

Exercices de révision pour les oraux : Série 1.

1 QCM

1. Le Soleil

Réponses : la puissance émise est $P = \sigma T^4 4\pi R^2$. La nouvelle puissance est $P' = \sigma T'^4 4\pi R'^2$. La nouvelle température T' est liée à T par $\sigma 4\pi T'^4 = \frac{P'}{R'^2} = \frac{4 \times 10^3 P}{4 \times 10^4 R^2} = \frac{\sigma 4\pi T^4}{10}$. On a donc $T' = T \frac{1}{10^{1/4}}$. D'après la loi de WIEN, le maximum est donné par $\lambda_{\max} T = \lambda'_{\max} T'$. Ainsi, $\lambda'_{\max} = \lambda_{\max} 10^{1/4} \simeq 1,8 \lambda_{\max}$. On trouve $\lambda'_{\max} \simeq 900 \text{ nm}$, c'est la réponse c).

2. Décharge d'un condensateur

Réponses : la tension obéit à l'équation différentielle $\tau \frac{du_c}{dt} + u_c = E_2$ avec $\tau = RC$. Compte tenu de la condition initiale et de continuité pour la tension aux bornes du condensateur, on a $u_c(t) = E_2 + (E_1 - E_2) \exp -\frac{t}{\tau}$. On peut montrer que la tangente à la courbe de pente la dérivée à la date $t = 0$ de u_c va couper l'asymptote $u_c = E_2$ à la date $t = \tau$. Sur le graphique, on peut lire $\tau \simeq 3 \text{ s}$. On en déduit que $C = \frac{\tau}{R} \simeq 300 \mu\text{F}$. C'est la réponse d).

3. Microscope neutronique

Réponses : d'après la formule de DE BROGLIE, on a $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$ si le neutron est non-relativiste. On en déduit que $v = \frac{h}{m\lambda} \simeq 4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Cette vitesse est très petite devant c , on pouvait donc bien supposer le neutron non-relativiste. L'énergie du neutron est uniquement cinétique avec $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \simeq 10^{-20} \text{ J}$ ce qui fait environ $1/10 \text{ eV}$. C'est la réponse a).

4. Automobiles

Réponses : On va raisonner par rapport à la voiture 2. L'accélération relative de la voiture 1 est $a_1 - a_2$, comme elle démarre sans vitesse initiale, l'équation donnant son abscisse est $x = \frac{1}{2}(a_1 - a_2)t^2$. Dans le référentiel attaché à la voiture 2, la distance à parcourir jusqu'au moment où elles se rencontrent (accident...) est $x_0 = \frac{1}{2}(a_1 - a_2)t_0^2$. On en déduit que $t_0 = \sqrt{\frac{2x_0}{a_1 - a_2}}$. On trouve $t_0 = 20 \text{ s}$, c'est la réponse b).

2 Exercices

5. Diode de roue libre

Réponses : la diode est un interrupteur ouvert pour $u_d \leq 0$ et un interrupteur fermé pour $i_d \geq 0$; si K est fermé alors $u_d = -E \leq 0$ la diode est bloquée; en régime permanent la tension aux bornes de la bobine est $u_L = L \frac{di}{dt} = 0$, on a $E = RI$ d'où $I = \frac{E}{R}$; la diode est passante $u_d = 0$ et $L \frac{di}{dt} + Ri = 0$ d'où $i = \frac{E}{R} \exp -\frac{t}{\tau}$ avec $\tau = \frac{L}{R}$; si la diode possède une tension de seuil, on obtient $L \frac{di}{dt} + Ri = -u_s$ et $i(t) = -\frac{u_s}{R} + \frac{E+u_s}{R} \exp -\frac{t}{\tau}$ tant que $i = i_d \geq 0$ et donc jusqu'à $t_1 = \tau \ln(1 + \frac{E}{u_s})$; ensuite la diode est bloquée et $i = 0$.

6. Filtrage et impédance itérative

Réponses : $Z^2 = \frac{L}{C}(2 - LC\omega^2)$, $R_0 = \sqrt{\frac{2L}{C}}$, $\omega_c = \sqrt{\frac{2}{LC}}$, le théorème de MILLMAN appliqué entre les deux bobines conduit à $V = \frac{e+s}{2(1+(jx)^2)}$, le diviseur de tension à $s = V \frac{1}{1+(jx)}$, on en déduit $H = \frac{1}{1+2(jx)+2(jx)^2+2(jx)^3}$, en basse fréquence le condensateur est un interrupteur ouvert et les bobines des fils, on obtient un pont diviseur de tension constitué de deux résistances R_0 en série, l'effet est donc bien une division par deux, il est logique de trouver alors $\underline{H}' = \frac{1}{2}$.

7. Modulation

Réponses : le signal de sortie est de la forme $s(t) = S_p S_m (\cos \omega_p t \cos \omega_m t + \sin \omega_p t \sin \omega_m t)$. Cette expression se met sous la forme $s(t) = S_p S_m \cos(\omega_p - \omega_m)t$. La plage de fréquence occupée est la plus grande fréquence de modulation moins la plus petite, à savoir quasiment 10 kHz . Elle se situe en dessous de la fréquence de la porteuse. Plus la plage de fréquence occupée par un signal propagé est petite plus c'est intéressant car on pourra dans un même domaine de fréquence faire voyager plus de signaux indépendants. Comme le numérateur et le dénominateur sont des complexes conjugués, le module du rapport est de 1, le gain en décibel du filtre est nul. Le déphasage est : $\varphi = -2 \arctan x$. On peut réaliser le circuit déphaseur précédent en se plaçant à la fréquence réduite $x = 1$ puisqu'alors $\varphi = -\pi/2$. L'inconvénient de ce circuit c'est qu'il ne marche que pour une fréquence unique. La fréquence réduite est $x = \frac{f}{f_i}$ avec $f_i = \frac{1}{2\pi R_i C_i}$. On peut remplir le tableau :

i	1	2	3	4	5	6
f_i (Hz)	52	603	4 702	212	1658	19 195
R_i (k Ω)	3,1	26,4	10	7,5	1	0,1
C_i (nF)	1 000	10	3	100	96	83

On peut constater qu'avec ce circuit, on peut obtenir le déphasage situé autour du déphasage voulu (-90°) pour plusieurs signaux et plusieurs zones de fréquence.

8. Gallium

Réponses : on a deux niveaux d'énergie dont l'un est dégénéré. L'état $E_a = 0$ n'est pas dégénéré $g_a = 1$, l'état $E_b = \epsilon$ l'est deux fois $g_b = 2$. La probabilité d'occupation d'un niveau d'énergie est donnée par la loi de BOLTZMANN $p_a = A$ et $p_b = 2A \exp -\frac{\epsilon}{k_B T}$. La normalisation entraîne $1 = A(1 + 2 \exp -\frac{\epsilon}{k_B T})$. L'énergie molaire moyenne est $E_m = \mathcal{N}_A(0 \times p_a + p_b \epsilon)$. Après calcul, on a $E_m = \mathcal{N}_A \frac{2\epsilon}{2 + \exp \frac{\epsilon}{k_B T}}$. On pose $\beta = \frac{1}{k_B T}$, on a $C_m = \frac{dE_m}{dT} = \frac{dE_m}{d\beta} \frac{d\beta}{dT}$. Le calcul donne $\frac{dE_m}{d\beta} = -\frac{2\epsilon^2 \exp \beta \epsilon}{(2 + \exp \beta \epsilon)^2}$ et $\frac{d\beta}{dT} = -\frac{1}{k_B T^2} = -k_B \frac{1}{k_B^2 T^2}$. On pose $X = \frac{k_B T}{\epsilon}$ qui est une température adimensionnée du problème. La capacité thermique molaire s'exprime alors par $C_m = 2R \frac{1}{X^2} \frac{\exp \frac{1}{X}}{(2 + \exp \frac{1}{X})^2}$. L'évolution de la capacité thermique est fournie à la figure 1.

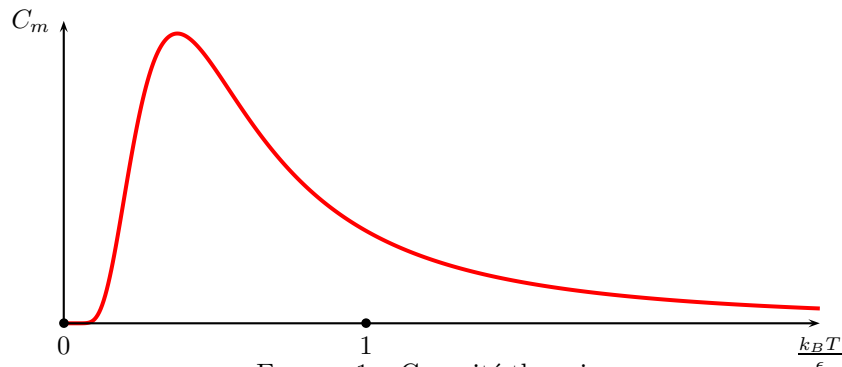


FIGURE 1 – Capacité thermique

À basse température, tous les noyaux sont figés dans l'état de plus basse énergie. Par conséquent, la capacité thermique est faible puisqu'il n'y a quasiment pas de fluctuations. De la même façon, à haute température, les atomes sont répartis de façon équivalente dans tous les états accessibles, il n'y a pas non plus de fluctuations notables. C'est uniquement lorsque $\epsilon \simeq k_B T$ que la capacité thermique est importante comme on peut le constater sur le graphique. Si l'on envisage les deux cas extrêmes, on pourra essayer de voir si cela correspond aux mesures expérimentales. Commençons par $k_B T \ll \epsilon$ et donc $X \ll 1$ ce qui fait que $\frac{1}{X} \gg 1$. On trouve que l'expression approchée de la capacité thermique est $C_m = 2R \frac{\epsilon^2}{k_B^2 T^2} \exp -\frac{\epsilon}{k_B T}$. Cette expression ne peut pas convenir à la situation expérimentale. Pour $k_B T \gg \epsilon$ et donc $X \gg 1$, on a $\exp \frac{1}{X} \simeq 1$. On peut donner l'expression approchée suivante de la capacité thermique $C_m = 2R \frac{\epsilon^2}{9k_B^2 T^2} = \frac{2\epsilon^2 \mathcal{N}_A}{9R} \frac{1}{T^2}$. La loi expérimentale est $C_{exp} = \frac{4,3 \times 10^{-7}}{T^2} + 5,96 \times 10^{-4} T$ en $J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$. La loi expérimentale n'est pas bien représentée par l'expression théorique. On peut tenter d'identifier le terme en $\frac{1}{T^2}$, cela conduit à écrire $\epsilon = \frac{1}{\mathcal{N}_A} \sqrt{\frac{9R \times 4,3 \times 10^{-7}}{2}}$. On trouve $\epsilon = 4 \times 10^{-8} \text{ eV}$. Calculons la température T_i telle que $\epsilon = k_B T_i$. On trouve $T_i = 0,0004 \text{ K}$. Cette température est 7,5 à 50 fois plus petite que celles de l'intervalle de température qui a donné la modélisation, il est légitime d'utiliser $k_B T \gg \epsilon$ mais il n'en reste pas moins que le modèle ne peut pas expliquer la loi linéaire de croissance de la capacité thermique qui complète la loi en $\frac{1}{T^2}$.

