

Exercices de révision pour les oraux : Série 3.

1 QCM

1. Effets chromatiques

Comme présenté à la figure 1, on considère une épaisseur de verre (zone grisée) placée dans l'air d'indice $n = 1$. L'indice optique de ce verre dépend de la longueur d'onde λ selon la loi de CAUCHY : $n(\lambda) = a + b/\lambda^2$, où $a > 1$ et b est une constante positive. Un rayon incident comportant deux couleurs, bleu et rouge, traverse l'épaisseur de verre. Les deux radiations se séparent en deux rayons émergents.

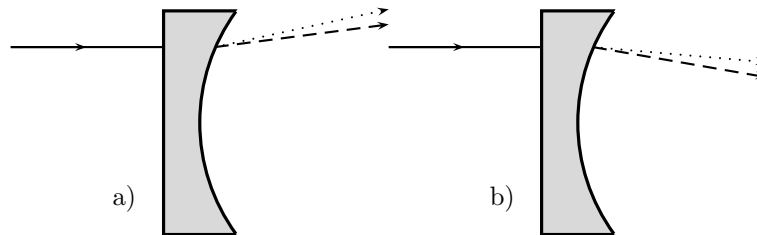


FIGURE 1 – Effets chromatiques d'une lentille

1. Quelle est la situation réalisée physiquement parmi les propositions suivantes ?

Proposition de réponses :

- a) figure a) pointillés=rouge, tirets=bleu
- b) figure b) pointillés=rouge, tirets=bleu
- c) figure a) pointillés=bleu, tirets=rouge
- d) figure b) pointillés=bleu, tirets=rouge

2. Circuit de résistances

On considère le circuit électrique constitué de quatre résistances et d'un interrupteur, alimenté par un générateur idéal de tension continue, voir la figure 2. Lorsque cet interrupteur est ouvert, le courant traversant la résistance R_2 est noté I_O . Lorsqu'il est fermé, le courant traversant la même résistance est I_F .

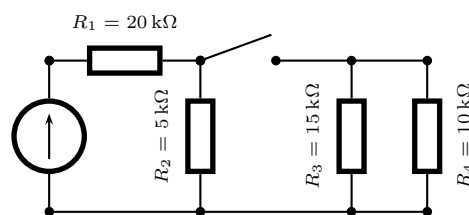


FIGURE 2 – Circuits de résistances

1. Quel est le rapport I_F/I_O ?

Proposition de réponses :

- a) $2/5$
- b) $3/5$
- c) $1/4$
- d) $11/60$

3. Chute d'un oscillateur

Une masse m est accrochée verticalement à un support en O par un fil de longueur d , dans le champ de pesanteur terrestre \vec{g} . À cette masse est accrochée un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , au bout duquel est accrochée une deuxième masse m . Le système étant initialement à l'équilibre, on coupe le fil juste au-dessus de la première masse à l'instant $t = 0$.

1. Comment évolue la longueur du ressort lors de la chute ?

Proposition de réponses :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \ell(t) = \ell_0 + \frac{k}{mg} \cos \omega t & \text{b) } \ell(t) = \ell_0 + \frac{mg}{k} \cos \omega t \\ \text{c) } \ell(t) = \ell_0 - \frac{k}{mg} \cos \omega t & \text{d) } \ell(t) = \ell_0 - \frac{mg}{k} \cos \omega t \end{array}$$

4. Tige chargée

Une charge négative est uniformément répartie sur une tige de plastique, de forme circulaire, voir la figure 3.

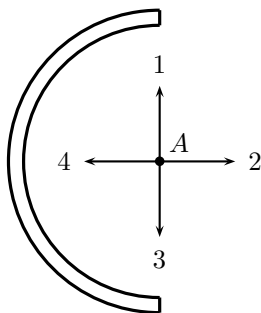


FIGURE 3 – Tige plastique chargée uniformément

1. Quels sont la direction et le sens du champ électrique au point A indiqué sur le schéma ?

Proposition de réponses :

$$\text{a) } 1 \quad \text{b) } 2 \quad \text{c) } 3 \quad \text{d) } 4$$

2 Exercices

5. Filtrage d'un signal créneau asymétrique

On considère la tension $v_1(t)$ décrite sur le schéma de la figure 4. On pose $T_f = \alpha T$ où $T = \frac{2\pi}{\omega}$ est sa période. Cette tension est envoyée à l'entrée d'un circuit série (R, L) et on étudie la tension de sortie $v_2(t)$ obtenue aux bornes de la résistance R . On posera $\tau = \frac{L}{R}$.

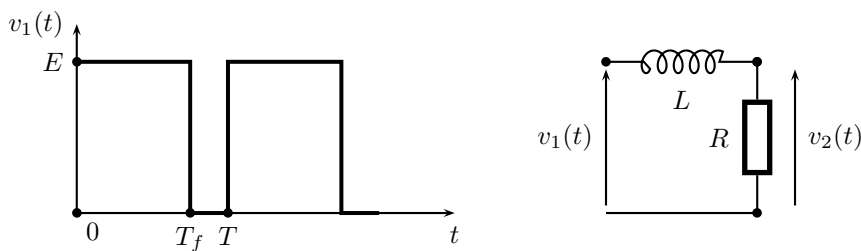


FIGURE 4 – Signal créneau asymétrique

- Déterminer $\langle v_1(t) \rangle$ moyenne temporelle de $v_1(t)$ en fonction de α et E . En déduire $\langle v_2 \rangle$ et $\langle i \rangle$ où i est l'intensité circulant dans le circuit.
- En supposant le régime périodique de période T établi, déterminer l'expression de $v_2(t)$.
- Dans le cadre d'un régime sinusoïdal de la tension $v_1(t)$, déterminer l'expression de la fonction de transfert $H(j\omega) = \frac{v_2}{v_1}$.
- On envisage maintenant le problème en utilisant la notion de série de FOURIER. On écrit ainsi : $v_1(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$. Déterminer les coefficients de ce développement de FOURIER.

5. Donner l'expression du développement en série de FOURIER de la tension de sortie $v_2(t)$.

6. Plage inadaptée

Un logiciel d'analyse spectrale numérique permet de calculer le spectre d'un signal alternatif de fréquence $F = 2 \text{ kHz}$ par utilisation d'une Transformée de FOURIER discrète implémentée en FFT. Le spectre obtenu est représenté sur la figure 5 dans la plage de fréquence de NYQUIST-SHANNON.

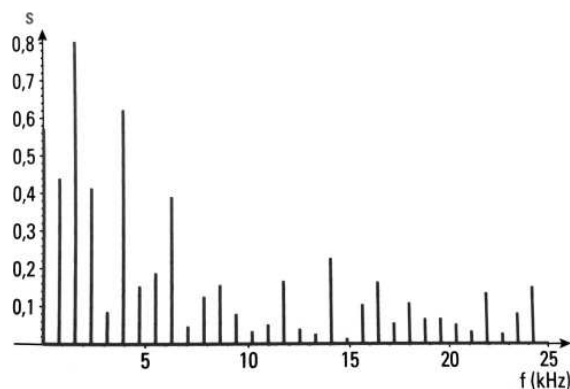


FIGURE 5 – Spectre obtenu par FFT

1. Déterminer les paramètres suivants : nombre d'échantillons prélevés, fréquence d'échantillonnage, durée d'observation du signal.
2. Donner la fréquence du fondamental du spectre obtenu et expliquer pourquoi cette valeur est différente de F .
3. Expliquer la présence d'une composante continue alors que ce signal est alternatif.

7. Filtrage et oscillations

On étudie le circuit de la figure 6.

