps de vol de l'ordre de τ

La portée maximale d'un tir avec frottement

11. On a $\frac{dT}{d\chi} = (1 + \chi) \exp \chi$. Cette dérivée s'annule lorsque $\chi = -1$. La dérivée est négative pour $\chi \leq -1$ et positive pour $\chi \geq -1$. La fonction $T(\chi)$ est décroissante puis croissante. Elle présente donc un minimum en $\chi = -1$, la fonction vaut à ce moment $T_{\min} = T(\chi = -1) = -\frac{1}{e}$. Le tableau de variation est réalisé à la figure 3. On trouve $T_{\min} \simeq 0,38$. La fonction W est la fonction réciproque de T , on a donc $W \circ T = Id$ où Id est l'identité. On peut donc obtenir les valeurs W en permutant les abscisses et les ordonnées. La fonction W est symétrique de T par rapport à la première bissectrice.

12. On voit que $T(\chi) = 0$ pour $\chi = 0$. Le point $(0,0)$ est invariant par la symétrie par rapport à la première bissectrice. On a donc $W(0) = 0$. Il faut discrétiser l'équation différentielle proposée. On a $(x_i +$

χ	$-\infty$	-1	$+\infty$
$\frac{dT}{d\chi}$	$-$	0	$+$
$T(\chi)$			

FIGURE 3 – Tableau de variation de la fonction $T(\chi)$

$\exp(W(x_i)) \frac{W(x_{i+1}) - W(x_i)}{h} = 1$. On isole $W(x_{i+1})$ dans le calcul. Cela donne : $W(x_{i+1}) = W(x_i) + \frac{h}{x_i + \exp(W(x_i))}$. Le code *Python* est :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

xmax=2.5
h=0.0001
N = xmax/h
x=[]
W=[]
W0=0

for i in range(N):
    xi = i*h
    Wi = Wi+h/(xi + np.exp(Wi))
    x.append(xi)
    W.append(Wi)

