

## Forces newtoniennes

Les forces newtoniennes ont un rôle important en physique en intervenant à la fois dans le domaine dit de l'infiniment grand à savoir celui de l'interaction gravitationnelle et aussi dans celui de l'infiniment petit à savoir celui des interactions électriques entre les particules élémentaires. On considère le schéma de la figure 1 où l'on attribue successivement les masses  $m_1$  et  $m_2$  et les charges  $q_1$  et  $q_2$  aux points matériels  $M_1$  et  $M_2$  en interaction. Les forces sont dites newtoniennes lorsqu'elles évoluent avec l'inverse de la distance qui les sépare au carré. On a :

$$\vec{F}_g = -\frac{\mathcal{G} m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \vec{F}_e = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

Les deux forces qui sont représentées sont celles exercées par  $M_1$  sur  $M_2$  en supposant  $q_1 q_2 > 0$ . Les deux forces correspondantes exercées par  $M_2$  sur  $M_1$  sont les opposées des premières par la loi des actions réciproques.

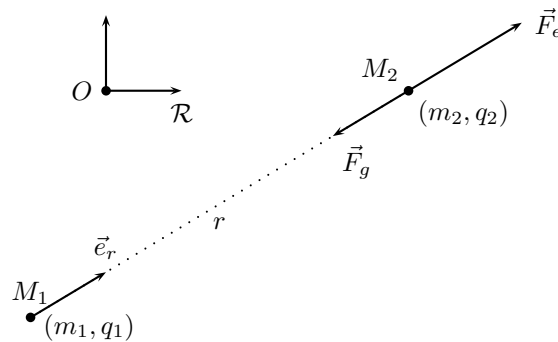


FIGURE 1 – Interactions newtoniennes entre deux points matériels

Le référentiel  $\mathcal{R}$  représenté sur la figure 1 est considéré comme galiléen. Les deux forces de gravitation et électrique sont des forces centrales. En effet, si l'on examine le point de vue de  $M_2$  qui subit les forces exercées par  $M_1$ , celles-ci sont toujours dirigées par le vecteur  $\overrightarrow{M_1 M_2}$ , comme centrées en  $M_1$ . En dehors de la dépendance des forces en  $1/r^2$ , la propriété de ces forces d'être centrales est essentielle pour en tirer des lois particulières comme nous le verrons. Les deux forces présentées sont des forces conservatives puisqu'elles dérivent d'une énergie potentielle. On peut écrire  $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p = -\frac{dE_p}{dr} \vec{e}_r$ . Les énergies potentielles mises en jeu sont :

$$E_{pg} = -\frac{\mathcal{G} m_1 m_2}{r} \quad \text{et} \quad E_{pe} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

en ayant pris la précaution de définir l'énergie potentielle nulle lorsque l'interaction s'annule à savoir lorsque  $r \rightarrow \infty$ .

Nous démontrerons - plus tard<sup>1</sup> - que toute distribution de masse ou toute distribution de charge qui possède une symétrie sphérique, à savoir qu'il n'y a pas de dépendance en fonction des angles  $\theta$  et  $\varphi$  des coordonnées sphériques est équivalente, lorsque l'on se situe à l'extérieur, à un système où toute la masse ou toute la charge serait concentrée au centre la distribution. Pour les particules élémentaires, le problème ne se pose pas vraiment parce qu'aux échelles de distance où nous travaillons, nous les considérons comme ponctuelles. Par contre en matière de gravitation, c'est un peu plus discutable. Si on prend l'exemple de la Terre, elle n'est pas à symétrie sphérique - et heureusement parce que sinon les paysages seraient plutôt monotones. . . - puisque ne serait-ce qu'en surface on alterne entre les océans, les plaines et les chaînes de montagnes. Là encore, nos études de gravitation se produisent à des échelles de distances très grandes devant les distances caractéristiques de l'évolution de la distribution des masses. Dans ces conditions, on considérera toujours que toutes les étoiles, toutes les planètes sont à symétrie sphérique et donc assimilables à un point concentrant toute la masse de l'étoile ou de la planète.

Dans la suite, nous privilégierons l'interaction gravitationnelle et ce qui revient au même l'interaction électrique attractive au détriment de l'interaction électrique répulsive. Pour cette dernière, l'adaptation des résultats vus en interaction attractive ne nécessite pas de développements spécifiques.

1. C'est le théorème de GAUSS de l'électrostatique et le même théorème dans le cas de la gravitation qui permettra de justifier cette affirmation.

# 1 Le problème à deux corps

## 1.1 Un système particulier

Il faut se rendre compte du fait que si le Soleil attire la Terre par la force de gravitation, la Terre attire le Soleil avec une force gravitationnelle de même intensité. Ceci est la stricte application de la loi des actions réciproques. En raison des propriétés physiques du système Soleil - Terre et aussi de notre point de vue très anthropocentrique, on considère que la Terre tourne autour du Soleil qui est perçu comme l'attracteur plutôt que de penser les choses de l'autre point de vue à savoir que le Soleil tourne autour de la Terre et que la Terre est l'attracteur. En fait, il faut pour faire une étude complète du problème étudier le système Soleil - Terre comme un système de deux corps ponctuels séparés par la distance  $r$  séparant leurs centres.

Nous allons considérer qu'aucun autre astre ne vient lui aussi en interaction avec  $M_1$  et  $M_2$ . Le système est étudié dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ . Le système des deux corps est donc isolé. Commençons par définir le barycentre  $G$  de ce système. Il est tel que  $(m_1 + m_2)\vec{OG} = m_1\vec{OM}_1 + m_2\vec{OM}_2$ . On notera  $m = m_1 + m_2$ . Appliquons la relation fondamentale de la Dynamique à ce système :

$$m \frac{d^2 \vec{OG}}{dt^2} = \vec{0}$$

puisque aucune force extérieure n'est envisagée sur le système. Il convient d'être attentif au fait que les forces de gravitation entre  $M_1$  et  $M_2$  sont des forces intérieures et n'interviennent pas dans le bilan des forces extérieures pour le système complet. Le centre d'inertie  $G$  de l'ensemble est en mouvement rectiligne et uniforme ou bien au repos. Quoi qu'il en soit, si on attache à  $G$  un référentiel  $\mathcal{R}^*$  dont les axes le concrétisant sont parallèles à ceux du référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  alors  $\mathcal{R}^*$  est nécessairement galiléen. On peut donc s'intéresser au mouvement de  $M_1$  et à celui de  $M_2$  dans le référentiel d'origine  $G$  galiléen noté  $\mathcal{R}^*$ .

