Lösungen zu den Übungen der Mathematik-Lehrveranstaltungen für DM-Zweitsemester

Erarbeitet von Tutorinnen und Tutoren
im Rahmen der Lehrveranstaltung

Fachdidaktisches Praktikum:
Mathematik der Digitalen Medien

Betreut von
Prof. Dr. Thomas Schneider
Prof. Dr. Ruxandra Lasowski

Hochschule Furtwangen University
Fakultät Digitale Medien

Wintersemester 2021/2022

Hinweis:

Dass Lösungen zu den Übungsblättern ausgearbeitet und Studierenden zur Verfügung gestellt werden, versteht sich als zusätzliches und freiwilliges *Service*-Angebot. Trotz größtmöglicher Sorgfalt beim Erstellen und bei der Korrektur der Lösungen kann keine Gewähr für Fehlerfreiheit übernommen werden. In Zweifelsfällen sind Studierende gehalten, unmittelbar Verbindung mit dem/den Dozenten der Lehrveranstaltungen *Mathematik und Simulation*, *Mathematische Grundlagen von Computergrafik und Gestaltung* bzw. *Geometrische und statistische Modellierung* aufzunehmen.

Die Musterlösungen sind nur für die Hörerinnen und Hörer dieser Lehrveranstaltungen bestimmt. Sie dürfen weder ganz noch auszugsweise veröffentlicht oder an Dritte weitergegeben werden. Dies betrifft insbesondere die Veröffentlichung auf sozialen Netzwerken oder Plattformen (FELIX, fuugle, etc.) sowie die Weitergabe des Dokuments in gedruckter oder digitaler Form (über Cloud-Dienste, Messenger oder sonstige Systeme). Das Recht zur Veröffentlichung liegt bei den Dozenten Prof. Dr. Ruxandra Lasowski und Prof. Dr. Thomas Schneider.

Inhaltsverzeichnis

Teil I

MKB – Mathematische Grundlagen von Computergrafik und Gestaltung

Übungseinheit 1

1. Übungseinheit zu
Mathematische Grundlagen von Computergrafik und Gestaltung

Prof. Dr. T. Schneider

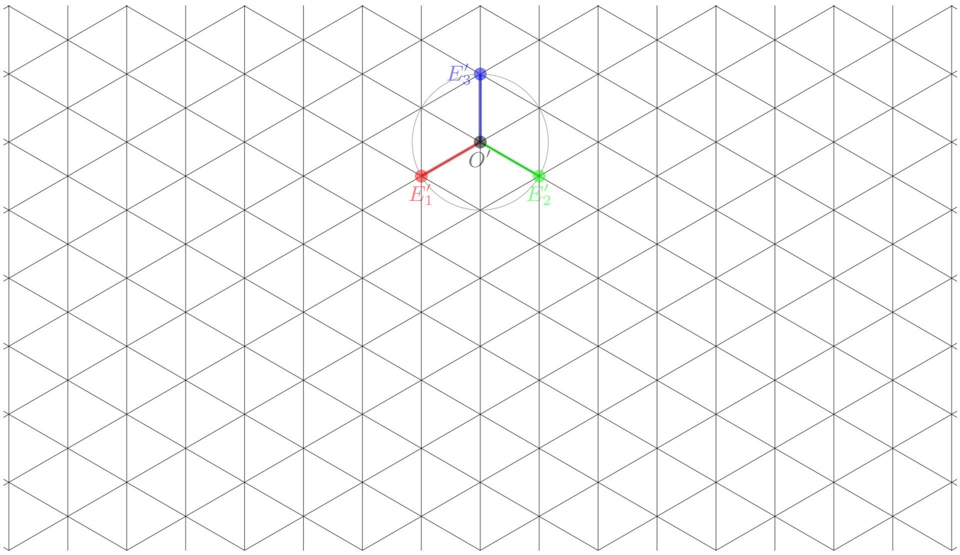
Sommersemester 2021

Präsenzübungen

Aufgabe P 1. *Parallelprojektion – Standardisometrie*

Zur Spezifikation einer Parallelprojektion verwenden wir einen Punkt O als Koordinatenursprung und drei **Einheitspunkte** E_1, E_2 und E_3 mit Projektionsbildern O', E_1', E_2' und E_3', wie in der Abbildung gezeigt. Das Projektionsbild der x-Achse (bzw. x_1-Achse) des Koordinatendreibeins verläuft in Verlängerung der Strecke $\overline{O'E_1'}$, das Projektionsbild der y-Achse (bzw. x_2-Achse) in Verlängerung der Strecke $\overline{O'E_2'}$, das Bild der z-Achse (bzw. x_3-Achse) in Verlängerung der Strecke $\overline{O'E_3'}$.

Hinweis: Es ist nützlich, wenn Sie auch sprachlich zwischen dem „räumlichen Koordinatensystem“ oder „räumlichen Dreibein“ einerseits und dessen Projektionsbild, dem „ebenen Dreibein“ andererseits unterscheiden.



