L'ARQS

L'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires [1] peut prendre plusieurs aspects en fonction du contexte. D'une façon générale, cela revient à dire que des variations temporelles de certaines grandeurs physiques n'ont pas de conséquences notables. Nous rappelons tout d'abord le système des équations de MAXWELL :

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \qquad \overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

1 ARQS générale

1.1 Temps de propagation

Les champs électrique et magnétique ont pour origine les charges et les courants. Pour le champ électrique, c'est l'équation de MAXWELL-GAUSS à travers la charge volumique ρ qui le montre et pour le champ magnétique c'est la densité volumique de courant $\vec{j}$ dans l'équation de MAXWELL-AMPÈRE. Prenons l'exemple d'un milieu conducteur unidimensionnel présenté à la figure 1. Il est relié à un générateur non représenté qui va faire évoluer la densité volumique de courant à l'abscisse $x = 0$ au cours du temps. Prenons un modèle simple d'évolution harmonique de pulsation ω tel que $\vec{j}(x = 0, t) = j_0 \cos\omega t\,\vec{e}_x$. La question qui se pose maintenant est comment cette évolution de la densité de courant en $x = 0$ va faire évoluer la densité volumique de courant dans le conducteur et en particulier en $x = \ell$ qui marque la fin du conducteur représenté.

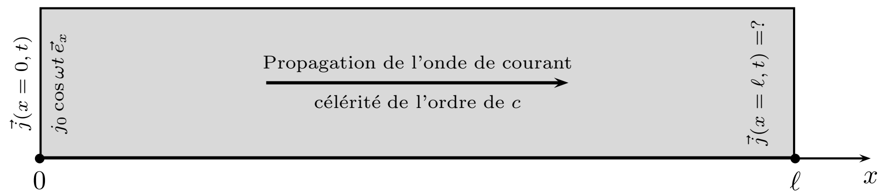

FIGURE 1 – Conducteur soumis à un courant variable

Nous verrons lorsque nous étudierons l'émission d'une onde électromagnétique par un dipôle électrique rayonnant comment l'évolution au cours du temps du courant au sein de cette antenne - en quelque sorte - génère une onde électromagnétique. Dans le vide, cette onde électromagnétique se propage à la vitesse $c \simeq 3\times10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Dans un milieu différent, l'ordre de grandeur de la célérité de propagation reste c. Raisonnons avec c. Le changement de valeur de la densité de courant en $x = 0$ ne peut pas être connu en $x = \ell$ avant que l'onde électromagnétique y parvienne. Ce retard dans l'information est $\Delta t_{prop} = \frac{\ell}{c}$. Il en résulte que, dans un milieu de propagation unidimensionnel idéal, la densité volumique de courant en $x = \ell$ à la date t correspond à celle qui était en $x = 0$ à la date $t - \frac{\ell}{c}$. On a donc :

$$\vec{j}(x = \ell, t) = \vec{j}(x = 0, t - \frac{\ell}{c}) = j_0 \cos\omega(t - \frac{\ell}{c})\,\vec{e}_x = j_0 \cos(\omega t - 2\pi\frac{\Delta t_{prop}}{T})\vec{e}_x$$

Il existe donc un déphasage entre la densité de courant en $x = 0$ et celle en $x = \ell$ de $\varphi = 2\pi\frac{\Delta t_{prop}}{T}$ où T est la période du courant. Si on étudiait complètement le problème électromagnétique à partir des équations de MAXWELL, on chercherait ce que l'on appelle les solutions en potentiels retardés au sens du potentiel électrique V et du potentiel vecteur $\vec{A}$ définis respectivement par $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ et $\vec{B} = \overrightarrow{rot}\,\vec{A}$. Ces potentiels sont dit retardés en raison du retard de propagation Δt_{prop}. On peut remarquer dans la situation évoquée qu'à une date t donnée, les courants dans le conducteur sont différents tous déphasés du retard existant entre le point où ils sont situés et le point $x = 0$. Si on observe le conducteur étudié, on peut le découper en petits éléments de longueur dx et dire qu'on a une suite de conducteurs en série. Il faut donc bien retenir qu'en régime variable, l'intensité est loin d'être la même partout dans un circuit en série ! Ce qui est quelques fois difficile à accepter…

