

Exercices : 18 - Rotation

1. Anneau de Saturne

On s'intéresse à un anneau qui se situe à la périphérie de Saturne. On souhaite savoir s'il est attaché à Saturne ou s'il est en orbite. Pour cela, on veut déterminer la relation entre la vitesse v de chaque couche de cet anneau et la distance R au centre de Saturne. Quelle affirmation est vraie ?

Proposition de réponses :

- a) Si v est proportionnel à R , alors cet anneau est attaché à Saturne, tandis que si v^2 est proportionnel à $1/R$, alors cet anneau est en orbite.
- b) Si v est proportionnel à R^2 , alors cet anneau est attaché à Saturne, tandis que si v^2 est proportionnel à $1/R$, alors cet anneau est en orbite.
- c) Si v est proportionnel à R , alors cet anneau est attaché à Saturne, tandis que si v^2 est proportionnel à $1/R^2$, alors cet anneau est en orbite.
- d) Si v est proportionnel à R^2 , alors cet anneau est attaché à Saturne, tandis que si v^2 est proportionnel à $1/R^2$, alors cet anneau est en orbite.

2. Énergie cinétique de la Terre

Que vaut en ordre de grandeur (sous forme d'une puissance de 10) le rapport entre l'énergie cinétique de rotation de la Terre autour de son axe (dans le référentiel géocentrique) et son énergie cinétique de rotation autour du Soleil (dans le référentiel héliocentrique) ?

Proposition de réponses :

- a) 10^0 b) 10^{-2} c) 10^{-4} d) 10^{-6}

3. Monter un trottoir

Un individu cherche à monter en monoroue, de rayon R , un trottoir de hauteur $H < R$. On considère seulement le monoroue de masse M . On admet que le moteur exerce une force horizontale \vec{F} sur l'axe, voir le schéma de la figure 1. Quelle est la norme de la force F nécessaire pour monter le trottoir en monoroue ?

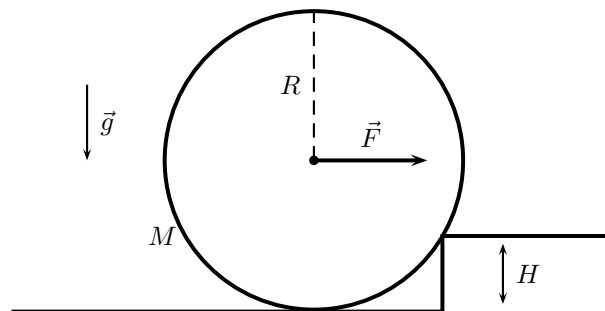


FIGURE 1 – Monoroue tentant de monter un trottoir

Proposition de réponses :

- a) $F = Mg$ b) $F = Mg \frac{H}{R-H}$ c) $F = Mg \frac{2R-H}{R-H}$ d) $F = Mg \frac{\sqrt{H(2R-H)}}{R-H}$

4. Balance à fléau

Une tige horizontale (de masse uniformément répartie) de longueur $L = 10$ m et de masse $m = 20$ kg peut pivoter autour d'un axe horizontal situé en un point O . On accroche une masse m à l'extrémité gauche et une masse $2m$ à l'extrémité droite, comme indiqué sur la figure 2. À quelle distance x le point O se situe-t-il du centre de la tige ?

Propositions de réponses :

- a) $x = 1,67$ m b) $x = 1,40$ m c) $x = 1,25$ m d) $x = 2,50$ m

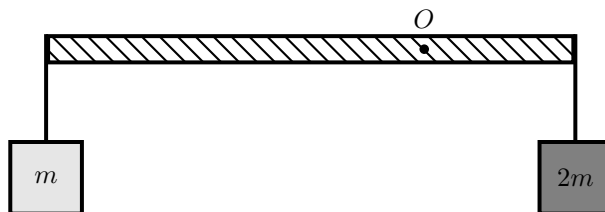


FIGURE 2 – Balance à fléau

5. Oscillations d'un angle droit

On considère le système de deux barres identiques représenté sur la figure 3. L'extrémité d'une barre est accrochée à un ressort de raideur k . La liaison pivot en O est parfaite. La position d'équilibre stable du système correspond au cas où la seconde barre est verticale. On note m la masse de chaque tige, ℓ leur longueur, $J = \frac{1}{3}m\ell^2$ leur moment d'inertie par rapport à leur extrémité. Le ressort est caractérisé par une constante de raideur k et une longueur à vide ℓ_0 .

