

Exercices : 30 - Physique statistique

1. Diffractométrie de neutrons

La diffractométrie de neutrons est une technique d'analyse basée sur la diffraction des neutrons dits thermiques par la matière. Les neutrons sont utilisés comme sonde pour explorer la matière à l'échelle atomique. À quelle température sont les neutrons ?

Proposition de réponses :

- a) $T = 0 \text{ K}$ b) $T = 4 \text{ K}$ c) $T = 0^\circ \text{C}$ d) $T > T_{\text{ambiante}}$

2. Atmosphère isotherme

On rappelle que la loi de la statique des fluides conduit, dans une atmosphère isotherme, à une loi d'évolution de la pression en fonction de l'altitude z de la forme suivante :

$$P(z) = P_0 \exp - \frac{Mgz}{RT}$$

où M est la masse molaire moyenne de l'atmosphère, g l'accélération de la pesanteur, R la constante molaire des gaz parfaits telle que $R = \mathcal{N}_A k_B$ et T la température. P_0 est la pression à l'altitude $z = 0$.

1. Quelle est la loi d'évolution de la densité volumique moyenne n_v de particules dans l'atmosphère isotherme en fonction de l'altitude z ?
2. On considère que l'atmosphère est uniquement composée de diazote N_2 et de dioxygène O_2 . Au niveau de la mer, on considère que les fractions molaires des deux composés sont dans le rapport 4 : $x_{\text{N}_2} = 4x_{\text{O}_2}$. Pour une atmosphère isotherme à $T = 290 \text{ K}$, quel est le rapport des fractions molaires à 4 000 m d'altitude ?

3. Quantification ou continuum d'énergie ?

On considère des molécules de diazote N_2 dans un espace unidimensionnel, appelé *boîte*, de largeur $L = 10,0 \text{ cm}$. Le potentiel est supposé nul dans la boîte et infini en dehors.

1. En résolvant l'équation de SCHRÖDINGER, exprimer l'énergie E_n d'une molécule de masse m dans cette boîte, pour un état stationnaire indexé par un nombre n à définir.
2. Calculer l'écart entre les deux plus bas niveaux d'énergie d'une molécule.
3. On suppose que les molécules ne peuvent être que dans les deux plus bas niveaux d'énergie, et que le nombre de molécules dans chacun de ces deux états obéit à une loi statistique de BOLTZMANN à la température T . Donner l'expression de la proportion de molécules de plus haute énergie. Effectuer l'application numérique à $T = 300 \text{ K}$.
4. Pour quelle valeur du niveau d'énergie n , l'énergie atteint-elle l'énergie d'agitation thermique à $T = 300 \text{ K}$? Exprimer alors l'écart d'énergie entre les niveaux n et $n + 1$. Peut-on répondre à la question du titre de l'exercice ?

On donne : $h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$, $A = 14$ (nombre de masse de l'azote), $m_a = 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$ (unité de masse atomique).

4. Expérience de Jean Perrin

Dans son livre *Les atomes* publié en 1913, JEAN PERRIN décrit des expériences qui lui ont permis de mesurer la constante d'AVOGADRO. Il observe au microscope une suspension de grains sphériques dans l'eau, tous les grains ayant un rayon a de l'ordre d'un dixième de micron. La suspension est observée dans une cuve de $100 \mu\text{m}$ de profondeur. La densité des grains est $d = 1,194$.

1. Chaque grain est soumis à son poids et à la poussée d'ARCHIMÈDE. Montrer que l'énergie potentielle $E_p(z)$ d'un grain d'altitude z est de la forme $E_p(z) = Az$ où A est une constante que l'on exprimera en fonction de g , d , a et de la masse volumique de l'eau μ_{eau} .
2. En faisant l'hypothèse que les grains suivent la loi de BOLTZMANN, déterminer une longueur caractéristique h dépendant de A et T , longueur caractérisant la répartition des grains selon l'axe Oz . Quel est l'ordre de grandeur de h à la température ambiante $T = 293 \text{ K}$? Commenter.
3. Le rayon des grains utilisés est $a = 0,212 \mu\text{m}$. JEAN PERRIN a trouvé que les concentrations des grains en quatre plans horizontaux équidistants traversant la cuve aux niveaux 5, 35, 65 et $95 \mu\text{m}$ sont proportionnelles aux nombres 100, 47, 23 et 12. En déduire une valeur approchée de la constante d'AVOGADRO sachant que la constante des gaz parfaits est $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$. On prendra $T = 293 \text{ K}$.

