

Exercices de révision pour les oraux : Série 2.

1 QCM

1. Rebonds d'un ballon

Un ballon de football est lancé sur un plan horizontal, comme représenté sur le schéma de la figure 1. Le ballon rebondit trois fois sur ce dernier. on néglige les forces de frottements exercées par l'air sur le ballon et on assimile ce dernier à un point matériel.

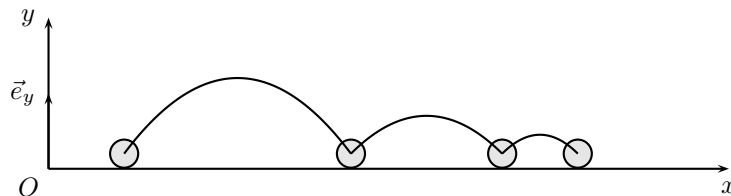


FIGURE 1 – Rebonds successifs d'un ballon de football

1. Quel graphique de la figure 2 peut représenter l'évolution temporelle de la composante verticale v_y du vecteur vitesse \vec{v} associé au mouvement du ballon ?

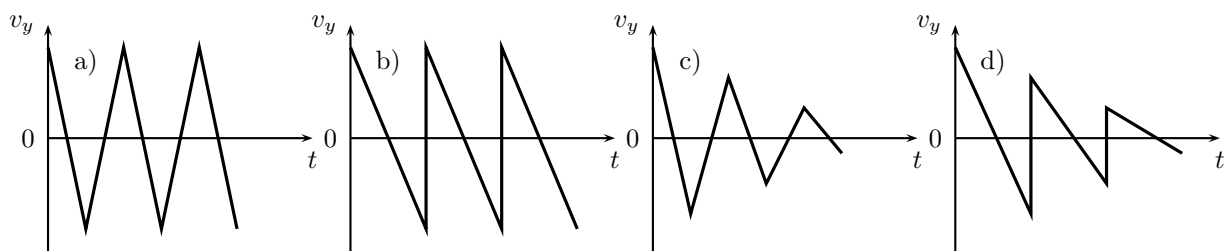


FIGURE 2 – Évolution de la composante v_y de la vitesse

Proposition de réponses :

- a) graphique a) b) graphique b) c) graphique c) d) graphique d)

2. Une montgolfière

On considère une montgolfière dont le chargement et l'enveloppe pèsent $m = 600$ kg. L'enveloppe, ouverte vers l'extérieur, est de volume $V_0 = 3000$ m³. On suppose que la température au sol est $T_0 = 20$ °C, la pression atmosphérique égale à $P_0 = 10^5$ Pa et l'air un gaz parfait de masse molaire $M = 29$ g · mol⁻¹.

1. À quelle température minimale l'air de la montgolfière doit-il être chauffé pour assurer son décollage ?

Proposition de réponses :

- a) 79 °C b) 94 °C c) 20 °C d) 57 °C

3. Presbytie

Une personne presbyte ne peut pas voir nettement les objets situés à moins de 75 cm de son œil. On rappelle que la vergence d'un système de deux lentilles minces accolées est la somme des vergences de chacune des lentilles minces constituant le système.

1. Quelle est la vergence de la lentille correctrice de contact qu'il faut lui proposer pour qu'elle puisse voir net à 25 cm ?

Proposition de réponses :

- a) $1,3\delta$ b) $4,0\delta$ c) $2,0\delta$ d) $2,7\delta$

4. Balle suspendue

Une balle de masse m est initialement maintenue en place par deux fils inextensibles, sans masse, notés (1) et (2) sur la figure 3. La force exercée par le fil (2) sur la balle est notée \vec{T}_2 . Dans un second temps, le fil horizontal noté (1) est coupé. On s'intéresse toujours à la force exercée par le fil (2), immédiatement après avoir coupé le fil (1). On note alors à cet instant précis \vec{T}'_2 la force exercée par le fil (2) sur la balle.

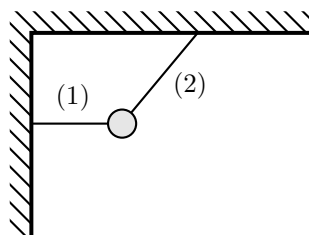


FIGURE 3 – Balle suspendue

1. Quelle relation est-elle correcte dans les propositions de réponse ?

Proposition de réponses :

- a) $\|\vec{T}_2\| < mg < \|\vec{T}'_2\|$ b) $\|\vec{T}'_2\| < mg < \|\vec{T}_2\|$ c) $mg < \|\vec{T}'_2\| < \|\vec{T}_2\|$ d) $mg < \|\vec{T}_2\| < \|\vec{T}'_2\|$

2 Exercices

5. Décomposition en série de Fourier

Un circuit redresseur double alternance débite dans une bobine de résistance $R = 20\Omega$ et d'inductance $L = 100\text{ mH}$, voir la figure 4. La tension redressée possède la fréquence $f = 100\text{ Hz}$. La valeur de la tension maximale est $U_0 = 6\text{ V}$. On cherche à mesurer le courant $i(t)$ qui traverse la bobine au moyen d'un ampèremètre.

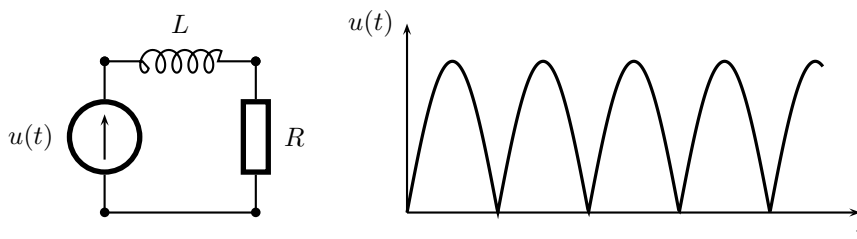


FIGURE 4 – Tension redressée double alternance

- Déterminer les premiers termes de la décomposition en série de FOURIER de la tension appliquée à la bobine.
- Exprimer le courant et le déphasage courant-tension pour ces harmoniques. Faire les applications numériques.
- On mesure l'intensité i . Quelle valeur lit-on avec un ampèremètre en *DC*? Même question avec un ampèremètre en *AC*, de bande passante 400 Hz.
- On utilise maintenant un ampèremètre donnant la vraie valeur efficace (true RMS) de l'intensité. Cet ampèremètre fonctionne jusqu'à une soixantaine d'harmoniques. Quelle valeur donne-t-il ?
- Exprimer la puissance moyenne consommée par la bobine.

6. Erreur de quantification

Du fait de la numérisation par un convertisseur à loi linéaire, une erreur d'arrondi est commise sur chaque échantillon.

1. En notant q le pas de quantification, préciser dans quel intervalle l'erreur d'arrondi ε prend sa valeur.
2. Lors d'un essai du convertisseur avec un signal triangulaire, quelle est l'évolution temporelle de $\varepsilon(t)$? On raisonnera sur une portion croissante du signal d'entrée.
3. En raisonnant sur une période de $\varepsilon(t)$, déterminer sa valeur moyenne. Quelle est aussi sa moyenne quadratique et donc sa valeur efficace ? Comparer ε_{eff} et la plage de conversion du signal Δs pour un convertisseur linéaire 8 bits ou 12 bits.
4. Lors d'une phase de décroissance du signal triangulaire échantillonné, les propriétés précédentes sont-elles conservées ?
5. Le signal d'entrée est de forme quelconque mais d'amplitude grande devant le pas de quantification. Pourquoi peut-on considérer les résultats précédents comme toujours valables pour $\varepsilon(t)$?