Rappelons pour terminer que le barycentre  $G$  vérifie la relation  $m_1\vec{GM}_1 + m_2\vec{GM}_2 = \vec{0}$  qui s'écrit encore  $(m_1 + m_2)\vec{GM}_1 + m_2\vec{M}_1\vec{M}_2 = \vec{0}$ . On peut en déduire l'expression de chaque vecteur position de chaque corps :

$$\vec{GM}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{M}_1\vec{M}_2 \quad \text{et} \quad \vec{GM}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{M}_1\vec{M}_2$$

Intéressons-nous plus particulièrement au système Soleil - Terre avec  $m_s = 2 \times 10^{30}$  kg et  $m_t = 6 \times 10^{24}$  kg. On note  $d_{ts}$  la distance entre la Terre et le Soleil. On note  $S = M_1$  le centre du Soleil et  $T = M_2$  le centre de la Terre. On peut s'intéresser à la norme des vecteurs positions de chacun par rapport au barycentre de l'ensemble. On obtient :

$$GS = \frac{m_t}{m_s + m_t} d_{ts} \simeq 3 \times 10^{-6} d_{ts} \quad \text{et} \quad GT = \frac{m_s}{m_s + m_t} d_{ts} \simeq d_{ts}$$

Cette constatation amène souvent à considérer le Soleil comme immobile dans l'interaction et la Terre tournant autour du Soleil. En toute rigueur, ce n'est pas le cas. Le Soleil tourne autour du barycentre  $G$  sous l'effet de la force de gravitation qui existe entre le Soleil et la Terre.

## 1.2 Le mobile réduit

Nous nous intéressons logiquement à l'évolution dans le temps du vecteur  $\vec{M}_1\vec{M}_2$  puisque cela signifie pour la Terre que nous sommes intéressés par l'évolution au cours du temps de notre position par rapport au Soleil. Ce vecteur position relative de la Terre ( $M_2$ ) par rapport au Soleil ( $M_1$ ) est tout à fait fondamental.

Nous allons dans ce qui suit toujours pratiquer des dérivées dans le référentiel  $\mathcal{R}^*$  galiléen sans le préciser dans la notation pour ne pas l'alourdir inutilement. Pour comprendre la notion de mobile réduit, il faut s'intéresser aux grandeurs cinétiques qui caractérisent le système des deux corps assimilés à deux points.

### 1.2.1 Quantités de mouvement

Commençons par évaluer la quantité de mouvement pour chacun dans le référentiel  $\mathcal{R}^*$ . Commençons par  $\vec{p}_2^* = m_2 \frac{d\vec{GM}_2}{dt}$ . En utilisant l'expression de  $\vec{GM}_2$  vue avant, on arrive à  $\vec{p}_2^* = m_2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{d\vec{M}_1\vec{M}_2}{dt}$ . En faisant de la même façon, on voit apparaître pour  $M_1$  une quantité de mouvement opposée. On introduit la notion de masse réduite  $\mu$  comme la masse apparue dans l'expression précédente :

$$\vec{p}_2^* = \mu \frac{d\overrightarrow{M_1 M_2}}{dt} \quad \text{et} \quad \vec{p}_1^* = -\mu \frac{d\overrightarrow{M_1 M_2}}{dt} \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

On rappelle que la quantité de mouvement totale est logiquement nulle dans le référentiel  $\mathcal{R}^*$  puisqu'il a pour origine  $G$ . En effet, la quantité de mouvement d'un système est  $\vec{p} = m_{tot} \vec{v}_G$  et  $G$  est immobile dans  $\mathcal{R}^*$  puisque  $G$  est son origine.

### 1.2.2 Moment cinétique

Le moment cinétique de l'ensemble dans  $\mathcal{R}^*$  est  $\vec{L}^* = \overrightarrow{GM_1} \wedge \vec{p}_1^* + \overrightarrow{GM_2} \wedge \vec{p}_2^*$ . En utilisant les deux expressions des quantités de mouvement précédentes, on arrive à la formule :

$$\vec{L}^* = \overrightarrow{M_1 M_2} \wedge \mu \frac{d\overrightarrow{M_1 M_2}}{dt}$$

On peut constater que cette expression a la même forme que celle obtenue pour un point matériel  $m$  de vecteur position  $\vec{r}$  et de vitesse  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  qui est  $\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$ . On peut donc songer à transposer le problème que nous étudions à celui d'un point fictif de masse  $\mu$  et de vecteur position  $\overrightarrow{M_1 M_2}$ . Pour confirmer ou non cette impression, intéressons-nous maintenant à l'énergie cinétique.

### 1.2.3 Énergie cinétique

Reprenons l'exemple d'une particule de masse  $m$ , de vitesse  $\vec{v}$  et de quantité de mouvement  $\vec{p} = m\vec{v}$ . Nous connaissons bien l'expression de son énergie cinétique  $E_c = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$ . Il est plus intéressant d'écrire cette énergie cinétique sous la forme  $E_c = \frac{\vec{p}^2}{2m}$ . Appliquons cette expression aux deux corps de notre système :  $E_c^* = \frac{\vec{p}_1^{*2}}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^{*2}}{2m_2}$ . En utilisant les expressions de la quantité de mouvement, il vient immédiatement :

$$E_c^* = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{d\overrightarrow{M_1 M_2}}{dt} \right)^2$$

L'impression d'un modèle équivalent représenté par un point fictif de masse  $\mu$  est largement confirmée, il ne reste plus qu'à...

### 1.2.4 Enfonçons le clou !

Écrivons la relation de la Dynamique appliquée à chaque particule dans le référentiel  $\mathcal{R}^*$  avec pour rappel la force  $\vec{F}_g = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r$  qui est subie par  $M_2$  alors que  $-\vec{F}_g$  est subie par  $M_1$ . On a donc  $m_2 \frac{d^2 \overrightarrow{GM_2}}{dt^2} = \vec{F}_g$  et  $m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{GM_1}}{dt^2} = -\vec{F}_g$ . On en déduit que  $\frac{d^2 \overrightarrow{GM_2}}{dt^2} = \frac{1}{m_2} \vec{F}_g$  et  $\frac{d^2 \overrightarrow{GM_1}}{dt^2} = -\frac{1}{m_1} \vec{F}_g$ . Cette dernière relation peut encore être écrite selon  $\frac{d^2 \overrightarrow{M_1 G}}{dt^2} = \frac{1}{m_1} \vec{F}_g$ . Cela nous conduit immédiatement, par addition et relation de CHASLES à  $\frac{d^2 \overrightarrow{M_1 M_2}}{dt^2} = \frac{1}{\mu} \vec{F}_g$ . Il est préférable de l'écrire de façon plus traditionnelle :

$$\mu \frac{d^2 \overrightarrow{M_1 M_2}}{dt^2} = \vec{F}_g$$

On constate donc que le mouvement relatif de  $M_2$  par rapport à  $M_1$ , ou pour être plus clair de la Terre par rapport au Soleil, peut être étudié dans  $\mathcal{R}^*$  galiléen en considérant un mobile fictif de masse la masse réduite  $\mu$  dont le vecteur position serait  $\overrightarrow{M_1 M_2} = r \vec{e}_r$  et qui subirait la force d'interaction gravitationnelle existant entre le Soleil et la Terre  $\vec{F}_g = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r$ . Nous revenons donc sur un domaine plus connu puisqu'il s'agit d'étudier le mouvement d'un point dans un champ de force connu.