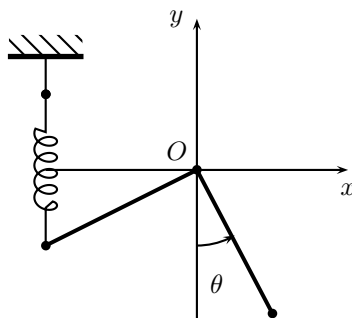


FIGURE 3 – Petites oscillations d'un angle droit

1. Déterminer l'allongement du ressort lorsque le système est à l'équilibre.
2. Étudier les oscillations de petit angle θ autour de la position d'équilibre.
3. Dessiner le portrait de phase de cet oscillateur. Discuter.

6. Régulateur

L'ensemble d'une machine tournante et de son volant d'inertie est assimilable à un solide S mobile autour d'un axe Δ par rapport auquel son moment d'inertie est J . Le volant d'inertie est une pièce relativement lourde présente sur l'axe de rotation de la machine qui va permettre de réguler la vitesse de rotation. De telles pièces sont présentes dans la vie courante dans une machine à laver. À la date $t = 0$, on applique, à la machine tournante, un couple moteur $C(t)$. On note $\omega(t)$ la vitesse de rotation de la machine et on précise que des frottements fluides agissent au niveau de l'axe. Ils sont modélisés par un couple résistant $h\omega$.

1. Dans un premier temps, le couple moteur appliqué est indépendant du temps : $C(t) = C_0$. Déterminer l'évolution de la vitesse de rotation ω en fonction du temps.

À la suite de défauts de fabrication (pièce tournante excentrée par exemple comme cela peut être le cas de la roue d'une voiture qui n'est plus équilibrée), le couple moteur est souvent modulé. Il suit une loi du type :

$$C(t) = C_0 (1 + a \cos \Omega t)$$

où a est le taux de modulation inférieur à 1.

2. Montrer que la vitesse de rotation de la machine est modulée suivant une loi semblable à celle-ci et possède un taux de modulation b que l'on exprimera en fonction des données.
3. Que convient-il de faire si l'on désire une vitesse de rotation aussi constante que possible ?

7. Effet d'une poulie

On considère le dispositif de la figure 4 où une masse M est entraînée sur un plateau horizontal par la chute verticale d'une masse m . On néglige tous les frottements dans ce problème, à savoir les frottements de M et m avec l'air et les frottements de M avec le plateau qui la supporte. Comme on peut le voir sur le schéma de la figure 4, la transformation d'un mouvement vertical en un mouvement horizontal est réalisé grâce à une poulie et un fil inextensible que l'on supposera toujours tendu au cours de l'étude. On suppose de plus que le fil ne glisse pas sur la poulie - le contraire ne serait pas très réaliste -. Une telle hypothèse signifie qu'à tout moment la vitesse d'un point A du fil en contact avec la poulie est égale à la vitesse du point B de la périphérie de la poulie qui coïncide avec A . Ceci impose nécessairement qu'il existe des frottements entre la poulie et le fil. Mais dans une situation comme celle que nous venons de décrire, il faut savoir que la puissance des forces de frottements est nulle. Il n'y a donc pas de dissipation d'énergie liée aux frottements entre le fil et la poulie. On note ω la vitesse de rotation de la poulie par rapport à son axe et J son moment d'inertie, le rayon de la poulie est noté R .