9. Rampe de potentiel

Réponses : en statique, on a $\vec{E} = E \vec{e}_x = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dx} \vec{e}_x$. On peut exprimer le potentiel par $V(x) = -Ex + A$ où A est une constante d'intégration. L'énergie potentielle est $\mathcal{E}_p = eEx - eA$, avec la condition de référence du potentiel en $x = 0$, on trouve $A = 0$. L'énergie mécanique de l'électron, dans une description classique, est $\mathcal{E} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + eEx$. À partir de $x \geq 0$, l'électron rencontre une rampe de potentiel en eEx . Son énergie potentielle augmente au détriment de son énergie cinétique puisqu'avant $x = 0$, toute son énergie était de l'énergie cinétique. Il va ralentir et puis s'arrêter à une abscisse x_0 telle que $\mathcal{E} = eEx_0$. On trouve $x_0 = \frac{\mathcal{E}}{eE} = 0,1 \text{ mm}$. On passe à la description de l'électron comme un quanton non relativiste, on peut écrire l'équation de SCHRÖDINGER stationnaire $(\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p)\psi = \mathcal{E}\psi$. En passant aux opérateurs, on a $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + eEx\psi = eEx_0\psi$. On peut écrire cette

équation différentielle selon $\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{2m_e E}{\hbar^2}(x - x_0)\psi = 0$. On effectue le changement de variable avec $x - x_0 = \frac{X}{\alpha}$ et comme $\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{dX} \frac{dX}{dx} = \alpha \frac{d\psi}{dX}$, on arrive à $\frac{d^2\psi}{dx^2} = \alpha^2 \frac{d^2\psi}{dX^2}$, on peut écrire l'équation différentielle sous la forme suivante : $\frac{d^2\psi}{dX^2} - \frac{2m_e E}{\alpha^3 \hbar^2} X \psi = 0$. Il faut donc poser α tel que $\frac{2m_e E}{\alpha^3 \hbar^2} = 1$. La constante est donc :

$\alpha = \left(\frac{2m_e E}{\hbar^2}\right)^{1/3} = 1,4 \times 10^8 \text{ m}^{-1}$. α est l'inverse d'une distance en m^{-1} , on peut le constater avec la forme des fonctions d'onde fournies mais on peut aussi le justifier en raisonnant sur les dimensions de $\frac{2m_e E}{\hbar^2}$ puisque eE est une force en $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = \text{J} \cdot \text{m}^{-1}$, \hbar s'exprime en $\text{J} \cdot \text{s}$, on arrive facilement l'inverse d'un volume ce qui conduit à la dimension de α . La densité de probabilité est donnée par $\frac{dP}{dx} = |\psi|^2$. Ici, ce sont les carrés car les expressions sont réelles. La représentation graphique est proposée à la figure 2.

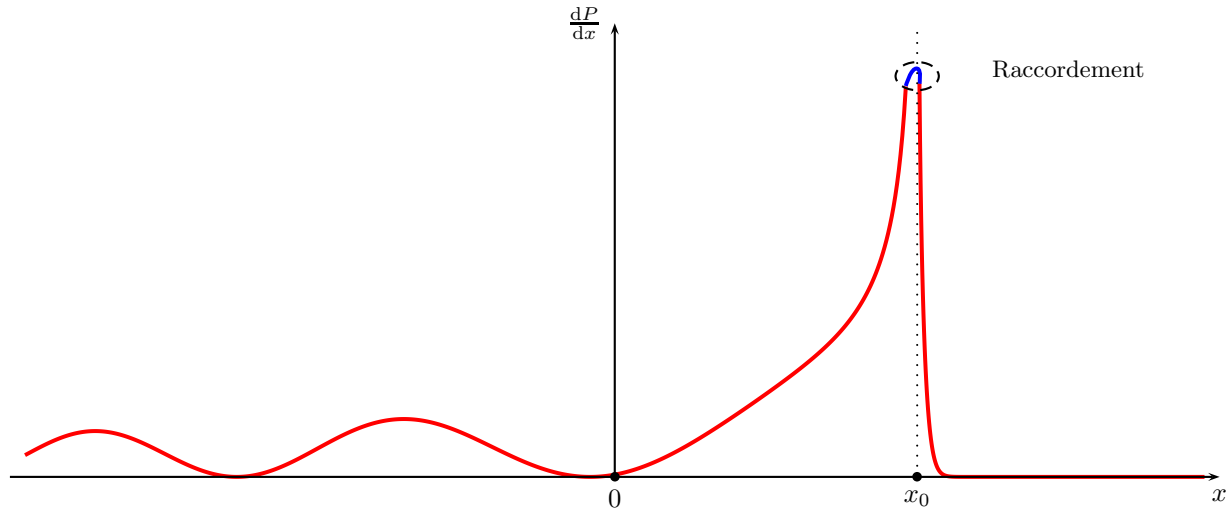


FIGURE 2 – Densité de probabilité de présence de l'électron

Le quanton venant de $-\infty$ est décrit par une onde incidente qui se réfléchit progressivement sur la rampe de potentiel. Il va générer une onde réfléchie qui en se superposant avec l'onde incidente va former une onde stationnaire avec des maxima de densité de probabilité et des minima. La densité de probabilité de présence n'est pas nulle au-delà de x_0 même si l'énergie potentielle est supérieure à l'énergie mécanique mais la densité de probabilité s'amortit très rapidement. Si l'on réduit la zone où s'exerce le champ électrique, on pourrait constater un effet tunnel. On a raccordé les deux parties de la densité de probabilité de présence car elle ne doit pas présenter de discontinuité, ce raccordement est représenté pour le principe mais seule une solution numérique de l'équation de SCHRÖDINGER stationnaire permettrait d'obtenir le tracé réel.

10. Oscillateur à moteur

Réponses : La relation de la Dynamique appliquée à l'ensemble et projetée sur l'axe ox donne $M\ddot{x} + m(\ddot{x} - r\omega^2 \cos \omega t) = -kx - \dot{h}\dot{x}$, mouvement sinusoïdal en complexes, l'amplitude est $X_m = \frac{mr\omega^2}{\sqrt{(k - (M+m)\omega^2)^2 + \hbar^2\omega^2}}$, on applique le théorème de la puissance cinétique à l'ensemble $\frac{dE_c}{dt} = P_{mot} + P_{ressort} + P_{frottements}$, $E_c = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m((\dot{x} - r\omega \sin \omega t)\vec{e}_x + r\omega \cos \omega t\vec{e}_y)^2$, on trouve $E_c = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 - m\dot{x}r\omega \sin \omega t + \frac{1}{2}mr^2\omega^2$ que l'on dérive par rapport au temps, on utilise à nouveau la projection de la relation de la Dynamique sur l'axe Ox et on arrive à $P_{mot} = -mr\omega\ddot{x} \sin \omega t$ puisque $P_{ressort} = -kx\dot{x}$ et $P_{frottements} = -\dot{h}\dot{x}^2$, $\Gamma_{mot} = -mr\ddot{x} \sin \omega t$ car $P_{mot} = \Gamma_{mot}\omega$.

11. Satellite accéléré

Réponses : on montre facilement que, sur un mouvement circulaire, l'on a $E_m = -\frac{GMm}{2r_0} = -E_c$, puisque l'état reste liée et qu'il ne peut plus être circulaire, le mouvement est elliptique. On sait que le résultat de l'énergie mécanique se transpose en $E_m = -\frac{GMm}{2a}$ où a est le demi-grand axe de l'ellipse. La nouvelle énergie mécanique est, après modification de la vitesse, $E'_m = -\frac{GMm}{r_0} + \frac{1}{2}mv_0^2 + mv_0\delta v_0$. Avec $\delta v_0 \ll v_0$, on peut effectuer des développements limités et aboutir à $a = r_0(1 + 2\frac{\delta v_0}{v_0})$ d'où $e = 2\frac{\delta v_0}{v_0}$. On utilise la troisième loi de KÉPLER et on arrive à $\frac{\delta T_0}{T_0} = 3\frac{\delta v_0}{v_0}$.

12. Réacteur nucléaire

Réponses : $b = 373 \text{ K}$, la statique des fluides conduit à $p(z) = p^\circ - \rho_0 gz$ en prenant $z = 0$ à la surface de l'eau, on a $T^{eb} = a \ln(1 - \frac{\rho_0 gz}{p^\circ}) + b$, avec $\rho_0 = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $p^\circ = 10^5 \text{ Pa}$, on a $H =$

$\frac{p^\circ}{\rho_0 g}$ d'où $T^{eb} = a \ln(1 - \frac{z}{H}) + b$ pour $z \in [-H, 0]$, en régime stationnaire $T(z) = T_0 + \frac{T_0 - T_1}{H} z$ où T_1 est la température de l'interface entre le combustible et l'eau, $j_{eau} = \lambda \frac{T_1 - T_0}{H}$, la puissance produite dans le réacteur est $P_r = QSh$ d'où une puissance surfacique $j_r = Qh$, l'état stationnaire impose $Qh = \lambda \frac{T_1 - T_0}{H}$, $Q = \lambda \frac{T_1 - T_0}{hH}$, $T(z = -H) = a \ln 2 + b = 392 \text{ K}$, on trouve $Q_{max} = 5,6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}$, $T(z = -H) = 381 \text{ K}$, $\frac{dp^{sat}}{dT} = \frac{p^{sat}}{a}$, $L_{vap} = \frac{R(T^{eb}(z=-H))^2}{aM} = 2,6 \times 10^6 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$, $\frac{d^2 m_{eau}}{dt dS} = \frac{(Q - Q_{max})h}{L_{vap}} = 1,7 \text{ mg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$.