Pour le système Soleil - Terre, on a  $\mu = \frac{m_s m_t}{m_s + m_t} \simeq m_t$ . C'est une seconde raison qui est à l'origine du fait que l'on a tendance à oublier le mouvement du Soleil dans l'étude du mouvement de la Terre.

## 2 Étude générale du mouvement

Pour alléger les notations, on oubliera les \* précisant que l'on travaille dans le référentiel  $\mathcal{R}^*$  puisque tout le travail qui suit y sera placé.

### 2.1 Propriétés générales

#### 2.1.1 Moment cinétique

On peut reprendre la relation de la Dynamique pour écrire que si l'on note  $\vec{a}$  l'accélération du mobile fictif, on aura  $\mu \vec{a} = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r^2}\vec{e}_r$  en précisant bien que le vecteur unitaire  $\vec{e}_r$  est un vecteur toujours porté par la direction depuis le point  $G$  jusqu'au point fictif étudié. Il est quand même plus simple de dire que ce vecteur est central et que la force de gravitation l'est bien sûr aussi ! Comme nous le savons, le théorème du moment cinétique avec  $\vec{L} = r\vec{e}_r \wedge \mu\vec{v}$  donne :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = r\vec{e}_r \wedge \left( -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r^2}\vec{e}_r \right) = \vec{0}$$

Le moment cinétique  $\vec{L}$  est donc une constante du mouvement, le mouvement est donc plan puisque  $r\vec{e}_r$  et  $\vec{v}$  seront toujours dans le plan perpendiculaire à  $\vec{L}$ . Comme souvent, on choisit de faire porter le moment cinétique sur l'axe  $Gz$ , on écrit que  $\vec{L} = L\vec{e}_z = \mu C\vec{e}_z$  où  $C$  est la constante des aires. Le mouvement se déroulera dans le plan formé par les vecteurs  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  de la base polaire formant la base orthonormée directe  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ . On peut exprimer  $\vec{r} = r\vec{e}_r$  et  $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ . Dans ces conditions, on retrouve l'expression classique de la constante des aires :

$$\vec{L} = \mu C \vec{e}_z \quad \text{avec} \quad C = r^2\dot{\theta}$$

#### 2.1.2 Énergie mécanique

Après la conservation du moment cinétique, on peut s'intéresser à la conservation de l'énergie mécanique puisque nous avons vu que la force de gravitation dérivait de l'énergie potentielle  $E_{pg} = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r}$ . L'énergie cinétique est  $E_c = \frac{1}{2}\mu\vec{v}^2 = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\dot{\theta}^2$ . On utilise la constante des aires pour arriver à  $E_c = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{\mu C^2}{2r^2}$ . L'énergie mécanique est une constante et permet de définir l'énergie potentielle effective  $E_{p,eff}$  selon :

$$E_m = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + E_{p,eff} \quad \text{avec} \quad E_{p,eff} = \frac{\mu C^2}{2r^2} - \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r}$$

#### 2.1.3 Vecteur excentricité

Si l'on écrit la relation de la Dynamique à la particule fictive, on obtient  $\mu \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r^2}\vec{e}_r$ . On peut regarder cette équation en jouant avec la constante des aires en écrivant  $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{d\vec{v}}{d\theta} \frac{C}{r^2}$ . Reprenons la relation de la Dynamique, il vient, après simplification par  $r^2$ ,  $\mu C \frac{d\vec{v}}{d\theta} = -\mathcal{G}m_1m_2 \vec{e}_r$  que l'on peut encore écrire sous la forme  $d\vec{v} = -\frac{\mathcal{G}(m_1+m_2)}{C} \vec{e}_r d\theta$ . Cette équation différentielle peut s'intégrer puisque l'on sait que  $\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r$  et donc  $d\vec{e}_\theta = -\vec{e}_r d\theta$ . En notant  $\vec{v}_0$  la constante vectorielle d'intégration, il vient  $\vec{v} = \frac{\mathcal{G}(m_1+m_2)}{C} \vec{e}_\theta + \vec{v}_0$ . On appelle vecteur excentricité le vecteur constant  $\vec{e} = \frac{C}{\mathcal{G}(m_1+m_2)} \vec{v}_0$ . Il intervient alors dans l'équation suivante :

$$\vec{e} = \frac{C}{\mathcal{G}(m_1+m_2)} \vec{v} - \vec{e}_\theta$$

On comprendra plus loin que ce vecteur a été baptisé ainsi parce qu'il est, bien sûr, en rapport avec l'excentricité des coniques que nous allons rencontrer.

## 2.2 Analyse de l'énergie potentielle effective

Avant d'établir les expressions des trajectoires possibles dans le cadre de l'interaction gravitationnelle, il est important de se fixer les idées par une analyse énergétique basée sur l'étude qualitative du mouvement sur la courbe  $E_{p,eff}(r)$ . Cette énergie potentielle est représentée à la figure 2.