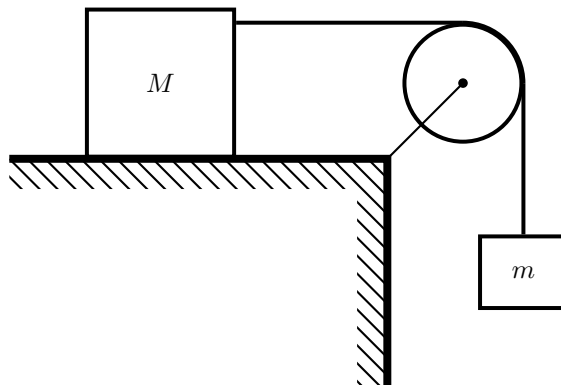


FIGURE 4 – Entraînement par un contre-poids

1. Établir la relation qui existe entre la vitesse v de translation des masses m et M et la vitesse de rotation ω de la poulie. En déduire la relation entre les accélérations linéaire et angulaire.
2. Déterminer l'expression de l'accélération des masses m et M .
3. Déterminer l'expression des tensions T_1 et T_2 exercées par le fil sur les masses m et M .
4. Comment évoluent les résultats établis précédemment lorsque l'on considère que l'inertie de la poulie est négligeable ? Commenter.

8. Basculement d'une planche

On considère une planche parallélépipédique homogène de masse M et de longueur L . Elle est susceptible de tourner autour d'un axe horizontal Δ passant par son centre d'inertie. La liaison au niveau de l'axe Δ est supposée parfaite. On dépose à l'une des deux extrémités une petite pièce de masse m de largeur $a \ll L$, voir le schéma de la figure 5. On tient l'ensemble à l'horizontal et on lâche le tout sans vitesse initiale. On observe que la petite pièce commence à glisser lorsque l'angle dont a tourné l'ensemble est de $9,0^\circ$. On donne l'expression du moment d'inertie de la planche par rapport à l'axe Δ : $J = \frac{1}{12}ML^2$. On donne $M = 100\text{ g}$, $m = 10,0\text{ g}$, $L = 1,00\text{ m}$ et $g = 9,8\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.



FIGURE 5 – Basculement d'une planche et glissement

1. Déterminer le coefficient de frottement statique f_s entre la pièce et la planche.
2. Calculer la vitesse de rotation de la planche au moment où le glissement de la petite pièce s'amorce.

9. Équilibre et petits mouvements

On considère un disque D de rayon a mobile sans frottements autour de son axe horizontal Ox . On note J son moment d'inertie par rapport à cet axe. Une masse M est fixée à la périphérie de ce disque. On note θ l'angle entre la verticale et la position de M . Un fil inextensible et sans masse est enroulé sur le disque. À l'extrémité de ce fil, pend une masse m . On néglige les frottements avec l'air. Voir le schéma de la figure 6.

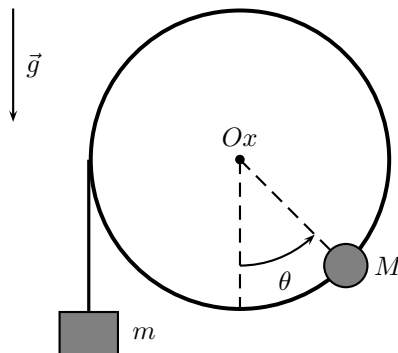


FIGURE 6 – Disque déséquilibré

1. Établir l'équation différentielle du second ordre en θ relative au mouvement du système.
2. Déterminer les positions d'équilibre.
3. Étudier la stabilité de ces positions d'équilibre et déterminer la pulsation des petites oscillations du système au voisinage de l'une d'elles.

10. Petit train électrique

On considère un plateau horizontal tournant sans frottement autour d'un axe Oz . Sur ce plateau se trouvent des rails formant un carré de centre O et de côté $2a$. Le moment d'inertie de cet ensemble par rapport à Oz est noté J . Sur ces rails roule un petit train électrique de masse m . À l'instant initial, tout est immobile.

1. Déterminer l'angle dont a tourné le plateau lorsque le train démarre et parcourt un tour du carré.

11. Tige glissant sur un plan horizontal

En mécanique, il existe des théorèmes particuliers appelés théorèmes de KOENIG (hors programme et admis pour cet exercice) qui permettent les calculs respectifs du moment cinétique et de l'énergie cinétique d'un système dans un référentiel d'étude par sommation de deux contributions distinctes : d'une part, celle dans le référentiel barycentrique du système et, d'autre part, celle dans le référentiel d'étude associée uniquement à un point matériel fictif situé au centre d'inertie du système et de masse égale à la masse totale du système. Le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* est un référentiel qui a pour origine le centre d'inertie G du système Σ et qui est en translation par rapport au référentiel galiléen qui sert de référence dans l'étude. Comme la translation de ce référentiel n'est pas nécessairement rectiligne et uniforme, \mathcal{R}^* n'est pas nécessairement galiléen. Ces théorèmes sont :

