Exercices: 09 - Interféromètre de Michelson

A. Formes de la figure d'interférences

1. Anneaux de Haidinger

On considère un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air (on appellera M_1 le miroir mobile et M_2). Il est éclairé par la raie verte de la lampe à vapeur de mercure de longueur d'onde $\lambda = 546, 1$ nm. L'épaisseur de la lame d'air constituée est e, elle est très voisine de 1 cm.

- 1. Décrire un tel interféromètre.
- 2. En admettant qu'il y ait au centre un maximum d'intensité lumineuse, calculer les rayons des 4 premiers anneaux brillants dans le plan focal d'un objectif de focal 1 m.
 - On éclaire maintenant avec uniquement la raie verte du mercure l'interféromètre réglé au contact optique.
- 3. Décrire la figure d'interférences.
 - En fait, à la suite d'une mauvaise manipulation, le miroir M_2 présente une légère déformation au niveau de son centre. Cette déformation est modélisée par une callote sphérique de rayon R = 10 m.
- 4. Expliquer pourquoi la figure d'interférences est à nouveau constituée d'anneaux. Calculer les rayons des 4 premiers anneaux brillants.

2. Étude d'un coin d'air

Un interféromètre de Michelson est monté en coin d'air. L'angle entre les deux miroirs est $\alpha = 5 \times 10^{-4}$ rad. Il est éclairé sous une incidence quasi-normale par une source étendue spatialement. Celle-ci émet deux radiations de longueurs d'onde λ_1 et λ_2 d'égale intensité.

- 1. Donner l'expression de l'éclairement obtenu sur le coin d'air équivalent en fonction de x, coordonnée définie le long d'un des deux miroirs.
- 2. Les valeurs des longueurs d'onde sont $\lambda_1 = 486 \,\mathrm{nm}$ et $\lambda_2 = 434 \,\mathrm{nm}$. Compte tenu de ces valeurs, donner une idée de l'allure de la courbe E(x). Calculer la période de la visibilité (contraste).

3. Comptage de franges en coin d'air

Dans l'interféromètre de MICHELSON schématisé à la figure 1, la source S est placée au foyer du collimateur (L). La séparatrice (Σ) est inclinée à 45° sur le faisceau incident transmis par le collimateur, et la lentille d'observation (L') est disposée à la sortie du MICHELSON parallèlement au miroir M_2 . Les déphasages dus à la traversée de la séparatrice ne seront pas pris en compte car ils sont compensés par une lame compensatrice non représentée. Les miroirs M_1 et M_2 sont initialement orthogonaux et tels que $IO_1 = IO_2$, c'est-à-dire $\ell = 0$. On fait alors tourner M_1 d'un petit angle θ autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure passant par O_1 : on observe des franges sur l'écran placé dans le plan conjugué de M_2 par rapport à (L').

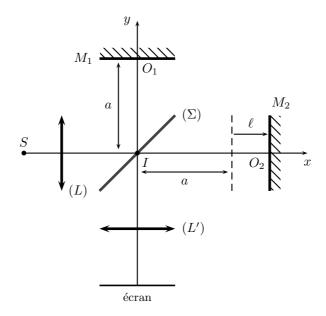


FIGURE 1 – Interféromètre de MICHELSON

- 1. La source est monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 508, 6$ nm. On considère un point P du miroir M_2 repéré par la coordonnée $\overline{O_2P} = y$. Déterminer la forme des franges et exprimer l'éclairement en P. Calculer l'interfrange i en fonction de λ et θ .
- 2. On observe sur l'écran N=12 franges noires, les extrémités de l'image du miroir correspondant à des maxima d'intensité. Sachant que le diamètre des miroirs est $D=20\,\mathrm{mm}$, calculer l'angle θ en secondes d'arc.

On remplace la source bleue de longueur d'onde $\lambda = 508,6\,\mathrm{nm}$ par une radiation rouge de longueur d'onde $\lambda = 643,8\,\mathrm{nm}$.

3. Combien de franges sombres et brillantes observe-t-on?

La source S est une lampe à vapeur de sodium (bichromatique). En déplaçant M_2 d'un mouvement de translation selon Ix, les franges nettes disparaissent puis réapparaissent périodiquement.