1. On parle indifféremment de l'Approximation des Régimes Quasi Permanents ARQP.

1.2 Caractérisation

Revenons à notre première préoccupation à savoir la caractérisation de l'ARQS. On dit que l'on se situe dans l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires lorsque le déphasage φ calculé avant est négligeable. On écrit, par conséquent, que $\varphi \ll 2\pi$ ce qui revient à écrire que :

$$\Delta t_{prop} \ll T \qquad \text{ou} \qquad \ell \ll cT \qquad \text{ou encore} \qquad \ell \ll \lambda$$

où $\lambda = cT$ est la longueur d'onde de l'onde électromagnétique associée aux variations d'état de la source des courants. Prenons quelques exemples numériques. Commençons par imaginer un fil électrique partant du compteur et allant jusqu'à l'autre bout de la maison où se situe votre lampe de bureau. Peut-on dire qu'à tout instant l'intensité est la même partout dans le fil ? La réponse tient dans l'évaluation de $\lambda = \dfrac{c}{f}$ avec une fréquence $f = 50\,\text{Hz}$. On a donc $\lambda = 6\,000\,\text{km}$. La longueur du fil électrique est, en étant large, $\ell = 20\,\text{m}$. On a donc bien $\ell \ll \lambda$. On est dans l'ARQS sans aucun problème. En TP d'électronique, avec le matériel dont on dispose, on montera jusqu'à $f = 10\,\text{MHz}$ au grand maximum. La longueur d'onde est $\lambda = 30\,\text{m}$, on a encore de la marge puisque la taille du circuit électronique est plutôt $\ell \simeq 10\,\text{cm}$. Ces applications expliquent pourquoi vous avez toujours écrit en régime continu et en régime variable jusqu'à présent que l'intensité dans un circuit série était toujours la même partout. Vous avez toujours travaillé dans l'ARQS sans avoir besoin de tenir compte du retard de propagation. En conclusion, on retiendra la condition :

$$\ell \ll \lambda \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{ARQS générale}$$

1.3 Complément

Lorsque nous effectuerons l'étude du dipôle variable rayonnant une onde électromagnétique, nous établirons l'expression des champs $\vec{E}$ et B dans un contexte où, au contraire de ce que l'on vient de voir, $\ell \gg \lambda$. La durée associée au retard de propagation va être décisive pour déterminer les caractéristiques de l'onde obtenue à grande distance. Nous serons alors dans une zone de l'espace qui sera nommée *zone de rayonnement*. Mais nous aurons aussi l'occasion de voir des expressions des champs rayonnés très générales et de les faire évoluer pour aller dans la zone de l'espace telle $\ell \ll \lambda$. Nous constaterons alors que les expressions de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$ correspondent alors à celles que nous avions rencontrées dans l'étude de l'électrostatique pour le champ $\vec{E}$ et de la magnétostatique pour le champ $\vec{B}$. On dit que logiquement que la zone de l'espace telle que $\ell \ll \lambda$ est la *zone statique*.

2 Approche dimensionnelle des équations de Maxwell

Nous considérons les valeurs des champs E et B associées à $\vec{E}$ et à $\vec{B}$. Nous considérons, du fait du couplage entre les champs dans le système des équations de MAXWELL, qu'ils possèdent la même longueur caractéristique d'évolution dans l'espace L et la même durée caractéristique d'évolution au cours du temps τ. Le système des équations de MAXWELL peut donc évoluer de :

$$\begin{aligned}
&\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
&\text{div}\,\vec{B} = 0 \qquad \overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)
\end{aligned}$$

au système suivant :

$$\begin{aligned}
&\frac{E}{L} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \frac{E}{L^\star} = \frac{B}{\tau} \\
&(\text{div}\,\vec{B} = 0) \qquad \frac{B}{L^\star} = \mu_0\left(j + \varepsilon_0 \frac{E}{\tau}\right)
\end{aligned}$$