$$E_{c,\Sigma/\mathcal{R}} = E_c^* + \frac{1}{2} m \vec{v}_{G/\mathcal{R}}^2$$

$$\vec{L}_{O,\Sigma/\mathcal{R}} = \vec{L}^* + \overrightarrow{OG} \wedge m \vec{v}_{G/\mathcal{R}}$$

Une tige homogène AB , de longueur l et de masse m , repose en A sur un sol horizontal. Sa position dans le plan vertical est repérée par l'angle α qu'elle fait avec l'horizontale. On néglige les frottements entre la tige et le sol qui restent toujours en contact. Le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe Gz est $J = ml^2/12$. À la date $t = 0$, la tige est abandonnée sans vitesse dans la position $\alpha = \alpha_0$. Voir le schéma de la figure 7.

1. Établir une équation différentielle du premier ordre satisfaite par α .
2. Exprimer sous la forme d'une intégrale le temps de chute de la tige.
3. On a admis que, lors de son mouvement, la tige restait en contact avec le sol à tout instant. Que faudrait-il faire pour valider cette hypothèse ? Le calcul n'est pas demandé.

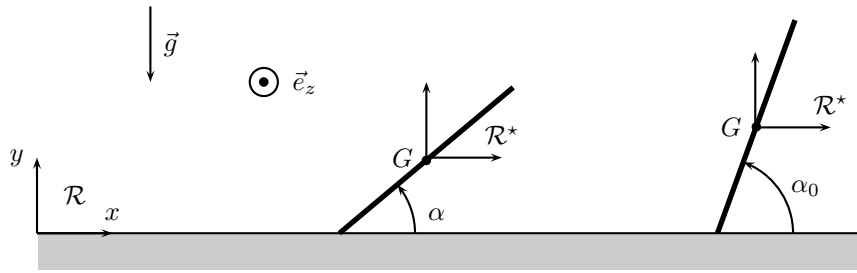


FIGURE 7 – Tige qui glisse sur le sol

12. Rupture au cours de sa chute d'une tige qui tombe sur le sol

Une tige AB , homogène, de masse m , de longueur b , posée sur le sol en A , tombe à partir de la position verticale. Nous supposons que, pendant la chute, le point A reste fixe et la tige reste dans le plan vertical (Axy) fixe. Le sol exerce sur la tige en A une action mécanique réductible à un glisseur (vecteur, pas de moment) en A . Pendant la chute, la portion de tige AP exerce sur la portion PB des actions mécaniques qui se traduisent par une résultante et un moment en P notés respectivement $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$ et $\vec{M}_P = \mathcal{M}_P \vec{e}_z$ (voir figure 8).

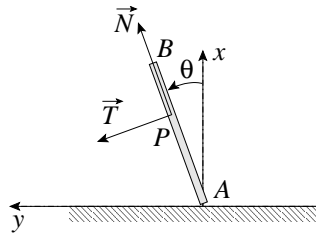


FIGURE 8 – Chute de la tige

Le moment d'inertie d'une tige homogène de masse m et de longueur b par rapport à un axe Δ_G passant par son centre G et perpendiculaire à la tige est $J = mb^2/12$ et, par théorème d'HUYGENS, on peut déduire celui par rapport à tout axe Δ parallèle à Δ_G et distant de δ en ajoutant la contribution $m\delta^2$. On admet que le théorème du moment cinétique s'écrit dans le référentiel barycentrique d'un système comme si ce dernier était galiléen (même si ce n'est pas le cas), pourvu qu'on l'applique par rapport à son centre d'inertie.

1. Exprimer \vec{T} et \vec{M}_P en fonction de l'angle θ et de la longueur $x = AP$.
2. On pose $T_0 = \|\vec{T}\|$ et $\mathcal{M}_{P0} = \|\vec{M}_P\|$; tracer l'allure de T_0 et de \mathcal{M}_{P0} en fonction de x , pour une valeur de θ donnée.
3. En général, une cheminée d'usine que l'on abat se brise avant de toucher le sol. En admettant la validité du modèle précédent, préciser en quel point on peut prévoir cette cassure.

