

Analyse de Fourier

En 1806, le physicien et mathématicien français JOSEPH FOURIER (1768-1830) étudiait les transferts thermiques. En particulier, il chauffait un endroit de la périphérie d'un anneau en fer et observait ensuite l'évolution de la température sur la totalité de l'anneau au cours du temps. À la recherche de fonctions mathématiques pouvant représenter ses observations, il eut l'idée (sans doute, suggérée par la géométrie de l'objet utilisé) de construire ces fonctions en composant des fonctions périodiques de 2π . C'est ainsi qu'il eut recours aux fonctions sinus et cosinus. Cette recette fonctionna au-delà de ses espérances si bien que le mathématicien qu'il était développa une théorie beaucoup plus générale qui conduisit à la découverte des séries qu'on appelle aujourd'hui *séries de Fourier*. À l'heure actuelle, les séries de FOURIER et les transformées de FOURIER constituent un des moyens mathématiques les plus utilisés en physique. Elles donnent à leur auteur une place prépondérante parmi les mathématiciens de 19^{ème} siècle.

1 Généralités

1.1 Caractéristiques d'une grandeur sinusoïdale

Considérons une grandeur représentée par la fonction $u(t) = U_1 \cos \omega_0 t$ et la même fonction avec un offset - encore appelé composante continue - $u(t) = U_0 + U_1 \cos \omega_0 t$. Cette grandeur est représentée à la figure 1. Sa période est $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ et sa fréquence est $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$. Son amplitude est U_1 ou $2U_1$ - selon les habitudes de langage -, sa moyenne U_0 .

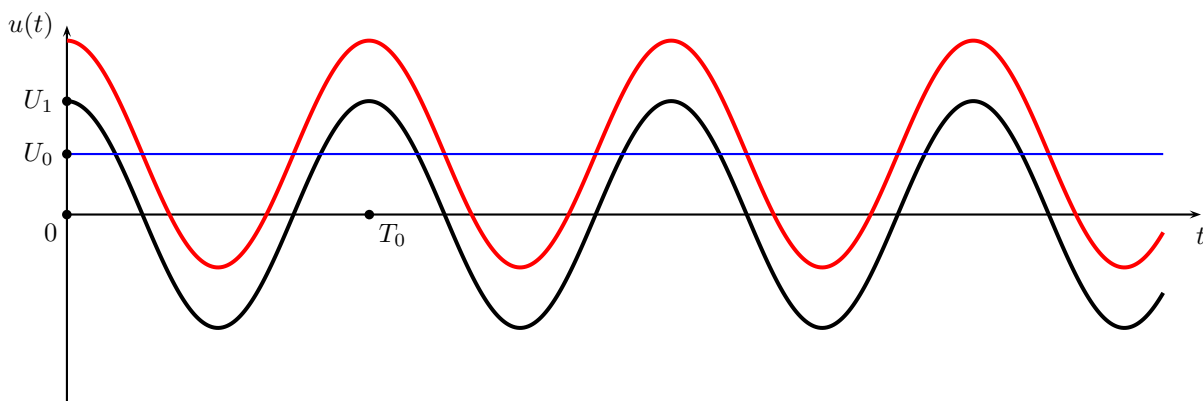


FIGURE 1 – Grandeurs sinusoïdales

1.2 Notion de spectre

La grandeur $u(t) = U_1 \cos \omega_0 t$ est une grandeur qualifiée de *monochromatique*. En effet, elle est caractérisée par la pulsation unique ω_0 ou par la fréquence $f_0 = \omega_0/2\pi$. Ce n'est plus le cas de $u(t) = U_0 + U_1 \cos \omega_0 t$ puisque cette fonction comporte une valeur moyenne non nulle appelée précédemment *composante continue*. Cette appellation vient du fait que $u(t)$ peut être représentée par $u(t) = U_0 \cos \omega t + U_1 \cos \omega_0 t$ avec $\omega = 0$. U_0 est donc la composante de fréquence nulle du signal $u(t)$. Le spectre d'un signal représente l'ensemble des fréquences présentes dans un signal. L'amplitude est fournie en ordonnée soit en échelle linéaire, soit en échelle logarithmique. Le spectre des tensions étudiées précédemment est représenté à la figure 2.

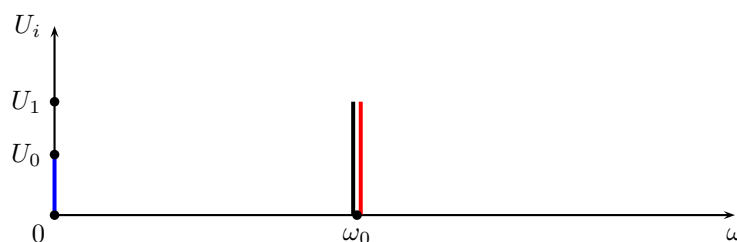


FIGURE 2 – Notion de spectre

1.3 Représentation temporelle, représentation fréquentielle

Considérons, par exemple, le signal $u(t) = U_0 + U_1 \cos \omega_0 t + U_3 \cos 3\omega_0 t$. Ce signal comporte 3 pulsations $\omega = 0$, $\omega = \omega_0$ et $\omega = 3\omega_0$. Il pourra être représenté soit sous la forme temporelle $u(t)$, soit sous la forme fréquentielle $U_i(\omega)$. On obtient alors les représentations visibles sur la figure 3.

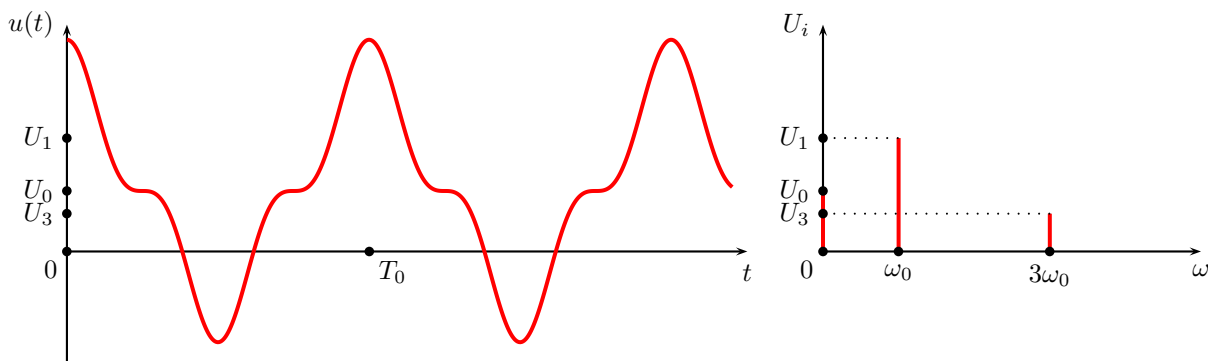


FIGURE 3 – Représentations temporelle et fréquentielle

Le spectre de ce signal est qualifié de *discret* car il est, ici, discontinu et constitué de fréquences multiples d'une fréquence de base $f_0 = \omega_0/2\pi$.

