

Devoir surveillé de Sciences Physiques n°8 du 27-03-2025

— Durée : 3 heures. Solutions —

Problème n°1 – Effets quantiques dans les rebonds de neutrons

X

MPI 2024

A. Réflexion d'un neutron sur une paroi

1. La longueur d'onde de DE BROGLIE est $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$. On trouve $\lambda = 10^{-8} \text{ m}$. Cette longueur d'onde est relativement grande devant la taille d'un atome que l'on situe vers 10^{-10} m environ. On peut conclure que la paroi de nickel sera vue comme une marche de potentiel.

2. L'équation de SCHRÖDINGER est : $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi(x, t)$.

3. Un état stationnaire d'énergie E pour le neutron est traduit par la forme suivante pour la fonction d'onde : $\psi_{es}(x, t) = \varphi(x) \exp -i\frac{E}{\hbar}t$. L'équation de SCHRÖDINGER portant sur la fonction d'onde spatiale est alors $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x)$. Si l'on se place pour $x < 0$, on a donc $\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \varphi = 0$. Pour $x > 0$, c'est $\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2} \varphi = 0$.

4. Commençons par les conditions de continuité en $x = 0$. La fonction d'onde spatiale $\varphi(x)$ est nécessairement continue puisque le carré de son module est une densité de probabilité qu'il serait physiquement inacceptable de trouver discontinue. De plus, $\frac{d\varphi}{dx}$ est aussi continue parce que le potentiel $V(x)$ ne subit pas de discontinuité non bornée, ici sa discontinuité est de V_0 finie. Pour les calculs, on posera $k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$, $k_2 = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$ si $E > V_0$ et $\mu = \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$ si $E < V_0$. Commençons par étudier le cas $E > V_0$. Les solutions sont de la forme $\varphi_1(x) = A_1 \exp ik_1 x + B_1 \exp -ik_1 x$ pour $x \leq 0$ et $\varphi_2(x) = A_2 \exp ik_2 x + B_2 \exp -ik_2 x$. Comme au-delà de $x = 0$, il n'y a plus de changement de potentiel, il ne peut pas y avoir d'onde réfléchie. on a donc nécessairement $B_2 = 0$. Pour faciliter l'écriture, on rapporte tout à l'amplitude A_1 de l'onde incidente traduisant les quantons provenant de $-\infty$. On écrit $B_1 = rA_1$ et $A_2 = tA_1$ où r et t sont les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude. La continuité de la fonction d'onde en $x = 0$ amène l'équation $1 + r = t$, cela de la dérivée de la fonction d'onde donne $1 - r = \frac{k_2}{k_1} t$. On peut donc calculer $r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$ et $t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$. Si on étudie le cas où $E < V_0$, les calculs sont similaires mais avec $\varphi_2(x) = A'_2 \exp \mu_2 x + B'_2 \exp -\mu x$. La fonction d'onde ne peut pas diverger en $+\infty$, par conséquent $A'_2 = 0$. En procédant de la même façon que pour l'autre cas avec les continuités attendues, on obtient $r = \frac{k_1 - i\mu}{k_1 + i\mu}$ et $t = \frac{2k_1}{k_1 + i\mu}$. On s'intéresse aux densités de courants de quantons, en particulier à la densité des quantons arrivant sur la marche de potentiel $\vec{J}_i = \vec{e}_x |A_1|^2 \frac{\hbar k_1}{m}$, à celle correspondant aux quantons réfléchis par la marche $\vec{J}_r = -\vec{e}_x |r|^2 |A_1|^2 \frac{\hbar k_1}{m}$. On peut alors définir le coefficient de réflexion sur les flux de quantons par $R = \frac{|J_r|}{J_i}$. On constate que $R = |r|^2$. Les deux cas se distinguent clairement : si $E > V_0$, on a $R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 < 1$. Par contre lorsque $E < V_0$, on voit immédiatement que $R = 1$. Il y a réflexion totale des quantons incidents sur la marche de potentiel.

