

Devoir surveillé de Sciences Physiques n°2 du 10-10-2024

— Durée : 4 heures —

Calculatrice interdite

Problème n° 1 – Au temps des Mayas

Mines MP 2020

Les phénomènes naturels terrestres ou célestes ont nourri, au fil des âges, les cultures des civilisations anciennes et contribué à forger leur vision du monde. Les exemples astronomiques sont nombreux. Il n'est pas rare de trouver, par exemple, des bâtiments orientés selon les directions astronomiques des levers et couchers du Soleil ou de Vénus, astres qui furent souvent associés à des divinités importantes. Dans ce problème, on se propose d'étudier un phénomène physique auquel les Mayas, civilisation précolombienne d'Amérique centrale, ont été confrontés ou pour lequel ils ont manifesté de l'intérêt : l'écho de la grande pyramide de Chichén Itzá.



FIGURE 1 – Vue d'une arête de la grande pyramide Maya de Chichén Itzá (Cuculcán)

Ce monument, érigé autour du X^e siècle de notre ère, est classé au patrimoine mondial de l'UNESCO. Une de ses particularités a fait l'objet d'études archéoacoustiques : un clap produit en frappant dans ses mains face à l'escalier retourne un écho qui imite, de manière stupéfiante, le chant de l'oiseau sacré endémique quetzal (*pharomachrus mocinno*).



FIGURE 2 – Vue d'une face de la grande pyramide Maya de Chichén Itzá (Cuculcán). Au centre de la photographie, se trouve le grand escalier.

La question se pose alors de savoir si ce monument a été érigé en respectant les contraintes acoustiques de reproduction du gazouillement de l'oiseau, ou bien s'il s'agit d'une simple coïncidence. Si la question reste ouverte, l'analyse physique apporte à l'archéologie quelques éléments notamment en permettant de comprendre l'origine de ce phénomène.

Ce problème s'appuie sur les fondamentaux des phénomènes ondulatoires. Aucune connaissance spécifique d'acoustique n'est requise.

A. Sonogramme

On enregistre, à l'aide d'un microphone, le son d'une note de musique tenue produite en sifflant avec la bouche. On note $s_a(t)$ le signal obtenu. Le spectre d'amplitude du signal en sortie du microphone est donné sur la figure 3, l'échelle verticale étant graduée en décibels. L'amplitude du pic 1 vaut $a_1 = 100$ mV.

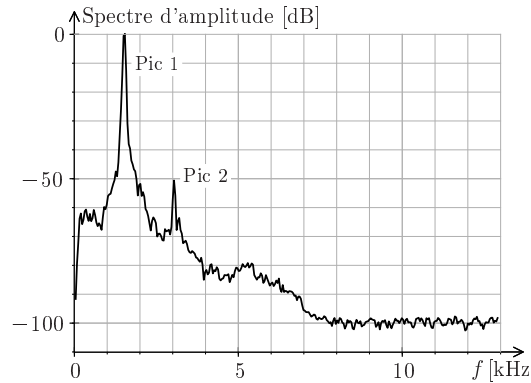


FIGURE 3 – Spectre d'amplitude d'un son sifflé tenu.

1. Déterminer la fréquence f_1 du fondamental (pic 1) de cette note ainsi que l'amplitude a_2 du pic 2. On donne $10^{0,5} \approx 3,16$.

Les pics 1 et 2 sont assimilés à des composantes harmoniques et on néglige tout autre contenu spectral. On note T_a la durée totale de l'enregistrement et f_e la fréquence d'échantillonnage. La méthode d'analyse spectrale employée génère un spectre dont la résolution spectrale, notée δf , est l'inverse de la durée d'acquisition du signal.

2. Calculer numériquement la plus petite valeur de f_e respectant la condition de NYQUIST-SHANNON, et la durée d'acquisition T_a donnant une résolution spectrale de 100 Hz.

Un sonogramme est une représentation graphique permettant de visualiser l'évolution des composantes harmoniques d'un son au cours du temps. Dans sa version simplifiée, c'est un diagramme à deux dimensions ayant en abscisse le temps et en ordonnée les fréquences. À un instant t donné, une composante harmonique de fréquence f est représentée par un point de coordonnées (t, f) . Le sonogramme simplifié de $s_a(t)$ est représenté sur la figure 4 a). Dans un sonogramme complet, on ajoute l'information sur l'amplitude des composantes harmoniques en grisant les points du diagramme à l'aide d'une échelle allant du blanc pour les faibles amplitudes (< -50 dB), au noir pour les fortes (> 0 dB). Le sonogramme complet de $s_a(t)$ est donné sur la figure 4 b). Pour construire un sonogramme, on calcule les spectres successifs du signal entre les dates nT_a et $(n+1)T_a$, n étant un entier positif ou nul et T_a la durée des intervalles temporels d'acquisition.

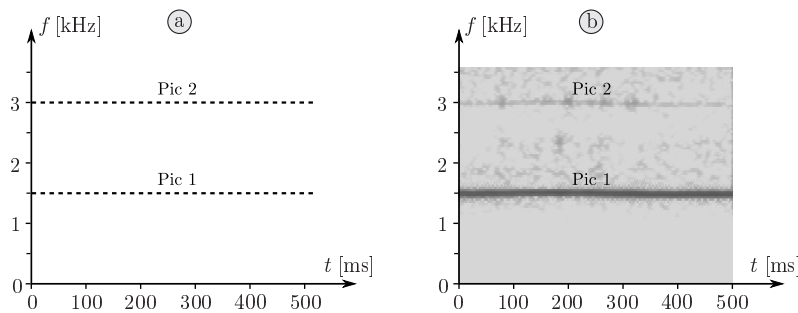


FIGURE 4 – Sonogramme d'un son sifflé tenu a) simplifié b) complet.

3. On note τ la durée totale de l'enregistrement sonore. La résolution spectrale δf du sonogramme dépend-elle de T_a ou de τ ? Combien de pixels (rectangles élémentaires composant le sonogramme) comporte un sonogramme de fréquence maximale f_M et de durée τ ? Effectuer l'application numérique lorsque $f_M = 3,5$ kHz et $\tau = 500$ ms.

On produit un nouveau son sifflé, $s_b(t)$, mais cette fois, de hauteur décroissante (donc vers les sons graves). Ce son possède encore deux composantes harmoniques, mais la fréquence f'_1 du fondamental décroît au cours du temps de manière affine : $f'_1(t) = f_1 \times (1 - t/\tau_d)$, $\tau_d > 0$ étant une constante temporelle.

4. Quelle condition doit vérifier τ_d afin que l'on puisse suivre l'évolution temporelle de la fréquence du fondamental sur le sonogramme ? Construire le sonogramme simplifié de $s_b(t)$ dans l'intervalle temporel $[0; 0,5\tau_d]$. On prendra soin de mentionner sur le graphique toutes les informations connues.

