

Exercices : 02 – Analyse de Fourier.

A. Signaux périodiques et séries de Fourier

1. Multiplication par un signal créneau

1. Rappeler les expressions des fréquences et des amplitudes des cinq premières harmoniques d'un signal créneau de fréquence f_0 .

On réalise le produit de ce signal par le signal $s(t) = A(1 + \cos \omega t)$.

2. Quel est alors le spectre du signal obtenu ?

2. Vibration quasi-monochromatique

On réalise la somme de trois vibrations monochromatiques $\underline{V}_0(t)$ d'amplitude A_0 et de fréquence f_0 , $\underline{V}_1(t)$ d'amplitude $A_0/2$ et de fréquence $f_0 - \Delta f/2$ et $\underline{V}_2(t)$ d'amplitude $A_0/2$ et de fréquence $f_0 + \Delta f/2$.

1. Exprimer $\underline{V}(t)$ en fonction de A_0 , f_0 et Δf .
2. Montrer que cette vibration peut être assimilée à une vibration quasi-monochromatique dans un cas que l'on précisera.

3. Non linéarité d'un amplificateur

Un amplificateur linéaire est mis en défaut lorsque l'amplitude du signal d'entrée est trop élevée. Dans ce cas-là, il se comporte de façon non linéaire et fournit une tension de sortie qui suit la relation ci-dessous en fonction de la tension d'entrée :

$$s(t) = A + Be(t) + Ce^2(t) + De^3(t)$$

On dispose en entrée une tension sinusoïdale de fréquence f_0 et d'amplitude assez élevée.

1. Représenter une allure réaliste du spectre de fréquence du signal de sortie.
On utilise maintenant en entrée un signal non monochromatique de fréquence centrale f_0 et de largeur Δf .
2. Représenter une allure réaliste du spectre de fréquence du signal d'entrée. Même question pour le signal de sortie.

4. Effet d'un filtre passe-bande

On considère un filtre passe-bande de fréquence centrale $f_0 = 1200$ Hz, de facteur de qualité $Q = 20$ et de gain maximum $H_0 = 1$.

1. Donner la forme canonique de la fonction de transfert d'un tel filtre. Tracer l'allure de $H(f)$ et indiquer s'il vous paraît sélectif ou non.
2. On envoie en entrée de ce filtre un signal sinusoïdal de fréquence réglable f_e . Pour quelles valeurs de la fréquence f_e a-t-on en sortie un signal non négligeable ? Pour quelle valeur de f_e le signal de sortie est-il maximal ?
3. Pour la suite de l'exercice, on pourra considérer que $Q \rightarrow \infty$. Quelle est la conséquence de cette hypothèse ?
4. On envoie maintenant en entrée du filtre un signal modulé en amplitude dont la forme correspond à la multiplication des deux signaux $\beta_e \cos(2\pi f_e t + \varphi_e)$ et $\alpha_m + \beta_m \cos(2\pi f_m t + \varphi_m)$ avec $f_m < f_e$. Déterminer les valeurs de f_e et f_m qui permettent d'obtenir en sortie du filtre un signal non négligeable.
5. On utilise un signal créneau périodique de fréquence $f_e = 1200$ Hz. Y a-t-il en sortie un signal ? Si oui, donner la nature de ce signal ?
6. Le signal créneau périodique précédent est de fréquence f_e réglable par valeurs entières de 40 Hz à 2400 Hz. Quelles sont les valeurs de la fréquence f_e qui permettent d'obtenir en sortie un signal non négligeable ? On précisera la forme du signal obtenu en sortie du filtre.
7. Même question s'il l'on opère avec un signal en dents de scie.

5. Filtrage d'une tension créneau dissymétrique

On considère le circuit de la figure 1. Ce dernier est alimenté par une tension créneau de rapport cyclique α compris d'une façon générale entre 0 et 1.

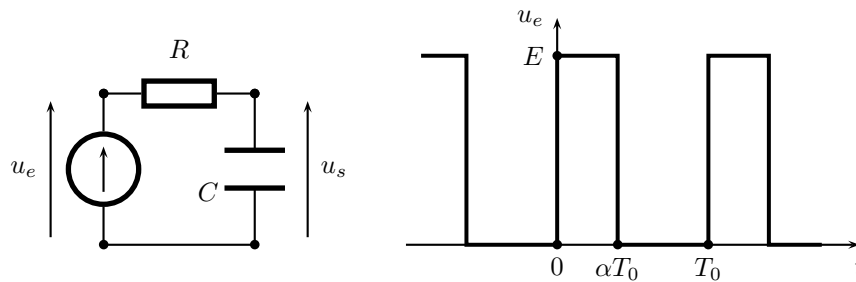


FIGURE 1 – Filtrage d'un créneau non symétrique

1. La tension maximale du créneau est $E = 12 \text{ V}$. Le rapport cyclique est $\alpha = 1/3$. Calculer la moyenne du signal que l'on note u_e^{moy} .
2. La fréquence de la tension u_e est $f_0 = 50 \text{ Hz}$. Quelle est la valeur de la période T_0 de cette même tension ?

