

## Exercices : 03 - Électronique numérique.

— Solutions —

### 1. Critère de Shannon

Réponses : le cas limite est  $f = F_e/2$  on prélève deux échantillons par période ; dans les deux cas on a  $f_{max} < F_e/2$  le critère de SHANNON est respecté ; l'échantillonnage introduit, entre autres, les fréquences  $F_e - f$  pour la téléphonie on a  $F_e - f_{max} = 4,6 \text{ kHz}$  la zone de transition est donc de  $[3,4 \text{ kHz}; 4,6 \text{ kHz}]$  alors que pour le CD audio c'est  $[20 \text{ kHz}; 24,1 \text{ kHz}]$  ; en valeur relative on a dans le premier cas  $\frac{1,2}{3,4} = 0,35$  alors que pour le CD c'est  $\frac{4,1}{20} = 0,21$  ; pour ne pas récupérer de fréquences non présentes dans le signal de départ il faut des filtres passe-bas, celui nécessaire au signal audio doit avoir une atténuation plus forte que pour le signal téléphonique car il y a doit y avoir une bonne atténuation sur un intervalle relatif de fréquence plus petit.

### 2. Effet d'un parasitage

Réponses : la plus haute fréquence du signal est 25 Hz, il faut  $f_e \geq 2f_{max}$  donc dépasser 50 Hz ce qui est réalisé ici avec 80 Hz, on trouve tout d'abord les fréquences du signal dans le spectre puis toutes les fréquences générées par  $nf_e \pm f_{\text{signal}}$ , on va donc avoir 55 Hz, 65 Hz, 75 Hz, 85 Hz, 95 Hz, 105 Hz, 135 Hz, 145 Hz, 155 Hz, 165 Hz, 175 Hz, 185 Hz, 215 Hz, 225 Hz, 235 Hz, avec les signal du réseau électrique à 50 Hz, il faut rajouter les fréquences 50 Hz, 30 Hz, 130 Hz, 110 Hz, 210 Hz, 190 Hz, pour récupérer le signal des vibrations de la charpente, il faut un filtre passe-bas très efficace dont la fréquence de coupure est comprise entre 25 Hz et 30 Hz, comme il faut donner un exemple simple, on choisira un filtre passe-bas de type  $RC$  avec  $R = 100 \text{ k}\Omega$  et  $C = 66 \text{ nF}$  puisque la fréquence de coupure est  $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$  ;

### 3. Oscilloscope numérique

Réponses : un signal triangle ou créneau ou a fortiori impulsion présente des fréquences supérieures à 10 MHz, pour le triangle et le créneau ce sont des multiples de cette fréquence, les oscilloscopes de TP sont à 60 MHz ; il faut respecter le critère de SHANNON et donc  $F_e > 2f_{max}$  ; on dispose de  $256 \times 1024 = 262\,144$  octets ce qui fait 131 072 valeurs à stocker dans la mémoire ce qui représente pour une période environ 13 107 valeurs, la fréquence étant de 10 kHz, il faut donc  $F_e = 131 \text{ Méc} \cdot \text{s}^{-1}$ , 10 périodes cela représente 1 ms, cela fait  $10^5$  échantillons et cela occupe donc  $2 \times 10^5$  octets tout en ayant  $10^4$  échantillons par période ; le nombre de niveaux est bien  $2^n$  où  $n$  est le nombre de bits, la plus petite variation relative est de  $\frac{1}{2^n - 1} \simeq 2^{-n}$ , on trouve bien les valeurs annoncées dans le tableau ; la variation relative est de 0,4 ppm c'est impossible à atteindre avec les convertisseurs proposés ; avec l'atténuation on doit mesurer au maximum 24 V avec une précision de 244 ppm cela représente donc une précision d'environ 6 mV.

### 4. Le CD audio

Réponses : Le domaine audible standard est l'intervalle  $[20 \text{ Hz}; 20 \text{ kHz}]$  (rapidement réduit avec l'âge, notamment du côté des hautes fréquences, c'est-à-dire des aigus).