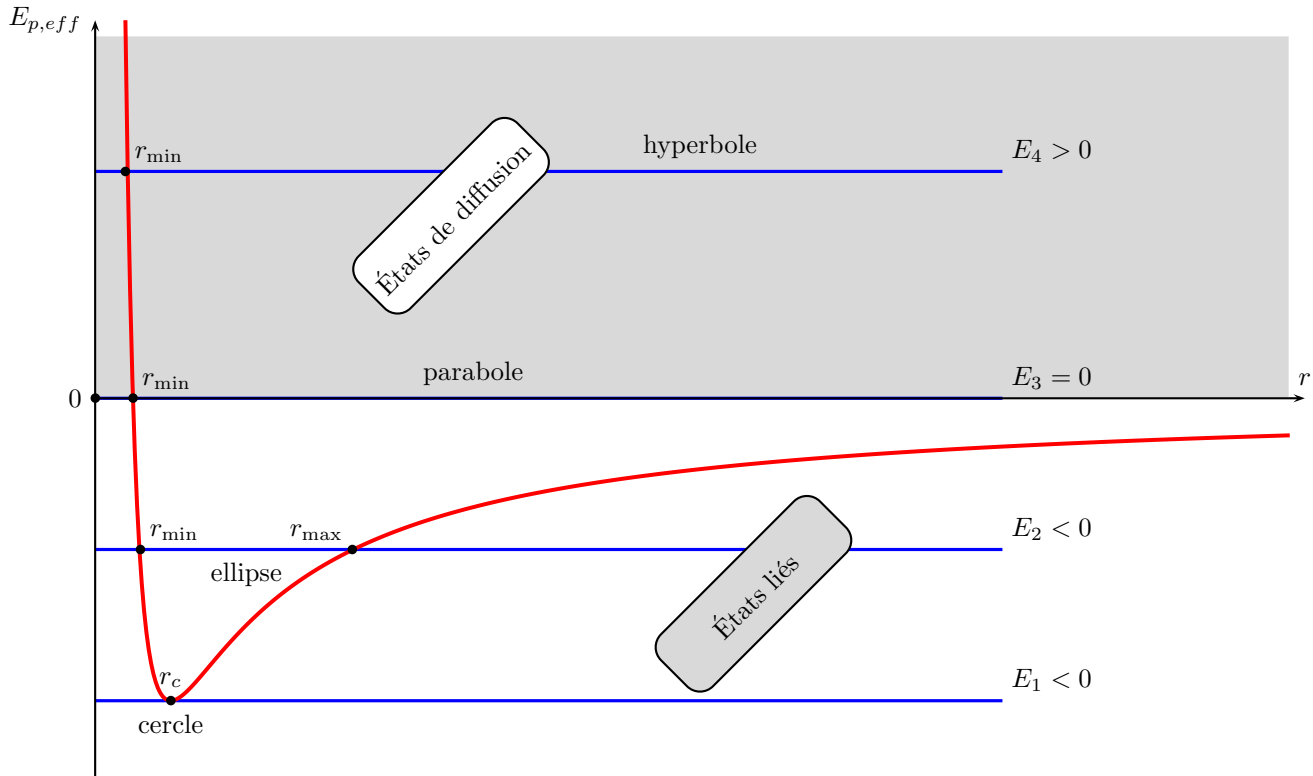


FIGURE 2 – Nature du mouvement en fonction de l'énergie mécanique du mobile

Le principe de lecture est basé sur l'expression de l'énergie mécanique  $E_m = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + E_{p,eff}$  avec  $\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 \geq 0$ . Dans ces conditions, les seules valeurs de la distance  $r$  séparant les deux corps accessibles sont celles telles que :

$$E_m \geq E_{p,eff} \quad \text{définit les valeurs possibles de } r$$

Dans ces conditions, l'énergie mécanique du système ne peut pas être inférieure à la valeur minimale de  $E_{p,eff}$  qui se produit pour  $r = r_c$  à savoir  $E_1$  sur le graphique de la figure 2. Dans ce cas-là  $E_m = E_1 = E_{p,eff}$  et donc  $\dot{r} = 0$ . Le rayon ne peut pas évoluer, la trajectoire est un cercle de rayon  $r_c$  défini par  $\left. \frac{dE_{p,eff}}{dr} \right|_{r=r_c} = 0$ .

On trouve que  $\left. \frac{dE_{p,eff}}{dr} \right|_{r=r_c} = -\frac{\mu C^2}{r_c^3} + \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r_c^2} = 0$ . On arrive à donner l'expression du rayon du cercle en fonction de la constante des aires :

$$r_c = \frac{C^2}{\mathcal{G}(m_1 + m_2)}$$

Pour les autres situations d'énergie, on constate que pour  $E_1 < E_m < 0$ , il y a deux rayons limites qui correspondent à l'aphélie  $r_a = r_{\max}$  et au périhélie  $r_p = r_{\min}$ . Le rayon évolue, la trajectoire est une ellipse comme nous le démontrerons plus loin. Pour les trajectoires circulaire et elliptique, l'évolution de la distance  $r$  est bornée, on dit que le système est dans un état lié.

Pour  $E_m \geq 0$ , il n'y a plus de rayon borné pour  $r_{\max}$ . Les valeurs de  $r$  sont comprises dans l'intervalle  $[r_{\min}; \infty[$ . On a des trajectoires dites de diffusion qui sont soit une parabole pour  $E_m = 0$ , soit une hyperbole pour  $E_m > 0$ .

## 2.3 Trajectoire circulaire

Sur la trajectoire circulaire, nous avons  $\dot{r} = 0$  et donc  $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ . Le rayon vecteur est  $\vec{r} = r\vec{e}_r$ . On constate que la vitesse est toujours perpendiculaire au rayon vecteur. Le moment cinétique est donc  $\vec{L} = \vec{r} \wedge \mu\vec{v} = \mu C \vec{e}_z$ . La constante des aires est  $C = r_c v_c$  où  $v_c = r_c \dot{\theta}_c$ . On peut en déduire l'expression de la relation donnant un lien entre  $r_c$  et  $v_c$  :  $r_c = \frac{r_c^2 v_c^2}{\mathcal{G}(m_1 + m_2)}$ . On en déduit l'expression de la vitesse sur la trajectoire en fonction du rayon de celle-ci ainsi que celle de la vitesse angulaire  $\dot{\theta}_c$  constante dans ce mouvement circulaire et uniforme :

$$v_c = \sqrt{\frac{\mathcal{G}(m_1 + m_2)}{r_c}} \quad \text{et} \quad \dot{\theta}_c = \sqrt{\frac{\mathcal{G}(m_1 + m_2)}{r_c^3}}$$

Commençons par rappeler que ces relations peuvent se retrouver en écrivant la relation fondamentale de la Dynamique au mobile réduit. On a  $\mu\vec{a} = -\mu \frac{v_c^2}{r_c} \vec{e}_r = -\frac{\mathcal{G}m_1 m_2}{r_c^2} \vec{e}_r$ . Avec l'expression de la masse réduite  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ , on arrive à l'expression de la vitesse vue avant. Si l'on reprend le système Soleil - Terre comme exemple, on aura une vitesse pour le mobile réduit qui est  $v_c = \sqrt{\frac{\mathcal{G}(m_s + m_t)}{r_c}} \simeq \sqrt{\frac{\mathcal{G}m_s}{r_c}}$ . Cette dernière expression est la plus souvent rencontrée lorsque l'on étudie le mouvement de la Terre autour du Soleil. On peut aussi, grâce aux relations précédentes, donner l'expression de l'énergie mécanique dans ce mouvement circulaire de rayon  $r_c$  :

$$E_m = -\frac{\mathcal{G}m_1 m_2}{2r_c}$$

Nous allons illustrer la loi des aires dans ce cas particulier de mouvement simplement en disant que pendant des durées égales, les aires balayées par le rayon vecteur  $\vec{r}$  sont égales. Ceci est évident puisque le mouvement circulaire est uniforme. Nous allons aussi évoquer la loi de KÉPLER qui fait le lien entre la période de la révolution d'une planète autour du Soleil et le rayon de la trajectoire. La période est  $T_c = \frac{2\pi}{\dot{\theta}_c}$ . On obtient alors la loi :

$$\frac{T_c^2}{r_c^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}(m_s + m_t)}$$

Cette expression n'est pas tout à fait la loi de KÉPLER parce qu'historiquement, cette loi disait que pour toutes les planètes dans le système solaire on avait  $\frac{T^2}{r^3} = \text{Constante}$ , en clair pour la Terre et Mars par exemple :  $\frac{T_t^2}{r_t^3} = \frac{T_m^2}{r_m^3}$ . On peut dire, au vu du résultat précédent, d'une façon sans doute un peu brutale que cette loi était fautive puisque la masse de l'astre étudié intervient dans le résultat. Malgré tout la loi de KÉPLER a été un moment essentiel dans la compréhension du système solaire, elle était validée par le fait que pour toutes les planètes du système solaire, on pouvait écrire  $m_s \gg m_p$ , ainsi le rapport  $T^2/r^3$  ne faisait intervenir que la masse du Soleil. Nous avons présenté ici uniquement le cas des trajectoires circulaires mais la loi de KÉPLER se généralise pour tous les systèmes liés.