On peut montrer que la tension $u_e(t)$ peut être décrite au moyen d'une série de FOURIER qui prend la forme suivante :

$$u_e(t) = u_e^{moy} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)) \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*$$

On rappelle que l'on peut calculer les coefficients a_n et b_n de la série de FOURIER en utilisant les intégrales suivantes :

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} u_e(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} u_e(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt$$

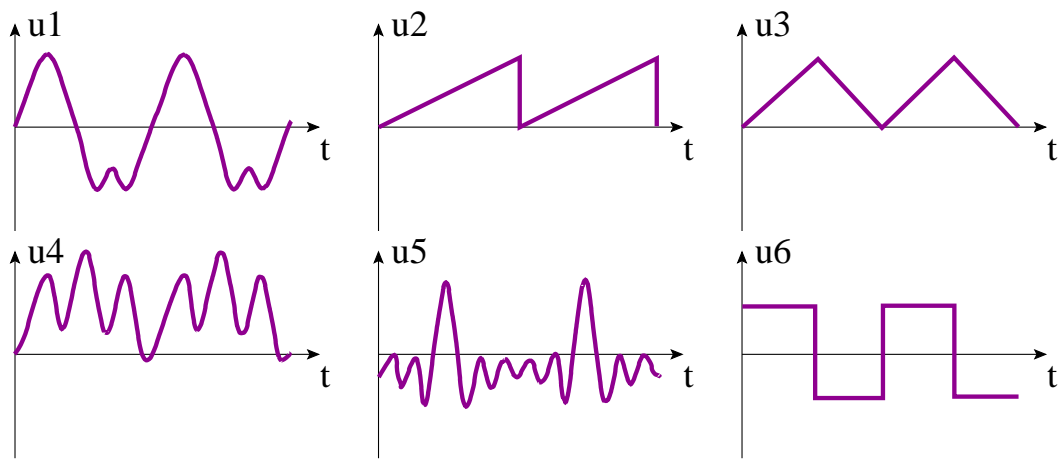
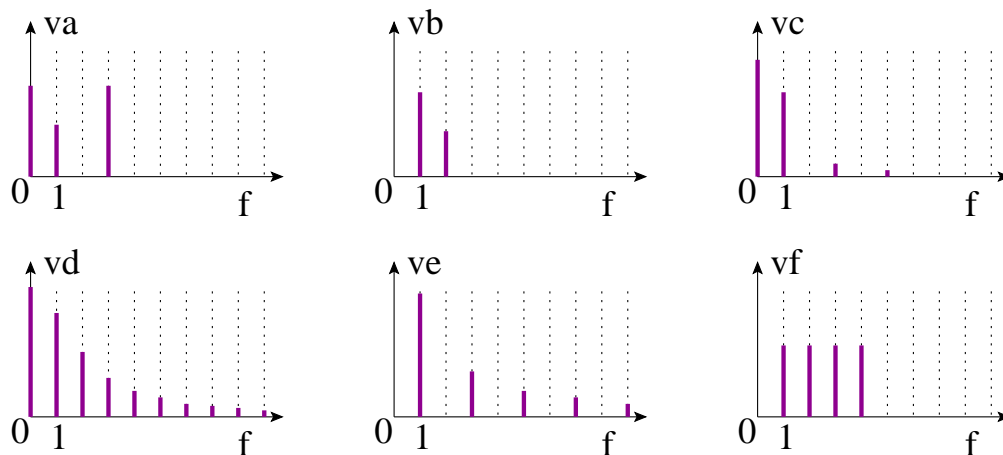
où t_0 est une date que l'on peut choisir arbitrairement.

