

Exercices : 02 - Analyse de Fourier.

— Solutions —

A. Signaux périodiques et séries de Fourier

1. Multiplication par un signal créneau

Réponses : $\frac{1}{2p+1}, (2p+1)f_0 \pm \frac{\omega}{2\pi}$.

2. Vibration quasi-monochromatique

Réponses : $A_0 \exp(i2\pi f_0 t)(1 + \cos \pi \Delta f t)$; si $\Delta f \ll f_0$ $\cos \pi \Delta f t$ est très lent devant $\cos 2\pi f_0 t$.

3. Non linéarité d'un amplificateur

Réponses : $[0; f_0; 2f_0; 3f_0]$, $[0; f_0 \pm \frac{\Delta f}{2}; 2f_0 \pm \Delta f; 3f_0 \pm \frac{3\Delta f}{2}]$.

4. Effet d'un filtre passe-bande

Réponses : $H = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2(\frac{f}{f_0}-\frac{f_0}{f})^2}}$, très sélectif $\Delta f_{1/2} = \frac{f_0}{Q}$, $f_e = f_0$, $\Delta f_{1/2} \rightarrow 0$, $f_e = f_0$ ou $f_e \pm f_m = f_0$, oui
fondamental sinusoïdal à 1200 Hz, créneau : sortie sinusoïdale si $f_e = 1200$ Hz, 400 Hz, 240 Hz, 80 Hz et 48 Hz,
dent de scie : sortie sinusoïdale si $f_e = 1200$ Hz, 600 Hz, 400 Hz, 300 Hz, 240 Hz, 200 Hz, 150 Hz, 120 Hz, 100 Hz,
80 Hz, 75 Hz, 60 Hz, 50 Hz, 48 Hz, 40 Hz.

5. Filtrage d'une tension créneau dissymétrique

Réponses : $u_e^{moy} = \alpha E = 4$ V, $T_0 = 0,02$ s, harmoniques d'amplitude décroissante $n = 3$ et $n = 6$ sont absentes du spectre car $\alpha n = 1$ ou 2 pour ces deux harmoniques, il manque les fréquences 150 Hz et 300 Hz, $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1+jRC\omega}$, $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$ d'où $R = \frac{1}{2\pi C f_c} = 16$ kΩ, c'est un filtre passe-bas, il laisse la moyenne intacte, la fréquence fondamentale voit son amplitude divisée par environ 5 comme elle était d'environ E/π , on est un peu en dessous du volt, la fondamentale est aussi déphasée, l'harmonique suivante est celle pour $n = 2$, sa fréquence est de 100 Hz, $|\underline{H}| \simeq \frac{1}{10}$ elle est fortement atténuée, elle est de l'ordre de 0,2 V, les harmoniques suivantes sont de contribution nettement moindre encore, finalement la tension de sortie est une tension sinusoïdale de fréquence f_0 d'amplitude environ 1 V et de moyenne 4 V avec une petite oscillation résiduelle à 100 Hz, on peut réaliser un passe-bande en mettant en série une bobine pour faire un circuit RLC série en prenant la tension de sortie aux bornes de R , si la fréquence centrale est 100 Hz, on récupère une oscillation sinusoïdale à cette fréquence, à 150 Hz on ne récupère rien car cette harmonique n'est pas présente dans le spectre du signal d'entrée puisque $\alpha n = 1$.