7. Critère de Shannon

Un signal téléphonique a son spectre limité à 3,4 kHz pour réduire son encombrement spectral. Il est échantillonné à $F_e = 8,0$ kHz. Pour la réalisation d'un CD audio, on souhaite conserver la fréquence maximale du domaine audible qui est de 20,0 kHz. Le signal audio est échantillonné à $F_e = 44,1$ kHz.

1. Lorsque la condition de SHANNON est respectée, combien d'échantillons sont prélevés au minimum par période d'un signal $s(t)$ sinusoïdal ?
2. Le critère de Shannon est-il respecté pour la téléphonie et pour le CD audio ?
3. Présenter sur deux graphiques l'allure du spectre du signal téléphonique et l'allure du spectre de ce même signal une fois qu'il a été échantillonné. Ce dernier spectre fait apparaître une zone vide appelée zone de transition, quelle est sa taille ?
4. Comparer la largeur du spectre et la largeur de la zone de transition aussi bien dans le cas du signal téléphonique échantillonné que dans le cas du signal audio échantillonné.
5. En comparant les deux résultats de la question précédente, comparer les qualités des filtres nécessaires pour restituer le signal dans chacun des cas.

8. Cristal peuplé de dipôles

Un cristal cubique contient N ions possédant chacun un moment dipolaire électrique \vec{p} de norme p identique fixée. Il est maintenu à la température T et est soumis à un champ électrique extérieur statique et uniforme $E\vec{e}_z$ (dans le repère d'étude $Oxyz$ d'étude). L'interaction dipôle-dipôle est négligeable. On ne considère pas d'énergie cinétique dans un premier temps.

1. On suppose que chaque moment \vec{p} ne peut prendre que l'une des six orientations d'espace $\pm\vec{e}_x$, $\pm\vec{e}_y$ et $\pm\vec{e}_z$. Calculer le moment dipolaire moyen $\langle\vec{p}\rangle$ de chaque ion. Développer ce dernier au premier ordre aux températures élevées (notion que l'on précisera).
2. Reprendre la question précédente en supposant toutes les orientations d'espace de \vec{p} possibles (approche continue). Commenter le résultat final.
3. Discuter l'énergie moyenne du cristal associée aux dipôles dans l'approche continue. Quelle est sa limite à température infinie ?
4. On tient compte à présent de l'énergie cinétique des dipôles (approche continue et classique). Déterminer la nouvelle expression de l'énergie moyenne du cristal. Quelle est sa limite à température infinie ?

9. Polariseur à neutrons

On rappelle les données suivantes :

| | |
|---------------------|---|
| Charge élémentaire | $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ |
| Masse de l'électron | $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ |
| Masse d'un nucléon | $m = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ |
| Constante de PLANCK | $h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ |

On rappelle que l'énergie potentielle d'un système ayant un moment magnétique \vec{M} , placé dans un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_z$ est donnée par $V = -\vec{M} \cdot \vec{B}$.

1. Dans un modèle classique de l'atome d'hydrogène, où l'électron décrit une orbite circulaire centrée sur le noyau, montrer que le moment magnétique orbital \vec{M} de l'électron est proportionnel à son moment cinétique orbital \vec{L} à savoir $\vec{M} = \gamma_e \vec{L}$. γ_e est le rapport gyromagnétique de l'électron que l'on exprimera.

Un neutron possède aussi un moment magnétique intrinsèque \vec{M} qui peut s'écrire comme proportionnel à son moment cinétique intrinsèque de spin \vec{S} . On a $\vec{M} = \gamma \vec{S}$ où γ est le rapport gyromagnétique du neutron que l'on écrit sous la même forme que celui de calculé à la question précédente : $\gamma = g \frac{e}{2m}$ où g est le facteur de LANDÉ. Dans le cas du neutron, on a $g = -3,82$. La valeur du spin du neutron est $S = \hbar/2$. La projection du spin \vec{S} sur l'axe \vec{e}_z qui est la direction particularisée par le champ magnétique peut prendre uniquement deux valeurs :

$$\vec{S} = +\frac{\hbar}{2}\vec{e}_z \quad \text{polarisation positive} \quad \text{et} \quad \vec{S} = -\frac{\hbar}{2}\vec{e}_z \quad \text{polarisation négative}$$

2. Comment se comportent les neutrons dans un champ magnétique tel que celui proposé, supposé uniforme ?

On considère un faisceau dont tous les neutrons possèdent la même énergie et dans lequel 50% des neutrons ont une polarisation positive et 50% une polarisation négative. Ce faisceau est émis par une source située dans le vide en $x \rightarrow -\infty$, il se dirige vers un milieu en $x > 0$ où règne un potentiel constant $V_0 > 0$ ainsi que le champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_z$. On souhaite polariser le faisceau de neutrons, c'est-à-dire l'enrichir en un des deux états de polarisation. On posera $\omega_L = |\gamma|B$ et on notera E l'énergie totale du neutron.

3. Donner l'expression de l'énergie potentielle totale $V(x)$ pour chacun des deux états de polarisation du neutron. En vous servant uniquement des lois de la mécanique classique, discuter de la possibilité de polariser le faisceau.
4. Comme le potentiel $V(x)$ ne dépend du temps, on recherche des états stationnaires quantiques. Écrire l'équation de SCHRÖDINGER spatiale pour les deux états de polarisation du neutron.
5. On pose $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$, $k_0^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$, $G = k^2 - k_0^2 + \frac{m\omega_L}{\hbar}$ et $F = k^2 - k_0^2 - \frac{m\omega_L}{\hbar}$. Nous supposons $F < 0 < G$. Quel est l'état de polarisation transmis ?
6. Déterminer les coefficients de probabilité de réflexion R et de transmission T .
7. Dans la pratique, l'énergie d'un neutron, ainsi que V_0 valent environ 10^{-3} eV et le champ magnétique $B = 1$ T. Estimer le taux de polarisation du faisceau transmis. Le taux de polarisation est le rapport entre le nombre de neutrons polarisés transmis par le milieu et le nombre de neutrons incidents.

10. Pendule électrostatique

Un pendule simple est constitué d'une barre sans masse AP de longueur ℓ à l'extrémité de laquelle on a placé une petite boule de masse m et de charge positive q . Ce pendule oscille dans le plan Oyz . La liaison pivot d'axe Ax est parfaite en A . On ajoute deux charges $-Q < 0$ sur l'axe $y'Oy$ symétriquement à la même distance a du point O . Voir la figure 5. On donne $OA = \ell$.

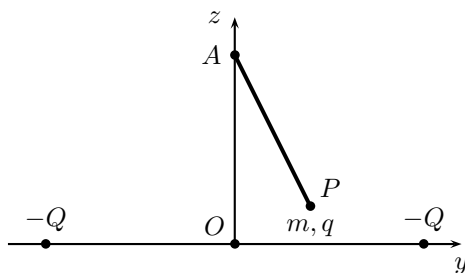


FIGURE 5 – Pendule électrostatique

1. Quelle est la période des petites oscillations du pendule en l'absence des deux charges $-Q$?
2. Que devient-elle lorsqu'elles sont présentes ?

11. Forces centrales en $1/r^n$

On considère un point matériel soumis à une force centrale d'expression $\vec{F} = -\frac{km}{r^n}\vec{e}_r$ avec $k > 0$.