La fréquence  $f_e$  doit respecter le critère de NYQUIST-SHANNON, c'est-à-dire  $f_e > 2f_{max}$  où  $f_{max}$  est la fréquence maximale du domaine spectral considéré. Ici,  $f_{max} = 20 \text{ kHz}$  si l'on raisonne par rapport au domaine audible, donc le critère est bien respecté (avec un peu de marge, expliquée dans la suite). Le signal de 43 kHz est ultrasonore donc n'est pas audible par l'être humain (mais des animaux peuvent l'entendre...). Ce signal est quand même enregistré et échantillonné donc ceci va conduire à une composante spectrale repliée de fréquence  $f' = f_e - f_1 = 1,1 \text{ kHz}$  qui se trouve dans le domaine audible ! Du coup, l'écoute de l'enregistrement se verra pollué par un son relativement désagréable à cette fréquence... Le filtre passe-bas de fréquence de coupure  $f_c \simeq \frac{f_e}{2} = 22,5 \text{ kHz}$  peut-être intercalé entre le microphone et le CAN pour jouer le rôle de filtre anti-repliement : il atténue fortement les composantes spectrales non pertinentes avant la numérisation. Le filtre risque de dégrader le signal audio enregistré dans les hautes fréquences audibles si son ordre n'est pas assez élevé. Il faut s'assurer qu'il ne modifie pas les composantes spectrales du domaine audible et atténue fortement dès la première composante spectrale pouvant se replier, c'est-à-dire dès  $f_e - f_{max} = 24,1 \text{ kHz}$ . La zone de transition de 20 kHz à 24,1 kHz est étroite donc il faut adopter un filtre passe-bas d'ordre élevé et on peut aussi sur-échantillonner pour augmenter la largeur de cette zone de transition (vers le haut). La fréquence d'échantillonnage donne le nombre d'échantillons de 16 bits par seconde et, la stéréo doublant les informations à stocker (deux canaux), le nombre de bits à enregistrer pour une seconde de concert est  $N = 44100 \times 16 \times 2 = 1,41.10^6 \text{ bits} = 1,41 \text{ Mbit}$ . Sur le CD audio de 700 Mo, en considérant 8 bits par octet (et sans rentrer dans les problèmes de normalisation des ko, Mo, Go qui ne changent pas l'estimation...), il vient la durée  $t_{WAV} \simeq 66 \text{ min}$ . En réalité, la durée d'enregistrement est un peu moins longue car des informations supplémentaires sont stockées, ainsi que des bits de correction d'erreurs (en cas de rayures raisonnables). On gagne un facteur en temps typique de 4 à 20, d'où une durée d'enregistrement d'environ  $t_{MP3} \simeq 4 \text{ h } 20 \text{ min}$  à 22 h.

## 5. Stroboscopie

Réponses : Tout d'abord, il est clair que pour figer radicalement le mouvement apparent (c'est-à-dire vu), il faut que le stroboscope émette un flash à chaque période  $T = 1/f$  de la corde, ou bien toutes les  $n$  périodes. Ici, on souhaite conserver un mouvement apparent, avec une période apparente  $T_a$ , et dans le sens du mouvement réel. Pour que l'observation soit confortable, il faut choisir la plus grande fréquence adaptée permettant cela : il faut qu'entre deux flashes, il y ait une période du stroboscope  $T_e = 1/f_e$  légèrement supérieure à  $T$  :  $T_e = T + \epsilon$ . Ainsi, entre deux flashes, la corde se retrouve légèrement décalée dans son mouvement dans le bon sens. Les graphiques de la figure 1 de l'amplitude du mouvement à une abscisse donnée en fonction donnée montre l'échantillonnage que cela donne (la seconde est un zoom par rapport à la seconde).