6. Associer un signal et un spectre

Réponses : Les signaux de valeur moyenne d'évidence non nulle sont u_2 , u_3 et u_4 et seuls trois spectres présentent une composante continue non nulle : \hat{v}_a , \hat{v}_c et \hat{v}_d . On doit donc associer ces trois signaux à ces trois spectres ! On constate que u_2 présente des discontinuités donc comporte des harmoniques de rang élevé en plus grande importance que pour u_3 qui n'a que des discontinuités de pentes et que u_4 qui n'a pas de discontinuités. De plus, on voit que le signal u_4 semble être composé de la somme de deux sinusoïdes principales (en plus de la composante continue). Finalement $\hat{u}_2 = \hat{v}_d$, $\hat{u}_3 = \hat{v}_c$ et $\hat{u}_4 = \hat{v}_a$. Il reste à traiter les trois signaux restants u_1 , u_5 et u_6 . Ce dernier est le seul de moyenne nulle présentant des discontinuités, donc il présente le spectre le plus riche qui est \hat{v}_e (avec seulement les harmoniques de rang impair par propriété de type $s(t+T/2) = -s(t)$...). Enfin, le signal u_5 est plus déformé par rapport au fondamental seul que le signal u_1 , donc son spectre est plus riche et on peut conclure : $\hat{u}_6 = \hat{v}_e$, $\hat{u}_5 = \hat{v}_f$ et $\hat{u}_1 = \hat{v}_b$. Tous les signaux sont *a priori* périodiques de fréquence fondamentale 1 kHz (vu les raies dessinées par l'élève...). L'élève aurait pu préciser les périodes de 1 ms (environ) sur les figures des signaux temporels... Attention, un signal avec des discontinuités contient de nombreux harmoniques de rang élevé mais pas forcément de forte amplitude ! Le premier filtre qui donne \hat{v}_g est probablement un filtre passe-bande non linéaire de fréquence centrale $f_0 \simeq 4,5$ kHz car les basses et hautes fréquences sont atténuées et il existe de nouvelles composantes harmoniques ! Le second filtre doit être de type passe-bas linéaire de fréquence de coupure de l'ordre de 3 ou 4 kHz (atténuation uniquement dans les plus hautes fréquences, sans ajout de composantes). Le troisième filtre doit être de type passe-haut linéaire d'ordre assez élevé de fréquence de coupure autour de 1 kHz (suppression de la composante continue et pas d'ajout de composante). On peut aussi imaginer obtenir le même spectre final avec un filtre passe-bande à bande bien plus large que celle rendue sur le graphe de \hat{v}_i (on ne voit alors pas l'atténuation aux plus hautes fréquences).

7. Détection de signaux micro-ondes

Réponses : Un filtre linéaire ne fournit un signal constant non nul que si il ne laisse passer qu'une composante continue existante (filtrage passe-bas moyenneur). Or, celle-ci ne donne pas du tout une image de l'amplitude A du signal sinusoïdal. L'opération de mesure directe de A par filtrage linéaire est donc impossible. La représentation graphique du signal de sortie est effectuée sur la figure 1 (le signal d'entrée $e(t)$ est en pointillés, avec choix d'origine des temps à son maximum) :

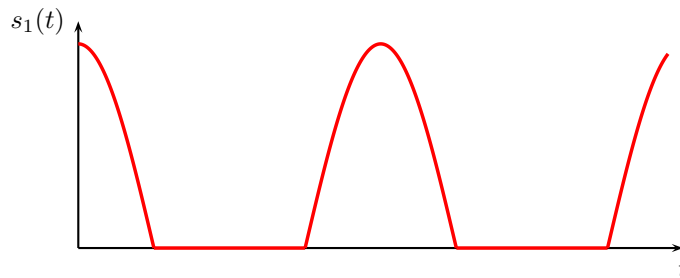


FIGURE 1 – Redressement mono-alternance

On parle de *redresseur simple* (ou *redresseur simple alternance*) puisque seules les arches sinusoïdales positives sont conservées (sinon le signal est nul). Le signal redressé a la même fréquence f que la sinusoïde d'entrée. Son spectre comprend les trois premières raies suivantes : une composante constante (fréquence nulle) correspondant à la valeur moyenne non nulle, une composante fondamentale de fréquence f et une composante à l'octave de fréquence $2f$. On voit que l'opérateur est non linéaire puisqu'il y a génération d'harmoniques à sa traversée (modification des fréquences présentes dans le spectre). On peut faire appel à un filtre passe-bas en tant que moyenneur sous réserve que sa fréquence de coupure f_c vérifie $f_c \ll f$ (où $f = 1/T$ est la fréquence du fondamental). Pour le signal $s_1(t)$ associé à la sinusoïde redressée en simple alternance, la valeur moyenne (indépendante du choix d'origine des temps) est $D = \langle s_1(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} A \cos(\omega t) dt$. Le calcul est élémentaire (en exploitant la parité de la fonction intégrée) et il vient $\frac{D}{A} = \frac{1}{\pi}$. En pratique, il est possible d'amplifier directement cette valeur en utilisant un filtre de gain statique de valeur adaptée (supérieure à l'unité bien sûr !). En sortie du redresseur bi-alternance, le signal est composé d'arches de sinusoïdes redressées, voir la figure 2.