3. Montrer que $a_n = \frac{E}{n\pi} \sin(n2\pi\alpha)$ et que $b_n = \frac{E}{n\pi} (1 - \cos(n2\pi\alpha))$.
4. Tracer rapidement l'allure du spectre de $u_e(t)$ pour les fréquences comprises entre $f = 0$ et $f = 400 \text{ Hz}$. Commenter.
5. Donner l'expression de la fonction de transfert complexe $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e}$. Déterminer la nature du filtre et l'expression de sa fréquence de coupure notée f_c .
6. Déterminer la valeur de la résistance R lorsque l'on utilise un condensateur de capacité $C = 1 \mu\text{F}$ et que la fréquence de coupure est $f_c = 10 \text{ Hz}$.
7. On envoie la tension $u_e(t)$ à l'entrée du filtre de la figure 1 qui possède la fréquence de coupure $f_c = 10 \text{ Hz}$. Proposer un tracé de $u_s(t)$ en expliquant de façon détaillée.
8. On change la nature du filtre pour passer à un filtre passe-bande du second ordre. Comment peut-on réaliser un tel filtre ? Que peut-on déduire du fait que son facteur de qualité Q est élevé ?
9. On envoie la tension $u_e(t)$ dans le filtre passe-bande de facteur de qualité élevé évoqué à la question précédente. Quelle est l'allure de $u_s(t)$ lorsque la fréquence centrale du filtre est de 100 Hz ? Même question lorsqu'elle vaut 150 Hz ?

6. Associer un signal et un spectre

On a enregistré les spectres de différents signaux sur les figures 2 et 3. Sur la figure 4, on a représenté le spectre du signal vd une fois qu'il est ressorti après avoir traversé trois filtres différents.

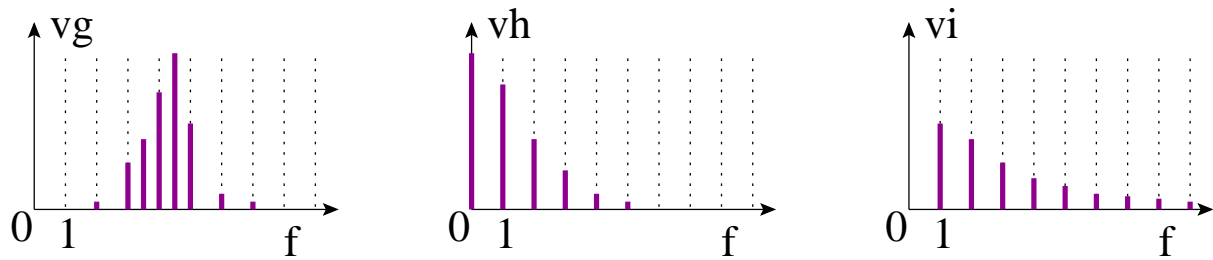
1. Attribuer à chaque tension u_i le spectre vx qui lui revient.
2. Déterminer les caractéristiques de chacun des filtres utilisés pour obtenir les spectres vg , vh et vi .

FIGURE 2 – Tensions u_i en fonction du tempsFIGURE 3 – Spectres des tensions u_i en échelle de fréquence avec comme unité 1 kHz

7. Détection de signaux micro-ondes

Un signal reçu par une antenne dans le domaine hyperfréquence est assimilé à une onde sinusoïdale d'amplitude A et de fréquence f . On désire déterminer son amplitude, qui est supposée contenir l'information utile, en sachant que la phase à l'origine n'est pas stable, ce qui empêche de recourir aux procédés usuels comme la détection synchrone.

1. Montrer, par un examen spectral, qu'il est vain de chercher à mesurer directement A par obtention d'un signal constant par simple filtrage linéaire.
2. On utilise un composant à base de jonctions semi-conductrices réalisant un opérateur dont la relation entrée-sortie est du type suivant (en unités arbitraires) : la sortie est égale à l'entrée lorsqu'elle est positive et, sinon, elle est nulle.
3. Représenter sur un même graphe le signal d'entrée et le signal de sortie, en considérant la phase à l'origine du signal reçu comme une constante, de valeur quelconque (on omet ses fluctuations). Justifier le qualificatif de *redresseur simple* donné à l'opérateur.
4. Déterminer les fréquences des trois premières raies spectrales du signal sortant de l'opérateur. À quoi voit-on que cet opérateur est non linéaire ?
5. Quel type de filtre permet, à partir du signal de sortie, de récupérer un signal constant D dont la valeur est proportionnelle à A ? Préciser la constante de proportionnalité D/A caractérisant la sensibilité du détecteur, en considérant que le gain du filtre est égal à l'unité pour la composante utile.
6. On préfère généralement utiliser un opérateur, appelé *redresseur bi-alternance*, dont la caractéristique est la suivante (en unités arbitraires) : la sortie est la valeur absolue de l'entrée.
7. Les raies spectrales du signal obtenu sont-elles situées aux mêmes fréquences que celles obtenues précédemment ?
8. On place un filtre de même type que celui proposé précédemment. Indiquer quels avantages l'opérateur redresseur bi-alternance présente par rapport au redresseur simple.