5. Expérience de Kappler

L'expérience de KAPPLER en 1931 a permis de mesurer la constante de BOLTZMANN k_B en étudiant les fluctuations de position d'un petit pendule de torsion placé dans une enceinte thermostatée à la température T . Le pendule est constitué d'un petit miroir suspendu à un fil de quartz. Ce miroir peut tourner autour de l'axe vertical du fil. Lorsque sa position est repérée par l'angle θ par rapport à la position d'équilibre, le miroir subit un couple de rappel $-C\theta$. À ce couple est associée une énergie potentielle $E_p = \frac{1}{2}C\theta^2$.

1. Un rayon lumineux arrive sur le miroir en faisant un angle θ par rapport à la normale à celui-ci. Quel est l'angle d'émergence du rayon réfléchi ? Le rayon réfléchi arrive sur un écran situé à grande distance du miroir, soit L cette distance. Exprimer le déplacement du rayon lumineux sur l'écran lorsque le miroir tourne et que l'angle d'incidence θ varie d'une très petite quantité $\Delta\theta$.
2. Du fait des chocs des molécules du gaz sur le miroir, l'angle θ fluctue autour de 0. En utilisant l'équipartition de l'énergie, exprimer $\langle \theta^2 \rangle$. Quelle valeur de k_B KAPPLER a-t-il trouvé ? Il a travaillé avec $T = 287,1 \text{ K}$, $C = 9,428 \times 10^{-16} \text{ N} \cdot \text{m}$, $L = 0,865 \text{ m}$. Il a mesuré $\langle d^2 \rangle = 1,25 \times 10^{-5} \text{ m}^2$.
3. Le fil était en quartz, de longueur ℓ et de diamètre δ . Sa constante de raideur est $C = G \frac{\pi \delta^4}{32\ell}$ où $G = 3,114 \times 10^7 \text{ Pa}$ est le module de rigidité du quartz. En supposant que ℓ était de l'ordre de 1 m, déterminer l'ordre de grandeur de δ .

6. Ultracentrifugation

Un cylindre de rayon a et de hauteur h est rempli d'un gaz parfait masse molaire M . Ce cylindre est animé d'un mouvement de rotation à la vitesse ω autour de son axe Oz par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen. On admet que le gaz atteint un état d'équilibre dans le référentiel du cylindre et qu'il a une température uniforme T . On ne tient pas compte de la pesanteur.

1. Le référentiel lié au cylindre est-il galiléen ? Vérifier que l'énergie potentielle dans ce référentiel d'une molécule de masse m située au point de coordonnées (r, θ, z) est :

$$E_p = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

2. On note $n(r)$ la densité volumique de particule régnant dans le cylindre à la distance r de l'axe Oz . Exprimer $\frac{n(r)}{n(0)}$ en fonction de M , ω , r , T et R la constante molaire des gaz parfaits.
3. Le dispositif précédent est à la base de la méthode d'enrichissement de l'uranium par ultracentrifugation. L'hexafluorure d'uranium UF_6 est introduit dans des cylindres de rayon $a = 20 \text{ cm}$ qui tournent à 10 000 tours par minute. La température est $T = 300 \text{ K}$. Calculer numériquement $\frac{n(a)}{n(0)}$ dans le cas d'une molécule $^{238}\text{UF}_6$ de masse molaire $M_{238} = 352 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, puis dans le cas d'une molécule $^{235}\text{UF}_6$.
4. Dans la nature, la fraction molaire de l'isotope ^{235}U est égale à 0,72% et l'opération d'enrichissement doit fournir un combustible contenant entre 3% et 5% de cet isotope. On note x_{235} la fraction molaire de molécules d'hexafluorure contenant ^{235}U . Calculer $\frac{x_{235}(0)}{x_{235}(a)}$.

7. Système à 2 niveaux d'énergie

On considère un système dont les $N \gg 1$ particules indépendantes à deux niveaux d'énergie non dégénérés d'énergie $\varepsilon_1 = 0$ et $\varepsilon_2 = \varepsilon > 0$. Ce système est en équilibre avec un thermostat à la température T .

1. Calculer les nombres moyens \overline{N}_i pour $i = (1, 2)$ d'atomes dans les deux états.
2. Définir θ une température caractéristique du système. Déterminer \overline{N}_1 et \overline{N}_2 si $T \gg \theta$ et si $T \ll \theta$.
3. Déterminer l'énergie interne du système.
4. En déduire la capacité thermique molaire à volume constant $c_{V,mol}(T)$.