13. Freinage entre deux disques

Deux disques homogènes D_1 (centre O_1 , masse m_1 et rayon R_1) et D_2 (centre O_2 , masse m_2 et rayon R_2) tournent à vitesse angulaire constante positive ω_{10} et ω_{20} autour de leurs axes respectifs (Δ_1) et (Δ_2) passant respectivement par O_1 et O_2 et parallèles. Les liaisons d'axe sont parfaites. On rapproche les axes (Δ_1) et (Δ_2) jusqu'à ce que les disques se touchent. Après un certain temps, pendant lequel les axes (Δ_1) et (Δ_2) sont maintenus fixes, les deux disques roulent sans glisser l'un sur l'autre. Voir le schéma de la figure 9. Le moment d'inertie d'un disque homogène de masse m et de rayon R par rapport à son axe de symétrie de révolution est $J = \frac{1}{2} m R^2$.

1. Calculer, dans l'état final, les vitesses angulaires respectives Ω_1 et Ω_2 de D_1 et D_2 .
2. Calculer la variation d'énergie cinétique du système formé par les deux disques entre les instants initial et final.

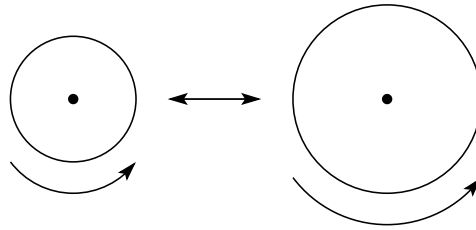


FIGURE 9 – Le système des deux disques

14. Chaîne de pendules pesants couplés - Soliton

Une chaîne linéaire est constituée de pendules pesants identiques, de même axe horizontal Ox , régulièrement espacés de a . Soit m la masse du pendule, I_x son moment d'inertie par rapport à l'axe Ox et d la distance de son centre d'inertie à l'axe. On désigne par g l'intensité du champ de pesanteur, voir la photographie de la figure 10.

