

TP : Signal dans un câble coaxial.

Le câble coaxial a été inventé dans la première moitié du XX^e siècle. Son intérêt fondamental est le fait que le signal qui le parcourt n'est pas influencé par l'environnement électromagnétique extérieur et que le signal n'est pas responsable d'une émission à l'extérieur. Le câble coaxial est très utilisé pour le câblage des antennes qu'elles soient émettrices ou réceptrices comme les antennes radio, télévision. On l'utilise beaucoup aussi pour la transmission de données dans le domaine du son ou de l'image. Toutefois, la fibre optique est préférée pour des transmissions à longues distances lorsque les distances sont de l'ordre du kilomètre ou bien au-delà. Le câble coaxial est caractérisé par une impédance caractéristique souvent de $75\,\Omega$ ou de $50\,\Omega$. Son atténuation est exprimée en décibel par unité de longueur, elle est de l'ordre de $10\,\text{dB km}^{-1}$. Le fibre optique possède une atténuation beaucoup plus faible de l'ordre de $0,1\,\text{dB km}^{-1}$. Même s'il existe de grandes différences entre une fibre optique et un câble coaxial, l'étude du câble n'est pas sans intérêt car elle est, en partie, transposable à la fibre.

1 Objectifs

Dans ce TP, nous effectuerons les mesures des deux principales caractéristiques du câble : la vitesse de propagation de l'information (vitesse de groupe) et le coefficient d'atténuation. Nous étudierons aussi les phénomènes de réflexion liés à un changement de nature du milieu de propagation réalisé par le branchement d'une résistance en bout de câble. Cette question nous fera étudier la question de l'adaptation d'impédance. Nous verrons aussi que certaines résistances de bout de câble favorisent la réflexion du signal envoyé dans le câble. Cette situation est propice à la formation d'un système d'ondes stationnaires dans le câble que nous caractériserons.

