

Exercices de révision pour les oraux : Série 3.

1 QCM

1. Effets chromatiques

Réponses : la figure b) est impossible car la lentille est divergente, les rayons émergents ne peuvent pas se rapprocher de l'axe. La loi de DESCARTES est $n(\lambda) \sin i_1 = \sin i_2$ avec $n_{\text{bleu}} > n_{\text{rouge}}$ puisque $\lambda_{\text{bleu}} < \lambda_{\text{rouge}}$. On doit donc avoir $i_{2,\text{bleu}} > i_{2,\text{rouge}}$. La bonne réponse est la proposition c).

2. Circuit de résistances

Réponses : on exprime tout en résistance R_2 , on a $I_O = \frac{E}{5R_2}$ puisque $R_{eq} = R_1 + R_2$. On calcule une nouvelle résistance équivalente aux trois résistances en parallèles, on a $\frac{1}{R'_{eq}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{3R_2} + \frac{1}{2R_2}$ d'où $R'_{eq} = \frac{6}{11}R_2$. Un diviseur de tension permet d'exprimer la tension U aux bornes de R_2 : $U = E \frac{R'_{eq}}{R'_{eq} + 4R_2} = \frac{6}{50}E$. On en déduit que $U = \frac{E}{5} \frac{3}{5}$ d'où $I_F = \frac{E}{5R_2} \frac{3}{5}$. Ainsi, on a $\frac{I_F}{I_O} = \frac{3}{5}$. La bonne réponse est la réponse b).

3. Chute d'un oscillateur

Réponses : on raisonnera par homogénéité. En effet, un allongement du ressort est lié au poids par $k\Delta\ell = mg$, une longueur ne peut pas être $\frac{k}{mg}$. Cela exclut les réponses a) et c). Comme on part de la position d'équilibre, le ressort est forcément allongé par l'effet du poids de la masse m placée à l'extrémité basse du ressort. La réponse d) ne peut pas convenir. La bonne réponse est b).

4. Tige chargée

Réponses : le champ électrique \vec{E} appartient aux plans de symétrie de la distribution des charges. Le plan de la figure est un plan de symétrie, toutes les propositions faites appartiennent à ce plan. De plus, le plan contenant (2,4) et perpendiculaire au plan de la figure est aussi un plan de symétrie des charges. Le champ électrique en A possède la direction (2,4) par intersection des deux plans de symétrie évoqués. Comme les charges sont négatives, si on place une charge test positive q en A , elle subira une force $q\vec{E}(A)$ qui la fera aller vers les charges négatives, donc \vec{E} est orienté par 4, c'est la réponse d).

2 Exercices

5. Filtrage d'un signal créneau asymétrique

Réponses : $\langle v_1 \rangle = \alpha E$, basse fréquence la bobine est un fil donc $v_1 = v_2$ d'où $\langle v_2 \rangle = \langle v_1 \rangle = \alpha E$ et $\langle i \rangle = \frac{\alpha E}{R}$, $\tau \frac{dv_2}{dt} + v_2 = E$ ou 0 , $v_{2a} = A \exp(-\frac{t}{\tau}) + E$ et $v_{2b} = B \exp(-\frac{t}{\tau})$ continuité en $t = 0$ et en $t = T_f$ d'où $A + E = B \exp(-\frac{T_f}{\tau})$ et $A \exp(-\frac{T_f}{\tau}) + E = B \exp(-\frac{T_f}{\tau})$ d'où $v_{2a} = E(1 - \frac{\exp(\frac{T_f}{\tau}) - \exp(\frac{T_f}{\tau})}{\exp(\frac{T_f}{\tau}) - 1} \exp(-\frac{t}{\tau}))$, $v_{2b} = E \exp(\frac{T_f}{\tau} \frac{\exp(\frac{T_f}{\tau}) - 1}{\exp(\frac{T_f}{\tau}) - 1}) \exp(-\frac{t}{\tau})$, $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau}$, $a_0 = \alpha E$, $a_n = \frac{E}{n\pi} \sin 2\pi\alpha n$, $b_n = \frac{E}{n\pi}(1 - \cos 2\pi\alpha n)$, $a'_0 = \alpha E$, $a'_n = \frac{a_n}{\sqrt{1+n^2\omega^2\tau^2}}$ idem pour b'_n avec b_n et déphasage de $\varphi_n = -\arctan n\omega\tau$.

6. Plage inadaptée

Réponses : la plus grande fréquence représentée est de 24 kHz. Comme la plage de fréquence correspond à $[0; F_e/2]$ pour respecter le critère de NYQUIST-SHANNON, on en déduit que la fréquence d'échantillonnage est $F_e = 48 \text{ kHz}$. L'intervalle de fréquence qui apparaît dans le spectre est tel que la durée totale d'analyse du signal est donnée par $\Delta t = \frac{1}{\Delta f}$. On compte 31 intervalles et donc $\Delta f = \frac{F_e}{2 \times 31} = 775 \text{ Hz}$. La durée d'observation du signal est donc $\Delta t = 1,3 \text{ ms}$. Le nombre d'échantillons prélevés est donc $N = F_e \Delta t = 62$ échantillons. Dans le spectre que l'on obtient le fondamental est $f_0 = 775 \text{ Hz}$, comme la fréquence du signal $F = 2000 \text{ Hz}$ n'est pas un multiple entier de f_0 , on ne pourra pas représenter F dans le spectre ni ses harmoniques. Un signal alternatif change de signe au cours d'une période, il n'est pas nécessairement de moyenne nulle. C'est la première explication. Ensuite si on avait, au départ, un signal alternatif de moyenne nulle alors, on aurait aussi une moyenne non nulle dans le spectre car le calcul s'effectue ici sur une durée Δt qui représente 2,6 périodes ! La moyenne est nulle sur 2 périodes mais pas sur 0,6 période.

7. Filtrage et oscillations

Réponses : $H = \frac{s}{e} = \frac{1}{1+jR(C\omega - \frac{1}{L\omega})}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $H = \frac{(1+\frac{R_2}{R_1})jL\omega}{(1+\frac{C_2}{C_1})R_3 + (1+\frac{C_2}{C_1})jL\omega - LR_3C_2\omega^2}$, $LR_3C_2\frac{d^2s}{dt^2} + L(\frac{C_2}{C_1} - \frac{R_2}{R_1})\frac{ds}{dt} + (1+\frac{C_2}{C_1})R_3s = 0$, si $R_2 < R_1\frac{C_2}{C_1}$ régime amorti, si $R_2 > R_1\frac{C_2}{C_1}$ saturation, si $R_2 = R_1\frac{C_2}{C_1}$ oscillations harmoniques à $\omega'_0 = \sqrt{\frac{C_1+C_2}{LC_1C_2}}$.

8. Cryogénie

Réponses : c'est la loi de la statistique de BOLTZMANN qui établit la probabilité $dP = g(v)dv$ d'avoir pour une molécule la vitesse de module v compris entre v et $v + dv$. Pour cela, on cherche dans l'espace des vitesses le volume élémentaire $4\pi v^2 dv$ et on dit que le module de la vitesse se trouve dedans. Le facteur de BOLTZMANN fait intervenir l'énergie cinétique de translation de la molécule (on néglige toutes les autres contributions de rotation ou de déformation comme c'est le cas dès que l'on affaire à une molécule diatomique ou triatomique) $\frac{1}{2}mv^2$. La constante qui figure dans la loi de distribution correspond à la normalisation de la loi de probabilité sur l'ensemble des vitesses possibles en Mécanique classique allant de 0 à $+\infty$. On raisonne sur une vitesse v dans un premier temps puis on prendra en compte par intégration l'ensemble des vitesses. Si l'on se place avec une molécule qui possède une vitesse orientée selon la normale à la surface ΔS , les molécules qui vont arriver sur ΔS sont celles contenues dans le volume $vdt\Delta S$ à savoir $\rho(t)vdt\Delta S$. Maintenant, les orientations des vitesses des molécules sont distribuées de façon aléatoire dans l'espace. Il faut en tenir compte. Considérons une molécule qui possède une orientation de sa vitesse d'angle θ par rapport à la normale à ΔS . Les molécules qui atteignent ΔS sont contenues dans un volume $vdt\Delta S \cos \theta$. La proportion de ces molécules parmi le nombre total de molécules (ou encore la probabilité pour une molécule d'avoir cette orientation θ) est donnée par le rapport de l'angle solide élémentaire correspondant à $d\theta$ à l'angle solide décrivant tout l'espace. La probabilité est donc $\frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{4\pi}$ en utilisant les coordonnées sphériques habituelles. Le nombre des molécules qui atteignent la surface ΔS est donné par : $\rho(t)vdt\Delta S \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$. On intègre en θ de 0 à $\pi/2$ pour que la vitesse des molécules soit dans le sens qui amène sur la surface et non pas dans le sens qui les éloignent de ΔS . Comme on a $\int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi$, on trouve que les molécules qui viennent se coller sur ΔS possédant le module de vitesse v sont $d^2n = \frac{\rho(t)}{4} vdt\Delta S$. Il faut tenir compte de toutes les vitesses v possibles et de leur probabilité par la loi de distribution fournie. On a donc :

$$dn = \frac{\rho(t)}{4} dt\Delta S \int_0^\infty 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^3 \exp \left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right) dv$$

On effectue le changement de variable $v = u\sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$ et on arrive à $dn = \rho(t)dt\Delta S \sqrt{\frac{2k_B T}{\pi m}} \int_0^\infty u^3 \exp -u^2 du$. On peut écrire l'intégrale selon $I = -\frac{1}{2} \int_0^\infty u^2 (-2u \exp -u^2) du$ pour effectuer une intégration par partie. On pose $f = u^2$ et $g' = -2u \exp -u^2$ ce qui donne $g = \exp -u^2$ et $f' = 2u$. On a donc $2I = -[u^2 \exp -u^2]_0^\infty + \int_0^\infty 2u \exp -u^2 du$. On a $2I = [(-\exp -u^2)]_0^\infty = 1$. On en conclut que $I = \frac{1}{2}$. On obtient $dn = \frac{1}{2} \rho(t) vdt\Delta S \sqrt{\frac{2k_B T}{\pi m}}$

que l'on peut écrire sous la forme attendue $dn = \frac{\rho(t)}{4} \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} \Delta S dt$. Ce nombre représente une diminution de la masse volumique puisque les molécules se collent sur ΔS . On a donc $dn = -\frac{4}{3}\pi R^3 d\rho$. Cela conduit à l'équation différentielle $\frac{8\pi^{3/2}R^3}{3\Delta S} \sqrt{\frac{m}{2k_B T}} \frac{d\rho}{dt} + \rho = 0$. Le temps caractéristique de l'évolution de la densité volumique de molécules est donc $\tau = \frac{8\pi^{3/2}R^3}{3\Delta S} \sqrt{\frac{m}{2k_B T}}$. La loi d'évolution est $\rho(t) = \rho_0 \exp -\frac{t}{\tau}$. Comme la température est homogène dans l'ampoule, la pression est directement proportionnelle à la densité volumique de particule. On a donc une loi de la forme $P(t) = P_0 \exp -\frac{t}{\tau}$. Pour obtenir la pression $P_1 = 10^{-5}P_0$, il faut une durée $t_1 = \tau \ln(10^5) = 5\tau \ln 10$. Avec les valeurs numériques fournies et en prenant $T = 293 \text{ K}$, on arrive à $\tau \simeq 0,3 \text{ s}$ et donc : $t_1 \simeq 3,5 \text{ s}$.

9. Barrière de potentiel

Réponses : la particule classique ralentit en $x = -a : 2$ de façon brutale comme dans un choc et accélère de façon brutale en $a/2$; dans les régions I et III on a $\frac{d^2\varphi}{dx^2} + k^2\varphi(x) = 0$ et dans la région II $\frac{d^2\varphi}{dx^2} + K^2\varphi(x) = 0$, on a $\varphi_I(x) = A_1 \exp ikx + B_1 \exp -ikx$, $\varphi_{II}(x) = A_2 \exp iKx + B_2 \exp -iKx$ et $\varphi_{III}(x) = A_3 \exp ikx$, il y a continuité de φ d'où $\varphi_I(-a/2) = \varphi_{II}(-a/2)$ et $\varphi_{III}(a/2) = \varphi_{II}(a/2)$, le potentiel étant borné en tout point, on a aussi continuité de la dérivée $\frac{d\varphi_I}{dx} \Big|_{-a/2} = \frac{d\varphi_{II}}{dx} \Big|_{-a/2}$ et $\frac{d\varphi_{III}}{dx} \Big|_{a/2} = \frac{d\varphi_{II}}{dx} \Big|_{a/2}$; par conservation de la loi de probabilité, on a $R = 1 - T$; représentation graphique de T et de R sur le graphique de la figure 1; à chaque fois que $Ka = n\pi$, on a $T = 1$, cela se produit lorsque $a = n\frac{h}{2\sqrt{2m(E-V_0)}}$, la longueur d'onde de DE BROGLIE est $\lambda_{DB} = \frac{h}{p}$ avec $p = \sqrt{2m(E-V_0)}$, on voit que la condition précédente revient à $a = n\frac{\lambda_{DB}}{2}$ qui est équivalente

à une condition d'ondes stationnaires entre deux nœuds comme par exemple sur la corde de MELDE ; $a_n = na_1$ avec $a_1 = 250$ pm, on a $a = 500$ pm = $2a_1$, il y a bien transmission intégrale.