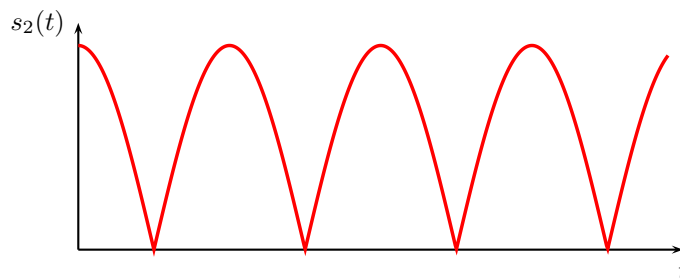


FIGURE 2 – Redressement bi-alternance ou double-alternance

Du coup, la période de ce signal de sortie $s_2(t)$ est la moitié de celle du signal d'entrée, ce qui fait que ses composantes spectrales sont aux fréquences 0 (moyenne non nulle), $2f$, $4f$, $6f$ et ainsi de suite... Les raies spectrales ne sont donc pas placées de façon exactement identique à celles du signal redressé en simple alternance. On reprend le filtre moyenneur antérieur. Cette fois-ci, il va permettre de récupérer une valeur moyenne plus élevée et le gain statique pourra être choisi plus faible. En plus, l'ondulation résiduelle sera plus faible car le fondamental (fréquence $2f$) est davantage dans la bande atténuée du filtre (par rapport au cas du signal $s_1(t)$ où il est seulement à la fréquence f). La valeur moyenne du signal de sortie est à présent $D' = \langle s_2(t) \rangle = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} A \cos(\omega t) dt = 2 \langle s_1(t) \rangle = 2D$ donc $\frac{D'}{A} = 2 \frac{D}{A} = \frac{2}{\pi}$. Le redressement bi-alternance du signal sinusoïdal double la valeur moyenne par rapport au redressement simple alternance.

8. Étude d'un filtre passif

Réponses : À basse fréquence, un condensateur est équivalent à un circuit ouvert et, à haute fréquence, à un fil. Les schémas équivalents à basse et haute fréquences sont évidents. On remarque que dans les deux cas, $s = 0$. Le filtre rejette les basses et les hautes fréquences et on peut s'attendre à ce qu'il s'agisse d'un passe-bande d'ordre 2. Puisque $i_s = 0$, on utilise le pont diviseur de tension en sortie : $\underline{H} = \frac{v}{e} = \frac{\underline{Z}_{R\parallel C}}{R + \underline{Z}_C + \underline{Z}_{R\parallel C}}$ soit $\underline{H} = \frac{jRC\omega}{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2}$. On vérifie sans problème qu'il s'agit d'un filtre passe-bande en accord avec l'étude asymptotique de la première question. On met la fonction de transfert du filtre sous forme canonique : $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$ avec $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, $H_0 = \frac{1}{3}$ et $Q = \frac{1}{3}$. ω_0 correspond au gain maximal du filtre : c'est la fréquence de résonance (ou centrale). Les fréquences de coupure ω_1 et ω_2 à -3 dB correspondent au gain maximal divisé par $\sqrt{2}$. Elles vérifient donc le