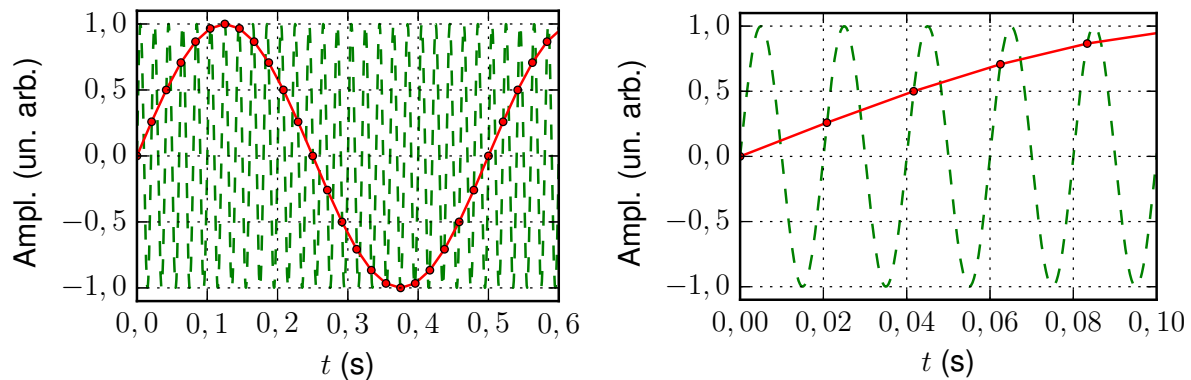


FIGURE 1 – Ralenti direct

Une période apparente  $T_a = 1/f_a = 0,5$  s est décrite lorsque la corde revient sur un flash au début de son cycle, soit après  $p$  décalages, donc lorsque  $p\epsilon = T$ . De plus, le temps écoulé depuis le départ est alors de  $p+1$  périodes  $T$  puisque  $T_a = p(T + \epsilon) = (p+1)T$ . Cette relation permet de déterminer le nombre de décalages nécessaires, sachant que la fréquence EDF est  $f = 50$  Hz :  $p = \frac{f}{f_a} - 1 = 24$ . On a  $f_e = \frac{p}{p+1} f = f - f_a = 48$  Hz. Notons que d'autres fréquences plus faibles sont a priori possibles (exemple : choisir la période  $T_e = 2T + \epsilon$ ) mais cela donne un mouvement apparent plus saccadé et donc d'observation bien moins confortable ! Le stroboscope qui éclaire par impulsions la corde joue le rôle de l'échantillonneur à la fréquence  $f_e$  (comme le montrent les figures précédentes). L'oscillation d'un point de la corde à la fréquence  $f$  est le signal, dans ce cas simplement sinusoïdal ; l'ensemble des positions éclairées sont les échantillons. Ici, la condition de NYQUIST-SHANNON n'est pas respectée car la fréquence  $f_e$  est inférieure à  $2f$  ! On observe en conséquent un phénomène de repliement de spectre avec l'apparition d'une composante spectrale « fantôme » à la fréquence  $f - f_e$  qui est précisément la fréquence apparente que l'on veut observer dans la première question (on peut aussi exploiter les autres fréquences fantômes  $n f_e - f$  mais cela donne moins de confort car  $f_e$  est alors à réduire). Le même type d'effet stroboscopique est observé au cinéma dans les films où les roues de voiture semblent tourner au ralenti et parfois en sens inverse. L'échantillonnage est ici imposé par la caméra qui réalise un nombre fixé de prises de vue par seconde : 24 pour les films plus anciens (et le double pour des plus récents). D'après la condition de NYQUIST-SHANNON, le repliement se manifeste alors pour les phénomènes périodiques de fréquence supérieure à 12 Hz (et à 24 Hz pour les films plus récents). Il est également possible d'observer un mouvement apparent en sens inverse en prenant une période du stroboscope légèrement inférieure à  $T$ . Par exemple, on peut prendre  $T_e = T - \epsilon$ , soit  $f_e = f + f_a$ , cohérent avec les tracés de la figure 2 (le second est un zoom du premier).

## 6. Erreurs sur un CAN

Réponses : L'erreur de quantification  $\epsilon = s_q - s$  est telle que  $\epsilon \in [-\frac{q}{2}; \frac{q}{2}]$  compte-tenu de la loi de quantification adoptée. On peut tomber sur un intervalle toujours de même largeur (le quantum) mais décalé en translatant la loi de quantification  $y_q = f(y)$  horizontalement. Quand on raisonne sur le bruit de quantification, il faut raisonner avec un signal  $s_q$  de domaine d'excursion identique à celui du signal  $s$  sinon la différence  $s_q - s$  ne représente pas vraiment l'erreur d'arrondi. On peut aussi raisonner en normalisant simultanément les pleines échelles de  $s$  et  $s_q$  pour définir ensuite une erreur de quantification. L'évolution temporelle de  $\epsilon(t)$  est en dents de scie inversées. On ne tient pas compte des effets des bords de la pleine échelle dus au demi-quantum au début et au trois-demi-quantum à la fin (on y revient en fin d'exercice) puisqu'on ne demande que l'évolution typique. Ces dents de scie inversées sont de période  $T = q/\alpha$ , chaque période étant décrite par la loi (en prenant l'origine du temps  $t'$  en milieu de période, quand la rampe décroissante de la scie croise 0)  $\epsilon(t') = -\alpha t'$ . On a immédiatement, par imparité de  $\epsilon(t')$  définie juste avant pour chaque période,  $\langle \epsilon \rangle = 0$ . La valeur efficace est

$$\epsilon_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \epsilon^2(t) dt} = \sqrt{\frac{\alpha}{q} \int_{-\frac{q}{2\alpha}}^{\frac{q}{2\alpha}} \alpha^2 t^2 dt} \text{ soit } \epsilon_{eff} = \frac{q}{2\sqrt{3}}. \text{ Le signal quantifié évolue sur la pleine échelle}$$