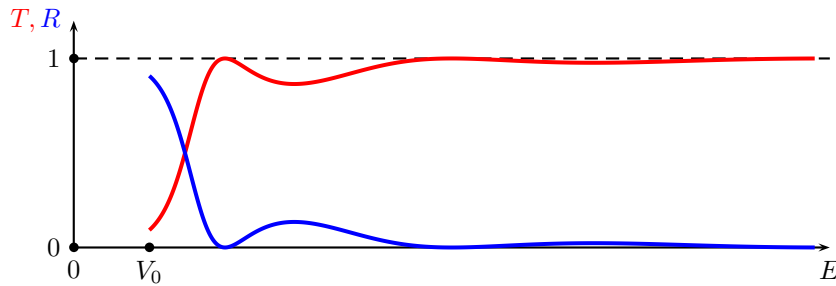


FIGURE 1 – Coefficient de transmission T et de réflexion R

10. Un satellite géostationnaire

Réponses : Le satellite reste au-dessus d'un point fixe de la Terre, le plan de son mouvement passant par le centre, le seul plan qui convienne est le plan équatorial, on a $-\frac{GM_T m}{R^2} \vec{e}_r = -m\Omega^2 R \vec{e}_r$, $G \simeq 6 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$, $R_T = 6,4 \times 10^3 \text{ km}$, $M_T = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$, $\Omega = 7 \times 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ puisque la période de rotation est de un jour (sidéral qui est un peu inférieur au jour solaire), $R = 4,2 \times 10^4 \text{ km}$, $E_m = -\frac{GM_T m}{2R} = -\frac{1}{2}m\Omega^2 R^2$, $E_0 = -\frac{m\Omega^2 R^3}{R_T} + \frac{1}{2}mR_T^2 \cos^2 \lambda \Omega^2$, on a $\Delta E = \frac{m\Omega^2 R^2}{2} \left[\frac{2R}{R_T} - 1 - \frac{R_T^2}{R^2} \cos^2 \lambda \right]$, il faut plutôt se mettre à l'équateur, on $\frac{2R}{R_T} = 13,1$ et $\frac{R_T^2}{R^2} = 2,3 \times 10^{-2}$.

11. Transport d'une planche dans une scierie

Réponses : $v_{g1} = \dot{x}$ et $v_{g2} = \dot{x} - R\omega$ T_1 et T_2 dans le sens $x > 0$, $m\ddot{x} = T_1 + T_2$, $N_1 + N_2 = mg$, $\ddot{x} = fg$, $\dot{x} = fgt - v_0$, $v_{g1} = fgt - v_0$ et $v_{g2} = fgt - (v_0 + R\omega)$, $v_{g1} = 0$ à $t_1 = \frac{v_0}{fg}$, $x(t_1) = -\frac{v_0^2}{2fg}$ et $\dot{x}(t_1) = 0$, ensuite T_1 est dans le sens $x < 0$, $m\ddot{x} = T_2 - T_1 = f(N_2 - N_1)$, par le théorème du moment cinétique en G $N_2(d+x) = N_1(d-x)$, $N_1 = \frac{mg}{2}(1 + \frac{x}{d})$ et $N_2 = \frac{mg}{2}(1 - \frac{x}{d})$, $\ddot{x} + \frac{fg}{d}x = 0$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{fg}{d}}$, $x = -\frac{v_0^2}{2fg} \cos \omega_0(t - t_1)$, $\dot{x} = \frac{v_0^2}{2\sqrt{fgd}} \sin \omega_0(t - t_1)$, $v_{g2} = \frac{v_0^2}{2\sqrt{fgd}} \sin \omega_0(t - t_1) - R\omega$, RSG possible si $\omega < \frac{v_0^2}{2R\sqrt{fgd}}$.

12. De l'eau chaude sous la douche !

Réponses : $\mathcal{D}_v \rho c (\theta(z+dz) - \theta(z)) = -h'2\pi r_1 (\theta(z) - \theta_{\text{cuivre}}(z))$, $\theta_{\text{cuivre}}(z)$ est inconnue, on doit aller jusqu'à la température de l'air θ_e en utilisant la notion de résistance thermique, on a trois résistances en série, celle de convection avec l'eau $\frac{1}{h'2\pi r_1 dz}$, la convection avec l'air $\frac{1}{h2\pi r_2 dz}$ et la conduction dans le cuivre, en régime permanent $j(r)2\pi r dz = \text{Cte}$ et $j(r) = -\lambda \frac{dT}{dr}$, $\theta_{\text{cuivre}} = \theta_2 - (\theta_1 - \theta_2) \frac{\ln r/r_2}{\ln r_2/r_1}$, la résistance est $\frac{\ln r_2/r_1}{2\pi \lambda}$, d'où $\varphi = -\frac{2\pi}{\frac{1}{h'r_1} + \frac{1}{hr_2} + \frac{\ln r_2/r_1}{\lambda}} (\theta - \theta_e)$, $\frac{d\theta}{dz} + \frac{\theta}{\lambda_c} = \frac{\theta_e}{\lambda_c}$, $\theta(z) = \theta_e + (\theta_0 - \theta_e) \exp -\frac{z}{\lambda_c}$, $\lambda_c = \frac{\mathcal{D}_v \rho c}{2\pi} \left(\frac{1}{h'r_1} + \frac{1}{hr_2} + \frac{\ln r_2/r_1}{\lambda} \right)$, on trouve $\lambda_c \simeq 670 \text{ m}$, $L \ll \lambda_c$ l'eau chaude ne perd quasiment pas d'énergie entre le chauffe-eau et la douche.

13. Pression dans un plasma

Réponses : $\vec{j} = nev\vec{e}_z$, $I = nev\pi R^2$, $\vec{B} = \frac{\mu_0 nevR^2}{2} \vec{e}_\theta$ pour $0 \leq r \leq R$ et $\vec{B} = \frac{\mu_0 nevR^2}{2r} \vec{e}_\theta$ pour $r \geq R$, $\vec{\text{grad}} P = \vec{j} \wedge \vec{B}$, $\frac{dP}{dr} = -\frac{\mu_0 n^2 e^2 v^2 r}{2}$, $P(r) = \frac{\mu_0 n^2 e^2 v^2}{4} (R^2 - r^2)$, $P(r) = 2nk_B T(r)$, $T(r) = \frac{\mu_0 n e^2 v^2}{8k_B} (R^2 - r^2)$, $v > \sqrt{\frac{8k_B T_0}{\mu_0 R^2 n e^2}}$.

14. Induction et élévation de température

Réponses : Il y a induction à travers le circuit et donc courant induit, il provoque de l'effet JOULE dans R_1 ce qui explique l'élévation de température, on a $\vec{B} = \mu_0 n I_0 f(t) \vec{e}_z$ où $f(t)$ est la fonction décrivant le triangle par exemple $f(t) = \frac{4t}{\tau}$ et $f(t) = 2 - \frac{4t}{\tau}$ sur $[-\frac{\tau}{4}; \frac{3\tau}{4}]$, on a $\phi = \pi a^2 \mu_0 n I_0 f(t)$ et $e = -\frac{d\phi}{dt} = \mp \frac{4\pi a^2 \mu_0 n I_0}{\tau}$ et donc $i = \mp \frac{4\pi a^2 \mu_0 n I_0}{\tau(R_0 + R_1)}$, la puissance JOULE est $P_J = \frac{R_1}{(R_0 + R_1)^2} \frac{16\pi^2 a^4 \mu_0^2 n^2 I_0^2}{\tau^2}$, maximale pour $R_1 = R_0$, en régime stationnaire, on a $P_J = \frac{\lambda \Delta T}{e} S$, en sinusoïdal on raisonne sur la puissance moyenne mais l'hypothèse du régime stationnaire ne sera acceptable que pour $\omega \ll \omega_c$ avec ω_c tel que $\frac{T}{e^2} = \frac{\mu c}{\lambda} \omega_c T$ donc $\omega_c = \frac{\lambda}{\mu c e^2}$.

15. Approche électromagnétique du condensateur plan

Réponses : $B_1(r, t) = -\frac{\omega A_0 r}{2c^2} \sin \omega t$, $E_2(r, t) = -\frac{\omega^2 A_0 r^2}{4c^2} \cos \omega t$, $\vec{E} = \vec{E}_0(1 - \frac{x^2}{4})$, ARQP, $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$, $\forall n \geq 2$ $n^2 a_n + a_{n-2} = 0$.

16. Principe du laser

Réponses : $L = n \frac{\lambda}{2}$, $n_1 < n < n_2$, $n_i = \frac{L}{\pi c}(\omega_0 \pm \frac{\Delta \omega}{2})$, $L = 50 \text{ cm}$, $\omega_0 = 3 \times 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\tau = \frac{4L}{c(n_2 - n_1)}$, $\Delta \omega = 6,3 \times 10^{10} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

17. Radar à balayage

Réponses : $I = \frac{I_0}{N^2} \frac{\sin^2(\frac{N\pi \sin \theta}{2})}{\sin^2(\frac{\pi \sin \theta}{2})}$, l'ordre 0 est donné par $\frac{\pi}{2} \sin \theta + \frac{\phi}{2} = 0$, l'ordre 0 concentre la principale partie de l'énergie du fait de la fonction de diffraction de chaque source non prise en compte ici, ce maximum repéré par l'angle θ tourne à la vitesse angulaire ω si $\theta = \omega t$ donc si $\phi = -\pi \sin \omega t$.

18. L'aspirine : un acide

Réponses : La réaction est $\text{AH} + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{A}^- + \text{H}_3\text{O}^+$. Si l'acide était fort, il serait totalement dissocié et alors $[\text{H}_3\text{O}^+] = 5,5 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, le pH serait donc de 2,3. Comme il est plus élevé cela montre qu'il y a moins d'ions H_3O^+ et donc que l'acide est faible. Si on note x l'avancement de la réaction, on a $x = [\text{H}_3\text{O}^+]$ et $K_A = \frac{x^2}{c_0 - x}$. On trouve $K_A = 3,7 \times 10^{-4}$ et alors $pK_A = 3,4$. Le taux d'avancement est $\alpha = \frac{x}{c_0} = 0,23 = 23\%$. Par définition de la conductivité γ et des conductivités molaires limites des différents ions λ_i° , on a $\gamma = \sum_i \lambda_i^\circ c_i$. Ici, on peut négliger la contribution des ions HO^- qui sont présents en très petite quantité compte tenu du pH relativement acide trouvé. On a donc $\gamma = \alpha c_0(\lambda_{\text{A}^-}^\circ + \lambda_{\text{H}_3\text{O}^+}^\circ)$. La mesure de γ permet bien d'obtenir α .

19. Magnésie

Réponses :

- On utilise la loi de VAN'T HOFF : $\frac{d \ln K^\circ}{dT} = \frac{\Delta_r H^\circ}{RT^2}$. Comme on se place dans l'approximation d'ELLINGHAM pour laquelle l'enthalpie standard de réaction ne dépend pas de la température, on peut intégrer et obtenir $\ln \frac{K_2^\circ}{K_1^\circ} = \frac{\Delta_r H^\circ (T_2 - T_1)}{RT_1 T_2}$. On en déduit que $K_2^\circ = 0,02$. Comme on a $K^\circ = \frac{p^\circ}{p_2}$, la pression d'équilibre est $p_2 = 50 \text{ bar}$.
- (a) L'enthalpie libre de réaction est $\Delta_r G = RT_1 \ln \frac{Q}{K_1^\circ}$. Le quotient réactionnel est $Q = \frac{a_{\text{Mg}(\text{OH})_2 s} p^\circ}{a_{\text{MgO} s} p_{\text{H}_2\text{O}}}$. Si on met une goutte d'eau, cela signifie que $p_{\text{H}_2\text{O}} \neq 0$. D'autre part nous avons $a_{\text{MgO} s} = 1$ puisque le solide est présent à raison de $n_0 = \frac{m}{M_{\text{MgO}}} = 1,24 \text{ mol}$. Mais nous avons $a_{\text{Mg}(\text{OH})_2 s} = 0$ puisque l'hydroxyde de magnésium est absent. On a donc $Q = 0$ et par conséquent $\Delta_r G \rightarrow -\infty$! Quoi qu'il soit, la valeur est négative et comme le critère d'évolution est $dG = \Delta_r G d\xi < 0$, on en déduit que $d\xi > 0$ où ξ est l'avancement. La réaction va s'effectuer aussitôt dans le sens direct pour former $\text{Mg}(\text{OH})_2 s$. Dès qu'un grain d'hydroxyde de magnésium est réalisé, cela change tout pour le quotient réactionnel qui est $Q = \frac{p^\circ}{p_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{p^\circ V}{nRT_1}$ et donc $Q > K_1^\circ$ puisque n est très faible. L'évolution s'effectuerait alors dans le sens indirect... détruisant l'hydroxyde de magnésium ! On peut résumer en disant qu'il ne se passe rien tant que Q ne rejoint pas K_1° . On ajoute de l'eau à raison de n moles à volume et température fixés, la pression va être une fonction affine de n : $p = n \frac{RT_1}{V}$.
- (b) L'eau introduite va réagir et l'équilibre lorsque $p_1 = n_1 \frac{RT}{V}$, on trouve $n_1 = 0,27 \text{ mol}$.
- (c) La réaction est terminée lorsque toutes les moles n_0 de magnésie du départ ont réagi. On a $n_2 - n_0 = \frac{p_1 V}{RT_1} = n_1$. C'est donc pour $n_2 = n_1 + n_0 = 1,51 \text{ mol}$.
- (d) Une fois la réaction terminée, on ne fait qu'ajouter de l'eau, la pression va de nouveau augmenter de façon affine. L'eau liquide va se former lorsque l'on atteint la pression de vapeur saturante. On a donc $(n_3 - n_0) = \frac{p_{\text{sat}} V}{RT_1}$. On trouve : $n_3 = 1,62 \text{ mol}$.
- (e) Comme nous l'avons vu, de $n = 0$ jusqu'à $n = n_1$ la pression suit une loi affine de n . Ensuite, l'équilibre est réalisé, la pression p reste stable à p_1 tant que de la magnésie réagit et donc jusqu'à n_2 . Ensuite, la pression remonte à nouveau de façon affine jusqu'à atteindre, pour n_3 , la pression de vapeur saturante p_{sat} . Ensuite, on reste à la pression de vapeur saturante.