## 2.4 Trajectoires par la méthode de Binet

### 2.4.1 Mise en place

La méthode de BINET consiste à effectuer un changement de variable en posant  $u = \frac{1}{r}$  et à éliminer le paramétrage du problème par le temps  $t$  pour privilégier la trajectoire par rapport aux équations horaires des paramètres  $r(t)$  et  $\theta(t)$ . On choisit de travailler pour obtenir directement  $r(\theta)$ . On commence donc par le rayon vecteur  $\vec{r} = \frac{1}{u} \vec{e}_r$ . On peut légitimement s'interroger sur le bien fondé du changement de variable lorsque l'on se trouve confronté à cette expression. Intéressons-nous à la vitesse  $\vec{v} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{u} \vec{e}_r \right)$ . C'est ici qu'on va éliminer le paramétrage par le temps  $t$  en pensant à la constante des aires  $C = r^2 \dot{\theta}$  et donc au fait que  $\dot{\theta} = Cu^2$ . Ceci nous permet d'envisager le calcul de la vitesse sous un autre angle :  $\vec{v} = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{u} \vec{e}_r \right) \dot{\theta} = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{u} \vec{e}_r \right) Cu^2$ . Nous obtenons  $\vec{v} = Cu^2 \left[ -\frac{du}{d\theta} \frac{1}{u^2} \vec{e}_r + \frac{1}{u} \vec{e}_\theta \right]$ . On établit l'expression de la vitesse dans la méthode de BINET :

$$\vec{v} = C \left[ -\frac{du}{d\theta} \vec{e}_r + u \vec{e}_\theta \right]$$

Cette expression est un peu encourageante par rapport au départ où la perception du changement de variable peut paraître étrange. Mais le meilleur est à venir avec le calcul de l'accélération. En utilisant la constante des aires dans le calcul, cela sous-entend que l'on a un mouvement à force centrale bien évidemment. Nous ne devrions trouver en calculant l'accélération qu'une seule composante selon  $\vec{e}_r$  et pas de composante selon  $\vec{e}_\theta$ .

Nous allons procéder comme pour la vitesse en commençant par éliminer le paramètre  $t$ . Cela donne  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{d\theta} \dot{\theta} = Cu^2 \frac{d\vec{v}}{d\theta}$ . Il suffit d'utiliser le fait que  $\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r$  pour pouvoir conclure que l'expression de l'accélération est :

$$\vec{a} = -C^2 u^2 \left[ \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right] \vec{e}_r$$

### 2.4.2 Équation polaire de la trajectoire

Pour obtenir l'équation de la trajectoire, il faut écrire la relation de la Dynamique  $\mu \vec{a} = \vec{F}_g$ . Cela donne  $-\mu C^2 u^2 \left[ \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right] \vec{e}_r = -\mathcal{G} m_1 m_2 u^2 \vec{e}_r$ . Après simplification par  $u^2$ , on obtient une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficient constant et second membre constant :

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{\mathcal{G} m_1 m_2}{\mu C^2} = \frac{1}{p} \quad \text{avec} \quad p = \frac{\mu C^2}{\mathcal{G} m_1 m_2} = \frac{C^2}{\mathcal{G}(m_1 + m_2)}$$

où  $p$  est un paramètre représentant une distance puisque  $u$  est l'inverse d'une distance. La solution de cette équation différentielle de type oscillateur harmonique est  $u = A \cos(\theta + \varphi) + \frac{1}{p}$ .  $A$  et  $\varphi$  sont deux constantes d'intégration comme il se doit d'arriver lorsque l'on intègre une équation différentielle du second ordre. Toutefois, on peut librement choisir l'origine de l'angle  $\theta$  repérant le mobile réduit dans son évolution. Si l'on choisit de prendre  $\theta = 0$  lorsque  $u$  est maximum, cela signifie que  $r$  est minimal alors obligatoirement on a  $\varphi = 0$ . Nous nous plaçons dans ce cas par la suite. Cela veut dire que l'origine de l'angle  $\theta$  est prise lors du passage au périhélie. L'équation donnant  $u$  devient  $u = A \cos \theta + \frac{1}{p} = \frac{1 + pA \cos \theta}{p} = \frac{1}{r}$ . On peut donc donner l'équation générale de la trajectoire sous sa forme la plus classique :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

où  $e$  s'appelle l'excentricité de la conique dont l'équation polaire est ci-dessus.  $p$  s'appelle le paramètre de la conique. Ces coniques sont définies par rapport à un foyer qui est l'origine de la distance  $r$ , rappelons qu'il s'agit du barycentre  $G$  du système des deux corps.

#### Trajectoire circulaire

Pour obtenir un rayon constant, il faut que  $r$  soit indépendant de  $\theta$ . Cela correspond à une excentricité nulle  $e = 0$ .  $p$  le paramètre de la conique est donc tout simplement le rayon du cercle. Si l'on reprend le cas du cercle étudié avant, on aura  $p = r_c$ .

#### Trajectoire parabolique

On obtient une trajectoire parabolique lorsque l'excentricité est  $e = 1$ . L'équation de la trajectoire devient  $r = \frac{p}{1 + \cos \theta}$ . On constate que  $r \rightarrow \infty$  pour  $\theta = \pi$  ou  $-\pi$  ce qui revient au même par parité de fonction  $\cos \theta$ . Pour  $\theta = 0$ , on a  $r = r_{\min} = r_p = \frac{p}{2}$ . C'est le périhélie. Le paramètre  $p$  de la conique est le double de la plus petite distance entre les deux corps  $M_1$  et  $M_2$ , on peut encore écrire l'équation de la trajectoire selon :

$$r_{\text{parabole}} = \frac{2r_{\min}}{1 + \cos \theta}$$

Cette équation est bien celle d'une parabole. Nous pouvons le voir par un passage en coordonnées cartésiennes  $Gxy$  où l'axe  $Gx$  est l'axe d'origine des coordonnées polaires d'angle  $\theta$ . On a  $x^2 + y^2 = r^2(\theta) = \frac{p^2}{(1 + \cos \theta)^2}$ .

Par projection sur l'axe  $Gx$ , on obtient  $x = \frac{p \cos \theta}{1 + \cos \theta}$ . Cette relation permet d'écrire que  $\cos \theta = \frac{x}{p - x}$  ou encore  $1 + \cos \theta = \frac{p}{p - x}$ . En élevant au carré, on peut remplacer dans l'expression établie au départ et écrire  $x^2 + y^2 = (p - x)^2$ . On peut mieux organiser cette formule en favorisant la distance au périhélie  $r_{\min} = r_p$ , cela donne :

$$y^2 = 4r_{\min}(r_{\min} - x)$$

La parabole est représentée à la figure 3.