2 Matériel

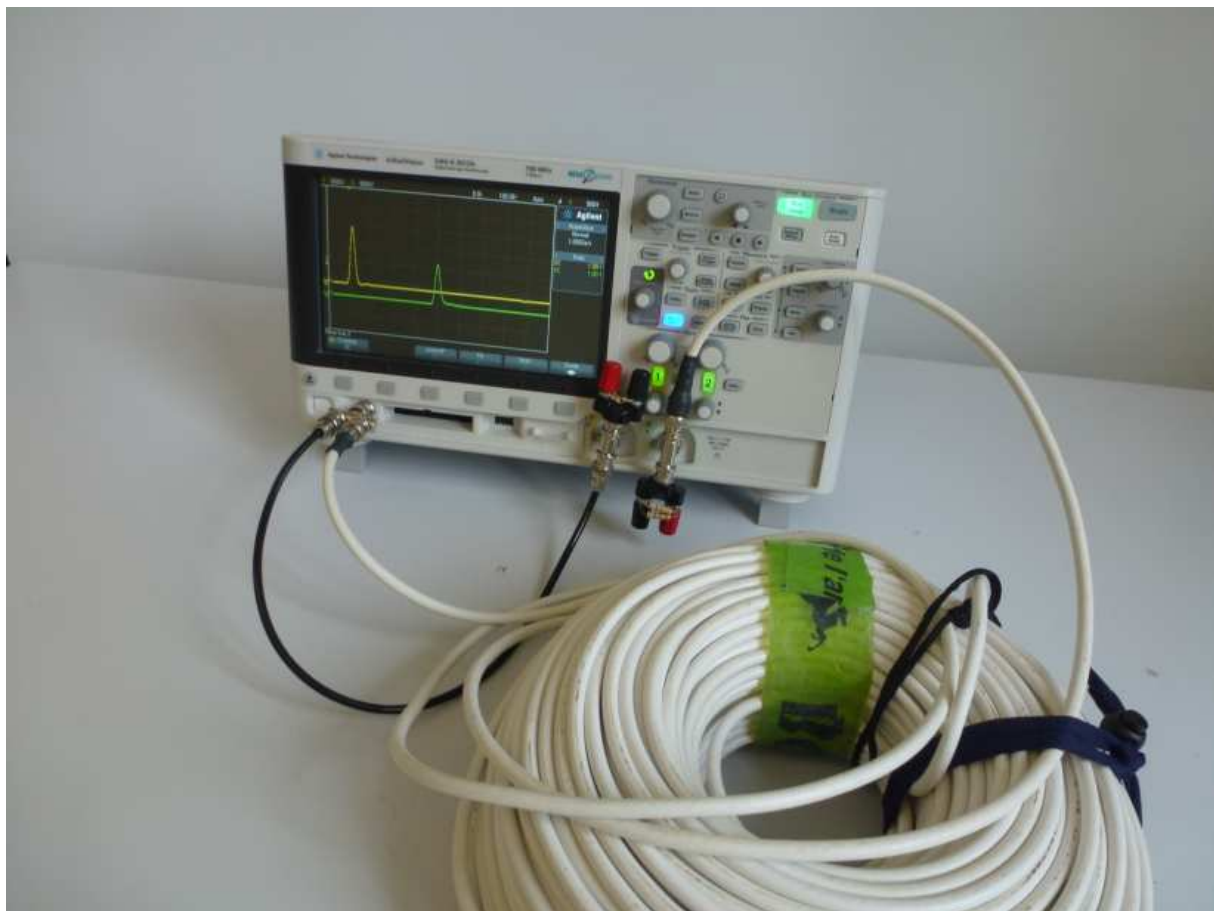


FIGURE 1 – Mesure de la vitesse de propagation de l'information

Le matériel utilisé sera uniquement constitué d'un oscilloscope *Agilent DSOX-2002A* et d'un câble coaxial d'impédance caractéristique $R_c = 75\,\Omega$ de longueur $L = 100\,\text{m}$, ce câble pourra être remplacé par un câble noir

de 100 m et d'impédance caractéristique 50Ω . En effet, l'oscilloscope possède un générateur de signaux intégré très adapté à notre étude. Le reste du matériel sera constitué de connecteurs, de résistances de bout de câble, d'un petit câble coaxial de 50 cm de long permettant de relier la sortie du générateur de signaux à l'oscilloscope. Ce câble coaxial possède une impédance caractéristique de 50Ω comme tous les câbles dans le domaine de l'instrumentation scientifique. Sur la photographie de la figure 1, on peut voir l'oscilloscope utilisé en tant que générateur mais aussi utilisé dans sa fonction traditionnelle de visualisation de tensions. Ce générateur permet de réaliser des impulsions électriques très fines atteignant une durée de 20 ns. Pour faciliter l'observation, les impulsions seront répétées toutes les $10 \mu\text{s}$ ce qui correspond à une fréquence de 100 kHz.

La question de l'adaptation d'impédance est une question centrale dans ce TP. On peut voir sur les photographies de la figure 2 la réalisation de l'adaptation d'impédance réalisée pour chaque câble coaxial. Adapter l'impédance signifie placer en bout de câble une impédance égale à l'impédance caractéristique du câble.



FIGURE 2 – Connecteurs de bout de câble et adaptation d'impédance

3 Aspects théoriques

3.1 Équation de propagation

On considère une portion élémentaire de câble coaxial décrit par le modèle de la figure 3.

