

Devoir libre de Sciences Physiques n°3 du 04-11-2024

— Solutions —

Problème n° 1 – Fluctuations d'intensité d'un laser

ENS MPI¹ 2010

A. Refroidissement d'un résonateur mécanique

1. La relation de la dynamique projetée sur l'axe Ox donne $m\ddot{x} + Kx = 0$. La pulsation propre de l'oscillateur

est $\boxed{\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}}$.

2. Dans cette question, il y a équivoque entre la pulsation de résonance en régime harmonique forcé et la pulsation des oscillations amorties souvent appelée pseudo-pulsation. L'équation différentielle du mouvement est maintenant $m\ddot{x} + m\gamma\dot{x} + Kx = 0$ qui devient $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Le discriminant de l'équation caractéristique est $\Delta = \gamma^2 - 4\omega_0^2 < 0$ puisque le système est faiblement amorti. Les racines sont donc complexes de la forme

$r = -\frac{\gamma}{2} \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$. Les solutions sont de la forme $x(t) = \exp(-\frac{\gamma}{2}t)(A \cos \Omega t + B \sin \Omega t)$ avec $\boxed{\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}}$.

Au premier ordre en γ/ω_0 , on peut effectivement voir que $\Omega \simeq \omega_0$. Pour une résonance d'amplitude, il faudrait exciter l'oscillateur avec une force de la forme $F_0 \cos \omega t$. En utilisant la notation complexe, on trouve que $[(\omega_0^2 - \omega^2) + j\gamma\omega]\underline{x} = F_0/m$. L'amplitude est donnée par $|\underline{x}|^2 = \frac{F_0^2/m^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$. Cette amplitude est maximale lorsque $D(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2$ passe par un minimum. Le calcul de la dérivée montre que cela se produit pour $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}$ à condition évidemment que $\gamma < \omega_0\sqrt{2}$. On notera toutefois qu'au premier ordre en γ/ω_0 , on peut confondre ω_r et Ω .

3. La forme de la solution est $x(t) = \exp(-\frac{\gamma}{2}t)(A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t)$. Or, à $t = 0$, on a $x = x_0$ et donc $A = x_0$. Le système est lâché sans vitesse initiale. Le calcul de la vitesse donne $\dot{x} = \exp(-\frac{\gamma}{2}t)((B\omega_0 - \frac{\gamma}{2}A) \cos \omega_0 t - (A\omega_0 + \frac{\gamma}{2}B) \sin \omega_0 t)$. Comme $\dot{x} = 0$ en $t = 0$, on doit avoir $0 = B\omega_0 - \frac{\gamma}{2}A$ et, par conséquent, $B = \frac{\gamma x_0}{2\omega_0}$. On écrit donc que $x(t) = x_0 \exp(-\frac{\gamma}{2}t)[\cos \omega_0 t + \frac{\gamma}{2\omega_0} \sin \omega_0 t]$. Comme $\gamma \ll \omega_0$, on va simplifier l'expression précédente pour conclure que $\boxed{x = x_0 \exp(-\frac{\gamma}{2}t) \cos \omega_0 t}$. L'allure de la courbe est donnée à la figure 1.

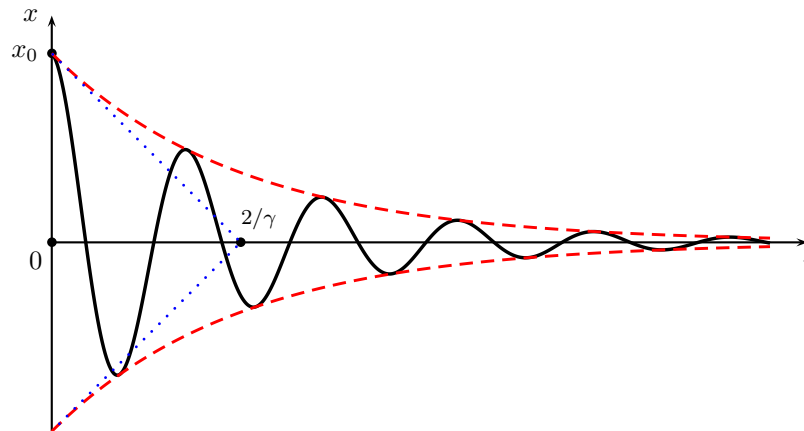


FIGURE 1 – Oscillations amorties

4. On a $E_p = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}Kx_0^2 \exp(-\gamma t) \cos^2 \omega_0 t$ et $E_c = \frac{m}{2}\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2 \exp(-\gamma t) \sin^2 \omega_0 t$. L'énergie mécanique est donnée par : $\boxed{E_m = \frac{1}{2}Kx_0^2 \exp(-\gamma t)}$ puisque $m\omega_0^2 = K$. On constate que l'énergie mécanique diminue du fait des frottements fluides.

5. Les chocs étant aléatoires, il y en aura $\boxed{\text{autant d'un côté du miroir que de l'autre côté}}$.

6. L'amortissement étant très faible, on raisonne sur une durée qui permet de considérer une forme de solution $x = x_T \cos \omega_0 t$ non amortie. On a ainsi $E_c = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_T^2 \sin^2 \omega_0 t$ et $E_p = \frac{1}{2}Kx_T^2 \cos^2 \omega_0 t$. Sachant que sur une période $\langle \cos^2 \omega_0 t \rangle = \frac{1}{2}$, on trouve que l'énergie mécanique moyenne est $\langle E_m \rangle = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_T^2 = k_B T$.

L'amplitude des oscillations est : $\boxed{x_T = \sqrt{\frac{2k_B T}{m\omega_0^2}}}$.

7. On prendra une température $T \simeq 300$ K, on trouve $\boxed{x_T \simeq 5 \times 10^{-14} \text{ m}}$. Cette amplitude est très faible, nettement en dessous du picomètre.

8. Puisqu'on étudie une phase où l'amortissement est négligeable, l'énergie mécanique se conserve. Il faut donc

1. En 2010, l'acronyme MPI n'avait pas la même signification qu'aujourd'hui, il signifiait concours ENS Maths-Physique-Informatique pour la filière MP.

que la puissance de la force de LANGEVIN compense la force de frottement : $P_{F_T} + P_{f_r} = 0$ avec $P_{f_r} = -m\gamma\dot{x}^2$. La puissance moyenne de la force de LANGEVIN est donc $P_{F_T} = m\gamma <\dot{x}^2>$. Or $\dot{x}^2 = \omega^2 x_T^2 \sin^2 \omega_0 t$, on en déduit que $<\dot{x}^2> = \frac{1}{2}\omega_0^2 x_T^2$ et donc que $P_{F_T} = \gamma \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_T^2$. On trouve bien que : $P_{F_T} = \gamma k_B T$.

9. On ajoute au bilan de force une force de frottement fluide de la forme $-gm\gamma\dot{x}$. La relation de la dynamique conduit alors à : $\ddot{x} + (1+g)\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Comme la puissance de la force de LANGEVIN est toujours la même, on a $P_{F_T} = \gamma k_B T = m\gamma(1+g) <\dot{x}^2> = \frac{1}{2}\gamma m \omega_0^2 x_{cr}^2 (1+g)$. La nouvelle amplitude des oscillations en régime permanent est $x_{cr} = \sqrt{\frac{2k_B T}{(1+g)m\omega_0^2}}$ ce qui donne : $x_{cr} = \frac{x_T}{\sqrt{1+g}}$.