13. Oscillations d'un piston

Réponses : Le piston descend sous l'effet de son poids car au départ la pression sur chacune de ses faces est $p_0 S$. En chutant, il comprime le gaz. La pression augmente progressivement pour compenser le poids mg du piston. Du fait de l'énergie gagnée, le piston descend et comprime le gaz à une pression supérieure à celle qui permet de compenser son poids et la pression extérieure p_0 . Sous l'effet de la pression intérieure, le piston ralentit puis remonte et ainsi de suite. On a un régime d'oscillations pseudo-périodique. La position d'équilibre finale correspond à la fois à un équilibre mécanique traduit par $mg + p_0 S = p_1 S$ où p_1 est la pression à l'intérieur de l'enceinte et un équilibre thermique où la température finale du gaz est la température ambiante T_0 . On peut donc écrire la loi des gaz parfaits entre l'état initial et l'état final : $p_0(V_0 + Sh) = nRT_0 = p_1(V_0 + S(h - z_{eq}))$. On en déduit que $p_1 = \frac{p_0}{1 - \frac{S z_{eq}}{V_0 + Sh}} = p_0(1 + \frac{S z_{eq}}{V_0 + Sh})$ par développement limité que l'on prolonge en négligeant Sh devant V_0 : $p_1 = p_0 + p_0 \frac{S z_{eq}}{V_0}$. La position d'équilibre est donc : $z_{eq} = \frac{mg V_0}{p_0 S^2}$. Cette position existe pour $m < \frac{p_0 S^2 h}{g V_0}$. L'équation du mouvement est $m\ddot{z} = mg - (p - p_0)S$. On suppose la transformation adiabatique et réversible, la loi de LAPLACE permet alors d'écrire que $p(V_0 + S(h - z))^\gamma = p_0(V_0 + Sh)^\gamma$. Par développement limité, on obtient $p = p_0(1 + \frac{\gamma S z}{V_0})$. L'équation différentielle du mouvement est $\ddot{z} + \frac{\gamma S^2 p_0}{V_0 m} z = g$. La pulsation des oscillations est $\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma S^2 p_0}{V_0 m}}$. L'équation du mouvement est $z(t) = \frac{mg V_0}{\gamma p_0 S^2} (1 - \cos \omega_0 t)$. Pour que le piston ne tombe pas dans l'enceinte, il faut que $z_{max} < h$, c'est à dire pour $m < \frac{\gamma}{2} \frac{p_0 S^2 h}{g V_0}$. Comme $1 < \gamma < 2$, la condition est plus contraignante que pour l'existence de la condition d'équilibre finale (avec frottements).

14. Entrée dans une zone de champ magnétique

Réponses : Pour $x \leq 0$, le mouvement du cadre est uniforme car la réaction de la glissière support est sans frottement et le poids est compensé par la réaction normale exercée par la glissière. Une fois que $0 \leq x \leq \ell$, le flux à travers le cadre varie, il y a induction et la force de LAPLACE qui résulte du courant induit freine le cadre. Pour $\ell \leq x \leq 4\ell$, tout le cadre est plongé dans le champ magnétique, il n'y a plus de variation de flux, donc plus de courant induit, plus de force de LAPLACE, le mouvement du cadre continue à vitesse constante. Ensuite, lorsque $4\ell \leq x \leq 5\ell$, le flux dans le cadre diminue, il y a à nouveau induction et le courant induit va avoir tendance à freiner à nouveau le cadre. Lorsque $x \geq 5\ell$, le cadre est complètement sorti de la zone de champ magnétique, il n'y a plus d'induction. Le cadre continue à vitesse constante. $v = v_0$ pour $x \leq 0$, ensuite $e = -B_0 \ell v$ et $i = -\frac{B_0 v \ell}{R}$, l'équation du mouvement est $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0$ avec $\tau = \frac{m R}{B_0^2 \ell^2}$. Les solutions sont $v = v_0 \exp(-\frac{t}{\tau})$ et $x = v_0 \tau (1 - \exp(-\frac{t}{\tau}))$. La phase se termine à la date t_1 lorsque $\exp(-\frac{t_1}{\tau}) = 1 - \frac{\ell}{v_0 \tau}$, la vitesse est $v_1 = v_0 - \frac{\ell}{\tau}$. Cette vitesse est conservée jusqu'à ce que $x = 4\ell$. Ensuite $\phi = B_0 \ell (5\ell - x)$ et donc $i = \frac{B_0 \ell v}{R}$, l'équation du mouvement est encore une fois $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0$ (attention la force de LAPLACE agit sur le côté gauche du cadre contrairement au moment de l'entrée dans la zone de champ magnétique). On note $t_2 = t_1 + \frac{3\ell}{v_1}$, la date du début de la sortie de la zone de champ magnétique. La vitesse est donc $v = v_1 \exp(-\frac{t-t_2}{\tau})$ et l'abscisse $x = v_1 \tau (1 - \exp(-\frac{t-t_2}{\tau})) + 4\ell$. Ce freinage s'arrête à la date t_3 et telle que $x = 5\ell = v_1 \tau (1 - \exp(-\frac{t_3-t_2}{\tau})) + 4\ell$ et donc lorsque $v_2 = v_1 - \frac{\ell}{\tau} = v_0 - \frac{2\ell}{\tau}$. Ensuite, le cadre conserve la vitesse v_2 , on a donc $v_s = v_2 = v_0(1 - \frac{2\ell}{v_0 \tau})$. On trouve $B_0 = \sqrt{\frac{m v_0 (1-\alpha) R}{2 \ell^3}}$.

15. Solénoïde épaiss

Réponses : On utilise le fait que le champ magnétique à l'extérieur du solénoïde est nul. Il y a invariance de la distribution de courant par translation sur z et par rotation d'angle θ . Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un Π^+ , le champ magnétique est donc $\vec{B} = B_z(r) \vec{e}_z$. On effectue le théorème d'AMPÈRE sur un contour rectangulaire de hauteur h passant en r et pour l'autre côté en dehors du solénoïde $r > R_2$. Si $r < R_1$, le courant enlacé est $i_e = j_0 h (R_2 - R_1)$. Par contre, si $R_1 < r < R_2$, on a $i_e = j_0 h (R_2 - r)$. Le champ magnétique est : $\vec{B}_{r \leq R_1} = \mu_0 j_0 (R_2 - R_1) \vec{e}_z$ et $\vec{B}_{R_1 \leq r \leq R_2} = \mu_0 j_0 (R_2 - r) \vec{e}_z$. La densité volumique d'énergie électromagnétique est $\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$. $W_{mag} = \frac{\mu_0 j_0^2}{2} \left[(R_2 - R_1)^2 \pi R_1^2 h + 2\pi h \int_{R_1}^{R_2} (R_2 - r)^2 r dr \right]$. Après calcul, on trouve $W_{mag} = \frac{\mu_0 j_0^2}{12} \pi h (R_2^4 + 3R_1^4 - 4R_1^3 R_2)$. Remarque : on ne peut pas faire le lien avec le solénoïde constitué de spires infiniment fines sauf à considérer que le produit $j_0 (R_2 - R_1)$ reste borné lorsque $R_2 \rightarrow R_1$, cela signifie que j_0 diverge.

16. Diffraction par un CD

Réponses : Le CD agit comme un réseau de pas a , il y a diffraction et interférences entre plusieurs ondes car la largeur du laser de l'ordre de 1 mm couvre un nombre assez élevé de motifs puisque le pas du réseau est très inférieur cette largeur, la loi de BRAGG donne $\sin \theta = \sin i_0 + p \frac{\lambda}{a}$ avec $i_0 = 45^\circ$, numériquement cela donne $\sin \theta = 0,707 + 0,396p$, les ordres envisageables sont $p \in [0, -1, \dots, -4]$ correspondant à $\theta_0 = i_0 = 45^\circ$ et donc $\alpha_0 = 0^\circ$ par rapport à la verticale, $\theta_{-1} = 18,2^\circ$ et $\alpha_{-1} = 26,8^\circ$, $\theta_{-2} = -4,8^\circ$ et $\alpha_{-2} = 49,8^\circ$, $\theta_{-3} = -28,6^\circ$ et $\alpha_{-3} = 73,6^\circ$, $\theta_{-4} = -61^\circ$ et $\alpha_{-4} = 106^\circ$ cet ordre n'atteint pas le plafond mais plutôt le mur du fond de la salle, la position par rapport à la verticale du point d'arrivée sur le laser par $\ell_i = h \tan \alpha_i$, on trouve donc $\ell_0 = 0$, $\ell_{-1} = 0,66$ m, $\ell_{-2} = 1,54$ m et $\ell_{-3} = 4,42$ m $> L - \ell$, cette dernière tache est sur le mur du fond, il y a donc 3 taches au plafond.

17. Système de trois fentes

Réponses : $E = \frac{E_{max}}{9} (1 + 2 \cos \frac{2\pi ax}{\lambda f})^2$, $E = \frac{E_{max}}{9} \text{sinc}^2 \frac{\pi bx}{\lambda f} (1 + 2 \cos \frac{2\pi ax}{\lambda f})^2$, voir la figure 3.

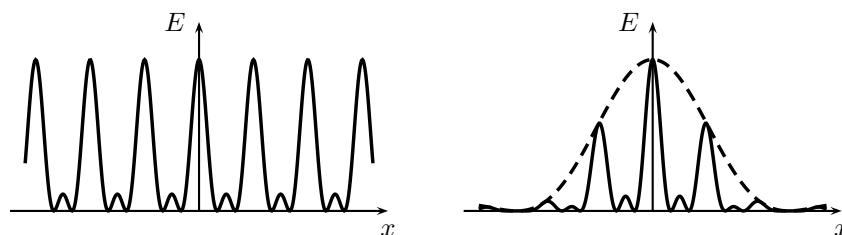


FIGURE 3 – Éclairement du système de trois fentes

18. Équilibre de Boudouard

Réponses : $K = \frac{p_{CO}^2}{p^\circ p_{CO_2}} = \frac{n_{CO}^2}{n_{CO_2}} \frac{RT}{p^\circ V}$, $\Delta_r G^\circ = 120 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$, $K = 9,3 \times 10^{-22}$, $\Delta_r G \rightarrow -\infty$ sens 1, $p_{CO} = 1,5 \times 10^{-11}$ bar, $p_{CO_2} = 0,25$ bar, $\Delta_r H^\circ = 172,5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ endothermique si T augmente sens 1, si p augmente sens 2 (diminution du nombre de moles de gaz).

19. Élaboration du mercure

Réponses : $v = 3$, la pression n'est pas un facteur d'équilibre, la quantité de matière en N_2 non plus puisque $\Delta_r n_{gaz} = 0$, $K = 4 \times 10^{16}$, quasiment 100%, $n_{O_2} = n_{HgS} = 2 \times 10^{-8}$ mol, $n_{SO_2} = n_{Hg} = 1$ mol.

20. Élaboration du chrome

Réponses : $\Delta_r G^\circ = 414,3 - 0,1407T$, $K_{400 \text{ K}} = 10^{-47}$, K augmente avec la température, $K_{1200 \text{ K}} = 2 \times 10^{-11}$, $m_{H_2} = 14550$ kg, $R > 3700$ atmosphère réductrice, $R < 3700$ atmosphère oxydante, sans doute électrolyse de l'eau, 290 g de chrome.