4. Combien de franges défilent en un point de l'écran entre une disparition de franges et la disparition suivante sachant que les deux longueurs d'onde émises par la lampe à vapeur de sodium valent $\lambda_1 = 589,0$ nm et $\lambda_2 = 589,6$ nm?

4. Critère qualitatif de brouillage

On considère un interféromètre de MICHELSON réglé en anneaux d'égale inclinaison. On étudie l'intensité lumineuse sur le capteur placé au centre O de la figure d'interférence.

- 1. Donner l'expression de la différence de marche δ et l'ordre p en O en fonction de z=y-x où x et y sont respectivement les distances de chacun des miroirs à la séparatrice dans le cas d'une source monochromatique de longueur d'onde λ_0 .
- 2. En déduire et tracer l'éclairement ou l'intensité lumineuse E(z) lorsque les amplitudes des deux ondes sont égales.
- 3. L'amplitude des deux ondes n'est pas la même : A_0 est l'amplitude de l'une des deux ondes alors que $A_0(1+\varepsilon)$ est celle de la seconde avec $\varepsilon \ll 1$. Calculer l'éclairement $E(z,\varepsilon)$ et exprimer le contraste de la figure d'interférences.
- 4. On revient à $\varepsilon = 0$. La source émet dans le domaine fréquentiel $\left[\nu_0 \frac{\Delta \nu}{2}, \nu_0 + \frac{\Delta \nu}{2}\right]$ une densité spectrale uniforme. Estimer la valeur $z_b > 0$ de z telle qu'il y ait brouillage.
- 5. Applications numériques : $\Delta \nu = 10^{12}\,\mathrm{Hz}$ et $\lambda_0 = 634\,\mathrm{nm}$. Peut-on observer le brouillage? Même question si on utilise un laser de même longueur d'onde mais possédant une raie très fine de largeur fréquentielle $\Delta \nu = 10^6\,\mathrm{Hz}$.

5. Repérage du contact optique par spectre cannelé

On règle un interféromètre de MICHELSON. Voir le schéma de la figure 2.

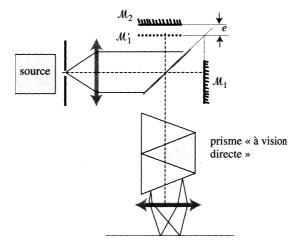


Figure 2 – Interférogramme enregistré sur un interféromètre de Michelson

- 1. Comment peut-on repérer la position du contact optique en lumière monochromatique? Estimer la précision de ce repérage dans des conditions usuelles d'expérience. Donner une méthode très précise pour repérer le contact optique.
- 2. Le contact optique étant presque réalisé, on effectue le montage présenté sur le schéma. La fente mince est placée dans le plan focal objet de la lentille. La source est polychromatique. On admet que l'on peut distinguer des couleurs d'interférences lorsqu'il y a au plus deux cannelures dans le spectre visible de la lumière. Quel est l'aspect visuel de la lumière qui sort de l'interféromètre (avant le prisme)?
- 3. On projette l'image de la source sur un écran. On interpose un prisme qui dévie sélectivement les différentes longueurs d'onde. Qu'observe-t-on sur l'écran?
- 4. Quel est l'intérêt du prisme à vision directe par rapport au prisme simple?
- 5. On compte 15 cannelures noires sur l'ensemble du spectre visible. Quel est l'ordre de grandeur de l'épaisseur e de la lame d'air?
- 6. On chariote (on translate) le miroir \mathcal{M}_1 ; le nombre de cannelures noires diminue globalement sur l'écran. Comment ces cannelures se sont-elles déplacées, et quel est le sens de variation de e?
- 7. Quand il ne reste plus que 2 cannelures, quel est l'aspect (sans prisme) de la lumière issue de l'interféromètre?
- 8. Expliquer la fin du réglage qui permet d'obtenir le contact optique.

B. Applications

6. Mesure de l'épaisseur d'une mince lame de verre

Un interféromètre de Michelson est réglé avec ses miroirs exactement perpendiculaires. Le faisceau incident issu d'une source primaire étendue S est monochromatique ($\lambda = 500\,\mathrm{nm}$). A partir de la situation où on est au contact optique, on déplace le miroir M_2 de 1 mm normalement à son plan.