8. Système à 3 niveaux d'énergie

On considère un système dont les N atomes peuvent occuper trois niveaux d'énergie $E_1 = -E$, $E_2 = 0$ et $E_3 = +E$ où E est une constante positive. Ce système est en équilibre avec un thermostat à la température T . Une telle situation se rencontre en Physique dans des problèmes de magnétisme.

1. Calculer les nombres moyens \overline{N}_i pour $i = (1, 2, 3)$ d'atomes dans les trois états. Commenter les limites de basse et de haute températures.
2. Calculer l'énergie moyenne $\overline{\mathcal{E}}$ d'un atome.

- Tracer son évolution en fonction de la température et commenter.
- Décrire qualitativement l'évolution de la capacité thermique à volume constant $C_V(T)$.

9. Système avec état dégénéré

On considère une population de N molécules de dihydrogène H_2 indépendantes, à l'équilibre avec un thermostat à la température T . On considère que $N \gg 1$. Ces molécules possèdent deux niveaux d'énergie : l'état 1 d'énergie ε_1 non dégénéré et l'état 2 d'énergie $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$. L'état 2 possède une dégénérescence $g_2 = 3$.

- Exprimer les nombres moyens N_1 et N_2 de molécules qui occupent respectivement l'état 1 et l'état 2 en fonction de N , ε_1 , ε , k_B et T .
- Donner l'expression de l'énergie E du système. Quelles sont les limites de cette énergie à haute et à basse température ?
- Déterminer la capacité thermique. Discuter les cas des hautes températures et celui des basses températures.
- On donne $T = 14\text{ K}$ et $\varepsilon = 0,02\text{ eV}$. Peut-on dire que l'on est en haute température ? en basse température ? En déduire les expressions de N_1 et de N_2 et celle de l'énergie E du système.

10. Système à trois niveaux dégénérés

On considère un système à trois niveaux à N particules indépendantes en équilibre thermique avec un thermostat à une température T . Chaque particule peut occuper un état quantique situé sur l'un des trois niveaux d'énergie suivants :

- niveau fondamental (0), d'énergie nulle et non dégénéré ;
- premier niveau excité (1), d'énergie ϵ et dégénéré deux fois ;
- second niveau excité (2), d'énergie 2ϵ et dégénéré quatre fois.

- Donner les expressions des probabilités P_0 , P_1 et P_2 d'occupation par une particule des niveaux d'énergie respectifs (0), (1) et (2).
- Reprendre la question précédente relativement à chaque état de chaque niveau d'énergie.
- Ordonner les probabilités P_0 , P_1 et P_2 de la première question en fonction de la température T . Définir et expliciter une température d'inversion T_i .
- Discuter les limites pour $T \ll T_i$ et $T \gg T_i$ des probabilités P_0 , P_1 et P_2 , ainsi que de l'énergie moyenne totale du système et de sa capacité thermique.
- Calculer l'énergie totale moyenne du système pour $T = T_i$ et discuter qualitativement de l'importance de sa capacité thermique à cette température.

11. Effusion gazeuse

Le récipient de la figure 1 est constitué de deux compartiments de même volume V , maintenus à la température T . Une mole d'un gaz parfait remplit le compartiment (1) alors que le compartiment (2) est vide. À l'instant $t = 0$, on perce un petit trou de section s entre les deux compartiments. On étudie le passage du gaz du compartiment (1) vers le compartiment (2), ce phénomène est appelé effusion gazeuse.

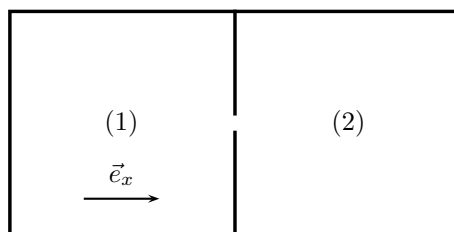


FIGURE 1 – Effusion gazeuse

On note $N_1(t)$ et $N_2(t)$ les nombres de molécules dans les compartiments (1) et (2). Pour le gaz parfait, on adopte le modèle simplifié suivant :

- Toutes les molécules de gaz ont la même vitesse v_q , vitesse quadratique moyenne.
- Les directions possibles des vitesses des molécules ne peuvent qu'être \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z .
- Les sens des vitesses des molécules sont réparties de façon équivalente entre toutes les possibilités.