1. Montrer que le mouvement est plan.
2. Montrer que le mouvement obéit à la loi des aires. On notera C la constante des aires associée au mouvement.
3. Déterminer la fonction $U(r)$ telle que :

$$U(r) + \dot{r}^2 = \text{Cte}$$

4. Discuter la nature des trajectoires possibles en fonction de n .

12. Pendule pesant à ressort

On considère le pendule de la figure 6 où le ressort possède une longueur à vide ℓ_0 et une constante de raideur k . Il est accroché à son extrémité O et peut tourner librement autour de ce point de fixation. À son autre extrémité est accrochée une masse m . On considère dans toute la suite que les mouvements se déroulent exclusivement dans le plan vertical.

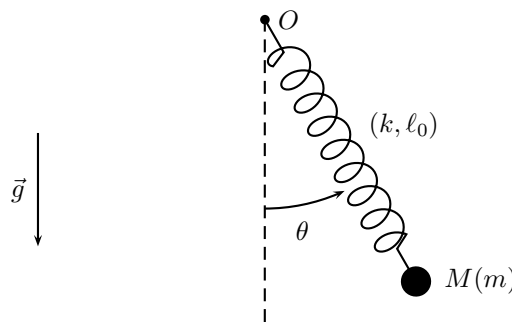


FIGURE 6 – Pendule pesant à ressort

1. Pour l'angle $\theta = 0$, déterminer la longueur du ressort ℓ_{eq} lorsque le système est à l'équilibre.
2. En maintenant le ressort dans sa longueur d'équilibre, on écarte le pendule d'un angle $\theta_0 = \alpha \ll \pi$. On laisse évoluer le système. Mettre en place le système différentiel décrivant l'évolution du pendule au cours du temps. On néglige tous les phénomènes dissipatifs.
3. Déterminer des solutions de l'évolution de l'angle $\theta(t)$ et de longueur du ressort que l'on pose comme étant $\ell_{eq} + r(t)$ en prenant en compte les conditions particulières de l'étude, c'est-à-dire en faisant des approximations qui paraissent raisonnables. On posera $\omega_0^2 = k/m$ et $\omega_1^2 = g/\ell_{eq}$.
4. Justifier les approximations effectuées.

13. Cylindre de gaz en rotation

Au laboratoire, on enferme un gaz parfait dans un cylindre de rayon R , de hauteur H à la pression p_0 et à la température T_0 . Il contient N particules de masse m , le gaz est assimilé à un gaz parfait. Le cylindre est en contact avec un thermostat qui impose en permanence au gaz la température T_0 . Le cylindre est placé sur un plateau horizontal. On rappelle que la constante de BOLTZMANN est $k_B = R/\mathcal{N}_A \simeq 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

1. Dans un premier temps, le cylindre est immobile. Déterminer la loi donnant l'évolution de la pression à l'intérieur du cylindre en fonction de l'altitude z d'un point par rapport à la base du cylindre. Faire apparaître une longueur caractéristique ℓ_c dont évaluera l'ordre de grandeur dans des conditions usuelles. Conclusion.
2. On met le plateau en rotation à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ maintenue constante. On précise que l'axe de rotation coïncide avec l'axe de symétrie du cylindre. Le régime transitoire n'est pas étudié. On s'intéresse à la situation permanente obtenue ensuite. Établir la loi de pression à l'intérieur du cylindre ainsi que la loi donnant la densité volumique de particules. Dans le calcul, on fera apparaître une longueur caractéristique que l'on notera a . On évaluera l'ordre de grandeur de cette longueur dans des conditions usuelles.
3. Représenter l'évolution de la densité n de particules et la densité initiale (lorsque $\omega = 0$) que l'on notera n_0 .
4. Déterminer la variation d'entropie du gaz entre l'état initial et l'état final. On calculera l'intégrale obtenue avec un logiciel de calcul formel et on représentera l'évolution de l'entropie en fonction de R/a .

14. Profil de température en régime stationnaire

On étudie la conduction thermique unidimensionnelle selon un axe Ox d'un milieu de section S maintenu entre les températures T_1 et T_2 aux abscisses $x = 0$ et $x = a$. La conductivité thermique de ce milieu est fonction de la température $\lambda = \lambda_0 + bT$, sa capacité thermique aussi $c = c_0 + \alpha T$. Par contre sa masse volumique μ en est indépendante.

1. Donner l'expression de la relation existant entre la température $T(x)$ et l'abscisse x .
2. Quelle est la puissance thermique qui traverse ce milieu ?
3. Calculer l'entropie créée par unité de temps.

15. Guide d'ondes et ondes TM

On considère une onde électromagnétique se propageant entre deux plans conducteurs parfaits d'équation $y = 0$ et $y = a$. Le champ magnétique de cette onde est :

$$\vec{B} = B_z(y) \exp[i(\omega t - kx)] \vec{e}_z$$

1. Quelle est la direction de propagation de l'onde ? Pourquoi cette onde est-elle qualifiée de TM, c'est-à-dire de Transversale Magnétique ? Cette onde est-elle plane ?
2. Calculer le champ électrique \vec{E} de cette onde.
3. Trouver l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $B_z(y)$. Quelles sont les solutions possibles selon k et ω ?
4. Exprimer les conditions aux limites du champ électrique. Quelles conditions doit vérifier $\frac{dB_z(y)}{dy}$? Quelle solution est donc possible pour $B_z(y)$?
5. Calculer le vecteur de POYNTING et la puissance moyenne qui traverse une section de largeur $z = b$ de l'espace inter-conducteur.

16. Condensateur cylindrique et effet Hall

On considère un condensateur constitué par deux armatures métalliques concentriques de rayons R_1 et $R_2 > R_1$. La hauteur du condensateur est h et on néglige les effets de bord. Le milieu séparant les deux électrodes est caractérisé par la permittivité relative ε_r et par la conductivité électrique γ puisque ce n'est pas un isolant parfait. On applique le potentiel V_0 à l'armature interne alors que l'armature externe est reliée à la masse. Le milieu séparant les deux électrodes sera toujours considéré comme localement neutre.

1. Déterminer le champ électrique entre les deux armatures en fonction de V_0 , R_1 , R_2 et r la coordonnée radiale au point d'étude M .
2. Donner l'expression de la charge Q_0 portée par l'armature interne. On pose $Q_0 = CV_0$. En déduire l'expression de la capacité C correspondante.
3. Déterminer en fonction de γ , R_1 , R_2 et h l'expression de la résistance électrique R du milieu séparant les deux électrodes.
4. Un électron du milieu séparant les deux électrodes subit en plus de la force électrique une force de la forme $-\frac{m}{\tau}\vec{v}$. Ce milieu est caractérisé par la densité volumique d'électrons n . Montrer qu'en régime permanent, on a bien $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ où \vec{j} est la densité volumique de courant. Donner l'expression de γ .
5. On rajoute un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$. Montrer qu'en régime permanent, on a : $\vec{j} = \gamma(\vec{E} - \frac{1}{ne}\vec{j} \wedge \vec{B})$.
6. Donner l'expression des composantes de la densité volumique de courant (j_r, j_θ) en fonction des composantes du champ électrique (E_r, E_θ) .
7. On suppose que le champ électrique reste radial. En déduire les nouvelles expressions de la capacité C et de la résistance électrique R .

17. Détecteur large

On considère un interféromètre de MICHELSON monté en lame d'air d'épaisseur e . On note i l'angle d'incidence d'un rayon lumineux sur cette lame d'air et λ la longueur d'onde du rayonnement monochromatique utilisé. À la sortie de l'interféromètre, on utilise une lentille convergente de distance focale f . On utilise pour étudier la figure d'interférences, un détecteur de forme sphérique concave dont le sommet est placé au foyer image F' de la lentille. Le centre de la sphère correspondant au détecteur est situé au centre optique O de la lentille, ce qui fait que le rayon de courbure du détecteur est f . Le diamètre du détecteur est $2R$, voir le schéma de la figure 7. Sur cette figure, la taille du détecteur est volontairement exagérée car on considère $R \ll f$.