2 Synthèse de Fourier

2.1 Observation

Sur la figure 4 sont représentés successivement les signaux $f_1(t) = F_0 \cos \omega_0 t$, $f_3(t) = F_0(\cos \omega_0 t + \frac{1}{9} \cos 3\omega_0 t)$, $f_5(t) = F_0(\cos \omega_0 t + \frac{1}{9} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{25} \cos 5\omega_0 t)$ et $f_7(t) = F_0(\cos \omega_0 t + \frac{1}{9} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{25} \cos 5\omega_0 t + \frac{1}{49} \cos 7\omega_0 t)$.

Les fonctions $f_i(t)$ représentées avant correspondent au début d'une série mathématique entière infinie de la forme $f(t) = F_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)\omega_0 t$. La figure 5 correspond au tracé de la courbe faisant intervenir des termes jusqu'à $n = 10$. On constate aisément que bien que la série soit infinie avec 10 termes, on obtient une synthèse tout à fait satisfaisante de la fonction triangle. Ceci est dû en particulier au fait que les amplitudes de la série décroissent en $\frac{1}{p^2}$ où $p \in \mathbb{N}$ est impair. Très vite, les contributions vont être négligeables du point de vue physique. Dans une série, comme la précédente, on définit le *fondamental* comme le terme de pulsation ω_0 et les *harmoniques* comme les composantes sinusoïdales de pulsation $p\omega_0$.

2.2 La fonction créneau

Cette fonction est une fonction assez souvent rencontrée en physique. Elle peut être aussi synthétisée grâce à la série suivante :

$$f(t) = F_0 \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n \frac{\pi}{2}} \cos n \omega_0 t \right)$$

On observe successivement la fonction avec 1, 3, 10 et 100 termes dans la série, voir la figure 6.

La synthèse de la fonction créneau est plus difficile que celle de la fonction triangle. Cela est dû au fait que les amplitudes des harmoniques décroissent, ici, en $\frac{1}{n}$ au lieu de $\frac{1}{n^2}$ précédemment. Il faut donc plus de termes pour avoir une bonne représentation du créneau périodique. Ceci est aussi lié au fait qu'il est difficile de construire une fonction présentant une pente tendant vers l'infini pour le physicien ou une discontinuité entre la valeur haute et la valeur basse du créneau pour le mathématicien.