- 1. Étudier les phénomènes d'interférences qui apparaissent au voisinage de l'incidence normale, dans le plan focal d'une lentille convergente. Déterminer la phase au centre et l'ordre d'interférence du 2^{ème} anneau sombre.
- 2. On place sur l'un des bras une lame mince d'épaisseur $t=7,5\,\mu\mathrm{m}$ et d'indice n=1,50. Trouver la variation de l'ordre d'interférence au centre.
- 3. On remplace la source primaire par une source ponctuelle, placée au foyer d'une lentille mince convergente. Initialement les deux miroirs sont perpendiculaires et au contact optique. Qu'observe-t-on au foyer image de la seconde lentille lorsqu'on éloigne M_2 de la lame séparatrice?
- 4. A quelle condition et comment peut-on mesurer l'épaisseur de la lame de verre?

7. Mesure de la largeur d'une raie

Une source ponctuelle monochromatique éclaire un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air de telle sorte que l'un des miroirs M_1 soit fixe et que l'autre puisse se déplacer parallèlement à lui-même à partir de sa position initiale correspondant à une différence de marche nulle. Un détecteur P situé sur l'axe du faisceau donne un signal électrique proportionnel à l'intensité I du faisceau qu'il reçoit.

- 1. Exprimer I en fonction de la fréquence ν_0 de la radiation émise et de $\tau = 2x/c$, x étant le déplacement de M_2 et c la vitesse de la lumière dans le vide.
- 2. La source n'émet pas une onde monochromatique, comme cela est supposé précédemment, mais une onde quasi-monochromatique centrée sur la fréquence ν_0 . On note $\Delta\nu_{1/2}$ la largeur totale à mi-hauteur de l'intensité spectrale de la source. Trouver l'intensité $I(\tau)$ lorsque l'intensité spectrale de la raie I_{ν} est rectangulaire.
- 3. Un calculateur associé au détecteur fournit la fonction : $V(\tau) = \frac{I_{max} I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$. Trouver $V(\tau)$. Tracer son graphe.
- 4. La raie rouge du cadmium ($\lambda_0 = 643, 8\,\mathrm{nm}$) présente une intensité spectrale I_{ν} approximativement rectangulaire. On observe, pour la première fois $V(\tau) = 0$ pour $x = 15\,\mathrm{cm}$. En déduire $\Delta\nu_{1/2}$ et $\Delta\lambda_{1/2}$.

8. Réfractométrie interférométrique

On souhaite déterminer l'indice de réfraction n d'un échantillon solide, transparent et immergé dans une cuve (C) remplie d'un milieu liquide d'indice n_0 . Cet ensemble est introduit dans le bras du miroir M_1 d'un interféromètre de MICHELSON de manière à ce que la cuve soit éclairée entièrement et uniformément. On introduit dans le bras du miroir M_2 une cuve (C_{comp}) identique à la cuve (C), de même épaisseur e_0 , contenant le même milieu liquide d'indice n_0 . On considère que les parois de chaque cuve sont parallèles entre elles et d'épaisseurs nulles. Les faisceaux incidents sont normaux aux parois des cuves. Voir la figure 3.

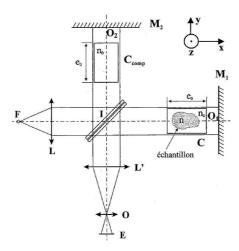


Figure 3 – Montage optique pour la réfractométrie

Dans tout ce qui suit, les longueurs IO_1 et IO_2 des deux bras sont supposées égales. L'interféromètre est éclairé par une source quasi-monochromatique ($\lambda = 628$ nm), légèrement étendue, centrée sur F, foyer objet de la lentille collimatrice (L). La séparatrice est supposée parfaitement compensée et est inclinée ainsi que la compensatrice à 45° sur la direction IO_1 . L'interféromètre est préalablement réglé en coin d'air par rotation du miroir M_1 autour de l'axe O_1z . On note $\epsilon = 5.10^{-4}$ rad l'angle positif que fait M_2 par rapport à l'image M'_1 de M_1 par la séparatrice. La lentille (L'), stigmatique, parallèle au miroir M_2 , forme avec l'objectif O d'une caméra l'image des franges d'interférences dans le plan (E) avec un grandissement égal à -1. On suppose $|n - n_0|$ de l'ordre de 10^{-2} au maximum.