plt.plot(x,W)
plt.show()
```

13. On a $z(t^*) = 0$ d'où la relation $(v_0 \tau \sin \theta_0 + g \tau^2)(1 - \exp -\frac{t^*}{\tau}) = g \tau t^*$. En divisant par $g \tau^2$, on arrive à l'équation $(1 + \frac{v_0 \sin \theta_0}{g \tau})(1 - \exp -\frac{t^*}{\tau}) = \frac{t^*}{\tau}$. En utilisant la notation u proposée par l'énoncé, on arrive à l'équation $\frac{t^*}{\tau} + u - u \exp -\frac{t^*}{\tau} = 0$. Cette équation permet d'utiliser l'aide fournie par l'énoncé en identifiant $a = \frac{1}{\tau}$, $b = u$, $c = -u$ et $d = -\frac{1}{\tau}$. Ainsi, on a $t^* = \tau[-u + W(u \exp u)]$.

14. La portée est toujours définie par $z(t^*) = 0$. On a $\ell = v_0 \tau \cos \theta_0 (1 - \exp -\frac{t^*}{\tau})$. Comme $-\frac{t^*}{\tau} = u - W(u \exp u)$, on peut écrire que $\ell = v_0 \tau \cos \theta_0 (1 - \exp u \exp -W(u \exp u))$. On peut aussi écrire que $\ell = v_0 \tau \cos \theta_0 (1 - \frac{\exp u}{\exp W(u \exp u)})$. Ensuite, on multiplie par $W(u \exp u)$ en haut et en bas pour obtenir $\ell = v_0 \tau \cos \theta_0 (1 - \frac{W(u \exp u) \exp u}{W(u \exp u) \exp(W(u \exp u))})$. Puisque $W \exp W$ correspond à l'identité, on en déduit que $W(u \exp u) \exp(W(u \exp u)) = u \exp u$. On peut donc conclure sur l'expression proposée par l'énoncé : $\ell = v_0 \tau \cos \theta_0 [1 - \frac{W(u \exp u)}{u}]$.

15. On a donc $v_\infty = g \tau = 3,92 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. On peut calculer le rapport $\gamma = \frac{v_0}{v_\infty} \simeq 2,5$. On constate donc $\gamma \neq 1$. On doit donc utiliser la première formule proposée pour θ_{\max} . On trouve que $\frac{\gamma^2 - 1}{e} \simeq 2$. On lit sur la figure que $W(2) = 0,85$. La valeur de l'angle est donnée par $\theta_{\max} = \arcsin \frac{2,5 \times 0,85}{5,25 - 0,85} \simeq \arcsin \frac{1}{2}$. On trouve donc : $\theta_{\max} \simeq 30^\circ$.

B. L'intégrale elliptique de première espèce

16. On étudie la masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen soumise à son poids et à la tension du fil. On a $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$. On utilise les coordonnées cylindriques proposées pour obtenir $m\ell\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - m\ell\dot{\theta}^2\vec{e}_r = -T\vec{e}_r + mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta$. On en déduit une expression de la tension $T = mg \cos \theta + m\ell\dot{\theta}^2$ ainsi que l'équation différentielle du mouvement : $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$.

17. On fait l'approximation des petits angles : $\sin \theta \simeq \theta$ et on obtient l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0$. À la date $t = 0$, on lâche le pendule d'un angle θ_0 sans vitesse initiale, l'angle qui repère sa position vérifie l'équation $\theta = \theta_0 \cos \omega_0 t$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$. La période associée est donc : $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$. Cette période ne dépend que de la longueur ℓ du pendule et bien sûr, du champ de pesanteur mais elle est

indépendante de l'angle donné initialement θ_0 . Cette propriété n'est valide que si l'on a $\theta_0 \ll \pi$, elle est connue sous le nom d'isochronisme des petites oscillations.

18. Si l'on multiplie l'équation différentielle du mouvement par $\dot{\theta}$, on obtient $\dot{\theta}\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin \theta \dot{\theta}$. On peut donc intégrer pour écrire que $\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \omega_0^2 \cos \theta + A$. On détermine la constante d'intégration en utilisant les mêmes conditions initiales que précédemment, ce qui fait que $0 = \omega_0^2 \cos \theta_0 + A$. On en déduit que $\dot{\theta}^2 = 2\omega_0^2(\cos \theta - \cos \theta_0)$. Pour obtenir la vitesse de rotation du pendule, il faut faire attention au signe puisque le mouvement aura lieu à θ décroissant mais aussi à θ croissant. On a donc : $\dot{\theta} = \pm \omega_0 \sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}$. Le pendule démarre en $\theta = \theta_0 > 0$, il s'est écoulé un quart de période jusqu'à ce qu'il atteigne la position $\theta = 0$ où sa vitesse est maximale. On écrit l'expression suivante qui découle de celle de la vitesse de rotation précédente : $d\theta = -\omega_0 \sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)} dt$. On a donc $\int_{\theta_0}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}} = -\omega_0 \int_0^{T/4} dt$. En faisant évoluer cette expression avec la période T_0 calculée précédemment, on peut donc écrire que $\frac{2\pi}{T_0} \frac{T}{4} = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}}$. Ceci est bien équivalent à la formule proposée par l'énoncé : $T = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}}$. Il devient évident que l'intégrale va dépendre de la borne θ_0 , on a perdu l'isochronisme des petites oscillations.

19. Le tracé le graphe de la fonction $\chi \rightarrow 1 + \sqrt{\chi}$ est réalisé à la figure 4. On peut voir les différents rectangles qui montrent clairement la différence entre l'aire sous la courbe et l'aire des rectangles. À chaque rectangle, on a un morceau compté en trop pour le segment allant du début du rectangle au milieu de celui-ci et un oublié entre ce même milieu et la fin du rectangle. Les deux surfaces comptées en trop et oubliées ne sont pas équivalentes, par conséquent l'intégrale obtenue n'est pas juste. C'est une valeur approchée. On comprend facilement que si l'on diminue le côté de chaque rectangle, on aura plus de rectangles mais moins d'écart entre la valeur de l'intégrale et sa détermination approchée par un calcul numérique. Si la taille des rectangles tend vers 0, alors la surface calculée tend vers l'intégrale.

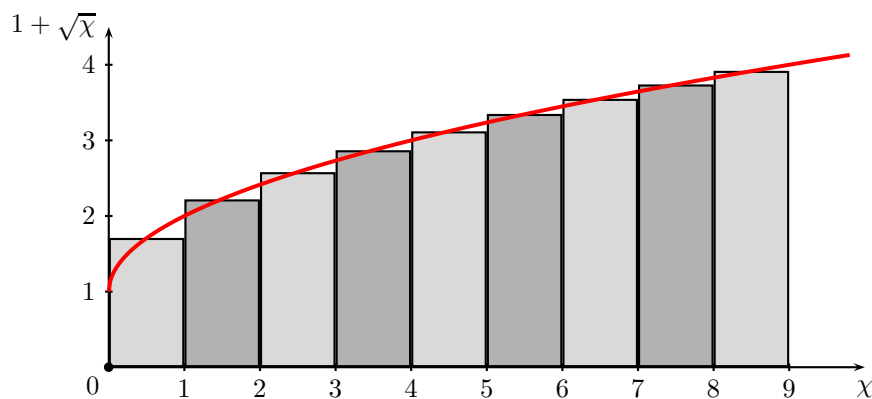


FIGURE 4 – Calcul de l'intégrale par la méthode des rectangles médians

20. Le code suivant permet de calculer $\mathcal{K}(\chi)$ par la méthode des rectangles médians.