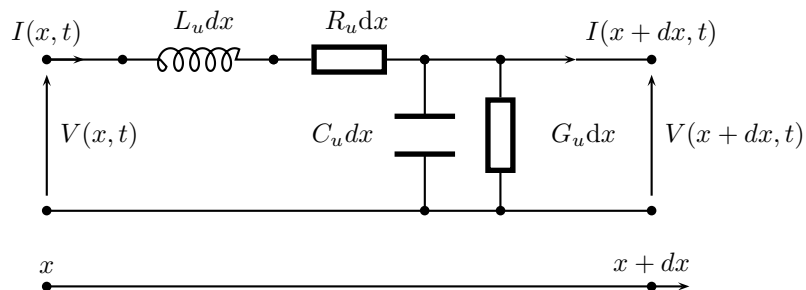


FIGURE 3 – Câble réel

Le câble coaxial est caractérisé par les constantes réparties L_u , C_u , R_u et G_u supposées constantes sur toute la longueur du câble. R_u est la résistance linéique du câble en $\Omega \cdot \text{m}^{-1}$, G_u est la conductance linéique de fuite en $\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$. L'isolant entre le conducteur central et le conducteur cylindrique qui l'entoure n'est pas le vide mais du polyéthylène. La permittivité relative ε_r du polyéthylène est $\varepsilon_r = 2,3$ lorsque le matériau est plein, il s'avère que dans des câbles bon marché, il présente des alvéoles, on parle alors de diélectrique cellulaire. Sa permittivité relative est alors nettement plus faible, elle se rapproche en quelque sorte de celle du vide ($\varepsilon_r = 1$). On peut la situer vers $1,3 \lesssim \varepsilon \lesssim 1,5$. Dans ces conditions, on peut montrer en Électromagnétisme que la capacité linéique C_u en $\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$ et l'inductance linéique L_u en $\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$ du câble sont données par :

$$C_u = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln \frac{b}{a}} \quad \text{et} \quad L_u = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

La permittivité relative d'un milieu diélectrique (isolant) est liée à l'indice de réfraction n dans ce milieu par la relation $\varepsilon_r = n^2$. On rappelle que $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$.

1. Écrire les relations différentielles entre $I(x, t)$ et $V(x, t)$.
2. En déduire l'équation de propagation vérifiée par $I(x, t)$ et $V(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (L_u G_u + R_u C_u) \frac{\partial V}{\partial t} + R_u G_u V$$

3. Expliquer pourquoi la forme de l'équation de propagation dans le cas où l'on considère le câble comme idéal est la suivante :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

Dans le cas d'un câble coaxial idéal d'impédance caractéristique Z_c , les solutions de l'équation de propagation peuvent s'écrire sous la forme :

$$I(x, t) = I_0 \exp i(\omega t - kx) + I_1 \exp i(\omega t + kx) \quad \text{et} \quad V(x, t) = Z_c (I_0 \exp i(\omega t - kx) - I_1 \exp i(\omega t + kx))$$

4. Quelle est la relation vérifiée par k pour que ces formes de solutions soient bien adaptées au problème ?
5. On place à l'extrémité $x = L$ du câble une impédance \underline{Z} . Montrer que l'expression de la tension devient :

$$V(x, t) = Z_c I_0 \exp i\omega t \left[\exp -ikx + \frac{\underline{Z} - Z_c}{\underline{Z} + Z_c} \exp ik(x - 2L) \right]$$

On note r le coefficient de réflexion de tension en amplitude donné par :

$$r = \frac{\underline{Z} - Z_c}{\underline{Z} + Z_c}$$

6. Montrer que laisser le câble en sortie ouverte ou court-circuiter la sortie est favorable à l'obtention d'une onde réfléchie ou à la fabrication d'une onde stationnaire. Commenter.

3.2 Atténuation

L'équation de propagation dans le cas du câble réel est :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (L_u G_u + R_u C_u) \frac{\partial V}{\partial t} + R_u G_u V$$

7. Montrer qu'une solution de la forme $V(x, t) = V_0 \exp i(\omega t - kx)$ pourra convenir à condition que k soit un complexe noté $k = k' + ik''$. On ne cherchera pas établir les expressions de k' et de k'' mais on justifiera le fait que $k'' < 0$.

8. En déduire que la solution pour la tension est finalement :

$$V(x, t) = V_0 \exp -|k''|x \exp i(\omega t - k'x)$$

On admettra que le facteur d'atténuation de l'onde reste de la forme $\exp -|k''|x$ pour un parcours de l'onde entre les abscisses $x = 0$ et x pour une forme d'onde non monochromatique comme, par exemple, une brève impulsion.