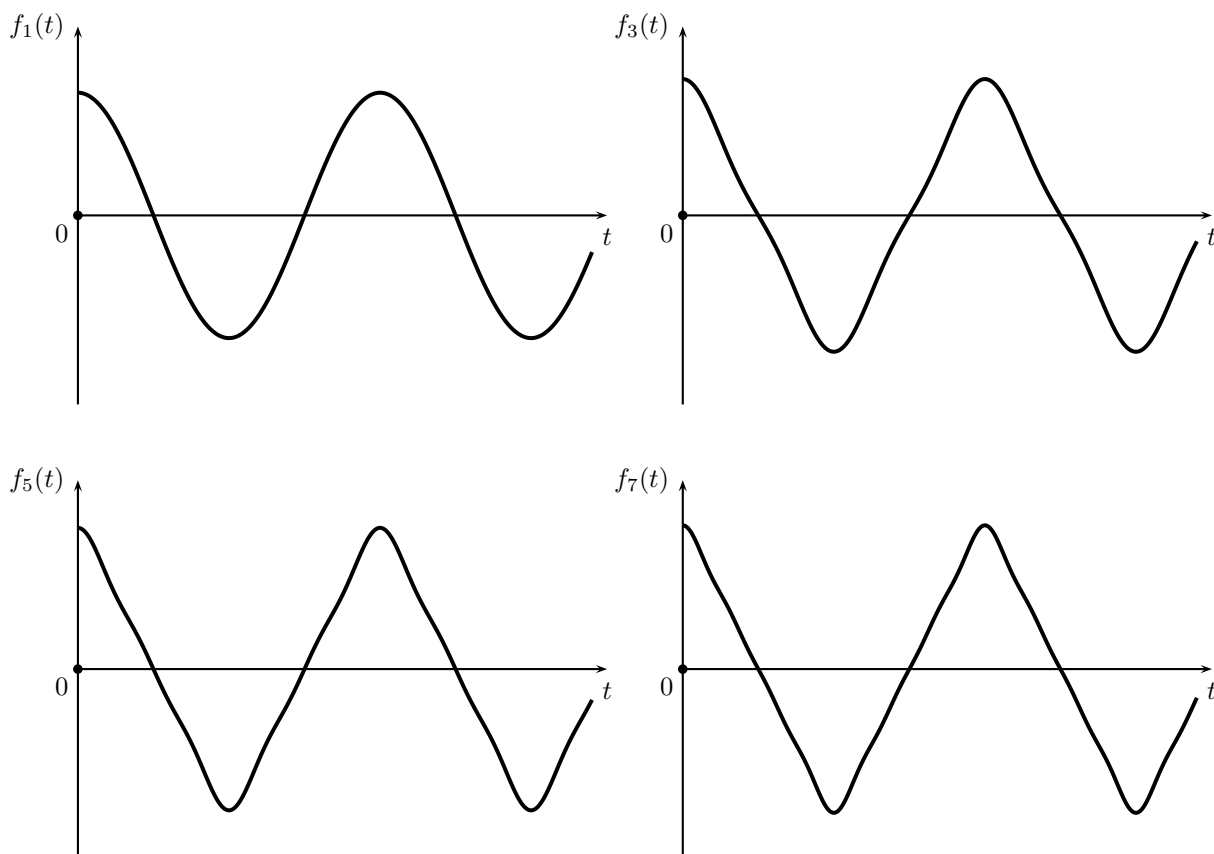


FIGURE 4 – Synthèse d'un signal périodique

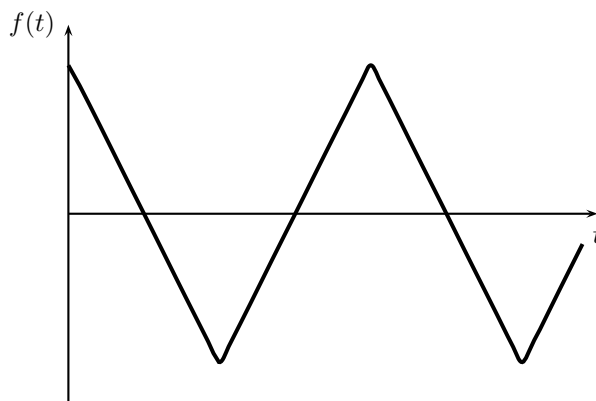


FIGURE 5 – Signal périodique triangle

3 Série de Fourier d'une fonction périodique

3.1 Définition

Le théorème de FOURIER énonce que toutes les fonctions périodiques $f(t)$ de période T_0 continues dérivables (ou bien présentant un nombre fini de discontinuités par période...) et telles que $\int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t)dt$ soit calculable peuvent s'écrire comme une somme de fonctions sinusoïdales de pulsation $n\omega_0$ avec n entier naturel. Il est courant de proposer pour $f(t)$ la forme suivante en notation réelle :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t]$$

Cette formulation de la fonction $f(t)$ est extrêmement utile en physique, encore faut-il être capable de

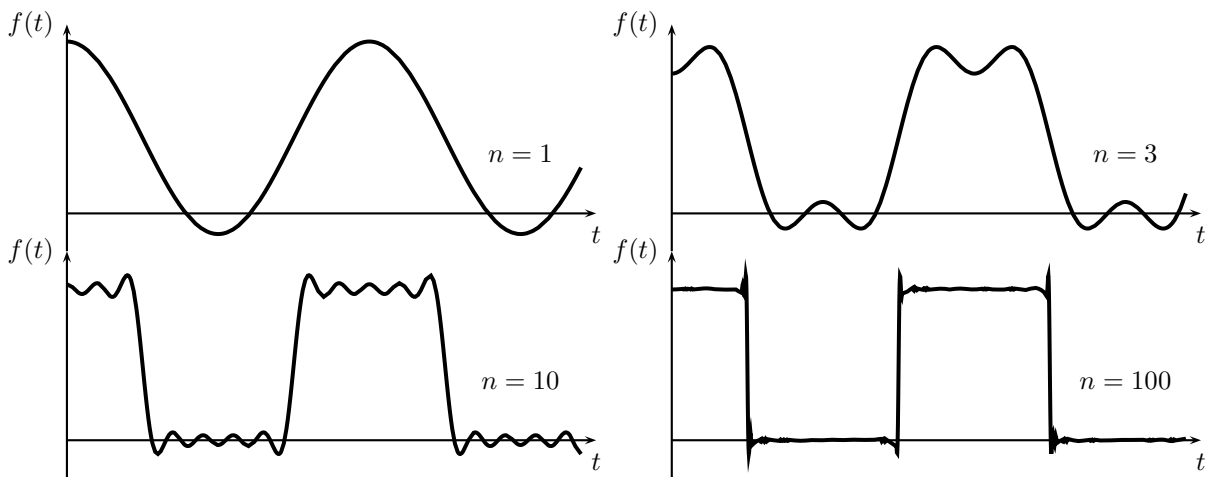


FIGURE 6 – Signal périodique crêteau

déterminer les divers coefficients a_0 , a_n et b_n .

Nous savons que la moyenne d'une fonction sinusoïdale est nulle : $\langle \cos n\omega_0 t \rangle = 0$ et $\langle \sin n\omega_0 t \rangle = 0$. Dans ces conditions, on constate immédiatement que $\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) dt = \frac{a_0}{2}$. $\frac{a_0}{2}$ représente la moyenne de la fonction $f(t)$ ou encore sa composante continue. Nous comprendrons plus loin pourquoi ce terme a été posé sous cette forme. Prenons un exemple de forme de signal. Considérons la fonction appelée *redressement monoalternance* qui peut intervenir en électricité dans la transformation d'une tension sinusoïdale en tension continue. Sa représentation temporelle est fournie à la figure 7, ainsi que sa représentation fréquentielle.

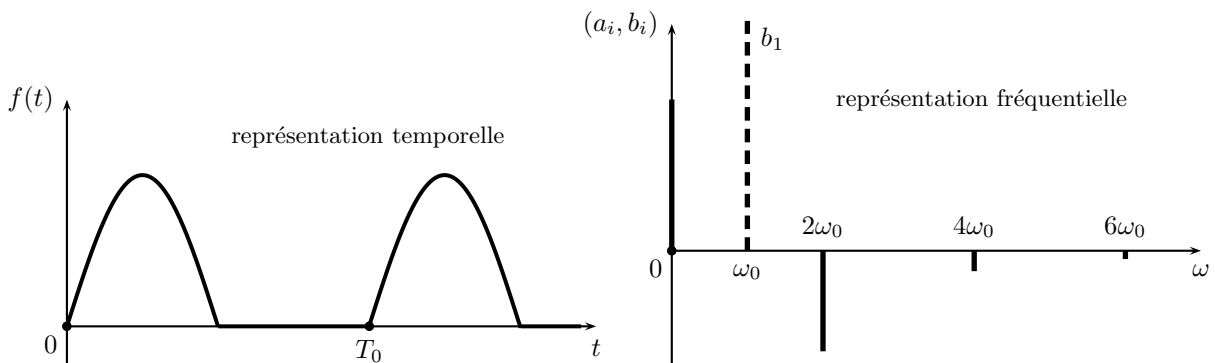


FIGURE 7 – Fonction redressement monoalternance

La série de FOURIER de cette fonction est : $f(t) = F_0 \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin \omega_0 t - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos 2n\omega_0 t \right)$.

3.2 Parité

Dans les cas où la fonction $f(t)$ est paire par rapport à $t = 0$, c'est-à-dire que $f(-t) = f(t)$, le développement en série de FOURIER de cette fonction ne fera pas apparaître de composante en $\sin n\omega_0 t$, on aura toujours $b_n = 0, \forall n$. De la même façon, une fonction impaire $f(-t) = -f(t)$ vérifiera $a_0 = 0$ et $a_n = 0, \forall n$. Pour une fonction quelconque, l'ensemble des termes apparaîtront. Résumons dans un tableau :

$f(t)$ est paire	$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n = 0$	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t$
$f(t)$ est impaire	$a_0 = 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = 0$	$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t$
$f(t + \frac{T}{2}) = -f(t)$	$a_0 = 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_{2n} = b_{2n} = 0$	$f(t) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p+1} \cos(2p+1)\omega_0 t + b_{2p+1} \sin(2p+1)\omega_0 t$

3.3 Notation réelle et notation complexe

Il arrive qu'on écrive la série de FOURIER en réels selon :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

avec $\alpha_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et φ_n tel que $\tan \varphi_n = -\frac{b_n}{a_n}$

L'écriture en complexes se pratique aussi, elle utilise alors les entiers de \mathbb{Z} :

$$f(t) = \sum_{n \text{ de } -\infty}^{\infty} \underline{c}_n \exp in\omega_0 t$$

Le lien s'effectue avec l'expression réelle si on prend $\underline{c}_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ et $\underline{c}_{-n} = \underline{c}_n^* = \frac{a_n + ib_n}{2}$. Cette dernière expression fait intervenir des pulsations négatives de la forme $n\omega_0$ avec $n < 0$. Ces pulsations n'ont pas de sens physique, elles ne sont que la conséquence du passage à la notation complexe.