Le chant d'un oiseau est plus riche en harmoniques que le sifflement précédent. Le sonogramme d'un quetzal jeune est représenté sur la figure 5 extraite de LUBMAN, D., J. Acoust. Soc. Am. 112 (5), 2008.

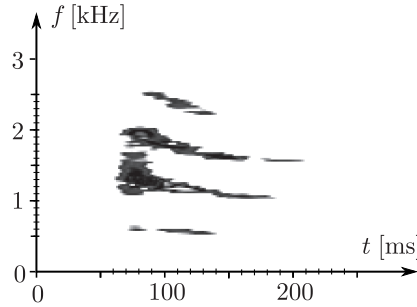


FIGURE 5 – Sonogramme du quetzal.

5. Déterminer la durée approximative τ_q du chant du quetzal puis mesurer, à la date $t = 140$ ms, la fréquence $f_{q,1}$ du fondamental du chant ainsi que celles $f_{q,i}$ (i entier) des autres harmoniques visibles sur le sonogramme.

B. Diffraction du son par une marche de l'escalier

Lorsque l'on frappe dans ses mains en face de l'escalier, depuis une position S que l'on supposera voisine du sol (figure 6), le clap produit se propage dans l'air en direction des marches. Ces dernières sont modélisées par des obstacles de petite dimension, qu'on localise arbitrairement en S_n (les arêtes des marches), n allant de 0 à $N = 91$. On note $a = 20$ m la distance entre S et le bas S_0 des marches de la pyramide. La hauteur $b = 26,3$ cm des marches est égale à leur profondeur de sorte que les arêtes S_n soient contenues dans un plan formant un angle de 45° par rapport au plan horizontal.

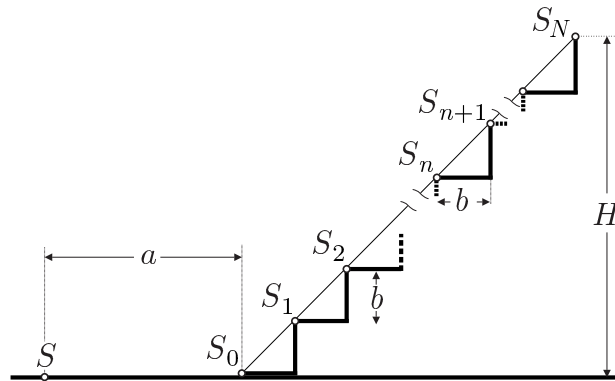


FIGURE 6 – Les marches de la pyramide.

L'hypothèse testée est que l'écho entendu par l'auteur du clap, ressemblant à s'y méprendre au chant du quetzal, résulte de la diffraction du son sur les marches de l'escalier. Le clap émis en S , à un instant pris comme origine temporelle, est un signal bref, noté $s(t)$ au point d'émission S . La distance entre S et l'arête de la n -ième marche est appelée $d_n = SS_n$. Pour modéliser la propagation du son, on note $\Psi(M, t)$ la fonction qui décrit l'onde sonore en un point M de l'espace à l'instant t : par exemple ici $\Psi(S, t) = s(t)$. On note $c_s \approx 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ la célérité du son dans l'air. On assimilera la propagation de l'onde le long de l'axe SS_n à une propagation unidimensionnelle linéaire non dispersive ; ainsi, on ignore toute variation d'amplitude au cours de la propagation. Lorsque l'onde atteint une arête S_n , elle est « renvoyée » dans toutes les directions (par diffraction), et en particulier, dans la direction S_nS . On suppose qu'après diffraction, la fonction décrivant l'onde retour, notée $\Psi'(M, t)$, dont la

propagation est encore supposée unidimensionnelle (modélisation identique à celle de l'onde incidente), s'écrit en S_n : $\Psi'(S_n, t) = \kappa \Psi(S_n, t)$ où κ est un facteur (nombre sans dimension) indépendant de n .

6. Exprimer $\Psi(S_n, t)$ puis $\Psi'(S, t)$ en fonction notamment de la fonction s .

Le spectre du clap $s(t)$ dans le domaine audible est continu : toutes les fréquences y sont présentes. On supposera par ailleurs qu'elles ont toutes la même amplitude. On considère une composante harmonique $s_\omega(t)$ du clap, de pulsation ω , dont on suppose la phase $\phi(t)$ nulle à l'origine temporelle soit $s_\omega(t) = s_m \cos[\phi(t)]$. On prendra $\phi(t) = \omega t$ et on considère que s_m ne varie pas dans le temps.

7. Exprimer la phase $\phi'_n(t)$ à l'instant t de la composante harmonique de pulsation ω de l'onde retour en S diffractée en S_n , en fonction notamment de d_n .

C. Superposition constructive en S

Le clap étant bref, on suppose que seules deux marches consécutives diffractent le son incident. On note la différence de phase en S entre les deux ondes retour diffractées $\Delta\phi'_n = \phi'_n(t) - \phi'_{n+1}(t)$.

8. Exprimer $\Delta\phi'_n$ en fonction notamment des distances d_n et d_{n+1} .

On fait l'hypothèse que les seules fréquences audibles sont celles pour lesquelles les ondes diffractées se superposent constructivement.

9. Dédire de cette hypothèse l'ensemble des fréquences $\{\nu_m, m \in \mathbb{N}\}$ entendues lors du retour du son diffracté par les marches S_n et S_{n+1} , en fonction notamment des distances d_n et d_{n+1} .

10. Exprimer d_n en fonction de a , b et n . Calculer l'expression exacte de $d_{n+1}^2 - d_n^2$. On admet que la condition de l'expérience $a \gg b$ permet d'écrire $d_n + d_{n+1} \simeq 2d_n$: en déduire l'expression approchée suivante $\nu_1 \simeq \frac{c_s}{2ab} g(n)d_n$ où $g(n)$ est une fonction que l'on explicitera.

La figure 7 donne la représentation graphique de $g(n)d_n$ en fonction de d_n pour les 91 valeurs de n . Elle permet d'éviter des calculs fastidieux à la main...

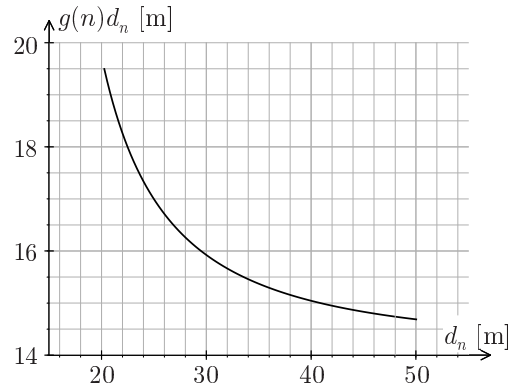


FIGURE 7 – $g(n)d_n$ en fonction de d_n .