10. L'énergie mécanique est au carré de l'amplitude et on a $E'_m = \frac{1}{2} \frac{m\omega_0^2 x_T^2}{1+g} = k_B T'$. On en déduit que, puisque $\frac{1}{2} m \omega_0^2 x_T^2 = k_B T$, l'on a : $T' = \frac{T}{1+g}$.

11. Les fluctuations thermiques ne dépendent que de la température et pas de la pression, sauf si le fait d'augmenter la pression était suivi d'une augmentation de la température ce qui n'est pas le cas envisagé ici.

B. Mesure de petits déplacements

12. Considérons le faisceau 1 qui va être détecté par le photodétecteur Ph_1 . Il y parvient une onde qui a traversé la lame séparatrice (coefficient t) qui va vers le miroir M_2 (déphasage de φ) et qui revient se réfléchir sur la lame (coefficient $-r$). Le déphasage par rapport à l'autre faisceau est $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} 2(\Delta L_0 + x(t))$. L'amplitude est donc $-a_0 t r \exp j\varphi$. Pour l'autre rayon parvenant sur Ph_1 , c'est une réflexion (coefficient r) pour aller vers le miroir M_1 et une transmission (coefficient t) à la traversée de la lame. L'amplitude est donc $a_0 r t$. Finalement sur le détecteur Ph_1 , on récupère l'amplitude totale $s_1 = a_0 r t (1 - \exp j\varphi)$. L'intensité est donc $I_1 = \alpha s_1 s_1^* = \frac{\alpha}{4} a_0^2 (2 - 2 \cos \varphi)$. Avec une intensité rentrant dans l'interféromètre $I_0 = \alpha a_0^2$, on peut écrire que $I_1 = \frac{I_0}{2} (1 - \cos \frac{4\pi}{\lambda} (\Delta L_0 + x(t)))$. Pour l'amplitude arrivant sur le second détecteur, on a une contribution qui provient d'un faisceau qui est allé sur le miroir M_2 et qui a fait deux traversées de la lame : amplitude $a_0 t^2 \exp j\varphi$ et une autre qui a fait deux réflexions sur la lame : amplitude $a_0 r^2$. Comme $r^2 = t^2$, on arrive à une amplitude totale $s_2 = \frac{1}{2} a_0 (1 + \exp j\varphi)$ et donc une intensité de la forme $I_2 = \frac{I_0}{2} (1 + \cos \frac{4\pi}{\lambda} (\Delta L_0 + x(t)))$.

13. On en déduit que $s = \eta I_0 \cos \frac{4\pi}{\lambda} (\Delta L_0 + x(t))$. On effectue un développement limité de la fonction cosinus au voisinage de 0 et on arrive à $s = \eta I_0 \cos \frac{4\pi \Delta L_0}{\lambda} - \eta I_0 \frac{4\pi}{\lambda} (\sin \frac{4\pi \Delta L_0}{\lambda}) x$. On identifie donc $s_0 = \eta I_0 \cos \frac{4\pi \Delta L_0}{\lambda}$ et $\alpha = -\eta I_0 \frac{4\pi}{\lambda} \sin \frac{4\pi \Delta L_0}{\lambda}$.

14. On souhaite avoir la plus grande valeur de $\alpha > 0$ possible. Il faut que $\sin \frac{4\pi \Delta L_0}{\lambda} = -1$. Cela signifie que $\frac{4\pi \Delta L_0}{\lambda} = (4p+3)\frac{\pi}{2}$. La condition sur la longueur est donc : $\Delta L_0 = (4p+3)\frac{\lambda}{8}$. Si cette condition est réalisée, on constate que $s_0 = 0$ à ce moment-là. La réponse du détecteur est alors linéaire avec $s(t) = \alpha_{max} x(t)$ où l'on a posé $\alpha_{max} = \frac{\eta I_0 4\pi}{\lambda}$.

15. Si ΔL_0 varie de $\frac{\lambda}{8}$ alors la sensibilité $\alpha = 0$ puisque $\sin \frac{4\pi (\Delta L_0 + D(t))}{\lambda} = \sin(\frac{4\pi \Delta L_0}{\lambda} + \frac{\pi}{2}) = 0$.

16. D'après ce que l'on a vu avant, $s(t) = \eta I_0 \cos \frac{4\pi}{\lambda} (\Delta L_0 + \lambda \frac{t}{t_d}) - x(t) \eta I_0 \frac{4\pi}{\lambda} \sin \frac{4\pi}{\lambda} (\Delta L_0 + \lambda \frac{t}{t_d})$. On développe le cosinus et le sinus en utilisant les conditions vues avant ($\sin \frac{4\pi \Delta L_0}{\lambda} = -1$ et $\cos \frac{4\pi \Delta L_0}{\lambda} = 0$). On obtient alors $s'_0(t) = \eta I_0 \sin 4\pi \frac{t}{t_d}$ et $\alpha'(t) = \eta I_0 \frac{4\pi}{\lambda} \cos 4\pi \frac{t}{t_d}$. Avec cette forme, on retrouve le fait que $\alpha'(t=0) = \alpha_{max}$ et $s'_0(t=0) = 0$. La fonction $\alpha'(t)$ obtenue ici, varie assez peu au voisinage de 0. Comme de plus, $\cos \frac{\pi}{6} \simeq 0,87$ on peut estimer que la sensibilité varie peu sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{6}]$. La durée de l'expérience peut être estimée de telle sorte que $4\pi \frac{t_{exp}}{t_d} = \frac{\pi}{6}$. On trouve donc que $t_{exp} \simeq \frac{t_d}{24} \simeq 0,5$ s.

17. La période des oscillations est $T_0 = \frac{1}{f_0} = 10^{-6}$ s. On a $t_{exp} = 5 \times 10^5 T_0$, c'est une durée suffisante pour mesurer les oscillations du miroir.

18. On suppose maintenant que le déplacement du miroir M_1 est $\ell_c = \beta u_c(t) = \beta s(t)$ à cause de rétroaction réalisée sur le montage électronique. Or $s(t) = \alpha_{max} (\Delta L(t) - \Delta L_0)$ et $\Delta L(t) - \Delta L_0 = D(t) - \ell_c(t) + x(t)$. On obtient dans ces conditions : $s(t) = \frac{\alpha_{max}}{1+\beta\alpha_{max}} (D(t) + x(t))$.

19. En utilisant la forme de $D(t)$, on peut écrire que $s(t) = \frac{\alpha_{max}}{1+\beta\alpha_{max}} x(t) + \lambda \frac{\alpha_{max}}{1+\beta\alpha_{max}} \frac{t}{t_d}$. On constate sur cette expression que tout se passe comme si l'on avait affaire à une nouvelle durée caractéristique t'_d d'évolution de $D(t)$ en posant $s(t) = \frac{\alpha_{max}}{1+\beta\alpha_{max}} x(t) + \lambda \frac{t}{t'_d}$ en posant $t'_d = t_d \frac{1+\beta\alpha_{max}}{\alpha_{max}}$. Si $\beta\alpha_{max} \simeq 10^3$ alors $t'_d \simeq \beta t_d \simeq 500$ s.

20. En contre-partie, on constate que l'on passe de $s(t) = \alpha_{max} u(t)$ à $s(t) = \frac{\alpha_{max}}{1+\beta\alpha_{max}} x(t)$. La sensibilité est donc $\frac{\alpha_{max}}{1+\beta\alpha_{max}} \simeq 10^{-3}$.

21. On a un filtre passe-bas du premier ordre, le module de sa fonction de transfert est $H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}$.