5. L'énergie des neutrons incidents sur la marche de potentiel est uniquement constituée d'énergie cinétique $E = E_c = \frac{1}{2}mv^2$. Il y aura réflexion totale si $\frac{1}{2}mv^2 \leq V_0$ ce qui donne pour la vitesse critique $v_c = \sqrt{\frac{2V_0}{m}}$.

6. La vitesse normale à la paroi est $v_0 \sin \theta$ puisque θ est l'angle entre la paroi et la direction du faisceau de neutrons. La condition limite pour la réflexion totale se produit pour $\theta = \theta_c = 0,01 \text{ rad}$. Cet angle est donc tel que $v_c = v_0 \sin \theta_c \simeq v_0 \theta_c$ puisque $\theta_c \ll 1$. On en déduit que $v_c = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

7. On a vu que $R = 1$ pour $\theta \leq \theta_c$, il y a réflexion totale. C'est dans l'autre cas une réflexion partielle et que la fraction réfléchie est définie par $R = \left(\frac{1 - \frac{k_2}{k_1}}{1 + \frac{k_2}{k_1}} \right)^2$. En utilisant les expressions de k_1 et k_2 et en tenant compte du fait que $E = \frac{1}{2}mv_0^2 \sin^2 \theta$ et $V_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 \sin^2 \theta_c$ puisque c'est uniquement la vitesse normale à la paroi qui compte, on peut établir que $R = \left(\frac{\sin \theta - \sqrt{\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_c}}{\sin \theta + \sqrt{\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_c}} \right)^2$.

8. On peut voir une analogie avec la réflexion totale en Optique et poser $n = \frac{v_c}{v_0}$.

B. Ralentissement des neutrons

Première étape : échange d'énergie avec des atomes

9. La conservation de la quantité de mouvement est $m\vec{v} = m\vec{v}' + Am\vec{v}_R$. Comme on travaille sur un seul axe, on peut obtenir après simplification la relation scalaire $mv = -mv' + Amv_R$ en notant v' la norme de la vitesse du neutron après le choc. On peut encore écrire : $v + v' = Av_R$.

10. L'énergie cinétique du système est conservée, cela donne $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}Amv_R^2$. On peut encore écrire cette relation $v^2 - v'^2 = Av_R^2 = (v + v')(v - v')$. Si on utilise la relation issue de la conservation de la quantité de mouvement $v + v' = Av_R$, on obtient $v - v' = v_R$. Cela permet d'écrire que $A = \frac{v+v'}{v-v'}$ d'où l'on tire la relation demandée : $\frac{v'}{v} = \frac{A-1}{A+1}$.

11. Si $A \rightarrow \infty$, le neutron heurte un mur ! On s'attend à une réflexion de type loi de DESCARTES avec changement de signe de la vitesse normale au mur qui est ici la vitesse du neutron. On doit trouver $v' = -v$ puisque v' est la norme de la vitesse après le choc. Ensuite, pour $A = 1$, un neutron heurte un neutron au repos. On trouve que $v' = 0$ et $v_R = v$, c'est comme lorsque l'on fait un "carreau" à la pétanque... Le premier neutron s'est immobilisé à l'endroit du choc et le neutron au repos récupère l'intégralité de la vitesse du neutron incident.

12. Il y a une équivoque sur la nature du ralentisseur. Le deutérium est un isotope de l'hydrogène le plus courant qui possède un noyau constitué uniquement d'un proton ${}^1_1\text{H}$ alors que le deutérium est ${}^2_1\text{H} = \text{D}$ parce qu'il possède un noyau constitué d'un proton et d'un neutron. Le dihydrogène est la molécule $\text{H} - \text{H} = \text{H}_2$, par analogie le dideutérium est $\text{D} - \text{D} = \text{D}_2$. Sa masse est alors $4m$ puisque la molécule compte deux protons et deux neutrons ! On raisonnera plutôt pour un choc d'un neutron avec un noyau de deutérium en prenant $A = 2$ comme semble le suggérer l'énoncé. On trouve donc $v' = \frac{1}{3}v$. On prend le deutérium pour avoir un effet important car il est difficile d'avoir à disposition un élément plus petit qu'un nucléon ! En travaillant avec un liquide plus condensé qu'un gaz, la probabilité de choc est fortement augmentée.