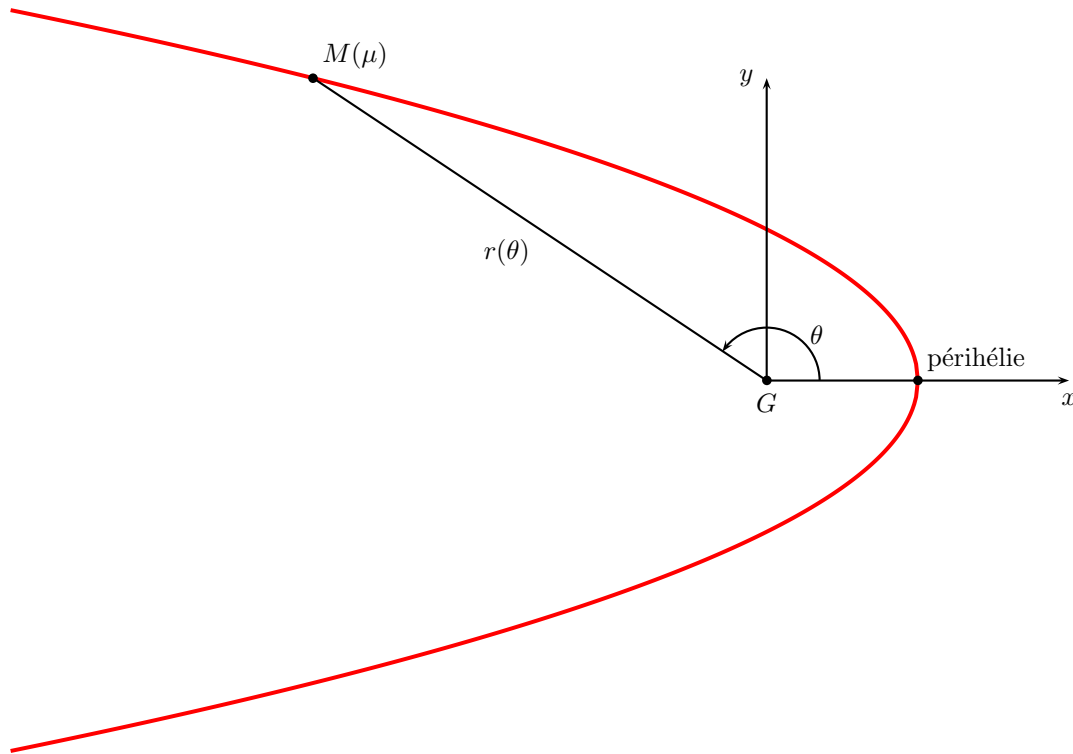


FIGURE 3 – Tracé d'une trajectoire parabolique de foyer  $G$ .

Sur la trajectoire parabolique comme sur les autres trajectoires, le périhélie est une position particulière pour laquelle  $\dot{r} = 0$  et donc aussi pour laquelle la vitesse est perpendiculaire à la position. Si  $v_p$  est la valeur de la vitesse au périhélie et  $r_p$  le rayon alors la constante des aires est  $C = r_p v_p$ . L'énergie mécanique est donc égale à l'énergie potentielle effective à ce moment-là. Comme nous l'avons indiqué sur le graphique de la figure 2, cette énergie mécanique est nulle. On a donc  $\frac{\mu C^2}{2r_p^2} - \frac{\mathcal{G}m_1 m_2}{r_p} = 0$ . On obtient la vitesse :

$$v_p = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}m_1 m_2}{r_p}}$$

qui fait inévitablement penser à la vitesse de libération d'une attraction gravitationnelle comme cela a pu être étudié auparavant.

Comme nous allons le comprendre par la suite, le cas  $0 < e < 1$  correspond à une trajectoire elliptique et  $e > 1$  à celui d'une trajectoire hyperbolique.

### 2.4.3 Énergie mécanique

L'énergie mécanique du mobile réduit est  $E_m = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{\mathcal{G}m_1 m_2}{r} = \frac{1}{2}\mu v^2 - \mathcal{G}m_1 m_2 u$ . On peut écrire cette énergie en fonction de la variable de BINET avec  $r = 1/u$  et  $v^2 = C^2 \left[ \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right]$ . On rappelle que le paramètre  $p$  de la conique et la constante des aires sont reliées par  $p = \frac{\mu C^2}{\mathcal{G}m_1 m_2}$ . Nous avons  $\frac{du}{d\theta} = -\frac{e \sin \theta}{p}$ . Cela



permet d'exprimer  $v^2 = C^2 \left[ \frac{e^2 \sin^2 \theta}{p^2} + \frac{(1 + e \cos \theta)^2}{p^2} \right]$ . Après calcul, on arrive à  $v^2 = \frac{C^2}{p^2} (1 + e^2 + 2e \cos \theta)$ . L'énergie mécanique est donc  $E_m = \frac{1}{2} \mu \frac{C^2}{p^2} (1 + e^2 + 2e \cos \theta) - \frac{Gm_1 m_2}{p} (1 + e \cos \theta)$ . En utilisant la relation entre  $p$  et  $C$ , on peut écrire que  $E_m = \frac{\mu C^2}{p^2} \left[ \frac{1}{2} + \frac{e^2}{2} + e \cos \theta - 1 - e \cos \theta \right]$  ce qui donne après simplification  $E_m = -\frac{\mu C^2}{2p^2} (1 - e^2)$ . En cherchant à faire figurer les masses et la constante de gravitation universelle, on arrive à :

$$E_m = -\frac{Gm_1 m_2}{2p} (1 - e^2)$$

Cette expression nous permet de justifier les affirmations sur la nature des trajectoires faites lors de l'analyse du graphique de l'énergie potentielle effective et de l'énergie mécanique. Nous avons commencé par le mouvement circulaire, pour lequel  $p = r_c$ . Nous constatons que cela correspond bien à  $e = 0$ . Nous savons par la géométrie des coniques que  $0 < e < 1$  correspondait au cas d'une ellipse. Cela correspond bien à un cas où  $1 - e^2 > 0$  et donc bien à une énergie mécanique négative  $E_m < 0$ . De la même façon, lorsque  $e = 1$ , on a une parabole et cela correspond bien à  $E_m = 0$ . C'est la plus faible énergie qui permet à l'astre de quitter son attracteur en pouvant aller jusqu'à  $r \rightarrow \infty$ . Lorsque  $e > 1$ , nous avons le cas de l'hyperbole dans la famille des coniques et c'est bien pour  $E_m > 0$ . L'expression de l'énergie mécanique fonction de l'excentricité est fondamentale pour bien comprendre la discrimination des trajectoires.