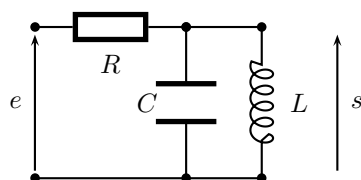


FIGURE 6 – Filtre passe-bande à éléments passifs

1. Pour quelle valeur de la pulsation ω , l'amplitude de la tension s est-elle maximale ?
On envisage maintenant le circuit représenté à la figure 7. L'amplificateur opérationnel idéal est considéré en régime linéaire, cela signifie que l'on considère que les courants entrants dans l'amplificateur linéaire intégré sont très faibles au point d'écriture $i_- = i_+ = 0$. De plus, le régime linéaire assure là encore que la différence de potentiel entre les entrées $+$ et $-$ est très faible. On écrira que $\varepsilon = V_+ - V_- = 0$.
2. Établir, dans le cadre d'un fonctionnement de l'AO en régime linéaire, la fonction de transfert $H = s/e$.
3. La résistance R_2 est une résistance variable. On relie A et B par un fil. Quelle est en régime linéaire, l'équation différentielle vérifiée par s ? Que peut-on observer ? Dans quelles conditions ?

8. Cryogénie

On peut éliminer les gaz contenus dans un récipient en abaissant la température de certaines de ses parois. C'est une méthode que l'on emploie fréquemment pour obtenir un très bon vide nécessaire à la réalisation de beaucoup d'expériences de physique. Les pompes à vide basées sur ce principe s'appellent des pompes cryogéniques. Pour illustrer le principe de la méthode, on considère une ampoule sphérique de $R = 10 \text{ cm}$ de rayon, maintenue à la température ordinaire T à l'exception d'une fraction $\Delta S = 1 \text{ cm}^2$ de sa surface qui est maintenue à la température limite de l'azote liquide (77 K). Les molécules du gaz contenu dans l'ampoule viennent frapper

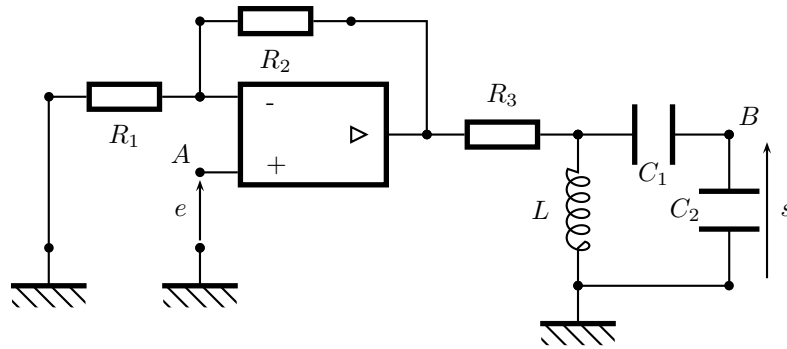


FIGURE 7 – Oscillateur

la surface ΔS , s'y condensent et y adhèrent, entraînant ainsi une diminution de la pression à l'intérieur de l'ampoule.

1. Le gaz est supposé homogène, isotrope, classique et constitué de particules ponctuelles identiques libres de masse m . On admet que la loi de distribution du module v de la vitesse des particules du gaz de température T est :

$$g(v) dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 \exp \left(-\frac{m v^2}{2 k_B T} \right) dv$$

Une telle loi vous suggère-t-elle quelques commentaires ?

2. Montrer que le nombre dn de molécules du gaz qui frappent la surface ΔS pendant un court intervalle de temps dt en fonction du nombre $\rho(t)$ de molécules par unité de volume encore contenues dans l'ampoule au temps t est :

$$dn = \frac{\rho(t)}{4} \sqrt{\frac{8 k_B T}{\pi m}} \Delta S dt$$

3. Déterminer la loi $\rho(t)$ en notant $\rho(t=0) = \rho_0$.
4. L'ampoule contient de la vapeur d'eau à la pression initiale $P_0 = 0,1 \text{ mmHg}$. On néglige le rôle des degrés de liberté internes des molécules d'eau. Déterminer le temps nécessaire pour que la pression dans le récipient descende jusqu'à 10^{-6} mmHg .

9. Barrière de potentiel

On cherche à déterminer certains états stationnaires d'une particule quantique de masse m évoluant dans le potentiel suivant :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -\frac{a}{2} \text{ (région I),} \\ V_0 > 0 & \text{pour } -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \text{ (région II),} \\ 0 & \text{pour } x > \frac{a}{2} \text{ (région III).} \end{cases} \quad (1)$$

On se limite au cas où $E > V_0$. On pose $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ et $K = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}$.

1. Décrire qualitativement le mouvement de la particule dans le cas où il peut être décrit dans le cadre de la mécanique classique.
2. Dans le cadre d'une description quantique, l'état de la particule est décrit par la fonction d'onde $\psi(x, t) = \varphi(x) \exp(-iEt/\hbar)$. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\varphi(x)$ dans chacune des trois régions.
3. En l'absence de source de particules quantiques dans la région III, proposer une forme adéquate de $\varphi(x)$ dans chacune des trois régions. Préciser les conditions de raccordement qui doivent être vérifiées par $\varphi(x)$.

Ces conditions de raccordement permettent de déduire les expressions des probabilités de transmission au-delà de la barrière T , et de réflexion par la barrière R . On donne :

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(E - V_0)} \sin^2 \left(\frac{a\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar} \right)}$$

- Déterminer l'expression de R à partir de l'expression de T .
- Représenter l'allure de T et de R en fonction de E pour $E > V_0$. Commenter.
- Des électrons d'énergie cinétique égale à 10 eV s'approchent d'une barrière de potentiel comme celle-ci de hauteur 4 eV. Déterminer les épaisseurs de la barrière pour laquelle la transmission du faisceau électronique est totale. Comparer, dans cette situation, l'épaisseur de la barrière à la longueur d'onde de DE BROGLIE des électrons dans la barrière.

10. Un satellite géostationnaire

On considère un satellite géostationnaire de masse m . La Terre est considérée comme sphérique de masse M_T et de rayon R_T . On notera \mathcal{G} la constante de gravitation universelle.

- Démontrer que si le satellite est en position géostationnaire, sa trajectoire est un cercle équatorial de rayon R dont on donnera l'expression en fonction de la vitesse de rotation de la terre sur elle-même notée Ω .
- Proposer des valeurs des constantes non fournies dans le problème en puissance de 10 avec 1 chiffre significatif.
- Donner l'expression de l'énergie potentielle et de l'énergie mécanique du satellite.
- On lance le satellite depuis la Terre depuis un point de la surface à la latitude λ . Déterminer son énergie avant le lancement. En déduire l'énergie minimale nécessaire pour placer le satellite en orbite géostationnaire. Conclure.

11. Transport d'une planche dans une scierie

On considère une planche d'épaisseur très faible par rapport à sa longueur $2(d+a)$ et de masse m . Cette planche repose sur un appui que l'on va considérer comme ponctuel en A et sur un cylindre de rayon R qui tourne à la vitesse ω constante par rapport à un axe horizontal. Le coefficient de frottement sera supposé identique pour le contact en A et pour le contact avec le cylindre. Il est noté f . On confondra coefficient de frottement statique et coefficient de frottement dynamique. On suppose que les deux contacts sont réalisés en permanence. À la date $t = 0$, la planche possède la vitesse $\vec{v}_{t=0} = -v_0 \vec{e}_x$ et l'abscisse s du centre d'inertie de la planche supposée homogène est $x = 0$. Voir le schéma de la figure 8.

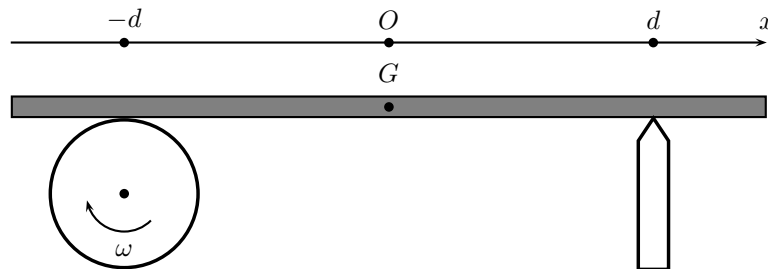


FIGURE 8 – Entraînement d'une planche

- Montrer qu'à la date $t = 0$, il y a nécessaire glissement sur les deux appuis et déterminer l'orientation de chaque composante tangentielle de frottement.
- Étudier la première phase du mouvement en supposant qu'il y a glissement au niveau de chaque appui.
- Déterminer la date à laquelle va s'annuler, en premier, l'une des deux vitesses de glissement. Quelle conclusion doit-on en tirer ?
- Étudier le mouvement ultérieur. Montrer que selon la valeur de ω une phase de roulement sans glissement de la planche sur le cylindre est possible.