20. Céramique supraconductrice

Réponses : On classe les couples rédox par potentiel croissant, par nombre d'oxydation et par pH croissant par exemple Cu_2O_3 se trouve séparé de Cu^{3+} par une frontière verticale puisque leur nombre d'oxydation est le même à savoir $+III$. On peut aussi voir que les frontières horizontales concernent des couples rédox qui ne font pas intervenir d'ions H^+ comme $\text{Cu}^{3+} + \text{e}^- \rightleftharpoons \text{Cu}^{2+}$. Les plus grands nombres d'oxydation sont situés en haut du graphique. Avec tous ces éléments, on trouve $A = \text{Cu}^{3+}$, $B = \text{Cu}_2\text{O}_{3s}$, $C = \text{Cu}^{2+}$, $D = \text{CuO}_s$, $E = \text{Cu}_2\text{O}_s$ et $F = \text{Cu}_s$. On remarquera une rare droite croissante du potentiel avec le pH . Cela concerne le couple $2\text{Cu}^{2+} + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e}^- \rightleftharpoons \text{Cu}_2\text{O}_s + 2\text{H}^+$ dont la pente est $+0,06$ par unité pH . On voit que l'ion cuivreux Cu^+ ne figure pas, il n'est pas stable en solution aqueuse, il se dismute entre les ions Cu^{2+} et le cuivre Cu_s . Le couple de l'eau est $\text{O}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e}^- \rightleftharpoons 2\text{H}_2\text{O}$ d'équation $E = 1,23 - 0,06pH$. Au vu de leur position dans le diagramme $E - pH$, les ions Cu^{3+} vont oxyder l'eau en se réduisant $\text{Cu}^{3+} + \text{e}^- \rightleftharpoons \text{Cu}^{2+}$. Le bilan de la réaction est $4\text{Cu}^{3+} + 2\text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{O}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{Cu}^{2+}$. Si la réaction n'est observée à froid, c'est qu'il y a un blocage cinétique. Dans l'expérience (a), on est à chaud, la réaction précédente s'effectue et finalement il n'y a plus que des ions cuivre Cu^{2+} dans la solution issue de la dissolution. Dans le cas de l'expérience (b), la réaction est bloquée sur le plan cinétique. On aura donc à la fois des ions Cu^{3+} et des ions Cu^{2+} dans le milieu réactionnel. L'équation d'échange électronique est $\text{Cu}^{2+} + \text{I}^- + \text{e}^- \rightleftharpoons \text{CuI}_s$. Elle est la combinaison linéaire de $\text{Cu}^{2+} + \text{e}^- \rightleftharpoons \text{Cu}^+$ et de $\text{Cu}^+ + \text{I}^- \rightleftharpoons \text{CuI}_s$. On a donc $\Delta_r G_7^\circ = \Delta_r G_2^\circ - RT \ln \frac{1}{K_s}$. Avec $\Delta_r G_7^\circ = -FE_7^\circ$ et $\Delta_r G_2^\circ = -FE_2^\circ$ et en passant en log, on trouve $E_7^\circ = 0,89 \text{ V}$. On comprend donc que les ions cuivre vont oxyder les ions iodures pour former CuI_s selon la réaction $2\text{Cu}^{2+} + 4\text{I}^- \rightleftharpoons 2\text{CuI}_s + \text{I}_2$. Ensuite la réaction de dosage par les ions thiosulfate est $\text{I}_2 + 2\text{S}_2\text{O}_3^{2-} \rightleftharpoons \text{S}_4\text{O}_6^{2-} + 2\text{I}^-$. Au départ dans la céramique traitée, on note n_1 le nombre de mole de Cu^{3+} et n_2 celui de Cu^{2+} . Comme dans l'expérience chauffée, on retrouve tout le cuivre sous forme de Cu^{2+} , on peut en déduire que $n_1 + n_2 = cv_{(a)} = 8 \times 10^{-4} \text{ mol}$. Dans l'expérience réalisée à froid, on a d'abord la réaction $2\text{Cu}^{3+} + 2\text{I}^- \rightleftharpoons 2\text{Cu}^{2+} + \text{I}_2$. On voit donc qu'il y a production de I_2 mais ensuite, tous les ions cuivre sont sous forme Cu^{2+} qui vont réagir comme dans le cas de l'expérience chauffée. On produit donc à nouveau la même quantité de I_2 que pour (a). On a donc $n_1 + (n_1 + n_2) = 2n_1 + n_2 = cv_{(b)}$ moles de I_2 formées, c'est donc logique d'avoir un volume plus grand lors du dosage. La différence des volumes correspond à n_1 d'où $n_1 = c(v_{(b)} - v_{(a)}) = 2,67 \times 10^{-4} \text{ mol}$. On obtient $n_2 = 5,34 \times 10^{-4} \text{ mol}$. Il y a 2 fois plus d'ions Cu^{2+} dans la céramique que d'ions Cu^{3+} . En décomposant la formule brute de la céramique, on peut écrire $\text{Y}^{3+} + 2\text{Ba}^{2+} + \text{Cu}^{3+} + 2\text{Cu}^{2+} + x\text{O}^{2-}$. La neutralité s'impose, on en déduit que $x = 7$. La formule brute de la céramique est $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$.

21. Oxyde de chrome bleu

Réponses : H_2CrO_4 prédomine pour $pH \leq -0,8$, puis HCrO_4^- pour $-0,8 \leq pH \leq 5,9$ et enfin CrO_4^{2-} pour $pH \geq 5,9$. Si on fixe $pH = 1,5$, l'espèce largement dominante est HCrO_4^- . On a $\text{HCrO}_4^- + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{CrO}_5 + 3\text{H}^+ + 4\text{e}^-$ et $\text{H}_2\text{O}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e}^- \rightleftharpoons 2\text{H}_2\text{O}$. En multipliant par 2 la seconde équation, on peut réaliser le bilan $\text{HCrO}_4^- + 2\text{H}_2\text{O}_2 + \text{H}^+ \rightleftharpoons \text{CrO}_5 + 3\text{H}_2\text{O}$ de constante d'équilibre $K^\circ(T) = \frac{[\text{CrO}_5][\text{H}^+]}{[\text{HCrO}_4^-][\text{H}_2\text{O}_2]^2}$. D'après la loi d'action des masses, on obtient $\Delta_r G^\circ = -RT \ln K^\circ(T) = \Delta_r H^\circ - T\Delta_r S^\circ$ d'où $\ln K^\circ = \frac{\Delta_r S^\circ}{R} - \frac{\Delta_r H^\circ}{RT}$. On en déduit que $\Delta_r H^\circ = -aR \simeq -63 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$, la réaction est exothermique. On a aussi $\Delta_r S^\circ = bR = -72 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ qui traduit une diminution du désordre lors de la réaction. On trouve la réaction $2\text{CrO}_5 + 6\text{H}^+ \rightleftharpoons 2\text{Cr}^{3+} + 2\text{H}_2\text{O} + 3\text{O}_2 + \text{H}_2\text{O}_2$. c'est une réaction d'oxydo-réduction parce que le chrome passe du degré d'oxydation $+VI$ à $+III$. En utilisant l'expression de K_a et celle de la concentration totale en oxyde de chrome bleu, on arrive à $[\text{CrO}_5] = \frac{K_a C^\circ}{K_a C^\circ + [\text{H}^+]} [\text{CrO}_5]_{\text{tot}}$ et $[\text{CrO}_5\text{H}^+] = \frac{[\text{H}^+]}{K_a C^\circ + [\text{H}^+]} [\text{CrO}_5]_{\text{tot}}$. Il ne reste plus qu'à remplacer dans l'expression de la vitesse pour obtenir $r = (k_1 \frac{K_a C^\circ}{K_a C^\circ + [\text{H}^+]} + k_2 \frac{[\text{H}^+]}{K_a C^\circ + [\text{H}^+]}) [\text{H}^+] [\text{CrO}_5]_{\text{tot}}$. On peut écrire la constante de vitesse comme $k_d = (k_1 K_a C^\circ + k_2 [\text{H}^+]) \frac{[\text{H}^+]}{K_a C^\circ + [\text{H}^+]}$. On connaît K_a , $[\text{H}^+]$ et k_d par les expériences. On peut donc construire la grandeur $Y = k_d \frac{K_a C^\circ + [\text{H}^+]}{[\text{H}^+]}$ en fonction de H^+ , on devrait obtenir une affine si le modèle est bon. En effet $Y = k_1 K_a C^\circ + k_2 [\text{H}^+]$. On trouvera les deux constantes de vitesse par l'ordonnée à l'origine $k_1 K_a C^\circ$ et par la pente k_2 . Pour $pH = 2$, on obtient la loi d'évolution $[\text{CrO}_5]_{\text{tot}} = [\text{CrO}_5]_{\text{tot},0} \exp -k_d t$. Le temps de demi-réaction est $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k_d}$. On trouve $t_{1/2} \simeq 530 \text{ s}$.

22. Dioxyde de titane

Réponses : Les ions titane placés aux sommets de la maille sont 8 et partagés entre 8 mailles adjacentes. Il y a aussi un ion titane au centre. On a donc dans la maille $N_{\text{Ti}^{4+}} = 8 \times \frac{1}{8} + 1 = 2$. Pour les ions oxygène, on a un partage par moitié sur les faces d'où $N_{\text{O}^{2-}} = 4 \times \frac{1}{2} + 2 = 4$. Cela représente deux motifs TiO_2 par maille et la population de la maille est heureusement cohérente avec la formule brute précédente. La masse volumique est $\rho = \frac{2M_{\text{TiO}_2}}{N_A abc}$. À l'anode, on aura l'oxydation du titane selon la demi-équation électronique $\text{Ti}_s + 2\text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{TiO}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e}^-$. À la cathode, il y aura réduction de l'eau pour former du dihydrogène selon $2\text{H}_2\text{O} + 2\text{e}^- \rightleftharpoons \text{H}_2 + 2\text{OH}^-$.

$\text{H}_2 + 2\text{HO}^-$ ou bien $2\text{H}^+ + 2\text{e}^- \rightleftharpoons \text{H}_2$. Le bilan de la réaction d'électrolyse est $\text{Ti}_s + 2\text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{TiO}_{2s} + 2\text{H}_2$. La quantité de charges qui a circulé est $I\Delta t$, il faut 4 moles d'électrons pour produire une mole de dioxyde de titane. On a donc $m_{\text{TiO}_{2s}} = \frac{I\Delta t}{4eN_A} M_{\text{TiO}_2}$. On trouve $m_{\text{TiO}_{2s}} = 4,7 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. La masse volumique de la couche de nanotubes est donc $\rho_{\text{nano}} = \frac{m_{\text{TiO}_2}}{S\ell} = 4,28 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Cette masse volumique est quand même conséquent plus de 4 fois la masse volumique de l'eau, il est assez difficile d'imaginer de fabriquer des objets légers avec ce protocole. Il faut sans doute travailler dans des conditions différentes pour arriver à un dépôt de nanotubes moins dense.