3.3 Adaptation d'impédance

3.3.1 Point de vue électrocinétique

On effectue, ici, une étude simplifiée de l'adaptation d'impédance avec uniquement des résistances. On considère un générateur décrit par son modèle de THÉVENIN équivalent (E, \underline{Z}_g) où E est la valeur efficace de la fem du générateur branché sur une résistance d'utilisation \underline{Z} comme sur la figure 4.

9. Déterminer l'expression de l'intensité électrique (amplitude complexe) qui parcourt l'impédance d'utilisation. En déduire l'expression de la puissance moyenne dissipée au niveau de l'utilisation.

10. On dit qu'il y a adaptation d'impédance lorsque la puissance transférée du générateur à l'utilisation est maximale. Dans le cas d'une impédance du générateur $\underline{Z}_g = R_g + jX_g$ et de celle de l'utilisation $\underline{Z} = R + jX$, montrer qu'il y a adaptation d'impédance lorsque $R_g = R$ et $X_g = -X$.

11. On étudie le cas où $X_g = X = 0$. Montrer qu'alors on a $\underline{Z} = E/2$.

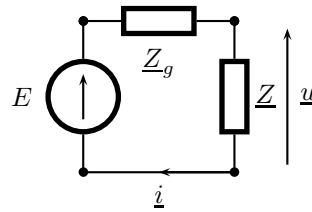


FIGURE 4 – Adaptation d'impédance

3.3.2 Point de vue ondulatoire

On adopte maintenant un point de vue ondulatoire de propagation de l'information dans le câble coaxial. On suppose que le milieu de propagation est idéal et donc qu'il n'y a pas de pertes. Nous avons montré que la forme de la solution en ondes planes progressives pour la tension était de la forme suivante lorsque l'on plaçait en bout de câble une impédance \underline{Z} :

$$V(x, t) = Z_c I_0 \exp i\omega t \left[\exp -ikx + \frac{\underline{Z} - Z_c}{\underline{Z} + Z_c} \exp ik(x - 2L) \right]$$

12. Que se passe-t-il si l'on met en bout de câble une impédance correspondant à son impédance caractéristique ? On dit qu'on a adapté l'impédance, pour traduire le fait que l'impédance du câble et du récepteur (utilisation) sont identiques. Qu'est devenue l'énergie associée au signal ?

3.4 Ondes stationnaires

On envisage une situation où le signal délivré à l'entrée du câble peut être considéré comme monochromatique. On ne s'intéressera qu'à l'expression de la tension, celle de l'intensité étant de forme tout à fait équivalente. Dans un premier temps, on étudie la situation du câble en sortie ouverte. Cela correspond à $\underline{Z} \rightarrow \infty$. La tension dans le câble coaxial s'exprime par :

$$V(x, t) = R_c I_0 \exp i(\omega t - kL) [\exp -ik(x - L) + \exp ik(x - L)]$$

En notation réelle, on obtient :

$$V(x, t) = 2V_0 \cos(\omega t - kL) \cos k(x - L)$$

13. Expliquer clairement en quoi l'expression de la tension précédente $V(x, t)$ relève d'une situation d'ondes stationnaires.

Afin d'étudier l'amplitude de la tension dans une situation d'ondes stationnaires, on place l'oscilloscope au début du câble à une position telle que $x = 0$. La tension visualisée est donc :

$$V(0, t) = 2V_0 \cos(kL) \cos(\omega t - kL)$$

Son amplitude est $2V_0 |\cos kL|$.

14. Montrer qu'on observe des ventres (maximum d'amplitude) ou des nœuds (amplitude nulle) de tension en $x = 0$ pour des fréquences données par les formules :

$$f_{pV} = p \frac{c}{n2L} \quad \text{et} \quad f_{pN} = (2p + 1) \frac{c}{n4L}$$

où p est un entier naturel, n l'indice du polyéthylène, c la vitesse de la lumière dans le vide et L la longueur du câble.