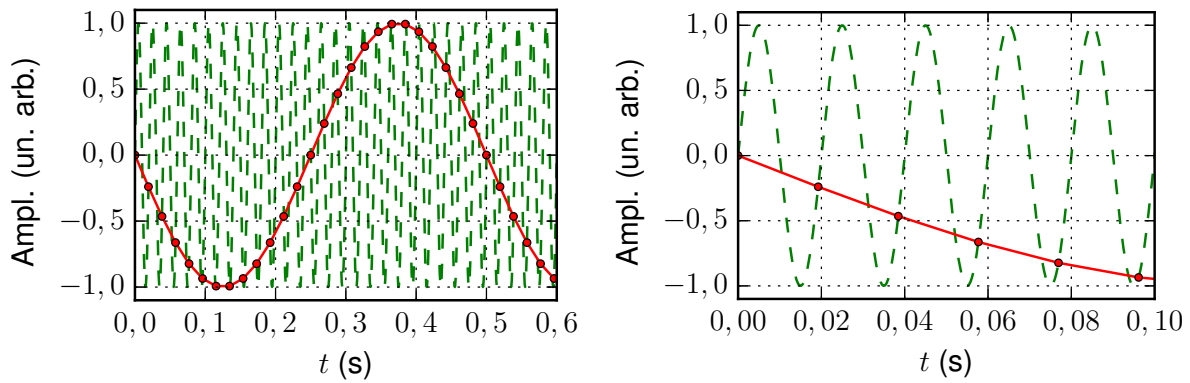


FIGURE 2 – Ralenti indirect

de sortie  $E_s = (2^n - 1)q$  en notant  $n$  le nombre de bits de conversion (vu la loi de quantification fournie). Par conséquent, pour  $n = 8$ ,  $\frac{\epsilon_{eff}}{E_s} = \frac{1}{2\sqrt{3}(2^n - 1)} = 1,1 \cdot 10^{-3}$ . Il s'agit là d'une erreur quadratique relative très faible et donc sans importance tant que l'on ne cherche pas à conserver trop de détails en amplitude dans le signal analogique d'origine. Pour une rampe décroissante, le bruit de quantification est en dents de scies normales (signe opposé de celui de l'étude précédente). Cela revient à conserver sur une période la loi (avec  $\alpha$  négatif!)  $\epsilon(t') = -\alpha t'$  avec origine des temps au passage par zéro en milieu de période comme avant. Tous les résultats qui en découlent sont donc conservés. Pour un signal d'entrée de forme quelconque, l'erreur de quantification reste négligeable tant que le quantum est suffisamment faible pour décrire ses détails souhaités. On peut, si besoin, amplifier le signal pour l'adapter à la pleine échelle et réduire encore l'erreur. Bien entendu, pour un signal constant, cela ne sert pas à grand chose. Avec une telle loi de quantification décalée, on obtient une erreur de quantification de moyenne nulle (dans le jargon du traitement numérique, on parle d'erreur symétrique), ce qui est préférable à une loi de quantification donnant en moyenne une erreur non nulle (ce serait le cas avec une loi sans la modification de  $q$  en  $q/2$  du premier niveau)! Il n'est pas gênant que le dernier niveau soit plus long, même si cela augmente un peu l'erreur de quantification pour celui-ci, tant que l'on n'exploite pas trop l'extrémité supérieure de la pleine échelle d'entrée.

### 7. Filtre passe-haut

Réponses :  $\underline{H}(j\omega) = \frac{j\omega\tau}{1+j\omega\tau}$ ;  $\tau \frac{ds}{dt} + s = \tau \frac{de}{dt}$ ;  $\frac{\tau}{T_e}(s_n - s_{n-1}) + s_n = \frac{\tau}{T_e}(e_n - e_{n-1})$ , on obtient  $s_n = a s_{n-1} + a(e_n - e_{n-1})$  avec  $a = \frac{\tau}{\tau + T_e}$ .

### 8. Montage à commande numérique

Réponses : on pensera à mettre tous les interrupteurs en positions 0 sauf l'un d'eux, par exemple celui le plus à gauche de la figure qui sera sur 1. On pourra continuer en ne mettant que le second en partant de la gauche sur 1. On pensera à appliquer le théorème de superposition.  $u = E(\frac{\epsilon_0}{16} + \frac{\epsilon_1}{8} + \frac{\epsilon_2}{4} + \frac{\epsilon_3}{2})$ ; convertisseur numérique en tension,  $u = E(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\epsilon_k}{2^{n-k}})$  avec  $\epsilon_k = 0$  ou 1.