3.4 Expression des coefficients de la série de Fourier

Le coefficient a_0 qui représente le double de la valeur moyenne se calcule par :

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) dt$$

On peut aussi calculer cette intégrale sur un intervalle de période T_0 défini par $[t_0, t_0 + T_0]$ où t_0 correspond à une date quelconque. Il en va de même pour les calculs des coefficients a_n et b_n :

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

Les coefficients \underline{c}_n de l'expression en complexes de la série de FOURIER définie au paragraphe précédent se calculent selon : $\underline{c}_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) \exp -in\omega_0 t dt$.

Dans tous les cas, que le calcul soit effectué en réels ou en complexes, un choix judicieux de la date t_0 peut grandement le faciliter. Il faudra bien observer la forme de la fonction périodique dont on recherche la série de FOURIER avant de se lancer dans les calculs.

3.5 Justification des expressions de calcul des coefficients de la série de Fourier

3.6 Exemple de calcul

Nous allons effectuer les calculs des coefficients de la série de FOURIER de la fonction *dent de scie* représentée sur la figure 8.

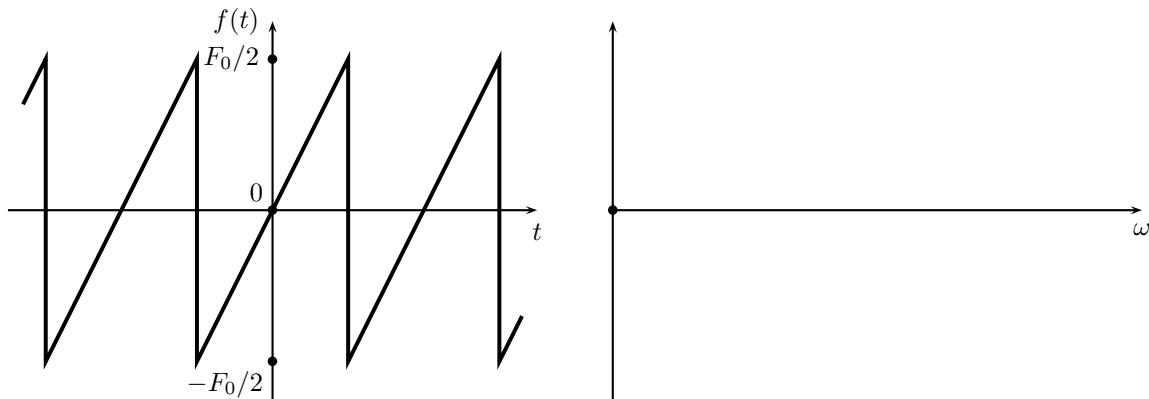


FIGURE 8 – Fonction dent de scie

En effectuant un changement de variable, on arrive à l'expression :

$$b_n = \frac{F_0}{\pi^2 n^2} \int_0^{\pi n} x \sin x \, dx$$

L'intégration s'effectue par partie en utilisant la propriété $(fg)' = f'g + fg'$ ce qui permet de passer à la relation intégrale suivante $\int fg' = [fg] - \int f'g$.

Le développement en série de FOURIER de la dent de scie est donc :

$$f(t) = -F_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n\pi} \sin n\omega_0 t$$

3.7 Aspect énergétique

Considérons une fonction périodique $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t]$ intervenant à raison de son carré dans une énergie en physique comme par exemple dans $\frac{1}{2}Cu^2$ pour l'énergie emmagasinée par un condensateur, $\frac{1}{2}kx^2$ pour l'énergie potentielle élastique d'un ressort ou bien encore $\frac{1}{2}mv^2$ pour l'énergie cinétique. Le calcul de la moyenne temporelle de l'énergie va donc faire intervenir le carré de la valeur efficace de $f(t)$ notée F_{eff}^2 . Compte tenu des observations faites dans la partie 3.5, on comprendra aisément que dans le calcul de la moyenne du carré d'un tel développement en série, seuls les carrés de chaque terme vont contribuer puisque $\langle \sin^2 \rangle = \langle \cos^2 \rangle = \frac{1}{2}$. Les doubles produits engendreront pour leur part des termes périodiques de période T_0/p où p est un entier. La valeur moyenne de ces termes sera donc nulle. On pourra ainsi conclure que :

$$\text{L'énergie sera proportionnelle à } F_{\text{eff}}^2 = \langle f^2(t) \rangle = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

L'expression de F_{eff}^2 constitue le théorème de PARSEVAL.

4 Transformée de Fourier d'une fonction non périodique

4.1 Un spectre continu

L'idée fondamentale de FOURIER a été de penser qu'écrire une fonction périodique comme une série discrète de fonctions sinusoïdales pouvait se généraliser à des fonctions non périodiques. Bien sûr, toutes les fonctions non périodiques ne possèdent pas de transformée de FOURIER. Les fonctions concernées doivent posséder un certain nombre de propriétés qui ne seront pas précisées mais il est important de savoir que la très grande majorité des fonctions non périodiques rencontrées en Physique possèdent une transformée de FOURIER. On verra plus loin qu'une fonction très particulière comme celle appelée *impulsion ou pic de Dirac* en possède une. Le *pic de Dirac* est tellement particulier que ce n'est pas une fonction au sens mathématique du terme mais une *distribution*. La signification de la notion de *distribution* sera étudiée au niveau d'une première année d'École ou au niveau de la Licence L3.

Nous avons vu qu'une fonction périodique de période $T_0 = 2\pi/\omega_0$ présentait un spectre discret constitué des pulsations $n\omega_0$. Pour une fonction non périodique, le spectre devient une fonction continue de la pulsation ω . C'est cette fonction $g(\omega)$ qui est appelée *transformée de Fourier* de la fonction $f(t)$. Ainsi, $f(t)$ ne s'écrit plus comme une somme discrète de fonctions sinusoïdales mais comme une somme *continue*, c'est-à-dire une intégrale. Celle-ci est donnée par la formule :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) \exp i\omega t d\omega$$

Les calculs sont toujours conduits en complexes. La fonction $f(t)$ apparaît, ici, comme une fonction complexe de la variable réelle t .