On note $L^\star$ la longueur caractéristique de la prise du rotationnel. Cette longueur caractéristique est la conséquence du fait que tous les termes du rotationnel sont des différences de deux dérivées du type $\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y}$ que l'on peut décrire par $B\left|\frac{1}{L_1} - \frac{1}{L_2}\right| = \frac{B}{L^\star}$ où L_1 et L_2 relèvent du même ordre de grandeur que L. Par conséquent, $L^\star \geq L$. L'équation approchée $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ ne peut être traitée d'une façon aussi simplifiée puisqu'elle exprime une propriété structurelle du champ magnétique qui est universelle, mais cela ne nous sera pas utile. Si on utilise la version simplifiée de l'équation de Maxwell-Gauss, on peut écrire que $\varepsilon_0 E = \rho L$. Remplaçons dans l'équation de Maxwell-Ampère, on obtient :

$$\frac{B}{L^\star} = \mu_0\left(j + \rho\frac{L}{\tau}\right)$$

Intéressons-nous à la parenthèse, on a $j + \rho\frac{L}{\tau}$. On constate que, sur le plan dimensionnel, $\frac{L}{\tau}$ est une vitesse, ce qui est rassurant puisque nous savons que la densité volumique de courant est la charge volumique associée aux porteurs de charges mobiles multipliée par la vitesse de ces mêmes porteurs de charge. Notons la vitesse $v = L/\tau$. On peut réécrire l'équation de Maxwell-Ampère selon :

$$\frac{B}{L^\star} = \mu_0\,(j + \rho\, v)$$

On pourra observer que si l'on a affaire à une onde électromagnétique dans le vide ou dans un milieu où la célérité est du même ordre alors $v = c$ puisque $L \equiv \lambda$ et $\tau \equiv T$. Nous avons finalement le système :

$$\frac{E}{L} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad E = \frac{L\star}{\tau}\,B$$

$$(\mathrm{div}\,\vec{B} = 0) \qquad \frac{B}{L^\star} = \mu_0\,(j + \rho\, v)$$

Dans la suite, nous allons discuter de l'influence des courants par rapport à l'influence des charges dans la production des champs. En fait, en tant que sources, les courants interviennent par j et les charges par ρ pour le champ électrique et par le terme ρv pour le champ magnétique. La comparaison des termes j et ρv est discutée ensuite.

3 ARQS magnétique

3.1 Discussion

Si on suppose que les courants dominent les charges alors on a $j \gg \rho v$. Cette situation est extrêmement fréquente parce que nous utilisons très souvent de bons conducteurs métalliques. Dans ceux-ci - et nous en verrons la justification plus tard - on a une neutralité locale quasiment assurée en permanence. Écrire $\rho \simeq 0$ est très assuré. La condition $j \gg \rho v$ est aisée. Cela revient à écrire que :

$$\frac{B}{L^\star} = \mu_0\, j \qquad \text{équivalent} \qquad \overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j}$$

Au regard de cette équation, on peut considérer que tout se passe comme si le champ magnétique était créé par un courant indépendant du temps alors que $\vec{j} = \vec{j}(t)$. C'est pour cette raison que l'approximation des régimes quasi stationnaires décrite est dite magnétique. Reprenons le système d'équations donnant les équations de Maxwell. Du fait de la situation $\rho \simeq 0$, on considère que $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$. Cette équation de Maxwell montre qu'elle structure la forme du champ électrique dans l'espace mais qu'il n'est pas possible de l'utiliser pour comprendre l'origine du champ électrique. L'origine du champ électrique est uniquement reliée aux variations temporelles du champ magnétique comme le montre l'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$.