### 9. Multiplexage temporel

Réponses : il faut au moins le double de la fréquence maximale donc au minimum 6 800 Hz, la fréquence d'échantillonnage respecte le critère de SHANNON; une trame doit se dérouler entre deux échantillons successifs d'un signal; il faut donc que par seconde on envoie  $8000 \times 32 = 256\,000$  échantillons; il faut 8 bits par échantillons, on multiplie par 8 le résultat précédent, on obtient 2,048 Mbit par seconde; si le pas de quantification est  $q$ , l'erreur de quantification est  $\epsilon = q/2$ , si on garde  $q$  constant, l'erreur relative est plus grande pour les signaux faibles, en jouant sur le pas de quantification, on peut réaliser une erreur relative constante.

### 10. Généralisation du critère de Shannon

Réponses : Le spectre du signal échantillonné comprend tous les domaines de fréquence tels que  $[nF_e - f_{max}; nF_e + f_{max}]$ , si  $F_e < 2f_{max}$  il y a recouvrement des spectres entre  $(n-1)F_e + f_{max}$  et  $nF_e - f_{max}$ . Il faut donc  $F_e > 2f_{max}$ . Pour un signal à bande étroite, on a un spectre  $[nF_e - f_M; nF_e - f_m] \cup [nF_e + f_m; nF_e + f_M]$ . Avec  $F_e = 43,5$  MHz, aucun ordre  $n$  ne recouvre le spectre du signal de départ ( $n = 0$ ) que l'on peut récupérer. Par contre, pour  $F_e = 50$  MHz, on a recouvrement de  $n = 4$  avec le cas  $n = 0$ . Pour éviter le problème, il faut  $(n-1)F_e - f_m < f_m$  et  $nF_e - f_M > f_M$ , on trouve donc la généralisation du critère de SHANNON.

## 11. Numérisation

Réponses : On a  $2^8 = 256$  valeurs comprises entre 0 et 255. Il suffit de faire la proportion pour obtenir la valeur décimale correspondant à 3,549 V. On trouve que la valeur décimale est 181. Le nombre binaire représentant la tension indiquée est : 10110101.  $V_A$  minimale vaut 0 V et la valeur maximale  $255u_0 = 10,2$  V. Le gain de l'amplificateur soit  $\gamma = \frac{5}{10,2} = 0,49$ . Plus petite valeur  $\gamma \times 40$  mV, c'est-à-dire une tension d'environ 20 mV. On voit que l'on a  $V_0 = V_2 = V_3 = V_6 = u_0$ , les autres valeurs des tensions  $V_i$  sont nulles. Ce n'est pas instantané. Les changements d'état des composants électroniques, en particulier des amplificateurs opérationnels (AO encore appelés ALI) nécessite un certain temps. Il faut  $255t_0$ . L'allure de la tension  $V_B(t)$  est un escalier dont la largeur des marches est  $t_0$  sur l'axe des temps et la hauteur  $\gamma u_0 \simeq 0,02$  V.  $\frac{1,781}{5} \times 255 = 90,8$ . On suppose que la tension  $V_B$  est nulle avant toute nouvelle numérisation. On incrémente 1 sur le bit de poids le plus faible. La tension obtenue en sortie est  $V_B = 0,02$  V. Cette tension est inférieure à  $V$ , l'AO qui est utilisé en comparateur ici, reste dans le même état en sortie à savoir  $V_D = -V_{sat}$ . Le compteur continue d'incrémenter. Il va le faire jusqu'à ce que l'on atteigne 90. Ensuite lorsque l'on va passer à 91, la tension  $V_B$  devient supérieure à  $V$ . L'état du comparateur en sortie bascule à  $V_D = +V_{sat}$  et cela bloque le compteur. Il faut donc une durée de  $90t_0$  auquel on doit ajouter le temps de basculement du comparateur qui est vraisemblablement du même ordre de grandeur que celui du compteur qui incrémente. On aura donc un temps de l'ordre de  $\Delta t \simeq 91t_0$ . Le nombre binaire affiché sur le compteur est donc : 01011011.

## 12. Analyse d'un CNA

Réponses : L'amplificateur opérationnel est supposé idéal et en régime linéaire. Cela permet de dire que le potentiel  $V_-$  de l'entrée inverseuse est nul. Pour le calcul de la résistance équivalente située à droite de  $A_1$ , nous étudions les choses au niveau du nœud  $A_n$ . Finalement lorsque le courant arrive à ce nœud, il se sépare en deux voies contenant chacune une résistance  $2R$ . Comme la différence de potentiel est la même puisque  $V_{A_n} - V_- = V_{A_n} - V_{masse}$ , et cela quelle que soit la position de l'interrupteur, il y a toujours division de l'intensité du courant en deux parties égales. Les deux résistances  $2R$  sont donc en parallèle. Elles sont équivalentes à une résistance  $R$ . Cette résistance  $R$  se retrouve en série avec la résistance  $R$  qui est située entre  $A_{n-1}$  et  $A_n$ . On obtient donc une résistance  $2R$  qui est à nouveau en parallèle avec la résistance  $2R$  située en  $A_{n-1}$ . Ce petit jeu peut continuer jusqu'en  $A_1$  où la résistance équivalente est  $R$ .