12. De l'eau chaude sous la douche !

De l'eau s'écoule dans un tuyau en cuivre de rayon intérieur $r_1 = 5 \text{ mm}$ et de rayon extérieur $r_2 = 5,5 \text{ mm}$ avec un débit volumique $\mathcal{D}_v = 0,1 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$. La conductivité thermique du cuivre est $\lambda = 390 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Le tuyau est en contact avec l'air de la salle de bain qui est à la température constante $\theta_e = 20^\circ \text{C}$. La capacité thermique de l'eau est $c = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, la masse volumique de l'eau est notée ρ . Le coefficient de convection entre l'air et le cuivre est $h = 20 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ et celui entre le cuivre et l'eau est $h' = 200 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$. On étudie uniquement le régime permanent.

1. Montrer que l'on a l'équation :

$$\mathcal{D}_v \rho c \frac{dT}{dz} = \varphi$$

où φ est tel que la puissance transférée par l'eau de façon radiale s'exprime pour une longueur de tuyau comprise entre z et $z + dz$ par φdz .

2. On note θ la température de l'eau le long du tuyau supposé rectiligne. En $z = 0$, cette température est $\theta_0 = 55^\circ\text{C}$. Déterminer la solution de l'équation différentielle précédente $\theta(z)$ en faisant apparaître une longueur caractéristique λ_c qu'on exprimera en fonction des données.
3. Sachant que le tuyau possède au total une longueur $L = 8\text{ m}$ depuis le chauffe-eau jusque dans la salle de bain à l'extrémité du tuyau de douche, que pensez-vous de la température de l'eau sous la douche ?

13. Pression dans un plasma

On considère un plasma dans un cylindre de rayon R d'axe Oz . Il est constitué par des ions de charge $+e$ de vitesse moyenne nulle et par des électrons de charge $-e$ possédant une vitesse moyenne $\vec{v} = -v\vec{e}_z$. La densité volumique d'électrons est notée n .

1. Déterminer la densité volumique de courant et l'intensité I correspondant au mouvement des électrons.
2. Déterminer l'expression du champ magnétique \vec{B} créé en tout point de l'espace. Représenter graphiquement l'évolution du champ magnétique.
3. En écrivant l'équilibre mécanique du plasma, déterminer la pression $P(r)$ qui règne en son sein. On prendra $p(R) = 0$.
4. En déduire la température du plasma $T(r)$.
5. Le plasma devient émetteur de rayonnement pour une température $T > T_0$. Quelle est la condition sur v pour que cela soit le cas ?

14. Induction et élévation de température

On considère le circuit plan de la figure 9. Il comprend deux résistances R_0 et R_1 . La résistance R_1 est enfermée dans une enceinte dont les parois d'épaisseur e présentent la capacité thermique massique c , la masse volumique μ et la conductivité thermique λ . Malgré la complexité du système, on considérera que le problème de transfert thermique est unidimensionnel descriptible en coordonnée cartésienne z dans l'épaisseur de la paroi et de surface S . On notera T_0 la température extérieure à l'enceinte supposée uniforme et constante au cours du temps et T_1 la température à l'intérieur de l'enceinte.

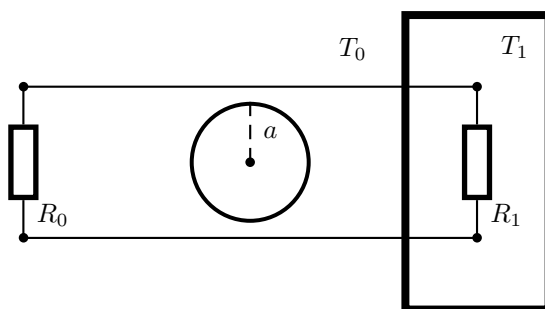


FIGURE 9 – Le circuit et l'enceinte

Un solénoïde présentant n spires circulaires par mètre, de rayon a traverse perpendiculairement le plan du circuit précédent. Ce solénoïde est parcouru par un courant d'intensité $I(t)$ donné par le graphique de la figure 10. On néglige les effets de bord, on néglige l'autoinduction. Sur le plan des transferts énergétiques, on néglige la convection et le rayonnement.

1. Décrire qualitativement ce qu'il se passe.
2. Comment choisir R_1 pour maximiser l'écart de température $\Delta T = T_1 - T_0$?
3. Déterminer l'expression de ΔT lorsque l'intensité qui parcourt le solénoïde est donnée par le graphique de la figure 10.
4. L'intensité du courant $I(t)$ est sinusoïdale de moyenne nulle. Discuter en fonction de sa pulsation ω .

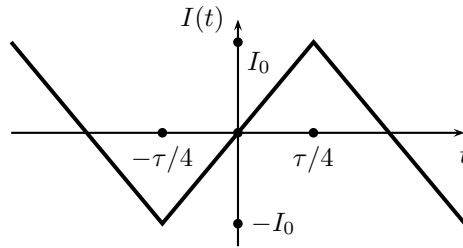


FIGURE 10 – Intensité dans le solénoïde

15. Approche électromagnétique du condensateur plan

Un condensateur est constitué de deux disques métalliques de même rayon a , d'axe Oz situés dans les plans $z = \pm h$. On admet que \vec{E} est colinéaire à \vec{e}_z à l'intérieur du système. Pour $h \ll a$, ce modèle est justifié dans le volume intérieur au système, sauf au voisinage immédiat des bords $r = a$. Le système est soumis à une tension sinusoïdale de fréquence $\nu = \omega/2\pi$. Le but de l'exercice est de déterminer la structure du champ électromagnétique dans le condensateur sans s'en tenir nécessairement au domaine des basses fréquences. Les expressions des opérateurs vectoriels seront trouvées dans le formulaire. On donne en outre :

$$\Delta U(r) = \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right)$$

1. On admet d'abord que le champ électrique, selon le modèle usuel du condensateur plan tel qu'il est utilisé en électrostatique, est uniforme à l'intérieur du condensateur. On le note :

$$\vec{E}_0 = A_0 \cos \omega t \vec{e}_z$$

En utilisant l'équation de Maxwell-Ampère, déterminer le champ magnétique en admettant qu'il est de la forme :

$$\vec{B}_1 = B_1(r, t) \vec{e}_\theta$$

2. Selon l'équation de Maxwell-Faraday, \vec{B}_1 est à son tour la source d'un champ électrique \vec{E}_2 . Déterminer ce champ en admettant qu'il est de la forme :

$$\vec{E}_2 = E_2(r, t) \vec{e}_z$$

3. Exprimer $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_2$ en fonction de \vec{E}_0 et de la variable $x = r\omega/c$. Avec $a = 10$ cm et $\nu = 10$ MHz (limite supérieure d'un générateur de signaux usuel), évaluer l'ordre de grandeur de l'erreur que l'on commet en confondant dans tout le système l'expression du champ avec celle valable en très basse fréquence. A quel concept théorique la condition $x \ll 1$ s'identifie-t-elle? En s'inspirant de la démarche suivie dans les questions précédentes, expliquer qualitativement pourquoi le champ \vec{E} calculé ci-dessus ne correspond toujours pas à une solution exacte du problème.
4. On reprend le problème en cherchant une solution a priori sous la forme :

$$\vec{E} = A(r) \cos \omega t \vec{e}_z$$

Montrer que A ne dépend pas de z et établir une équation différentielle vérifiée par $A(r)$. En posant $y = A(r)/A(0)$ et $x = r\omega/c$, en déduire une équation différentielle vérifiée par la fonction $y(x)$.

On propose des solutions de cette équation sous la forme :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

5. Établir une récurrence et en déduire les deux premiers termes de la série en partant de $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$ (hypothèses qu'on essaiera de justifier). Comparer au résultat de la question précédente.