Sa pulsation de coupure est ω_c . Si on veut discriminer l'effet de dilatation et celui d'oscillation, il faut que le signal basse fréquence (dilatation) passe alors que le signal de haute fréquence (oscillations) soit filtré. La pulsation de coupure doit se situer entre les deux pulsations caractéristiques des deux signaux. On doit donc avoir : $\boxed{\frac{1}{t_d} < \frac{\omega_c}{2\pi} < f_0}$. On peut choisir $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} \simeq 1 \text{ kHz}$.

22. A priori, les grandeurs évoquées sont les grandeurs complexes. On reste dans le domaine linéaire avec $\Delta L(\omega) + D(\omega) - \ell_c(\omega) + x(\omega)$ et $\ell_c(\omega) = \beta u_c(\omega)$. En ajoutant la relation de transfert $u_c(\omega) = H(\omega)s(\omega)$, on arrive à $s(\omega) = \frac{\alpha_{max}(D(\omega) + x(\omega))}{1 + \alpha_{max}\beta H(\omega)}$. En réalité, cette expression n'est satisfaisante que pour un signal monochromatique, ce qui n'est pas le cas ici. Le signal est composé de deux contributions, l'une $\omega_0 = 2\pi f_0$ pour les oscillations et l'autre $\omega_d = \frac{1}{t_d}$ pour la dilatation thermique. La linéarité de l'ensemble des composants assure du fait que la réponse sera la somme des réponses à chaque signal. On aura donc $s = \frac{\alpha_{max}}{1 + \alpha_{max}\beta H(\omega_0)}x(\omega_0) + \frac{\alpha_{max}}{1 + \alpha_{max}\beta H(\omega_d)}D(\omega_d)$. En choisissant correctement le filtre, comme on l'a vu à la question précédente, on aura $H(\omega_0) \simeq 0$ et $H(\omega_d) \simeq 1$. L'expression de la réponse sera donc : $\boxed{s = \alpha_{max}x(\omega_0) + \frac{\alpha_{max}}{1 + \alpha_{max}\beta}D(\omega_d)}$. Cette expression nous montre que l'on a bien la sensibilité maximale α_{max} pour $x(\omega_0)$, c'est-à-dire les oscillations qui nous intéressent tout en retrouvant une fonction liée à la dilatation qui va évoluer avec un temps caractéristique $t'_d = \frac{1 + \alpha_{max}\beta}{\alpha_{max}}t_d$ à cause du terme $\frac{\alpha_{max}}{1 + \alpha_{max}\beta}D(t)$.

C. Le photodétecteur

23. La puissance correspond à l'énergie par unité de temps, on a $P = \phi \frac{hc}{\lambda}$ d'où $\boxed{\phi = \frac{P\lambda}{hc}}$.

24. La conversion est de un photon pour un électron. L'intensité correspondant au nombre de d'électrons par unité de temps, on a donc $i_D = \phi e = \kappa P = \frac{\lambda e}{hc}P$. La photosensibilité est $\boxed{\kappa = \frac{\lambda e}{hc}}$.

25. Avec les valeurs numériques proposées, on trouve : $\boxed{\kappa = 5 \times 10^{-1} \text{ A} \cdot \text{W}^{-1}}$.

26. L'amplificateur opérationnel étant idéal, aucun courant ne circule au niveau de son entrée non-inverseuse. La résistance R est parcourue par l'intensité $i_{D_2} - i_{D_1}$. Comme $V_+ = V_- = s$ (montage suiveur), on en déduit que $\boxed{s = R\kappa(P_2 - P_1)}$.

27. Dans le circuit, on peut lire que $s - u_{D_1} = -V_{cc}$, $s + u_{D_2} = V_{cc}$ et $u_{D_1} + u_{D_2} = 2V_{cc}$. on a donc $2s = u_{D_1} - u_{D_2}$. Si l'on veut qu'il y ait au moins 10 V sur l'une des diodes, cela veut dire qu'il y a alors 20 V sur l'autre, en fait $|u_{D_1} - u_{D_2}| = 10 \text{ V}$ et donc $s = 5 \text{ V}$. Pour une différence $P_2 - P_1 = 0,01 \text{ W}$, on veut une réponse $s = 5 \text{ V}$. On va en déduire que $\kappa(P_2 - P_1) = 5 \times 10^{-5} \text{ A}$ et donc que $\boxed{R = \frac{s}{\kappa(P_2 - P_1)} = 100 \text{ k}\Omega}$.

28. Avec le condensateur dans le modèle de la diode, il faut reprendre l'écriture des lois de l'électricité. On a $u_{D_2} = V_{cc} - s$, $u_{D_1} = V_{cc} + s$, l'intensité du courant le condensateur de la diode D_2 est donc $i_2 = C \frac{dV_{cc} - s}{dt} = -C \frac{ds}{dt}$ car V_{cc} est stabilisée donc indépendante du temps. Pour l'intensité dans le condensateur de la diode D_1 , le raisonnement est le même $i_1 = C \frac{ds}{dt}$. Il reste à écrire la loi de nœuds en notant i_R l'intensité circulant dans la résistance R : $\kappa P_2 + i_2 = i_R + \kappa P_1 + i_1$. On en déduit que $i_R = \kappa(P_2 - P_1) - 2C \frac{ds}{dt}$ et ensuite que $s = Ri_R = \kappa R(P_2 - P_1) - 2RC \frac{ds}{dt}$. La tension de sortie obéit à l'équation différentielle $2RC \frac{ds}{dt} + s = \kappa R(P_2 - P_1) = 2R\kappa P_0 \xi \cos \omega t$. En régime permanent sinusoïdal, on recherche la solution sous forme complexe : $\underline{s}(1 + j2RC\omega) = 2\kappa R P_0 \xi$. La forme réelle de la solution est : $\boxed{s(t) = \frac{2\kappa R P_0 \xi}{\sqrt{1 + 4R^2 C^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \arctan 2RC\omega)}$.

29. La fréquence de coupure du montage est telle que $2RC2\pi f = \frac{f}{f_c}$ et donc $\boxed{f_c = \frac{1}{4\pi RC}}$.

30. Avec $R = 10^5 \Omega$, $C = 10^{-9} \text{ F}$, on a $f_c \simeq 10^3 \text{ Hz}$ d'où $\frac{f_0}{f_c} = 10^3$. On est dans la zone où le filtrage est très important puisque $\sqrt{1 + \frac{f_0^2}{f_c^2}} \simeq \frac{f_0}{f_c}$. Si l'on prend $\xi \simeq 1$ pour ce qui est peut être mesuré au mieux, on trouve que $\boxed{S_{max} = \frac{2\kappa P_0 f_c}{f_0} = 5 \times 10^{-8} \text{ V}}$. Cette valeur de la tension est beaucoup trop faible pour être mesurée dans de bonnes conditions.

31. Dans le nouveau montage proposé, on voit que la diode est soumise à une tension fixe $u_{D_1} = V_{cc}$ puisque $V_+ = V_- = 0 \text{ V}$ du fait du branchement à la masse. Dans ces conditions, l'intensité i_1 circulant dans le condensateur est nulle puisque $i_1 = C \frac{du_{D_1}}{dt} = C \frac{dV_{cc}}{dt} = 0$. Le raisonnement est identique pour la seconde diode. Le fait que $\boxed{i_1 = i_2 = 0}$ assure que le condensateur ne filtrera pas le signal comme avant.