13. À chaque collision, on multiplie par $\frac{1}{3}$ la vitesse initiale. On doit donc observer $(\frac{1}{3})^n = \frac{v_f}{v_i}$ si n est le nombre chocs. On passe en log (à base 10). On a donc $n = \frac{\log \frac{v_i}{v_f}}{\log 3} = \frac{4}{\log 3}$. En prenant $\log 3 \simeq \frac{1}{2}$ ce qui revient à considérer que $3^2 \simeq 10$, on peut conclure que $n \simeq 8$. Avec une calculatrice, on trouve $n = 8,4$ ce qui signifie qu'il faut 9 chocs pour être assuré de répondre au ralentissement souhaité.

14. Les trois mécanismes de transferts thermiques sont le rayonnement, la convection et la conduction. La puissance surfacique rayonnée par un corps à la température T est $j_{\text{ray}} = \sigma T^4$. On peut constater qu'elle décroît très vite lorsque la température devient très faible. Mais il ne faut pas oublier que la convection ne peut concerner que les fluides au sein desquels le transfert thermique est réalisé grâce à des mouvements internes du fluide. Si la température devient trop faible, on passe à une phase solide dans laquelle il ne peut plus y avoir de convection.

15. Le solide est la phase la plus condensée du matériau, c'est celle qui assure la plus grande probabilité de chocs. Mais, c'est celle où il y aura le moins de possibilités de refroidissement car le dideutérium n'est sans doute pas un bon conducteur électrique et thermique.

Deuxième étape : élimination des neutrons rapides par un guide

16. Il faut que les vitesses normales sur les parois respectent les conditions $|v_z| < v_c$ et $|v_y| < v_c$. La trajectoire est faite de réflexion totale multiple, voir le schéma de la figure 1.

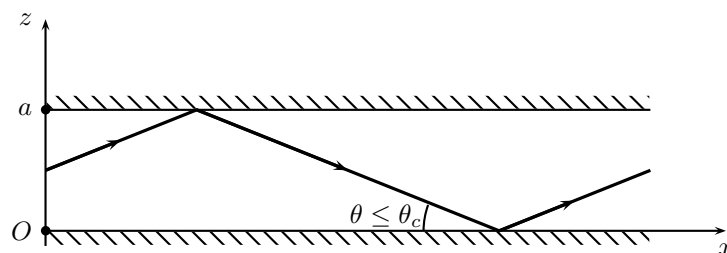


FIGURE 1 – Trajectoire des neutrons sortant du tube

17. Dans le cas précédent, on peut très bien avoir des neutrons très rapides avec $|v_x| \gg |v_z|$ ou $|v_x| \gg |v_y|$. Ces neutrons peuvent traverser si les vitesses v_y et v_z vérifient la condition de la question précédente. En

courbant le tube, il y aura forcément un moment où le neutron heurtera la paroi en nickel.

18. On se reportera au schéma de la figure 2. D'après le théorème de PYTHAGORE appliqué au niveau du point d'impact, on a $(R - z)^2 + x^2 = R^2$. Si on développe, on a $x^2 - 2Rz + z^2 = 0$. On suppose $z \ll R$, on peut simplifier l'expression précédente par z^2 et il vient alors $x = \sqrt{2Rz}$.

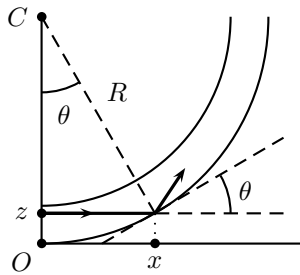


FIGURE 2 – Choc d'un neutron dans le tube courbé

19. On a $\sin \theta = \frac{x}{R}$. Avec l'expression précédente : $\sin \theta = \sqrt{\frac{2z}{R}}$ que l'on peut passer selon $\theta = \arcsin \sqrt{\frac{2z}{R}}$.