FIGURE 4 – Spectres de vd après filtrage en échelle de fréquence avec comme unité 1 kHz

9. Préciser la nouvelle constante de proportionnalité D'/A , où D' est la valeur du signal sortant du filtre.

8. Étude d'un filtre passif

On réalise le circuit de la figure 5 avec les valeurs $R = 50 \text{ k}\Omega$ et $C = 3,2 \text{ nF}$.

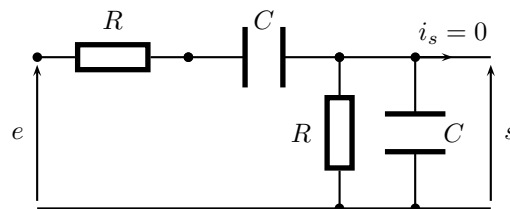


FIGURE 5 – Filtre passif

1. Quel est le comportement asymptotique du circuit ?
2. Déterminer la fonction de transfert du montage. Vérifier les comportements asymptotiques obtenus à la question précédentes.
3. Donner les fréquences de coupure de ce filtre. Définir un facteur de qualité et donner sa valeur.
4. Tracer le diagramme de BODE asymptotique.
5. Donner les signaux en sortie quand on applique à l'entrée de ce filtre les signaux suivants :
 - (a) $e_1(t) = 2 \sin 2\pi ft$ en V avec $f = 1000 \text{ Hz}$
 - (b) $e_2(t) = \cos^2 \omega t$ en V avec $\omega = 30 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
 - (c) $e_3(t) = 4 \text{ V}$ si $nT < t < (n + 1/2)T$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $T = 1 \text{ ms}$ et $e_3 = 0$ sinon. Son développement de FOURIER est (en V) :

$$e_3(t) = 2 + \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin 2\pi(2n+1)ft$$

9. Moteur alimenté en courant redressé

Un moteur à courant continu est modélisé par une résistance $r = 5 \Omega$ en série avec une bobine d'inductance propre $L = 0,6 \text{ H}$. L'ensemble est alimenté par un signal redressé $u(t) = \max(0, E_0 \sin \omega t)$ avec $E_0 = 24 \text{ V}$ et $f = \frac{\omega}{2\pi} = 50 \text{ Hz}$.

1. Déterminer l'allure du courant $i(t)$ qui parcourt le moteur.
2. Évaluer rapidement la puissance moyenne P consommée par le moteur.

On rappelle le développement en série de Fourier du signal monoalternance :

$$u(t) = E_0 \left[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin 2\pi ft - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos 2n2\pi ft \right]$$

10. Développement en série de Fourier d'un champ magnétique

Dans un dispositif de freins à courants de Foucault équipant les poids-lourds ou les bus, un champ magnétique permanent est créé par une structure périodique d'aimants permanents. Le champ magnétique produit est de la forme :

$$\vec{B} = B_x(x, z)\vec{e}_x + B_z(x, z)\vec{e}_z$$

où $B_x(x, z)$ est une fonction paire en x et impaire en z et $B_z(x, z)$ impaire en x et paire en z . Étant donné la périodicité de la distribution des aimants, les composantes du champ magnétique peuvent être développées en série de Fourier :

$$B_x(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{x,max}^{(n)}(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{\lambda} z\right) \quad B_z(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{z,max}^{(n)}(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{\lambda} z\right)$$

1. Le champ magnétique étant supposé dû aux seuls aimants, il obéit à :

$$\Delta B_x = 0 \quad \text{et} \quad \Delta B_z = 0$$

L'opérateur Δ se lit laplacien (scalaire ici). Trouver les équations différentielles vérifiées par $B_{x,max}^{(n)}$ et $B_{z,max}^{(n)}$. On s'aidera du formulaire.

2. En tenant compte des hypothèses de parité fournies, proposer une solution pour chaque terme.
3. Comme nous le verrons plus tard, tout champ magnétique possède une divergence nulle :

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

Montrer qu'alors les expressions de $B_x(x, z)$ et de $B_z(x, z)$ s'écrivent en fonction d'une seule série de coefficients A_n .