```
import math as m
def f(x,phi) :
    return 1/(1-x*m.sin(phi)**2)**(0.5)

S=0.
N=100
a=0.
b = m.pi/2.
pas=(b-a)/N
theta_0 = m.pi/3.
x =m.sin(theta_0)**2
for i in range(N) :
    phi=i*pas+pas/2
    S=S+f(x,phi)
print(pas*S)
```

21. On lit la valeur 1,05 pour une abscisse de 1. La seconde va donc être plus longue de 5% puisqu'un battement complet qui est pris pour 1 seconde va durer en réalité 1,05 s. Sur une heure, on aura un décalage

de 180 s. La pendule va retarder de 3 minutes ce qui est assez conséquent puisque cela représente plus d'une heure par jour.

22. On rencontre la cycloïde dans le mouvement de roulement sans glissement d'une roue circulaire sur un support. On la visualise bien en observant le mouvement de la valve - même si ce n'est le point de contact avec la route - d'une roue de vélo lorsque le vélo se déplace.

C. La fonction erf de Gauss

Introduction au problème de Stefan

23. Il y a production d'énergie à l'intérieur de la Terre par la radioactivité des roches qui s'y trouvent.

24. Le vecteur \vec{j}_Q densité de flux thermique (que je préfère appelé densité de courant de transfert thermique de conduction même si c'est plus long à écrire) correspond à une puissance surfacique orientée en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$.

La loi de FOURIER relie cette densité de courant à la température par la loi : $\vec{j}_Q = -\kappa \overrightarrow{\text{grad}} T$. Compte tenu du fait que le gradient de la température s'exprime en $\text{K} \cdot \text{m}^{-1}$, on en déduit que la conductivité thermique est en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

25. L'énergie qui rentre sera évaluée comme le bilan de ce qui rentre effectivement et de ce qui sort. On part des puissances produit des densités de courant par la section du milieu, il suffira de multiplier par l'intervalle de temps dt . On a $\delta Q = (j_Q(y, t) - j_Q(y + dy, t))Sdt$. On utilise comme système une tranche mésoscopique car c'est à cette échelle que l'on peut définir une température par effet de moyenne sur un grand nombre d'entités microscopiques mais aussi parce qu'à cette échelle, on pourra considérer cette température comme uniforme sur le système. Comme on travaille sur un système qui est une phase condensée supposée incompressible, on ne prendra pas en compte des travaux des forces de pression. On applique le premier principe pour écrire $dU = \delta Q$ même s'il sera plus satisfaisant de faire apparaître l'enthalpie $dH = \delta Q$ bien que l'on sache que l'on peut aisément confondre dU et dH pour une phase condensée. En tenant compte de l'expression de δQ trouvée à la question précédente, on peut écrire $dH = -\frac{\partial j_Q}{\partial y} S dy dt = \rho c S dy \frac{\partial T}{\partial t} dt$. De plus, la loi de FOURIER donne $j_Q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial y}$. Après simplification par $S dy dt$, on arrive à l'équation $\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$. C'est l'équation de diffusion thermique que l'énoncé écrit $\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ avec une diffusivité thermique $D = \frac{\kappa}{\rho c}$. Par lecture dimensionnelle sur l'équation de diffusion thermique, on peut déterminer son unité : $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. En utilisant uniquement l'approche dimensionnelle, on peut donc écrire que $D = \frac{L^2}{t}$ ce qui conduit à $L = \sqrt{Dt}$.

26. $\theta(y, t)$ est obtenue à partir de la température T par un décalage constant et la multiplication par une autre constante, cela ne va modifier en rien l'équation différentielle dans sa forme qui ne fait apparaître que des dérivées de la température. On a donc $\frac{\partial \theta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$. La condition initiale et les conditions aux limites deviennent pour la nouvelle variable : $\theta(y > 0, t = 0) = 0$ puisque $T(y > 0, t = 0) = T_1$, $\theta(y = 0, t > 0) = 1$ puisque $T(y = 0, t > 0) = T_0$ et enfin $\theta(y \rightarrow \infty, t > 0) = 0$ puisque $T(y \rightarrow \infty, t > 0) = T_1$.