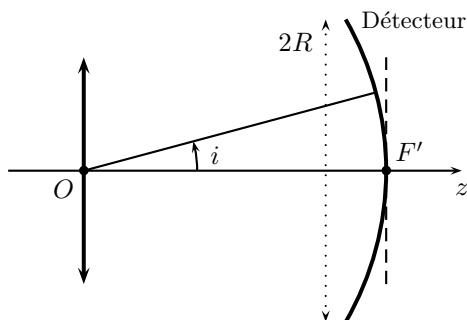


FIGURE 7 – Détecteur large

1. Déterminer la surface totale du détecteur.
2. Démontrer que l'expression de la différence de marche à l'infini provoquée par la lame d'air est $\delta = 2e \cos i$. On considérera, par la suite, que cette différence de marche est toujours valable.
3. Déterminer l'expression de l'éclairement enregistré par le détecteur en fonction, entre autres, du rapport $e\lambda$, de R et de f' .
4. Discuter l'influence de R sur l'éclairement enregistré.

18. Miroir de Lloyd

On considère le système d'interférences de la figure 8. Il est constitué d'une source ponctuelle monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 500 \text{ nm}$. Le miroir AB est un miroir plan de longueur $AB = \ell = 3 \text{ cm}$ qui sera considéré comme étant éclairé de façon uniforme. On observe la figure d'interférences sur un écran placé dans le plan focal image d'une lentille mince convergente utilisée dans les conditions de GAUSS. On rappelle que la réflexion sur un miroir entraîne un déphasage de π ou une différence de marche de $\lambda/2$. On donne $h = 1 \text{ mm}$, $d = 1 \text{ cm}$ et $f = 20 \text{ cm}$.

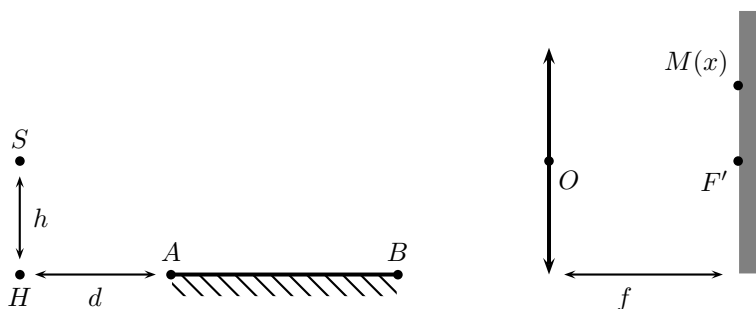
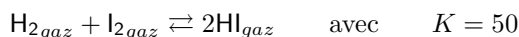


FIGURE 8 – Interférences avec le miroir de LLOYD

1. Quelle est la particularité des rayons qui interfèrent sur l'écran ?
2. En déduire la position dans le plan de l'écran du champ d'interférences.
3. Déterminer, pour une position quelconque $M(x)$ dans le champ d'interférences, la différence de marche des deux rayons qui y interfèrent.
4. Donner l'expression de l'intensité lumineuse en $M(x)$.
5. Donner l'expression de l'interfrange, faire l'application numérique.
6. Évaluer le nombre de franges brillantes présentes.

19. Synthèse du iodure d'hydrogène

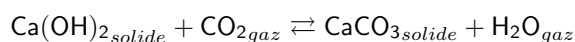
On donne à $T = 1000 \text{ K}$ fixée :



Dans un volume $V = 10 \text{ L}$, initialement vide, on place $0,5 \text{ mol}$ de dihydrogène et $0,5 \text{ mol}$ de diiode. Décrire l'état final.

20. Obtention de carbonate de calcium

La Portlandite (hydroxyde de calcium) peut se carbonater suivant la réaction :



On donne à 298 K, les valeurs suivantes :

| | $\text{Ca(OH)}_{2\text{solide}}$ | $\text{CO}_{2\text{gaz}}$ | $\text{CaCO}_{3\text{solide}}$ | $\text{H}_2\text{O}_{\text{gaz}}$ |
|--|----------------------------------|---------------------------|--------------------------------|-----------------------------------|
| $\Delta_f H^\circ$ (kJ · mol ⁻¹) | -986,1 | -393,5 | -1206,9 | -241,8 |
| S° (J · K ⁻¹ · mol ⁻¹) | 83,4 | 213,7 | 92,9 | 188,7 |

1. Calculer $\Delta_r H^\circ$ et $\Delta_r S^\circ$. Commenter les signes obtenus.
2. Quelles sont les influences sur l'équilibre : d'une élévation de température ? d'une élévation de pression ? d'une addition à T , p fixées de $\text{CO}_{2\text{gaz}}$?
3. Calculer l'enthalpie libre standard de la réaction à 298 K et la constante d'équilibre K_0 . Conclusion.
4. Donner l'expression de $\ln K_0 = f(T)$.

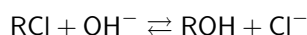
L'aragonite et la calcite sont les deux variétés allotropiques du carbonate de calcium. On relève dans les tables de données thermodynamiques :

| | $\text{CaCO}_{3\text{calcite}}$ | $\text{CaCO}_{3\text{aragonite}}$ |
|--|---------------------------------|-----------------------------------|
| $\Delta_f H^\circ$ (kJ · mol ⁻¹) | -1206,9 | -1207,1 |
| S° (J · K ⁻¹ · mol ⁻¹) | 92,9 | 88,7 |

5. Déterminer l'enthalpie libre standard accompagnant la transformation de l'aragonite en calcite à 298 K. Quelle est la variété allotropique stable du carbonate de calcium à 298 K sous la pression de 1 bar ?

21. Cinétique d'ordre 2

On étudie la réaction en solution :

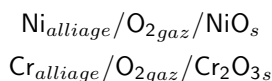


Cette réaction est d'ordre 1 par rapport à chacun des deux réactifs. La constante de vitesse est notée k . Cette réaction est réalisée dans un réacteur ouvert de volume fixé V , muni d'un dispositif d'agitation suffisamment efficace pour que le mélange avec le milieu, des réactifs introduits, puisse être considéré comme instantané. Dans le réacteur, la solution peut être considérée comme homogène de concentration constante en RCl. Elle est notée c_{eq} . Les réactifs sont introduits dans le réacteur avec un débit constant D (en L · s⁻¹). Les concentrations de RCl et de OH⁻ dans le flux entrant sont toutes deux égales à c_0 . On admettra qu'en régime permanent, la quantité totale de RCl présente dans le réacteur est constante.

1. Donner l'expression de la vitesse v de disparition du réactif RCl.
2. En écrivant le bilan des nombre de moles de RCl, donner la relation littérale existant, en régime permanent, entre c_{eq} , c_0 , D et V .
3. Calculer c_{eq} avec $c_0 = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, $D = 0,1 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$, $V = 100 \text{ L}$ et $k = 8,9 \times 10^{-2} \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{s}^{-1}$.

22. Oxydation d'un alliage nickel-chrome

On considère l'interaction de l'alliage *nichrome* avec le dioxygène gazeux. On admettra que les seuls oxydes pouvant résulter de cette interaction sont solides, non miscibles entre eux, ni avec l'alliage. Ce sont NiO_s et Cr_2O_{3s} . Soient les deux systèmes sans interaction mutuelle :



traduisant la réaction de chacun des éléments de l'alliage avec le dioxygène pour former l'oxyde correspondant.