4.2 Transformée de Fourier

La transformée de FOURIER de la fonction $f(t)$ est la fonction complexe $g(\omega)$ donnée par :

$$\text{Transformée de FOURIER de } f(t) : g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp -i\omega t dt$$

La fonction $g(\omega)$ pourra, compte tenu du mode de calcul utilisant les complexes, faire apparaître des pulsations négatives qui n'ont pas de sens physique. On ne retiendra, dans ces cas-là, que les valeurs de $g(\omega)$ pour $\omega \geq 0$. On pourrait démontrer que si la fonction $f(t)$ est réelle, alors sa transformée de FOURIER $g(\omega)$ est paire en ω . De la même façon, si la fonction $f(t)$ est réelle et paire alors $g(\omega)$ est aussi réelle et paire.

4.3 Un exemple : la fonction créneau solitaire

Cette fonction est représentée sur la figure 9. C'est une fonction nulle sauf sur la durée τ centrée autour de la date $t = 0$ où elle est constante. Nous allons voir qu'elle peut être décrite comme une somme continue de composantes sinusoïdales d'amplitudes données par la fonction $g(\omega)$ même si cela peut apparaître surprenant a priori.



FIGURE 9 – Fonction créneau solitaire

4.4 Étude de la fonction sinuscircular

4.5 Relation durée-fréquence

On a pu observer dans le calcul précédent que le domaine de fréquence de la fonction créneau solitaire pour lequel les amplitudes étaient significatives s'étendait sur un intervalle de pulsation $\Delta\omega$ de l'ordre quelques $\frac{2\pi}{\tau}$ puisque le premier zéro et le second zéro du spectre étaient donnés par : $\omega_{1er\ zéro} = \frac{2\pi}{\tau}$ et $\omega_{2nd\ zéro} = \frac{4\pi}{\tau}$. On écrit donc que $\Delta\omega \simeq \frac{2\pi}{\tau}$. On peut passer à la fréquence par $\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$. On dit que la fonction créneau solitaire est caractérisée par un intervalle de fréquence $\Delta f \simeq \frac{1}{\tau}$. Or la durée du signal créneau solitaire est $\Delta t = \tau$. On peut donc observer que l'intervalle de fréquence caractéristique du signal est inversement proportionnel à sa durée. Ce résultat, vu dans un cas particulier, est tout à fait général. On retiendra que :

(durée \times intervalle de fréquence) est de l'ordre de 1 : $\Delta t \times \Delta f \simeq 1$

Anticipons un peu en ce qui concerne un signal sinusoïdal $f(t) = a_1 \cos \omega_0 t$ et imaginons que son existence ne soit pas limitée dans le temps. Si on pose la question du spectre de $f(t)$, il est évident pour tout le monde qu'il n'est composé que d'une seule fréquence correspondant à la pulsation ω_0 . On dit couramment qu'il est *monochromatique*. Cette perception est corroborée par la formule précédente puisque si $\Delta t \rightarrow \infty$ alors $\Delta f \rightarrow 0$!

4.6 La fonction train d'ondes

Cette fonction est représentée sur la figure 10. C'est une fonction nulle sauf sur la durée τ centrée autour de la date $t = 0$ où elle est sinusoïdale de pulsation ω_0 . Nous allons voir que son spectre n'est pas composé de l'unique pulsation ω_0 . Ce serait le cas uniquement si $\tau \rightarrow \infty$.

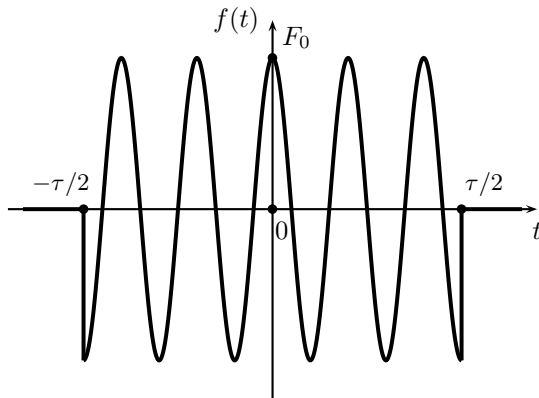


FIGURE 10 – Fonction train d'ondes

5 Distributions de Dirac

5.1 Pic de Dirac

5.1.1 Définition

Cet objet mathématique est très particulier comme vous allez pouvoir le constater par sa définition. On le note $\delta(t)$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \delta(t) = 0 & \text{si } t \neq 0 \\ \delta(t) \neq 0 & \text{si } t = 0 \\ \text{et surtout : } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \end{array} \right.$$

Propriété supplémentaire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - u) f(u) du = f(t)$$

La distribution pic de DIRAC est non nulle pour une seule valeur de sa variable, en l'occurrence le temps t . Pour obtenir cette valeur non nulle à une date différente de $t = 0$ comme par exemple à la date t_0 , il suffit de décaler la variable de la distribution de t_0 . On obtient alors la distribution écrite sous la forme $\delta(t - t_0)$ qui possède donc une valeur non nulle en $t = t_0$ et une valeur nulle partout ailleurs ($t \neq t_0$).

5.1.2 Approche par un modèle simple

Pour construire une distribution pic de DIRAC, on peut être tenté de réduire la durée τ du créneau solitaire $f(t)$ étudié avant. Cette solution paraît intéressante mais il y a un écueil important :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = F_0 \tau \right) \rightarrow 0$$

On peut alors approcher la distribution de DIRAC par la définition :

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{F_0 \tau} f(t)$$

5.1.3 Transformée de Fourier

On peut profiter de la propriété suivante des calculs de transformées de FOURIER :

$$TF \left(\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{F_0 \tau} f(t) \right) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{F_0 \tau} TF f(t)$$

5.2 Peigne de Dirac

5.2.1 Définition

Sa dénomination est tout à fait adaptée : il s'agit d'une succession de pics de DIRAC régulièrement séparés dans le temps - on décrit ici un peigne temporel mais la définition peut se généraliser à une variable d'espace pour créer un peigne spatial-. Dans le cas spatial, on parlera plus souvent de réseau que de peigne. Comme pour le pic de DIRAC, nous utiliserons l'image du créneau de durée τ brève devant la période de répétition du motif $T_0 \gg \tau$. Sa représentation est réalisée sur le graphique de la figure 11.