Dans un second temps, on envisage la situation où l'extrémité du câble coaxial est court-circuitée, c'est-à-dire $\underline{Z} \rightarrow 0$. En reprenant les expressions vues avant, on peut montrer que la tension $V(x, t)$ s'exprime en notation réelle selon :

$$V(x, t) = 2V_0 \sin(\omega t - kL) \sin k(x - L)$$

On en déduit que l'oscilloscope visualise une tension en $x = 0$ de la forme :

$$V(x, t) = -2V_0 \sin(kL) \sin(\omega t - kL)$$

15. Comparer les nœuds et les ventres par rapport à la situation précédente.

4 Expériences

4.1 Consignes

Lors de vos activités expérimentales en TP, vous devrez systématiquement :

- * Élaborer un protocole et m'appeler pour que je le valide.
- * Mettre en œuvre ce protocole et m'appeler pour que j'évalue vos activités.
- * Communiquer les résultats dans le compte rendu sous forme de descriptions, de tableaux de mesures, de graphiques...
- * Valider les résultats en comparant les développements théoriques et les résultats expérimentaux en ayant le souci permanent de présenter de façon rigoureuse les résultats avec leur incertitude.
- * Remettre en fin de séance votre compte-rendu.

Vous serez évalué sur l'ensemble de ces exigences.

4.2 Adaptation d'impédance

16. Relier le générateur de signaux à l'oscilloscope par le câble coaxial noir de 0,5 m de résistance caractéristique $R_c = 50 \Omega$ que l'on utilise habituellement. Ce câble sera relié à l'oscilloscope en utilisant un Té sur la voie 1. Ce Té permet de dédoubler une connexion de type coaxial en deux connexions coaxiales, voir la figure 5. En utilisant le générateur intégré à l'oscilloscope, effectuer les réglages nécessaires pour que le générateur délivre une impulsion de largeur voisine de 20 ns, se répétant avec une période de dix microsecondes et l'amplitude maximale possible avec ce générateur à savoir 5 V. Observer le signal enregistré par l'oscilloscope, en faire une impression et mettre en évidence certains défauts du signal.

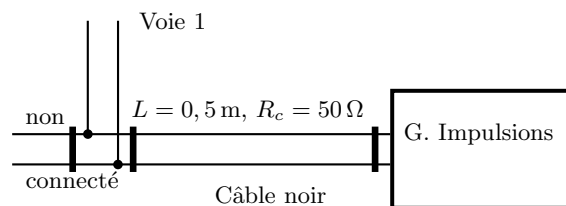


FIGURE 5 – Branchement sans adaptation d'impédance

17. L'impédance d'entrée de l'oscilloscope étant de $1 M\Omega$, elle est nettement différente de l'impédance caractéristique du câble coaxial noir. En utilisant deux résistances de 100Ω en parallèle, réaliser le montage de la figure 6. Enregistrer le signal obtenu dans ce nouveau contexte et commenter. Expliquer, en particulier, grâce à l'étude théorique la nouvelle valeur de l'amplitude du signal. L'amélioration de la forme du signal est liée à l'absence de réflexions parasites, justifier. Le problème général de la réflexion en bout de câble coaxial sera étudié plus loin.

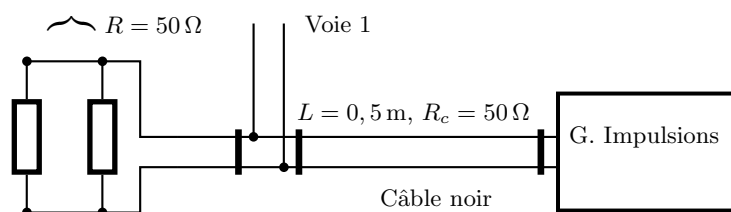


FIGURE 6 – Branchement avec adaptation d'impédance



FIGURE 7 – Adaptation d'impédance : sans et avec

4.3 Vitesse de propagation dans câble

On utilise dans le montage suivant un câble coaxial blanc de longueur 100 m d'impédance caractéristiques $R_c = 75 \Omega$.