32. On applique le théorème de MILLMAN : $V_- = (\frac{V_1}{R} + \frac{s}{R})/(\frac{2}{R})$ et $V_+ = (\frac{V_2}{R})/(\frac{2}{R})$. Comme l'amplificateur opérationnel est idéal et en régime linéaire, $V_+ = V_-$, on en déduit que $\boxed{s = V_2 - V_1}$. Le montage est un soustracteur. On a $s = 2R\kappa P_0 \xi \cos \omega t$ avec $\omega = \omega_0 = 2\pi 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $2R\kappa P_0 \xi = 5 \xi \text{ V}$.

D. Fluctuations d'intensité laser

Le laser

33. L'acronyme laser signifie Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation.

34. En 1950, le physicien français ALFRED KASTLER met au point la technique du pompage optique. Cette technique permet de placer un nombre important d'atomes dans un état d'énergie plus élevée que celle de leur état fondamental. Il restait encore à utiliser cette technique pour réaliser l'émission stimulée de lumière, en provoquant la désexcitation coordonnée de ces atomes. En 1960, le physicien américain THEODORE MAIMAN réalisa le premier laser.

35. La lumière issue d'un laser diverge très peu par rapport à des sources traditionnelles, elle est très monochromatique et surtout cohérente ce qui fait qu'elle est particulièrement appréciée pour la réalisation d'interférences comme cela été vu dans la partie précédente. Comme nous allons le voir à la question suivante, l'énergie lumineuse est beaucoup plus concentrée qu'avec une source traditionnelle.

36. La taille de la pupille de l'œil est de l'ordre de 1 mm^2 . C'est aussi l'ordre de grandeur de la section d'un laser. La puissance surfacique du laser proposé est donc $j_l = \frac{P}{S} = \frac{10^{-2}}{10^{-6}} = 10^4\text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. Une ampoule de 100 W correspond à une puissance électrique consommée de 100 W mais une puissance lumineuse produite de seulement 10 W car son rendement est relativement mauvais ($\leq 10\%$). En général, on se situe à une distance de l'ordre du mètre de l'ampoule qui rayonne dans toutes les directions de l'espace ou presque. La puissance surfacique associée est donc $j_a = \frac{10}{4\pi R^2}$ avec $R \simeq 1\text{ m}$. On a donc $j_a \simeq 1\text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. On comprend la dangerosité du laser avec : $\frac{j_l}{j_a} \simeq 10^4$.

37. On suppose que le milieu est suffisamment dilué pour que la vitesse des photons soit c . Pour simplifier, on ne considère que des aller-retours et donc une durée de base $t_b = \frac{2L}{c}$. Après une durée $\Delta t_1 = t_b$, le photon possède une probabilité T de sortir et $R = 1 - T$ d'être réfléchi. Si le photon effectue un second aller-retour, la durée est $2t_b$ et la probabilité qui correspond à une sortie à ce moment-là est TR . Pour trois aller-retours, c'est une durée $3t_b$ et une probabilité TR^2 et ainsi de suite. Le temps de vie moyen d'un photon dans la cavité est donc $t_{\text{moy}} = \sum_i i t_b P_i$ avec $P_i = TR^{i-1}$. En factorisant, on obtient $t_{\text{moy}} = \frac{2L}{c} T (1 + 2R + 3R^2 + 4R^3 \dots)$. Il faut calculer la somme $S = 1 + 2R + 3R^2 + 4R^3 \dots$. On peut observer que cette somme est $S = (1 + R + R^2 + R^3 \dots)(R + 2R^2 + 3R^3 \dots)$. On sait que $1 + R + R^2 + R^3 \dots = \frac{1}{1-R}$ et en factorisant R dans la seconde somme, on voit que $R + 2R^2 + 3R^3 \dots = R(1 + 2R + 3R^2 + \dots) = RS$. On en conclut que $S = \frac{1}{1-R} + RS$ d'où finalement $S = \frac{1}{(1-R)^2} = \frac{1}{T^2}$. On trouve que la durée de vie moyenne dans la cavité laser est donc : $t_{\text{moy}} = \frac{2L}{c} \frac{1}{T}$.

38. On a $P = TP_{\text{in}}$ et donc $P_{\text{in}} = \frac{P}{T} = 0,2\text{ W}$. On trouve $t_{\text{moy}} \simeq 3 \times 10^{-8}\text{ s}$.

Statistique des photons émis par un laser

39. On a $\bar{P} = TP_{\text{inc}}$ et $P_{\text{inc}} = \frac{N}{\tau} \frac{hc}{\lambda}$. On a donc : $N = \frac{\bar{P}\lambda\tau}{Thc}$.

40. Sur un groupe de N photons, avoir k photons émis pendant la durée τ correspond à une probabilité T^k mais il ne faut pas oublier que dans le même temps, il y a $(N - k)$ photons qui ne doivent pas être émis (probabilité $(1 - T)$). Il faut donc multiplier les deux probabilités précédentes. La probabilité de l'événement étudié est donc $T^k(1 - T)^{N-k}$. Enfin, cette probabilité est valable pour n'importe quel groupe de k photons formés parmi N photons au total. Or, il y a un nombre de possibilités correspondant à C_N^k . Finalement la probabilité est : $p_k = \frac{N!}{k!(N-k)!} T^k (1 - T)^{N-k}$.

41. On introduit $\mu = NT$ dans l'expression de la probabilité p_k précédente : $p_k = \frac{\mu^k}{k!} \frac{1}{N^k} \frac{N!}{(N-k)!} (1 - \frac{\mu}{N})^{N-k}$. Or $\frac{1}{N^k} \frac{N!}{(N-k)!} = \frac{N(N-1)(N-2)\dots(N-k+1)}{N^k} = 1(1 - \frac{1}{N})(1 - \frac{2}{N})(1 - \frac{k-1}{N})$. Avec cette dernière expression, on constate que la limite lorsque $N \rightarrow \infty$ va être 1. Il reste le terme $(1 - \frac{\mu}{N})^{N-k}$. k étant fixé, si N tend vers l'infini, on peut écrire que $\lim_{N \rightarrow \infty} (1 - \frac{\mu}{N})^{N-k} = \lim_{N \rightarrow \infty} (1 - \frac{\mu}{N})^N$. Cette dernière expression peut évoluer en prenant l'exponentielle du logarithme. On a $\lim_{N \rightarrow \infty} \exp N \ln(1 - \frac{\mu}{N}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \exp N(-\frac{\mu}{N}) = \exp -\mu$. On a donc bien démontré que $p_k = \frac{\mu^k}{k!} \exp -\mu$ avec $NT = \mu$.

42. On a $\bar{k} = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \exp -\mu \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\mu^k}{k!}$. Or $\frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!}$. En utilisant cette remarque, on peut transformer l'écriture de la somme : $\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\mu^k}{k!} = \mu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} = 1 + \mu + \frac{\mu^2}{2!} + \frac{\mu^3}{3!} \dots$. Cette somme apparaît comme le développement en série de l'exponentielle. On a donc $\exp \mu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!}$. Finalement, on a $\bar{k} = (\exp -\mu)\mu \exp \mu$. On peut conclure que la valeur moyenne du nombre de photons émis est : $\bar{k} = \mu = NT$. Ce résultat est finalement assez intuitif puisque l'on dispose de N photons et que chacun a la probabilité T d'être

émis. On voit bien que le nombre effectivement émis est NT en n'oubliant pas que le raisonnement n'est valable que pour $N \rightarrow \infty$ avec NT fixé.