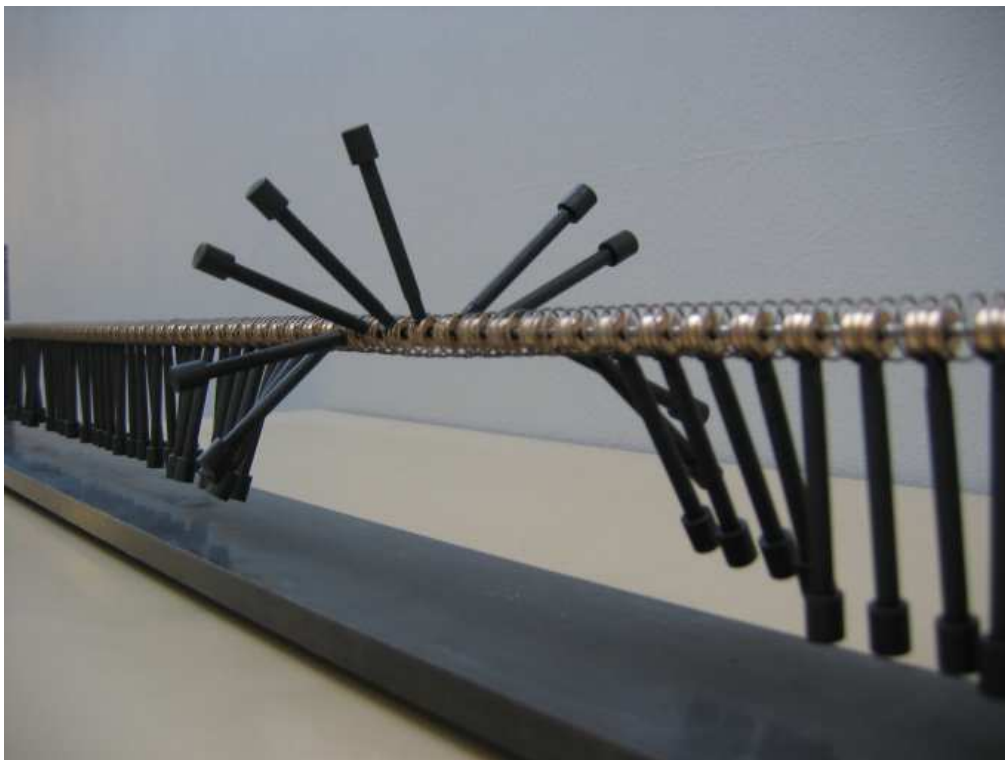


FIGURE 10 – Propagation d'une onde le long d'une chaîne de pendules couplés

Les pendules sont couplés par un fil de torsion confondu avec l'axe de rotation (en réalité, un ressort spiral enroulé sur et axe) et de constante de rappel C pour la longueur a . Dans la position d'équilibre, tous les pendules sont orientés verticalement vers le bas (position d'équilibre stable). On désigne par $\theta_n(t)$ l'angle de rotation autour de l'axe du pendule de rang n compté à partir de la position d'équilibre. Ainsi l'angle entre les deux pendules successifs de rang n et $n+1$ est $\theta_{n+1} - \theta_n$. On notera :

$$\omega_0^2 = \frac{mgd}{I_x} \quad \text{et} \quad \omega_1^2 = \frac{C}{I_x}$$

1. Écrire l'équation du mouvement du pendule de rang n . Linéariser cette équation en supposant $\theta_n \ll \pi \forall n$.
2. On cherche des ondes sinusoïdales progressives de la forme $\underline{\theta}_n(t) = \underline{A} \exp[i(kna - \omega t)]$. Trouver la relation de dispersion $\omega(k)$ correspondante. Pour quelles valeurs de ω y a-t-il propagation ?
3. Montrer que le passage de la distribution discrète de pendules précédente à une distribution continue, conduit à l'équation de propagation de SINE-GORDON suivante :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$$

où $\theta = \theta(x, t)$ est l'angle de torsion local et $c_0 > 0$ est une constante que l'on exprimera en fonction de paramètres du problème et dont on donnera le sens physique.

4. Que devient cette équation pour de faible angle de torsion $\theta(x, t) \ll \pi$? Quelle est alors la relation de dispersion $k(\omega)$ des ondes progressives sinusoïdales ?
5. Montrer que l'équation de SINE-GORDON obtenue à la question 4. admet des solutions exactes de la forme :

$$\theta(x, t) = 4 \arctan \left[\exp \left(\pm \frac{\omega_0(x - vt)}{\sqrt{c_0^2 - v^2}} \right) \right]$$

pour toute valeur de v telle que $|v| < c_0$.

6. Quelle est la particularité essentielle de ce type de solutions appelée *soliton* ou *onde solitaire* ?
7. Étudier $\theta(s)$ où $s = x - vt$, de $s \rightarrow -\infty$ à $s \rightarrow +\infty$. Décrire qualitativement à un instant t donné, la forme de la chaîne des pendules correspondante. À quelle propriété géométrique est associée le signe $+$ ou $-$ dans l'expression de $\theta(x, t)$?
8. Montrer que l'énergie mécanique E_m d'une solution quelconque $\theta(x, t)$ de l'équation de SINE-GORDON est donnée par :

$$E_m = \frac{I_x}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \frac{c_0^2}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \omega_0^2 (1 - \cos \theta) \right] dx$$

9. Évaluer pour un soliton de la forme donnée à la question 5. les trois contributions à cette énergie.
10. Montrer que E_m se met sous la forme $E_m = \gamma m_0 c_0^2$ où $\gamma = (1 - v^2/c_0^2)^{-1/2}$ et m_0 est une constante ayant la dimension d'une masse que l'on déterminera à partir de paramètres du problème.