16. Principe du laser

Un laser à impulsions est formé d'une cavité à deux miroirs M et M' plans, parallèles, distants de L , voir la figure 11. M est totalement réfléchissant mais le coefficient de réflexion en énergie de M' est très légèrement inférieur à 1 pour permettre la sortie du faisceau. Un dispositif non précisé (dit de pompage) assure l'excitation du milieu emplissant cette cavité et l'émission d'ondes lumineuses issues de la désexcitation. On ne considère que les ondes qui se propagent le long de l'axe commun aux deux miroirs.

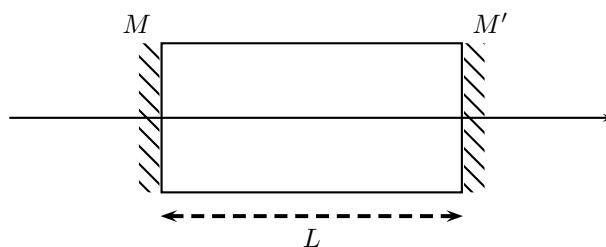


FIGURE 11 – Cavité Laser

1.   à quelle condition un système d'ondes stationnaires peut-il s'établir dans cette cavité ?
2. L'effet laser (d'émission cohérente) ne se produit que dans un intervalle bien défini de fréquences, fonction de la nature du milieu qui emplit la cavité :

$$\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} < \omega < \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$$

Chaque pulsation possible porte le nom de mode du laser. Déterminer le nombre de modes possibles.

3. Tous ces modes ont la même amplitude et la même phase. On observe en sortie du laser une succession d'impulsions lumineuses de même longueur d'onde λ , séparées par un intervalle de temps T , de très courte durée τ . On mesure $\lambda = 628 \text{ nm}$, $T = 3,33 \text{ ns}$, $\tau = 200 \text{ ps}$. En déduire ω_0 , $\Delta\omega$ et L . On prendra $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. On pourra ici utiliser le résultat suivant :

$$f_p(u) = \frac{\sin^2 \frac{pu}{2}}{\sin^2 \frac{u}{2}} \quad \text{avec } p \in \mathbb{N}^*$$

Cette fonction présente des maxima très nets pour $u = 2k\pi$ avec ($k \in \mathbb{Z}$), égaux à p^2 , de faible largeur à la base égale à $4\pi/p$. On appelle ici largeur à la base d'un maximum la différence entre les deux valeurs de u les plus proches du maximum et qui annulent f_p .

4. En réalité, les miroirs d'une telle cavité ne sont pas plans mais sphériques, identiques et dont les foyers sont confondus. Expliquer pourquoi.

17. Radar à balayage

On considère N antennes constituées par des fils perpendiculaires au plan Oxy . Les intersections de ces fils avec le plan Oxy se trouvent sur l'axe Ox . Sur cet axe, la distance a entre deux antennes consécutives vaut la moitié de la longueur d'onde d'émission, $a = \lambda/2$. Voir la figure 12.

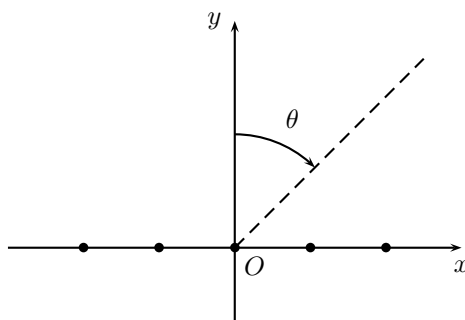


FIGURE 12 – Radar à balayage

Toutes les antennes émettent, en phase, des ondes électromagnétiques dans toutes les directions de l'espace. On s'intéresse à leur émission dans le plan Oxy ,   très grande distance des antennes, c'est à dire à l'infini.

1. Déterminer l'intensité $I(\theta)$  mise dans la direction θ , en fonction de θ , N et $I(\theta = 0) = I_0$.
2. Construire la forme de la fonction pour $N = 4$.
3. Les antennes ne sont plus en phase, mais celle de rang p est déphasée de $p\phi$ par rapport à l'antenne de rang zéro. Comment choisir ϕ pour que la direction de puissance maximale tourne dans le plan Oxy à la vitesse angulaire constante ω . Proposer une application.

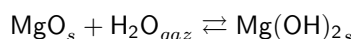
18. L'aspirine : un acide

L'aspirine est considérée comme un monoacide AH de base conjuguée A^- . On suppose qu'il est faible. On prépare une solution aqueuse d'aspirine de concentration $c_0 = 5,5 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et on mesure le pH à l'équilibre. On trouve $pH = 2,9$.

1. Montrer que l'aspirine est bien un acide faible.
2. Déterminer son pK_A .
3. Déterminer le taux d'avancement de la dissociation de l'aspirine à l'équilibre.
4. Montrer que la mesure de la conductivité électrique de la solution peut permettre de mesurer le taux de dissociation.

19. Magnésie

On considère l'équilibre d'hydratation de l'oxyde de magnésium (la magnésie) en hydroxyde de magnésium :



pour lequel on donne $\Delta_r H^\circ = -81,0 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ supposée indépendante de la température. On donne les masses molaires : H : 1,0, O : 16,0 et Mg : 24,3 en $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

1. Pour cet équilibre réalisé à la température $T_1 = 450 \text{ K}$, on relève que $p_{\text{H}_2\text{O}} = p_1 = 1,01 \text{ bar}$. Que vaut cette pression d'équilibre si l'on se place à $T_2 = 550 \text{ K}$?
2. Dans un récipient initialement vide et de volume constant $V = 10 \text{ L}$, une masse $m = 50,0 \text{ g}$ d'oxyde de magnésium est introduite et l'ensemble est porté à $T_1 = 450 \text{ K}$ fixée. une quantité de matière n en eau est très progressivement introduite. La pression de vapeur saturante de l'eau à T_1 est $p_{\text{sat}}(T_1) = 5,06 \text{ bar}$.
 - (a) Quelle est l'enthalpie libre de réaction de l'équilibre (1) pour la première goutte d'eau introduite ?
 - (b) Calculer la valeur n_1 de n pour laquelle l'équilibre (1) s'établit.
 - (c) Calculer la valeur n_2 de n pour laquelle l'équilibre (1) se termine.
 - (d) Calculer la valeur n_3 de n pour laquelle l'eau devient liquide.
 - (e) Tracer l'évolution de la pression $p(n)$ et préciser les solides présents.

20. Céramique supraconductrice

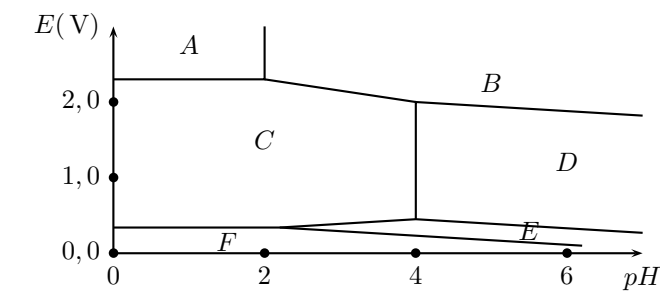
Parmi les matériaux supraconducteurs, les céramiques supraconductrices de formule brute générale $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_x$ figurent parmi les plus étudiées. Ces solides ioniques contiennent des anions oxydes O^{2-} , des cations yttrium Y^{3+} et baryum Ba^{2+} , ainsi que des cations Cu^{2+} et Cu^{3+} en proportions variables. Le but de cet exercice est de déterminer ces proportions et la formule brute de la céramique.