18. Réaliser le montage de la figure 8.

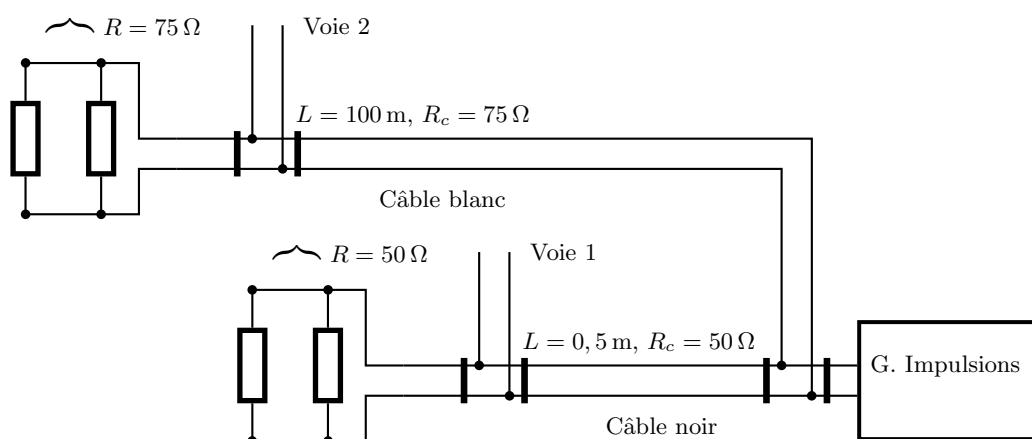


FIGURE 8 – Vitesse de propagation - Indice du polyéthylène

19. Observer les impulsions détectées sur les deux voies de l'oscilloscope en réalisant l'adaptation d'impédance. Mesurer la vitesse de groupe en évaluant l'incertitude de mesure grâce à un programme *Python*.

20. On observera aussi que le signal, mis à part le problème de l'atténuation dont nous parlerons plus loin, se déforme assez peu au cours de la propagation. Compte tenu de cette faible déformation du signal observé, on propose de considérer le câble comme idéal et donc de confondre vitesse de phase et vitesse de groupe. Sachant que, dans le cas d'un milieu diélectrique d'indice n , l'on a :

$$v_{\text{groupe}} v_{\text{phase}} = \frac{c^2}{n^2}$$

Déterminer, à partir des mesures précédentes, la valeur de la permittivité $\epsilon_r = n^2$ de l'isolant du câble coaxial ainsi que son incertitude toujours grâce à un programme *Python* qui pourrait être le même que le précédent.

4.4 Atténuation

En réalité le câble coaxial est un peu résistif. Cela entraîne des pertes et une atténuation progressive du signal. On rappelle que le vecteur d'onde s'écrit dans le cas général $k = k' + ik''$ où k' et k'' sont des réels. On étudie, ici, l'atténuation sur le signal de type impulsion utilisé précédemment. Le coefficient d'atténuation $|k''|$ est exprimé ci-dessous ainsi que l'atténuation Att en décibel par kilomètre :

$$|k''| = \frac{1}{L} \ln \frac{U_1}{U_2} \quad \text{et} \quad Att = 10 \times 20 \log \frac{U_1}{U_2}$$

où U_1 est l'amplitude du signal une fois qu'il a parcouru 100 m de câble et U_2 celle obtenue une fois qu'il a parcouru 200 m de câble. Afin de pouvoir faire cette mesure, on procédera en reliant deux câbles de 100 m à la suite l'un de l'autre comme sur le schéma de la figure 9. On travaillera toujours en envoyant une impulsion courte dans le câble.