43. Il faut commencer par calculer $\overline{k^2}$. La procédure ressemble à la précédente, on a $\overline{k^2} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k = \exp -\mu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 \mu^k}{k!}$. Dans k^2 , un facteur k va simplifier un terme du factoriel de k mais le second pose problème car il faudrait simplifier $(k-1)$. On s'en sort en écrivant que $k = (k-1) + 1$. Le développement amène $\overline{k^2} = (\exp -\mu) [\mu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} + \mu^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mu^{k-2}}{(k-2)!}]$. On fait à nouveau apparaître la fonction exponentielle pour écrire que $\overline{k^2} = (\exp -\mu) [\mu \exp \mu + \mu^2 \exp \mu]$. On trouve donc que $\overline{k^2} = \mu + \mu^2$. L'écart-type est $\sigma(k) = \sqrt{\mu + \mu^2 - \mu^2}$. On trouve que $\sigma(k) = \sqrt{\mu}$. L'incertitude relative est $\frac{\sigma(k)}{\overline{k}} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$.

44. On a $\tau = 1$ s. Avec l'expression de N en fonction de \overline{P} établie avant, on a $NT = \frac{\overline{P}\tau\lambda}{hc}$ et par conséquent $\frac{\sigma(k)}{\overline{k}} = \sqrt{\frac{hc}{\overline{P}\tau\lambda}}$. On trouve $\frac{\sigma(k)}{\overline{k}} = 5 \times 10^{-9}$. Si la durée de la mesure avait été $\tau = 10^{-9}$ s, alors $\frac{\sigma(k)}{\overline{k}} = 10^{-4}$. La différence est notable, on comprend l'importance de la stabilisation pour effectuer des mesures pendant de longues durées.

Réduction des fluctuations d'intensité

45. La force $K\overline{x}$ est compensée par les chocs des photons. Pour un photon, le bilan de quantité de mouvement est $\Delta p_1 = \frac{2h}{\lambda}$. Le nombre de photons arrivant par unité de temps est $\frac{dN}{dt} = \frac{\lambda \overline{P}}{hc}$. Le bilan de quantité de mouvement est donc $\frac{\lambda \overline{P}}{hc} \frac{2h}{\lambda} = \frac{2\overline{P}}{c}$. On écrit donc que $K\overline{x} = \frac{2\overline{P}}{c}$ et par conséquent : $\overline{x} = \frac{2\overline{P}}{Kc}$.

46. Il y a k_n photons sur une longueur $c\tau$. La densité est : $d_n = \frac{k_n}{c\tau}$.

47. Lorsque le premier photon arrive sur le miroir situé à l'abscisse x_n à la date t_n , le dernier se situe à la distance $c\tau$ du miroir. Or, le miroir va se déplacer pendant le temps que mettra le dernier photon pour arriver. Ce dernier photon frappe le miroir situé à l'abscisse x_{n+1} à la date t_{n+1} . Pendant la durée $t_{n+1} - t_n$ le photon a dû parcourir la distance $c\tau + x_{n+1} - x_n$. Il le fait à la vitesse c , on a donc $t_{n+1} - t_n = \tau + \frac{x_{n+1} - x_n}{c}$.

48. Le premier photon a parcouru la distance $c(t_{n+1} - t_n)$ depuis la position x_n jusqu'au moment où le dernier photon frappe le miroir alors situé à l'abscisse x_{n+1} . La distance qui sépare le premier photon du dernier est donc $L' = c(t_{n+1} - t_n) + x_{n+1} - x_n$. La nouvelle densité est $d'_n = \frac{k_n}{L'}$. On trouve $d'_n = \frac{k_n}{c\tau + 2(x_{n+1} - x_n)}$.

49. S'il y a plus de photons que la moyenne alors il y aura plus de transfert de quantité de mouvement sur le miroir qui va plus reculer donc $x_{n+1} - x_n > \Delta \overline{x}$. Le terme $x_{n+1} - x_n$ situé au dénominateur va faire diminuer la densité linéique de photons et réciproquement si, au départ, la densité est moindre. Le miroir tend donc bien à lisser les fluctuations de densité de photons et donc de puissance.

50. La quantité de mouvement cédée est $k_n \frac{2h}{\lambda}$ pendant la durée $t_{n+1} - t_n$. La force est donnée par l'expression $F_n = \frac{k_n}{t_{n+1} - t_n} \frac{2h}{\lambda}$. En utilisant l'expression de $t_{n+1} - t_n$, on arrive à $F_n = \frac{k_n}{c\tau + (x_{n+1} - x_n)} \frac{2hc}{\lambda}$.

51. D'après la relation de la dynamique, on a $m\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext}$ mais, ici, on néglige l'inertie ce qui veut dire que $m \simeq 0$. Comme l'énoncé nous l'indique, on écrit la relation de la dynamique à la date t_{n+1} selon $F_{chocs} + F_{ressort} = 0$. Cela conduit à $F_n = Kx_{n+1}$. En utilisant les résultats précédents, on arrive à l'équation $x_{n+1}^2 - x_{n+1}(\overline{x} - c\tau) - k_n \frac{2hc}{\lambda K} = 0$.

52. On a $\overline{k} = \frac{\overline{P}\tau\lambda}{hc}$ et $\overline{x} = \frac{2\overline{P}}{Kc}$. Cela permet d'écrire que $\frac{hc}{\lambda} = \frac{\overline{P}\tau}{\overline{k}}$ d'où $\frac{2hc}{\lambda K} = \frac{\overline{x}c\tau}{\overline{k}}$. L'équation s'écrit alors $x_{n+1}^2 - x_{n+1}(\overline{x} - c\tau) - \frac{k_n}{\overline{k}} \overline{x}c\tau = 0$.

53. Si $\overline{x} \ll c\tau$ alors l'équation précédente s'écrit $x_{n+1}^2 + x_{n+1}c\tau - \frac{k_n}{\overline{k}} \overline{x}c\tau = 0$. On peut encore écrire que $x_{n+1}^2 \ll x_{n+1}c\tau$ et, par conséquent, conclure que $x_{n+1} \simeq \frac{k_n}{\overline{k}} \overline{x}$.

54. On avait $d_n = \frac{k_n}{c\tau}$ et $d'_n = \frac{k_n}{c\tau + 2(x_{n+1} - x_n)}$. Le rapport conduit à $d'_n = \frac{d_n}{1 + 2(x_{n+1} - x_n)/(c\tau)}$. Avec l'expression obtenue à la question précédente et $x_n = \overline{x}$, on peut conclure que $d'_n = d_n / (1 + A(\frac{k_n - \overline{k}}{\overline{k}}))$ où l'on a posé $A = \frac{2\overline{x}}{c\tau}$.

55. Il n'y a pas de photons perdus, donc si on retrouve la puissance moyenne, on doit retrouver la densité moyenne : $\overline{d'_n} = \overline{d} = \frac{\overline{k}}{c\tau}$. On peut remarquer dans la formule précédente que si $d_n > \overline{d}$ alors $d_n - \overline{d} > 0$ et si $d_n < \overline{d}$ alors $d_n - \overline{d} < 0$. Il y a des effets de compensation qui vont jouer sur d'_n .