11. En exploitant la figure 7, déterminer la distance d_N entre le sommet de l'escalier et S . On fixe l'origine temporelle à l'instant du clap. Calculer numériquement la date t_1 d'arrivée du début de l'écho en S , puis celle t_N de fin de l'écho. Combien de temps l'écho dure-t-il ?

12. Calculer numériquement les fréquences $\nu_1(t_1)$ et $\nu_1(t_N)$.

13. Tracer l'allure du sonogramme simplifié de l'écho comportant le fondamental du son ainsi que les trois harmoniques qui le suivent. On marquera d'une croix bien visible les points du sonogramme d'abscisses t_1 et t_N .

14. Comparer le sonogramme construit à la question précédente, au sonogramme du quetzal (figure 5). L'écart fréquentiel est-il négligeable ? L'écart se réduirait-il si l'enregistrement du quetzal était celui d'un oiseau adulte ?

Problème n° 2 – Modulation acousto-optique

X PSI 2021

Ce sujet a été adapté pour MP.

Le fonctionnement d'un modulateur acousto-optique repose sur l'interaction entre un faisceau optique et une onde acoustique dans un cristal. Les applications d'un tel dispositif sont nombreuses. Nous nous intéresserons dans ce problème à l'analyse des fréquences de vibration dans un cristal. Ainsi, nous allons dans un premier temps étudier les principes de la propagation d'ondes acoustiques, dans l'air et dans un cristal. Ces ondes acoustiques peuvent être générées à l'aide d'un transducteur piézoélectrique. Enfin, nous explorerons les moyens de mettre en œuvre l'analyse spectrale à l'aide de différentes méthodes optiques.

Notations, formulaires et données numériques.

- Pour un champ scalaire φ , $\text{div } \overrightarrow{\text{grad}} \varphi = \Delta \varphi$ où Δ est l'opérateur laplacien.
- Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
- À 20°C pour l'air, la compressibilité isentropique est $\chi_S = 7,00 \times 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$ et la masse volumique est $\rho_0 = 1,20 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

A. Génération d'ondes acoustiques

Nous étudions dans cette partie, un dispositif permettant la génération d'ondes acoustiques dans une certaine gamme de fréquence. Il s'agit d'un émetteur d'ondes acoustiques ultrasonores, relié à une source de tension sinusoïdale. Ce dispositif expérimental, usuellement utilisé en séance de TP, est constitué d'un matériau piézoélectrique. Le comportement d'un tel matériau et la modélisation de sa réponse à une sollicitation seront détaillés plus loin. Le principe de fonctionnement d'un émetteur ultrasonore est le suivant : sous l'influence d'une tension oscillant à une certaine fréquence, le matériau piézoélectrique vibre. Cette vibration provoque une surpression acoustique à l'origine d'une onde acoustique.

Étude fréquentielle de l'émetteur ultrasonore

À l'aide d'un générateur de signaux, on alimente un émetteur ultrasonore par une tension sinusoïdale $U_e(t) = U_0 \cos 2\pi f t$, de fréquence f que nous pouvons faire varier, et d'amplitude U_0 . On mesure l'amplitude de l'onde acoustique à l'aide d'un microphone qui convertit la surpression acoustique en une tension $U_s(t) = U_{sm} \cos(2\pi f t + \varphi)$. Les résultats sont représentés à la figure 8. On trace $\frac{U_{sm}}{U_0}$ en fonction de la fréquence.

Émetteur et récepteur se font face. On considère que le récepteur présente une réponse uniforme sur la plage de fréquences considérée et on souhaite caractériser la réponse en fréquence de l'émetteur.

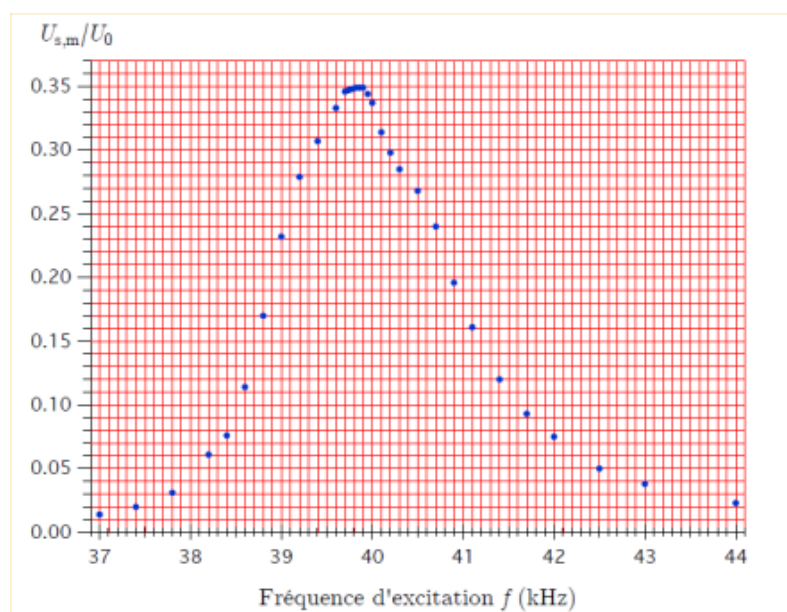


FIGURE 8 – Tracé de $\frac{U_{sm}}{U_0}$ en fonction de la fréquence d'excitation f .

1. Interpréter la courbe de réponse de la figure 8, comme celle d'un filtre dont on précisera la nature et dont on évaluera la fréquence propre f_p , la bande passante Δf à -3 dB et le facteur de qualité Q .

2. Rappeler la gamme de fréquences sur laquelle l'oreille humaine est sensible. Conclure quant à la dénomination de l'émetteur.

Étude de la propagation des ondes acoustiques

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques résultats relatifs à la propagation des ondes acoustiques dans l'air. On modélise l'air comme un fluide homogène, sans viscosité, de masse volumique ρ et de compressibilité isentropique χ_S . On négligera l'influence du champ de pesanteur. À l'équilibre, le fluide est caractérisé par un champ de pression uniforme, noté P_0 , une masse volumique uniforme, notée ρ_0 , et un champ de vitesse uniforme de valeur nulle $\vec{v} = \vec{0}$.

En présence d'une perturbation acoustique, les amplitudes des champs de pression $P(\vec{r}, t)$, de vitesse $\vec{v}(\vec{r}, t)$ et de masse volumique $\rho(\vec{r}, t)$ diffèrent de leurs valeurs à l'équilibre. La perturbation sera caractérisée par les grandeurs $p(\vec{r}, t)$, $\mu(\vec{r}, t)$ et $\vec{v}(\vec{r}, t)$ telles que :

$$\begin{aligned} P(\vec{r}, t) &= P_0 + p(\vec{r}, t) \\ \rho(\vec{r}, t) &= \rho_0 + \mu(\vec{r}, t) \\ \vec{v}(\vec{r}, t) &= \vec{0} + \vec{v}(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

Le vecteur \vec{r} situe la position dans l'espace du point M , dans un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ associé au référentiel du laboratoire, supposé galiléen. On se place dans l'approximation acoustique : $\forall \vec{r}, \forall t$, on a $|p(\vec{r}, t)| \ll P_0$ et $|\mu(\vec{r}, t)| \ll \rho_0$ et $\|\vec{v}(\vec{r}, t)\|$ est considérée comme petite par rapport aux vitesses caractéristiques de la propagation de l'onde. Ainsi, les trois grandeurs $p(\vec{r}, t)$, $\mu(\vec{r}, t)$ et $\vec{v}(\vec{r}, t)$ sont considérées comme infiniment petites dans la suite.