1. Calculer, à la température de 1 000 K, la pression partielle de dioxygène d'équilibre thermodynamique de chaque système. On considérera que la solution solide nickel-chrome est idéale et que les activités de $\text{Ni}_{\text{alliage}}$ et $\text{Cr}_{\text{alliage}}$ sont assimilables aux fractions molaires.
2. En déduire quel(s) oxyde(s) peu(ven)t thermodynamiquement se former à 1 000 K dans l'air, supposé constitué de 0,2 bar de dioxygène et de 0,8 bar de diazote inerte ?
3. L'expérience montre que, dans ces conditions, seul Cr_2O_{3s} se forme et jamais NiO_s . De quel ordre est la raison de cette absence ?

On donne : l'alliage comporte 80% de nickel et 20% de chrome, il sera considéré comme une solution solide idéale de 2 composés ; $\Delta_r G_1^\circ = -149,2 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ pour l'oxyde de nickel et $\Delta_r G_1^\circ = -876,3 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ pour l'oxyde de chrome à 1 000 K. Ces valeurs sont rapportées à 1 mole de chaque oxyde.

3 Python Centrale

23. Le mercure

Le mercure est un élément chimique de symbole **Hg** et de numéro atomique 80. C'est un métal argenté brillant, le seul se présentant sous forme liquide dans les conditions normales de température et de pression, conditions dans lesquelles il se vaporise toutefois assez aisément. Le mercure est un puissant neurotoxique, mais en dépit de sa haute toxicité, ses utilisations sont très nombreuses : applications médicales, amalgame de l'or, lampes à vapeurs de mercure...

1. Déterminer la configuration électronique de l'atome de mercure. En déduire les degrés d'oxydation stables du mercure.
2. Le diagramme potentiel-pH du mercure est tracé à la figure 9 pour une concentration totale en mercure en solution de $0,01 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Les frontières entre espèces en solution correspondent à l'égalité de leurs concentrations respectives. Les espèces prises en compte sont Hg_{liq} , HgO_s , Hg^{2+} et Hg_2^{2+} . Identifier les espèces de chaque domaine.

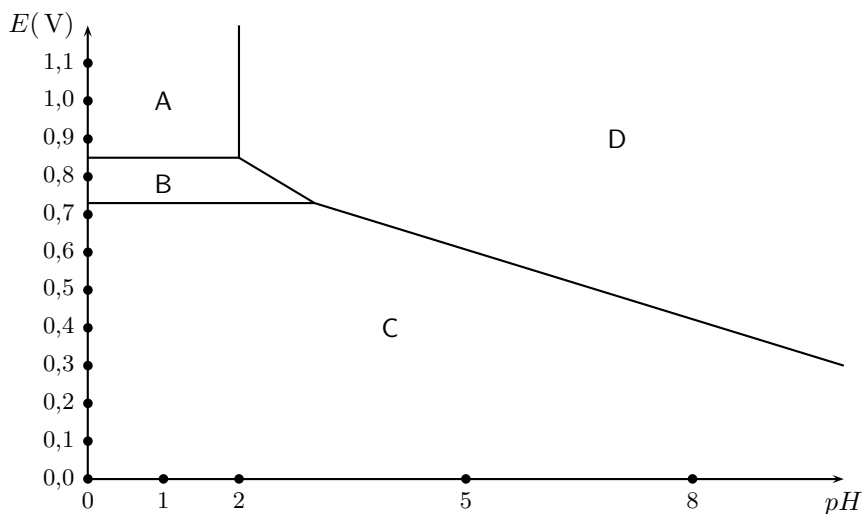
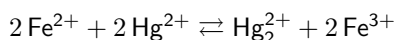


FIGURE 9 – Diagramme $E - pH$ du mercure

3. Déterminer les potentiels standard des couples $\text{Hg}^{2+}/\text{Hg}_2^{2+}$, $\text{Hg}_2^{2+}/\text{Hg}_{liq}$.
4. Calculer la constante d'équilibre associée à la réaction entre les espèces A et D.
5. Quelle est la pente de la droite séparant les domaines B et D ?

On s'intéresse à présent à la cinétique de la réaction de réduction de Hg^{2+} par Fe^{2+} selon la réaction :



dont la loi de vitesse est de la forme $v = [\text{Fe}^{2+}]^p [\text{Hg}^{2+}]^q$. On suit la réaction par une méthode appropriée avec différentes concentrations initiales $[\text{Fe}^{2+}]_0$ et $[\text{Hg}^{2+}]_0$. On relève $[\text{Hg}_2^{2+}] / [\text{Hg}^{2+}]_0$ et on obtient les résultats suivants (le temps est mesuré en unités arbitraires u.a. non précisées).

Expérience n° 1 $[\text{Fe}^{2+}]_0 = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et $[\text{Hg}^{2+}]_0 = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

| $t(\text{u.a.})$ | 0 | 1 | 2 | 3 | ∞ |
|---|---|-----|------|------|----------|
| $[\text{Hg}_2^{2+}] / [\text{Hg}^{2+}]_0$ | 1 | 0,5 | 0,33 | 0,25 | 0 |

Expérience n° 2 $[\text{Fe}^{2+}]_0 = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et $[\text{Hg}^{2+}]_0 = 0,001 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

| $t(\text{u.a.})$ | 0 | 1 | 2 | 4 | ∞ |
|---|---|------|------|-------|----------|
| $[\text{Hg}_2^{2+}] / [\text{Hg}^{2+}]_0$ | 1 | 0,37 | 0,14 | 0,018 | 0 |

6. Quelle méthode de suivi de la réaction pourriez-vous proposer ?
7. Déterminer l'ordre global de la réaction ainsi que les ordres partiels p et q . Vous pouvez utiliser et modifier le programme *Python* nommé 2015-078 mis à votre disposition.

4 X-ENS

24. Astre polytropique

On considère un astre à symétrie sphérique, de masse M , de centre O et de rayon R . On considère qu'il est formé d'un matériau assimilable à un fluide compressible. En un point, situé à la distance r de O , on note $\mu(r)$ la masse volumique du milieu et $P(r)$ la pression. On adopte le modèle d'évolution polytropique pour la relation vérifiée par $\mu(r)$ et $P(r)$ où C est une constante réelle positive :

$$\frac{P(r)}{\mu(r)^2} = C$$

On suppose que l'astre est à l'équilibre mécanique.

1. Montrer, qu'à l'équilibre, la masse volumique $\mu(r)$ vérifie l'équation différentielle :

$$r \frac{d^2\mu}{dr^2} + 2 \frac{d\mu}{dr} + \frac{2\pi\mathcal{G}}{C} r\mu = 0$$

où \mathcal{G} est la constante de la gravitation universelle.

2. Déterminer l'expression de $\mu(r)$.

Pour résoudre l'équation différentielle proposée, on pourra utiliser $f(r) = r\mu(r)$ et calculer $\frac{d^2f}{dr^2}$.

25. Peut-on mesurer la pression de l'air avec un pendule ?

26. James Webb Telescope

Le 25 décembre 2021, le James Webb Telescope quitte enfin la Terre à bord d'une fusée Ariane 5. Les instruments scientifiques à l'intérieur ayant besoin d'être refroidis à 40 K, il est préférable de le positionner dans le cône d'ombre de la Terre. Il ne peut donc pas être en orbite autour de la Terre comme la plupart des satellites.