20. La vitesse normale à la paroi à l'endroit de l'impact est $v \sin \theta$. Il faut toujours que l'on ait la condition $v_n = v \sin \theta \leq v_c$. On en déduit que : $v \leq v_c \sqrt{\frac{R}{2z}}$.

21. Si le neutron est réfléchi lors de son premier contact avec la paroi, alors il parvient jusqu'à l'extrémité du tube parce qu'au moment où il va à nouveau rencontrer la paroi, il sera toujours sur l'angle θ entre la tangente au cercle et la direction de sa vitesse. On a un triangle isocèle pour les deux côtés partant du centre C. La condition obtenue au premier impact se reproduit à chaque fois, jusqu'à ce que le neutron se trouve à l'extrémité du tube.

22. On aura aussi une réflexion totale pour la position la plus éloignée du bord extérieur du tube à savoir $z = a$ en entrée. On doit donc respecter $v \leq v_c \sqrt{\frac{R}{2a}}$ d'où l'expression de la vitesse demandée $v^* = v_c \sqrt{\frac{2a}{R}}$.

23. On trouve $v^* = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

24. On peut réécrire la condition précédente selon $v \sqrt{\frac{2z}{R}} \leq v^* \sqrt{\frac{2a}{R}}$. On peut encore exprimer cette condition selon $v^2 z \leq v^{*2} a$. Pour une vitesse v donnée, l'abscisse limite est $z_{\text{lim}} = a \left(\frac{v^*}{v} \right)^2$. Il y a répartition homogène des neutrons sur a , on peut donc dire que la probabilité de réflexion pour un neutron est comme le rapport $\frac{z_{\text{lim}}}{a}$. On a donc une loi de probabilité $P = \left(\frac{v^*}{v} \right)^2$. Le tube ne permet pas d'éliminer les neutrons rapides mais la probabilité pour les plus rapides décroît quand même assez rapidement.

25. Le temps de parcours dans le tube doit être très petit de telle sorte que l'influence de la pesanteur ne permette pas de dévier vers le bas d'une hauteur qui se rapproche de la taille a du tube. La durée de parcours dans le tube est de l'ordre de $\frac{R}{v^*}$, l'effet de la pesanteur est du type $\frac{1}{2}g\left(\frac{R}{v^*}\right)^2$ sur la coordonnée verticale. Pour pouvoir négliger la pesanteur, il faut que $\frac{1}{2}g\left(\frac{R}{v^*}\right)^2 \ll a$. On peut en déduire la condition $\frac{R}{v^*} \ll \sqrt{\frac{2a}{g}}$. Si on effectue l'application numérique avec $v^* = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $a = 7 \text{ cm}$, on constate que la condition n'est pas respectée.

Troisième étape : ralentissement par une turbine

26. La trajectoire est une partie de polygone régulier avec d'autant plus de petits côtés que le neutron arrive près du bord inférieur du tube circulaire. La trajectoire peut quasiment être assimilée à un cercle. c'est d'ailleurs un cercle si le neutron est injecté au ras du bord inférieur du tube.

27. La condition de réflexion totale porte sur la vitesse relative du neutron par rapport au tube. À l'entrée de la turbine, la vitesse relative du neutron par rapport à cette turbine est $(v_n - v_t)\vec{e}_x$. À la sortie de la turbine, la vitesse relative est inversée $-(v_n - v_t)\vec{e}_x$. Pour revenir dans le référentiel du laboratoire \mathcal{R}_0 , il suffit d'appliquer une composition des vitesses avec deux référentiels en translation \mathcal{R}_0 et la turbine. On a donc $\vec{v}_{n/\mathcal{R}_0} = \vec{v}_{n/t} + \vec{v}_{t/\mathcal{R}_0}$. On en déduit qu'en sortie de turbine, on a $\vec{v}_{n/\mathcal{R}_0} = (v_t - v_n)\vec{e}_x + v_t\vec{e}_x = (2v_t - v_n)\vec{e}_x$. Cette vitesse sera voisine de zéro lorsque l'on aura $v_t \simeq \frac{1}{2}v_n$.