1. Rappeler l'expression de la vitesse quadratique moyenne v_q d'une molécule diatomique dans un gaz parfait à l'équilibre à la température T .
2. Établir l'expression du nombre $dN_{1 \rightarrow 2}$ de molécules contenues dans le compartiment (1) à l'instant t qui traversent la surface s vers le compartiment (2) entre la date t et la date $t + dt$.
3. En déduire les expressions de $\frac{dN_1}{dt}$ et $\frac{dN_2}{dt}$ en fonction de N_1 , N_2 , s , v_q et V .
4. Établir les expressions de $N_1(t)$ et de $N_2(t)$. Faire apparaître une constante de temps τ et commenter les solutions obtenues. Comment pourrait-on mesurer expérimentalement $N_1(t)$ et $N_2(t)$?
5. Comment varie τ lorsque l'on compare l'effusion de dihydrogène H_2 et l'effusion de la molécule obtenue avec le deutérium isotope de l'atome d'hydrogène D_2 ? Expliquer comment dans un processus industriel lié à la fusion nucléaire, on peut enrichir en deutérium un mélange $H_2 - D_2$.

12. Vitesse de libération

La loi de distribution des vitesses est notée $f_{e,p}(\vec{v})$. Elle est définie telle que la probabilité élémentaire $dP_{e,p}$ d'observer une particule (électron e ou proton p) dont le vecteur vitesse est compris entre \vec{v} et $\vec{v} + d\vec{v}$ s'écrit :

$$dP_{e,p}(\vec{v}, \vec{v} + d\vec{v}) = f_{e,p}(\vec{v}) dv_x dv_y dv_z$$

La notation indicielle e, p spécifie que les quantités se rapportent à celles des électrons pour l'indice e ou à celles des protons pour l'indice p . Protons et électrons ont la même densité volumique $n_0/2$.

On suppose, pour le moment, que cette distribution des vitesses est maxwellienne pour les électrons et les protons, soit :

$$f_{e,p}(\vec{v}) = \left(\frac{m_{e,p}}{2\pi k_B T_0} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_{e,p} \vec{v}^2}{2k_B T_0} \right)$$

1. Vérifier que $\iiint f_{e,p} dv_x dv_y dv_z = 1$.
2. Montrer que la distribution $g_{e,p}(v)$ de la norme v de la vitesse s'écrit : $g_{e,p}(v) = 4\pi v^2 f_{e,p}(\vec{v})$.
3. Exprimer la vitesse quadratique moyenne $\sqrt{\langle v_{e,p}^2 \rangle}$ ainsi que la vitesse la plus probable, notée $w_{e,p}$.
4. Définir la vitesse de libération v_{lib} d'une particule située à la distance r_0 d'un astre de masse M_a . Cette vitesse est-elle la même pour les électrons et les protons ? Comparer aux vitesses précédentes.

On donne la valeur de l'intégrale suivante ($a > 0$) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

13. Fluctuations d'énergie

On considère un système de N particules indépendantes, pouvant être dans des états d'énergies discrètes $E_1, E_2, \dots, E_i, \dots$. Le système est à l'équilibre thermique à la température T . On note :

$$z(\beta) = \sum_{i \geq 1} \exp -\beta E_i \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

1. Exprimer l'énergie moyenne $\bar{\varepsilon}$ d'une particule en fonction de la dérivée de $\ln z(\beta)$ par rapport à β .
2. Montrer que l'écart quadratique moyen de l'énergie d'une particule $\Delta \varepsilon$ est tel que :

$$(\Delta \varepsilon)^2 = \frac{d^2 \ln z}{d\beta^2}$$

3. Relier la capacité thermique C_V du système total à $(\Delta E)^2$, où E est l'énergie des N particules. Commenter.

14. Modèle d'Einstein des solides

Afin de pouvoir évaluer précisément la capacité thermique d'un solide, on utilise le modèle unidimensionnel d'EINSTEIN de 1907. Chaque atome de masse m est considéré comme un oscillateur harmonique au sens quantique à une dimension. Les niveaux d'énergie d'un tel système d'énergie potentielle $E_p(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ sont quantifiés :

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega. \text{ On pose } u = \frac{\hbar\omega}{k_B T}.$$

1. Pour un solide en équilibre avec un thermostat de température T , exprimer la probabilité $p_n(u)$ qu'un atome soit dans l'état indicé par n .
2. Montrer que l'énergie moyenne $\bar{\varepsilon}(T)$ d'un atome vaut :

$$\bar{\varepsilon}(T) = \frac{\hbar\omega}{2} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right)$$

On donne : $\sum_{n=0}^{\infty} n \exp(-\alpha n) = \frac{1}{4 \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2}}$ pour $\alpha > 0$.