1. Existe-t-il un lieu derrière la Terre où positionner le satellite de façon stable ?

Autour du point d'équilibre, la force totale s'appliquant dans le voisinage de ce point est :

$$\vec{F}(\vec{r}) \approx \vec{F}_{eq} + \delta\vec{f} = \delta\vec{f} \text{ avec } \delta\vec{f} = \begin{cases} 9m\Omega^2\delta x \\ -3m\Omega^2\delta y \\ -4m\Omega^2\delta z \end{cases}$$

où m est la masse du satellite et Ω la pulsation orbitale de la Terre autour du Soleil.

2. Le point d'équilibre est-il stable ? Quelle est la trajectoire du satellite au voisinage de ce point ?

27. Glaçon dans un verre d'eau

On considère un glaçon assimilé à une boule de rayon initial $R(t=0) = R_0 = 1$ cm à la température $T_0 = 0^\circ\text{C}$. La masse volumique de la glace est $\mu = 920 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et l'enthalpie massique de fusion $L_f = 3,3 \times 10^5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$. Ce glaçon se trouve dans un verre d'eau à une température $T_1 = 10^\circ\text{C}$. Inévitablement le glaçon fond. On considérera que, lors de la fonte, le glaçon reste toujours de forme sphérique et que son rayon $R(t)$ diminue progressivement. L'eau située autour du glaçon sera toujours considérée en régime stationnaire malgré l'apport de glace fondue. Les transferts énergétique avec l'extérieur sont toujours tels que la température de l'eau loin du glaçon est en permanence $T_1 = 10^\circ\text{C}$. Dans l'eau, on ne considérera que le processus de conduction thermique pour lequel on donne la conductivité thermique de l'eau $\lambda = 0,6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

On donne l'expression du laplacien scalaire en coordonnée sphérique radiale r :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right)$$

1. Décrire qualitativement le processus.
2. Estimer la durée que mettra le glaçon pour fondre.

28. Fil électrique résistif

On considère un fil électrique rectiligne de longueur $\ell = 1$ m et de rayon $a = 1$ mm soumis à une différence de potentiel U . Il est parcouru par un courant d'intensité $I = 1$ A. La résistivité électrique de ce fil de cuivre est fonction de la température. À $T_0 = 298$ K, on a $\rho_0 = 1,72 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$. Le coefficient de température est donné par :

$$\alpha = \frac{d \ln \rho(T)}{dT} \simeq 10^{-7} \text{ K}^{-1}$$

On considère que les transferts thermiques sont bien décrits à l'aide du coefficient pariétal $h = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$. On considère que l'air situé autour du fil reste à la température $T_0 = 298$ K.

1. Déterminer en régime permanent la caractéristique $I = f(U)$.

29. Sursauts radio rapides

Le graphique de la figure 10 représente l'observation d'un *sursaut radio rapide*. il s'agit d'un signal électromagnétique de quelques dixièmes de seconde observé par radiotélescope. Le signal apparaît en noir sur le graphique dans l'espace temps-fréquence.

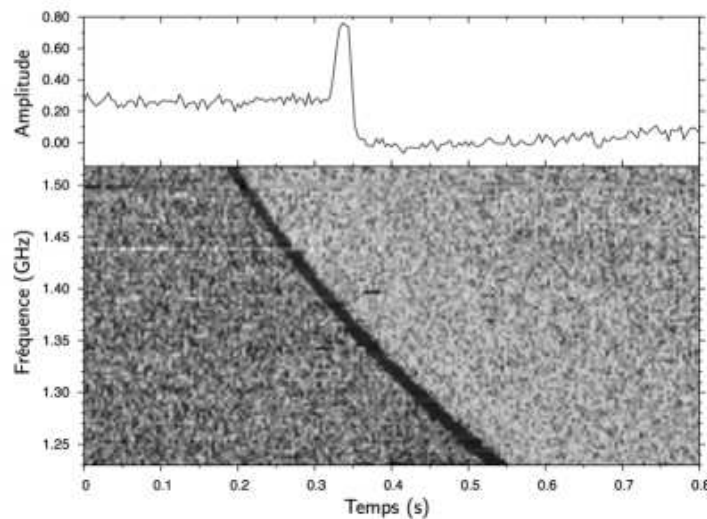


FIGURE 10 – Signal détecté par un radiotélescope

1. Sachant que la densité moyenne d'électrons libres dans l'Univers est d'environ $0,2 \text{ m}^{-3}$, déterminer la distance qui nous sépare de la source de ce signal.

30. Radiomètre de Crookes

Le radiomètre de CROOKES met en évidence la présence d'une onde électromagnétique. Lorsqu'on l'éclaire, par exemple, avec une onde lumineuse, les miroirs se mettent à tourner autour de l'axe vertical, voir la photographie de la figure 11.

Pour en comprendre le principe, on mènera une étude sur un radiomètre présentant deux miroirs uniquement. Le moment d'inertie par rapport à l'axe vertical de l'ensemble qui supporte les deux miroirs sera noté J . Les deux miroirs sont identiques, ils présentent une face parfaitement réfléchissante - d'où leur nom de miroir - et une face parfaitement absorbante. Les faces sont montées dans le même sens par rapport à la rotation, à savoir qu'en tournant dans un sens on rencontre, pour chaque miroir, la face réfléchissante en premier par exemple. On note s la surface de chaque miroir. Soit ℓ la distance depuis l'axe jusqu'au milieu de chaque miroir. La liaison pivot verticale est supposée parfaite. On éclaire le radiomètre avec une onde électromagnétique plane caractérisée par son champ électrique $\vec{E} = E_0 \vec{e}_y \cos(\omega t - kx)$. Voir le schéma de la figure 12.

1. Analyser qualitativement le problème et expliquer que la rotation s'effectue dans le sens θ croissant.
2. Déterminer l'accélération angulaire moyenne sur un tour du radiomètre.



FIGURE 11 – Un radiomètre de CROOKES

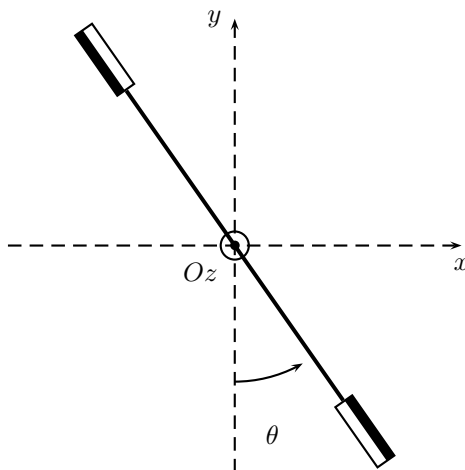


FIGURE 12 – Modèle du radiomètre de CROOKES à deux miroirs

31. L'atome d'hydrogène

On s'intéresse à un atome d'hydrogène isolé. On considère des états de l'électron de valence tels que l'électron est maintenu sur une orbite circulaire plane. La dépendance angulaire de la fonction d'onde s'écrit :

$$\psi(\varphi) = \frac{1}{N} \exp ik\varphi$$

1. Décrire le comportement de l'électron.
2. Comment se comporte l'atome soumis à un champ magnétique ?
3. Soit un gaz d'atomes d'hydrogène à la température ambiante, soumis à un champ magnétique statique. Quelle est la capacité calorifique du gaz ?