23. Le sodium et l'eau

Réponses : $Z = 11$, l'atome comporte 11 électrons, 11 protons et $N = 12$ neutrons puisque $A = Z + N = 23$. La structure électronique est $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$. Sa couche de valence est la couche $n = 3$ avec un seul électron. Il fait partie de la première colonne de la classification périodique, il est très électropositif et forme facilement l'ion Na^+ en perdant l'électron de sa couche de valence. Il acquiert alors une structure électronique du type des gaz nobles en $ns^2 np^6$ pour $n = 2$. Il fait partie des alcalins, il est bon conducteur électrique et bon conducteur thermique. Il s'agit d'oxydo-réduction avec $\text{Na}_s \rightleftharpoons \text{Na}^+ + \text{e}^-$ et $\text{H}_2\text{O} + \text{e}^- \rightleftharpoons \frac{1}{2}\text{H}_{2\text{gaz}} + \text{HO}^-$. Le bilan de la réaction est $\text{Na}_s + \frac{H_2\text{O}}{2} \rightleftharpoons \frac{1}{2}\text{H}_{2\text{gaz}} + \text{Na}^+ + \text{HO}^-$. On a $\Delta_r H^\circ = \sum_i \Delta_f H_i^\circ = -184 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$. La réaction est exothermique. Le bilan est $\text{H}_{2\text{gaz}} + \frac{1}{2}\text{O}_{2\text{gaz}} \rightleftharpoons \text{H}_2\text{O}_{\text{liq}}$. On écrit les deux demi-équations électroniques $\frac{1}{2}\text{O}_{2\text{gaz}} + 2\text{H}^+ + 2\text{e}^- \rightleftharpoons \text{H}_2\text{O}_{\text{liq}}$ (a) et $\text{H}_{2\text{gaz}} \rightleftharpoons 2\text{H}^+ + 2\text{e}^-$ (b). On a $\Delta_r G_a^\circ = -2\mathcal{F}E_a^\circ$ et $\Delta_r G_b^\circ = 2\mathcal{F}E_b^\circ$. On fait la combinaison linéaire $\Delta_r G^\circ = -RT \ln K^\circ = \Delta_r G_a^\circ + \Delta_r G_b^\circ = 2\mathcal{F}(E_b^\circ - E_a^\circ)$. En passant au logarithme à base 10, on arrive à $\log K^\circ = \frac{E_a^\circ - E_b^\circ}{0,03}$. On trouve $K^\circ = 10^{41}$. La loi de VAN'T HOFF est $\frac{d \ln K^\circ}{dT} = \frac{\Delta_r H^\circ}{RT^2} < 0$ puisque la réaction est exothermique. La constante d'équilibre diminue lorsque la température augmente. Dans la maille cubique face centrée, il y aura $N = \frac{1}{8} \times 8 + \frac{1}{2} \times 4 = 4$ ions O^{2-} . Une telle maille de côté a contient 8 sites tétraédriques dont les centres sont les centres des petits cubes de côté $\frac{a}{2}$ au nombre de 8. On a donc $N' = 8$ ions Na^+ . La formule de l'oxyde de sodium est logiquement Na_2O_s . Le chlorure de sodium $\text{Na}^+ + \text{Cl}^-$ est le principal constituant du sel de cuisine. Le produit de solubilité est $K_s = 33 = \frac{[\text{Na}^+][\text{Cl}^-]}{C_{\text{O}_2}^2}$. En versant cette mole de chlorure de sodium, on a $[\text{Na}^+] = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et $[\text{Cl}^-] = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Le quotient réactionnel est $Q = 1 < K_s$, il est totalement dissout. La limite est telle que $K_s = \frac{s^2}{C_{\text{O}_2}^2}$. On trouve donc $s = \sqrt{K^\circ} C^\circ \simeq 5,7 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. On a la réduction $\text{Na}^+ + \text{e}^- \rightleftharpoons \text{Na}_{\text{liq}}$ à la cathode et l'oxydation $\text{Cl}^- \rightleftharpoons \frac{1}{2}\text{Cl}_{2\text{gaz}} + \text{e}^-$ à l'anode. En confondant, le sodium liquide et le sodium solide, on pourra dire qu'il faut une tension supérieure à la différence de potentiel entre les deux couples. On peut prévoir une tension supérieure à 4,07 V. Une tonne de sodium est $n = \frac{m}{M} = 4,35 \times 10^4 \text{ mol}$ de sodium qui nécessite un électron pour un atome de sodium. La durée de l'électrolyse est telle que $I\Delta t = n\mathcal{F}$. On en déduit qu'il faut une durée $\Delta t = \frac{n\mathcal{F}}{M} \simeq 23,3 \text{ h}$. La puissance électrique est $P = UI = E_{\text{élec}}/\Delta t$, on trouve une énergie $E_{\text{élec}} \simeq 8,2 \text{ MWh}$. Le rendement énergétique de l'électrolyse est donc $\eta = 0,82$.

3 Python Centrale

24. Fil de Litz

Réponses : On a $\vec{j} = \gamma \vec{E}$. Les équations de MAXWELL sont $\text{div } \vec{E} = 0$, $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\text{div } \vec{B} = 0$, $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \gamma \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. En utilisant $\text{rot } \text{rot } \vec{E} = \text{grad } \text{div } \vec{E} - \Delta \vec{E}$, on arrive, dans l'ARQS, à $\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Cela correspond à l'équation proposée avec $D = \frac{1}{\mu_0 \gamma}$ le coefficient de diffusion puisque l'équation obtenue est une équation de diffusion. La relation de dispersion est $\underline{k}^2 = i\mu_0 \gamma \omega$. Pour ne retenir que la solution d'une onde qui se déplace à x croissant et sans divergence de son amplitude, on trouve $\underline{k} = (1+i)\frac{1}{\delta}$ avec $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \gamma \pi f}}$. Pour une fréquence de 50 Hz, on trouve une épaisseur de peau $\delta \simeq 1 \text{ cm}$. Le fil de LITZ présente une tresse de plusieurs fils conducteurs comme âme centrale. Elle est entourée d'un matériau isolant permettant aux champs électrique et magnétique de se propager puisque dans les conducteurs à haute fréquence, δ sera très petit et qu'il n'y aura donc dans les conducteurs qu'une présence sur une très faible épaisseur des champs à la surface des deux conducteurs. La tresse périphérique constitue le second conducteur assurant le retour des courants. La continuité du champ électrique en $x = 0$ est $\vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{E}_t$ qui se traduit par $1 + \underline{r} = \underline{t}$. Pour calculer les champs magnétiques, on peut appliquer la relation de structure puisque les ondes sont des ondes planes progressives monochromatiques harmoniques. Par contre, il faut le faire pour chaque champ \vec{E} individuellement. On trouve $\vec{B}_i = \frac{1}{\omega} \underline{k}_i E_y \vec{e}_y$, on trouve $\vec{B}_i = \frac{k}{\omega} E_i \vec{e}_z$, $\vec{B}_t = \frac{k_t}{\omega} \underline{t} E_i \vec{e}_z$ et $\vec{B}_r = -\frac{k}{\omega} \underline{r} E_i \vec{e}_z$ avec $k_t = (1+i)\frac{1}{\delta}$. En utilisant le fait que dans le vide $k = \frac{\omega}{c}$, on arrive à l'équation $1 - \underline{r} = (1+i)\frac{c}{\omega \delta} \underline{t}$. Après calcul, on arrive aux expressions des coefficients de réflexion et de transmission $\underline{r} = -\frac{1-\alpha+i}{1+\alpha+i}$ et $\underline{t} = \frac{2\alpha}{1+\alpha+i}$. On montre que $\alpha = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 \omega}{\gamma}}$, on peut voir que lorsque la fréquence va augmenter alors $\alpha \rightarrow \infty$ ce qui fait que le coefficient de réflexion tend vers -1 . Il n'y a d'autant moins de transmission que la fréquence est élevée. Ceci est aussi vrai lorsque la conductivité tend vers l'infini. La réflexion sera d'autant plus importante que le conducteur sera élevée. Dans le programme *Python*,

on réglera les différentes valeurs numériques des principaux paramètres que sont la conductivité et la fréquence pour mettre en évidence ce phénomène et aussi l'effet de peau dans le milieu conducteur.

4 X-ENS

25. L'étoile noire

Réponses :

1. L'objet subit la force gravitationnelle liée au champ gravitationnel créé par la planète. Ensuite tant que l'objet n'est pas en contact avec la paroi du cylindre, il n'y a pas de force de contact. Il n'y a pas de frottements puisque le tunnel est supposé vide. Si l'objet vient en contact avec la paroi du tunnel, on supposera que la force de contact est donnée par les lois de COULOMB. Elle est composée d'une force normale et d'une force tangentielle. On peut penser que le choc de l'objet sur la paroi du tunnel sera non élastique, c'est-à-dire qu'il y aura inversion de la quantité de mouvement normale à la paroi mais que du fait de la force de frottement, il y aura diminution de la composante tangentielle de la quantité de mouvement en raison des frottements. On pourra se dire que l'objectif du mouvement de la masse m est d'éviter de rencontrer une paroi. On centrera donc l'étude sur la situation où le mobile ne subit que la force gravitationnelle. Il faut calculer le champ gravitationnel créé par la planète trouée du tunnel. On commence par considérer une planète boule pleine de masse volumique μ . Il y a symétrie sphérique, le champ gravitationnel est central. On applique le théorème de GAUSS pour une sphère de rayon r , on a $G_1 4\pi r^2 = -4\pi G\mu \frac{4}{3}\pi r^3$. On en déduit que $\vec{G}_1 = -\frac{4\pi}{3}G\mu r\vec{e}_r$. Il faut calculer maintenant le champ gravitationnel \vec{G}_2 produit par un cylindre de rayon a de masse volumique négative $-\mu$ - pour créer par superposition le tunnel dans la boule pleine - et de longueur que nous supposons infinie puisque sa longueur sera grande devant son rayon a . En faisant cela, on néglige les effets des extrémités du tunnel. On considère un axe $O'z$ qui est l'axe du tunnel. On considère de plus les coordonnées cylindriques autour de cet axe $O'z$ avec ρ la distance à l'axe et \vec{e}_ρ le vecteur unitaire radial - au sens des coordonnées cylindriques -, l'angle définissant la rotation autour de l'axe $O'z$ est non significatif car le tunnel est supposé invariant par cette rotation. Cela revient à nouveau à négliger cette absence d'invariance aux deux extrémités du tunnel. On applique à nouveau le théorème de GAUSS à une surface cylindrique d'axe $O'z$ de rayon ρ et de hauteur h puisque le champ gravitationnel \vec{G}_2 est d'orientation \vec{e}_ρ par symétrie cylindrique. On a donc $2\pi\rho h G_2 = -4\pi G(-\mu)\pi\rho^2 h$. On en déduit que $\vec{G}_2 = 2\pi G\mu\rho\vec{e}_\rho$. En l'absence de contact avec la paroi, on a $m\vec{a} = m(\vec{G}_1 + \vec{G}_2)$ en supposant le référentiel de la planète galiléen. Finalement, on a $\vec{a} = \vec{G}_1 + \vec{G}_2$.
2. On conserve la notation $O'z$ pour l'axe du tunnel mais on appellera $O'x$ l'axe portant dans le plan du mouvement le vecteur $\vec{e}_\rho = \vec{e}_x$. Dans le plan du mouvement, les coordonnées du mobile seront z et x avec $\vec{a} \cdot \vec{e}_z = \ddot{z}$ et $\vec{a} \cdot \vec{e}_x = \ddot{x}$. En projetant l'expression de l'accélération sur \vec{e}_z , $\ddot{z} = G_1 \vec{e}_r \cdot \vec{e}_z + G_2 \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z$. Comme $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = 0$, on arrive à $\ddot{z} = -3\pi G\mu \frac{2}{3}r\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z$. Or, $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = \frac{z}{r}$. Si on remplace dans l'expression de \ddot{z} , on arrive à l'équation différentielle $\ddot{z} + \frac{4\pi}{3}G\mu z = 0$ que l'on a écrit $\ddot{z} + \omega^2 z = 0$ où $\omega = \sqrt{\frac{4\pi}{3}G\mu}$. On projette sur \vec{e}_x , on obtient $\ddot{x} = G_1 \vec{e}_r \cdot \vec{e}_x + G_2$. Comme $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_x = \frac{x + \frac{R}{2}}{r}$, on arrive à $\ddot{x} - \frac{2\pi}{3}G\mu x = -\frac{2\pi}{3}G\mu R$ que l'on peut écrire en utilisant la pulsation ω précédente. On obtient $\ddot{x} - \frac{\omega^2}{2}x = -\frac{\omega^2}{2}R$. Les solutions sont $z(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ et $x(t) = C \exp \frac{\omega}{\sqrt{2}}t + D \exp -\frac{\omega}{\sqrt{2}}t + R$. En utilisant les conditions initiales $x(t=0) = 0$, $\dot{x} = 0$, $z(t=0) = R\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\dot{z} = 0$. On obtient $z(t) = R\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega t$ et $x(t) = R(1 - \cosh \frac{\omega}{\sqrt{2}}t)$. La fin du tunnel se produira à la date t_1 telle que $\omega t_1 = \pi$. On a donc $x(t_1) = R(1 - \cosh \frac{\pi}{\sqrt{2}})$. Le mobile ne heurte pas le tunnel si $1 - \cosh \frac{\pi}{\sqrt{2}} \geq -\frac{a}{R}$. Cela correspond à la condition $a \geq R(\cosh \frac{\pi}{\sqrt{2}} - 1)$ où encore $a \geq 3,7R$. Comme $a = \frac{R}{100}$, on voit bien qu'il est impossible de respecter la condition. Le mobile va nécessairement heurter la paroi assez tôt lors de son mouvement.
3. On reprend le problème avec $x = 0$, $\dot{x} = 0$, $z = R\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\dot{z} = -v_0$ comme conditions initiales. On conserve la loi $x(t) = R(1 - \cosh \frac{\omega}{\sqrt{2}}t)$, par contre la loi sur z est modifiée puisque l'on arrive à $x(t) = R\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega t - \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$. Si on note t_2 la date à laquelle le mobile atteint l'autre extrémité, on obtient $-\frac{\sqrt{3}}{2}R = R\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega t_2 - \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t_2$. Pour ne pas heurter la paroi du tunnel, il faut, à la limite, que $a = R(\cosh \frac{\omega t_2}{\sqrt{2}} - 1)$ que l'on peut encore écrire $\cosh \frac{\omega t_2}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{a}{R}$. Comme $\frac{a}{R} \ll 1$, on peut faire un développement limité du cosinus hyperbolique d'où $\cosh \frac{\omega t_2}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{\omega^2 t_2^2}{4} = 1 + \frac{a}{R}$. On en déduit que $\omega t_2 = 2\sqrt{\frac{a}{R}} = 0,2 \text{ rad}$. L'angle ωt_2 étant faible (environ $11,5^\circ$), on peut dire que $\cos \omega t_2 \simeq 1$ et $\sin \omega t_2 \simeq \omega t_2$. On peut donc écrire que $v_0 = R\omega \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1 + \cos \omega t_2}{\sin \omega t_2} \simeq R\omega \frac{5\sqrt{3}}{2}$. On trouve numériquement $v_0 \simeq 46 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. C'est une valeur conséquente puisque c'est environ 4 fois la vitesse que l'on donne lors

du décollage aux fusées sur Terre pour qu'elle puisse se libérer de l'attraction gravitationnelle de notre planète.

26. Force centrale particulière

Réponses : la situation est résumée sur le schéma de la figure 2. On travaillera, dans un premier temps, en coordonnées cylindro-polaires d'origine O puisque par le théorème du moment cinétique, on peut justifier le fait que la trajectoire est contenue dans un plan. Le cercle offre aussi une propriété géométrique intéressante, à savoir que si l'on place l'origine en O , la distance r entre M et O est donnée par l'équation $r = 2R \cos \theta$ pour $\theta \in]-\pi/2; \pi/2[$ puisque l'on forme un triangle rectangle en M dont l'hypothénuse est le diamètre. Sur le schéma, on prendra garde au fait que le vecteur \vec{e}_θ n'est pas tangent au cercle puisque l'origine n'est pas au centre du cercle mais en un point de la périphérie.