Données :

$E_1^\circ(\text{Cu}^{3+}/\text{Cu}^{2+}) = 2,30 \text{ V}$	$E_2^\circ(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}^+) = 0,17 \text{ V}$
$E_3^\circ(\text{Cu}_2\text{O}_{3s}/\text{CuO}_s) = 2,44 \text{ V}$	$E_4^\circ(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) = 1,23 \text{ V}$
$E_5^\circ(\text{I}_{2aq}/\text{I}^-) = 0,62 \text{ V}$	$E_6^\circ(\text{S}_4\text{O}_6^{2-}/\text{S}_2\text{O}_3^{2-}) = 0,09 \text{ V}$
Produit de solubilité	$pK_s(\text{CuI}_s) = 12$
Masse molaires ($\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)	Y = 88,9 ; Ba = 137,3 ; Cu = 63,5 ; O = 16,0

On donne le diagramme $E - pH$ du cuivre relatif aux espèces Cu_s , Cu_2O_s , CuO_s , Cu^+ , Cu^{2+} , Cu^{3+} et Cu_2O_3 . Il a été tracé pour une concentration totale en espèces dissoutes de $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Voir la figure 13

1. Attribuer à chacune des espèces son domaine de prédominance ou d'existence. Qu'y-a-t-il de particulier pour une des espèces ?
2. Tracer sur le diagramme $E - pH$ la droite représentant les variations du potentiel du couple $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$ (la pression de O_2 sera prise égale à 1 bar).
3. Quelle réaction doit-on observer quand on introduit des ions Cu^{3+} en solution aqueuse de $pH = 0$? Cette réaction n'est pas observée à froid. Comment interpréter ce phénomène ?

FIGURE 13 – Diagramme $E - pH$ du cuivre pour les pH acides

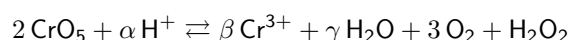
On effectue deux expériences :

- 178 mg de solide supraconducteur sont dissous à chaud dans 20 mL d'une solution d'acide chlorhydrique molaire (de $pH = 0$). On ajoute ensuite un excès d'iodure de potassium. On observe alors la formation d'un précipité d'iodure cuivreux CuI_s et l'apparition de diiode I_2 . Il faut verser 26,7 mL d'une solution de thiosulfate $S_2O_3^{2-}$ de concentration $0,03 \text{ mol} \cdot L^{-1}$ pour doser le diiode formé.
 - On réalise exactement la même dissolution mais à froid, puis le même dosage. Il faut verser cette fois 35,6 mL de la même solution de thiosulfate pour doser le diiode formé.
- Indiquer sous quelle(s) forme(s) se trouve le cuivre après dissolution du solide supraconducteur, dans chacune des deux expériences.
 - Déterminer le potentiel standard E_7° du couple rédox Cu^{2+}/CuI_s . Donner l'équation bilan de la réaction qui se produit lorsque que l'on constate, après ajout d'ions iodure I^- en excès, l'apparition de CuI_s .
 - Écrire l'équation de la réaction de dosage du diiode par les ions thiosulfate.
 - Déterminer la quantité totale d'ions cuivre dans l'échantillon solide supraconducteur utilisé.
 - Déterminer les quantités d'ions Cu^{2+} et Cu^{3+} présents dans l'échantillon.
 - En déduire la valeur de x dans la formule brute de la céramique supraconductrice $YBa_2Cu_3O_x$.

21. Oxyde de chrome bleu

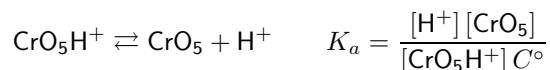
On s'intéresse au comportement de l'oxyde de chrome CrO_5 en solution aqueuse acide. C'est un complexe de chrome bleu. Sa concentration peut être évaluée par spectrophotométrie. CrO_5 présente un nombre d'oxydation de $+VI$ car il contient 4 atomes d'oxygène au degré $-I$ et un dernier oxygène au degré $-II$ plus traditionnel.

- À l'aide des données figurant en fin d'exercice, établir le diagramme de prédominance des couples acide/base associés à l'acide chromique H_2CrO_4 . Sous quelle forme trouve-t-on en solution l'acide chromique lorsque le $pH = 1,5$?
- Écrire la réaction d'obtention de CrO_5 à partir de l'espèce déterminée à la question précédente. On considère que l'oxyde de chrome oxyde l'eau en peroxyde de dihydrogène H_2O_2 . Exprimer la constante d'équilibre standard associée à cette transformation, en fonction des activités à l'équilibre des différents participants.
- On a étudié la réaction précédente à différentes températures. Le tracé du logarithme népérien de la constante d'équilibre standard en fonction de l'inverse de la température thermodynamique est une droite d'ordonnée à l'origine $b = -8,7$ et de coefficient directeur $a = 7,6 \times 10^3 \text{ K}$. Que peut-on en déduire quantitativement et qualitativement ?
- Les solutions de CrO_5 ne sont pas stables en milieu aqueux acide et il est observé une diminution de la concentration du complexe bleu et la production de dioxygène et de peroxyde d'hydrogène. En fin de réaction, tout l'élément chrome est sous la forme d'ions Cr^{3+} . La mesure de la quantité de dioxygène et de peroxyde d'hydrogène montre qu'il est produit 3 équivalents de dioxygène pour 1 équivalent de peroxyde d'hydrogène. Le bilan réactionnel correspondant à ces observations est :



Déterminer les coefficients stœchiométriques. Est-ce une réaction d'oxydoréduction ?

L'étude cinétique de la réaction de CrO_5 a été conduite dans des conditions de dégénérescence de l'ordre vis à vis des ions H^+ et de H_2O_2 . Le réactif en défaut est toujours CrO_5 . Les mesures montrent que le comportement du système nécessite de prendre en compte la forme protonée de CrO_5 . On introduit la constante d'acidité de CrO_5H^+ :



La concentration totale en CrO_5 protoné ou non est donnée par : $[\text{CrO}_5]_{\text{tot}} = [\text{CrO}_5] + [\text{CrO}_5\text{H}^+]$. Dans les conditions opératoires choisies, la vitesse r de la réaction est de premier ordre apparent :

$$r = -\frac{d[\text{CrO}_5]_{\text{tot}}}{dt} = k_d [\text{CrO}_5]_{\text{tot}}$$

où la grandeur k_d dépend de la concentration en ions H^+ et des constantes k_1 , k_2 et K_a . Cette vitesse globale de disparition est la somme des deux vitesses d'évolution de CrO_5 d'une part, de CrO_5H^+ d'autre part. On pose :

$$r = -\frac{d[\text{CrO}_5]}{dt} - \frac{d[\text{CrO}_5\text{H}^+]}{dt} = k_1 [\text{CrO}_5] [\text{H}^+] + k_2 [\text{CrO}_5\text{H}^+] [\text{H}^+]$$

- Donnez l'expression de k_d en fonction de $[\text{H}^+]$, k_1 , k_2 et K_a .
- Comment vérifier, à partir des mesures de k_d dans différentes conditions opératoires, que cette loi est effectivement suivie si la constante d'acidité K_a est connue ? Comment accède-t-on aux valeurs numériques des constantes de vitesse k_1 et k_2 ?
- À la température de 20°C , on obtient les valeurs numériques suivantes : $k_1 = 0,13 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{s}^{-1}$ et $k_2 = 1,1 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{s}^{-1}$. Calculer le temps de demi-réaction lorsque le pH de la solution est 2.

Données :

Constantes d'acidité : $\text{H}_2\text{CrO}_4/\text{HCrO}_4^-$ $\text{p}K_{a1} = -0,8$, $\text{HCrO}_4^-/\text{CrO}_4^{2-}$ $\text{p}K_{a2} = 5,9$, $\text{CrO}_5\text{H}^+/\text{CrO}_5$ $K_a = 8$.

Couples rédox : $\text{H}_2\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$ $E_1^\circ = 1,77 \text{ V}$, $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$ $E_2 = 1,23 \text{ V}$, $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}_2$ $E_3^\circ = 0,69 \text{ V}$.

22. Dioxyde de titane

Grâce à des assemblages à base de nanotubes de dioxyde de titane, on peut fabriquer des matériaux légers et très résistants sur le plan mécanique. Ils peuvent être utilisés dans l'industrie spatiale.

- La structure cristalline thermodynamiquement stable du dioxyde de titane TiO_{2s} est le rutile. Il s'agit d'un réseau où les ions titane occupent les sommets de la maille en forme de pavé ainsi que le centre de celle-ci. Quatre ions oxygène sont situés sur les faces de la maille et deux sont contenus dans la maille. Donner la population de la maille. Est-ce cohérent avec la formule brute du dioxyde de titane ?
- Calculer la masse volumique ρ du dioxyde de titane TiO_{2s} . La maille est un pavé de côtés $a = b = 459 \text{ pm}$ et $c = 296 \text{ pm}$. Les masses molaires sont $47,9 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ pour le titane Ti et $16,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ pour O.