32. Peut-on mesurer l'épaisseur et l'indice d'une lame de verre avec un Michelson ?

33. Cémentation du cuivre

On donne :

| | |
|--|--|
| Masse molaire du cuivre | $63,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ |
| Masse molaire du fer | $55,8 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ |
| Potentiel standard de $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}_s$ | $-0,44 \text{ V}$ |
| Potentiel standard de $\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}_s$ | $0,34 \text{ V}$ |
| Masse volumique du cuivre solide CFC | $8,92 \text{ kg} \cdot \text{L}^{-1}$ |

1. Déterminer la compacité du cuivre solide.
2. Caractériser les sites interstitiels et leur nombre par maille.
3. Quel autre métal que le cuivre intervient usuellement dans le laiton avec des proportions atomiques entre 0 et 30% ? S'agit d'un alliage d'insertion ou de substitution ?

4. On s'intéresse à la cémentation du cuivre par le fer, c'est-à-dire à la réduction des ions cuivre Cu^{2+} en cuivre solide par le fer solide qui forme des ions Fe^{2+} . Écrire l'équation de la réaction et calculer sa constante d'équilibre.
5. Quelle la masse nécessaire de fer pour obtenir 1 kg de cuivre ?
6. Tracer qualitative les courbes intensité-potentiel en début et en fin de réaction (1% et 99% des ions cuivres réduits) en prenant une concentration initiale des ions cuivre Cu^{2+} égale à $0,2 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

5 Situation-problèmes

34. Régulation thermique du grand dauphin

Un grand dauphin pèse en moyenne 300 kg et mesure en moyenne 3 mètres de long, voir la photographie de la figure 13. Il mange en moyenne 15 kg de poisson par jour, dont l'apport énergétique moyen est de 100 kcal pour 100 g de poisson. Sa température interne est de 36°C . Il est isolé de l'eau par une couche de graisse de conductivité thermique $\lambda_g = 0,2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

On indique que $1 \text{ kcal} = 4,18 \text{ kJ}$. Vous pourrez prendre des initiatives pour proposer des valeurs numériques non fournies si vous en avez besoin.

Déterminer une estimation de l'épaisseur de la couche de graisse du corps du grand dauphin.



FIGURE 13 – Un grand dauphin

35. Matelas de réception

Une personne a un risque faible de se blesser si la décélération qu'elle subit est inférieure à dix fois l'accélération de la pesanteur ($10g$). Sur les photographies de la figure 14, on peut voir une jeune fille mimant un saut depuis un balcon. Ce type de situation peut se produire lors d'une opération de sauvetage. Les pompiers peuvent disposer un matelas de réception qui permet d'amortir la chute pour employer une expression du langage courant. La nature du matelas, sa capacité à se déformer et son épaisseur sont cruciales afin d'éviter que la personne ne se blesse. Nous nous contenterons d'une approche simplifiée du problème où seule l'épaisseur e du matelas sera discutée.

1. Mettre en évidence les paramètres pertinents pour l'étude de la chute de la jeune fille depuis le balcon.
2. Mettre en place les lois du mouvement de la jeune fille.
3. Le matelas que l'on voit sur la photographie de la figure 15 permet-il une réception de la jeune fille sans risque de blessure ?



FIGURE 14 – Contexte de la situation problème

6 Un peu de Relativité restreinte

Pour répondre à certaines questions, il est nécessaire de chercher des informations sur les notions de *temps propre*, de *longueur propre*, de dilatation des durées et de contraction des longueurs. On aura aussi besoin de l'expression des énergies en Relativité restreinte.

36. Culture cellulaire

On embarque deux cellules terrestres à bord d'un vaisseau spatial à destination du Soleil. Le vaisseau se déplace dans le référentiel héliocentrique à une vitesse de $0,850c$. Le temps de doublement du nombre de cellules est de $10,0$ s dans le référentiel propre des cellules.

Combien y aura-t-il de cellules quand la navette arrivera au niveau du Soleil? On rappelle que la distance Terre-Soleil est égale à $1,5 \times 10^{11}$ m.

Proposition de réponses :

- a) 6×10^7 b) 1×10^{18} c) 4×10^9 d) 3×10^8

37. Le LHC

Le Grand collisionneur de hadrons (LHC) est le plus puissant accélérateur de particules jamais construit. Il accélère des protons à une vitesse proche de celle de la lumière. Il consiste en un anneau de 27 km de circonférence composé essentiellement d'aimants supraconducteurs et équipé de structures accélératrices qui augmentent l'énergie des particules qui y circulent. Les faisceaux de protons circulent en sens inverse dans l'anneau. Chaque proton du faisceau a une énergie d'environ 7 TeV. Chaque faisceau contient environ 2 800 paquets de protons et chaque paquet de protons contient environ $1,2 \times 10^{11}$ protons.

Quelle est l'intensité du courant électrique du faisceau de protons?

Proposition de réponses :

- a) 5×10^{-9} A b) 5×10^{-12} A c) 0,6 A d) 6×10^2 A

38. Vie des muons

Des muons sont créés par l'interaction des rayons cosmiques avec l'atmosphère. À $h = 10$ km d'altitude, ils ont une vitesse de $0,995c$. Au repos, leur durée de vie est de $\tau = 2,2 \mu\text{s}$.



FIGURE 15 – Matelas de réception

1. Calculer leur durée de vie mesurée par un observateur terrestre.
2. Calculer le temps mis par un muon pour arriver au niveau du sol dans le référentiel terrestre.
3. Calculer le temps mis par un muon pour arriver au niveau du sol dans son référentiel.

39. Énergie relativiste

Une particule relativiste a une énergie totale qui vaut trois fois son énergie au repos. Déterminer sa quantité de mouvement :

Proposition de réponses :

- a) mc^2 b) mc c) $\sqrt{8}mc$ d) $\sqrt{2}mc$ e) $3mc$ f) autre

40. Effet de phare

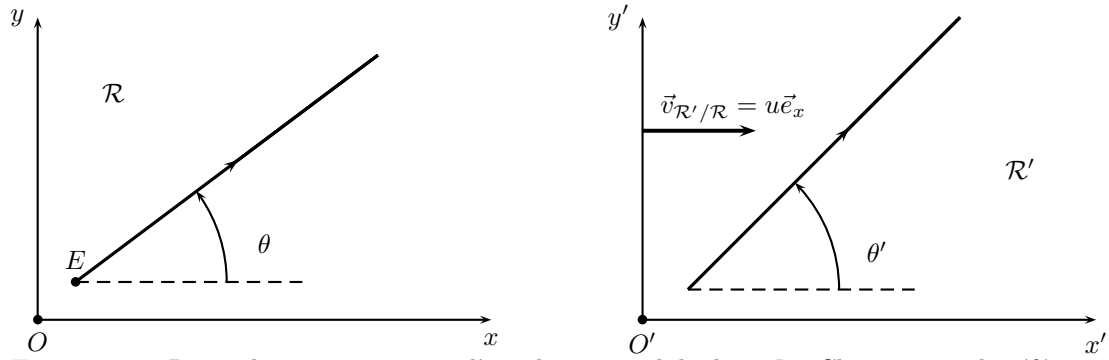
Lorsqu'un corps est en mouvement, la direction apparente de tout objet ou signal est modifiée. Dans le cas de la lumière, cet effet a été observé pour la première fois en 1680 par JEAN PICARD, bien que mal interprété. Il a fallu attendre les observations de JAMES BRADLEY en 1725 pour avoir une interprétation correcte de cette déviation.

Nous allons nous intéresser ici à l'influence de cet effet sur la luminosité apparente d'une étoile dont nous nous éloignons¹.

On considère deux observateurs, c'est-à-dire deux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' , qu'on suppose galiléens en translation l'un par rapport à l'autre à une vitesse constante $\vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = u\vec{e}_x$ avec $u > 0$. L'étoile E est immobile dans \mathcal{R} . L'observateur terrestre est attaché à \mathcal{R}' . Voir le schéma de la figure 16.