On rappelle à toutes fins utiles l'équation d'EULER, l'équation de conservation de la masse et la définition de la compressibilité isentropique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} P \\ \text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ \chi_S = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} \Big|_S \end{array} \right.$$

3. Se placer dans le cadre de l'approximation acoustique consiste à linéariser le système d'équations précédent en s'appuyant sur le caractère perturbatif de l'onde acoustique par rapport à la situation d'équilibre de l'air. Dans ce contexte, les trois équations précédentes deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} p \\ \rho_0 \text{div} \vec{v} + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0 \\ \chi_S = \frac{1}{\rho_0} \frac{\mu}{p} \end{array} \right.$$

Expliquer cette évolution du système d'équations.

4. Établir l'équation de D'ALEMBERT pour la surpression $p(\vec{r}, t)$:

$$\Delta p(\vec{r}, t) - \frac{1}{c_a^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

où l'on exprimera c_a en fonction de ρ_0 et χ_S .

5. On souhaite mesurer la célérité des ondes acoustiques dans l'air. Pour cela, on place deux récepteurs ultrasonores en face d'un émetteur ultrasonore, qui fonctionnent sous sur le même principe que l'émetteur ultrasonore étudié précédemment. L'émetteur envoie régulièrement des trains d'onde et on écarte un récepteur d'une distance $d_{rec} = 17$ cm par rapport à l'autre récepteur. Les deux récepteurs sont excités par un train d'onde de l'émetteur et les signaux obtenus à l'oscilloscope sont représentés à la figure 9.

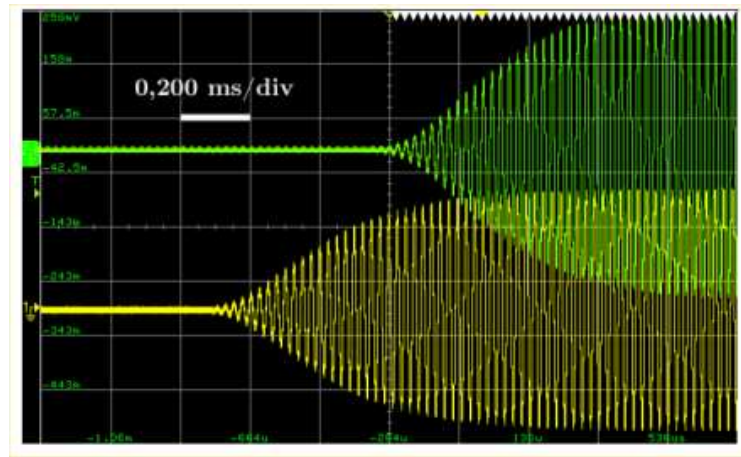


FIGURE 9 – Signaux expérimentaux délivrés par les deux récepteurs ultrasonores. Une grande division selon l'axe des abscisses correspond à $200 \mu\text{s}$ comme indiqué sur la figure.

En exploitant ces oscillogrammes, déterminer la valeur de la célérité des ondes acoustiques dans cette expérience. Comparer la valeur mesurée à la valeur théorique.

Propagation d'ondes acoustiques dans un cristal

La propagation des ondes acoustiques ne se limite pas à un fluide. Il est possible de modéliser la propagation d'une onde de compression dans un solide cristallin, en s'intéressant aux vibrations du réseau cristallin. Nous considérons un modèle unidimensionnel de cristal, de longueur L , constitué de N atomes identiques de même masse m . À l'équilibre, chaque atome est situé sur un nœud du réseau cristallin de pas a et d'axe Ox . La position d'équilibre du n -ième atome est na , avec n entier naturel dans l'intervalle $[1; N]$. Sous l'influence d'une excitation collective, la position d'un atome au cours du temps peut varier. Elle est désignée par son abscisses $x_n(t)$, repérée par rapport à l'origine O du repère, placée à une extrémité du cristal. Pour un atome quelconque indexé par n , on définit $u_n(t) = x_n(t) - na$, l'écart à sa position d'équilibre. L'interaction d'un atome avec son environnement est modélisé par une force de rappel de constante de raideur K pour chacun des atomes voisins. On néglige l'influence du champ de pesanteur. Les différentes notations sont rappelées sur le schéma de la figure 10.

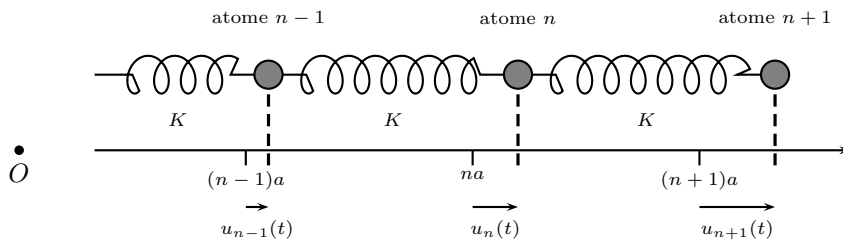


FIGURE 10 – Représentation du modèle unidimensionnel d'un cristal. Chaque atome est relié à ses deux voisins par un ressort de constante de raideur K et de longueur à vide a .

6. Établir l'équation différentielle reliant $u_n(t)$, $u_{n-1}(t)$ et $u_{n+1}(t)$.

7. On cherche des solutions sous la forme d'ondes planes, faisant apparaître le caractère discret du réseau cristallin, et dont l'expression est : $u_n(t) = u_0 \exp i(qna - \omega t)$. Montrer que la relation de dispersion $\omega(q)$ se met sous la forme suivante :

$$\omega(q) = A \left| \sin \left(\frac{qa}{2} \right) \right|$$

où A est une constante à exprimer en fonction des données.

8. On suppose le cristal de longueur suffisamment grande pour négliger les effets de bord et considérer le cristal comme infini. Afin de faire disparaître les effets de bord, nous utilisons des conditions aux limites périodiques : nous supposons que les deux extrémités sont liées entre elles de sorte à fermer la chaîne linéaire d'atomes sur elle-même. Cela se traduit par la condition mathématique $u_{N+1}(t) = u_1(t)$. En déduire que $q = pq_0$ où $p \in \mathbb{Z}$, q_0

étant à exprimer en fonction des données. Chaque nombre d'onde q , quantifié par l'entier relatif p , correspond alors à un mode de vibration du cristal.