4. Le champ magnétique existant en $x = x_0/2$ est décrit par le graphique de la figure 6.

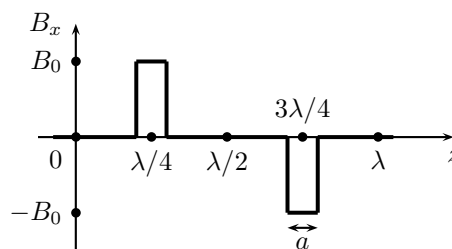


FIGURE 6 – Évolution spatiale du champ magnétique

Déterminer les coefficients A_n ainsi que les expressions complètes des composantes du champ magnétique.

B. Signaux quelconques et intégrales de Fourier

11. Pression et largeur de raie

L'analyse du mécanisme de l'émission lumineuse par les atomes doit tenir compte des collisions entre ceux-ci. La vibration lumineuse aura donc une expression en fonction du temps où interviendra la durée moyenne τ qui s'écoule entre deux chocs. Il est à relever que cette durée est fonction décroissante de la pression qui règne au sein de la source lumineuse. La vibration réelle qu'on obtient en tenant compte des chocs a pour expression pour $t \geq 0$:

$$V(t) = A_0 \exp(-t/\tau) \cos 2\pi f_0 t$$

1. Représenter l'allure de la fonction $V(t)$.
2. Quel est le spectre $\underline{V}(f)$ de cette vibration ?
3. En déduire l'intensité spectrale qui est proportionnelle au carré du module de ce spectre.
4. Trouver la relation entre la durée τ et la largeur à mi-hauteur $\Delta f_{1/2}$ de cette intensité. Conclure quant à l'influence de la pression.

12. Effet Doppler et largeur de raie

Lorsqu'on veut tenir compte du mouvement des atomes à l'intérieur de la source lumineuse, il faut proposer une autre forme pour la vibration. En effet, un atome qui s'éloigne du récepteur ne sera pas perçu avec la même fréquence qu'un atome qui se rapproche : c'est l'effet Doppler (on le perçoit souvent pour les ondes sonores lorsque la sirène d'un train ou d'une ambulance se rapproche puis s'éloigne de nous). La vibration réelle qu'on obtient a pour expression :

$$V(t) = A_0 \exp(-t^2/\tau^2) \cos 2\pi f_0 t \quad -\infty < t < \infty$$

1. Représenter l'allure de la fonction $V(t)$.
 2. Quel est le spectre $\underline{V}(f)$ de cette vibration ?
 3. En déduire l'intensité spectrale qui est proportionnelle au carré du module de ce spectre.
 4. Trouver la relation entre la durée τ et la largeur à mi-hauteur $\Delta f_{1/2}$ de cette intensité. Conclure quant à l'influence de l'effet Doppler.
- On donne l'intégrale suivante fonction de z complexe : $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z^2) dz = \sqrt{\pi}$.

13. Spectre de Fourier d'une source lumineuse

Une source lumineuse émet des signaux dont le champ électrique $E(t)$ est quasiment sinusoïdal, de pulsation ω_0 . On se propose ici de décrire des écarts au caractère idéalement sinusoïdal du signal émis, en calculant le spectre de Fourier du signal $E(t)$; ce spectre est défini par la transformée de Fourier $\hat{E}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t=-\infty}^{\infty} E(t) \exp(-j\omega t) dt$.

La représentation du spectre de Fourier consiste en le double tracé des parties réelle et imaginaire de $\hat{E}(\omega)$.

1. Dans une première modélisation, la source lumineuse émet des trains d'onde de durée finie, le champ électrique ayant la forme proposée sur la figure 7 : il s'agit d'ondes sinusoïdales limitées à un nombre entier N de périodes.

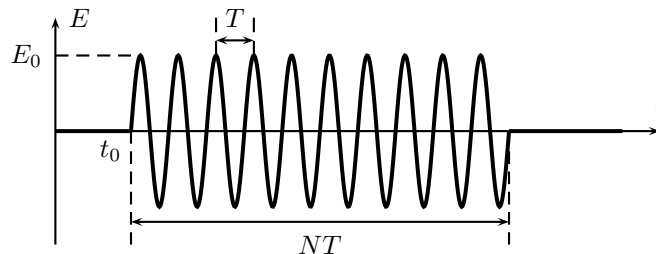


FIGURE 7 – Trains d'onde

Déterminer le spectre de Fourier en pulsation de ce signal. On posera $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ et $\Delta t = NT$.