Comme nous l'avons dit à la question précédente, le courant se divise toujours en deux. On a donc  $i_0 = 2i_1$  et  $i_1 = 2i_2 \dots$

La tension appliquée en  $A_0$  à la résistance  $2R$  est toujours  $V_{ref}$  et cela quelle que soit la position de l'interrupteur.

On a donc  $i_0 = \frac{V_{ref}}{2R}$ . Le courant de sortie de l'AO est celui qui parvient à l'entrée non inverseuse puisque l'impédance d'entrée est considérée comme infinie. La loi des nœuds indique donc que cette intensité est la somme de toutes les intensités de  $i_0$  à  $i_n$  chacune étant affectée du coefficient  $e_i = 0$  ou  $1$  en fonction de la position de l'interrupteur. On a donc :  $i_s = e_0 i_0 + e_1 i_1 + \dots + e_n i_n$ . Or  $i_1 = \frac{i_0}{2}$ ,  $i_2 = \frac{i_0}{4} = \frac{i_0}{2^2}$  et  $i_n = \frac{i_0}{2^n}$ . On peut donc factoriser  $i_0$  et obtenir :  $i_s = i_0 \left( \frac{e_0}{2^0} + \frac{e_1}{2^1} + \frac{e_2}{2^2} + \dots + \frac{e_n}{2^n} \right)$ . On peut donc écrire la formule :  $i_s = \frac{V_{ref}}{2R} \left( \frac{e_0}{2^0} + \frac{e_1}{2^1} + \dots + \frac{e_n}{2^n} \right)$ .

On peut dans la formule précédente factoriser par  $2^n$ . On obtient alors l'écriture :  $i_s = \frac{V_{ref}}{R2^{n+1}} (e_0 2^n + e_1 2^{n-1} + \dots + e_{n-1} 2 + e_n)$ . Cette formule permet de passer d'une écriture binaire  $e_0 e_1 e_2 \dots e_{n-1} e_n$  à un nombre à base 10 :  $N_{base\ 10} = e_0 2^n + e_1 2^{n-1} + \dots + e_{n-1} 2 + e_n$ .

La précision de l'écriture du nombre est donnée par le terme en  $e_n = 0$  ou  $1$ . Il correspond à une subdivision du résultat en  $2^{n+1}$ . Il faut donc que  $2^{n+1} > 250$ . La puissance de 2 supérieure à 250 est  $256 = 2^8$ . On en déduit donc que  $n = 7$ . On a un codage sur 8 bits.

Le circuit proposé est un convertisseur courant-tension. En effet, avec  $V_+ = V_- = 0$ , on obtient facilement la tension de sortie de l'AO  $u_s = -R' i_s$ .  $u_s = -\frac{V_{ref}}{2^{n+1}} \frac{R'}{R} \sum_{j=0}^{n-1} e_j 2^j$ . Le quantum  $\delta u_s$  est la variation, en valeur absolue, de tension observée à la sortie du CNA lorsque le bit de plus faible poids  $e_n 2^n$  est seul à varier quand on passe d'un mot binaire à un mot binaire voisin :  $\delta u_s = \frac{V_{ref}}{2^{n+1}} \frac{R'}{R}$ . Pour que  $\delta u_s = 10$  mV, il faut prendre une source de fem  $V_{ref}$  telle que  $E = 2^{n+1} \frac{R}{R'} \delta u_s = 25,6$  V. La valeur de la tension  $U_s$  s'obtient par application de la formule de la seconde question, qui s'écrit à présent  $u_s = -\delta u_s \sum_{j=0}^{n-1} e_j 2^j$ . Le mot binaire  $N_{(2)} = (10010010)$  donne donc  $u_s = -10^{-2} (2^7 + 2^4 + 2^1) = -1,46$  V. Il est important de ne pas donner plus de décimales à ce résultat vu la valeur du quantum (et les chiffres significatifs). La valeur numérique décimale de  $N_{(2)}$  pour un mot binaire quelconque est  $N = \sum_{j=0}^{n-1} e_j 2^j = -\frac{u_s}{\delta u_s} = -100 u_s$  ( $U_s$  en volt). Pour la valeur de  $u_s$  précédente, cela donne  $N = 146$  et il reste à déterminer les états des commutateurs correspondants, c'est-à-dire à passer ce nombre en base 2. Pour ce faire, il suffit de diviser  $N$  par 2 et relever le premier reste  $e_0$ , puis de recommencer sur le dividende obtenu pour déduire le reste  $b_1$  et ainsi de suite jusqu'à obtenir un dividende nul. De la sorte,  $\frac{146}{2} = 73 + 0$  donne  $N_0 = 73$  et  $b_0 = 0$ ,  $\frac{73}{2} = 36 + 1$  donne  $N_1 = 36$  et  $b_1 = 1 \dots$  et on obtient finalement bien  $N_{(2)} = (10010010)$ .