56. On pose $\epsilon_n = \frac{d_n - \overline{d}}{\overline{d}}$ et $\epsilon'_n = \frac{d'_n - \overline{d}}{\overline{d}}$. D'après l'expression donnant d'_n , on arrive à $\epsilon'_n = \frac{\epsilon_n + 1}{1 + A\epsilon_n} - 1 = \frac{(1-A)\epsilon_n}{1 + A\epsilon_n}$. Si on effectue un développement limité en ne conservant que les termes de premier ordre en A , on peut écrire que

$\epsilon'_n \simeq (1-A)\epsilon_n$. On a donc $\sigma(\epsilon'_n) = (1-A)\sigma(\epsilon_n)$. Or, ϵ_n possède le même écart-type que d_n et il en est de même pour ϵ'_n et d'_n . On a donc bien $\sigma(d'_n) = \sigma(d_n)(1-A)$. Ce résultat indique que les fluctuations de l'intensité laser sont atténuées par la présence du miroir même si l'effet est modeste puisque $A \ll 1$. C'est d'ailleurs bien ce qu'explique l'énoncé.

Problème n° 2 – Ascension atmosphérique en montgolfière

Mines MP

2008

A. Atmosphère en équilibre

Atmosphère isotherme

1. La loi des gaz parfaits est $pV = nRT_0 = \frac{m}{M_e}RT_0$. On en déduit que : $\mu_e = \frac{M_e P}{RT_0}$.

2. L'équilibre des fluides est donné par la loi $\vec{\nabla} P = \vec{f}_{vol}$ dans un référentiel galiléen où \vec{f}_{vol} représente les forces volumiques. Dans le référentiel terrestre, seul le poids sera pris en compte, on a donc l'équation différentielle sur l'axe vertical puisque le poids n'a pas d'autre composante : $\frac{dP}{dz} = -\mu_e g = -\frac{PM_e g}{RT_0}$. En considérant la hauteur barométrique, on obtient $\frac{dP}{P} = -\frac{dz}{H}$ qui s'intègre facilement selon : $P(z) = P_0 \exp -\frac{z}{H}$.

3. La masse molaire de l'air est une moyenne reflétant la composition molaire de 80% de N_2 et 20% de O_2 , on trouve donc $M_e = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Cela nous permet de trouver $H = 8,43 \text{ km}$. La pression est la moitié de la pression au niveau de la mer pour $z_{50\%}^{iso} = H \ln 2 = 5,84 \text{ km}$, c'est un peu plus haut que le sommet du Mont-Blanc situé vers 4810 m et nettement plus haut que le point culminant de la Loire-Atlantique situé (semble-t-il) à Bretèche en Châteaubriant (115 m)... Le modèle isotherme pour $z_{50\%}^{iso} = 5,84 \text{ km}$ n'est vraiment pas adapté.

Équilibre polytropique

4. On utilise toujours la loi de la statique des fluides $\frac{dP}{dz} = -\mu(z)g$. En utilisant l'expression de la masse volumique, on arrive à l'équation différentielle : $\frac{dP}{P} - \frac{1}{H} \frac{dz}{1-\alpha z}$ qui s'intègre selon : $P(z) = P_0(1-\alpha z)^{z_0/H}$ ce qui amène $\beta = \frac{z_0}{H}$. En reprenant l'expression de la loi des gaz parfaits, on trouve la loi attendue $\mu(z) = \mu_0(1-\alpha z)^{\beta-1}$.

5. On trouve $z_{50\%}^{iso} = z_0(1 - (\frac{1}{2})^{H/z_0})$ et numériquement : $z_{50\%}^{iso} = 5,36 \text{ km}$. Cela est logique car la baisse de la température avec l'altitude entraîne obligatoirement une baisse de pression plus rapide que dans le modèle isotherme.

6. Avec la loi de température, on trouve $\frac{T_0}{z_0} = 6,94 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$ avec les unités adaptées. On en déduit que la valeur de z_0 est : $z_0 = 41,5 \text{ km}$. Pour la loi de pression, on utilise le fait que $\beta = 5,26 = \frac{z_0}{H}$. Cela nous permet de calculer $z_0 = 44,3 \text{ km}$. On peut constater un certain écart entre les deux valeurs trouvées de l'ordre de 7%.

Le modèle polytropique n'est pas tout à fait satisfaisant.

B. Ascension de la montgolfière

Équilibre de la montgolfière

7. La loi des gaz parfaits donne $P_e V_0 = \frac{m_i}{M_e} RT_i$. Avec la relation exprimant la masse volumique de l'air extérieur $\mu_e = \frac{M_e P_e}{RT_e}$, on peut aboutir à : $m_i = \mu_e V_0 \frac{T_e}{T_i}$.

8. À l'équilibre mécanique, la poussée d'ARCHIMÈDE exercée par l'air compense le poids de la montgolfière et de l'air chaud qu'elle contient. Cette poussée d'ARCHIMÈDE correspond au poids du volume d'air extérieur occupé par la montgolfière : $\Pi_A = \mu_e V_0 g$. Le poids de la montgolfière étant $(m + m_i)g$, on en déduit qu'à l'équilibre $m + m_i = \mu_e V_0$ et par conséquent : $m = \mu_e V_0 (1 - \frac{T_e}{T_i}) = m_i \left(\frac{T_i}{T_e} - 1 \right)$.

9. La poussée d'ARCHIMÈDE exercée par l'air compense mg lorsque $\mu(z_m)V_0 = m = \mu_e V_0 (1 - \alpha z_m)^{\beta-1}$. On en déduit que : $z_m = \frac{1}{\alpha} \left(1 - \left(\frac{m}{\mu_0 V_0} \right)^{1/(\beta-1)} \right)$. On trouve tout d'abord $\mu_0 = \frac{M_e P_0}{RT_0} = 1,23 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ puis $z_m = 13,1 \text{ km}$.

10. On applique la relation vue avant $m = \mu_0 V_0 (1 - \frac{T_0}{T_d})$. La relation demandée est : $\frac{m}{\mu_0 V_0} = 1 - \frac{T_0}{T_d}$. La température est $T_d = 362 \text{ K}$.

11. L'équilibre de la montgolfière est donné par : $m + m_i = \mu_e V_0$. En tenant compte de la relation précédente et des expressions des masses volumiques de l'air intérieur et extérieur, on arrive à : $P_e \left(\frac{1}{T_e} - \frac{1}{T_i} \right) = \kappa_1 \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_d} \right)$ et donc $\kappa_1 = P_0$. Le second membre de l'équation précédente étant une constante, on peut différentier et identifier

à 0 : $\frac{T_e dP_e - P_e dT_e}{T_e^2} = \frac{T_i dP_i - P_i dT_i}{T_i^2}$. En organisant correctement cette expression et en passant des différentielles comme dT_i aux quantités infinitésimales comme δT_i , on trouve la relation : $\boxed{\frac{\delta T_i}{T_i} = \frac{T_i}{T_e} \frac{\delta T_e}{T_e} + \frac{\delta P_e}{P_e} \left(1 - \frac{T_i}{T_e}\right)}$.

12. En partant de $m = \mu_e V_0 \left(1 - \frac{T_e}{T_i}\right)$ avec $T_e = T_0(1 - Z)$ et $\mu_e = \mu_0(1 - Z)^{\beta-1}$, on arrive tout d'abord à $m = \mu_0 V_0 (1 - Z)^{\beta-1} \left(1 - \frac{1-Z}{\theta_i}\right)$ et puis à la relation demandée : $(1 - Z)^{\beta-1} = \frac{m}{\mu_0 V_0} + \frac{(1-Z)^\beta}{\theta_i}$. D'après ce qui a été fait avant, on a $m = \mu_0 V_0 (1 - Z_m)^{\beta-1}$. Cela nous permet, après calculs, de donner la forme d'évolution de θ_i selon : $\boxed{\theta_i = \frac{1-Z}{1 - \left(\frac{1-Z_m}{1-Z}\right)^{\beta-1}}}$. Les représentations de l'évolution de θ_i en fonction de Z sont données sur la figure 2.