2. Dans un second modèle, chaque train d'ondes est un signal sinusoïdal modulé par une enveloppe gaussienne, et on le décrira par l'expression $E(t) = E_0 \cos(\omega_0 t) \exp\left(-\frac{(t-t_0)^2}{\Delta t^2}\right)$ avec $\omega_0 \Delta t \gg 1$. Même question.

On donne : $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\alpha u - \beta u^2) du = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4\beta}\right)$.

14. Régime impulsionnel

On étudie un filtre de fonction de transfert $\bar{H} = \frac{\bar{u}_s}{\bar{u}_e} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$ avec $Q \gg 1$.

1. Dans le cas où $u_e = 0$, montrer que la forme générale de la tension de sortie peut s'écrire, moyennant une approximation que l'on précisera, $u_s = (A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t) \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right)$.
2. À l'instant t_0 , la tension d'entrée présente une discontinuité $u_e(t_0^+) - u_e(t_0^-) = \Delta E$. Montrer que u_s est alors continue mais que sa dérivée présente une discontinuité $\frac{du_s}{dt}(t_0^+) - \frac{du_s}{dt}(t_0^-) = \frac{\omega_0}{Q} \Delta E$.
3. La tension d'entrée est maintenant un créneau d'amplitude E_0 et de durée θ inférieure à π/ω_0 (voir la figure 8).

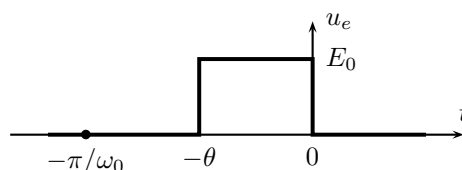


FIGURE 8 – Régime impulsionnel

Pour t compris entre $-\theta$ et 0, montrer que l'on peut négliger le terme d'atténuation exponentielle dans $u_s(t)$. Préciser, dans cette approximation, $u_s(t)$ en fonction de E_0 , ω_0 , Q et $t' = t + \theta$.

Déterminer u_s et sa dérivée à l'instant $t = 0^+$. Pour la suite, on admettra que, pour $t > 0$, la résolution de l'équation donnant u_s mène à $u_s(t) = \frac{2E_0}{Q} \sin \frac{\omega_0 \theta}{2} \cos \left(\omega_0 t + \frac{\omega_0 \theta}{2} \right) \exp \left(-\frac{\omega_0 t}{2Q} \right)$.

4. Dans le cas où $\theta \rightarrow 0$ pendant que $\theta \times E_0$ reste constant, $u_s(t)$ se met, pour $t > 0$, sous la forme $u_s(t) = \theta E_0 s_i(t)$, où s_i est la réponse du filtre à une impulsion unitaire. Exprimer $s_i(t)$ en fonction de t , ω_0 et Q . On étend ensuite s_i en posant $s_i(t) = 0$ si $t < 0$.
5. Expliquer pourquoi la solution générale u_s s'écrit $u_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_e(t_0) s_i(t - t_0) dt_0$. En déduire, sans calcul, la valeur de $\left[\exp(-j\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\omega t_0) s_i(t - t_0) dt_0 \right]$.

15. Diffusion thermique et transformée de Fourier

Dans un phénomène de d'élévation de température d'un corps, on peut montrer que la solution de l'équation de diffusion thermique unidimensionnelle en z peut s'écrire selon :

$$T(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \exp(ikz - k^2 ht) dk$$

si l'on suppose que k peut prendre continûment une infinité de valeurs. On note $T(z, 0) = T_0(z)$ la valeur de $T(z, t)$ à la date $t = 0$.

1. En utilisant la définition de la transformée de Fourier, montrer que :

$$T(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T_0(z') \sqrt{\frac{\pi}{ht}} \exp - \left[\frac{(z - z')^2}{4ht} \right] dz'$$

sachant qu'on donne l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ik\mu - k^2 \gamma) dk = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} \exp - \left[\frac{\mu^2}{4\gamma} \right]$$

2. A l'instant initial, le plan $z = 0$ est porté à haute température. Cette distribution d'un contenu calorifique fini appliqué de façon discontinue en $z = 0$, s'exprime proportionnellement à la distribution de Dirac $\delta(z)$ dont il suffit de savoir qu'elle est définie par :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(z) f(z) dz = f(0)$$

On posera donc $T_0(z) = \theta_0 \delta(z)$ où θ_0 est une constante. Donner l'expression de $T(z, t)$ et représenter l'allure de cette distribution de température $T(z)$ à deux instants différents. Interpréter le graphique physiquement pour la propagation de l'énergie selon z .