## 2.5 Trajectoires elliptiques

La trajectoire de la Terre autour du Soleil est très légèrement elliptique puisque  $e = 0,0167$ , il est très raisonnable de la décrire comme une trajectoire circulaire dans une première approche déjà fructueuse. Par contre, si l'on prend l'exemple de la comète de HALLEY, il en va très différemment puisque  $e = 0,97$ , on est plus très loin d'un état de diffusion parabolique qui s'obtient pour  $e = 1$ .

### 2.5.1 Caractéristiques d'une trajectoire elliptique

La représentation d'une trajectoire elliptique d'excentricité  $e = 0,80$  est réalisée à la figure 4.

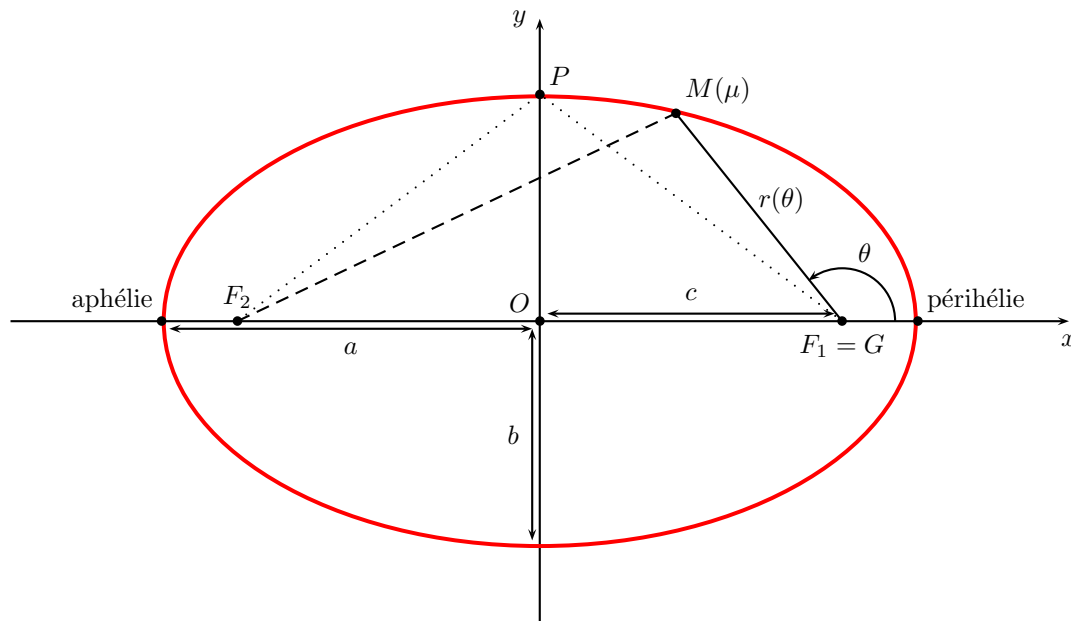


FIGURE 4 – Tracé d'une trajectoire elliptique de foyer  $F_1 = G$ , représentant le barycentre du système Soleil - Astre d'excentricité  $e = 0,80$ .

L'ellipse est caractérisée par différentes équations, on peut commencer par citer son équation cartésienne dans le repère  $Oxy$  où  $O$  est le centre de l'ellipse :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

où  $a$  est appelé demi-grand axe de l'ellipse (on appelle plus souvent  $2a$  le grand axe de l'ellipse) et  $b$  le demi petit axe ( $2b$  est le petit axe). On convient toujours de considérer les situations avec  $a > b$ , on notera que si  $a = b$ , alors on retrouve l'équation d'un cercle de rayon  $r_c = a = b$ .

Une seconde méthode est de donner l'équation polaire de l'ellipse à partir du point particulier qui porte le nom de foyer de l'ellipse  $F_1$  qui, pour notre problème de gravitation, correspond au barycentre des deux masses en interaction. L'ellipse possède un second foyer  $F_2$  symétrique de  $F_1$  par rapport au centre. L'équation de la trajectoire est alors :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

avec, bien sûr,  $e$  l'excentricité de l'ellipse et  $p$  le paramètre de cette ellipse. Nous avons montré que  $p = C^2/(\mathcal{G}(m_1 + m_2))$ . La distance  $OF_1 = c$  est appelée distance focale de l'ellipse. Elle est reliée à  $a$  et  $b$  comme nous allons le comprendre puisqu'il existe une troisième façon de caractériser l'ellipse.

On parle d'équation géométrique de l'ellipse, on peut montrer que l'ellipse est l'ensemble des points  $M$  tels que la somme de leurs distances aux foyers  $F_1$  et  $F_2$  est une constante. Cette constante est le grand axe  $2a$  de l'ellipse comme on peut le comprendre en raisonnant sur la position particulière  $\theta = 0$  (ou  $\theta = \pi$ ) tout en profitant de la symétrie de la situation par rapport à  $O$ . On a :

$$F_1M + F_2M = 2a$$

Si on place le point  $M$  à la position particulière  $P$  de la figure 4, on obtient deux triangles rectangles symétriques de chaque côté et d'hypoténuse  $a$ . En appliquant le théorème de PYTHAGORE à l'un de ces triangles, on arrive à :  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ . L'excentricité est aussi donnée par  $e = c/a$ , on retrouve logiquement le cercle pour  $e = 0$ . Il est important de relier les paramètres  $a$ ,  $b$ , et  $c$  et donc  $e$  aux grandeurs que l'on mesure dans l'étude d'un astre, par exemple la distance du périhélie ou de l'aphélie. Le périhélie s'obtient pour  $\theta = 0$  et l'aphélie pour  $\theta = \pi$  :

$$r_p = \frac{p}{1 + e} \quad r_a = \frac{p}{1 - e} \quad r_p + r_a = 2a = \frac{2p}{1 - e^2}$$

On peut aussi donner les expressions suivantes :

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} \quad e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$$

Dans le tableau, on trouve les données concernant la comète de HALLEY dont la période de révolution est d'environ 76 ans. On rappelle que l'unité astronomique 1 ua correspond à la distance de la Terre au Soleil à savoir 1 ua = 150 millions de kilomètres d'où 1 ua =  $1,5 \times 10^{11}$  m.