21. Équilibres d'oxydoréduction

Réponses : $2\text{Hg}^{2+} + 2\text{Cr}^{2+} \rightleftharpoons \text{H}_2^{2+} + 2\text{Cr}^{3+}$, $K = 10^{\frac{0,91+0,41}{0,03}} = 10^{44}$, avancement $\xi = 5 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, $E_{eq} = 0,95$ V, $3\text{I}_2 + 3\text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons 5\text{I}^- + \text{IO}_3^- + 6\text{H}^+$, $K = 10^{\frac{-1,19+0,54}{0,012}} = 10^{-54,5}$, avancement $\xi = 1,0 \times 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, $E_{eq} = 0,81$ V.

3 Python Centrale

22. Foudre et électrocution

Réponses : On a $i(t) = j(r, t) 2\pi r^2 = \gamma E(r, t) 2\pi r^2$ d'où $E(r, t) = \frac{i(t)}{\gamma 2\pi r^2}$. On a $E = -\frac{dV}{dr}$ qui conduit à $V(r, t) = \frac{i(t)}{\gamma 2\pi r}$. On a $U_d = \frac{2i(t)p}{\pi \gamma (4d^2 - p^2)}$. Grâce au programme informatique, on voit que la tension maximale à laquelle est soumis l'être humain est 560 V environ. Mais sa durée est plutôt faible inférieure à 10 ms par exemple alors que l'on a vraisemblablement une durée de passage supportable de 20 ms au vu de l'évolution du temps dans le tableau. Pour les valeurs plus faible de tension, on est toujours très en dessous du temps maximal de passage. La conclusion, c'est qu'avec la valeur du courant de foudre et son amortissement rapide, l'être humain n'est pas en danger. Mais un courant de foudre de 10^4 A n'est pas très élevé, il est quand même préférable de jouer avec la foudre et de se protéger sous un arbre. On peut imaginer un rectangle comme contour fermé conducteur dans lequel, on fera apparaître la force électromotrice d'induction avec une orientation optimale

à savoir perpendiculaire au champ magnétique créé par la foudre. On a $B = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi d}$ en utilisant le modèle du fil infini. Sur une surface $S = ab$ où on calculera le flux en faisant l'hypothèse d'uniformité du champ magnétique sur la surface $\phi = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi d} ab$. La force électromotrice induite est donc $e = -\frac{\mu_0 ab}{2\pi d} \frac{di}{dt}$. En modifiant le programme *Python*, on arrive à déterminer une forme électromotrice de quelques mV seulement. Cette valeur est suffisamment faible pour ne pas mettre en danger le téléphone.

4 X-ENS

23. Élastique sur une demi-boule

Réponses :

- On considère un morceau élémentaire d'élastique repéré par les angles φ et $\varphi + d\varphi$ où φ est l'angle des coordonnées sphériques traditionnelles (R, θ, φ) . La masse dm de ce morceau d'élastique est proportionnelle à sa longueur $R \sin \theta d\varphi$. Comme l'élastique possède une masse m répartie sur tout le périmètre $2\pi R \sin \theta$, on a $dm = m \frac{d\varphi}{2\pi}$. On étudie le morceau d'élastique dans le référentiel *Oxyz* supposé galiléen. Il subit son poids $-dm g \vec{e}_z$, une composante normale exercée par la boule $dN \vec{e}_r$ ainsi que deux forces de tension. La force exercée par la partie gauche de l'élastique est $-T \vec{e}_\varphi$ alors celle exercée par la partie droite est $T \vec{e}_{\varphi+d\varphi}$ où T est la tension de l'élastique liée à son allongement par rapport à sa longueur à vide $T = k(2\pi R \sin \theta - \ell_0)$. On notera que pour que l'élastique soit tendu à un moment donné, on a nécessairement $2\pi R > \ell_0$. L'équilibre de la boule est traduit par $-dm g \vec{e}_z - T \vec{e}_\varphi + T \vec{e}_{\varphi+d\varphi} + dN \vec{e}_r = \vec{0}$. On projette sur \vec{e}_z et on obtient $dN \cos \theta = dm g$. On projette aussi sur le plan horizontal et on arrive à $dN \sin \theta = T d\varphi$. On élimine la composante normale de l'action de contact en effectuant le rapport des deux équations précédentes, on arrive à $\tan \theta = \frac{T}{g} \frac{d\varphi}{dm} = \frac{k(2\pi R \sin \theta - \ell_0)}{mg} 2\pi$. L'angle à l'équilibre est solution de l'équation $\boxed{\sin \theta = \frac{\ell_0}{2\pi R} + \frac{mg}{4\pi^2 R k} \tan \theta}$. Comme nous l'avions prévu, il est indispensable que $\ell_0 < 2\pi R$ pour qu'une solution soit possible. Pour discuter les solutions, on fait une étude graphique pour $\theta \in [0, \pi/2]$, voir la figure 4.

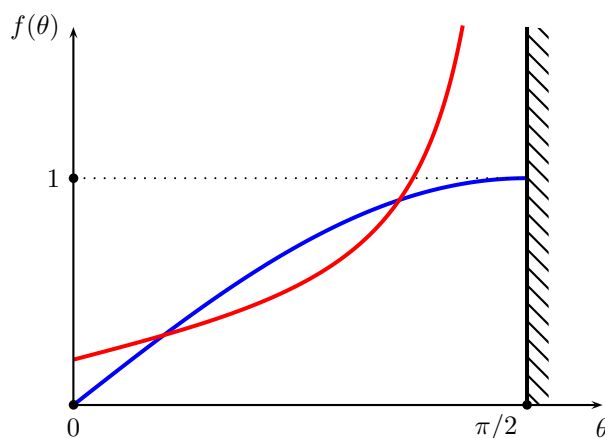


FIGURE 4 – Recherche graphique des positions d'équilibre

- On tient maintenant compte des frottements, la force de contact est $dN \vec{e}_r + dF \vec{e}_\theta$ puisque s'il y avait glissement, il se produirait vers le haut. On se place à la limite du glissement et on pourra écrire $dF = \mu dN$. On a toujours $dm = \frac{m}{2\pi} d\varphi$, $dT = T d\varphi$. Par contre, l'équation vectorielle traduisant l'équilibre sera projetée sur \vec{e}_r et sur \vec{e}_θ . On obtient alors $dN = dT \sin \theta + dm g \cos \theta$ et $dT \cos \theta = dF + dm g \sin \theta$. Après calcul, on obtient une relation un peu différente de la précédente $\boxed{\sin \theta = \frac{\ell_0}{2\pi R} + \frac{mg}{4\pi^2 R k} \frac{\tan \theta + \mu}{1 - \mu \tan \theta}}$. Si on supprime les frottements $\mu = 0$, on retrouve bien l'expression précédente.

24. Deux cylindres superposés

Réponses :

- Le cylindre inférieur va subir une force de la part du cylindre supérieur que nous noterons \vec{N}_1 , cette force est dirigée vers le centre du cylindre inférieur. Le cylindre inférieur subit son poids vertical vers le bas et la réaction du support dirigée vers le haut selon l'axe *Oy*. \vec{N}_1 présente une composante verticale mais surtout une composante horizontale. Cette force va être responsable du mouvement du cylindre

inférieur vers la droite. Pendant ce temps, le cylindre supérieur va descendre le long du mur. On note x la coordonnée du centre du cylindre inférieur avec comme origine la position de ce cylindre à la date $t = 0$, et y la coordonnée verticale du centre du cylindre supérieur. À la date $t = 0$, on a $x = 0$ et $y = 2R$. Pour une position $x \neq 0$, on peut constater que x et y constituent un triangle rectangle d'hypothénuse $2R$. Cela nous permet de projeter la force \vec{N}_1 et de trouver sa composante sur l'axe Ox : $N_{1x} = N_1 \frac{x}{2R}$. Seule cette composante est responsable du mouvement du cylindre inférieur. Dans le référentiel galiléen Oxy , la relation de la Dynamique appliquée au cylindre inférieur donne $m\ddot{x} = N_1 \frac{x}{2R}$. Cette force existe tant que le contact entre les deux cylindres est maintenu. On constate alors que si $N_1 = 0$ à la rupture du contact alors $\ddot{x} = 0$. Le cylindre va continuer de glisser sans frottement sur le plan horizontal mais, cette fois, à **vitesse constante**. Le cylindre supérieur continuera de descendre sur un mouvement vertical sous l'effet de la pesanteur.

- On privilégie un raisonnement énergétique basé sur la conservation de l'énergie mécanique. En prenant la référence des énergies potentielles en $y = 0$ et en négligeant l'énergie apportée par la petite perturbation, on peut écrire $mg2R = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + mgy$. On en déduit que $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2g(2R - y)$ sans oublier que x et y sont liés par $x^2 + y^2 = 4R^2$ tant qu'il y a contact. En dérivant cette équation par rapport au temps, on obtient $x\dot{x} + y\dot{y} = 0$. En dérivant encore une fois par rapport au temps, on a $\dot{x}^2 + x\ddot{x} + \dot{y}^2 + y\ddot{y} = 0$. Comme nous l'avons vu, à la rupture du contact, on a $\ddot{x} = 0$ et $\ddot{y} = -g$, on en déduit que $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = yg$ que l'on compare à la seconde expression. On trouve que, lors de la rupture du contact, $y = y_r = \frac{4}{3}R$ et $x = x_r = \frac{2\sqrt{5}}{3}R$. Ainsi, on peut trouver $\dot{y}^2 = \dot{x}^2 \frac{x_r^2}{y_r^2} = \dot{x}^2 \frac{5}{4}$. En utilisant ce résultat dans l'équation issue de la conservation de l'énergie, on arrive à $\dot{x}_f = \frac{4}{3\sqrt{3}}\sqrt{gR}$.
- L'énergie potentielle disponible dans le problème correspond au fait que le centre d'inertie du cylindre supérieur peut descendre de la distance $2R$. On dispose donc d'une réserve d'énergie de $mg2R$. L'énergie cinétique finale du cylindre inférieur est $E_{cf} = \frac{1}{2}m\dot{x}_f^2 = \frac{8}{27}mgR = \frac{4}{27}mg2R$. Le cylindre inférieure emporte une fraction modeste de l'énergie à savoir $\varepsilon = \frac{4}{27}$. C'est le cylindre supérieur qui conserve la plus grande partie de l'énergie. Il va chuter et rebondir sur le plan horizontal et ainsi de suite à moins qu'une légère perturbation provoque un mouvement sur l'axe horizontal. . .