27. On a $\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{d\theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t}$. Or, $\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{y}{2\sqrt{D}} (-\frac{1}{2} t^{-3/2}) = -\frac{y}{4\sqrt{D}t}$. Cette expression permet d'introduire la variable de similarité η . On peut donc conclure que $\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\eta}{2t} \frac{d\theta}{d\eta}$. On calcule maintenant $\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{d\theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{d\theta}{d\eta} \frac{1}{2\sqrt{Dt}}$. On peut passer sans difficulté à la dérivée seconde où le même processus s'effectue ce qui conduit à $\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{1}{4Dt} \frac{d^2 \theta}{d\eta^2}$. On rapproche les deux calculs dans l'équation de diffusion thermique pour obtenir $D \frac{1}{4Dt} \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} = -\frac{\eta}{2t} \frac{d\theta}{d\eta}$. On peut donc bien conclure sur l'équation différentielle proposée par l'énoncé à savoir : $\frac{d^2 \theta(\eta)}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\theta(\eta)}{d\eta} = 0$.

28. Si on utilise la fonction $\varphi(\eta) = \frac{d\theta}{d\eta}$, l'équation différentielle devient $\frac{d\varphi}{d\eta} + 2\eta\varphi = 0$. On peut la résoudre en séparant les variables selon $\frac{d\varphi}{\varphi} = -2\eta d\eta$. En intégrant, on a donc $\ln \varphi = -\eta^2 + A$ d'où une forme $\varphi(\eta) = B \exp -\eta^2 = \frac{d\theta}{d\eta}$. On peut intégrer une second fois entre $\eta = 0$ et η en utilisant la variable muette z pour coller à l'énoncé. On obtient $\theta(\eta) - \theta(0) = B \int_0^\eta \exp -z^2 dz$. Nous avons vu que $\theta(0) = 1$ puisque cela correspond à $y = 0$ pour $t > 0$. On poursuit le calcul selon $\theta(\eta) - 1 = B \int_0^\eta \exp -z^2 dz$. Il faut encore déterminer la constante d'intégration B . Pour cela on utilise le fait que $\theta(y \rightarrow \infty, t > 0) = \theta(\eta \rightarrow \infty) = 0$ puisque $\eta = \frac{y}{2\sqrt{Dt}}$. Ainsi, l'équation précédente devient $-1 = B \int_0^\infty \exp -z^2 dz$. Comme $\int_0^\infty \exp -z^2 dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, on peut écrire $-1 = B \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. On en déduit $B = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}$. On obtient bien la réponse proposée : $\theta(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \exp -z^2 dz$. On en déduit que $T(y, t) = T_1 + (T_0 - T_1)(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \exp -z^2 dz)$.

Formation d'une croûte de lave solide

29. On se retrouve dans un cadre formel identique à celui que nous venons de voir à la question précédente, sauf qu'il y a un changement des conditions aux limites. Reprenons l'expression de calcul de $\theta(\eta)$ juste après le processus d'intégration. On a, comme avant, $\theta(\eta) - \theta(0) = B \int_0^\eta \exp -z^2 dz$. On a toujours $\theta(0) = 0$. Pour déterminer B , on se place maintenant à la limite de la zone de fusion-solidification, c'est-à-dire que $\theta(y_s, t > 0) = \theta(\lambda) = 1 = B \int_0^\lambda \exp -z^2 dz$. Cela permet d'obtenir une expression pour $B = \frac{1}{\int_0^\lambda \exp -z^2 dz}$. Cela permet d'écrire que $\theta(\eta) = \frac{\int_0^\eta \exp -z^2 dz}{\int_0^\lambda \exp -z^2 dz}$. Il ne reste plus qu'à multiplier haut et bas par $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ pour obtenir la forme proposée :