3. Évaluer la capacité thermique molaire $C_{V,mol}(T)$ du solide. On rappelle la relation $\frac{d \coth x}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.
4. Quelle est la limite à haute température ? Quelle loi retrouve-t-on ?
5. Tracer l'allure de $C_{V,m}(T)$.

15. Capacité thermique du dihydrogène gazeux

On s'intéresse à la capacité thermique du dihydrogène lorsqu'il est gazeux.

1. L'écart entre deux niveaux d'énergie de translation d'une molécule H_2 est de l'ordre de grandeur de $\Delta_{trans} = \frac{h^2}{m^* \mathcal{L}^2}$ où $m^* = 3,345.10^{-27} \text{ kg}$ est la masse de la molécule et \mathcal{L} la taille du récipient dans lequel le gaz est contenu. Calculer $\Theta_{trans} = \Delta_{trans}/k_B$ pour une valeur réaliste de \mathcal{L} et conclure quant à l'utilisation du théorème d'équipartition de l'énergie pour les degrés de liberté de translation.
2. La distance entre les deux noyaux d'hydrogène dans la molécule H_2 est supposée ici constante, égale à $a = 74,14 \text{ pm}$.
3. Vérifier que le moment d'inertie de la molécule par rapport à un axe perpendiculaire à l'axe des noyaux est $I \simeq m^* a^2/4$. Calculer numériquement I .
4. Rappeler les expressions du moment cinétique L et de l'énergie cinétique E_c d'un solide en rotation autour d'un axe fixe en fonction de son moment d'inertie I et de sa vitesse angulaire de rotation ω . En déduire une expression de E_c en fonction de L et I uniquement.
5. En physique quantique, l'expression de l'énergie de rotation en fonction du moment cinétique reste la même qu'en mécanique classique et le moment cinétique est quantifié : les valeurs possibles de L^2 sont $\ell(\ell+1)\hbar^2$ où ℓ est un entier positif ou nul. Exprimer le plus petit écart énergétique Δ_{rot} entre deux niveaux d'énergie de rotation de la molécule de dihydrogène en fonction de \hbar et I .
6. Calculer numériquement $\Theta_{rot} = \Delta_{rot}/k_B$.
7. On s'intéresse aux mouvements de vibration de la molécule. On note r la distance entre les deux noyaux d'hydrogène qui n'est plus nécessairement égale à a . L'énergie potentielle de déformation de la molécule est modélisée par :

$$E_p = E_0 (\exp -2\alpha(r-a) - 2 \exp -\alpha(r-a) + 1)$$

avec $E_0 = 7,716.10^{-19} \text{ J}$ et $\alpha = 2,002.10^{10} \text{ m}$. L'énergie cinétique de vibration est donnée par $E_c = m^* \dot{r}^2/8$.

8. Tracer la courbe donnant E_p/E_0 en fonction de r .
9. On s'intéresse à des petites vibrations pour lesquelles $\alpha(r-a) \ll 1$. Trouver l'expression de la constante k telle que $E_p \simeq k(r-a)^2/2$. Calculer numériquement k .
10. Exprimer l'énergie mécanique de vibration en fonction de $u = r - a$ et \dot{u} . En déduire l'expression de la fréquence ν de vibration. Calculer numériquement ν .
11. En physique quantique, les niveaux d'énergie de vibration sont $(n + 1/2)\hbar\nu$ où n est un entier positif ou nul. Exprimer le plus petit écart énergétique Δ_{vib} entre deux niveaux d'énergie de vibration. Calculer numériquement $\Theta_{vib} = \Delta_{vib}/k_B$.

12. Estimer la capacité thermique molaire à volume constant du dihydrogène aux températures suivantes : 50 K, 500 K et 10 000 K.

16. Contribution électronique à la capacité thermique d'un gaz

La capacité thermique d'un gaz est la somme de contributions provenant des énergies de translation, de rotation et de vibration, mais aussi de l'énergie des électrons.