On introduit $\beta = \frac{u}{c}$ et $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Les quatre coordonnées spatio-temporelles d'un événement mesurées dans \mathcal{R} sont notées (x, y, z, t) et celles du même événement mesurées dans \mathcal{R}' sont notées (x', y', z', t') . Enfin les deux origines des repères coïncident pour l'événement $(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0) = (x', y', z', t')$.

¹. J'ai modifié un peu le sujet d'origine pour éviter toute confusion entre une situation d'éloignement ou de rapprochement de l'étoile.

FIGURE 16 – Rayon lumineux partant d'un objet immobile dans \mathcal{R} - Changement de référentiel

1. On considère un objet se déplaçant à une vitesse $\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y$ dans \mathcal{R} . On admettra que les composantes de la vitesse de ce même objet dans \mathcal{R}' sont données par :

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - \frac{uv_x}{c^2})} \quad v'_z = 0$$

Dans le cas d'un rayon lumineux que valent $\|\vec{v}\|$ et $\|\vec{v}'\|$? Dans le référentiel \mathcal{R} , ce rayon lumineux est situé dans le plan (Oxy) et fait un angle θ avec l'axe Ox . Dans quel plan se situe ce rayon dans le référentiel \mathcal{R}' ? Si l'on appelle θ' l'angle que fait ce rayon lumineux avec l'axe $O'x'$ dans le référentiel \mathcal{R}' , déterminer $\cos \theta'$ en fonction de θ et β . Il en résulte une déviation $\theta' - \theta$ du rayon lumineux selon qu'il est observé dans \mathcal{R} ou dans \mathcal{R}' . Cette effet est appelé *aberration de lumière*.

On s'intéresse maintenant à la puissance que reçoit un détecteur de la part de l'étoile E . Cela correspond à la puissance rayonnée par l'étoile E en direction du détecteur, appelée intensité énergétique, multipliée par l'angle solide sous lequel est vu le détecteur à partir d'un point situé à la surface de l'étoile E . Par définition, l'angle solide d'un cône de sommet A est $\Omega = \frac{S}{R^2}$ où S est la surface de la calotte sphérique interceptée par ce cône sur une sphère de centre A et de rayon R . Pour un cône de révolution de demi-angle au sommet $\alpha \ll \pi$, on constate que $\Omega \simeq \pi \alpha^2$. Ainsi l'intensité énergétique de l'étoile E , mesurée dans son référentiel propre \mathcal{R} est $I = \frac{\mathcal{P}}{\pi \delta \theta^2}$, et la même grandeur mesurée par l'observateur dans son référentiel \mathcal{R}' est $I' = \frac{\mathcal{P}'}{\pi \delta \theta'^2}$ où les angles $\delta \theta$ et $\delta \theta'$ sont les angles que fait le rayon lumineux avec Ox dans le référentiel \mathcal{R} et \mathcal{R}' .

2. À l'aide d'un développement limité à l'ordre deux, en $\theta = 0$, de la formule trouvée à la question précédente, montrer que :

$$\frac{\Omega'}{\Omega} = \frac{\delta \theta'^2}{\delta \theta^2} = \frac{1 + \beta}{1 - \beta}$$

3. Un photon est émis à la fréquence ν dans \mathcal{R} dans la direction $\theta = 0$, quelle est la fréquence mesurée ν' dans \mathcal{R}' ? Comment s'appelle cet effet ?

On considère que l'étoile E émet N photons, d'énergie moyenne ϵ , pendant un temps δt (ces grandeurs étant mesurées dans le référentiel \mathcal{R} de l'étoile), dans la direction du détecteur $\theta = 0$, et que ces N photons vont tous arriver sur le détecteur D , ce qui revient à dire qu'on néglige toute absorption le long de la ligne de visée. Dans le référentiel \mathcal{R}' , ces N photons arrivent pendant un temps $\delta t'$, et avec une énergie moyenne ϵ' .

4. Exprimer $\delta t'$ en fonction respectivement de δt et β , et ϵ' en fonction de ϵ et β . En déduire la relation liant \mathcal{P} et \mathcal{P}' , puissances du rayonnement émis par E respectivement vu dans \mathcal{R} et \mathcal{R}' .
5. En déduire le rapport des intensités énergétiques $\frac{I'}{I}$ de l'étoile E , selon que cette grandeur est mesurée dans \mathcal{R} ou \mathcal{R}' . Voit-on l'étoile E plus ou moins lumineuse lorsqu'elle s'éloigne de nous ?

L'effet de focalisation de la lumière lorsqu'une source est en mouvement s'appelle l'effet de phare.

41. Atteindre le centre de la Voie lactée

Le centre de la Voie Lactée (point C) est situé à une distance D d'environ 26 500 années-lumière de la Terre (point T). Le but de ce problème est de déterminer le temps et la quantité de carburant nécessaires pour atteindre le centre de la Voie Lactée avec un vaisseau spatial.

Pour décrire le mouvement rectiligne de ce vaisseau, on utilise la notion de *référentiel galiléen instantané* ou *référentiel tangent* : il s'agit, pour un instant donné, du référentiel galiléen dont la vitesse coïncide avec celle du vaisseau.

Sur la première phase du mouvement, du point T au point M à mi-parcours, le vaisseau a une accélération de valeur $a = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ dans son référentiel tangent. La seconde phase, du point M au point C , est décrite avec une décélération de même valeur. Voir la figure 17.

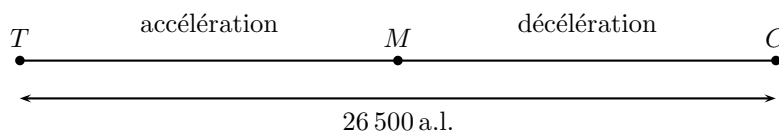


FIGURE 17 – Schéma du chemin du vaisseau spatial.

Formulaire :

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{\exp x - \exp -x}{2} & \cosh x &= \frac{\exp x + \exp -x}{2} \\ \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} & \cosh x &= \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}} \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} & \cosh^{-1} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \\ \sinh^{-1} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) & \tanh^{-1} x &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \end{aligned}$$

1. Dans un premier temps, nous allons nous placer dans un cas purement classique. Déterminer le temps nécessaire pour atteindre le centre de la Voie Lactée. Déterminer la vitesse du vaisseau au point M . Commenter.
2. Dans un second temps, nous nous plaçons dans le cadre de la relativité restreinte. Nous admettons que la vitesse du vaisseau par rapport à la Terre dans le référentiel du vaisseau v est donnée par $v = c \tanh \frac{at}{c}$, avec t le temps qui s'est écoulé dans le vaisseau. Déterminer une expression simple du facteur de LORENTZ γ en fonction de t . En déduire, en s'appuyant sur un raisonnement infinitésimal, le temps nécessaire dans le référentiel du vaisseau, pour parcourir la distance entre T et C .
3. Nous allons nous intéresser à la masse de carburant nécessaire à la propulsion du vaisseau. Nous ferons le calcul dans le cas de la loi de la Mécanique non relativiste. Nous supposons que le vaisseau éjecte le résidu de combustion à une vitesse proche de la vitesse de la lumière par rapport à lui². En déduire la masse m_{carb} de carburant nécessaire en fonction de la masse utile m_0 et du temps de trajet du vaisseau. Donner l'ordre de grandeur du rapport $\frac{m_{carb}}{m_0}$. Commenter.

2. Il est possible de l'atteindre dans le cas relativiste si tout est éjecté sous forme de lumière.