Période	$T = 76$ ans
Demi grand axe	$a = 17,9$ ua
Demi petit axe	$b = 10,7$ ua
Excentricité	$e = 0,97$
Distance focale	$c = 17,4$ ua
Paramètre de l'ellipse	$p = 6,4$ ua
Distance au périhélie	$r_p = 0,59$ ua
Vitesse au périhélie	$v_p = 55 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$
Distance à l'aphélie	$r_a = 35$ ua
Vitesse à l'aphélie	$v_a = 0,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante des aires	$C = r_a v_a = r_p v_p = 4,8 \times 10^{15} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

### 2.5.2 Énergie mécanique pour le mouvement elliptique

Nous avons démontré que  $2a = \frac{2p}{1-e^2}$ . Or, nous avons établi l'expression de l'énergie mécanique sur une conique d'excentricité  $e$  par la méthode de BINET, on privilégie en général le grand axe de l'ellipse  $2a$  dans la formule de l'énergie :

$$E_m = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{2p}(1-e^2) = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{2a}$$

Cette dernière expression est intéressante lorsqu'on la met en parallèle avec l'énergie mécanique sur un mouvement circulaire qui est  $E_m = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{2r_c}$ . On peut voir qu'il suffit de transposer le rayon  $r_c$  pour le demi grand axe  $a$  de l'ellipse.

### 2.5.3 3<sup>ème</sup> loi de Képler

Nous allons revenir sur la constante des aires  $C = r^2\dot{\theta}$ . Cette constante des aires est définie vectoriellement au départ par  $\vec{C} = \vec{r} \wedge \vec{v}$ . Au périhélie - minimum de  $r$  - et à l'aphélie - maximum de  $r$  -, on a  $\dot{r} = 0$ . Ainsi le rayon vecteur est orthogonal à la vitesse et on a donc  $\vec{C} = \vec{r}_p \wedge \vec{v}_p = r_p v_p \vec{e}_z = r_a v_a \vec{e}_z$ . On peut donc écrire  $C = r_p v_p = r_a v_a$  comme cela a été fait dans le tableau des caractéristiques de la comète de HALLEY. Comme cela a été montré dans le cadre de l'étude du programme, la constante des aires est le double de la vitesse aréolaire, on  $C = 2\frac{d\mathcal{A}}{dt}$ . Cette vitesse montre l'aire balayée par le rayon vecteur au cours du temps. Cette vitesse permet de dire que des aires égales sont balayées pendant des durées égales. Cela explique que la vitesse autour du périhélie sera toujours plus grande que celle autour de l'aphélie parce le rayon vecteur est plus petit au périhélie que de l'autre côté de l'ellipse. On peut voir, dans l'exemple de la comète de HALLEY, qu'il y a une grande différence entre  $v_p$  et  $v_a \ll v_p$ . La surface d'une ellipse est  $\mathcal{A} = \pi ab$ . Comme on a  $2d\mathcal{A} = Cdt$ , on peut intégrer facilement pour obtenir  $2\pi ab = CT$  où  $T$  est la période de révolution sur le mouvement elliptique. Passons cette relation au carré, on obtient  $4\pi^2 a^2 b^2 = C^2 T^2$ . Cela nous permet de nous rapprocher de la troisième loi de KÉPLER. Nous allons utiliser le fait que  $b^2 = \frac{p^2}{1-e^2} = pa$ . On obtient donc  $4\pi^2 a^3 p = C^2 T^2$ . Nous avons posé au début de l'étude des trajectoires  $p = \frac{\mu C^2}{\mathcal{G}m_1m_2} = \frac{C^2}{\mathcal{G}(m_1+m_2)}$ . On obtient donc  $4\pi^2 a^3 = \mathcal{G}(m_1+m_2)T^2$ . La forme habituelle de la troisième loi de KÉPLER est :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}(m_1+m_2)}$$

Elle généralise celle que nous avons vue sur un cercle, toujours en remplaçant le rayon du cercle  $r_c$  par le demi grand axe  $a$ .

### 2.5.4 Ellipse et hyperbole

Nous venons de voir la définition géométrique de l'ellipse par la relation  $F_1M + F_2M = 2a$ . De la même façon, on peut démontrer que pour une hyperbole il existe aussi une relation du même type. On a cette fois  $|F_1M - F_2M| = 2a$ .

$$F_1M + F_2M = 2a \rightarrow \text{ellipse} \quad |F_1M - F_2M| = 2a \rightarrow \text{hyperbole}$$

Cette situation a été rencontrée dans l'étude des interférences d'YOUNG. En effet, en définissant la différence de marche  $\delta > 0$  comme la différence de chemin optique dans un milieu assimilé à l'air, on a  $\delta = S_1M - S_2M$  où  $S_1$  et  $S_2$  sont les deux sources secondaires ponctuelles engendrées à partir de la source primaire par l'interféromètre utilisé. Une frange donnée est définie par la relation  $\delta = p\lambda$  avec  $p$  fixé pour une frange, par exemple une valeur entière pour une frange brillante. Ainsi dans un plan comme ceux formés par les capteurs ou les écrans, on observera des hyperboles :

$$\delta = S_1M - S_2M = p\lambda \quad \text{frange} = \text{hyperbole}$$

Par invariance du problème par rotation autour de l'axe des deux sources  $S_1S_2$ , on génère en fait des surfaces. Les franges d'interférences sont des hyperboloïdes de révolution.

## 2.6 L'originalité du vecteur excentricité

Nous avons, dans l'étude du système de deux corps, mis en avant l'importance de la constante des aires pour le traitement de l'équation du mouvement. Nous avons mis en avant le vecteur excentricité défini par :

$$\vec{e} = \frac{C}{\mathcal{G}(m_1 + m_2)} \vec{v} - \vec{e}_\theta$$

On peut rappeler l'expression de la vitesse  $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ . Nous allons effectuer le produit scalaire de l'équation donnant le vecteur excentricité par le vecteur unitaire  $\vec{e}_\theta$ . On obtient l'équation  $\vec{e} \cdot \vec{e}_\theta = \frac{C}{\mathcal{G}(m_1 + m_2)} \vec{v} \cdot \vec{e}_\theta - 1$ .

Or,  $\vec{v} \cdot \vec{e}_\theta = r\dot{\theta}$ . Nous savons que la constante des aires est  $C = r^2\dot{\theta}$ , cela permet d'écrire finalement la relation suivante :

$$\vec{e} \cdot \vec{e}_\theta = \frac{C^2}{\mathcal{G}(m_1 + m_2)} \frac{1}{r} - 1$$

On peut transformer cette relation pour écrire l'expression du rayon  $r$  selon :

$$r = \frac{\frac{C^2}{\mathcal{G}(m_1 + m_2)}}{1 + \vec{e} \cdot \vec{e}_\theta}$$

Lors des études précédentes, nous avons vu que  $p = \frac{C^2}{\mathcal{G}(m_1 + m_2)}$  avait été défini comme le paramètre de l'ellipse. Nous pouvons donc voir à travers l'équation précédente qu'il n'était pas vain d'appeler vecteur excentricité le vecteur  $\vec{e}$  de norme  $e$  l'excentricité de la conique puisque  $\vec{e} \cdot \vec{e}_\theta = e \cos(\widehat{\vec{e}, \vec{e}_\theta})$ . Il suffit d'appeler  $\theta$  l'angle entre le vecteur excentricité et le vecteur  $\vec{e}_\theta$  :  $\theta = (\widehat{\vec{e}, \vec{e}_\theta})$ . On retrouve bien l'équation de la conique :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$