C. Rebonds gravitationnels et effets quantiques

Étude du mouvement classique

28. Le miroir inverse la vitesse du neutron sans en affecter la valeur puisque le choc est supposé élastique. On peut donc écrire par conservation de l'énergie mécanique entre le moment du début de la remontée et le sommet de la trajectoire où le neutron ne possède plus de vitesse $\frac{1}{2}mv_0^2 = mgH$ d'où la relation $v_0^2 = 2gH$. On peut aussi obtenir cette loi par la cinématique $\ddot{z} = -g$ et $\dot{z} = -gt + v_0$ puisque le mouvement est strictement vertical sous l'effet unique de la pesanteur. On a donc $z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$. Le maximum de la trajectoire s'obtient à la date t_H telle que $\dot{z} = 0$ d'où $t_H = \frac{v_0}{g}$.

29. La durée pour une descente depuis la hauteur H est égale à la durée pour une montée. Par conséquent, on a $T = 2t_H$. On trouve $T = \sqrt{\frac{8H}{g}}$.

30. Le mouvement est toujours dû uniquement à la pesanteur qui agit sur la coordonnée z du neutron. Il n'y a pas de force sur Ox et Oy , la quantité de mouvement dans le plan Oxy se conserve, on a nécessairement $v_x^2 + v_y^2 = \text{Cte}$. Lorsque l'énergie potentielle varie, cela n'est dû qu'à la variation de la vitesse sur v_z . Lorsque le neutron se trouve à la cote z , il parviendra à $z = \delta$ si $\frac{1}{2}mv_z^2 \geq mg(\delta - z)$. On en déduit la condition $|v_z| \geq \sqrt{2g(\delta - z)}$. Si cette condition est vérifiée alors il est absorbé par la plaque supérieure à condition que les plaques soient suffisamment longues pour être sûr que le sommet de la parabole qui donne le mouvement du neutron se trouve avant la sortie du dispositif des deux plaques.

31. Les neutrons qui parviendront au détecteur doivent vérifier une condition pour une altitude z d'injection qui est celle vue avant à savoir $|v_z| \leq \sqrt{2g(\delta - z)}$. On peut traduire cette condition sur le graphique de la figure 3. Comme la répartition des neutrons est homogène aussi bien sur z que sur $|v_z|$, on peut dire que le taux de neutrons arrivant sur le détecteur est proportionnel à la surface grisée sur la figure 3. On va donc calculer l'aire sous la courbe $I = \int |v_z| dz$. On a $I = \sqrt{2g} \int_0^\delta \sqrt{\delta - z} dz = \sqrt{2g} \left[-\frac{2}{3}(\delta - z)^{3/2} \right]_0^\delta$. On trouve $I = \frac{2}{3}\sqrt{2g}\delta^{3/2}$. On peut donc conclure que $\alpha = \frac{3}{2}$.