9. En considérant q et q' deux nombres d'onde tels que $q - q' = h \times \frac{2\pi}{a}$, où $h \in \mathbb{Z}$, expliquer pourquoi nous pouvons restreindre l'étude aux nombres d'onde q appartenant à l'intervalle $[-\frac{\pi}{a}; \frac{\pi}{a}]$.

10. Représenter graphiquement sur cet intervalle, appelé première zone de BRILLOUIN, l'évolution de la pulsation $\omega(q)$ en fonction de q .

11. Proposer un critère quantitatif permettant de fixer un domaine sur lequel la relation de dispersion $\omega(q)$ en fonction de q peut être linéarisée. Donner alors le lien entre ω et q . À quoi correspond le facteur de proportionnalité ? On fera apparaître cette relation linéaire sur le graphique de la question précédente.

12. Ainsi décrite, l'onde se propageant le long du réseau cristallin peut être assimilée à une quasi-particule, appelée phonon, matérialisant la propagation d'un mode de vibration au sein du cristal induite par le mouvement collectif d'oscillation des atomes. Par analogie avec un autre domaine de la physique, nommer la particule associée à une onde également caractérisée par une relation de dispersion linéaire.

B. Fonctionnement d'un transducteur piézoélectrique

Pour générer une onde acoustique dans l'air ou dans un cristal, nous utilisons un transducteur piézoélectrique dont nous allons étudier le fonctionnement. La piézoélectricité est une propriété électromécanique de certains matériaux. Elle correspond à l'apparition d'une polarisation électrique sous l'effet d'une contrainte sur le matériau induisant une déformation ou, inversement, à la déformation du matériau sous l'effet d'un champ électrique. Voir la figure 11.

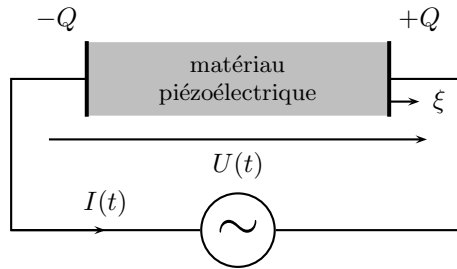


FIGURE 11 – Sollicitation d'un cristal piézoélectrique par une tension sinusoïdale.

On note C la capacité du condensateur formé par le matériau piézoélectrique, γ la constante piézoélectrique et k la constante de raideur de la force de rappel. On note F la force correspondant à un allongement ξ du matériau. Le fonctionnement du matériau piézoélectrique est régi par les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} U = \frac{Q}{C} + \gamma \xi \\ F = \gamma Q + k \xi \end{cases}$$

13. En déduire la force de rappel qui s'exerce sur l'armature de charge $+Q$, si celle-ci présente un déplacement ξ par rapport à sa position au repos en $x = L$. De plus ; la modélisation de la dissipation au sein du matériau piézoélectrique lors du mouvement de l'armature se traduit par une action mécanique $\vec{f}_\xi = -\alpha \frac{d\xi}{dt} \vec{e}_x$ qui s'exerce sur celle-ci. On suppose par ailleurs que l'armature est caractérisée par une masse effective m , qui prend en compte l'inertie du matériau piézoélectrique. Montrer alors que l'équation différentielle régissant le mouvement de l'armature se met sous la forme suivante :

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \alpha \frac{d\xi}{dt} + k \xi + \gamma Q = 0$$

On impose entre les armatures du matériau piézoélectrique une tension sinusoïdale $U(t) = U_0 \cos \omega t$ dont la représentation complexe est $\underline{U}(t) = U_0 \exp i \omega t$ avec $U_0 \in \mathbb{R}^+$. La représentation complexe de l'élongation algébrique $\xi(t)$ est donnée par $\underline{\xi}(t) = \underline{\xi}_0 \exp i \omega t$ où $\underline{\xi}_0 = \xi_0 \exp i \varphi$, $\xi_0 \in \mathbb{R}$.

14. Montrer que la fonction de transfert électromécanique du système $\underline{H}_{elm}(\omega)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{H}_{elm} = \frac{\underline{\xi}_0}{U_0} = \frac{H_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + i \frac{\omega}{Q_{elm} \omega_0}}$$

où l'on exprimera H_0 , ω_0 et Q_{elm} en fonction des paramètres du problème. On supposera que $k > \gamma^2 C$.

15. Déterminer l'expression du module $|\underline{H}_{elm}(\omega)|$ de la fonction de transfert en fonction de H_0 , ω , ω_0 et Q_{elm} . Déterminer pour quelle valeur $\omega_m > 0$ de ω la réponse du système est maximale, en précisant la condition pour laquelle ω_m existe.

16. Dans l'approximation d'une résonance aiguë, c'est-à-dire pour $Q_{elm} \gg 1$, exprimer ω_m en fonction de ω_0 . Étudier le comportement asymptotique de $|\underline{H}_{elm}|$ pour $\omega \gg \omega_m$ et $\omega \ll \omega_m$. Représenter graphiquement la courbe $|\underline{H}_{elm}(\omega)|$. On fera apparaître les valeurs de $|\underline{H}_{elm}|$ pour $\omega = 0$ et $\omega \rightarrow \infty$, ainsi que l'ordonnée et l'abscisse du point correspondant à la résonance.

17. Comparer la courbe de la fonction de transfert électromécanique obtenue avec la courbe expérimentale de la figure 8. À partir de l'évaluation des paramètres expérimentaux réalisée au départ, discuter l'approximation réalisée à la question précédente.

Modèle électrocinétique d'un transducteur piézoélectrique

Le système $\mathcal{S} = \{\text{armatures} + \text{matériau piézoélectrique}\}$ peut être étudié par une approche électrocinétique dont le lien avec la modélisation électromécanique sera étudié après. On modélise le système \mathcal{S} par un circuit électrique équivalent représenté à la figure 12. Le système \mathcal{S} entre les bornes A et B est alimenté par une tension sinusoïdale $U(t)$ de pulsation ω .

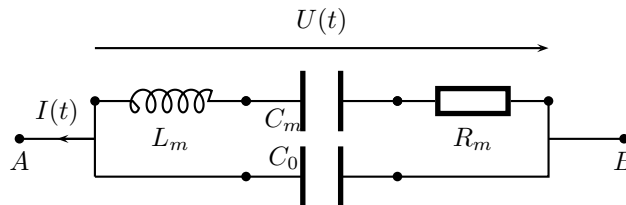


FIGURE 12 – Modélisation électrocinétique d'un transducteur piézoélectrique

18. Montrer que l'impédance du dipôle électrique \underline{Z}_{AB} s'écrit de la manière suivante :

$$\underline{Z}_{AB} = \frac{1}{iC_0\omega} \frac{1 + iQ_r \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \right)}{1 + iQ_a \left(\frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right)}$$

On exprimera ω_r , ω_a , Q_r et Q_a en fonction de L_m , C_0 , C_m et R_m . En déduire l'expression du module $|\underline{Z}_{AB}|$ de l'impédance complexe \underline{Z}_{AB} .