- 1. Étudier, sans calculs lourds, l'effet de la présence de la cuve (C_{comp}) sur le contraste.
- 2. Déterminer la valeur de la différence de marche approchée en un point du plan (E).

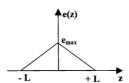


FIGURE 4 – Évolution de l'épaisseur e(z)

- 3. On suppose que l'échantillon est un biprisme de largeur 2L, d'arête parallèle à O_1y et de face plate principale de normale O_1x ; l'épaisseur traversée e ne dépend ici que de la coordonnée z et vérifie $\frac{e}{e_{\max}} + \frac{|z|}{L} = 1$ avec L = 1 cm et $e_{\max} = 5$ mm. Quelle est l'image du biprisme par la séparatrice?
- 4. Représenter, dans ce cas et avec $n > n_0$, l'allure des franges brillantes et montrer qu'elles ne peuvent redevenir véritablement rectilignes qui si n et n_0 sont égaux.
- 5. Quelle valeur de la différence entre les indices du liquide et de l'échantillon peut-on déceler si un détecteur d'image placé dans (E) est capable de détecter un déplacement de frange de l'ordre de $0, 1 \, \text{mm}$?

9. Spectrométrie par transformée de Fourier

On éclaire un interféromètre de Michelson monté en la me d'air d'épaisseur e avec une raie quasi-monochromatique, caractérisée par son profil spectral :

$$\frac{\mathrm{d}E_0}{\mathrm{d}\sigma} = f(\sigma) = C \exp\left(-\left(\frac{(\sigma - \sigma_0)^2}{a^2}\right)\right)$$

où $\sigma = 1/\lambda$ et où σ_0 , C et $a \ll \sigma_0$ sont des constantes positives. Pour simplifier, on étendra la fonction f aux valeurs négatives de σ , domaine où elle prend des valeurs négligeables.

- 1. Quelle est la signification de σ_0 ? Calculer la largeur $\Delta \sigma$ du profil à mi-hauteur et interpréter la constante a. Faire un graphique rapide du profil spectral.
- 2. On réalise un enregistrement de l'éclairement au centre de la figure d'interférences en fonction de l'épaisseur de la lame d'air qu'on fait varier en déplaçant un des miroirs avec l'aide d'un moteur. Établir l'expression de l'éclairement E(e) en fonction de constantes et de la transformée de Fourier du profil spectral définie par :

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) \exp(2j\pi\sigma x) d\sigma$$

3. Sachant que $\int_{-\infty}^{\infty} \exp{-\frac{u^2}{a^2}} \exp(2j\pi ux) du = a\sqrt{\pi} \exp{-\pi^2 a^2 x^2}$, établir l'expression de E(e) et tracer l'allure de son graphe pour $\Delta\sigma \ll \sigma_0$. Comment évolue la visibilité des franges? Comment peut-on mesurer $\Delta\sigma$? Quelle valeur de e doit-on pouvoir atteindre?

10. Spectrométrie interférentielle

On considère un interféromètre de MICHELSON réglé en lame d'air. On utilise un détecteur, ponctuel, placé au centre du système d'anneaux dans le plan focal image d'une lentille convergente. Le miroir M_1 est mobile entre $\ell=0$ et $\ell=L$, ce qui entraı̂ne une variation du chemin optique Δ de $\Delta=0$ à $\Delta=\Delta_{max}$. Le détecteur mesure l'intensité lumineuse $I(\Delta)$. Le mouvement du miroir est commandé par un système informatique qui enregistre la fonction $I(\Delta)$, appelée interférogramme. Ce système calcule ensuite numériquement la transformée $F(\omega)$ de la fonction $I(\Delta)$, définie par l'intégrale :

$$F(\omega) = \int_0^{\Delta_{max}} I(\Delta) \cos \frac{\omega \Delta}{c} d\Delta$$