On a un signal constant par morceaux. Si on intègre, on obtient une fonction continue affine par morceau mais cette fonction n'est pas dérivable puisqu'il y a un changement de pente à chaque période d'échantillonnage.

Une seconde intégration est nécessaire pour obtenir un signal continu et dérivable. Il faut donc procéder à deux intégrations successives. En pratique, cela correspond à l'utilisation d'un filtre passe-bas du second ordre.

### 13. Filtre numérique à moyenne glissante

Réponses : le signal  $e(t)$  est un échelon et on obtient aisément la représentation suivante des échantillons à la figure 3. Le filtre numérique est a priori de type passe-bas puisqu'il lisse la variation rapide en procédant par opération de moyenne locale. On estime le gain en bande passante en raisonnant avec un signal d'entrée constant qui donne le même signal de sortie donc  $G_{bp} \simeq 1$ . Il ne s'agit que d'une estimation car on ne sait pas trop ce qu'il se passe pour des basses fréquences non nulles (cela va être précisé dans la suite). On choisit pour signal d'entrée une sinusoïde de fréquence  $f$  quelconque échantillonnée à  $f_e$  (et d'amplitude unité) et on calcule par moyenne glissante le signal de sortie échantillonné et on en relève l'amplitude qui donne accès à  $G_4(f)$ . Il suffit de pratiquer cela dans une boucle explorant plusieurs valeurs de  $f$  sur l'intervalle  $[0; f_e]$  pour arriver au tracé de la figure 3.