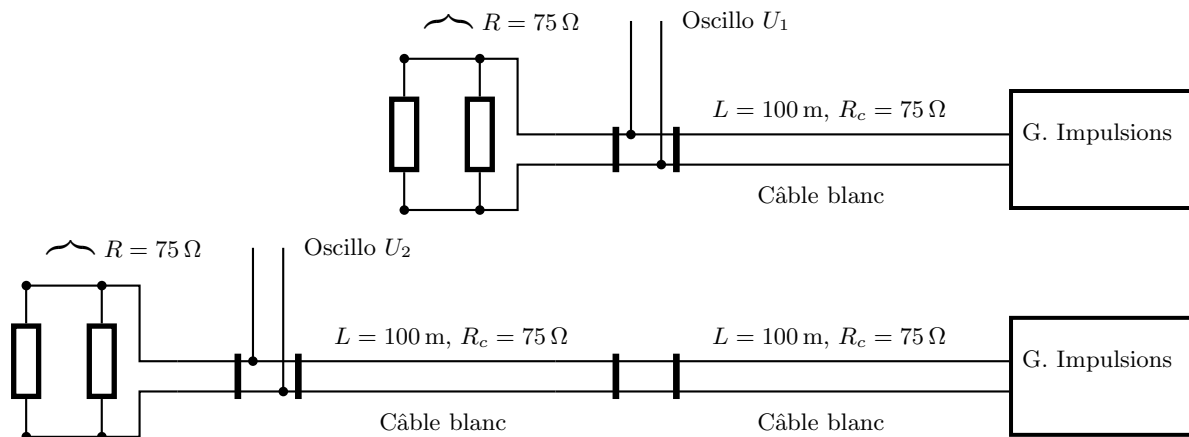


FIGURE 9 – Mesure de l'atténuation

21. Mesurer les amplitudes U_1 et U_2 .

22. Calculer le coefficient d'atténuation $|k''|$. En déduire sa valeur Att en décibel par kilomètre. Commenter le résultat obtenu pour l'atténuation Att .

4.5 Réflexions à l'extrémité du câble

4.5.1 Sortie ouverte

23. Réaliser le montage de la figure 10. Attention, il y a assez peu de modifications à apporter au montage de la figure 8, on débranche le câble de la voie 2 de l'oscilloscope, voie 2 que l'on rendra inactive. La résistance en bout de câble $Z = R_u$ variera au cours de l'étude. Dans un premier temps, on réalisera $R_u \rightarrow \infty$.