19. En ignorant le préfacteur $1/C_0\omega$, déterminer successivement les minima du numérateur et du dénominateur de $|\underline{Z}_{AB}|$ en fonction de ω . En déduire si $|\underline{Z}_{AB}(\omega_r)|$ et $|\underline{Z}_{AB}(\omega_a)|$ sont des minima ou des maxima de $|\underline{Z}_{AB}|$.

20. L'amplitude de la tension étant fixée par la source, justifier qu'on observe une résonance concernant l'émission d'une onde sonore pour $\omega = \omega_r$ et une anti-résonance pour $\omega = \omega_a$.

Lien entre le modèle électromécanique et le circuit équivalent

21. Le courant $I(t)$ représenté sur les figures 11 et 12 et $Q(t)$ la charge des armatures du matériau piézoélectrique ont pour notation complexe respectivement \underline{I} et \underline{Q} . Montrer que l'impédance $\underline{Z}_{\mathcal{S}}$ du système \mathcal{S} peut se mettre sous la forme de l'impédance \underline{Z}_{AB} du dipôle électrique AB .

22. Relier les paramètres électrocinétiques C_0 , C_m , R_m et L_m aux paramètres électromécaniques γ , C , α , m et k .

23. Identifier le paramètre électrocinétique responsable de la dissipation dans le système. Est-ce cohérent avec le modèle électromécanique ?

C. Analyseur spectral

Nous étudions dans cette partie le principe d'un modulateur acousto-optique. Le cristal peut contenir plusieurs modes de vibration, associés à plusieurs fréquences acoustiques. Le dispositif présenté ici peut être utilisé pour analyser les modes de vibration dans un cristal excités par un transducteur piézoélectrique. Ce dispositif repose sur l'interaction entre une onde électromagnétique et les modes de l'onde acoustique dans un cristal.

Interaction entre un champ électromagnétique et les phonons

On considère le système d'un modulateur acousto-optique, présenté à la figure 13, où une source laser illumine un cristal parcouru par une onde acoustique progressive, créée par un dispositif piézoélectrique.

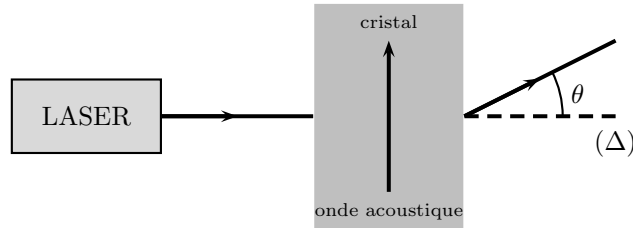


FIGURE 13 – Schéma de principe de l'utilisation d'un modulateur acousto-optique

Une onde lumineuse monochromatique de pulsation ω en incidence normale sur le cristal est matérialisée par un rayon lumineux. Le faisceau incident est issu de la source laser, parallèle à l'axe optique (Δ). À la suite de son passage dans le cristal, le faisceau lumineux est dévié d'un angle θ par rapport à l'axe optique. Cet angle dépend des propriétés du cristal et de l'onde incidente.

Pour modéliser l'interaction entre l'onde lumineuse et l'onde acoustique générée dans le cristal, nous adoptons une approche corpusculaire. Voir le schéma de la figure 14.

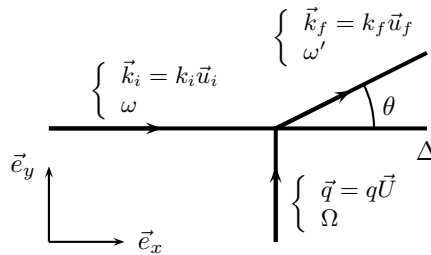


FIGURE 14 – Approche corpusculaire de l'interaction d'une onde électromagnétique avec une onde acoustique dans un cristal. Le vecteur d'onde et la pulsation sont rappelés pour chaque particule et quasi-particule.

- ★ L'onde lumineuse incidente de pulsation ω , de longueur d'onde λ et de direction de propagation \vec{u}_i peut être décrite par un flux de photons. On note alors $\vec{k}_i = k_i \vec{u}_i$ le vecteur d'onde d'un photon incident, $\mathcal{E}_i = \hbar\omega$ son énergie¹ et $\vec{p}_i = \hbar \vec{k}_i$ sa quantité de mouvement.
- ★ L'onde lumineuse émergente de pulsation ω' , de longueur d'onde λ' et de direction de propagation \vec{u}_f peut être décrite par un flux de photons. On note alors $\vec{k}_f = k_f \vec{u}_f$ le vecteur d'onde d'un photon incident, $\mathcal{E}_f = \hbar\omega'$ son énergie et $\vec{p}_f = \hbar \vec{k}_f$ sa quantité de mouvement.
- ★ L'onde acoustique dans le cristal de pulsation Ω , de longueur d'onde Λ et de direction de propagation \vec{U} peut être décrite par une quasi-particule appelée phonon, comme nous l'avons remarqué précédemment. On note alors \vec{q} le vecteur d'onde du phonon, $\mathcal{E} = \hbar\Omega$ son énergie et $\vec{P}_i = \hbar \vec{q}$ sa quantité de mouvement.
- ★ L'interaction entre l'onde lumineuse et l'onde acoustique se traduit par l'interaction entre un photon incident de quantité de mouvement \vec{p}_i et un phonon incident de quantité de mouvement \vec{P}_i pour donner un photon émergent de quantité de mouvement \vec{p}_f comme présenté à la figure 13. On considère que le phonon est absorbé à la suite de l'interaction avec l'onde lumineuse.

Nous supposons que les photons se déplacent dans le vide.

1. On rappelle que $\hbar = h/2\pi$.

24. Rappeler l'expression de la relation de dispersion $k(\omega)$ pour des ondes électromagnétiques dans le vide, ici assimilées à des photons.

25. Établir la relation liant ω , ω' et Ω .

26. On souhaite déterminer la fréquence de l'onde acoustique dans le cristal. Un spectromètre optique usuel possède une résolution d'environ $\Delta\lambda_{spec} = 1 \text{ nm}$. On considère une onde acoustique de fréquence $F = 200 \text{ MHz}$ à la célérité $c_s = 1,00 \times 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et la source laser émet une radiation de longueur d'onde $\lambda = 600 \text{ nm}$. Préciser à quelle couleur correspond cette longueur d'onde. Expliquer pourquoi un tel spectromètre ne permet pas de déterminer la valeur de Λ . On pourra réaliser des approximations pertinentes qui pourront être réutilisées dans la suite.

27. En utilisant la conservation de la quantité de mouvement, obtenir deux relations : l'une exprimant q en fonction de k_f et θ , l'autre reliant k_i , k_f et θ .