25. Interaction trou noir - étoile

Réponses :

- On utilise la Mécanique classique. La vitesse de libération correspond à un état de diffusion et donc une énergie nulle en utilisant le potentiel gravitationnel traditionnel et donc l'énergie potentielle $E_p = -\frac{GMm}{R_0}$ pour un objet de masse m présent à la surface du trou noir. Son énergie cinétique est $E_c \simeq \frac{1}{2}mc^2$ et $E_c + E_p = 0$. On trouve donc $R_0 \simeq \frac{2GM_0}{c^2}$. L'application numérique donne $R_0 = 1,5 \times 10^{10} \text{ m}$ ce qui représente environ 20 fois la taille du Soleil mais pour une masse M_0 qui est, elle, 10 millions de fois plus grande que celle du Soleil !
- La trajectoire est plane et vérifie la loi des aires. En coordonnées polaires, la constante des aires est $C_e = r^2\dot{\theta}$. La vitesse est $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \dot{r}^2 + \frac{C_e^2}{r^2}$. On peut exprimer la vitesse de l'étoile en utilisant l'énergie mécanique nulle dans le potentiel proposé $0 = \frac{1}{2}m_e v^2 - \frac{GM_e M_0}{r - R_0}$. On peut réécrire la norme de la vitesse au carré selon $\frac{R_0}{r - R_0} c^2 = \dot{r}^2 + \frac{C_e^2}{r^2}$. Cette relation ne peut avoir de solution que pour $\dot{r}^2 \geq 0$. Cela amène la condition $\frac{R_0}{r - R_0} c^2 \geq \frac{C_e^2}{r^2}$. On pose $a = \frac{C_e^2}{R_0 c^2}$ une distance pertinente pour l'étude de cette question. On trouve numériquement $a = 7,4 \times 10^{10} \text{ m}$. L'étude revient à celle du signe du polynôme $r^2 - ar + aR_0 \geq 0$ qui va être positif en dehors des racines. La racine la plus petite est $r_{min} = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - 4aR_0}) = 2,1 \times 10^{10} \text{ m}$. On constate que $r_{min} > R_0$, l'étoile n'est pas encore happée par le trou noir. Avec les conditions données pour la trajectoire de l'étoile, on peut donc répondre positivement à la question posée : la trajectoire présente bien une possibilité de périrounoir à défaut d'employer le terme périgée. Mais la question suivante va remettre en cause la réalité physique de cette existence mathématique.
- L'important champ gravitationnel exercé par le trou noir va provoquer des effets de marée sur l'étoile. On raisonne pour $r \gg R_0$ avec donc un potentiel gravitationnel traditionnel en $-\frac{GM_0}{r}$. Le terme de marée sera évalué comme la différence de champ gravitationnel exercé par le trou noir sur le bord (proche) de l'étoile et celui exercé sur le centre de l'étoile. Le terme de marée est $\mathcal{T}_{ma} = \frac{GM_0}{(r - R_e)^2} - \frac{GM_0}{r^2} \simeq \frac{2GM_0 R_e}{r^3}$ après développement limité. Si on effectue l'application numérique pour $r = 10r_{min}$, on trouve $\mathcal{T}_{ma} \simeq 150 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Cette valeur doit être comparé au champ gravitationnel propre de l'étoile qui permet de comprendre la cohésion de l'étoile. À la surface de l'étoile, on a un champ donné par $\frac{Gm_e}{R_e^2} \simeq 67 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. On voit que

$\mathcal{T}_{ma} \simeq 2 \frac{\mathcal{G}m_e}{R_e^2}$. L'étoile est disloquée par effet de marée bien avant d'atteindre le pèritrounoir. Si l'on n'est pas convaincu, on peut effectuer l'application numérique pour $r = r_{min}$, on trouve un terme de marée $\mathcal{T}'_{ma} \simeq 1,5 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ce qui incommensurable par rapport aux valeurs classiques d'accélération que l'on connaît.

26. Satellite à voile du Soleil

Réponses :

- On commence par étudier le satellite sans voile en mouvement circulaire autour du Soleil de rayon R . La relation de la Dynamique permet d'écrire $-\frac{\mathcal{G}M_s m}{r^2} \vec{e}_r = -m \frac{v^2}{r} \vec{e}_r$. La vitesse est telle que $v^2 = \frac{\mathcal{G}M_s}{r}$. L'énergie cinétique est donc $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{\mathcal{G}M_s m}{2R}$, l'énergie potentielle $E_p = -\frac{\mathcal{G}M_s m}{R}$, l'énergie mécanique $E_m = -\frac{\mathcal{G}M_s m}{2R}$. Le Soleil émet une puissance P_s qui se dilue depuis la surface solaire jusqu'au niveau du satellite à la distance r , la puissance surfacique est $j_s = \frac{P_s}{4\pi r^2}$. On note A la surface de la voile solaire de normale \vec{n} orientée vers le Soleil et faisant un angle $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$ avec la direction et le sens $-\vec{e}_r$. On considère un photon de longueur d'onde λ arrivant selon \vec{e}_r sur la voile. Sa quantité de mouvement est $\frac{h}{\lambda} \vec{e}_r$, après réflexion sa quantité de mouvement a varié de $\Delta \vec{p} = \frac{2h}{\lambda} \cos \alpha \vec{n}$. Il faut compter le nombre de photons qui arrivent par unité de temps, on note $\frac{dN}{dt}$ ce nombre. La puissance reçue par la voile est $\frac{dN}{dt} \frac{hc}{\lambda} = \iint_A \vec{j}_s \cdot d\vec{A} = j_s A \cos \alpha$. On constate que $\frac{dN}{dt} \frac{h}{\lambda} = \frac{j_s A \cos \alpha}{c}$, cela montre que quel que soit le spectre de longueurs d'onde de la source, on aura toujours la même forme finale pour la variation de quantité de mouvement par unité de temps des photons. On peut en déduire par le principe des actions réciproques que la force exercée par les photons sur la voile est $\vec{F} = -\frac{2j_s A \cos^2 \alpha}{c} \vec{n}$. Comme $-\vec{n} = \cos \alpha \vec{e}_r + \sin \alpha \vec{e}_\theta$, on en déduit que la force exercée par le flux solaire sur la voile du satellite est $\vec{F} = \frac{P_s A \cos^2 \alpha}{2\pi c r^2} (\cos \alpha \vec{e}_r + \sin \alpha \vec{e}_\theta)$. L'expression de cette force montre que le flux solaire a deux effets sur le satellite : il va faire augmenter le rayon par la composante \vec{e}_r , le mouvement du satellite ne sera plus circulaire et par la composante sur \vec{e}_θ , il sera soit accéléré pour $\alpha > 0$, soit ralenti pour $\alpha < 0$. Le mouvement n'est plus à force centrale, il va rester dans un plan si la voile reste toujours dans un plan perpendiculaire à celui de la trajectoire circulaire initiale. L'étude de la trajectoire ultérieure peut être assez complexe, elle est donnée par les deux équations différentielles $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{\mathcal{G}M_s m}{r^2} + \frac{P_s A \cos^3 \alpha}{2\pi c r^2}$ et $m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = \frac{P_s A \cos^2 \alpha \sin \alpha}{2\pi c r^2}$. Un problème de mise en équation peut se poser en fonction de la façon dont la voile est orientée, en effet si l'on maintient constant l'angle α , c'est-à-dire l'orientation de la voile par rapport au Soleil, il n'y a que deux variables dans le système d'équations. Par contre, si la voile est d'orientation fixe par rapport au satellite, alors α va dépendre du temps $\alpha = \alpha(t)$. Il faudrait décrire le satellite comme un solide et lui appliquer le théorème du moment cinétique pour obtenir une troisième équation. Heureusement, tout cela n'est pas demandé car cela sort tout à fait du cadre du programme.
- Imaginons le cas particulier où $\alpha = 0$ en permanence. La force que subit le satellite de la part du rayonnement solaire est donc $\vec{F} = \frac{P_s A}{2\pi c r^2} \vec{e}_r$. On peut constater que cette force dérive d'une énergie potentielle $E'_p = \frac{P_s A}{2\pi c r}$. On peut raisonner sur la conservation de l'énergie mécanique. Le satellite possédait, sur son mouvement circulaire, l'énergie mécanique $-\frac{\mathcal{G}M_s m}{2R}$. Il déploie sa voile de façon instantanée et donc possède l'énergie mécanique $E_{m1} = -\frac{\mathcal{G}M_s m}{2R} + \frac{P_s A}{2\pi c R}$. Il y aura une possibilité de mouvement de diffusion pour $E_{m1} \geq 0$. Cela signifie que $\frac{P_s A}{\pi c} \geq \mathcal{G}M_s m$. Si l'étoile possède une flux de rayonnement suffisamment puissant, elle peut envoyer le satellite à l'infini où sa vitesse sera la seule cause de son énergie mécanique qui se résumerait à son énergie cinétique $E_{m2} = \frac{1}{2}mv_\infty^2$. Par conservation de l'énergie mécanique, on obtiendrait alors : $v_\infty = \sqrt{\left(\frac{P_s A}{\pi m c} - \mathcal{G}M_s\right) \frac{1}{R}}$. On notera pour terminer qu'imposer une valeur d'angle α constante au cours du temps (0 ou une autre valeur) nécessite d'avoir sur l'appareil un capteur qui perçoit l'orientation des rayons lumineux et corrige à chaque instant l'orientation de la voile par rapport à la trajectoire du satellite modifiée par cette même voile.

27. Pendule aimanté

Réponses :

- Il n'y a pas d'induction, le pendule n'est soumis qu'à son poids et la réaction d'axe qui ne dissipe pas d'énergie. Son énergie mécanique est $E_m = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta) = \text{Cte}$. Avec $\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$ et en dérivant par rapport au temps, on trouve rapidement $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$ d'où $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$.
- Lorsque la bobine est placée à proximité de la zone d'évolution du pendule, le couplage électromagnétique va faire naître un courant induit dans la bobine qui, par ses effets, va s'opposer à la cause qui lui a donné

naissance conformément à la loi de LENZ. Le pendule ne change pas de pulsation dans le modèle proposé, il va alors nécessairement voir son amplitude $A(t)$ diminuer au cours du temps. Nous allons suivre un raisonnement énergétique. Le fem induite est $e = -\frac{d\phi}{dt} = -\phi_b \dot{\theta}$. Comme on néglige l'autoinductance de la bobine, le courant induit est $i = -\frac{\phi_b}{R} \dot{\theta}$. La puissance dissipée par effet JOULE est $P_J = Ri^2 = \frac{\phi_b^2}{R} \dot{\theta}^2$. $\dot{\theta} = \dot{A}(t) \cos \omega t - \omega A(t) \sin \omega t \simeq -\omega A(t) \sin \omega t$ en tenant compte de l'hypothèse de variations lentes de l'amplitude $A(t)$. La puissance dissipée est donc $P_J = \frac{\phi_b^2 \omega^2 A^2(t)}{R} \sin^2 \omega t$. On va raisonner en moyenne sur une période et donc $\langle P_J \rangle = \frac{\phi_b^2 \omega^2 A^2(t)}{2R}$. On raisonne donc sur une période où le pendule possède une amplitude $A(t)$ fixée, cela signifie que son énergie mécanique est $E_m(t) = \frac{1}{2} mg \ell A^2(t)$. Au fil des périodes qui s'écoulent, l'énergie mécanique diminue par la puissance dissipée par les forces de LAPLACE qui s'opposent à l'oscillation. On a donc, par le couplage électromécanique, $\langle P_L \rangle = -\langle P_J \rangle$. On peut donc écrire que $\frac{dE_m}{dt} = -\langle P_J \rangle$. Or, $\frac{dE_m}{dt} = mg \ell A(t) \frac{dA}{dt} = -\frac{\phi_b^2 \omega^2 A^2(t)}{2R}$. On obtient l'équation différentielle $\frac{dA}{dt} + \frac{A(t)}{\tau} = 0$ avec $\tau = \frac{2m\ell^2 R}{\phi_b^2}$. La solution est donc $A(t) = \theta_0 \exp -\frac{t}{\tau}$.