1. Les niveaux d'énergie électroniques de l'atome d'hydrogène sont $E_n = -13,6/n^2$ en électron-volt, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la différence d'énergie Δ entre l'état fondamental et le premier niveau excité ?
2. Le niveau d'énergie E_n est dégénéré $2n^2$ fois. Sachant que chaque état quantique est peuplé par l'agitation thermique selon la loi de BOLTZMANN, calculer le rapport du nombre d'atomes d'hydrogène dans le premier niveau excité sur le nombre d'atomes au niveau fondamental, à l'équilibre thermique à la température $T = 298$ K.
3. Quelle est l'influence des niveaux d'énergie électroniques sur la capacité thermique de l'hydrogène atomique H à température ordinaire ? Le même comportement est observé pour la plupart des atomes, mais pas pour ceux d'halogènes, comme le chlore abordé ensuite.
4. L'atome de chlore possède un niveau électronique fondamental dégénéré quatre fois, et un premier niveau excité dégénéré deux fois, dont la différence d'énergie est de $\Delta = 109$ mEV seulement. On ne tient compte dans la suite que de ces deux niveaux d'énergie dégénérés. Calculer le rapport du nombre d'atomes de chlore dans le premier niveau excité sur le nombre d'atomes dans l'état fondamental, à l'équilibre à la température $T = 298$ K. On prendra l'énergie du niveau fondamental nulle.
5. Exprimer, en fonction de Δ et $k_B T$, l'énergie électronique moyenne $\langle E_{el} \rangle$ d'un atome de chlore en équilibre avec un thermostat à la température T .
6. En déduire la contribution $C_{m,el}$ à la capacité thermique molaire du gaz Cl de l'énergie d'excitation électronique en fonction de R , T et $\Theta_{el} = \Delta/k_B$. Tracer, à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur, la courbe donnant $C_{m,el}/R$ en fonction de T/Θ_{el} . Vérifier que $C_{m,el}$ passe par un maximum pour la température $T_m \simeq 0,45 \Theta_{el}$. Calculer numériquement Θ_{el} , T_m et $C_{m,el}(T_m)$.
7. On trouve sur le site du National Institute of Standards and Technology (NIST) des formules donnant les capacités thermiques à pression constante de différents gaz dans différents domaines de température. Il propose notamment pour le gaz monoatomique Cl dans le domaine [298 K, 600 K] la formule $(C_{p,m})_{tab} = 13,38 + 42,34 t - 64,75 t^2 + 33,00 t^3 + \frac{63,32 \cdot 10^{-3}}{t^2}$ en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ avec t en mK. Comparer cette formule avec le résultat de la question précédente.

17. Instabilité des étoiles

On considère que le Soleil est un astre sphérique composé de N particules élémentaires assimilées à des protons et des neutrons de masse $m = 1,67 \times 10^{-27}$ kg (on néglige la contribution des électrons). On note $M = 2 \times 10^{30}$ kg sa masse et $R = 800\,000$ km son rayon.

1. On considère une planète de masse m_p en mouvement circulaire autour du Soleil. Montrer que l'énergie potentielle de la planète soumise à l'interaction gravitationnelle du Soleil est reliée à son énergie cinétique par la relation $E_c = -\frac{1}{2}E_p$.
2. Déterminer N pour le Soleil ainsi que sa masse volumique moyenne μ .

Le Soleil possède une énergie potentielle gravitationnelle propre due à l'interaction gravitationnelle entre les N particules qui le constituent. Celle-ci est donnée par l'expression :

$$E_{p,s} = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

où $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ est la constante de gravitation universelle.

3. La relation $E_c = -\frac{1}{2}E_p$ est aussi valable pour le Soleil. Exprimer l'énergie interne U du Soleil somme des énergies cinétiques des N particules et de l'énergie d'interaction gravitationnelle. En étudiant $U = f(R)$ montrer que le Soleil ne peut être stable, que son rayon ne peut que diminuer tout comme son énergie. Que devient l'énergie interne perdue ?
4. On considère que tout le Soleil est à la température T . Exprimer l'énergie cinétique microscopique totale du Soleil en fonction de N et T . En déduire l'expression de son énergie interne U . Calculer la capacité thermique du Soleil. Commenter.

- On considère maintenant une étoile à neutrons de rayon $R^* = 10 \text{ km}$, de masse volumique $\mu^* = 10^{17} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Évaluer le nombre N^* de neutrons contenus dans l'étoile ainsi que la taille r^* de l'espace dont ils disposent en moyenne (leur zone de confinement au sens de la Mécanique quantique).
- Proposer une expression de la norme de leur quantité de mouvement au sens de la Mécanique quantique. En déduire une expression de l'énergie cinétique totale d'origine microscopique de l'étoile à neutrons. En prenant en compte l'énergie d'origine gravitationnelle, donner l'expression de l'énergie interne U^* de l'étoile à neutrons en fonction de R^* entre autres.
- Étudier le graphique $U^* = f(R^*)$. Montrer que l'étoile à neutrons est stable pour un rayon R_{st} que l'on exprimera et que l'on calculera numériquement. Commenter le résultat.