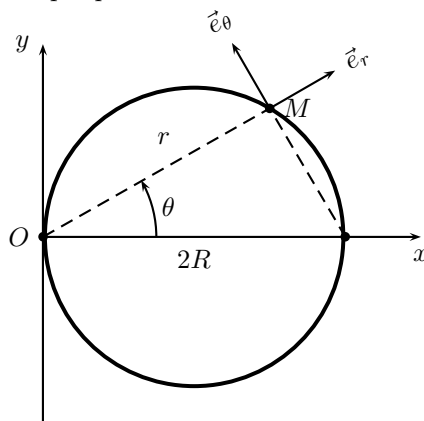


FIGURE 2 – Trajectoire circulaire du point M

On pose $\vec{OM} = r\vec{e}_r$. Le moment cinétique se conserve puisque $\vec{OM} \wedge \vec{F}$. Comme $\vec{L} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$ avec $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, on en déduit que $r^2\dot{\theta}$ est une constante. C'est bien sûr la constante des aires $C = r^2\dot{\theta}$. Comme la force est donnée pour centrale, on ne s'intéressera qu'à la composante sur \vec{e}_r lors du calcul. On peut montrer que l'accélération est $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r$. Grâce à la constante des aires, on peut traiter immédiatement le terme $r\dot{\theta}^2 = \frac{C}{r^3}$. Pour le terme \ddot{r} , il faut calculer la dérivée première pour commencer en privilégiant le passage en θ : $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta}\frac{C}{r^2}$. Comme on a $r = 2R \cos \theta$, on voit que $\frac{dr}{d\theta} = -2R \sin \theta$. Ici, on peut soit tout exprimer en fonction de θ soit garder r et θ . Ensuite, il faut passer à la dérivée seconde toujours en utilisant $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta}\frac{C}{r^2}$. On peut ainsi aboutir à l'expression de la force exercée par O sur M . Toutefois, en situation de force centrale, il est, en général, plus intéressant de travailler en variables de BINET à savoir $(u = \frac{1}{r}, \theta)$. En effet, la gestion du calcul est facilitée. On peut donc écrire que $\vec{OM} = \frac{1}{u}\vec{e}_r$. Ainsi, la vitesse est $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\vec{OM}}{d\theta}Cu^2$ en utilisant la constante des aires $\dot{\theta} = Cu^2$. On obtient $\vec{v} = C(-\frac{du}{d\theta}\vec{e}_r + u\vec{e}_\theta)$. L'accélération est donc $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{d\theta}Cu^2 = C^2u^2\frac{d}{d\theta}(-\frac{du}{d\theta}\vec{e}_r + u\vec{e}_\theta)$. On obtient une accélération uniquement centrale par le calcul, ce qui est rassurant : $\vec{a} = -C^2u^2(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u)\vec{e}_r$. Comme on a $u = \frac{1}{2R \cos \theta}$, on trouve que $\frac{du}{d\theta} = \frac{1}{2R} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}$. On peut passer à la dérivée seconde $\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{1}{2R} \frac{\cos^3 \theta - \sin \theta 2 \cos \theta (-\sin \theta)}{\cos^4 \theta}$. Avec le traditionnel $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$, on arrive après calcul à $\frac{d^2u}{d\theta^2} = u(1 + 2(\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1))$. On trouve $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{8mC^2R^2}{r^5}\vec{e}_r$. C'est une force centrale attractive qui tend vers l'infini pour $\theta \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$. Lorsque cette force va agir en augmentant d'intensité, le mobile atteindra une vitesse qui risque d'être relativiste, invalidant ainsi le calcul pour une partie de la trajectoire. De plus, le modèle ponctuel de l'attracteur est nécessairement générateur de singularité de ce type. Ce modèle serait peut-être acceptable jusqu'à ce que le mobile arrive à la surface de l'attracteur.

27. Planète gazeuse à hydrogène

Réponses : Comme il y a symétrie sphérique, on peut en déduire que la distribution de masse présente les deux plans de symétrie $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ comme plan de symétrie. Le champ gravitationnel créé par la planète est donc $\vec{G} = G_r(r)\vec{e}_r$ car il y a de plus invariance par rotations d'angle θ et d'angle φ . Le référentiel planétocentrique est supposé galiléen. On écrit donc $m\vec{a} = m\vec{G}$. La sonde subit une force centrale. On a donc $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{OM} \wedge m\vec{G} = \vec{0}$. Il y a conservation du moment cinétique $\vec{L} = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z$. On notera $C = r^2\dot{\theta}$ la constante des aires. Le mouvement est donc plan et il vérifie la loi des aires qui dit que des aires balayées égales le sont pendant des durées égales. L'énergie mécanique de la sonde est conservée parce que l'on peut écrire que $\vec{G} = -\text{grad } V(r)$ où $V(r)$ est le potentiel gravitationnel. L'énergie mécanique est $E_m = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + mV(r)$ où l'on pourrait définir l'énergie potentielle effective $E_{p,eff} = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + mV(r)$. Pour connaître le profil de

densité de la planète, il faut connaître le champ gravitationnel donné par l'équation locale $\text{div } \vec{G} = -4\pi\mu(r)\mathcal{G}$. Or $\text{div } \vec{G} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 G_r)$. Pour connaître $G(r)$, on utilise le fait que $\vec{a} = \vec{G} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{d\theta} \frac{C}{r^2}$. Or, $\vec{v} = \frac{dr}{d\theta} \frac{C}{r^2}$. On en déduit que $\vec{v} = \frac{C}{r^2} (\frac{dr}{d\theta} \vec{e}_r + r\vec{\theta}) = C(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \vec{e}_\theta)$. On trouve $\vec{v} = \frac{C}{r_0} (ak \sin k\theta \vec{e}_r + (1 + a \cos k\theta) \vec{e}_\theta)$. En utilisant cette expression dans l'expression de l'accélération, on arrive $\vec{a} = -\frac{C^2}{r_0^2} (1 + (1 - k^2)a \cos k\theta) \vec{e}_r = G_r(r) \vec{e}_r$. On constate déjà - fait rassurant - que l'accélération est centrale dirigée par $-\vec{e}_r$. On utilise le fait que $a \cos k\theta = \frac{r_0}{r} - 1$. L'expression du champ de gravitation est $\vec{G} = -\frac{C^2}{r_0^2} (k^2 + (1 - k^2) \frac{r_0}{r}) \vec{e}_r$. En appliquant $\text{div } \vec{G} = -4\pi\mu(r)\mathcal{G}$, on arrive à l'égalité $\frac{(k^2-1)C^2}{4\pi\mathcal{G}r^4}$. On a donc une masse volumique à l'intérieur de la planète qui est $\mu(r) = \frac{(k^2-1)C^2}{4\pi\mathcal{G}r^4} = \frac{A}{r^4}$ avec $A > 0$. Sans information supplémentaire sur la trajectoire comme par exemple sur le périhélie ou l'apogée, il n'est pas possible de préciser la constante des aires C . On pourra remarquer qu'en dehors de la planète, on a une situation de gravitation classique avec une ellipse (ou un cercle) d'équation polaire $r = \frac{p}{1+e \cos \theta}$ où e est l'excentricité de la trajectoire. À symétrie sphérique et à l'extérieur de la planète, tout se passe comme si toute la masse de la planète était placée au centre, le champ gravitationnel est alors de la forme $\vec{G} = \vec{G}_0 \frac{R^2}{r^2}$ si R est le rayon de la planète et \vec{G}_0 le champ gravitationnel à sa surface. On constate immédiatement que $r^2 G_r(r) = G_0 R^2$ est une constante. On obtient aussitôt $\text{div } \vec{G} = 0 = -4\pi\mu(r > R)\mathcal{G}$. On trouve bien que $\mu(r > R) = 0$ ce qui est cohérent avec le fait qu'on se situe en dehors de la planète. Pour trouver le profil de pression, on va supposer que l'étoile est en équilibre mécanique et que la loi de la statique des fluides s'y applique. On a $\text{grad } P = \frac{dP}{dr} \vec{e}_r = \mu \vec{G} = \frac{A}{r^4} (-\frac{B}{r^2} + \frac{C}{r^3}) \vec{e}_r$ puisque nous avons vu que $G_r(r) = -\frac{B}{r^2} + \frac{C}{r^3}$ avec $B > 0$ et $C > 0$. On a donc $\frac{dP}{dr} = -\frac{AB}{r^6} + \frac{AC}{r^7}$. On intègre jusqu'à la limite de la planète où la pression est nulle faute d'hydrogène présent. On a donc $P(r) = \frac{AB}{5} (\frac{1}{r^5} - \frac{1}{R^5}) - \frac{AC}{6} (\frac{1}{r^6} - \frac{1}{R^6})$. Pour le profil de température, on utilise la loi des gaz parfaits $P(r) = \mu(r) \frac{R}{M_H} T(r)$. On trouve $T(r) = \frac{M_H}{R} \left(\frac{B}{5r} (1 - \frac{r^5}{R^5}) - \frac{C}{6r^2} (1 - \frac{r^6}{R^6}) \right)$.

28. Anneau de Fourier

Réponses :

- On considère une petite portion de l'anneau compris entre θ et $\theta + d\theta$, son volume est $d\tau = SRd\theta$ compte tenu des hypothèses simplificatrices comme $R \gg \sqrt{S}$ par exemple. Sa masse est donc $dm = \mu SRd\theta$. On effectue un bilan d'énergie en puissance : $dmc \frac{\partial T}{\partial t} = P_{\text{entre}} - P_{\text{sort}} + P_{\text{créée}}$. Il n'y a pas de puissance créée au sein de l'anneau ou de puissance absorbée d'ailleurs donc $P_{\text{créée}} = 0$. La puissance qui entre correspond au transfert thermique de conduction en θ , on a donc $j_{\text{cond}}(\theta, t)S$, la puissance qui sort est $j_{\text{cond}}(\theta + d\theta, t)S$. Ici, le vecteur densité de courant de transfert thermique de conduction est orthoradial donné par la loi de FOURIER : $\vec{j}_{\text{cond}} = -\lambda \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$. On a donc $\mu c SRd\theta \frac{\partial T}{\partial t} = S(j_{\text{cond}}(\theta, t) - j_{\text{cond}}(\theta + d\theta))$. On obtient ensuite assez aisément l'équation différentielle : $\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \frac{R^2}{D} \frac{\partial T}{\partial t}$.
- On commence par calculer $\frac{\partial T}{\partial \theta} = -\frac{T_0 \ell R^2}{4\sqrt{\pi}(Dt)^{3/2}} \left(\theta \exp - \frac{R^2 \theta^2}{4Dt} \right)$. On peut passer au calcul de la dérivée seconde : $\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \frac{T_0 \ell R^2}{4\sqrt{\pi}(Dt)^{3/2}} \left(\frac{R^2 \theta^2}{2Dt} - 1 \right) \exp - \frac{R^2 \theta^2}{4Dt}$. Pour le calcul de la dérivée par rapport au temps, il faut être vigilant car le temps intervient dans le facteur pré-exponentiel et aussi dans l'exponentielle. On trouve que $\frac{R^2}{D} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_0 \ell R^2}{2\sqrt{\pi}} \left(-\frac{1}{2(Dt)^{3/2}} + \frac{R^2 \theta^2}{4(Dt)^{5/2}} \right) \exp - \frac{R^2 \theta^2}{4Dt}$. Il faut organiser correctement cette dernière expression pour aboutir à : $\frac{R^2}{D} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_0 \ell R^2}{4\sqrt{\pi}(Dt)^{3/2}} \left(-1 + \frac{R^2 \theta^2}{2Dt} \right) \exp - \frac{R^2 \theta^2}{4Dt}$. On constate bien que la solution vérifie l'équation de diffusion thermique.
- Une fonction qui vérifie une équation différentielle n'est pas nécessairement adaptée au problème particulier étudié. Il faut qu'elle vérifie les conditions aux limites mais aussi les conditions initiales. Ici, on peut remarquer la fonction $T(\theta, t)$ est paire en θ . Par conséquent, le vecteur densité de courant de transfert thermique $\vec{j}_{\text{cond}} = j_\theta \vec{e}_\theta$ est une fonction impaire de θ puisque la loi de FOURIER indique qu'il est proportionnel à la dérivée en θ de la température. Si l'on observe le graphique de la figure 3, on peut voir que la dérivée en $\theta = \pi$ et celle en $\theta = -\pi$ sont non nulles et opposées. Le graphique a été réalisé à une date $t = t_0 > 0$. Or dans le contexte de l'anneau, $\theta = -\pi$ et $\theta = \pi$ correspondent au même point opposé à l'origine des angles ! En ce point, on aurait deux flux thermiques, l'un allant dans un sens et l'autre en sens contraire. Cela ne peut être ainsi, en réalité, il faudrait que la solution proposée vérifie $\frac{\partial T}{\partial \theta} \Big|_{\pi} = 0$.
- La recherche de solution à variables séparées conduit à $\frac{1}{g(t)} \frac{dg}{dt} = \frac{D}{R^2} \frac{1}{f(\theta)} \frac{d^2 f}{d\theta^2}$. Cette équation doit être vérifiée $\forall t$ et $\forall \theta$, chaque membre doit être égal à la même constante K . On a donc $\frac{dg}{dt} - Kg(t) = 0$. Il n'est pas raisonnable du tout d'envisager une solution réelle positive pour K puisque la température divergerait alors. On a donc $K = -\frac{1}{\tau}$ où τ est une durée caractéristique. La solution est donc $g(t) = g(0) \exp -\frac{t}{\tau}$. On peut se permettre de prendre $g(0) = 1$ en reportant les questions d'amplitude sur la fonction $f(\theta)$ qui