3. L'expression du courant induit va changer puisque celui-ci est donné par la loi $Ri + L \frac{di}{dt} = \phi_b \omega A(t) \sin \omega t$. La puissance moyenne JOULE est $\langle P_J \rangle = RI_{eff}^2$. On passe en complexes pour obtenir $|I_m| = \frac{\phi_b \omega A(t)}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}$ et donc $\langle P_J \rangle = \frac{R \phi_b^2 \omega^2 A^2(t)}{2(R^2 + L^2 \omega^2)} = \frac{\phi_b^2 \omega^2 A^2(t)}{2R(1 + \frac{L^2 \omega^2}{R^2})}$. Tout se passe comme si l'on effectuait un changement du temps caractéristique pour passer de τ à $\tau' = \tau(1 + \frac{L^2 \omega^2}{R^2})$. Ce temps caractéristique est plus grand que le précédent. Cela peut se comprendre physiquement puisqu'une partie de l'énergie apportée dans la bobine est stockée en énergie magnétique à la place d'être dissipée par effet JOULE. Les oscillations s'amortissent plus lentement qu'avant.

28. Freinage dans un tuyau

Réponses :

1. On commence par calculer le flux du champ magnétique dipolaire à travers une surface définie par le contour circulaire situé à la coordonnée z et qui possède le rayon R correspondant la portion de tube étudiée. Comme $e \ll R$, on peut raisonner sur le rayon r . Le contour est orienté pour que sa normale soit \vec{e}_z . On définit la coordonnée radiale sur le disque ρ et l'angle des coordonnées sphériques ε (pour ne pas le confondre avec θ). Une surface élémentaire sur la surface du disque plan de cote z est $\rho d\rho d\varphi \vec{e}_z$ avec $\rho = z \tan \varepsilon$, $d\rho = z \frac{d\varepsilon}{\cos^2 \varepsilon}$. Le champ magnétique qui s'exerce à l'endroit où se situe la surface élémentaire est $\vec{B} = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} (2 \cos \varepsilon \vec{e}_r + \sin \varepsilon \vec{e}_\varepsilon)$ avec $r = \frac{z}{\cos \varepsilon}$. L'intégration sur l'angle φ ne pose aucune difficulté puisque le système est invariant par rotation autour de l'axe Oz , on obtient 2π . En tenant compte du fait que $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = \cos \varepsilon$ et $\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_z = -\sin \varepsilon$, on arrive à l'expression suivante du flux : $\phi = \frac{\mu_0 M}{2} \frac{1}{z} \int_0^\theta \sin \varepsilon (3 \cos^2 \varepsilon - 1) d\varepsilon$. On trouve dans un premier temps $\phi = \frac{\mu_0 M}{2} \frac{1}{z} \cos \theta \sin^2 \theta$. On peut aussi voir que $\tan \theta = \frac{R}{z}$. On obtient alors $\phi = \frac{\mu_0 M}{2R} \sin^3 \theta$. On peut faire remarquer que le calcul du flux pouvait s'effectuer de façon beaucoup plus simple en raisonnant sur une surface représentant une calotte sphérique de rayon r car alors sa normale locale serait selon \vec{e}_r ce qui simplifie le produit scalaire avec le champ magnétique. Le calcul du flux donne le même résultat car $\text{div } \vec{B} = 0$ assure la conservation du flux sur une surface fermée constituée par les deux surfaces que nous avons présentées. La fem d'induction est $e = -\frac{d\phi}{dt}$. On trouve $e = -\frac{3\mu_0 M}{2R} \sin^2 \theta \cos \theta \frac{d\theta}{dt}$. Il faudrait relier la force électromotrice à la vitesse $\vec{V} = V \vec{e}_z$. On a $V = \frac{dz}{dt} = -\frac{R}{\sin^2 \theta} \frac{d\theta}{dt}$ puisque $z = \frac{R}{\tan \theta}$. La force électromotrice s'exprime donc selon $e = \frac{3\mu_0 M}{2R^2} V \sin^4 \theta \cos \theta$. Pour déterminer le courant induit, on va raisonner en utilisant la résistance électrique élémentaire de la portion de tube. La section de ce morceau de tube est edz , il est constitué de petit morceau d'angle $d\varphi$ qui sont tous en série et représentent donc une longueur $2\pi R$ au total. On a donc $dR_{elec} = \frac{1}{\gamma} \frac{2\pi R}{edz}$ avec $dz = -\frac{R d\theta}{\sin^2 \theta}$. En écrivant que $e = dR_{elec} di$, on trouve que :

$$di = -\frac{\gamma e 3\mu_0 M}{4\pi R^2} V \sin^2 \theta \cos \theta d\theta.$$

2. La force élémentaire de LAPLACE est, par symétrie, nécessairement sur l'axe Oz . On ne calculera donc que sa projection sur \vec{e}_z . On a $dF_z = \vec{e}_z \cdot (di R d\varphi \vec{e}_\varphi \wedge \frac{\mu_0 M}{4\pi R^3} \sin^3 \theta (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta))$. On intègre sur φ , on trouve tout d'abord $dF_z = -di \frac{3\mu_0 M}{2R^2} \sin^4 \theta \cos \theta$ puis en utilisant l'expression de di , il vient l'expression :

$$dF_z = \frac{\gamma e}{2\pi} \left(\frac{3\mu_0 M}{2R^2} \right)^2 V \sin^6 \theta \cos^2 \theta d\theta.$$

3. Pour calculer la force sur tout le tube qui possède une très grande longueur et que l'on assimilera à un tube infini, il faut intégrer l'expression précédente pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ comme bornes. Toutefois, pour respecter le sens positif de la vitesse vers le haut, il faut intégrer de π à 0. On a donc $F_z =$

$$\frac{\gamma e}{2\pi} \left(\frac{3\mu_0 M}{2R^2} \right)^2 V \int_\pi^0 \sin^6 \theta \cos^2 \theta d\theta. \text{ Avec l'aide fournie par l'énoncé, on arrive à } F_z = -\frac{45}{1024} \gamma e \left(\frac{\mu_0 M}{R^2} \right)^2 V.$$

C'est une force de freinage de type fluide proportionnelle et opposée à la vitesse, il est habituel de l'écrire en faisant intervenir une constante de temps τ caractéristique du freinage $F_z = -\frac{m}{\tau}V$. L'équation différentielle du mouvement est $\frac{dV}{dt} + \frac{V}{\tau} = -g$. La solution est $V(t) = -g\tau + (V_0 + g\tau) \exp -\frac{t}{\tau}$ où V_0 est la vitesse initiale. On constate que lorsque $t \rightarrow \infty$, la vitesse ne s'annule pas. On atteint une vitesse limite où la force de LAPLACE compense le poids et le tube continue à vitesse constante vers le bas. Si on renverse le problème, lorsqu'on lâche le petit aimant dans un tube, il chute sous l'effet de la pesanteur, il commence par accélérer sous l'effet du poids mais atteint assez rapidement, si son moment dipolaire est élevé, un régime permanent de chute à vitesse constante.

29. Ligne d'émetteurs

Réponses :

1. Le plus court chemin pour aller de l'émetteur au point O est la ligne droite. Si $v < c$, les ondes sonores vont plus vite, même en prenant le chemin le plus court, à savoir la ligne droite, les différentes impulsions sonores arriveront les unes après les autres et pas en même temps. Par contre si $V = c$ alors, les ondes vont aussi vite que l'éclatement des enveloppes végétales. Si la ligne formée par les végétaux est rectiligne, toutes les ondes arrivent en même temps au niveau du point O . Dans le cas où $V > c$, avec une forme de ligne non rectiligne, on peut avoir cette même arrivée groupée - si l'on peut dire -. La vitesse de progression le long de la ligne se décompose en une composante radiale sur le rayon vecteur joignant le point M d'éclatement et le point O et une composante orthoradiale. Pour que les ondes arrivent ensemble, il faut que la vitesse radiale soit la vitesse des ondes c . Ainsi, les différents sons liés à l'éclatement des enveloppes végétales ont toujours à parcourir une distance égale à une date donnée.
2. On note le rayon vecteur $\vec{OM} = r\vec{e}_r$ en coordonnées polaires. La vitesse est $\vec{v}_M = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$. Comme nous l'avons vu $V^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$ avec $c^2 = \dot{r}^2$ et $\dot{r} = -c$ car il faut bien sûr que la ligne se rapproche du point O . On en déduit que $\frac{dr}{dt} = -c$ et $r\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{V^2 - c^2}$ car on raisonne à θ croissant au cours du temps. En effectuant le rapport de ces deux expressions, on arrive à l'équation différentielle $\frac{dr}{r} = -\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{V^2}{c^2} - 1}}$. En choisissant une courbe pour laquelle au départ $r = r_0$ pour $\theta = 0$, on arrive la forme polaire $r = r_0 \exp -\frac{\theta}{\sqrt{\frac{V^2}{c^2} - 1}}$. Cette équation est de forme spirale logarithmique. Dans le cas étudié, toutes les ondes vont arriver en O en même temps et additionner leurs amplitudes pour obtenir une onde d'amplitude importante. On peut apparenter cette situation à celle du passage du mur du son par un avion puisqu'à ce moment-là, on a de la même façon une accumulation d'ondes sonores au niveau du cône dit de MACH. L'avion va plus vite que le son, les fronts d'ondes qui se succèdent en émission se rejoignent.