L'anodisation est une technique électrochimique utilisée dans l'industrie pour faire croître des couches compactes et épaisses d'oxyde à la surface des métaux. Le dispositif expérimental consiste en un montage à deux électrodes immergées dans un électrolyte et reliées hors de la solution à une alimentation électrique. L'électrode de travail, reliée à la borne positive de l'alimentation, est la pièce à anodiser (ici le titane). La seconde électrode ou contre-électrode, reliée à la borne négative de l'alimentation, est un métal inerte présentant une grande surface, typiquement le platine ou le carbone.

- Faire une représentation du montage, identifier l'anode et la cathode puis écrire les demi-équations électroniques associées sachant que les couples rédox mis en jeu sont $\text{H}_2\text{O}/\text{H}_{2\text{gaz}}$ et $\text{TiO}_{2s}/\text{Ti}_s$.
- On réalise l'anodisation d'une électrode de titane de surface $S = 3,14 \text{ cm}^2$ avec une intensité $I = 25 \text{ mA}$ pendant 15 minutes. Après analyse au microscope à balayage électronique, on constate que l'épaisseur de la couche de nanotubes de dioxyde de titane est $\ell = 3,5 \text{ }\mu\text{m}$. Déterminer la masse volumique ρ_{nano} de la couche de nanotubes. Commenter.

23. Le sodium et l'eau

Le sodium liquide est un excellent fluide conducteur thermique pour servir de fluide caloporteur. Toutefois, son utilisation n'est pas très développée en raison de sa grande réactivité avec l'eau. Le sodium est représenté dans la classification périodique des éléments par $^{23}_{11}\text{Na}$. On donne :

Couple	$\text{O}_{2\text{gaz}}/\text{H}_2\text{O}_{\text{liq}}$	$\text{H}_2\text{O}_{\text{liq}}/\text{H}_{2\text{gaz}}$	Na^+/Na_s	$\text{Cl}_{2\text{gaz}}/\text{Cl}^-$
$E^\circ(\text{V})$	1,23	0,00	-2,71	1,36

Espèce	HO^-	H_2O_{liq}	Na^+
$\Delta_f H^\circ (\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1})$	-230	-286	-240

Le produit de solubilité du chlorure de sodium NaCl_s est $K_s = 33$. La masse molaire du sodium est $M = 23,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

1. Donner le nombre de neutrons, de protons et d'électrons de l'atome de sodium. En déduire sa configuration électronique.
2. Quelle est sa position dans la classification périodique ? À quelle famille appartient le sodium ? Donner au moins une propriété physique ou chimique de cette famille. Quel est l'ion monoatomique formé par le sodium ?
3. Le sodium réagit totalement avec l'eau pour former du dihydrogène gazeux, des ions Na^+ et des ions hydroxydes HO^- . Donner l'équation bilan de cette réaction.
4. Calculer l'enthalpie standard de cette réaction $\Delta_r H^\circ$. Commenter.
5. Le dihydrogène peut réagir avec le dioxygène pour produire de l'eau. Cette transformation chimique peut être explosive. Pour cette raison, le sodium solide n'existe qu'en l'absence totale d'eau. Il n'existe pas dans la nature. Écrire l'équation de la réaction modélisant la transformation chimique entre H_{2gaz} et O_{2gaz} pour produire de l'eau liquide.
6. Établir l'expression de la constante thermodynamique d'équilibre de cette réaction en fonction des potentiels standard $E^\circ(\text{O}_{2gaz}/\text{H}_2\text{O}_{liq})$ et $E^\circ(\text{H}_2\text{O}_{liq}/\text{H}_{2gaz})$. Déterminer la valeur de la constante thermodynamique $K^\circ(T)$ de cette réaction.
7. Comment évolue la constante thermodynamique d'équilibre avec la température ?
8. En contact avec l'air sec, le sodium s'oxyde naturellement. L'oxyde forme une maille cubique faces centrées pour les ions oxygène, les ions sodium occupant tous les sites tétraédriques de la maille. Donner la formule chimique de cet oxyde en justifiant.
9. L'ion sodium peut aussi se combiner avec l'ion chlorure. Quelle est la principale utilisation courante de ce solide ionique ?
10. On verse une mole de chlorure de sodium dans un litre d'eau pure. La dissolution est-elle totale ? Déterminer la solubilité limite du chlorure de sodium dans l'eau pure.
11. Dans des cellules d'électrolyses particulières, on effectue l'électrolyse du chlorure de sodium et on obtient du sodium liquide ainsi qu'un gaz verdâtre. Écrire le bilan de la réaction d'électrolyse. Estimer la tension minimale qu'il faudrait imposer pour y arriver, on travaillera uniquement à partir des données fournies dans cet exercice.
12. Pour produire une tonne de sodium par électrolyse, on dépense une énergie de 10 MWh. On procède à une électrolyse sous une tension $U = 7 \text{ V}$ avec une intensité $I = 50\,000 \text{ A}$. Quel est le rendement énergétique de l'électrolyse permettant de produire une tonne de sodium ?

3 Python Centrale

24. Fil de Litz

Un conducteur de conductivité électrique γ réelle occupe le demi-espace $x > 0$. On se place dans l'approximation des régimes quasi stationnaires magnétiques (ARQS).

1. Rappeler la loi d'OHM locale ainsi que les équations de MAXWELL dans l'ARQS.
2. Établir l'équation différentielle dont est solution le champ électrique, $\vec{E}(x, t)$, dans le conducteur. La mettre sous la forme :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2}$$

où D est à exprimer. Commenter l'équation obtenue.

3. Soit une onde plane progressive harmonique se propageant dans le conducteur selon les x croissants, de représentation complexe $\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \exp i(\underline{k}x - \omega t)$. Établir la relation de dispersion de cette onde.
4. Montrer que $\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \exp -\frac{x}{\delta} \exp i(\frac{x}{\delta} - \omega t)$ où on exprimera δ . Calculer son ordre de grandeur à 50 Hz pour le cuivre de conductivité $\gamma = 6 \times 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.
5. Un fil de LITZ permet de transporter des signaux à haute fréquence. À partir des résultats précédents, expliquer la constitution du fil de LITZ de la figure 14.

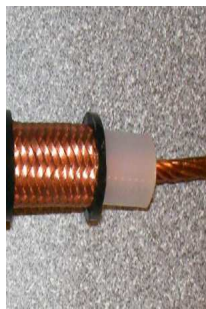


FIGURE 14 – Fil de LITZ

6. On étudie l'interface vide-conducteur. Le demi espace $x < 0$ est le vide. On admettra que le champ électrique est continue en $x = 0$, qu'il en est de même pour le champ magnétique et que le phénomène de réflexion - transmission ne modifie pas l'état de polarisation de l'onde. Une onde plane progressive harmonique de pulsation ω , polarisée rectilignement selon \vec{e}_y arrive sous incidence normale sur le conducteur. Déterminer l'expression des coefficients de réflexion \underline{r} et \underline{t} en amplitude pour le champ électrique de l'onde. On fera intervenir le rapport $\alpha = \omega\delta/c$ dans les expressions de \underline{r} et \underline{t} .
7. Commenter physiquement les résultats obtenus à la question précédente. Examiner le cas $\gamma \rightarrow \infty$.
8. Modifier le programme *Python* nommé 2015-021 afin d'illustrer le rôle des paramètres physiques pertinents rencontrés dans cette étude.

4 X-ENS

25. L'étoile noire

Une station intergalactique géante, assimilée à une boule homogène sphérique de rayon $R = 10^4$ km et de masse volumique $\mu = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, contient un tunnel vide de forme cylindrique de rayon $a = 100$ km qui traverse la boule. Le milieu de l'axe de ce cylindre est à une distance $R/2$ du centre de la boule.