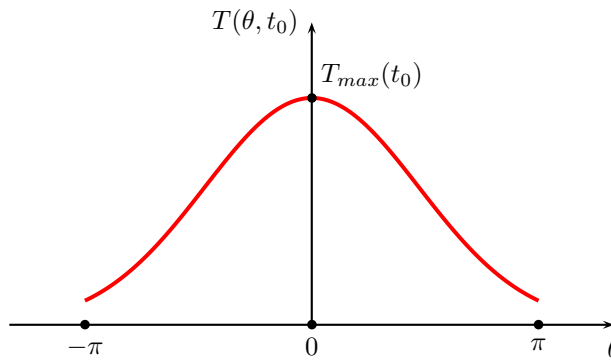


FIGURE 3 – Gaussienne solution de l'équation de diffusion thermique

obéit à $\frac{d^2 f}{d\theta^2} + \frac{R^2}{D\tau} f(\theta) = 0$. Les solutions sont harmoniques de la forme $f(\theta) = A \cos \frac{R}{\sqrt{D\tau}} \theta + B \sin \frac{R}{\sqrt{D\tau}} \theta$. La particularisation de la solution viendra des conditions aux limites et des conditions initiales. Par exemple, si le problème posé impose une solution paire en θ comme dans la solution testée en début d'exercice, on aura $B = 0$. Avec un système circulaire, on peut se poser la question des limites. . . Il faut simplement voir que quoi qu'il arrive, on ne pourra accepter que des solutions 2π -périodiques puisqu'il faut bien retomber sur la même température après avoir effectué une rotation de $2\pi n$ où $n \in \mathbb{N}$. On peut donc avancer que $f(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta$ ce qui impose la relation $\frac{R}{\sqrt{D\tau}} = n$. Par linéarité de l'équation de diffusion thermique, la solution est donc $T(\theta, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \exp -\frac{n^2 Dt}{R^2}$.

5. L'aide mathématique fournie est tout à fait dédiée à la situation proposée où la moitié de l'anneau est à T_0 et l'autre moitié à une température nulle. Il suffit de prendre l'origine des angles θ au milieu de la zone à la température T_0 pour avoir exactement la situation de la fonction $f_a(\theta)$ à une multiplication près par T_0 et pour $a = \pi$. La forme de la solution est donc $T(\theta, t) = T_0(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \text{sinc } n\frac{\pi}{2} \cos n\theta \exp -\frac{n^2 Dt}{R^2})$. Si n est pair, alors $\text{sinc } n\frac{\pi}{2} = 0$. Il ne faut que se préoccuper des solutions à n impair. On écrit $n = 2p + 1$. Compte tenu des valeurs du sinus en $\pi/2$ et en $3\pi/2$, on peut proposer une forme alternative à la série. $T(\theta, t) = T_0(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \cos(2p+1)\theta \exp -\frac{(2p+1)^2 Dt}{R^2})$. La constante de temps la plus grande correspond au fondamental pour lequel $p = 0$, c'est l'harmonique qui s'amortit le moins vite. La valeur à des temps très longs de la température est bien sûr $T_{\infty} = \frac{T_0}{2}$, elle correspond à une répartition de l'énergie interne sur l'ensemble de l'anneau alors que cette énergie avait été distribuée au départ sur la moitié de l'anneau. Il n'y a rien de surprenant à cela. Pour obtenir le régime asymptotique, on ne conservera que le fondamental : $T_{as}(\theta, t) = T_0(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos \theta \exp -\frac{Dt}{R^2})$.
6. En injectant l'énergie de la situation précédente, sur une zone très réduite, on peut utiliser la distribution de DIRAC pour représenter la situation initiale. Compte tenu du contexte de l'exercice, on peut encore dire que cela revient à faire l'étude précédente pour $a \rightarrow 0$. Or, nous savons que $\lim_{a \rightarrow 0} \text{sinc } \frac{na}{2} = 1$, on peut en déduire que $f_{a \rightarrow 0} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta$. L'évolution de la température est donc donnée par $T(\theta, t) = T_0(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta \exp -\frac{n^2 Dt}{R^2})$. Le régime asymptotique aux temps longs est donc d'une forme quasi-identique à la précédente : $T_{as}(\theta, t) = T_0(\frac{1}{2} + \cos \theta \exp -\frac{Dt}{R^2})$.

29. Filtre magnétique

Réponses : Si l'on est un peu initié à la physique relativiste, on pense d'entrée que les faisceaux d'électrons et de protons sont relativistes et que leur vitesse est vraisemblablement supérieure à $c/10$. À défaut, on peut calculer leur vitesse par la formule classique $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = 2 \text{ GeV} = 3,2 \times 10^{-10} \text{ J}$. Pour le proton - le plus lourd des deux -, on trouve $v_p = 6,2 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Cette vitesse est bien supérieure à $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Pour les électrons cela va être bien pire ! $v_e = 2,7 \times 10^{10} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. À ce stade, il faut connaître quelques petites choses à la relativité restreinte. On peut démontrer facilement en physique classique que les charges $\pm e$ décrivent des trajectoires circulaires de rayon donné par $R = \frac{mv}{eB}$. Il s'avère que cette formule se transpose si l'on parle en quantité de mouvement à savoir en physique relativiste, on a toujours $R = \frac{p}{eB}$ mais p est la quantité de mouvement relativiste donnée par $p = \gamma mv$ avec $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Ceci est la conséquence du fait que la puissance

de la force de LORENTZ est nulle et que le coefficient γ est constant. On trouve aussi la quantité de mouvement dans l'expression de l'énergie totale (en fait les 2 GeV) de la particule donné par $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$ où mc^2 est la fameuse énergie de masse d'EINSTEIN. On peut aussi retenir que $E = \gamma mc^2$ et que l'énergie cinétique est $E_c = (\gamma - 1)mc^2$. Grâce à ces formules, on peut trouver pc dans un premier temps puis la quantité de mouvement. On trouve que le proton possède une quantité de mouvement $p_2 = 9,4 \times 10^{-19} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et une vitesse $v_p = 0,88c$. Pour l'électron, on trouve $p_1 = 1,1 \times 10^{-18} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et une vitesse $v_e = c(1 - \varepsilon)$ avec

$\varepsilon \simeq 3 \times 10^{-8}$, il est ultra... ultra relativiste ! Avec les valeurs des quantités de mouvement, on trouve les rayons suivants : $R_e = 6,25 \text{ m}$ et $R_p = 6,00 \text{ m}$. On constate que $\ell = 0,1 \text{ m}$ la largeur de la zone uniforme du champ magnétique est petite devant R . On a $\ell \ll R_e$ et $\ell \ll R_p$. On effectue un schéma pour calculer le décalage vertical des faisceaux. Sur le schéma initial, il est représenté symétrique mais il n'est pas tout à fait en raison du fait que $R_p \neq R_e$, voir le schéma de la figure 4 où les protons sont déviés vers le bas et les électrons vers le haut.

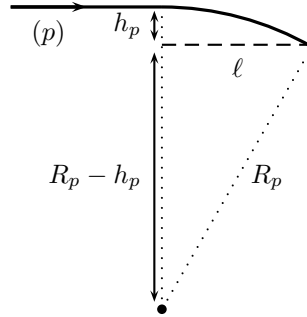


FIGURE 4 – Filtre magnétique

Pour le proton, le décalage vertical est $2h_p$, il est de $2h_e$ pour l'électron. Sur le schéma de la figure 4, on peut voir que $(R_p - h_p)^2 + \ell^2 = R_p^2$ ce qui après développement limité conduit à $h_p \simeq \frac{\ell^2}{2R_p}$. On a donc $2h_p = \frac{\ell^2}{R_p}$ et $2h_e = \frac{\ell^2}{R_e}$. Le décalage vertical entre les deux faisceaux est donc $\Delta z = \ell^2 e B \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \right)$. On trouve $\Delta z = 3,3 \text{ mm}$.

30. Champ magnétique d'un condensateur

Réponses : Tout plan contenant l'axe de symétrie vertical du condensateur est un plan de symétrie, le champ magnétique sera donc orthoradial $\vec{B} = B_\theta(r, z)\vec{e}_\theta$ puisqu'il y a invariance par rotation autour de ce même axe de symétrie. On supposera raisonnablement que l'on se situe dans l'ARQS magnétique pour les zones I puisqu'on utilise un générateur sinusoïdal et que l'on a un courant $i(t)$ correspondant au courant chargeant (ou déchargeant) le condensateur. On peut donc appliquer le théorème d'AMPÈRE de la statique $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i_{\text{enlacé}}(t)$ en travaillant sur un contour circulaire, centré sur l'axe et de rayon r . Dans la zone I, on a $i_{\text{enlacé}}(t) = i(t)$ d'où le champ magnétique $\vec{B}_I = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r} \vec{e}_\theta$. Cela revient à considérer que le champ électrique (ou plutôt ses variations au cours du temps) est négligeable dans cette zone. Dans la zone II, il ne faut plus se placer dans l'ARQS parce qu'il n'y a pas de courants libres, de courants traditionnels. On applique la version généralisée du théorème d'AMPÈRE qui donne $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \iint_{S/C} \vec{E} \cdot d\vec{S}$, toujours sur un cercle centré sur l'axe de symétrie et de rayon r . On fait maintenant l'hypothèse simplificatrice que le champ électrique est uniforme dans le condensateur (zone II) et que l'on néglige les effets de bord. Nous avons vu en cours que $\vec{E} = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \vec{e}_z$ avec $\sigma(t) = \frac{q(t)}{\pi R^2}$ où $q(t)$ est la charge de l'armature supérieure. Comme $i(t) = \frac{dq}{dt}$, on arrive à l'expression du champ magnétique $\vec{B}_{II} = \frac{i(t)}{2\pi R^2 c^2 \varepsilon_0} \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi R^2} r \vec{e}_\theta$. Pour le calcul du champ magnétique dans la zone III, on considère que seule la zone II apporte une contribution au flux du champ électrique. On a donc $B_\theta 2\pi r = \frac{i(t)}{\pi R^2 c^2 \varepsilon_0} \pi R^2$, on arrive alors $\vec{B}_{III} = \frac{i(t)}{2\pi r c^2 \varepsilon_0} \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r} \vec{e}_\theta$.

31. L'axion : une particule hypothétique

Réponses :

- On a $\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}$. Comme le milieu est supposé localement neutre (il n'y a aucune information susceptible de nous montrer le contraire), on peut en déduire que $\Delta \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{rot}} \vec{B})$. On utilise l'équation de MAXWELL-AMPÈRE et la forme de la densité volumique de courant proposée, cela donne $\vec{\text{rot}} \vec{B} = -\frac{\eta}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \vec{B}_0 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$. L'équation de propagation du champ électrique est donc $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{\eta}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} B_0 \vec{e}_z$. L'équation est bien différente de l'équation de D'ALEMBERT qui est pertinente pour une propagation dans le vide.

- On teste une forme OPPS pour le champ électrique et pour le champ ϕ représentant l'axion. On obtient d'une part $(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2)E(x, t) = \frac{\eta \omega^2}{c} B_0 \phi$. Pour le champ d'axion, on arrive à $(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2})\phi = -\frac{\eta}{\mu_0 c} B_0 E(x, t)$. En combinant ces deux résultats, on arrive à $(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2})^2 = \eta^2 \omega^2 B_0^2 \varepsilon_0$. On obtient alors $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (1 \pm \frac{\eta B_0 c^2 \sqrt{\varepsilon_0}}{\omega})$. Il ne peut y avoir de propagation que si $k^2 > 0$, cela impose une contrainte

sur la pulsation $\omega > \eta B_0 c^2 \sqrt{\epsilon_0}$. Si cette condition est remplie, on trouve un vecteur d'onde donné par

$$k = \frac{\omega}{c} \alpha(\omega) \text{ avec } \alpha(\omega) = \sqrt{1 \pm \frac{\eta B_0 c^2 \sqrt{\epsilon_0}}{\omega}}.$$

3. Nous allons établir les expressions de ϕ dans chaque zone. Appelons 1 la zone pour $x < (-L)$, 2 celle où le champ magnétique est intense et 3 la zone $x > 0$. Comme l'axion est produit dans le milieu 2 et que dans les milieux 1 et 3, il n'y a pas d'évolution du milieu, il ne peut pas se produire de phénomènes de réflexion par exemple. L'axion ne peut se déplacer que selon x décroissant dans le milieu 1 et dans le sens croissant dans le milieu 3. On a donc $\phi_3 = A_3 \exp i(\omega - \frac{\omega}{c}x)$ et $\phi_1 = B_1 \exp i(\omega + \frac{\omega}{c}x)$. Pour le milieu 2, c'est un peu plus compliqué puisqu'il faut tenir compte de la solution homogène qui correspond à une solution dans le vide et de la solution particulière. La solution homogène est $\phi_{2h} = A_2 \exp i(\omega t - \frac{\omega}{c}x) + B_2 \exp i(\omega t + \frac{\omega}{c}x)$. La solution particulière est $\phi_{2p} = -\frac{\epsilon_0 c \eta |E| B_0}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \exp i(\omega t - kx)$ où k est le vecteur d'onde déterminé précédemment $k = \frac{\omega}{c} \alpha(\omega)$. Finalement, on a $\phi_2 = -\frac{\epsilon_0 c \eta |E| B_0}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \exp i(\omega t - kx) + A_2 \exp i(\omega t - \frac{\omega}{c}x) + B_2 \exp i(\omega t + \frac{\omega}{c}x)$. Il faut écrire la continuité de ϕ en $x = 0$, $x = -L$, puis la continuité de $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ aux mêmes endroits. On note $C_2 = -\frac{\epsilon_0 c \eta |E| B_0}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$, on obtient pour la continuité de ϕ les deux équations suivantes : $C_2 + A_2 + B_2 = A_3$ ainsi que $C_2 \exp ikL + A_2 \exp i\frac{\omega}{c}L + B_2 \exp -i\frac{\omega}{c}L = B_1 \exp -i\frac{\omega}{c}L$. Pour la continuité de la dérivée, on arrive à $kC_2 + (A_2 - B_2)\frac{\omega}{c} = A_3 \frac{\omega}{c}$ et enfin $kC_2 \exp ikL + (A_2 \exp i\frac{\omega}{c}L - B_2 \exp -i\frac{\omega}{c}L)\frac{\omega}{c} = B_1 \frac{\omega}{c} \exp -i\frac{\omega}{c}L$. Faisons le point de la situation : C_2 est proportionnel à $|E|B_0$, B_1 , A_2 , B_2 et A_3 sont des inconnues. Il y a 4 équations, on pourra donc forcément aboutir à une solution où tous ces coefficients seront exprimés en fonction de C_2 et donc proportionnels à $|E|B_0$ ce qui répond à la question puisqu'il n'était pas demandé de rechercher les expressions de ces amplitudes...