trinôme $X^2 + \frac{\omega_0}{Q}X - \omega_0^2 = 0$ Ainsi, ω_1 ou $2 = \omega_0 \frac{\pm 1 + \sqrt{4Q^2 + 1}}{2Q}$. Le facteur de qualité est alors, par définition, $\frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = Q = \frac{1}{3}$. Le filtre est peu sélectif. On peut aussi calculer les valeurs numériques des fréquences : $f_0 = 1,0$ kHz, $f_1 = 300$ Hz et $f_2 = 3,3$ kHz. Aux basses fréquences (BF), $\underline{H}_{BF} = \frac{j\omega}{\omega_0}$ donc $G_{dB,BF} = 20 \log \frac{\omega}{\omega_0}$ et $\varphi_{BF} = \frac{\pi}{2}$. À la résonance ω_0 , $\underline{H}_{rs.} = \frac{1}{3}$ donc $G_{dB,rs.} = -20 \log 3 = -4,7$ dB et $\varphi_{rs.} = 0$. Aux hautes fréquences (HF), $\underline{H}_{HF} = -\frac{j\omega_0}{\omega}$ donc $G_{dB,HF} = -20 \log \frac{\omega_0}{\omega}$ et $\varphi_{HF} = -\frac{\pi}{2}$. On a qu'une rotation de phase de $\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{2}$. Le signal $e_1(t)$ est sinusoïdal de fréquence f_0 . Il est donc transmis par le filtre avec une atténuation $H_0 = \frac{1}{3}$ et sans déphasage : $s_1(t) = 0,67 \sin(2000\pi t)$ en V. Le signal $e_2(t)$ se reformule par trigonométrie élémentaire en $e_2(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega t)$ en $siUV$. Le premier terme (composante continue) est coupé par le filtre et le second fournit le signal de sortie $e_2(t) = \frac{1}{2} G(2\omega) \cos(2\omega t + \varphi(2\omega))$ soit $v_2(t) \simeq 0,05 \cos(60.10^3 t - 1,26)$ en V. Le signal de sortie est assez atténué sans être exactement l'intégration de la composante à 2ω du signal d'entrée car celle-ci n'est pas de fréquence assez élevée pour que son déphasage soit assez proche de $-\pi/2$. Le signal $e_3(t)$ présente le développement en série de FOURIER (en V) $e_3(t) = 2 + \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2p+1} \sin 2\pi(2p+1)ft$. On en déduit que la composante continue est éliminée par le filtre ; le fondamental est transmis avec une atténuation de $H_0 = \frac{1}{3}$ et sans déphasage ; l'harmonique 3 (3 000 Hz) est à la limite de la bande passante à -3 dB et est transmise avec une atténuation d'environ $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ (à la louche ; numériquement, on trouve 0,25) et un déphasage négatif $\varphi = \arg[\underline{H}(3\,000\text{ Hz})] \simeq -0,73$ rad ; enfin, les hautes fréquences sont supprimées, donc le signal de sortie ne présente pas de discontinuités. On peut, par conséquent, envisager un signal de sortie très déformé mais assez proche de la sinusoïde du fondamental.

9. Moteur alimenté en courant redressé

Réponses : Le début du développement en série est $u(t) = E_0[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin 2\pi ft - \frac{2}{\pi}(\frac{1}{3} \cos 4\pi ft + \frac{1}{15} \cos 8\pi ft + \dots)]$, $ri + L \frac{di}{dt} = u(t)$, $i(t)$ se compose de la réponse à chaque harmonique, $\underline{Z} = r + jL2\pi f$, à 50 Hz $L2\pi f \simeq 188 \Omega$ alors que $r = 5 \Omega$ donc $\underline{Z} \simeq jL2\pi f$, l'impédance est considérée imaginaire pure pour les autres harmoniques aussi, donc $i(t) = \frac{E_0}{\pi r} + \frac{E_0}{2L2\pi f} \sin(2\pi ft - \frac{\pi}{2}) - \frac{2E_0}{3\pi L4\pi f} \cos(4\pi ft - \frac{\pi}{2}) + \dots$, numériquement $i(t) = 1,530 + 0,064 \sin(2\pi ft - \frac{\pi}{2}) - 0,014 \cos(4\pi ft - \frac{\pi}{2}) + \dots$, du fait de $\underline{Z} \simeq jL2\pi f$ les harmoniques ont une contribution quasi-nulle à la puissance consommée, $P_{moy} \simeq \frac{E_0^2}{\pi^2 r} \simeq 2,34$ W.

10. Développement en série de Fourier d'un champ magnétique

Réponses : $\frac{d^2 B_{xz,max}^{(n)}}{dx^2} - \frac{4\pi^2 n^2}{\lambda^2} B_{xz,max}^{(n)} = 0$, $B_{x,max}^{(n)} = A_n \operatorname{ch} \frac{2\pi n x}{\lambda}$, $B_{z,max}^{(n)} = B_n \operatorname{sh} \frac{2\pi n x}{\lambda}$, $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ d'où $A_n = B_n$, $A_n \operatorname{ch} \frac{\pi n x_0}{\lambda} = \frac{2}{\lambda} \int_0^\lambda B_x(z) \sin \frac{2\pi n z}{\lambda} dz$, $A_n = \frac{4B_0}{\pi n \operatorname{ch} \frac{\pi n x_0}{\lambda}} \sin n \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi n a}{\lambda}$.

B. Signaux quelconques et intégrales de Fourier

11. Pression et largeur de raie

Réponses : $\underline{V}(f) = \frac{A_0 \tau}{2\sqrt{2\pi}} [\frac{1}{1-i2\pi(f+f_0)\tau} + \frac{1}{1-i2\pi(f-f_0)\tau}]$; dans le domaine des fréquences positives la contribution du terme en $f + f_0$ n'est pas significative, $\Delta f_{1/2} = 1/\pi\tau$.