15. Freinage d'un cylindre

On dispose d'un cylindre de rayon R qui peut tourner autour d'un axe fixe Oz , son moment d'inertie est noté J . Initialement, le cylindre possède une vitesse de rotation $\omega_0 > 0$. En dessous du cylindre se trouve un tapis roulant qui possède la vitesse $\vec{v}_1 = v_1 \vec{e}_x$ avec $v_1 > 0$, voir le schéma de la figure 11. Le tapis possède un système mécanique capable de le maintenir à la vitesse \vec{v}_1 dans toutes les circonstances. À la date $t = 0$, on monte le tapis roulant au contact du cylindre et on applique une force \vec{F}_0 verticale dirigée vers le haut qui plaque le tapis roulant au contact du cylindre. Le frottement entre le tapis et le cylindre est caractérisé par un coefficient de frottement μ . Dans un premier temps, on suppose que $R\omega_0 > v_1$.

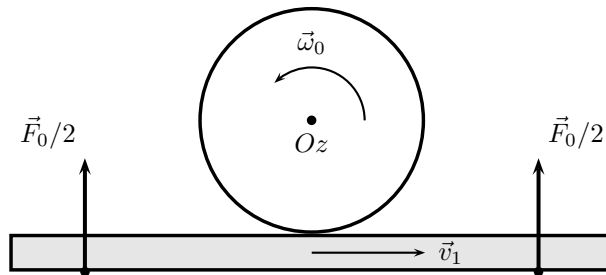


FIGURE 11 – Freinage d'un cylindre par un tapis roulant

1. Faire une analyse qualitative du mouvement du cylindre.
2. Déterminer la durée nécessaire pour que le cylindre arrête de glisser et se trouve en mouvement de roulement sans glissement.
3. Que se passe-t-il si $R\omega_0 < v_1$?

16. Mesure de la constante de gravitation

Cet exercice décrit le principe de la mesure de la constante gravitationnelle $\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ effectuée par CAVENDISH en 1798. On considère une barre de moment d'inertie J accrochée par son centre à un fil de torsion de constante de torsion C , la longueur de la barre est notée $2a$. À chaque extrémité de la barre, on trouve une masse M de plomb. Voir le schéma de la figure 12. L'ensemble de la tige, des masses M et du fil de torsion constitue un pendule de torsion qui se trouve à l'équilibre pour une position repérée par l'angle θ_0 repérée par l'angle par rapport à l'axe Ox . On place ensuite une seconde barre fixe de longueur $2a$ sur l'axe Ox . À l'extrémité de cette barre, sont présentes deux masses identiques m , voir le schéma à droite de la figure 12 où on montre une vue du dessus. Sous l'effet de l'attraction gravitationnelle entre M et m , le pendule de torsion quitte sa position d'équilibre. On repère sa position avec l'angle θ . On rappelle qu'un fil de torsion exerce un couple de rappel $-C\alpha$ si on le tord d'un angle α par rapport à sa position naturelle de repos où il n'est pas tordu. Compte tenu de la décroissance de la force de gravitation avec la distance, on ne prendra en compte que l'interaction entre les masses M et m situées du même côté de la barre.