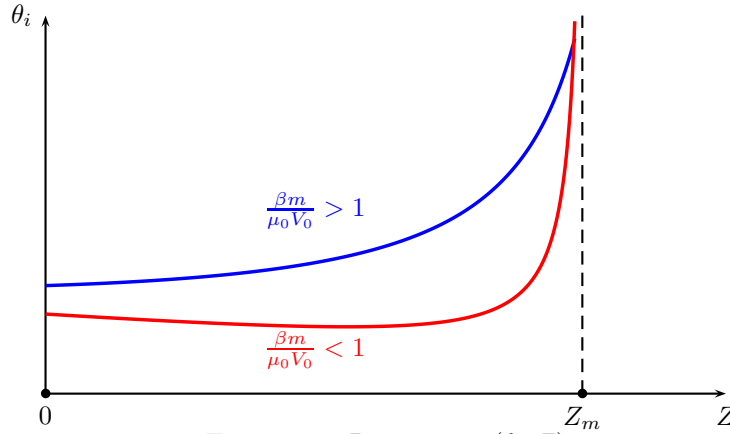


FIGURE 2 – Diagramme (θ_i, Z)

On peut observer sur la figure 2 que lorsque $\frac{\beta m}{\mu_0 V_0} < 1$, la courbe donnant θ_i est d'abord décroissante puis croissante. Dans la zone de décroissance, cela signifie que la température d'équilibre pour une altitude $z_2 > z_1$, on trouve une température $\theta_1 > \theta_2$. Contrairement à la situation classique où on élève la température pour faire monter la montgolfière, ici on aura l'effet contraire : la montgolfière va descendre lorsque l'on va chauffer. Compte tenu de l'inertie thermique, il ne sera pas évident de contrer cet effet en refroidissant. Le risque d'écrasement au sol est important.

13. On a $V_{max} = \frac{\beta m}{\mu_0}$. On trouve $\boxed{V_{max} = 2030 \text{ m}^3}$. Pour une température T_{max} , on doit avoir $m + \mu_i V_{min} = \mu_e V_{min}$ avec $\mu_i = \frac{MP_0}{RT_{max}}$ et $\mu_e = \frac{MP_0}{RT_0}$ puisque l'on se situe à l'altitude $z = 0$. On trouve donc : $V_{min} = \frac{mR}{M_e P_0} \frac{T_0 T_{max}}{T_{max} - T_0}$. L'application numérique donne $\boxed{V_{min} = 1790 \text{ m}^3}$. Les altitudes z_m correspondantes sont données par $z_m = \frac{1}{\alpha} \left[1 - \left(\frac{m}{\mu_0 V}\right)^{1/(\beta-1)}\right]$. On trouve : $z_m(V_{max}) = 13,4 \text{ km}$ et $z_m(V_{min}) = 12,3 \text{ km}$.

Ascension par apport thermique

14. La transformation est isobare, le transfert thermique s'exprime par $\delta Q = n_i C_p \delta T_i^{(1)}$. D'après la loi de MAYER, on a $C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$. avec $n_i = \frac{P_e V_0}{RT_i}$, on trouve : $\boxed{\frac{\delta T_i^{(1)}}{T_i} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\delta Q}{P_e V_0}}$.

15. Toujours d'après la loi des gaz parfaits, on a $m_i = M_e \frac{P_e V_0}{RT_i}$. En différentiant cette relation, on trouve que $\delta m_i = -M_e \frac{P_e V_0}{R} \frac{\delta T_i}{T_i^2}$. En combinant cette relation et celle de la question précédente, on trouve que :

$$\boxed{\delta m_i = -\frac{M_e \delta Q}{C_p T_i}}$$

16. La transformation de l'air intérieur est adiabatique et réversible, la loi LAPLACE $T p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$ est toujours vérifiée. Sous forme différentielle, cela donne $\frac{\delta T_i^{(2)}}{T_i^{(2)}} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\delta P_i}{P_i}$. L'équilibre mécanique est toujours réalisé, on a donc $P_i = P_e$. Or, la pression de l'air extérieur suit la loi $P_e = P_0(1 - \alpha z)^\beta$. En différentiant de façon logarithmique cette relation, on trouve que $\frac{\delta P_i}{P_i} = -\alpha \beta \frac{\delta z}{1 - \alpha z}$. On aboutit ainsi à la relation recherchée : $\boxed{\delta T_i^{(2)} = -T_i \frac{\gamma - 1}{\gamma} \alpha \beta \frac{\delta z}{1 - \alpha z}}$. On constate bien que $\delta T_i^{(2)} < 0$.

17. La loi de température est $T_e = T_0(1 - \alpha z)$ d'où $\frac{\delta T_e}{T_e} = -\alpha \frac{\delta z}{1 - \alpha z}$. Il reste à utiliser l'expression trouvée avant pour conclure que : $\boxed{\frac{\delta T_i^{(2)}}{T_i} = \beta \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\delta T_e}{T_e}}$.

18. D'après la loi polytropique de l'air extérieur, on a $\frac{\delta P_e}{P_e} = \beta \frac{\delta T_e}{T_e}$. Compte tenu du fait que $\delta T_i = \delta T_i^{(1)} + \delta T_i^{(2)}$, on arrive à $\frac{\delta T_i}{T_i} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\delta Q}{P_e V_0} + \beta \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\delta T_e}{T_e} = \frac{T_i}{T_e} \frac{\delta T_e}{T_e} + \beta \frac{\delta T_e}{T_e} \left(1 - \frac{T_i}{T_e}\right)$. Après regroupement des termes, il vient :

$\left[\frac{\beta}{\gamma} - (\beta - 1)\frac{T_i}{T_e}\right] \frac{\delta T_e}{T_e} = \kappa_2 \frac{\delta Q}{P_e V_0}$. On identifie la constante proposée selon : $\boxed{\kappa_2 = \frac{\gamma-1}{\gamma}}$.

19. La variation de température interne (1) a été évaluée à z donc Z fixé. $\delta T_i^{(1)}$ correspond donc à un segment vertical orienté vers le haut puisqu'on élève la température. Ensuite, on a vu que $\frac{\delta T_i^{(2)}}{T_i} = -\frac{\gamma-1}{\gamma}\beta \frac{\delta Z}{1-Z}$. Cette forme traduit la relation intégrale $\theta_i = \theta_{i,Z=0}(1-Z)^\epsilon$ avec $\epsilon = \frac{\gamma-1}{\gamma}\beta > 0$. Le tracé de l'évolution sera donc de type hyperbolique pour lequel Z augmente. Le tracé est réalisé sur la figure 3.