32. Lentille de Zernicke

Réponses :

1. On commence par remarquer que pour former une onde plane après avoir traversé le verre de la lentille, la source lumineuse est nécessairement placée au foyer objet de la lentille. L'onde sphérique passant par le trou éclaire une zone circulaire de rayon $(1 + \frac{D}{f})\frac{d}{2} = 5,5 \text{ cm}$ en utilisant le théorème de THALÈS. L'onde plane, elle, éclaire une zone annulaire de rayon $r_{min} = \frac{d}{2} = 0,5 \text{ cm}$ puisque le rayon limite trou-verre (dans le verre) ressort parallèle à l'axe optique. La limite de l'onde plane et donc de l'anneau est fixée directement par le diamètre de la lentille. N'ayant pas de données à ce propos, on supposera que ce diamètre est suffisamment grand pour que la zone atteinte par l'onde plane déborde celle atteinte par l'onde sphérique. Afin de bien comprendre la situation, on se reportera au schéma de la figure 5.

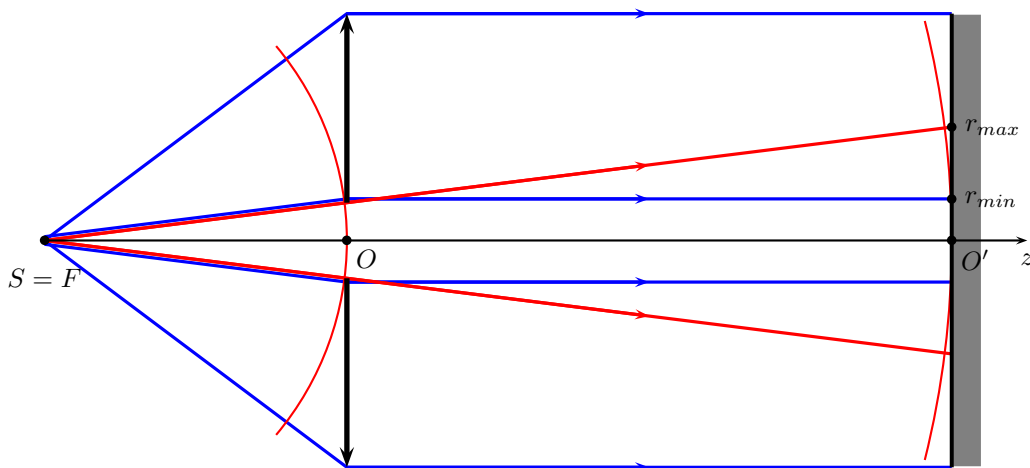


FIGURE 5 – La lentille de ZERNICKE

Comme on peut le comprendre, il y a une zone d'interférences comprise entre r_{min} et $r_{max} = (1 + \frac{D}{f})\frac{d}{2} = 5,5 \text{ cm}$. Sinon pour $r < r_{min}$, l'éclairage est uniquement dû à l'onde sphérique alors que pour $r > r_{max}$, il n'y a que la contribution de l'onde plane. Il faut donc étudier les interférences entre l'onde sphérique et l'onde plane puisqu'elles sont synchrones et cohérentes. Il faut être attentif aux amplitudes et à la phase. L'amplitude d'une onde sphérique évolue de façon inversement proportionnelle au rayon de la sphère par rapport à la source. L'amplitude de l'onde sphérique qui atteint l'écran est de la forme $\frac{A}{D+f}$. Pour l'onde

plane, il faut prendre en compte le fait qu'elle provient de l'onde sphérique (sans perte d'énergie - lentille parfaite) qui a atteint la lentille depuis S . Son amplitude est donc de la forme $\frac{A}{f}$. Il faut maintenant réfléchir au déphasage entre les deux ondes. Pour cela, on se reportera au schéma réalisé à la figure 6.

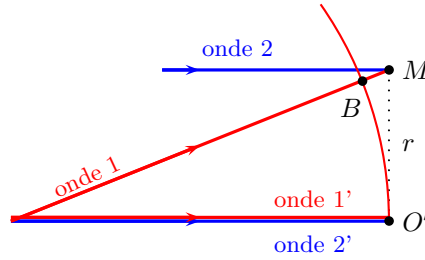


FIGURE 6 – Mise en évidence du déphasage

Si la lentille était pleine, les ondes 2 et 2' seraient en phase par propriété de stigmatisme de la lentille. Mais, ici, le rayon de l'onde sphérique qui effectue le parcours SO' passe dans une épaisseur e d'air alors que pour l'onde 2', il y aurait un chemin optique supplémentaire ne à travers la lentille. On peut donc commencer par compter une différence de marche $(n-1)e$. Les ondes 1 et 1' présentent une différence de marche dans l'air de BM . La différence de marche est donc $\delta = (n-1)e - BM$. En utilisant le théorème de PYTHAGORE, on obtient $BM = \sqrt{(D+f)^2 + r^2} - (D+f) = (D+f)(\sqrt{1 + (\frac{r}{D+f})^2} - 1)$. On peut effectuer un développement limité compte tenu du fait que $r \ll D+f$, on arrive à $BM = \frac{r^2}{2(D+f)}$.

Finalement la différence de marche est $\delta = (n-1)e - \frac{r^2}{2(D+f)}$. La phase est $\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$. L'amplitude complexe de l'onde 1 est $s_1 = \frac{A}{f} \exp(j\omega t)$, celle de l'onde 2 est $s_2 = \frac{A}{D+f} \exp(j(\omega t + \varphi))$. L'amplitude totale est $s_{tot} = \frac{A}{f} \exp(j\omega t)(1 + \frac{\exp(j\varphi)}{1 + \frac{D}{f}})$. L'éclairement sur l'écran est donné par $E = \beta s_{tot} s_{tot}^*$. On a donc $E(M) = \frac{\beta A^2}{f^2} (1 + \frac{1}{(1 + \frac{D}{f})^2} + \frac{2}{1 + \frac{D}{f}} \cos \varphi)$. On fait apparaître une fonction de contraste en factorisant dans l'expression de l'éclairement : $E(M) = E_0 (1 + \frac{2(1 + \frac{D}{f})}{(1 + \frac{D}{f})^2 + 1} \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda})$ avec $E_0 = \frac{\beta A^2}{(D+f)^2} (1 + (1 + \frac{D}{f})^2)$ et

un facteur de contraste donné par : $C = \frac{2(1 + \frac{D}{f})}{(1 + \frac{D}{f})^2 + 1} = 0,18$. Cette valeur, assez faible, montre que la

distinction entre les franges brillantes et les franges sombres ne sera pas très bonne mais quand même possible. Une frange brillante est donnée par $\delta = p\lambda$ avec $p \in \mathbb{N}$. L'ordre d'interférence est donné par $p = [(n-1)e - \frac{r^2}{2(D+f)}] \frac{1}{\lambda}$. Pour $r = r_{min}$, on aura un ordre maximal. On trouve numériquement que $p_{max} = 2977,3$. Pour r_{max} , c'est le contraire l'ordre sera minimum, on trouve $p_{min} = 250$. On voit donc que pour $r = \frac{d}{2}$, on a une frange brillante. Pour terminer, on constate qu'il y a beaucoup de franges brillantes en forme d'anneaux dans la zone annulaire qui constitue le champ d'interférences. Il y en a 2727... L'interfrange n'est pas constant mais on peut calculer un interfrange moyen pour obtenir son ordre de grandeur. On a $i_{moy} \simeq \frac{r_{max} - r_{min}}{p_{max} - p_{min}}$. On trouve $i_{moy} \simeq 18 \mu m$. Cette valeur empêche de voir les franges à l'œil nu, il faut un oculaire pour y arriver. Un capteur d'intensité lumineuse possédant des pixels d'une taille de $2 \mu m$, par exemple, permettrait d'enregistrer correctement les interférences.

33. Une balance ultrasensible

Réponses :

1. La force exercée par le ressort dérive d'une énergie potentielle $\frac{1}{2}\alpha x^2$. On considère la référence des énergies potentielles dans le plan $x = 0$, l'énergie potentielle de pesanteur est $-mgx$. À l'équilibre, on a $mg = \alpha x_{eq}$. L'énergie potentielle est donc $E_p = \frac{1}{2}\alpha x^2 - \alpha x x_{eq} = \frac{1}{2}\alpha (x - x_{eq})^2 - \frac{1}{2}\alpha x_{eq}^2$. La loi de probabilité est donc de la forme $p(x) = A \exp - \frac{\alpha (x - x_{eq})^2}{2k_B T}$ en entrant la constante de l'énergie potentielle dans A . La normalisation de la loi de probabilité est $A \int_{-\infty}^{\infty} \exp - \frac{\alpha (x - x_{eq})^2}{2k_B T} dx = 1$. On pose $u = (x - x_{eq}) \sqrt{\frac{\alpha}{2k_B T}}$ et on peut profiter de l'intégrale fournie pour obtenir $A = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi k_B T}}$. La loi de probabilité est donc

$p(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi k_B T}} \exp - \frac{\alpha (x - x_{eq})^2}{2k_B T}$. Cette loi de probabilité est paire par rapport à x_{eq} , la valeur moyenne est donc $\bar{x} = x_{eq}$. C'est la valeur prévue par la Mécanique classique.

- Les fluctuations correspondent à l'écart-type de $X = x - x_{eq}$ où l'on centre la variable. On a $\Delta X^2 = \overline{X^2} - (\overline{X})^2$. Mais $\overline{X} = 0$, on doit donc calculer la moyenne du carré : $\overline{X^2} = \int_{-\infty}^{\infty} X^2 p(X) dX$. En effectuant le même changement de variable qu'avant on arrive à $\overline{X^2} = \frac{2k_B T}{\alpha \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \exp -u^2 du$. Cette dernière intégrale peut encore être écrite comme $\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u(2u \exp -u^2) du$ ce qui fait que l'on peut pratiquer une intégration par partie avec $f = u$ et $g = -\exp -u^2$. On trouve alors facilement que $\int_{-\infty}^{\infty} u^2 \exp -u^2 du = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp -u^2 du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. On a donc $\overline{X^2} = \frac{k_B T}{\alpha}$. Les fluctuations autour de l'équilibre sont donc $\sqrt{\frac{k_B T}{\alpha}}$.
- Pour que la mesure soit possible, il faut que les fluctuations soient inférieures à x_{eq} . À la limite, on aura $x_{eq} = \sqrt{\frac{k_B T}{\alpha}}$. Comme $\alpha x_{eq} = mg$, on en déduit la masse minimale que l'on peut mesurer : $m_c = \frac{\sqrt{\alpha k_B T}}{g}$.
- La mesure de la constante de BOLTZMANN est possible mais il faut pour cela avoir des mesures précises de m , de g , de T et de α puisque $k_B = \frac{m^2 g^2}{\alpha T}$. Le plus délicat sera sans doute d'avoir une grande précision sur la valeur de α .