3.2 Conclusion

L'équation qui structure le champ magnétique $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ n'est pas remise en cause. Résumons ensuite la situation de l'ARQS magnétique : des courants variables représentés par $\vec{j}(t)$ sont à l'origine de la création d'un champ magnétique $\vec{B}(t)$ calculé par les lois de la magnétostatique. Les variations de ce champ magnétique au cours du temps sont responsables de l'existence d'un champ électrique. Ce champ électrique est à l'origine du phénomène d'induction électromagnétique puisqu'il en résultera une tension électrique dans un circuit non nécessairement muni d'un générateur traditionnel. C'est cette tension qui est appelée *force électromotrice* induite ou *fem*.

$$\text{ARQS magnétique} \begin{cases} \operatorname{div}\vec{E}(t) = 0 \quad \overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \\ \\ \operatorname{div}\vec{B}(t) = 0 \quad \overrightarrow{rot}\,\vec{B}(t) = \mu_0\,\vec{j}(t) \end{cases}$$

L'ARQS magnétique est tout à fait dédiée à l'étude de l'électricité domestique et industrielle y compris pour les phénomènes d'induction. Les forces magnétiques dominent les forces électriques. L'énergie magnétique domine l'énergie électrique.

4 ARQS électrique

4.1 Discussion

L'ARQS électrique[2] consiste à se placer dans le contexte où les charges prennent le pas sur les courants dans la création des champs. Par rapport à la situation précédente, il s'agit d'examiner le cas où $\rho\, v \gg j$. Cela se produit facilement dans les isolants où $j \simeq 0$ alors qu'ils peuvent présenter une charge locale ρ non nulle. Dans ces conditions, l'équation de Maxwell-Ampère se limite au terme où intervient la dérivée temporelle du champ électrique traduite ici par :

$$\frac{B}{L^\star} = \mu_0\varepsilon_0\frac{E}{\tau} \qquad \text{équivalent} \qquad \overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On en déduit que $E = \dfrac{c^2\tau}{L^\star}B$ que l'on peut encore écrire $\dfrac{E}{L^\star} = \dfrac{c^2\tau^2}{L^{\star\,2}}\dfrac{B}{\tau}$. L'équation de Maxwell-Faraday est traduite par $\dfrac{E}{L^\star} = \dfrac{B}{\tau}$. La compatibilité entre ces deux équations n'est pas assurée en général sauf si $\dfrac{E}{L^\star} \to 0$. Cela a d'autant plus de chances de se produire que $L^\star \gg L$ ce qui signifie $L_1 \simeq L_2$ dans les prises de rotationnel. C'est ce cas de figure qui caractérise l'ARQS électrique pour laquelle on retient donc $\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \vec{0}$.

4.2 Conclusion

L'équation qui structure le champ magnétique n'est pas remise en cause $\operatorname{div}\vec{B} = 0$. Résumons ensuite la situation de l'ARQS électrique : des charges variables au cours du temps sont à l'origine de la création d'un champ électrique $\vec{E}(t)$ par l'équation $\operatorname{div}\vec{E} = \rho(t)/\varepsilon_0$. Les variations du champ électrique au cours du temps sont les seules responsables de la création d'un champ magnétique.

$$\text{ARQS électrique} \begin{cases} \operatorname{div}\vec{E}(t) = \dfrac{\rho(t)}{\varepsilon_0} \quad \overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \vec{0} \\ \\ \operatorname{div}\vec{B}(t) = 0 \qquad \overrightarrow{rot}\,\vec{B}(t) = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} \end{cases}$$

L'ARQS électrique est particulièrement dédiée à l'étude des condensateurs puisqu'entre les deux armatures conductrices de ceux-ci, on trouve un isolant. La densité de courant y est nulle. Ce sont les variations des charges accumulées au niveau des deux armatures conductrices qui vont créer un champ électrique variable au cours du temps, lui-même responsable d'un champ magnétique comme nous le verrons de façon concrète ultérieurement dans le cadre de l'étude électromagnétique en régime lentement variable des condensateurs. Les forces électriques dominent les forces magnétiques. L'énergie électrique domine l'énergie magnétique.

2. Cette approximation est hors programme mais...