1. Déterminer les forces qui s'appliquent sur un objet évoluant à l'intérieur de ce tunnel dans le plan qui contient l'axe du cylindre et le centre de la boule.
2. Montrer que si on lâche, sans vitesse initiale, un mobile de masse m placé à l'une des deux extrémités du tunnel et sur son axe alors il ne peut pas atteindre l'autre extrémité sans avoir heurté la paroi du tunnel.
3. Compte tenu du constat effectué à la question précédente, on donne une vitesse initiale de norme v_0 au mobile. Cette vitesse est orientée sur l'axe du tunnel et dirigée vers l'intérieur. Déterminer la valeur minimale de v_0 pour que le mobile atteigne l'autre extrémité du tunnel sans avoir heurté la paroi. Commenter la valeur trouvée.

26. Force centrale particulière

Un mobile assimilé à un point M de masse m est soumis à une force centrale de la part d'un attracteur ponctuel localisé à l'origine d'un référentiel galiléen dans lequel s'effectue l'étude. Le mobile suit une trajectoire circulaire dont le point O est un des points.

1. Déterminer l'expression de la force exercée sur M par l'attracteur en fonction de la distance séparant O de M .

27. Planète gazeuse à hydrogène

Pour déterminer le profil de densité d'une planète gazeuse composé d'hydrogène à symétrie sphérique, une sonde est envoyée dans la planète sur une orbite piégée. La trajectoire de la sonde est observée. On néglige la friction liée au gaz.

1. Que peut-on dire a priori sur la trajectoire ?
2. On observe que la trajectoire est plane et que son équation polaire s'écrit :

$$r = \frac{r_0}{1 + a \cos k\theta}$$

où $k > 1$. Déterminer le profil de densité dans la planète. En déduire les profils de la pression et de la température.

28. Anneau de Fourier

Au début du XIX^{ème} siècle, JOSEPH FOURIER étudia les transferts thermiques qui s'effectuaient dans un anneau circulaire. Ce dernier était un gros anneau destiné à amarrer les bateaux dans les ports. On modélise l'anneau par un tore de section S . La section de ce tore possède un rayon qui sera considéré comme très petit devant le rayon moyen du tore que l'on note R . Le métal utilisé pour l'anneau est considéré comme homogène de capacité thermique massique c , de masse volumique μ et de conductivité thermique λ . Pour réaliser ses études, FOURIER plaçait l'anneau dans du sable. Cela avait pour objectif d'empêcher les phénomènes de convection entre l'anneau et l'extérieur. On considérera que le seul processus qui se produit est de la conduction thermique à l'intérieur de l'anneau. Dans ces conditions, on considère que le problème ne dépend que de la coordonnée angulaire θ repérant la position d'un point sur l'anneau.

1. Établir l'équation de diffusion thermique vérifiée par la température $T(\theta, t)$ en notant $D = \lambda/(\mu c)$ le coefficient de diffusion thermique caractéristique de l'anneau.
2. Vérifier que la fonction suivante exprimant la température au cours du temps est solution de l'équation de diffusion thermique :

$$T(\theta, t) = \frac{T_0 \ell}{2\sqrt{\pi D t}} \exp - \frac{R^2 \theta^2}{4 D t}$$

3. Expliquer pourquoi la précédente solution bien que vérifiant l'équation de diffusion thermique, ne peut pas convenir dans le problème de l'anneau de FOURIER.

4. On cherche maintenant une solution stationnaire de la forme $T(\theta, t) = f(\theta)g(t)$. Déterminer les fonctions $f(\theta)$ et $g(t)$.
5. On étudie une situation où initialement une moitié de l'anneau est à la température T_0 , alors que l'autre moitié est à une température nulle. Trouver une solution pour l'évolution de la température. Quelle est son évolution asymptotique au temps long ?
6. On part d'une température nulle dans tout le tore, et on injecte une quantité d'énergie Q en un point donné. Quelle est l'évolution de la température et son profil asymptotique ?

Aide mathématique : la fonction $f_a(\theta)$ définie sur $[-\pi, \pi]$ et ayant pour valeur π/a sur $-a/2 \leq \theta \leq a/2$ et 0 ailleurs s'écrit sous la forme d'une série :

$$f_a(\theta) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(an/2)}{an/2} \cos(n\theta)$$

29. Filtre magnétique

Un faisceau de protons et d'électrons de même énergie de 2 GeV traverse un aimant filtre, qui se compose de deux zones d'une longueur de 0,2 m avec un champ magnétique uniforme et perpendiculaire au faisceau de 1 T. Au milieu de la zone traversée, le sens du champ magnétique s'inverse. Voir la figure 15. Cet exercice a été donné à un oral X.

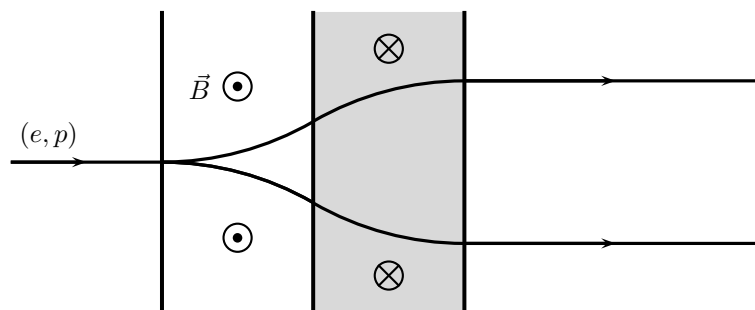


FIGURE 15 – Filtre magnétique

1. Trouvez la distance entre les faisceaux de protons et d'électrons après la traversée du filtre.

30. Champ magnétique d'un condensateur

Un générateur impose une tension sinusoïdale de fréquence f , notée $U_c(t)$, entre les armatures d'un condensateur. On s'intéresse aux zones spatiales I, II et III du schéma de la figure 16 correspondant respectivement au voisinage des fils qui conduisent le courant aux armatures, à l'espace inter-armatures, et au voisinage du condensateur. En dehors des armatures, on considérera que l'on se trouve dans le vide. Les armatures sont cylindriques, de rayon R .

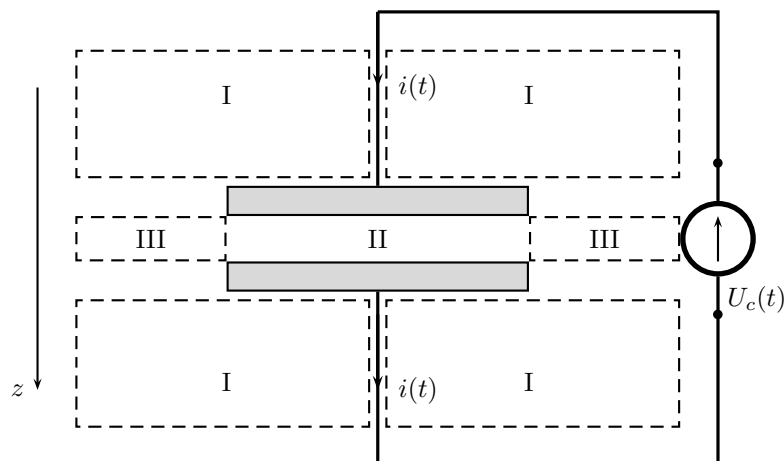


FIGURE 16 – Condensateur plan

1. Donner l'expression du champ magnétique dans la zone I, en fonction de $i(t)$.
2. Calculer le champ magnétique dans les zones II et III. Dans la zone III, on donnera son expression en fonction de $i(t)$.

Pour répondre, on fera les hypothèses simplificatrices nécessaires.

31. L'axion : une particule hypothétique

L'axion est une particule neutre de très faible masse qui est évoquée pour expliquer un certain nombre de phénomènes. Elle pourrait être un constituant de la matière noire. Elle n'a pas encore été détectée.

