

Évolution d'un quanton

On peut voir des simulations à l'adresse suivante. Elles illustrent le comportement d'une particule quantique pour différente configuration du potentiel comme les marches, les barrières... une marche de potentiel dans les différents cas d'énergie.

phet.colorado.edu/en/simulation/quantum-tunneling

1 Marche de potentiel pour $E > V_0$

1.1 Situation physique

1.2 État stationnaire quantique

1.3 Relation entre les amplitudes, coefficients r et t

1.4 Densités de courants de probabilité, coefficient R et T

1.5 Ondes stationnaires

2 Marche de potentiel pour $E < V_0$

2.1 État stationnaire quantique

2.2 Onde évanescence

2.3 Coefficients R et T

2.4 Ondes stationnaires

3 Barrière de potentiel avec $E < V_0$

3.1 Situation physique

Nous venons de voir que dans le cas de la marche de potentiel pour $E < V_0$, il existe une onde évanescence dans le milieu de potentiel (énergie potentielle) V_0 . La décroissance de l'amplitude de cette onde est rapide puisqu'elle est du type effet de peau. On peut toutefois se poser la question du devenir de l'onde évanescence si la marche de potentiel est d'extension limitée, c'est-à-dire si l'on affaire à ce qu'il convient d'appeler une barrière de potentiel, voir le graphique de la figure 1.

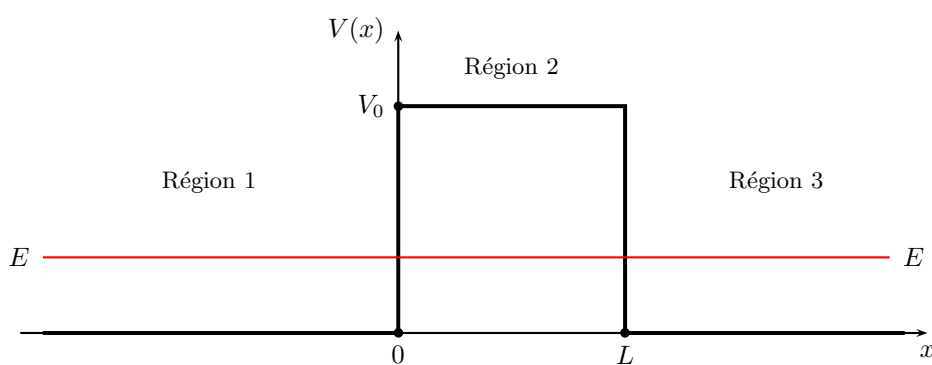


FIGURE 1 – Barrière de potentiel

On considère un quanton arrivant de $-\infty$ sur la barrière de potentiel. Si l'on avait affaire à une particule classique, il ne se produirait qu'une simple réflexion sur la barrière de potentiel puisque l'énergie de la particule - qui jusqu'en $x = 0$ correspond à son énergie cinétique puisque $V(x) = 0$ - est inférieure à la barrière V_0 . Comme nous l'avons vu, en Mécanique quantique, on peut déjà s'attendre à un résultat assez surprenant dont l'onde évanescence est déjà une première manifestation. Nous allons nous intéresser dans ce qui suit aux états stationnaires de la particule quantique.

3.2 Fonctions d'onde

Les fonctions d'onde des états stationnaires de la particule quantique sont données par les équations différentielles suivantes :

$$\text{Régions 1 et 3 : } \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\varphi = 0$$

On a donc une solution dans ces deux régions d'une onde de vecteur d'onde identique $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$. Comme le quanton provient de $-\infty$, on aura une onde incidente et une onde réfléchie dans la région 1 alors que dans la région 3 la fonction d'onde ne peut qu'être progressive dans le sens x croissant. On a donc :

$$\varphi_1(x) = A_1 \exp ikx + B_1 \exp -ikx \quad \text{et} \quad \varphi_3 = A_3 \exp ikx$$

Pour la région 2, nous avons l'équation différentielle :

$$\text{Région 2 : } \frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}\varphi = 0$$