18. Mouvement brownien

On considère une particule de taille de l'ordre du micromètre plongée dans l'eau. Du fait des collisions incessantes avec les molécules d'eau, la particule a un mouvement aléatoire observable au microscope appelé mouvement brownien. On modélise ce mouvement en se limitant à sa projection sur une direction horizontale Ox . La particule a une masse m et sa position est $x(t)$ avec $x(0) = 0$. On prend en compte les chocs des molécules d'eau sur la particule de la manière suivante :

- Si la particule est fixe, la force exercée par l'eau fluctue avec une échelle de temps (de l'ordre de la durée entre deux chocs) très courte devant la durée d'observation et sa moyenne est nulle : $F_{eau,x} = F(t)$ avec $\langle F(t) \rangle = 0$.
- Si la particule est en mouvement, les chocs avec les molécules d'eau ont pour effet de la freiner et l'eau exerce sur elle la force : $F_{eau,x} = -h\dot{x} + F(t)$ où h est une constante.

On note $\langle X \rangle$ la moyenne d'une grandeur X sur une durée intermédiaire entre le temps caractéristique des chocs et la durée d'observation. On admet que : $\langle \frac{dX}{dt} \rangle = \frac{d\langle X \rangle}{dt}$.

- Écrire le principe fondamental de la Dynamique pour une particule brownienne de masse m soumise uniquement à la force exercée par l'eau.
- En admettant que $\langle xF(t) \rangle = 0$, montrer que :

$$m \frac{d\langle x\dot{x} \rangle}{dt} = m \langle \dot{x}^2 \rangle - h \langle x\dot{x} \rangle$$

- Que vaut $\langle \dot{x}^2 \rangle$ si la température de l'eau est T ?
- Exprimer $\langle x\dot{x} \rangle$ en fonction de $k_B T$, h et $\tau = \frac{m}{h}$ et t .
- Montrer que, pour $t \gg \tau$, $\langle x^2 \rangle \simeq 2Dt$ où D s'exprime en fonction de $k_B T$ et h .
- La particule brownienne est une sphère de rayon $a = 10 \text{ } \mu\text{m}$, de masse volumique $\mu = 1,2 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $T = 298 \text{ K}$ et $h = 6\pi\eta a$ où $\eta = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ est la viscosité de l'eau. On rappelle : $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$. Calculer numériquement τ ainsi que la distance moyenne parcourue en une seconde.

19. Effet thermoélectronique

On communique aux électrons d'une plaque métallique en tungstène de l'énergie par chauffage. On admet que les électrons se comportent comme les molécules d'un gaz parfait et suivent la statistique de MAXWELL-BOLTZMANN. Le nombre dn_v d'électrons de conduction par unité de volume, ayant une composante de leur vitesse suivant un axe (Ox) égale à v_x à dv_x près, est donné par l'expression :

$$dn_v = n_v \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{m v_x^2}{2 k_B T} \right) dv_x$$

où n_v est le nombre total d'électrons de conduction par unité de volume.

- L'énergie d'extraction W_s est l'énergie nécessaire pour qu'un électron soit extrait du métal. Quelle vitesse minimale v_0 doit avoir un électron pour sortir du métal ? Effectuer l'application numérique pour $W_s = 4,5 \text{ eV}$.
- En se limitant à la direction (Ox), perpendiculaire à la plaque, quel domaine de vitesse correspond aux électrons sortants ? En déduire le nombre total d'électrons émis par unité de temps et de surface, ainsi que le vecteur densité de courant électrique volumique maximal \vec{J}_e .
- Le tungstène a des masses molaire et volumique $M = 184 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $\rho = 19,3 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. En outre, sa conduction électrique est assurée par un électron par atome. Calculer n_v puis le vecteur densité de courant électrique volumique à 2000 K .