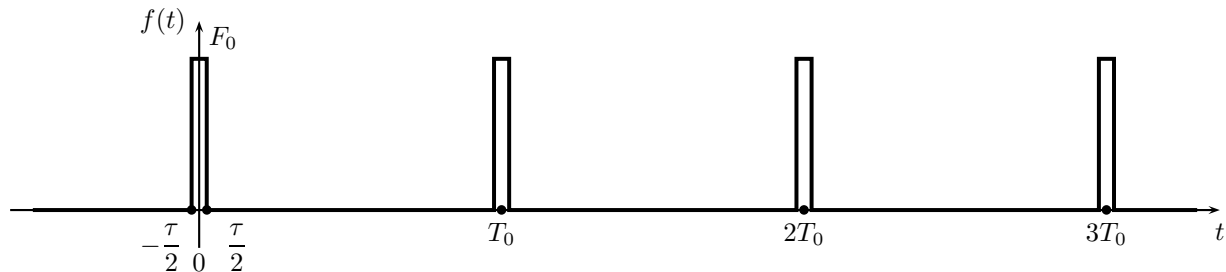


FIGURE 11 – Fonction peigne de DIRAC

On considère un peigne composé de N pics de DIRAC entre les dates $t = 0$ et $t = (N - 1)T_0$, en général N est relativement grand pour que l'on parle vraiment de peigne...

5.2.2 Transformée de Fourier

La définition de la transformée de FOURIER nous permet d'écrire que $g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp -i\omega t \, dt$. La fonction $f(t)$ étant nulle sauf sur une brève durée autour des dates nT_0 avec $n \in [0; (N - 1)]$, l'intégrale fait apparaître une somme :

$$g_1(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{nT_0-\tau/2}^{nT_0+\tau/2} \exp -i\omega t \, dt \right)$$

Finalement, on trouve :

$$g_1(\omega) = \frac{F_0\tau}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc} \frac{\omega\tau}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \exp -in\omega T_0$$

On peut passer au pic de DIRAC en considérant comme précédemment non pas la fonction $f(t)$ mais la fonction :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{F_0 \tau} f(t)$$

Sa transformée de FOURIER est donc donnée par :

$$g_2(\omega) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc} \frac{\omega \tau}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \exp -in\omega T_0$$

La limite de la fonction n'intervient pas sur la somme mais seulement sur le terme mis en facteur en sinuscardinal. On a donc finalement :

$$g_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{N-1} \exp -in\omega T_0$$

5.2.3 Étude de la fonction de réseau

La fonction $|g_2(\omega)|^2$ est qualifiée habituellement de fonction de réseau du fait de sa présence dans la théorie du réseau optique comme nous le verrons ultérieurement. On étudie plutôt le carré du module de $g_2(\omega)$ plutôt que la fonction elle-même car, comme nous l'avons déjà vu, le carré est à l'image de l'énergie associée à la fonction. Dans notre cas, on pose $\varphi = \omega T_0$ et on étudie la fonction :

$$\mathcal{R}(\varphi) = \frac{\sin^2 \frac{N\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

La représentation de la fonction est réalisée sur le graphique de la figure 12. Comme seules les pulsations positives ont un sens physique, la représentation a été réalisée essentiellement pour $\varphi > 0$. Il a été réalisé pour $N = 20$.