On pose $\mu = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} > 0$ où μ est un réel. Les solutions sont alors :

$$\varphi(x) = A_2 \exp \mu x + B_2 \exp -\mu x$$

3.3 Continuité

La détermination complète de la fonction d'onde passe par l'écriture de sa continuité en $x = 0$ et en $x = L$ à laquelle il faut ajouter la continuité de sa dérivée puisque le potentiel est borné. On en déduit un système de 4 équations pour 5 inconnues :

$$\begin{cases} A_1 + B_1 & = & A_2 + B_2 \\ A_2 \exp \mu L + B_2 \exp -\mu L & = & A_3 \exp ikL \\ ik(A_1 - B_1) & = & \mu(A_2 - B_2) \\ \mu(A_2 \exp \mu L - B_2 \exp -\mu L) & = & ikA_3 \exp ikL \end{cases}$$

3.4 Réflexion et effet tunnel

À partir de ce système d'équations, on va pouvoir relier B_1 et A_1 et définir un coefficient de réflexion. De la même façon, on pourra établir une relation entre A_3 et A_1 , ce qui va permettre de définir un coefficient de transmission. Ces coefficients doivent être définis sur les densités de courant de probabilité concernées par le calcul

$$\begin{cases} \vec{j}_{inc} & = & \frac{\hbar k}{m} A_1^2 \vec{e}_x \\ \vec{j}_{ref} & = & -\frac{\hbar k}{m} B_1^2 \vec{e}_x \\ \vec{j}_{trans} & = & \frac{\hbar k}{m} A_3^2 \vec{e}_x \end{cases}$$

On déduit de ces expressions, les coefficients de réflexion et de transmission sur la barrière de potentiel :

$$R = \frac{j_{ref}}{j_{inc}} = \frac{B_1^2}{A_1^2} \quad \text{et} \quad T = \frac{j_{trans}}{j_{inc}} = \frac{A_3^2}{A_1^2}$$

Les calculs permettent de montrer que $R+T = 1$ et de donner l'expression suivante de la densité de courant de probabilité de présence du quanton. Le coefficient de transmission illustre l'effet tunnel : la probabilité pour que le quanton traverse la barrière de potentiel n'est pas nulle :

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \text{sh}^2 \mu L}$$

Sur la figure 2, on peut voir une représentation de la densité de probabilité de présence. Dans la région 1, on a des interférences quantiques entre l'onde incidente et l'onde réfléchie. Dans la zone 2, on a une onde évanescente qui donne lieu à une densité de probabilité constante dans la zone 3.

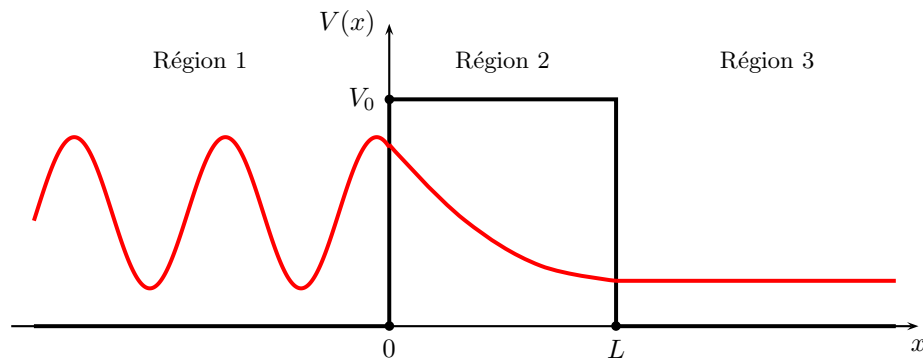


FIGURE 2 – Densité de probabilité de présence - Effet tunnel

L'effet tunnel est à l'origine du fonctionnement du microscope dédié. Il est aussi à l'origine de la compréhension de la radioactivité α (se reporter à l'étude documentaire sur le sujet). Dans chacun de ces deux cas, on peut considérer la barrière de potentiel comme épaisse, c'est-à-dire que sa largeur L est grande devant la longueur caractéristique de l'onde évanescente caractérisée par l'épaisseur de peau $\delta = 1/\mu$. On peut donc faire une approximation du coefficient de transmission en disant que $2 \operatorname{sh} \mu L = \exp \mu L - \exp -\mu L \simeq \exp \mu L$ et que $\exp \mu L \gg 1$. On en déduit l'expression approchée du coefficient de transmission :

$$T \simeq \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} \exp -2\mu L$$

4 Puits de potentiel infini

4.1 Situation physique

4.2 Fonction d'onde

4.3 Aspect énergétique

4.4 État non stationnaire d'un quanton