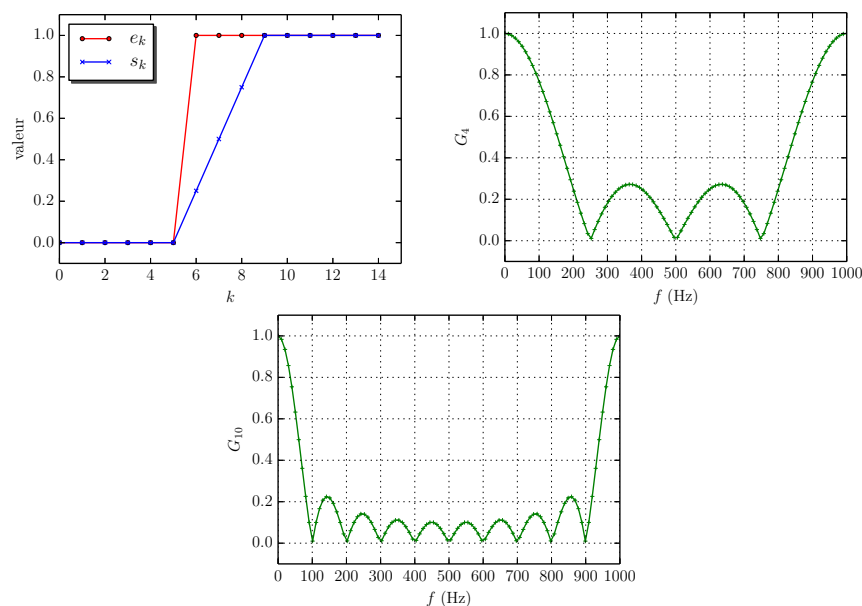


FIGURE 3 – Moyenne glissante

Voici un exemple de code *Python* pour ce faire :

```
## Importations
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

## Fréquence d'échantillonnage
fe=1000 # en Hz

## Fonction moyenne glissante
def moygl(e,n):
    # Moyenne sur le vecteur e en glissant
    # sur n échantillons
    # Sort le vecteur résultant
    fenetre=np.ones(n)
    s=np.convolve(fenetre,e,'valid')/n
    s=np.append(np.zeros(n-1),s) # Décalage...
    return s

## Fonction sinusoïde de fréquence f
def sinus(t,f):
    sinus=np.cos(2*np.pi*f*t)
    return sinus

# Echantillons de temps
k = np.arange(-100,100,1)
t = k/fe
```

```

# Fréquences explorées
f=np.linspace(0,fe,100)
G=np.array([])
n=4      # Nombre d'échantillons de moyennage

for fk in f:
    esink=sinus(t,fk)
    ssink=moygl(esink,n)
    G=np.append(G,np.max(abs(ssink)))

plt.figure()
plt.plot(f,G,'g+-',ms=3)
plt.xlabel('f (Hz)')
plt.ylabel('$G_4$')
plt.xticks(np.arange(0,fe+1,100))
plt.grid(axis='both',which='both')
plt.axis([0, fe, -0.1, 1.1])

```

La fréquence  $f_e$  n'est pas atténuée, ce qui est différent du cas du filtre passe-bas analogique. Cela vient de l'échantillonnage du signal d'entrée qui conduit à un effet de repliement de spectre, d'où l'allure symétrique de  $G_4(f)$  par rapport à  $f_e/2 = 500$  Hz! Pour éviter ce problème de repliement, il faut utiliser en amont du CAN un filtre analogique anti-repliement de fréquence de coupure vers  $f_e/2$  et d'ordre assez élevé. Un filtre passe-bas analogique donne une courbe de gain décroissante sans fréquence parfaitement coupée. Ce filtre numérique donne une courbe de gain présentant des annulations (fréquences coupées 250 Hz, 500 Hz et 750 Hz) avec des remontées de gain intermédiaires! Il suffit de reprendre le programme précédent avec  $n = 10$  et en changeant le label de l'axe vertical. On obtient le tracé de la figure 3. La fréquence de coupure basse à  $-3$  dB est passée d'environ 114 Hz à 44 Hz. Si l'on augmente  $n$ , la bande passante en BF est plus étroite, ce qui joue en faveur de l'efficacité du filtrage numérique passe-bas, mais on conserve le problème dû au repliement de spectre, ainsi que des fréquences totalement coupées en plus grand nombre mais ce n'est pas vraiment un problème. Pour divers tests de  $n$ , on trouve que les fréquences coupées par le filtre numérique sont  $f_{n,p} = p \frac{f_e}{n}$  où  $p \in \mathbb{N}_{n-1}^*$ . On peut démontrer cette loi en procédant comme suit. On choisit un signal d'entrée sinusoïdal  $e(t) = A \cos(2\pi f t + \varphi)$  ou, plus simplement et sans produire de restriction,  $e(t) = \cos(2\pi f t)$ . Alors, les échantillons de sortie du filtre numérique s'écrivent  $s_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e_{k-j} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \cos[2\pi f (k-j) T_e]$ . Il est plus simple de raisonner ensuite en passant en complexes. On écrit  $\underline{s}_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{i 2\pi f (k-j) T_e}$  dont la partie réelle donne bien  $s_k$ . Reprenons l'écriture complexe précédente du signal échantillonné de sortie avec  $\varphi = 2\pi f / f_e$  : On calcule la somme de la série en progression géométrique, d'où  $\underline{s}_k = \frac{e^{i k \varphi}}{n} \frac{1 - e^{-i n \varphi}}{1 - e^{-i \varphi}} = \frac{e^{i k \varphi}}{n} \frac{e^{-i n \varphi/2}}{e^{-i \varphi/2}} \frac{e^{i n \varphi/2} - e^{-i n \varphi/2}}{e^{i \varphi/2} - e^{-i \varphi/2}}$  soit  $\underline{s}_k = \frac{e^{i (2k-n+1) \varphi/2}}{n} \frac{\sin(n \varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}$ . Puisque le signal d'entrée était d'amplitude unité, le gain du filtre est le module de  $\underline{s}_k$  et on peut conclure que  $G_n(f) = \frac{1}{n} \left| \frac{\sin[n \varphi(f)/2]}{\sin[\varphi(f)/2]} \right| = \frac{1}{n} \left| \frac{\sin(n \pi f / f_e)}{\sin(\pi f / f_e)} \right|$ . Pour éliminer le ronflement du secteur, il suffit d'échantillonner à une fréquence multiple de 50 Hz :  $f_e = 50 n$  Hz. Plus on choisit  $n$  grand, plus on élimine d'harmoniques ( $n-1$ ). Cependant, cela conduit à une fréquence de coupure basse très basse (inférieure à 50 Hz) donc ce n'est applicable que pour des signaux d'évolution intéressante lente!