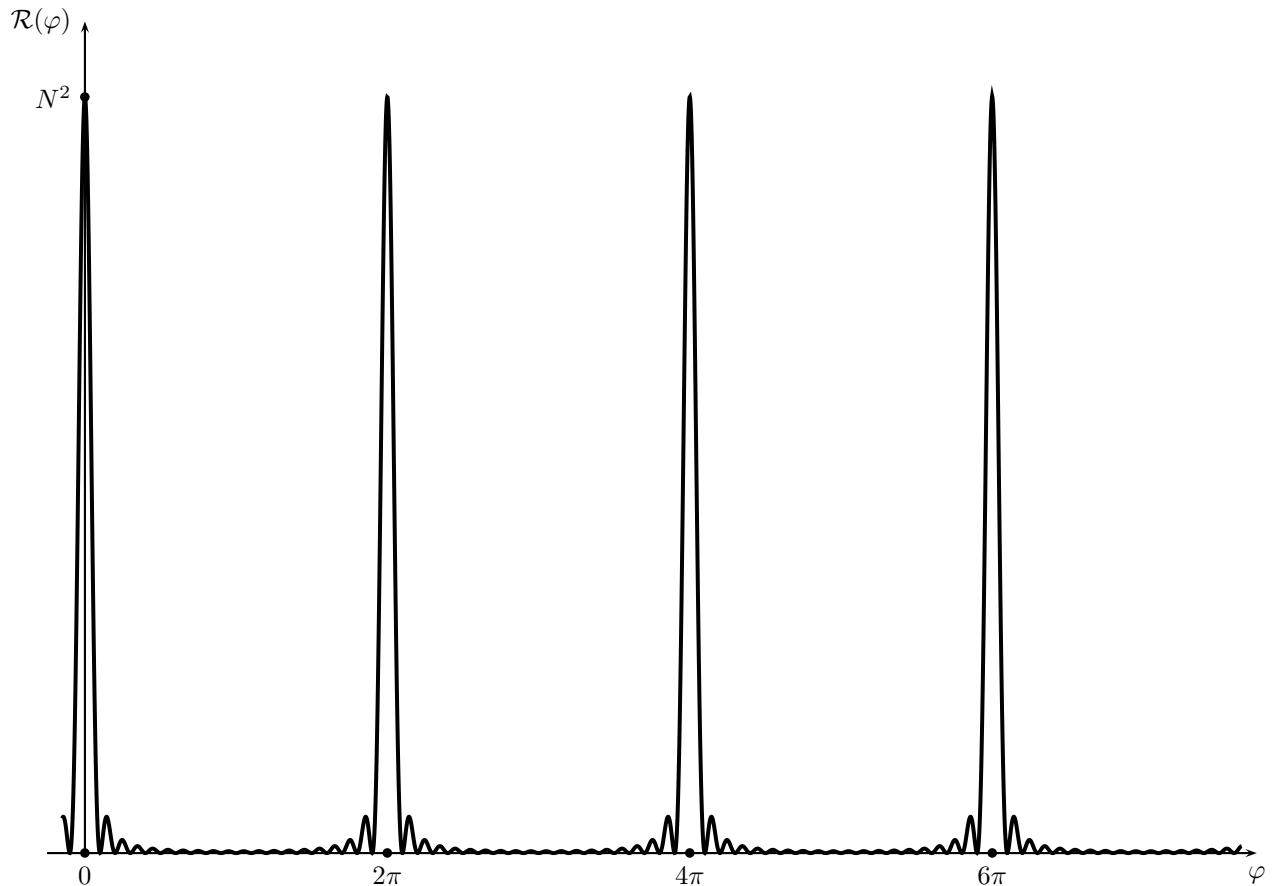


FIGURE 12 – Fonction de réseau $\mathcal{R}(\varphi)$

5.2.4 Spectre du peigne de Dirac

6 Applications de l'analyse de Fourier en Physique

6.1 Effet d'un filtre analogique linéaire

Considérons le signal $e(t) = 1,5 + 2 \cos 2\pi 100t + 1 \cos 2\pi 300t$ en Volt. Ce signal comporte une composante continue de 1,5 V, une composante à la fréquence 100 Hz d'amplitude 2 V et une composante de fréquence 300 Hz d'amplitude 1 V. L'allure de ce signal est représenté sur la figure 13. Envoyons ce signal à l'entrée d'un filtre passe-bas du premier ordre de type RC de fréquence de coupure $f_c = f_0 = \frac{1}{2\pi RC} = 100$ Hz. La fonction de transfert de ce filtre s'écrit $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_0}}$. Quel sera le signal obtenu en sortie du filtre ? Sa forme est donnée sur la figure 13. Afin de comprendre son origine, il faut impérativement prendre en compte le fait que le circuit est linéaire. C'est-à-dire que le théorème de superposition s'applique. Le signal de sortie sera la somme des réponses apportées par le filtre à chacune des composantes du signal d'entrée.

Le filtre joue à la fois sur l'amplitude et la phase du signal de chaque composante du signal d'entrée par le biais du module et de l'argument de $\underline{H}(j\omega)$ qui sont :

$$H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{f^2}{f_0^2}}} \quad \text{et} \quad \varphi = -\arctan \frac{f}{f_0}$$

La composante de fréquence nulle en sortie est : $s_0 = H(f=0)e_0 = 1,5$ V puisqu'à cette fréquence $H = 1$.

La composante de fréquence 100 Hz en sortie est : $s_1 = H(f_0) 2 \cos(2\pi 100t + \varphi(f_0))$. Ici, on voit facilement qu'à cette fréquence $H(f_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et que $\varphi(f_0) = -\frac{\pi}{4}$. La seconde composante de sortie est donc : $s_1 = \sqrt{2} \cos(2\pi 100t - \frac{\pi}{4})$.

Pour la composante de fréquence 300 Hz, on a $H(3f_0) = 0,32$ et $\varphi = -\frac{2\pi}{5}$. Le signal de sortie correspondant sera : $s_3 = 0,32 \cos(2\pi 300t - \frac{2\pi}{5})$.

Comparons pour terminer les deux signaux :

Tension d'entrée	$e(t) = 1,5 + 2 \cos 2\pi 100t + 1 \cos 2\pi 300t$
Tension de sortie	$s(t) = 1,5 + 1,41 \cos(2\pi 100t - \frac{\pi}{4}) + 0,32 \cos(2\pi 300t - \frac{2\pi}{5})$

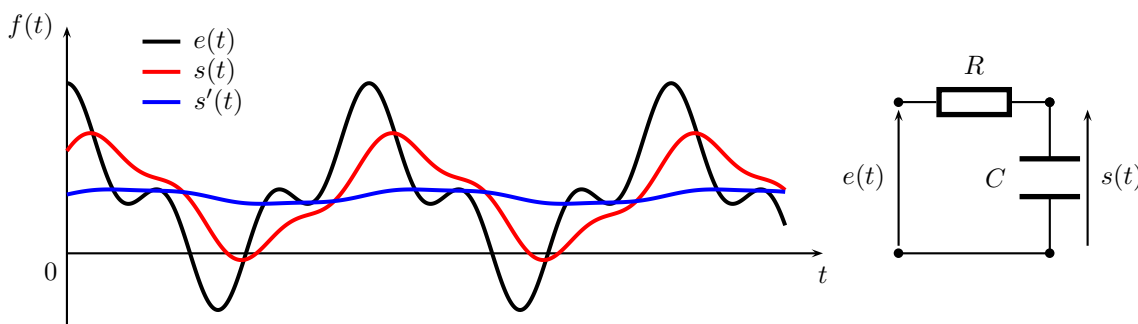


FIGURE 13 – Effet d'un filtre

La figure 13 présente de plus l'effet d'un même filtre passe-bas que le précédent mais de fréquence de coupure $f_c = 10$ Hz. On peut voir sur la courbe $s'(t)$ qu'il ne subsiste alors plus que la composante continue avec une assez faible oscillation à 100 Hz, la composante à 300 Hz n'étant plus perceptible. On perçoit alors bien l'effet de filtre passe-bas. Les courbes de la figure 13 sont représentées à l'échelle.

6.2 Filtrage analogique d'un signal crêteau

On envoie dans un filtre passe-bande une tension crêteau paire de fréquence fondamentale $f_e = 100$ Hz et évoluant entre 0 V et 3 V dans un filtre passe-bande. La fréquence centrale du filtre est $f_0 = 300$ Hz, son facteur de qualité $Q = 2$ ou $Q = 10$ et sa valeur maximale 1. La forme canonique du filtre est donc :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f})} \quad \text{avec} \quad f_0 = 300 \text{ Hz} \quad \text{et} \quad Q = 2 \quad \text{ou} \quad Q = 10$$

La tension présente le développement en série de FOURIER : $e(t) = 3 \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n\frac{\pi}{2}} \cos 2\pi n f_e t \right)$

Le signal est assez bien décrit par le début de son développement en série :

$$e(t) = 1,5 + 0,64 \cos 2\pi 100t - 0,21 \cos 2\pi 300t + 0,13 \cos 2\pi 500t - 0,09 \cos 2\pi 700t + \dots$$

Fréquence	0 Hz	100 Hz	300 Hz	500 Hz	700 Hz
H	0	0,18	1	0,42	0,25
φ	90°	79°	0	-65°	-75°
H'	0	0,04	1	0,09	0,05
φ'	90°	88°	0	-85°	-87°

La tension de sortie $s(t)$ calculée pour un facteur de qualité $Q = 2$ possède alors l'expression suivante :

$$s(t) = 0,12 \cos(2\pi 100t + \frac{79}{180}\pi) - 0,21 \cos 2\pi 300t + 0,06 \cos(2\pi 500t - \frac{65}{180}\pi) - 0,02 \cos(2\pi 700t - \frac{75}{180}\pi) + \dots$$

On peut facilement établir la même expression pour la tension de sortie lorsque le facteur de qualité est $Q = 10$:

$$s'(t) = 0,03 \cos(2\pi 100t + \frac{88}{180}\pi) - 0,21 \cos 2\pi 300t + 0,01 \cos(2\pi 500t - \frac{85}{180}\pi) + \dots$$

Comme on peut le constater sur la figure 14, dans le cas où $Q = 10$, le filtrage par un filtre passe-bande de la fonction crêteau périodique donne une tension que l'on peut assimiler à l'harmonique de fréquence $f = 300$ Hz de façon tout à fait satisfaisante. On notera que, sur la figure 14, les tensions $s(t)$ et $s'(t)$ qui ne possèdent pas de composante continue, ont été représentées à l'échelle mais décalées vers le haut afin de pouvoir mieux apprécier leur forme.