- 1. Donner l'expression de la différence de marche Δ .
- 2. Calculer $F(\omega)$ dans le cas d'une raie monochromatique de pulsation ω_0 et représenter l'allure de $F(\omega)$.
- 3. En déduire l'allure de la courbe $F(\omega)$ dans le cas de deux ondes de pulsations ω_1 et $\omega_2 > \omega_1$, voisines de la pulsation centrale ω_0 .
- 4. Montrer que ce dispositif peut être utilisé comme un spectromètre. En définissant par vous-même un critère permettant de définir le plus petit écart spectral qui puisse être observé par ce dispositif, évaluer la résolution $\Delta\omega_R$ du spectromètre. En déduire son pouvoir de résolution \mathcal{R} défini par :

$$\mathcal{R} = \frac{\omega_0}{\Delta \omega_B}$$

- 5. Montrer que \mathcal{R} est fixé par le nombre N_{max} de maxima d'intensité enregistrés par le détecteur, lors de la course finie de l'interféromètre.
- 6. On étudie une source lumineuse d'émission centrée sur la pulsation ω_0 et dont le spectre forme une courbe en cloche de largeur à mi-hauteur $\Delta\omega$. À quelle condition sur $\Delta\omega_R$ pourra-t-on dire que le spectromètre permet d'étudier finement le profil de cette raie?

11. Mesure de déformation

Un interféromètre de Michelson est réglé au contact optique : les deux miroirs sont orthogonaux, symétriques relativement à la lame séparatrice (cf. figure 5). L'un des miroirs est en fait légèrement déformé et forme une sphère, convexe, de grand rayon R. Les miroirs sont éclairés par un faisceau de lumière monochromatique de longueur d'onde λ issu d'un point lumineux situé sur l'axe de l'interféromètre à la distance d de la lame séparatrice. L'observation est réalisée au foyer d'une lentille convergente de focale f'.

On néglige d'abord toute déformation du miroir.
Quel est, au contact optique, l'aspect de l'écran d'observation? Le contact optique est réalisé lorsqu'une même distance y sépare les deux miroirs du système séparateur-compensateur.

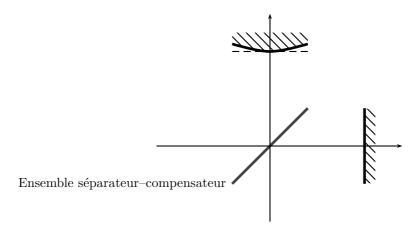


FIGURE 5 – Déformation du miroir d'un interféromètre

- 2. On prend maintenant en compte la déformation sphérique du miroir de l'interféromètre.
 - (a) Déterminer la position des deux images de la source données par les deux miroirs. Quelle est la distance d_{im} entre ces images?
 - (b) Montrer que ces deux images sont déphasés et calculer leur déphasage. On précisera la convention de signe choisie.
 - (c) Quel est l'aspect du champ d'interférence?
 - (d) La distance entre le centre de la figure et la troisième frange brillante est $l=5\,\mathrm{cm}$; on donne $d=1\,\mathrm{m}$, $\lambda=500\,\mathrm{nm},\ f'=50\,\mathrm{cm}$ et $y=10\,\mathrm{cm}$. On fera l'hypothèse que le centre de la figure est un point sombre. Cette hypothèse sera vérifiée ensuite. Calculer R; commenter.

Information : un miroir sphérique de sommet S et de centre C obéit, dans les conditions de Gauss, à la relation de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}}$$

où A et A' sont les points conjugués objet et image, \overline{SC} est le rayon de courbure algébrique du miroir sphérique. Cette relation permet de trouver la position de la source secondaire due au miroir déformé.

12. Mesure du doublet du sodium

On considère un interféromètre de Michelson réglé en miroirs parallèles et au contact optique. À partir de cette position, on fait tourner d'un très petit angle α le miroir M_2 autour d'un axe perpendiculaire au plan horizontal.

- 1. Montrer qu'on peut observer à l'aide d'une lentille L des franges d'interférence localisées sur M_1 .
- 2. Déterminer la répartition de l'intensité en un point P de M_1 repéré par la coordonnée x mesurée à partir du centre du miroir. En déduire la valeur de l'interfrange i en fonction de λ et α .
- 3. Donner une application pratique, pour le miroir M_2 , lorsque le miroir M_1 est parfaitement plan.
- 4. On se replace dans le cas où $\alpha=0$. La source n'est pas monochromatique : S provient d'une lampe à vapeur de sodium émettant $\lambda_1=589,0\,\mathrm{nm}$ et $\lambda_2=\lambda_1+\Delta\lambda$. On déplace M_2 dans la direction de l'axe à $45\,^\circ$ de la séparatrice de façon à faire défiler les franges d'interférences obtenues avant. On constate que les franges disparaissent lorsque le déplacement de M_2 est $d=0,15\,\mathrm{mm}$. Expliquer ce phénomène. En déduire $\Delta\lambda$ et λ_2 .