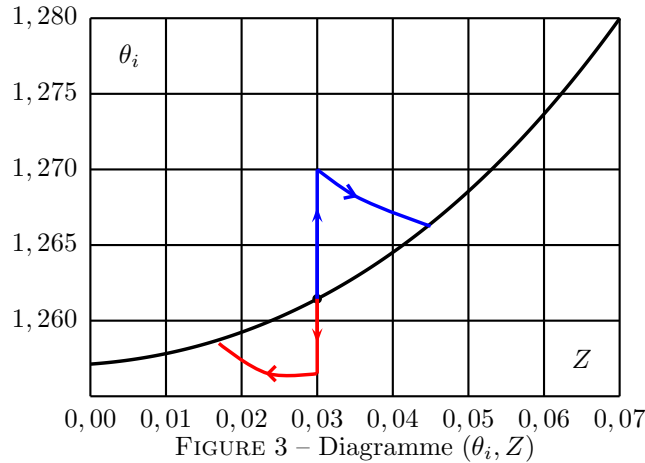


FIGURE 3 – Diagramme (θ_i, Z)

Descente par apport d'air froid

20. On écrit que l'énergie interne est conservée : $dU_{ch} + dU_{fr} = 0$. Après simplification par la capacité thermique molaire C_V , on trouve que $(n + \delta n)\delta T_i + \delta n(T_i - T_e) = 0$. En négligeant le terme $\delta n\delta T_i$, on trouve que $\delta T_i = -\frac{\delta n}{n}(T_i - T_e)$. On en déduit que $\frac{\delta T_i^{(3)}}{T_i} = -\frac{\delta n}{n}(1 - \frac{T_e}{T_i})$. Or, on a $\frac{\delta n}{n} = \frac{\delta V_0}{V_0} \frac{T_i}{T_e}$ par la loi des gaz parfaits.

On trouve alors que : $\boxed{\frac{\delta T_i^{(3)}}{T_i} = \left(1 - \frac{T_e}{T_i}\right) \frac{\delta V}{V_0}}$. Cette variation est négative car $T_e < T_i$.

21. Il est inutile de refaire le calcul car il suffit de remplacer le terme $\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\delta Q}{P_e V_0}$ de l'étude précédente par le terme $\left(1 - \frac{T_e}{T_i}\right) \frac{\delta V}{V_0}$. On obtient donc la relation : $\boxed{\left[\frac{\beta}{\gamma} - (\beta - 1)\frac{T_i}{T_e}\right] \frac{\delta T_e}{T_e} = \left(1 - \frac{T_e}{T_i}\right) \frac{\delta V}{V_0}}$.

22. Le raisonnement est identique à celui conduit précédemment. On part selon une droite verticale mais vers le bas puisque l'on fait baisser la température. Ensuite, il faut parcourir une hyperbole du type $\theta_i = \theta_{i,Z=0}(1-Z)^\epsilon$ à Z décroissant. Voir la figure 3.

C. Forme de l'enveloppe de la montgolfière

23. La hauteur de la montgolfière est relativement petite devant la distance z_0 qui caractérise l'évolution de la pression. On peut autour de l'altitude correspondant au milieu de la montgolfière effectuer un développement limité au premier ordre de la loi de pression $P(z) = P_0(1 - \frac{z}{z_0})^\beta$. On peut donc envisager cette étude avec une loi de pression affine. Cela revient localement à assimiler l'air intérieur et l'air extérieur à un fluide incompressible pour avoir une évolution de pression de la forme μgz . Dans ces conditions, on a : $\boxed{\Delta P = (\mu_i - \mu_e)gz}$ où z représente soit l'altitude du point courant le long de l'enveloppe de la montgolfière.

24. La condition d'équilibre est obtenue lorsque la somme des forces est nulle : $F(z + dz)\vec{t}(z + dz) - F(z)\vec{t}(z) + d\vec{K} = \vec{0}$. On voit apparaître dans le premier membre une différentielle et on peut donc écrire en divisant par dz : $\boxed{\frac{d}{dz}(F(z)\vec{t}(z)) + \frac{d\vec{K}}{dz} = \vec{0}}$. Si l'on effectue le produit scalaire par le vecteur \vec{t} , on trouve que $\frac{d}{dz}(F(z)\vec{t}(z)) \cdot \vec{t} = 0$. Or $\frac{d}{dz}(F(z)\vec{t}(z)) = \frac{dF}{dz}\vec{t} + F(z)\frac{d\vec{t}}{dz}$. Pour calculer la dérivée de \vec{t} , il est utile de travailler avec l'angle φ . On a : $\frac{d\vec{t}}{dz} = \frac{d\vec{t}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dz}$. Comme φ est l'angle qui oriente le vecteur unitaire \vec{t} , on a $\frac{d\vec{t}}{d\varphi} = \vec{n}$. On constate ainsi que finalement $\frac{d}{dz}(F(z)\vec{t}(z)) \cdot \vec{t} = \frac{dF}{dz} = 0$. On a donc démontré que la norme de la tension des filins est constante en tout point de l'enveloppe.

25. La force de pression $d\vec{K}'$ appliquée à un élément de surface de l'enveloppe est donnée par $d\vec{K}' = \Delta P \frac{2\pi r dl}{N} \vec{n}$ avec $dl = \sqrt{dr^2 + dz^2}$. Cette force s'identifie complètement avec $d\vec{K}$ puisqu'elle est normale à la surface comme la force $d\vec{k}$ présentée par l'énoncé sur la filin. De plus, la force $d\vec{K}'$ se répartit sur deux filins mais sur la surface voisine, il en va de même et le filin situé entre les deux récupère finalement une force globale correspondant à $d\vec{K}'$. On a donc : $\boxed{d\vec{K} = d\vec{K}'}$.

26. Il est inutile d'écrire la projection de la loi d'équilibre dans la base (\vec{e}_z, \vec{e}_r) . On peut utiliser le fait que

$\frac{d\vec{t}}{dz} = \vec{n}\frac{d\varphi}{dz}$. La loi de la statique est donc : $\boxed{F\frac{d\varphi}{dz} + \frac{dK}{dz} = 0}$.

27. La géométrie nous donne facilement : $\tan \varphi = \frac{dr}{dz}$. Si l'on dérive par rapport à z , on obtient : $\frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{d^2 r}{dz^2}$. Avec la propriété $1 + \tan^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$, et grâce à $\frac{dK}{dz} = \frac{2\pi\Delta P}{N}r\sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2}$ et $\Delta P = (\mu_i - \mu_e)gz$, on trouve l'équation différentielle : $\frac{d^2 r}{dz^2} = -\frac{2\pi(\mu_i - \mu_e)g}{NF}rz \left[1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right]^{3/2}$. On peut donc conclure que : $\boxed{A = \frac{2\pi(\mu_i - \mu_e)g}{NF}}$. A est l'inverse d'un volume puisque $(\mu_i - \mu_e)gz$ est une pression, c'est-à-dire une force divisée par une surface.

28. Avec le changement de variable proposé, on constate que $dz = A^k dx$ et $dr = A^k dy$. Ainsi, on a $\frac{dr}{dz} = \frac{dy}{dx}$. Par conséquent, $\frac{d}{dz}\left(\frac{dr}{dz}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dx}{dz} = \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{1}{A^k}$. On obtient alors l'équation différentielle $\frac{d^2 y}{dx^2} = -A^{3k+1}xy \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}$. Pour rendre indépendante l'équation différentielle des caractéristiques de la montgolfière étudiée, il faut faire disparaître le coefficient A . On choisira donc : $\boxed{k = -\frac{1}{3}}$.

29. Sur la figure présentant les solutions de l'équation différentielle, on constate que plus la montgolfière s'élargit au départ ce qui correspond à $\frac{dr}{dz}$ plus grand, plus sa largeur maximale est grande mais que comme le volume reste fixé, moins elle sera haute (x_{max} plus faible sur le graphique). Il n'était pas évident, par contre, que les enveloppes se coupent toutes en un même point. La figure de droite prolongée sur $y < 0$ nous évite d'imaginer l'effet de la rotation autour de l'axe de révolution verticale de la montgolfière. Cette rotation était pourtant simple à concevoir du fait de l'invariance du problème selon la coordonnée polaire θ . On terminera en observant que la représentation de droite est très proche de ce que l'intuition nous aurait amenés à tracer comme enveloppe (en la tournant de $\pi/2 \dots$).