28. Exprimer $\sin \theta$ en fonction de F , c_s et λ puis évaluer numériquement $\sin \theta$.

29. En déduire, à l'aide d'une approximation, une expression simple de θ en fonction de Λ et λ . Quel phénomène optique avons-nous modélisé ici ?

Montage optique

On souhaite réaliser un montage optique afin d'analyser les faisceaux en sortie du cristal pour déterminer les longueurs d'onde des modes acoustiques présents dans le cristal. On se propose dans cette partie d'utiliser deux montages différents mettant en œuvre deux techniques d'analyse différentes.

Conjugaison des angles

La première technique consiste à réaliser un montage optique pour faire correspondre les angles en sortie du cristal avec un déplacement latéral du point d'impact du faisceau dans le plan focal d'un objectif de microscope. On considère pour cela le montage présenté à la figure 15 composé de lentilles minces convergentes (L_1) et (L_2) de distances focales respectives $f_1 > 0$ et $f_2 > 0$ et d'un objectif de microscope équivalent à une lentille mince convergente de focale $f_{obj} > 0$. La surface de détection d'une caméra est placée dans le plan focal image de l'objectif afin d'observer le faisceau lumineux. On éclaire le cristal avec un faisceau laser de longueur d'onde $\lambda = 600 \text{ nm}$ et on suppose pour simplifier qu'il existe deux modes acoustiques dans le cristal de longueurs d'onde Λ_1 et Λ_2 correspondant respectivement aux angles d'émission θ_1 et θ_2 . On considère que les deux modes acoustiques ont des longueurs d'ondes proches, telles que $\Lambda_1 = \Lambda_0 + \Delta\Lambda/2$ et $\Lambda_2 = \Lambda_0 - \Delta\Lambda/2$ avec $\Delta\Lambda \ll \Lambda_0$. On pourra considérer que pour tout angle α , on a $\tan \alpha \simeq \sin \alpha \simeq \alpha$.

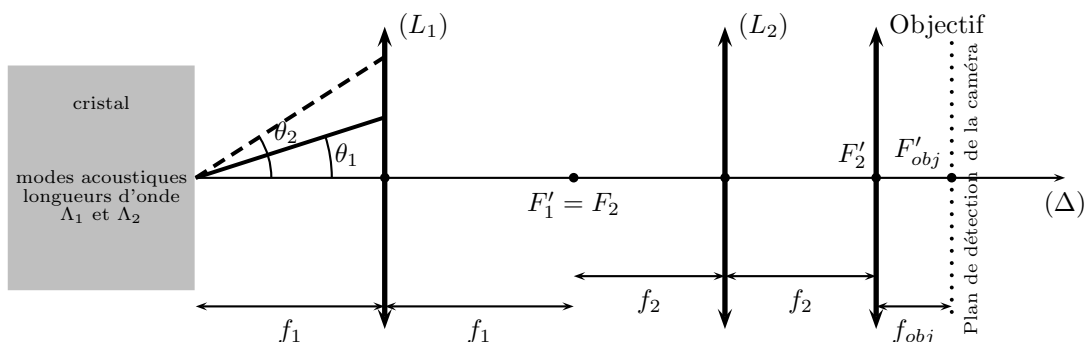


FIGURE 15 – Montage optique permettant la mesure des angles en sortie du cristal.

30. Reproduire le schéma de la figure 15 et dessiner le chemin optique des deux rayons (traits plein et pointillés) jusqu'à la surface de détection de la caméra.

31. Le faisceau issu du cristal avec un angle θ_1 rencontre la surface de détection de la caméra au point C_1 . Exprimer la distance $F'_{obj}C_1$ en fonction de f_1 , f_2 , θ_1 et f_{obj} .

32. La taille d'un pixel de la surface de détection de la caméra est $d_{pix} = 50 \mu\text{m}$. Les distances focales ont pour valeur $f_1 = 500 \text{ mm}$, $f_2 = 60 \text{ mm}$ et $f_{obj} = 2,5 \text{ mm}$. Déterminer l'expression de l'écart minimal en longueur d'onde $\Delta\Lambda$ que ce montage permet de résoudre. Évaluer numériquement cette résolution. On déterminera la valeur de Λ_0 en utilisant les valeurs des paramètres de l'onde acoustique proposée à la question **26**. Discuter le choix des distances focales pour augmenter la résolution.

Superposition d'ondes lumineuses

Une autre technique consiste à observer la superposition du faisceau optique traversant le cristal avec un faisceau de référence. Le montage optique consiste à séparer en deux le faisceau issu du laser comme présenté à la figure 16. Le faisceau d'intérêt va traverser le cristal (dans lequel se propage une onde acoustique de longueur d'onde Λ et de pulsation Ω) et va être ensuite recombinaison avec le faisceau de référence sur la surface photosensible d'une photodiode rapide. On considère que le faisceau de lumière de pulsation ω et de longueur d'onde $\lambda = 600 \text{ nm}$ se propageant dans le vide correspond à une onde électromagnétique, décrite par une grandeur scalaire $s(M, t) = s_0 \cos(\omega t + \phi(M))$ dont l'évolution est régie par l'équation de D'ALEMBERT, où M est un point de l'espace et $\phi(M)$ est une phase qui dépend du parcours de l'onde. Les deux faisceaux, correspondant à des ondes électromagnétiques, sont donc décrits par les amplitudes scalaires $s_1(M, t) = s_{10} \cos(\omega_1 t + \phi_1(M))$ et $s_2(M, t) = s_{20} \cos(\omega_2 t + \phi_2(M))$. Par ailleurs le montage optique est réalisé de telle sorte à avoir $s_{10} = s_{20} = s_0$ et $\phi_1(M \in \text{photodiode}) = \phi_2(M \in \text{photodiode}) = 0$.

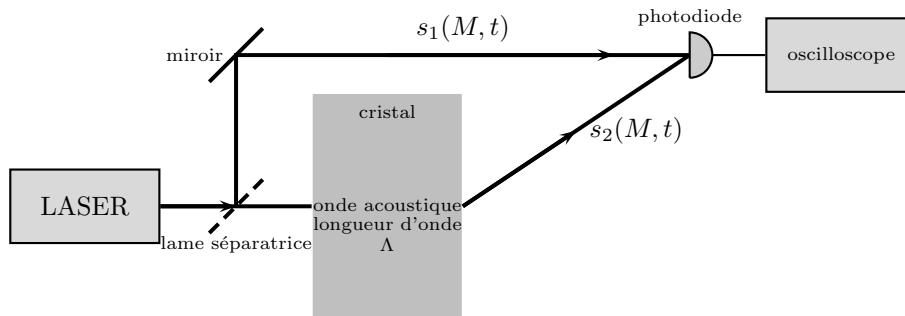


FIGURE 16 – Montage optique permettant de réaliser la superposition de deux ondes lumineuses.