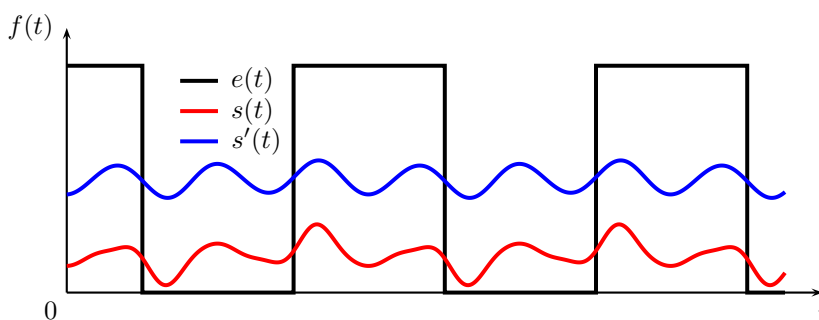


FIGURE 14 – Filtrage d'une tension crêteau

La sélection d'une harmonique dans un développement en série sera d'autant plus aisée que le facteur de qualité sera élevé. Il faudra, bien sûr, aussi choisir de façon intelligente la fréquence centrale du filtre passe-bande. Un filtre passe-bande peut être réalisé avec un circuit RLC série où la tension de sortie $s(t)$ est prélevée aux bornes de la résistance.

6.3 Utilisation du pic de Dirac

6.3.1 Aspect théorique

En pratique, le pic de DIRAC est une impulsion très courte. Considérons, par exemple, un filtre passe-bas RC qui possède une durée caractéristique RC . Sa fonction de transfert $\underline{H}(i\omega)$ est de module $H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}}$ et sa phase $\varphi(\omega) = -\arctan RC\omega$. On envoie grâce à un générateur d'impulsions, une impulsion de durée Δt en entrée, voir le schéma de la figure 15. Cette impulsion sera considérée comme très courte lors que $\Delta t \ll RC$, par

exemple $\Delta t \leq RC/100$. On peut alors traiter cette impulsion comme un pic de DIRAC, c'est-à-dire comme un ensemble d'ondes monochromatiques d'amplitudes identiques quelle que soit la pulsation ω : $g(\omega) = g_0$. Dans ce qui suit, on ne se préoccupe pas de la valeur de cette constante.

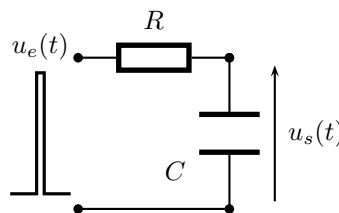


FIGURE 15 – Filtre et impulsion de DIRAC

Considérons, comme ci-dessus, un circuit linéaire et une tension d'entrée $u_e(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g_e(\omega) \exp i\omega t d\omega$ où $g_e(\omega)$ est la transformée de FOURIER de $u_e(t)$. Si on isole dans la décomposition de FOURIER, une composante monochromatique de pulsation ω , elle correspond à une tension $g_e(\omega) \exp -i\omega t$. Cette tension est traitée par le filtre qui donne la réponse : $\underline{H}(i\omega)g_e(\omega) \exp -i\omega t$. Du fait de la linéarité, la tension de sortie correspond à la superposition de toutes les tensions correspondant au spectre. On pourra écrire que :

$$u_s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{H}(i\omega)g_e(\omega) \exp i\omega t d\omega$$

Or, nous sommes dans le cas où $g_e(\omega) = g_0 \quad \forall \omega$ correspond à l'impulsion de DIRAC. On peut réécrire l'équation précédente donnant $u_s(t)$ selon :

$$u_s(t) = g_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{H}(i\omega) \exp i\omega t d\omega$$

On constate donc que le calcul de la transformée de FOURIER de $u_s(t)$ est à une constante près (g_0) la fonction de transfert $\underline{H}(i\omega)$ puisque :

$$\underline{H}(i\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_s(t) \exp -i\omega t dt$$

6.3.2 Aspect pratique

On étudie le filtre passe-bas RC de résistance $R = 1 \text{ k}\Omega$ et $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$. Sa constante de temps est $RC = 10^{-3} \text{ s}$. En TP, on dispose de générateurs de fonction qui peuvent délivrer des impulsions de forme créneau de durée $\Delta t \simeq 100 \text{ ns}$, c'est-à-dire $\Delta t \simeq 10^{-7} \text{ s}$. On envoie cette impulsion de tension dans le filtre passe-bas en étant bien dans la situation $\Delta t \ll RC$: le modèle mathématique de DIRAC est adapté. À l'aide soit d'un oscilloscope numérique, soit d'une carte d'acquisition reliée à un ordinateur, on enregistre le signal $u_s(t)$. Il ne reste plus qu'à programmer le calcul du module de la transformée de FOURIER de la tension de sortie $u_s(t)$ pour obtenir une courbe correspondant à $H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}}$, voir la figure 16. L'obtention de la transformée de FOURIER de $u_s(t)$ est prévue dans le module de calcul d'un oscilloscope numérique ou dans le logiciel de gestion de la carte d'acquisition. La manière dont est programmé le calcul, est appelée *transformée de Fourier rapide* ou en anglais Fast Fourier Transform souvent identifiée par le sigle FFT.

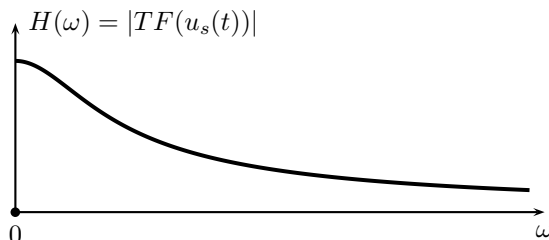


FIGURE 16 – Impulsion de DIRAC et transformée de FOURIER