12. Effet Doppler et largeur de raie

Réponses : $V(f) = \frac{A_0 \tau}{2\sqrt{2}} \exp[-\pi^2(f - f_0)^2 \tau^2]$, $\Delta f_{1/2} = \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{\pi \tau}$.

13. Spectre de Fourier d'une source lumineuse

Réponses : $\hat{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \exp(-j\omega t_0) (\exp(-j\omega NT) - 1)$, $\operatorname{Re} = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} (\cos \omega(t_0 + NT) - \cos \omega t_0)$, $\operatorname{Im} = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} (\sin \omega t_0 - \sin \omega(t_0 + NT))$, $|\hat{E}| = \frac{2E_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{\omega}{|\omega^2 - \omega_0^2|} |\sin N\pi \frac{\omega}{\omega_0}|$, $\hat{E}(\omega) = \frac{E_0 \Delta t}{2\sqrt{2}} [\exp - \frac{(\omega_0 - \omega)^2 \Delta t^2}{4} \exp j(\omega_0 - \omega)t_0 + \exp - \frac{(\omega_0 + \omega)^2 \Delta t^2}{4} \exp - j(\omega_0 + \omega)t_0]$, $\operatorname{Re} = \frac{E_0 \Delta t}{2\sqrt{2}} [\exp - \frac{(\omega_0 - \omega)^2 \Delta t^2}{4} \cos(\omega_0 - \omega)t_0 + \exp - \frac{(\omega_0 + \omega)^2 \Delta t^2}{4} \cos(\omega_0 + \omega)t_0]$, $\operatorname{Im} = \frac{E_0 \Delta t}{2\sqrt{2}} [\exp - \frac{(\omega_0 - \omega)^2 \Delta t^2}{4} \sin(\omega_0 - \omega)t_0 - \exp - \frac{(\omega_0 + \omega)^2 \Delta t^2}{4} \sin(\omega_0 + \omega)t_0]$.

14. Régime impulsionnel

Réponses : $\frac{d^2 u_s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_s}{dt} + \omega_0^2 u_s = 0$, $r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \omega_0$, solution valable si $Q \gg \frac{1}{2}$, intégration de l'équation différentielle $\frac{du_s}{dt}(t_0^+) - \frac{du_s}{dt}(t_0^-) + \frac{\omega_0}{Q}(u_s(t_0^+) - u_s(t_0^-)) = \frac{\omega_0}{Q}(u_e(t_0^+) - u_e(t_0^-)) = \frac{\omega_0}{Q} \Delta E$, intégration de la primitive avec $\int_{t_0^-}^{t_0^+} u_e dt = 0$ et $\int_{t_0^-}^{t_0^+} u_s dt = 0$ d'où $u_s(t_0^+) - u_s(t_0^-) = 0$, atténuation exponentielle négligeable : $u_s(t) \simeq \frac{E_0}{Q} \sin(\omega_0(t + \theta))$, $u_s(0^+) \simeq \frac{E_0}{Q} \sin(\omega_0 \theta)$, $\frac{du_s}{dt}(0^+) \simeq \frac{E_0 \omega_0}{Q} (\cos(\omega_0 \theta) - 1)$, $s_i(t) = \frac{\omega_0}{Q} \cos \omega_0 t \exp - \frac{\omega_0 t}{2Q}$, fonction continue approximée par des créneaux successifs, dans le cas où $u_e(t) = E_0 \exp j\omega t$, $u_s(t) = \bar{H}(j\omega) E_0 \exp j\omega t$, $\bar{H}(j\omega) = [\exp(-j\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\omega t_0) s_i(t - t_0) dt_0]$, transformée de FOURIER de la réponse impulsionnelle.

15. Diffusion thermique et transformée de Fourier

Réponses : $T_0(z) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \exp(ikz) dk$ d'où $A_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T_0(z') \exp(-ikz') dz'$,
 $T(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T_0(z') \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp(ik(z - z') - k^2 ht) dk \right] dz'$, $T(z, t) = \frac{\theta_0}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{ht}} \exp -\frac{z^2}{4ht}$, l'énergie de $z = 0$ diffuse progressivement en $z > 0$ avec des durées proportionnelles au carré des distances.