20. Polarisation d'un diélectrique

La répartition des charges dans certaines molécules dissymétriques, soumises à un champ électrique, les rend équivalentes à des dipôles électriques permanents. On suppose que, dans le milieu diélectrique étudié, tous les dipôles ont un moment dipolaire \vec{p} , de même norme p mais d'orientation différente d'une molécule à l'autre. La direction du moment dipolaire est repérée par les angles θ et φ des coordonnées sphériques. On suppose qu'en tout point du diélectrique existe un champ électrique uniforme constant \vec{E} parallèle à l'axe (Oz) de ce système de coordonnées. On rappelle que l'énergie potentielle \mathcal{E}_p d'un dipôle rigide dans le champ électrique \vec{E} a pour expression $\mathcal{E}_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$. De plus, on précise que, pour $x \ll 1$, on dispose de la relation approchée $\coth x \simeq 1/x + x/3$.

1. Préliminaire : depuis un point O , un moment dipolaire \vec{p} peut posséder toutes les directions possibles de façon équivalente (isotropie). Quelle est la probabilité $d^2\mathcal{P}$ pour le dipôle d'être dans une direction indiquée par le repérage (θ, φ) des coordonnées sphériques à $(d\theta, d\varphi)$ près ? On pourra utiliser la notion d'angle solide.
2. Dans le milieu diélectrique en équilibre avec un thermostat à la température T , le nombre de dipôles orientés selon la direction (θ, φ) à $(d\theta, d\varphi)$ près s'écrit :

$$d^2 N_{\theta, \varphi} = A \exp(-\beta \mathcal{E}_p) \sin \theta d\theta d\varphi$$

où A est une constante et $\beta = 1/(k_B T)$ est la température inverse. Commenter cette loi.

3. En l'absence d'agitation thermique, comment s'orientent les N dipôles du milieu ? Quel est l'effet de l'agitation thermique sur le moment dipolaire total ?
4. Montrer que le moment dipolaire total est parallèle à (Oz) et calculer la valeur moyenne $\overline{p_z}$ de la projection de \vec{p} sur (Oz) . La représenter en fonction de $\beta p E$.
5. Pour des champs \vec{E} pas trop intenses ou des températures assez élevées, $\beta p E \ll 1$. Montrer que les molécules du milieu diélectrique ont alors un moment dipolaire moyen proportionnel au champ électrique et calculer la polarisabilité α telle que $\overline{p_z} = \alpha \epsilon_0 E$.
6. À $T = 300 \text{ K}$ et pour un moment dipolaire moyen de 1 Debye, l'approximation $\beta p E \ll 1$ est-elle justifiée ? Pour rappel, le debye vaut environ $3,3 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$.

21. Modèle de fil élastique

On modélise un fil élastique par un ensemble de N maillons $O_n O_{n+1}$ de même longueur a avec $N \gg 1$. Ces maillons sont tels que :

$$\overrightarrow{O_n O_{n+1}} = \epsilon_n a \vec{e}_x \quad \text{avec} \quad \epsilon_n = \pm 1$$

On pose $N_+ = \frac{1+x}{2} N$ le nombre de maillons tels que $\epsilon_n = +1$. De plus, on précise l'entropie du système vérifie la formule de Boltzmann $S = k_B \ln \Omega$ où k_B est la constante de BOLTZMANN et Ω est le nombre de micro-états (pour un macro-état donné).

1. Exprimer $L = O_0 O_n$ en fonction de N , a et x .
2. On suppose que $L \ll Na$ et on rappelle la formule de STIRLING $\ln q! \simeq q \ln q - q$ pour $q \gg 1$. Montrer que l'entropie vaut :

$$S = N k_B \left[\ln 2 - \frac{1}{2} (1+x) \ln(1+x) - \frac{1}{2} (1-x) \ln(1-x) \right]$$

3. On donne le développement limité suivant, pour $x \ll 1$:

$$(1+x) \ln(1+x) + (1-x) \ln(1-x) \simeq x^2$$

En déduire l'expression de S en fonction de k_B , L , N et a .

4. On néglige toute interaction entre les maillons et on admet que l'énergie cinétique microscopique de chaque maillon est de la forme $\alpha k_B T$ où α est une constante. Exprimer l'énergie interne U du fil en fonction de α , N , k_B et T .
5. Pour un fil élastique fixé à une extrémité et tendu à l'autre extrémité par une force F , on peut négliger le travail des forces de pression et le travail au cours d'une évolution élémentaire réversible où le fil s'allonge de dL vaut $\delta W_{\text{rev}} = F dL$. Établir l'expression de F en fonction de T , k_B , N , a et L (on supposera T fixée). Commenter.