34. Piles...

Réponses :

1. Hg_{liq} possède un degré d'oxydation de 0, Hg_2^{2+} de $+I$ et Hg^{2+} tout comme $\text{Hg}(\text{OH})_2$ de $+II$. La réaction $\text{Hg}^{2+} + 2\text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{Hg}(\text{OH})_2 + 2\text{H}^+$ nous montre que Hg^{2+} et $\text{Hg}(\text{OH})_2$ forment un couple respectivement acide et base. Le domaine d'existence de $\text{Hg}(\text{OH})_2$ sera situé à un pH supérieur à la frontière déterminée grâce à $K_s = \frac{[\text{Hg}^{2+}][\text{HO}]^{-2}}{C_{\text{O}3}}$. La frontière est donnée pour $K_s = 10^{-25,4} = \frac{10^{-1}[\text{HO}]^{-2}}{C_{\text{O}3}}$. On trouve qu'elle se situe à $pH = 1,8$. En dessous de cette valeur, on considère le couple $2\text{Hg}^{2+} + 2e^- \rightleftharpoons \text{Hg}_2^{2+}$ de loi de NERNST $E_1 = 0,91 + 0,03 \log \frac{[\text{Hg}_2^{2+}]}{[\text{Hg}^{2+}]^2 C_{\text{O}3}}$. Avec l'équipartition de l'élément mercure, on a $[\text{Hg}^{2+}] = 2[\text{Hg}_2^{2+}] = 0,05 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. On trouve $E_1 = 0,88 \text{ V}$. Au-delà de $pH = 1,8$, il faut considérer le couple $2\text{Hg}(\text{OH})_2 + 4\text{H}^+ + 2e^- \rightleftharpoons 2\text{Hg}_2^{2+} + 4\text{H}_2\text{O}$ de loi de NERNST $E'_1 = E_1^{\circ'} + 0,03 \log \frac{[\text{H}^+]^4}{[\text{Hg}_2^{2+}] C_{\text{O}3}}$. Cette équation génère une affine qui passe par le point $(1,8; 0,88 \text{ V})$ de pente $-0,12 \text{ V} \cdot pH^{-1}$. L'équation est donc $E'_1 = 1,10 - 0,12pH$. On étudie maintenant $\text{Hg}_2^{2+} + 2e^- \rightleftharpoons 2\text{Hg}_{liq}$ de loi de NERNST $E_2 = 0,79 + 0,03 \log \frac{[\text{Hg}_2^{2+}]}{C_{\text{O}3}} = 0,76 \text{ V}$. Cette droite va intersecter la précédente à pH_i tel que $0,76 = 1,10 - 0,12pH_i$ d'où $pH_i = 3,7$. Au-delà de ce pH , l'entité Hg_2^{2+} n'existe plus, on se retrouve avec le couple $\text{Hg}(\text{OH})_2 + 2\text{H}^+ + 2e^- \rightleftharpoons \text{Hg}_{liq} + 2\text{H}_2\text{O}$. Cette loi conduit à une loi de potentiel affine de pente $-0,06 \text{ V} \cdot pH^{-1}$ passant par le point $(3,7; 0,76 \text{ V})$. Son équation est $E_3 = 0,98 - 0,06pH$. Le diagramme $E - pH$ est représenté à la figure 7.

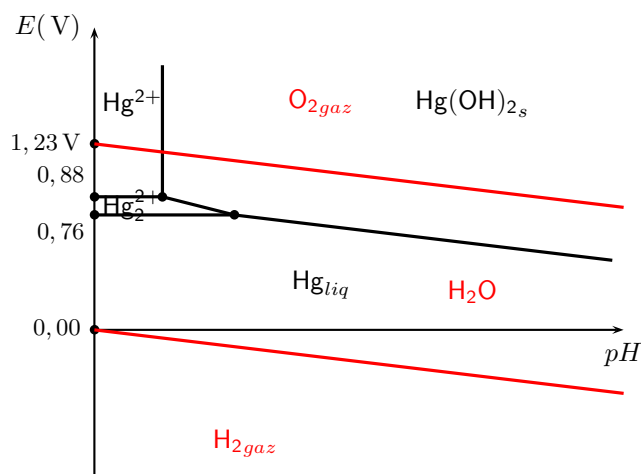
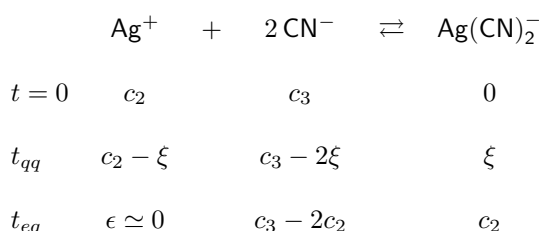


FIGURE 7 – Diagramme $E - pH$ du mercure

2. On constate que toutes les espèces du mercure étudiées ici, présentent un domaine commun avec celui de l'eau. Elles peuvent donc être stables dans l'eau. Encore faut-il les mettre dans un point de leur domaine de prédominance ou d'existence.

Pile de concentration

1. Le couple rédox est dans les deux demi-piles celui de l'argent Ag^+/Ag_s , la différence de potentiel est la conséquence de la différence des concentrations. On devrait plutôt dire du rapport des concentrations. . . La cathode de signe \oplus est le côté (1) où la concentration en ions argent est c_1 , l'anode où se produit l'oxydation le côté (2) où la concentration est c_2 . Pour chaque électrode le potentiel est $E_i = 0,80 + 0,06 \log \frac{c_i}{c^\circ}$ où $E_{\text{Ag}^+/\text{Ag}_s}^\circ = 0,80 \text{ V}$. La tension à vide de la pile est $E = E_1 - E_2 = 0,06 \log \frac{c_1}{c_2} = 0,06 \text{ V}$, ce n'est pas très élevé. Lorsque la pile fonctionne, la concentration en ions argent diminue en (1) et augmente en (2). La pile s'arrête de fonctionner lorsque les deux potentiels sont égaux et donc lorsque les concentrations en ions argent sont les mêmes de chaque côté.
2. La fem est aussi la tension à vide calculée à la question précédente.
3. Comme la tension à vide est beaucoup grande maintenant, cela signifie que le rapport des concentrations en ions argent a beaucoup augmenté. On a donc $[\text{Ag}^+]_{(2)} \ll c_1$. La réaction de complexation des ions Ag^+ est sans doute totale. On note ϵ la concentration $[\text{Ag}^+]_{(2)}$. On a donc $E' = 1,08 \text{ V} = 0,06 \log \frac{c_1}{\epsilon}$. On en déduit que $\epsilon = 4 \times 10^{-21} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. La réaction de complexation est :



4. On fait débiter cette pile dans une résistance électrique, le côté (1) est toujours la cathode \oplus , des ions argent vont devenir de l'argent solide. À l'anode de l'argent va évoluer en ions argent qui vont se complexer de façon immédiate jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'ions CN^- disponibles. Ensuite, des ions argent Ag^+ libres vont apparaître en solution. La pile s'arrête lorsque la concentration en ions argent est la même de chaque côté de l'électrode. Après la réaction précédente qui est totale, il reste $0,032 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ d'ions CN^- qui vont complexer lorsque la pile débite $0,016 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ d'ions Ag^+ . Ce n'est qu'ensuite que la concentration en ions argent côté (2) va augmenter. Si on note ξ' l'avancement lorsque la pile débite, on a $[\text{Ag}^+]_{(1)} = 0,040 - \xi'$ alors qu'à l'anode c'est $[\text{Ag}^+]_{(2)} = \xi' - 0,016$. La pile arrête de débiter lorsque les potentiels sont égaux de part et d'autre et donc lorsque $[\text{Ag}^+]_{(1)} = [\text{Ag}^+]_{(2)}$. On trouve que cela se produit lorsque $\xi' = 0,028 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ ce qui fait que la pile s'arrête lorsque $[\text{Ag}^+]_{(1)} = [\text{Ag}^+]_{(2)} = 0,012 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

5 Situation-problèmes

35. Anneau de vitesse

Réponses :

Pour simplifier l'étude, on assimile la voiture à un solide de masse m représenté sur le schéma de la figure 8. On note \vec{g} le champ de pesanteur. La voiture subit son poids $m\vec{g}$, une force de contact avec la piste que l'on décompose en une composante normale \vec{N} et une composante tangentielle \vec{T} orientée vers le haut de la piste relevée car le glissement ne peut que se produire vers le bas lorsque la voiture est à l'arrêt. On note α l'angle du virage relevé. Le référentiel terrestre est supposé galiléen. À l'équilibre, on a $\vec{N} + \vec{T} + m\vec{g} = \vec{0}$. Par projection, on voit que $m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$, $\vec{T} = -T \cos \alpha \vec{e}_x + T \sin \alpha \vec{e}_z$ et enfin que $\vec{N} = N \sin \alpha \vec{e}_x + N \cos \alpha \vec{e}_z$. Jusqu'à la limite du glissement, on a la condition $T \leq fN$ d'après les lois de COULOMB. La condition sur l'axe Ox impose que $0 = N \sin \alpha - T \cos \alpha$ alors que sur Oz , on a $mg = T \sin \alpha + N \cos \alpha$. La première relation conduit à $N \tan \alpha = T$ et par conséquent on obtient la condition de non-glissement $\tan \alpha \leq f$. Dans notre cas, cela n'est pas possible puisque $\alpha = 45^\circ$, on a donc $\tan \alpha = 1$ et comme $f = 0,6$ dans le meilleur des cas, on a toujours $f < \tan \alpha$. On ne vérifie pas la condition $\tan \alpha \leq f$. La voiture glisse aussi bien sur piste sèche que sur piste mouillée - ce que l'on pouvait aisément prévoir pour le second cas puisque cela glissait déjà sur route sèche.

On reste dans le cas de figure où la voiture aurait tendance à glisser vers le bas du virage relevé. Les forces représentées sur le schéma de la figure 8 sont toujours de même orientation. La différence maintenant est que la voiture possède une accélération puisqu'elle parcourt un cercle à une vitesse v uniforme. Le rayon du cercle est noté R . L'accélération de la voiture est $\vec{a} = \frac{v^2}{R} \vec{e}_x$. On écrit la relation de la Dynamique : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}$. On

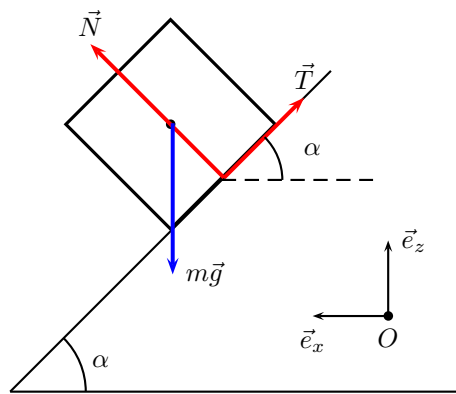


FIGURE 8 – Bilan des forces

obtient le système d'équations $m \frac{v^2}{R} = N \sin \alpha - T \cos \alpha$ et $mg = T \sin \alpha + N \cos \alpha$. À la limite du glissement, on a $T = fN$. Cela permet de calculer $N = \frac{mg}{\cos \alpha + f \sin \alpha}$ et $T = \frac{fmg}{\cos \alpha + f \sin \alpha}$. On utilise ces deux expressions dans l'autre équation et on arrive à : $v = \sqrt{gR \frac{\tan \alpha - f}{1 + f \tan \alpha}}$. Pour faire l'application numérique, il faut trouver le rayon R de la piste. On le fait grâce à l'échelle fournie. On peut estimer $R = 250$ m. En prenant, $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ on arrive à une vitesse $v \simeq 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ pour la route sèche et environ $120 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ pour la route humide.

Si l'on va trop vite dans un virage, on sait tous que l'on a tendance à être déporté vers l'extérieur. Le fait de relever le virage tend à compenser cet effet comme on peut le voir à la question précédente. Par contre, si l'on va trop vite, on pourra glisser vers l'extérieur. Cela veut dire que notre système d'équations est changé sur un point. Puisque le glissement se produit vers l'extérieur alors \vec{T} est orienté dans l'autre sens que celui de la figure 8. Il suffit de changer T en $-T$ dans nos équations. On se place toujours à la limite du glissement. On obtient $m \frac{v^2}{R} = N \sin \alpha + T \cos \alpha$ et $mg = -T \sin \alpha + N \cos \alpha$. On en déduit que $T = \frac{fmg}{\cos \alpha - f \sin \alpha}$ et $N = \frac{mg}{\cos \alpha - f \sin \alpha}$.

On arrive alors à la nouvelle expression de la vitesse : $v = \sqrt{gR \frac{\tan \alpha + f}{1 - f \tan \alpha}}$. On trouve les valeurs numériques suivantes pour la piste sèche $v \simeq 360 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ et $v \simeq 270 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ pour la piste mouillée. Avec des véhicules classiques, il n'y a aucun risque puisque les vitesses maximales des voitures qui ont été ou qui sont vendues dans le commerce par Peugeot ne dépassent pas $240 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Par contre, avec une 908 type 24h du Mans, on finit dans les barrières de protection en haut du virage !

36. Flamant rose

Réponses :

On va considérer que chaque électron de ces doublets qui se délocalisent est situé dans un puits infini de potentiel nul. On suppose bien sûr le régime stationnaire. L'équation de SCHRÖDINGER est $E\varphi = E_c\varphi + V\varphi = E_c\varphi$. Or, $E_c = \frac{p^2}{2m}$ où p est la quantité de mouvement de l'électron. L'opérateur quantité de mouvement est $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$, on a donc $E\varphi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi}{dx^2}$. On en déduit l'équation différentielle $\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \varphi = 0$. Les solutions sont $\varphi(x) = A \sin \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} x + B \cos \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} x$. Comme le puits est infini, on a forcément $\varphi(x=0) = 0$ et $\varphi(x=3a) = 0$, on considère une boîte de largeur $3a$ qui correspond à trois distances interatomiques puisque la conjugaison s'observe pour un ensemble de deux doubles liaisons séparées par une simple liaison. Avec les conditions aux limites, on trouve d'une part $B = 0$ et $\sin \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} 3a = 0$ d'où $\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} 3a = n\pi$. L'énergie de l'électron est donc quantifiée, son expression est $E_n = \frac{n^2 \hbar^2}{72ma^2}$. Les transitions entre les niveaux d'énergie correspondent à des changements d'entiers n . On peut envisager la transition du niveau fondamental $n = 1$ vers le premier niveau excité $n = 2$. Cette transition correspond à l'absorption d'une longueur d'onde λ telle que $\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{hc}{\lambda} = \frac{\hbar^2}{24ma^2}$. On trouve $\lambda = \frac{24ma^2c}{\hbar} = 100 \text{ nm}$. On se situe bien en-dessous de 400 nm , ce qui correspond bien au proche UV. La couleur rose orangée correspond à la couleur complémentaire de celle qui est absorbée. C'est dans le bleu-violet et d'après ce que l'énoncé nous dit aussi dans le proche UV.