33. En utilisant les résultats obtenus précédemment, donner l'expression de ω_1 et ω_2 en fonction de ω et Ω .

34. Expliquer pourquoi l'amplitude scalaire au point M au niveau de la surface photosensible de la photodiode s'écrit comme la somme des deux amplitudes scalaires :

$$s_{tot} = s_1(M \in \text{photodiode}, t) + s_2(M \in \text{photodiode}, t)$$

35. La photodiode est sensible à l'intensité lumineuse² $I_I(t) = |s_{tot}|^2(t)$ et a un temps de réponse de 10 ps. Expliquer pourquoi le signal observé $u(t)$ en sortie de la photodiode est proportionnel à $1 + \cos \Omega t$ et en déduire que ce dispositif permet de mesurer Ω .

Traitement du signal obtenu

36. On se place dans la configuration de la figure 16. On suppose que plusieurs modes acoustiques peuvent se propager dans le cristal. Leurs fréquences sont comprises dans l'intervalle $[200; 230] \text{ MHz}$. Cependant, la bande passante de l'oscilloscope vaut 100 MHz et ne permet pas d'observer convenablement le signal. Expliquer pourquoi.

Il faut donc réaliser un traitement du signal afin de pouvoir en extraire l'information recherchée. Afin d'obtenir un signal à des fréquences exploitables, on utilise le montage représenté à la figure 17. On suppose dans un premier temps que seul un mode acoustique de pulsation Ω est présent dans le cristal.

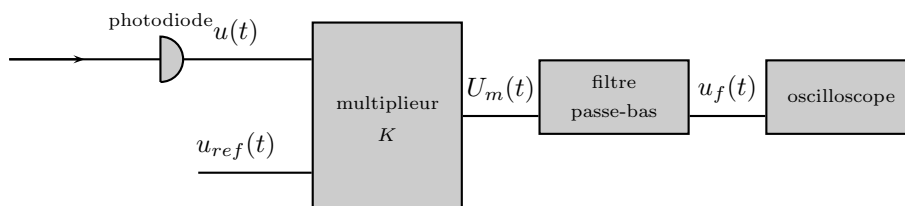


FIGURE 17 – Montage électronique pour réaliser le traitement du signal.

2. C'est une erreur d'énoncé, elle est sensible à la moyenne temporelle de $\langle |s_{tot}|^2(t) \rangle$.

Le signal $u(t)$ en sortie de la photodiode est envoyé sur une entrée d'un multiplieur, l'autre entrée étant alimentée par un signal de référence $u_{ref}(t) = u_{ref,0} \cos \omega_{ref} t$. Le signal en sortie du multiplieur, produit des deux signaux entrants multiplié par un facteur numérique K , est ensuite filtré à l'aide d'un filtre passe-bas puis observé sur un oscilloscope. On règle la pulsation du signal de référence pour avoir $\omega_{ref} = 2\pi \times 2,00 \times 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

37. On considère que seulement la composante alternative $u_{alt}(t)$ du signal $u(t)$ est envoyée dans le multiplieur. On écrit alors $u_{alt}(t)$ sous la forme $u_{alt}(t) = u_{alt,0} \cos \omega_{alt} t$. Exprimer ω_{alt} en fonction de Ω . Exprimer ensuite le signal $U_m(t)$ en sortie du multiplieur en une somme de deux termes à déterminer.

38. Expliquer la valeur choisie pour ω_{ref} .

39. Le filtre réalise une fonction passe-bas du premier ordre. Réaliser un schéma d'un montage permettant de réaliser le filtrage passe-bas, utilisant deux composants passifs usuels. Proposer des valeurs réalistes des deux composants pour réaliser le filtre souhaité.

40. Le cristal présente en réalité plusieurs modes acoustiques. Sur l'oscilloscope, on observe alors le signal représenté à la figure 18. Proposer un outil d'analyse pour déterminer les composantes spectrales du signal.

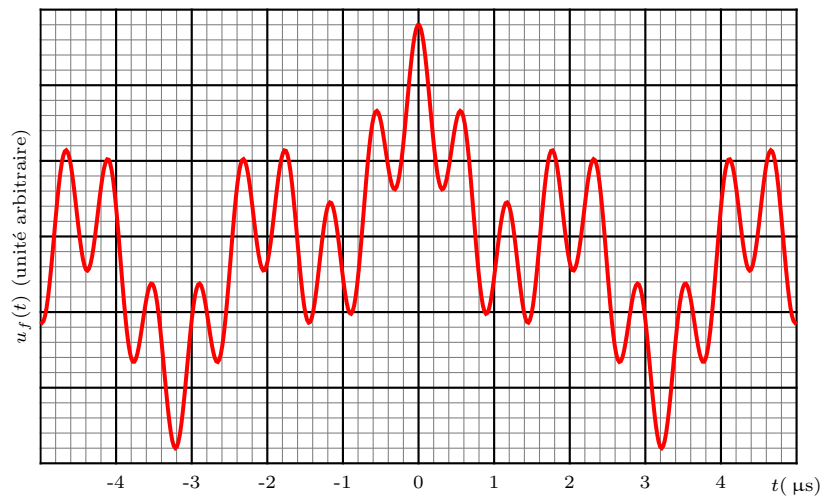


FIGURE 18 – Signal $u_f(t)$ observé sur l'oscilloscope.

41. Le spectre du signal $u_f(t)$ observé sur l'oscilloscope est présenté à la figure 19. Déterminer les valeurs des fréquences des modes acoustiques dans le cristal.

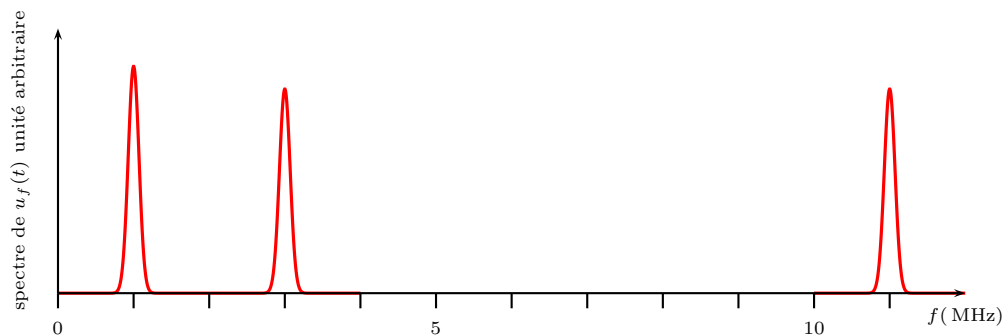


FIGURE 19 – Spectre du signal $u_f(t)$ observé sur l'oscilloscope.

42. Dans cette étude, nous nous sommes intéressés au fonctionnement d'un modulateur acousto-optique et nous avons utilisé des propriétés de l'interaction entre une onde acoustique et une onde lumineuse pour analyser les modes vibratoires présents au sein du cristal. Proposer une autre utilisation de la modulation acousto-optique.