30. Double oscillateur

Réponses :

1. Il faut commencer par faire la part des choses dans l'expression du potentiel total pour distinguer les deux études suggérées. Le changement de variable est automatique. Il faut passer à une lecture $V = V(X, Y)$. Le terme d'interaction $V_{int} = \frac{1}{2}m\alpha^2 Y^2$ ne concerne que le mobile réduit puisqu'il s'agit de forces intérieures qui n'affectent pas le mouvement du centre d'inertie G du système. Le potentiel extérieur fourni cache une dépendance en X et aussi en Y ... En utilisant $x_1 = X + \frac{Y}{2}$ et $x_2 = X - \frac{Y}{2}$, on arrive à $V_{ext} = \frac{1}{2}2m\omega^2 X^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{2}\omega^2 Y^2$. Le potentiel se décompose comme on le souhaitait puisque $V(X, Y) = \frac{1}{2}2m\omega^2 X^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{2}(\omega^2 + \alpha^2)Y^2$. On considère le système de masse $2m$ d'énergie cinétique $\frac{1}{2}2m\dot{X}^2$ dans le potentiel $\frac{1}{2}2m\omega^2 X^2$. On obtient très facilement l'équation du mouvement de cette particule puisque c'est un oscillateur harmonique de pulsation ω . On peut donc en déduire que $X(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ où A et B sont les constantes d'intégration déterminées par les conditions initiales. L'énergie mécanique du mobile réduit est $E_\mu = \frac{1}{2}\frac{m}{2}\dot{Y}^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{2}(\omega^2 + \alpha^2)Y^2$ qui est aussi l'énergie d'un oscillateur harmonique de pulsation $\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}$. Dans ces conditions, $Y(t) = C \cos \sqrt{\omega^2 + \alpha^2}t + D \sin \sqrt{\omega^2 + \alpha^2}t$. Si l'on revient à x_1 et x_2 , on peut voir que leur évolution est la composition de deux mouvements harmoniques à des pulsations différentes. Les deux pulsations que nous avons trouvées sont les **pulsations propres** du système à deux degrés de liberté : $\omega_{pa} = \omega$ et $\omega_{pb} = \sqrt{\omega^2 + \alpha^2}$.
2. Comme toute fonction d'onde, $\phi(t, x_1, x_2)$ donne accès à une probabilité. Toutefois, il faut faire attention car le système possède deux degrés de liberté. Ainsi $dP = |\psi(t, x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2$ représente la probabilité de trouver la particule 1 comprise entre x_1 et $x_1 + dx_1$ et de trouver simultanément la particule 2 entre x_2 et $x_2 + dx_2$.

3. Comme le potentiel ne dépend pas du temps, on passe immédiatement à la fonction d'onde spatiale telle que $\psi(t, x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2) \exp -i \frac{E}{\hbar} t$. L'équation de SCHRÖDINGER indépendante du temps est donnée par $-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right) + V(x_1, x_2) \varphi(x_1, x_2) = E \varphi(x_1, x_2)$. Les deux premiers termes représentent l'énergie cinétique de chaque particule que l'on écrit $E_{c1} = \frac{p_1^2}{2m}$ où l'opérateur $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_1}$ représente la quantité de mouvement p_1 de la première particule. Compte tenu de ce que l'on a fait dans l'étude de Mécanique classique, il faut transformer l'équation de SCHRÖDINGER pour la passer en variables X et Y . C'est déjà fait pour le potentiel, il faut encore calculer les dérivées de la fonction d'onde. Prenons l'exemple suivant : $\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial X}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial Y} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y}$. On passe à la dérivée seconde en dérivant à nouveau cette expression que l'on vient d'établir. Avec un peu d'attention dans l'organisation des termes, on trouve $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y}$. On peut ensuite obtenir aisément ensuite $\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} - \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y}$. Finalement, l'équation de SCHRÖDINGER s'écrit $-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} \right] + \left(\frac{1}{2} 2m\omega^2 X^2 + \frac{1}{2} \frac{m}{2} (\omega^2 + \alpha^2) Y^2 \right) \varphi = E \varphi$. On recherche une solution à variables séparées $\varphi = A(X)B(Y)$. En séparant bien les variables, on arrive à $-\frac{\hbar^2}{2(2m)} \frac{1}{A(X)} \frac{d^2 A}{dX^2} + \frac{1}{2} (2m)\omega^2 X^2 = E + \frac{\hbar^2}{m} \frac{1}{B(Y)} \frac{d^2 B}{dY^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2} \right) (\omega^2 + \alpha^2) Y^2$. Cette équation est vraie $\forall X$ et $\forall Y$, chaque membre doit être égale à une même constante qui est une énergie. On peut donc écrire que $-\frac{\hbar^2}{2(2m)} \frac{d^2 A}{dX^2} + \frac{1}{2} (2m)\omega^2 X^2 A(X) = E_X A(X)$. Cette équation est celle d'un oscillateur harmonique quantique de masse $2m$ d'énergie E_X dont les niveaux d'énergie sont donnés par $E_X = (n_X + \frac{1}{2})\hbar\omega$. On pose ensuite $E_Y = E - E_X$ pour écrire l'équation différentielle $-\frac{\hbar^2}{2(m/2)} \frac{d^2 B}{dY^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2} \right) \omega^2 Y^2 B(Y) = E_Y B(Y)$. Maintenant, c'est un oscillateur harmonique de masse $\frac{m}{2}$ d'énergie donnée par $E_Y = (n_Y + \frac{1}{2})\hbar\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}$. On peut donc conclure sur l'expression des niveaux d'énergie du système des deux particules quantiques : $E = (n_X + \frac{1}{2})\hbar\omega + (n_Y + \frac{1}{2})\hbar\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}$. On remarquera pour terminer que s'il n'y a pas de couplage entre les deux particules, alors $\alpha = 0$ et on retrouve la sommation des niveaux d'énergie de deux oscillateurs harmoniques identiques et indépendants : $E_{\alpha=0} = (n_X + n_Y + 1)\hbar\omega$.

31. Combinaison d'un prisme et d'un réseau

Réponses :

1. On comprend que deux phénomènes se produisent : la diffraction par le réseau sous incidence normale mais aussi la réfraction, voire la réflexion totale, sur la face de sortie du prisme. Commençons par la question de l'Optique géométrique. Sur la face d'entrée, le rayon lumineux arrive sous incidence normale, il n'est pas dévié. Une fois sur la face de sortie, son angle d'incidence par rapport à la normale au dioptre verre-air est $i = \alpha = 30,0^\circ$. Ce rayon va être réfracté car l'incidence est inférieure à l'incidence i_{max} au-delà de laquelle il y a réflexion totale. Si r est l'angle de réfraction, on $n \sin i = \sin r$. On trouve que $i_{max} = \arcsin \frac{1}{n} = 41,8^\circ$. Pour $i = 30^\circ$, on trouve un angle de réfraction $r_0 = 48,6^\circ$. Le rayon qui émerge du prisme selon l'Optique géométrique est donc dévié vers le bas de $18,6^\circ$. On a donc orienté la lentille convergente d'un angle de $18,6^\circ$ par rapport à la verticale pour respecter la condition de l'énoncé. Intéressons-nous maintenant au réseau. Commençons par le calcul de la différence de marche. Il n'y en a pas avant d'atteindre le réseau. Ensuite, on doit étudier la diffraction d'angle θ par rapport à la normale au réseau. La différence de marche est très classiquement $\delta = na \sin \theta$. Il y a des interférences constructives (les ordres du réseau) pour $p \in \mathbb{Z}$ tel que $na \sin \theta_p = p\lambda$. On a donc $\sin \theta_p = p \frac{\lambda}{na} = 0,211 p$ avec $|\sin \theta| \leq 1$. Comme on pouvait s'y attendre puisque l'incidence est normale, les ordres seront symétriques de par est d'autre de $\theta = 0$. D'ailleurs $\theta = 0^\circ$ correspond à $p = 0$, c'est la direction de l'Optique géométrique. On obtiendra donc un point lumineux sur la foyer image de la lentille convergente. Le réseau produit 9 ordres au total qui sont présentés dans le tableau qui suit :

Ordre p	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\theta_p(^{\circ})$	-57,6	-39,3	-25,0	-12,2	0	12,2	25,0	39,3	57,6
$i_p(^{\circ})$	-	-	-	-	30,0	18,2	5,0	-9,3	-27,4
$r_p(^{\circ})$	-	-	-	-	48,6	27,9	7,5	-14,0	-44,0
$\beta_p(^{\circ})$	-	-	-	-	0	21,7	41,1	62,6	92,6
$x_p(\text{m})$	-	-	-	-	0	0,40	0,87	1,93	-

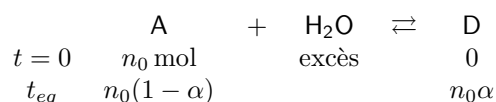
Maintenant, il faut considérer la réfraction ou la réflexion totale sur la face de sortie du prisme. L'angle d'incidence sur cette face est $i = \alpha - \theta_p$. On doit avoir $\alpha - \theta_p \leq i_{max}$ ce qui revient à écrire que $\theta_p \geq \alpha - i_{max}$, c'est-à-dire $\theta_p \geq (-11,8^\circ)$. On peut constater que les seuls les ordres de 0 à 4 vont être réfractés. On n'affiche que les incidences de ces ordres dans le tableau précédent. On applique la loi de SNELL-DESCARTES pour trouver l'angle de réfraction noté r_p pour un angle θ_p du réseau. On note β_p l'angle que fait que le rayon émergeant avec l'axe optique de la lentille convergente de projection. On a

par positionnement de cette lentille : $\beta_p = r_{p=0} - r_p$ en raisonnant sur un angle qui définit le sens vers le haut de l'écran. On remplit le tableau pour cet angle. Pour déterminer ce que l'on voit sur l'écran, il faut déjà constater que l'ordre de 4 ne sera pas visible car il ne rentre pas dans la lentille. Ensuite, on retrouve l'ordre 0 au foyer image comme déjà dit. Pour les trois autres ordres, il est préférable d'avoir une lentille correctement corrigée des aberrations géométriques car les angles avec lesquels elle est éclairée sont grands. On est loin des conditions de GAUSS. Pour positionner le point image sur l'écran, on aura $\tan \beta_p = \frac{x_p}{f}$. On trouve donc 4 points lumineux aux abscisses fournies dans le tableau.

32. Cinétique de la formation d'un diol et autres...

Réponses :

- On écrit un tableau d'avancement et on définit α comme le taux d'avancement.



La constante d'équilibre est $K^\circ = \frac{[\text{D}]}{[\text{A}]} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$. On peut donc calculer la constante d'équilibre aux deux températures. À 25 °C pour $\alpha = 0,38$, on a $K_1^\circ = 0,61$ et puis $K_2^\circ = 0,43$ à 35 °C. La loi de VAN'T HOFF est $\frac{d \ln K^\circ}{dT} = \frac{\Delta_r H^\circ}{RT^2}$. En intégrant dans le cadre de l'approximation d'ELLINGHAM, on aboutit à $\ln \frac{K_2^\circ}{K_1^\circ} = \frac{\Delta_r H^\circ}{R} \left(-\frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_1} \right)$. On a donc $\Delta_r H^\circ = \frac{RT_1 T_2}{T_2 - T_1} \ln \frac{K_2^\circ}{K_1^\circ}$. On trouve : $\Delta_r H^\circ = -26,7 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$. La réaction est exothermique, elle n'est pas favorisée par une élévation de température sur le plan thermodynamique comme on pouvait le voir dès la donnée des pourcentages de D.