$$\theta(\eta) = \frac{\text{erf}(\eta)}{\text{erf}(\lambda)}$$

30. Il s'agit d'une enthalpie de changement d'état qui s'exprime selon : $\delta Q = -\rho S dy_s \Delta h_{sol \rightarrow liq}$. Cette énergie est bien libérée par la lave qui se solidifie en perdant cette énergie.

31. Toute l'énergie libérée par la solidification doit être évacuée par conduction thermique dans la lave solide car la lave en fusion reste à la température T_f . C'est la loi de FOURIER qui permet d'exprimer le flux thermique surfacique associé (ou encore la puissance thermique surfacique). On a donc une énergie évacuée pendant la durée dt qui est $\delta Q = -\kappa \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y_s} S dt$. On obtient bien l'expression fournie : $\rho \Delta h_{sol \rightarrow liq} (T_f) \frac{dy_s}{dt} = \kappa \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y_s}$.

32. On a $\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y_s} = (T_f - T_0) \frac{\partial \theta}{\partial y_s}$. Il faut calculer $\frac{\partial \theta}{\partial y_s}$, cela donne $\frac{\partial \theta}{\partial y_s} = \frac{\partial \theta}{\partial \eta_s} \frac{\partial \eta_s}{\partial y_s} = \frac{\partial \theta}{\partial \eta_s} \frac{1}{2\sqrt{Dt}}$. Mais $y_s = \eta_s 2\sqrt{Dt}$ d'où $\frac{dy_s}{dt} = \eta_s \sqrt{D} \frac{1}{\sqrt{t}}$. On peut écrire $\rho \Delta h_{sol \rightarrow liq} \eta_s \sqrt{D} \frac{1}{\sqrt{t}} = \kappa (T_f - T_0) \frac{\partial \theta}{\partial \eta_s} \frac{1}{2\sqrt{Dt}}$. On peut simplifier cette relation pour écrire $\rho \Delta h_{sol \rightarrow liq} \eta_s 2D = \kappa (T_f - T_0) \frac{\partial \theta}{\partial \eta_s}$. En utilisant l'expression de la diffusivité thermique $D = \frac{\kappa}{\rho c}$, on peut encore écrire $2\Delta h_{sol \rightarrow liq} \eta_s = c(T_f - T_0) \frac{\partial \theta}{\partial \eta_s}$. Mais nous savons que $\eta_s = \lambda$ par ce qu'a posé l'énoncé. On en déduit donc avec $\frac{\partial \theta}{\partial \eta_s} = B \exp -\lambda^2$ avec $B = \frac{1}{\text{erf}(\lambda) \frac{2}{\sqrt{\pi}}}$. Cela permet de former l'expression $\frac{\partial \theta}{\partial \eta_s} = \frac{\exp -\lambda^2}{\text{erf}(\lambda)} \frac{2}{\sqrt{\pi}}$. L'expression proposée par l'énoncé est démontrée : $\frac{\exp(-\lambda^2)}{\lambda \text{erf}(\lambda)} = \frac{\sqrt{\pi}}{c(T_f - T_0)} \Delta h_{sol \rightarrow liq} (T_f)$.

33. L'algorithme doit résoudre une équation de type $f(\lambda) = A$. On prend une valeur de λ dans l'intervalle proposé par exemple $[0; 3]$, par exemple au milieu et on teste $\lambda = 1,5$. On obtient une valeur $f(\lambda)$. Si $f(\lambda) > A$, cela signifie que $\lambda \in [1,5; 3]$. On reprend le processus au milieu de l'intervalle en $\lambda = 2,25$ et on continue à déterminer si la valeur recherchée est à droite ou à gauche du milieu. L'intervalle se réduit de plus en plus. On cernera ainsi la valeur recherchée progressivement. Cette méthode porte le nom de **dichotomie**.

34. Avec les valeurs numériques fournies, on trouve $\frac{\sqrt{\pi} \Delta h_{sol \rightarrow liq}}{c(T_f - T_0)} \simeq 0,72$ sans calculatrice... pour les plus courageux et $0,7$ pour ceux qui le sont un peu moins. Pour avoir $\frac{\exp -\lambda^2}{\lambda \text{erf}(\lambda)} = 0,72$, on estime assez grossièrement par lecture sur le graphique proposé que $\lambda \simeq 0,8$ ce qui fait que l'on pouvait se contenter de $0,7$ au départ. Or, nous savons que $y_s = 2\lambda \sqrt{Dt}$. Toujours sans calculatrice, on effectue l'application numérique pour 6 mois. On trouve $y_s \simeq 1,6\sqrt{11}$ et donc $y_s \simeq 5,3 \text{ m}$.

35. Sur le graphique, on trouve $y_s \simeq 6 \text{ m}$. Le calcul est plutôt satisfaisant dans ces conditions. Le modèle semble bien adapté.