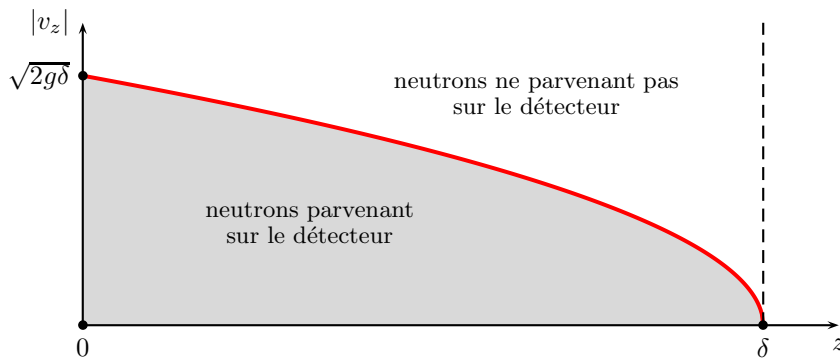


FIGURE 3 – Neutrons arrivant sur le détecteur

Échelles associées aux effets quantiques

32. On sait que \hbar s'exprime en $J \cdot s = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \times s = kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$, que g est en $m \cdot s^{-2}$ et, bien sûr, que m est en kg . Ainsi, on peut voir que $\frac{\hbar}{m}$ est en $m^2 \cdot s^{-1}$. Ainsi $\frac{\hbar^2}{m^2}$ est en $m^4 \cdot s^{-2}$. Si on divise par g , on obtient des m^3 . Cela permet de trouver une longueur caractéristique $L_c = \left(\frac{\hbar^2}{m^2 g} \right)^{1/3}$. On reprend encore $\frac{\hbar}{m}$ en $m^2 \cdot s^{-1}$ et en divisant par g^2 en $m^2 \cdot s^{-4}$, on constate qu'il ne restera que des secondes dans l'expression du résultat. On obtient donc un temps caractéristique donné par $T_c = \left(\frac{\hbar}{mg^2} \right)^{1/3}$. Pour obtenir une vitesse, on fera le rapport de la longueur caractéristique par le temps caractéristique trouvés. On obtient $V_c = \left(\frac{\hbar g}{m} \right)^{1/3}$.

33. On trouve : $L_c = 10^{-5} m$, $T_c = 10^{-3} s$ et $V_c = 10^{-2} m \cdot s^{-1}$.

Étude quantique des rebonds

34. L'énergie potentielle, appelé potentiel en Mécanique quantique, est $V(z) = mgz$. L'équation de SCHRÖDINGER spatiale pour les états stationnaires $\psi(z, t) = \varphi(z) \exp -i \frac{E}{\hbar} t$ est donc $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + mgz \varphi(z) = E \varphi(z)$ que l'on écrira plutôt $\frac{d^2 \varphi}{dz^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - mgz) \varphi(z) = 0$.

35. On voit avec les valeurs numériques précédentes que $V_c \ll v_c$ et que, par conséquent, la condition de réflexion totale est assurée. Le neutron ne peut pas pénétrer dans le miroir en nickel. C'est comme si le potentiel était infini. La probabilité de présence dans le miroir est donc nulle. Par continuité de la fonction d'onde, on peut en déduire $\varphi(z = 0) = 0$.

36. Nous avons que la longueur caractéristique est $L_c \simeq 10 \mu\text{m}$. C'est bien l'échelle caractéristique des variations de la densité de probabilité $|\varphi(z)|^2$.

37. Il est préférable de privilégier une re-démonstration des états stationnaires du puits de potentiel infini avec $V(z) = 0$ pour $0 \leq z \leq L$ et infini ailleurs avec $\varphi(z = 0) = \varphi(z = L) = 0$. Si E est l'énergie du quanton alors l'équation est de la forme $\frac{d^2 \varphi}{dz^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \varphi(z) = 0$ qui est l'équation d'un oscillateur harmonique que l'on résoudra en réels. On a donc $\varphi(z) = A \cos kz + B \sin kz$ avec $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$. Comme $\varphi(z = 0) = 0$, on en déduit que $A = 0$. Puis avec $\varphi(z = L) = 0$, on en déduit que $B \sin kL = 0$. En excluant la solution sans intérêt $B = 0$, il vient la quantification $kL = n\pi$. L'état du quanton est la superposition des différents états quantiques décrits par $\varphi_n(z) = B_n \sin \frac{n\pi z}{L}$. Il y a quantification de l'énergie selon $E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$. La densité de probabilité est donc $|\varphi(z)|^2 = |B_n|^2 \sin^2 \frac{n\pi z}{L}$. Pour le puits infini, il y a une même amplitude pour tous les maxima de la fonction alors que cela n'est pas le cas pour les états stationnaires donnés par l'énoncé. On voit aussi que la régularité de l'annulation de la densité de probabilité ne se retrouve pas tout à fait non plus.

38. Les sauts correspondent à la quantification de l'énergie qui n'existe pas dans le cas classique.

39. Pour $L = 10 \text{ cm}$ et $v_c = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, on a une durée $\Delta t = 0,02 \text{ s}$. Cette durée est grande devant la durée caractéristique $T_c = 0,001 \text{ s}$ puisque $\Delta t \simeq 20 T_c$. Le nombre de rebonds est donc suffisamment grand pour valider le fait que le mouvement vertical peut être considéré comme stationnaire.