13. Contrôle de déplacement

On utilise un interféromètre de Michelson en lame d'air d'épaisseur e avec une source monochromatique de longueur d'onde $\lambda=643,84896\,\mathrm{nm}$. On désire, pour une application métrologique, mesurer un déplacement $\Delta e=51225342\,\mathrm{nm}$ d'un des miroirs à 10 nm près, provoquant une augmentation $\Delta p=p''-p'$ de l'ordre d'interférences p. On note E(p) l'éclairement et E_{max} sa valeur maximale.

- 1. Comment mesurer très simplement la partie entière ENT(p) de p?
- 2. Montrer que, compte tenu de la précision requise, il faut aussi mesurer la partie fractionnaire p-ENT(p). Pour cela, on détermine le signe de $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}$ et on mesure $\rho=\frac{E(p)}{E_{max}}$ avec une incertitude absolue égale à 0,01. Quel est le meilleur choix pour l'ordre d'interférences p' avant déplacement du miroir ? La précision est-elle suffisante ?

14. Analyse d'un interférogramme

À l'aide d'un interféromètre de MICHELSON et un capteur d'intensité lumineuse, on a enregistré l'interférogramme de la figure 6. Pour y parvenir, on a déplacé à vitesse régulière le miroir chariotable de l'interféromètre. Le graphique montre l'intensité lumineuse recueillie sur le capteur en fonction de la différence de marche. La source lumineuse est supposée présenter deux raies assez fines d'intensités lumineuses différentes.

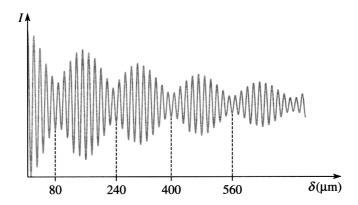


FIGURE 6 – Interférogramme enregistré sur un interféromètre de MICHELSON

1. Déterminer les deux longueurs d'onde, le rapport des intensités, ainsi qu'une estimation de la largeur des raies et de la longueur de cohérence.

Données :

$$A\cos[(\alpha + \Delta\alpha)x] + B\cos[(\alpha - \Delta\alpha)x] = a(x)\cos[\alpha x + \varphi(x)]$$

avec

$$a^{2}(x) = A^{2} + B^{2} + 2AB\cos(2\Delta\alpha x)$$
 et $\tan\varphi = \tan(\Delta\alpha x)\frac{A - B}{A + B}$

C. Le problème de la localisation des franges

15. Influence de la largeur de la source sur la localisation des interférences

On utilise l'interféromètre de Michelson monté en coin d'air d'angle $\alpha = 3 \times 10^{-3}$ rad. Il est éclairé par une source monochromatique S située à l'infini et de longueur d'onde $\lambda = 683$ nm. La source est ponctuelle et l'onde incidente arrive sous un angle β sur le miroir M_1 , voir la figure 7.

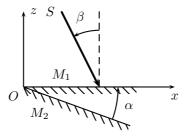


Figure 7 – Influence de la largeur de la source

- 1. Déterminer les directions des ondes réfléchies par les lames L_1 et L_2 et en déduire les vecteurs d'ondes \vec{k}_1 et \vec{k}_2 correspondants.
- 2. L'origine des phases et de l'espace étant prise au point O de l'arête du coin d'air, exprimer l'ordre d'interférences p en un point M en fonction de λ , x, z, α et β .
- 3. La source est étendue, elle constitue une source large caractérisée (puisqu'elle est à l'infini) par son diamètre apparent $2\beta_m$. Quel est maintenant le domaine de variation de l'angle β ?
- 4. Évaluer la variation de l'ordre d'interférences en fonction de β en un point M du miroir M_1 à la distance $d=1\,\mathrm{cm}$ de O, pour $\beta_m=10^{-2}\,\mathrm{rad}$ et puis pour $\beta_m=1\,\mathrm{rad}$. Commenter.
- 5. Déterminer le lieu des points M(x,z) où $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\beta}=0$ pour $\beta=0$. Commenter.