- La vitesse de la réaction est la superposition des deux cinétiques correspondant au sens direct et au sens indirect. On a $v = -\frac{d[\text{A}]}{dt} = k_1 [\text{A}] - k_2 [\text{D}]$. En utilisant le fait que $[\text{D}] = a - [\text{A}]$, on arrive à l'équation différentielle $\frac{d[\text{A}]}{dt} + (k_1 + k_2) [\text{A}] = k_2 a$. En tenant compte des conditions initiales, on a $[\text{A}] = \frac{k_2}{k_1 + k_2} a (1 + \frac{k_1}{k_2} \exp(-(k_1 + k_2)t))$ et immédiatement $[\text{D}] = \frac{k_1}{k_1 + k_2} a (1 - \exp(-(k_1 + k_2)t))$.
- Par la loi de BEER-LAMBERT, on sait que l'absorbance est proportionnelle à la concentration en A puisque c'est la seule espèce qui absorbe à la longueur d'onde choisie pour effectuer la mesure. On a donc $Abs(t) = \varepsilon \ell [\text{A}](t)$ et $Abs_\infty = \varepsilon \ell \frac{k_2}{k_1 + k_2} a$. On peut en déduire que $Abs(t) = Abs_\infty (1 + \frac{k_1}{k_2} \exp(-(k_1 + k_2)t))$. On peut organiser sur cette formule une régression linéaire avec la grandeur $y = \ln \frac{Abs(t) - Abs_\infty}{Abs_\infty}$ puisque $y = \ln \frac{k_1}{k_2} - (k_1 + k_2)t$. On calcule les valeurs aux différentes dates. Elles sont regroupées dans le tableau qui suit.

temps (min)	1	5	10	15	20	25	∞
absorbance	1,08	1,05	1,02	0,98	0,95	0,92	0,44
y	0,375	0,327	0,276	0,205	0,148	0,087	-

En effectuant la régression linéaire, on trouve que la loi théorique est vérifiée. L'opposé de la pente donne $k_1 + k_2 = 0,012 \text{ min}^{-1}$. L'ordonnée à l'origine est $\ln \frac{k_1}{k_2} = 0,385$. Grâce à ces deux relations, on peut trouver $k_1 \simeq 0,007 \text{ min}^{-1}$ et $k_2 \simeq 0,005 \text{ min}^{-1}$. La constante d'équilibre peut être calculée comme $K^\circ = \frac{k_1}{k_2} = 1,4$ puisque les vitesses des deux sens se compensent à l'équilibre : $k_1 [\text{A}] - k_2 [\text{D}] = 0$. On peut remarquer que cette constante est un peu plus grande que celle que l'on a évaluée à 25 °C, cela signifie que l'on a travaillé à une température un peu plus petite.

- Le diagramme $E - pH$ se construit en commençant par les frontières verticales correspondant aux précipitations des hydroxydes de fer. Par exemple $K_{s1} C^{\circ 3} = [\text{Fe}^{2+}] [\text{HO}^-]^2$, conduit à une frontière à $pH = 7$. Pour l'autre précipité, on trouve $pH = 1,7$. On organise l'étude des frontières qui mettent en jeu un phénomène rédox en partant du bas et du fer. Par exemple pour le couple $\text{Fe}^{2+} + 2e^- \rightleftharpoons \text{Fe}_s$, on a $E = -0,44 + 0,03 \log \frac{[\text{Fe}^{2+}]}{C^\circ} = -0,47 \text{ V}$. Ce résultat est valable jusqu'à $pH = 7$. Ensuite, il faut utiliser le couple $\text{Fe}(\text{OH})_2 + 2\text{H}^+ + 2e^- \rightleftharpoons \text{Fe}_s + 2\text{H}_2\text{O}$. On trouve facilement que la pente de la frontière est de $-0,06 \text{ V } pH^{-1}$. Pour le tracé de cette frontière, on utilise la continuité du potentiel en $pH = 7$. En procédant de la même façon, on arrive au tracé du diagramme demandé, qui est représenté à la figure 5.
- La structure électronique du fer de numéro atomique $Z = 26$ est $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^6$. L'ion Fe^{2+} a perdu deux électrons. Ce sont les électrons de la couche 4s qui sont partis. Pour le cuivre de $Z = 29$ on se trouve avec une configuration électronique un peu particulière car la stabilisation liée au remplissage de la couche 3d va être responsable de la structure : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^1 3d^{10}$. L'ion cuivre Cu^{2+} va

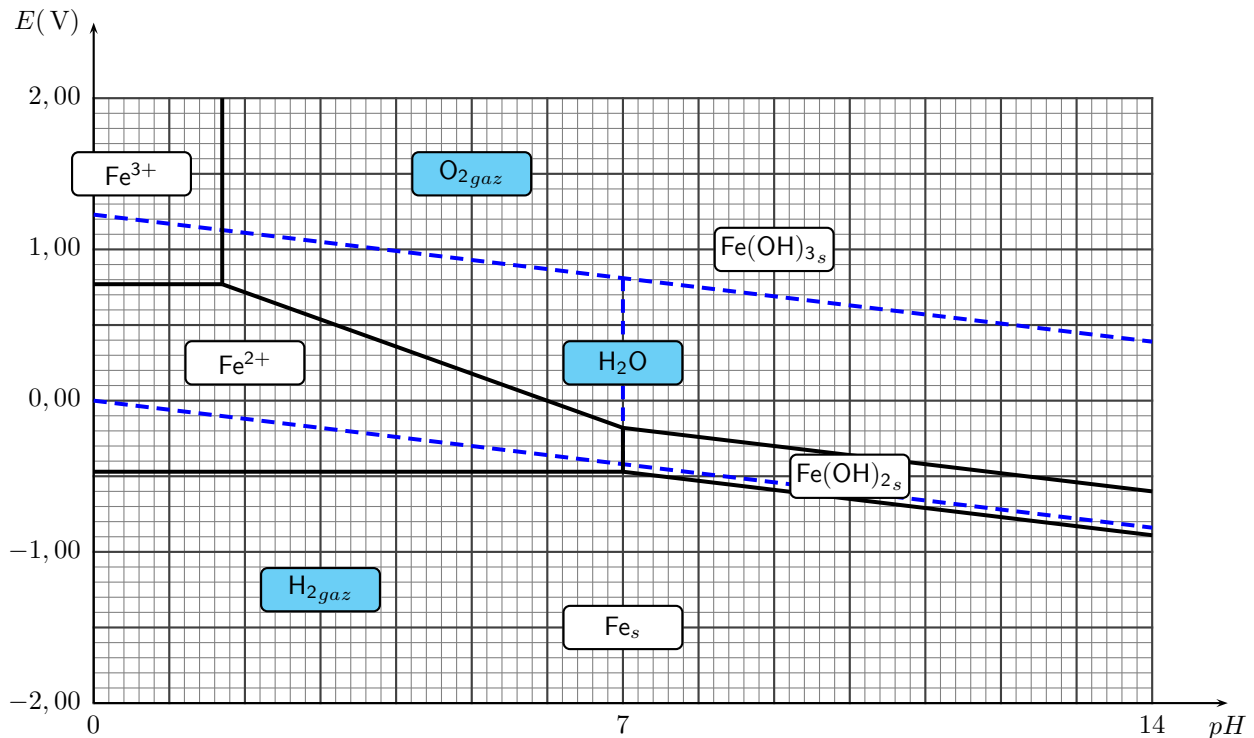


FIGURE 5 – Diagrammes du fer et de l'eau

finir sa structure électronique en $3p^6 3d^9$. Pour le zinc, les choses sont plus simples puisqu'avec $Z = 30$, il va remplir sa couche $3d$. On obtient $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10}$. L'ion Zn^{2+} perd les deux électrons $4s$ par rapport à l'atome de zinc.

5 Situation-problèmes

33. Guépard

Réponses : Si on prend une phase d'accélération de 5 s, l'accélération moyenne est $a_{moy} = \frac{v}{t_a} = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, si on prend une minute son accélération est ridicule ! Il parcourt 62,5 m pendant la phase d'accélération. Pendant la phase à vitesse constante $d = v(t - t_a) = 1375 \text{ m}$. Ce qui fait au total, environ 1450 m. En partant du repos, sa variation d'énergie cinétique est $\Delta E_c = 15,6 \text{ kJ}$, avec un rendement de 60%, on a une dépense énergétique de $E_{dep} = 26 \text{ kJ}$. Ramenée sur une minute, cela correspond à une puissance moyenne $P_{moy} \simeq 430 \text{ W}$. Le guépard se repose 15 minutes, sa température corporelle diminue de 3°C . En supposant que le guépard était au départ à 38°C , il se trouvait en fin de course à 41°C .

34. Lampe de vélo

Réponses : La lumière émise est dans le visible, on considère une longueur d'onde de $\lambda = 550 \text{ nm}$ qui correspond au maximum de sensibilité de l'œil. Un photon de cette lumière possède une énergie donnée par $E = \frac{hc}{\lambda}$. Si l'on note $\frac{dN}{dt}$ le nombre de photons émis par unité de temps, on obtient la puissance correspondante $P_{lum} = \frac{dN}{dt} \frac{hc}{\lambda}$. On fait l'hypothèse raisonnable que la puissance électrique est très bien transformée en puissance lumineuse pour considérer le rendement égale à 1 : $P_{lum} = P_{elec}$. Pour une lampe à incandescence, c'est nettement plus faible, souvent en dessous de 10%. Avec les DEL, on peut espérer de très bons rendements. La puissance électrique est $P_{elec} = UI$ où I est l'intensité qui traverse le DEL. Comme on a une correspondance d'un photon pour un électron, on peut en déduire que $P_{elec} = Ue \frac{dN}{dt}$. En comparant les deux expressions de la puissance, on obtient : $Ue = \frac{hc}{\lambda}$. La tension minimale est donc : $U = \frac{hc}{\lambda e}$. On trouve $U = 2,3 \text{ V}$. Comme chaque accumulateur possède une tension de $1,2 \text{ V}$, il est indispensable d'associer les trois générateurs en série pour être sûr d'obtenir une tension suffisante. Les trois DEL sont alors branchées en parallèles. Une telle situation n'est pas nécessairement celle retenue par le constructeur de la lampe.

La puissance est $P_{elec} = 10 \text{ W}$, la tension d'alimentation $U_{alim} = 3,6 \text{ V}$ - par mise en série - des trois accumulateurs. On en déduit que l'intensité qui circule est $I = \frac{P_{elec}}{U_{alim}} = 2,8 \text{ A}$. Les capacités des trois accumulateurs sont indiquées sur la photographie : c'est $Q = 3 \times 800 \text{ mA} \cdot \text{h}$ pour l'ensemble. Cela représente une charge $Q = I\Delta t = 2,4 \text{ A} \cdot \text{h}$. Avec l'intensité calculée juste avant, on a $\Delta t = \frac{2,4}{2,8} = 0,86 \text{ h}$. L'autonomie de la lampe est d'environ **50 minutes**.