On considère une onde électromagnétique plane, progressive, harmonique, polarisée rectilignement de champ électrique $\vec{E} = E(x, t)\vec{e}_z$. Cette onde se propage dans le vide suivant l'axe Ox dans le sens des x croissant. Elle arrive dans un domaine $x \in [-L, 0]$ où règne un champ magnétique indépendant du temps et très intense. $\vec{B}_0 = B_0\vec{e}_z$ avec $B_0 > 10^{10}$ T. De tels champs se rencontrent dans les étoiles à neutrons. On admet que dans ces conditions, il peut y avoir un couplage entre l'onde électromagnétique et le champ \vec{B}_0 . Ce couplage va engendrer une densité volumique de courant donnée par l'équation :

$$\vec{j} = -\frac{\eta}{\mu_0 c} \vec{B}_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

où $\phi(t) = \phi_0 \exp i(\omega t - kx)$. ϕ est un champ qui représente l'axion. Il est non nul du fait du couplage, η est un paramètre qui traduit l'intensité du couplage. Le champ ϕ vérifie l'équation de propagation modifiée suivante :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\frac{\eta}{\mu_0 c} \vec{E} \cdot \vec{B}_0$$

où \vec{E} est le champ électrique de l'onde électromagnétique. Dans le domaine où $\vec{B}_0 = \vec{0}$, ϕ se propage à la vitesse c selon une propagation libre. On indique que ϕ et $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ sont continus en $x = 0$ et $x = -L$.

1. Pour $x \in [-L, 0]$, montrer que :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} \neq \vec{0}$$

2. Établir la relation de dispersion et montrer que, sous une certaine condition, le vecteur d'onde k s'exprime selon $k = \frac{\omega}{c} \alpha(\omega)$ où $\alpha(\omega)$ est une fonction de la pulsation que l'on exprimera.
3. On considère que le champ ϕ une fois produit dans le domaine $x \in [-L, 0]$ s'échappe de cette région. Montrer que $|\phi|$ est proportionnel à $|E|B_0$ pour $x > 0$ et pour $x < -L$.

L'intérêt est que si $|\phi|$ est assez grand, alors il pourrait donner des effets observables.

On rappelle que la solution de l'équation de propagation de ϕ est l'addition d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène, c'est-à-dire de l'équation sans second membre.

32. Lentille de Zernicke

On considère une lentille convergente, de focale $f = 10$ cm, un peu particulière appelée lentille de ZERNICKE. Son caractère particulier est lié au fait qu'elle est percée en son centre, à travers toute son épaisseur $e = 3$ mm, par un trou circulaire de diamètre $d = 10$ mm. Une source ponctuelle S placée sur l'axe optique avant la lentille l'éclaire avec une onde monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$. On précise que l'onde passant par le trou de la lentille est sphérique de centre S tandis que l'autre partie de l'onde passant par la lentille est plane.

1. On place à une distance $D = 1$ m de la lentille, un écran d'observation perpendiculairement à l'axe optique. Que voit-on sur l'écran ?

33. Une balance ultrasensible

On peut utiliser, en guise de balance ultrasensible, un ressort à quartz suspendu à un ressort fixe. Le ressort est tel que pour un allongement d'une longueur x , une force de rappel de la forme $-\alpha x$ se fait sentir, où α est l'analogue de la raideur d'un ressort normal. La balance baigne dans un milieu dont la température T est constante et la valeur de l'accélération de la pesanteur est g . On suspend au ressort un très petit système de masse m . Les effets quantiques sont négligés et on considère l'espace accessible $x \in \mathbb{R}$. On donne :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp -u^2 du = \sqrt{\pi}$$

1. Donner la distribution de probabilité de l'élongation x du ressort à l'équilibre vertical. Quelle est l'élongation moyenne du ressort ? Commenter.
2. L'agitation thermique entraîne l'existence de fluctuations autour de cette valeur moyenne. Expliciter l'amplitude de ces fluctuations.
3. Quelle masse minimale peut-on peser avec cette balance sans être gêné par les fluctuations ?
4. Discuter la possibilité de mesure de la constante de BOLTZMANN avec ce dispositif.

34. Piles . . .

On s'intéresse à l'élément aux propriétés redox du mercure. On donne à 298 K : $E_{\text{Hg}_2^{2+}/\text{Hg}_{liq}}^\circ = 0,79 \text{ V}$, $E_{\text{Hg}^{2+}/\text{Hg}_2^{2+}}^\circ = 0,91 \text{ V}$ et $pK_s = 25,2$ pour l'hydroxyde $\text{Hg}(\text{OH})_2$.

1. Construire le diagramme $E - pH$ du mercure pour les espèces précédentes avec une concentration de tracé $c = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. On pratiquera l'équirépartition.
2. Étudier la stabilité des espèces en solution aqueuse.

On considère une pile faisant intervenir deux électrodes d'argent plongeant chacune dans des solutions de nitrate d'argent de même volume mais de concentrations distinctes : $c_1 = 4 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et $c_2 = 4 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

1. Représenter la pile et décrire son fonctionnement lorsqu'elle est branchée sur une utilisation modélisée par une résistance électrique.
2. Calculer la fem (tension à vide de la pile).
3. On ajoute du KCN pour réaliser une concentration $c_3 = 4 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ dans le bécher contenant le nitrate d'argent de concentration c_2 . Il y a complexation des ions argent pour former $\text{Ag}(\text{CN})_2^-$ et on note β_2 la constante de l'équilibre de formation des ions $\text{Ag}(\text{CN})_2^-$ à partir des ions Ag^+ . On mesure alors une tension à vide $E = 1,08 \text{ V}$. Calculer β_2 .
4. On fait débiter cette pile dans une résistance électrique. Calculer l'état final.

5 Situation-problèmes

35. Anneau de vitesse

Le constructeur automobile Peugeot-Stellantis possède à proximité de son usine de Sochaux (25) un centre d'essais de ses véhicules. Sur la figure 17, on observe l'ensemble du site qui comporte en particulier un anneau de vitesse qui possède à chacune de ses extrémités un virage circulaire relevé. L'angle du virage relevé est variable de l'intérieur de la piste où il est faible jusqu'à l'extérieur de la piste où il atteint 45° , comme on peut le voir sur la figure 18.

1. Montrer que sur la partie extérieure du virage relevé, une voiture ne peut pas rester à l'arrêt.
2. Déterminer la vitesse minimale de la voiture en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ lui permettant de parcourir la partie extérieure à vitesse constante.
3. La voiture peut-elle glisser vers l'extérieur de la piste ?

Pour répondre à ces questions, on ne donne que le coefficient de frottement f entre les pneus et la piste. On a $f = 0,6$ lorsque la piste est sèche et $f = 0,4$ lorsqu'elle est mouillée par la pluie. Pour chacune des questions posées, on envisagera les deux cas (piste sèche et piste mouillée).

36. Flamant rose

La figure 19 montre la photographie d'un flamant rose. L'alternance liaison simple - doublet liant dans une molécule est une *boîte à électrons* à une dimension. En chimie, la conjugaison désigne une délocalisation d'électrons dans les molécules, que l'on représente par une combinaison virtuelle de structures aux électrons localisés appelées mésomères, lorsqu'on a par exemple une alternance liaison simple - liaison double - liaison simple, comme dans un diène conjugué. Le diène conjugué le plus simple est le buta-1,3-diène (la figure 19 montre ses formules mésomères), un hydrocarbure de formule C_4H_6 gazeux incolore et inflammable. C'est un important réactif qui est utilisé dans la synthèse de nombreux polymères. La molécule de β -carotène $\text{C}_{40}\text{H}_{56}$ possède onze doubles liaisons conjuguées. Elle peut absorber une lumière bleu-indigo et donne sa couleur orange à la carotte. La coloration des plumes du flamant rose est due à l'accumulation de carotène contenu dans son alimentation.

On donne : $h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$, $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, $a \simeq 0,1 \text{ nm}$ comme distance interatomique.

Évaluer la longueur d'onde d'absorption du buta-1,3-diène dans le proche ultra-violet.



FIGURE 17 – Vue aérienne du site d'essais PSA - Stellantis de Belchamp (Doubs - 25)



FIGURE 18 – Virage relevé de l'anneau de vitesse



FIGURE 19 – Un flamant rose très orangé... et la conjugaison des doublets électroniques