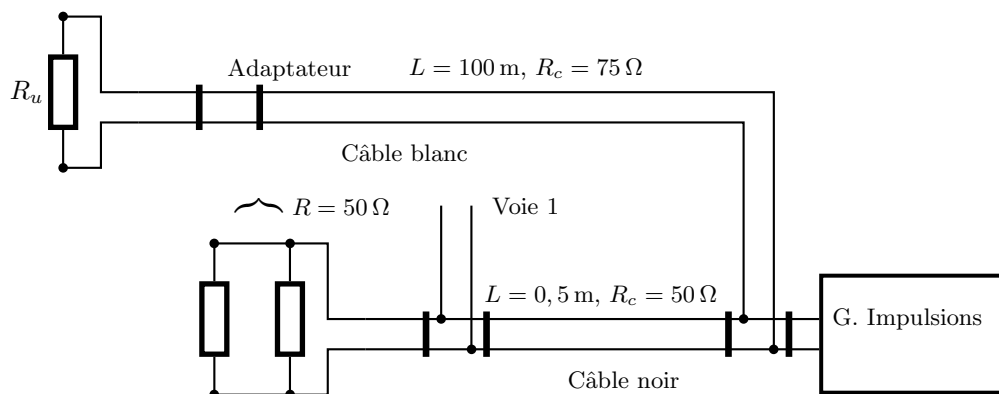


FIGURE 10 – Réflexions en bout de câble

24. Observer les échos successifs. Analyser l'oscillogramme obtenu. Quelles informations peut-on obtenir de ces échos ?

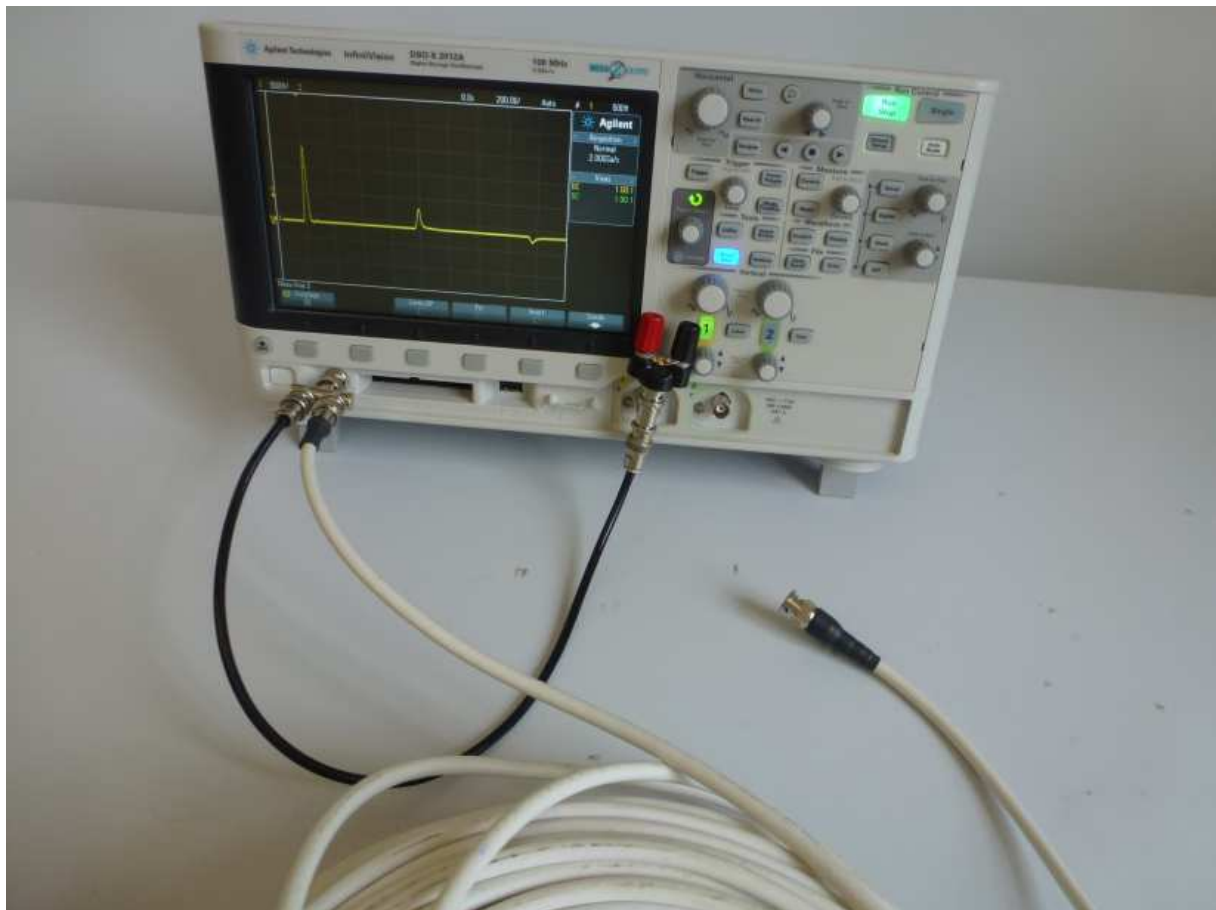


FIGURE 11 – Réflexions successives en bout de câble

4.5.2 Sortie court-circuitée

25. À l'extrémité du câble, on place un petit fil court-circuit. Effectuer le même travail que dans la question précédente. Mettre en évidence les différences qui existent avec la situation précédente.

4.5.3 Adaptation d'impédance

26. On place maintenant au bout du câble une impédance correspondant à l'impédance caractéristique du câble. Analyser ce que vous obtenez.

4.6 Ondes stationnaires

27. En prenant des initiatives, étudier le phénomène d'ondes stationnaires dans le câble. On n'oubliera pas d'envoyer dans le câble un signal sinusoïdal. Expliquer précisément votre démarche ainsi que vos observations et vos mesures.