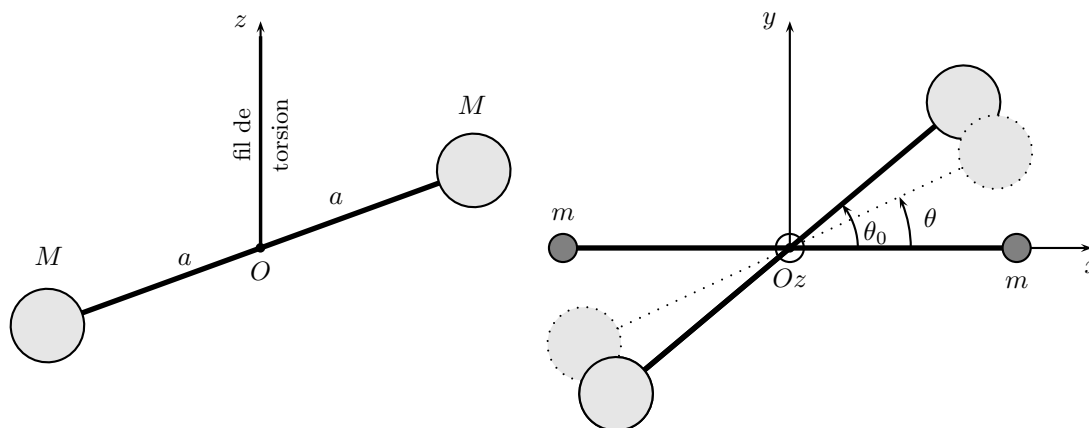


FIGURE 12 – Dispositif de CAVENDISH

1. Montrer que la mesure de la nouvelle position d'équilibre du pendule de torsion permet de mesurer la constante gravitationnelle \mathcal{G} .
2. La précision des mesures n'étant pas suffisante pour obtenir une détermination correcte de la constante de gravitation, on enregistre les oscillations du pendule autour de la position d'équilibre. On effectue l'analyse de FOURIER du signal enregistré. Montrer que la fréquence des oscillations permet de mesurer la constante \mathcal{G} .

17. Cerceau tournant

Un point matériel de masse M formant un anneau est astreint à se déplacer sans frottement autour d'un cerceau de centre C et de rayon R situé dans un plan vertical et qui tourne à la vitesse angulaire constante $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ autour d'un axe vertical (Oz) tangent au cerceau (cf. figure 13). On appelle $(Oxyz)$ un référentiel galiléen et on note $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ la base polaire rigidement liée au cerceau. On appelle encore g l'accélération de la pesanteur. Enfin, un ressort de raideur k et de longueur à vide négligeable relie le point matériel à l'axe de rotation ; son point d'attache sur cet axe y glissant sans frottement, on admettra que le ressort reste en permanence orthogonal à l'axe de rotation. On appelle φ l'angle formé par CM relativement à l'horizontale. On posera $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$.

1. Déterminer l'équation définissant les positions d'équilibre relatif ; on donnera deux méthodes.
Établir aussi une équation différentielle du premier ordre vérifiée par φ . On introduira les conditions initiales $\varphi(t=0) = \varphi_0$ et $\dot{\varphi}(t=0) = 0$.
2. A quelle condition (sur ω) peut-on négliger les effets de la pesanteur ? Que deviennent alors les positions d'équilibre ? Étudier leur stabilité. On se placera pas dans ce cas dans la suite.
3. Dans le cas des oscillations autour de $\varphi = \pi$, quelle relation lie la période des oscillations et la position initiale ?
4. On suppose maintenant que $\omega = \omega_0$. Déterminer la nature du mouvement de M .
5. Si on lance le point matériel à partir de $\varphi = 0$, à quelle condition pourra-t-il parcourir le cercle entier ?

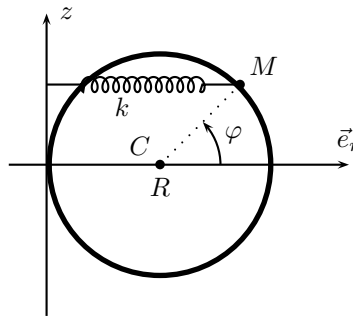


FIGURE 13 – Cerceau tournant

18. Rotation et forces d'inertie

Une tige mince homogène OA de masse m et de longueur l est soudée à un axe vertical Oz avec lequel elle fait un angle α constant. L'axe tourne à la vitesse angulaire constante ω par rapport au référentiel du laboratoire considéré comme galiléen. Voir la figure 14.

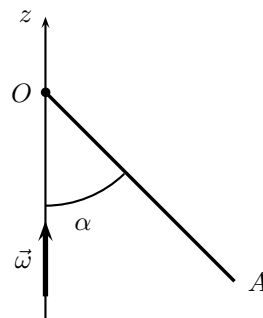


FIGURE 14 – Tige tournante

1. Montrer que l'ensemble des forces d'inertie s'exerçant sur la tige dans son référentiel tournant est équivalent à une force unique appliquée en un point que l'on précisera.

19. Fermeture d'une portière

Une voiture démarre avec une accélération constante $\vec{\gamma}$, l'une de ses portières étant initialement ouverte à 90° . On admet que la portière correspond à la répartition uniforme d'une masse m sur une plaque de largeur a et que son moment d'inertie par rapport à l'axe de ses gonds est $J = \frac{1}{3} m a^2$. La liaison d'axe portière-voiture est supposée parfaite.

1. Déterminer la vitesse de rotation de la portière au moment où elle se referme.