(a) **Zeichnen Sie** in die Skizze die Projektionsbilder der Koordinatenhalbachsen (in Verlängerung des Koordinatendreibeins) **ein**.

(b) **Stellen Sie** einen Würfel mit achsparallelen Kanten der Länge 3 (Längeneinheiten), dessen „linker, hinterer, oberer Eckpunkt“ bei $(8, 2, 3)$ liegt, in der hier spezifizierten Parallelprojektion (Standard-Isometrie) **dar.**

Hinweise: Die Angabe „linker, hinterer, oberer Eckpunkt“ hängt von der Position des Betrachters ab, Sie dürfen (und sollen) hier eine sinnvolle Wahl treffen. Stellen Sie sich vor, dass der Würfel aus Glas ist, so dass auch die „hinteren“ Kanten sichtbar sind. Stellen Sie die hinteren Kanten mit schwächerer Strichstärke oder gestrichelt dar.

(c) Wie bewerten Sie diese Art der Darstellung bzgl. Anschaulichkeit und Handhabbarkeit?

(d) Nehmen Sie an, dass $s_3 = 1$ gilt.* Was sind dann die Werte der übrigen axonometrischen Angaben s_1, s_2, α und β?

* In Wahrheit hat s_3 einen Wert, der kleiner ist als 1, wir werden das noch genauer untersuchen. In der vorliegenden Aufgabe bestimmen wir eigentlich nicht s_1 und s_2 sondern $\frac{s_1}{s_3}$ und $\frac{s_2}{s_3}$.

(e) Können Sie sich vorstellen, wie Projektionsrichtung und Bildebene zum Koordinatensystem liegen müssen, damit sich die hier gezeigte Axonometrie ergibt?

Aufgabe P 2. *Quader in verschiedenen Projektionen*

Skizzieren Sie **auf Ihrem eigenen Papier** einen achsenparallelen Quader mit Breite 2, Höhe 1 und Tiefe 3 (Längeneinheiten), dessen linke hintere untere Ecke am Punkt $(0,4,0)$ liegt. Verwenden Sie hierzu

- eine sogenannte „Kavalierprojektion" oder „Kabinettprojektion" mit den axonometrischen Angaben $\alpha = 135°$, $\beta = 90°$, $s_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $s_2 = 1$ und $s_3 = 1$,
- eine sog. „Militärprojektion " mit den Angaben $\alpha = 135°$, $\beta = 135°$, $s_1 = 1$, $s_2 = 1$ und $s_3 = \frac{1}{2}$.

Hausübungen

Aufgabe H 1. *Quader in verschiedenen Projektionen – Reprise und Fortsetzung von Aufgabe P 2*

Skizzieren Sie einen achsenparallelen Quader mit Breite 2, Höhe 1 und Tiefe 3 (Längeneinheiten), dessen linke hintere untere Ecke am Punkt $(0,4,0)$ liegt. Verwenden Sie hierzu

- eine sogenannte „Kavalierprojektion" oder „Kabinettprojektion" mit den axonometrischen Angaben $\alpha = 135°$, $\beta = 90°$, $s_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $s_2 = 1$ und $s_3 = 1$,
- eine sog. „Militärprojektion " mit den Angaben $\alpha = 135°$, $\beta = 135°$, $s_1 = 1$, $s_2 = 1$ und $s_3 = \frac{1}{2}$,
- die isometrische Projektion aus Aufgabe P 1,
- die dimetrische Projektion aus Aufgabe H 3.

Aufgabe H 2. *Kuboktaeder*

Die Einheitslänge in dieser Aufgabe sei $10\,\mathrm{cm}$. Zeichnen Sie einen Würfel mit Einheitskantenlänge $10\,\mathrm{cm}$ in parallelperspektivischer Darstellung. Um Überdeckungen hinten liegender Kanten durch vordere Kanten möglichst zu vermeiden, probieren Sie einmal die folgende Angaben aus: $\overrightarrow{O'E_1'} = \begin{pmatrix} -6\,\mathrm{cm} \\ -6\,\mathrm{cm} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{O'E_2'} = \begin{pmatrix} 10\,\mathrm{cm} \\ -2\,\mathrm{cm} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{O'E_3'} = \begin{pmatrix} 0\,\mathrm{cm} \\ 10\,\mathrm{cm} \end{pmatrix}$.

(a) Wie groß ist dann der Skalierungsfaktor $s_1 = \frac{\left\|\overrightarrow{O'E_1'}\right\|}{10}$?

(b) **„Schneiden Sie"** die acht Ecken des Würfels durch Ebenen „ab", welche die von den Ecken ausgehenden Kanten halbieren. Wieviele Flächen, Ecken und Kanten besitzt der so entstehende sogenannte **Kuboktaeder**?

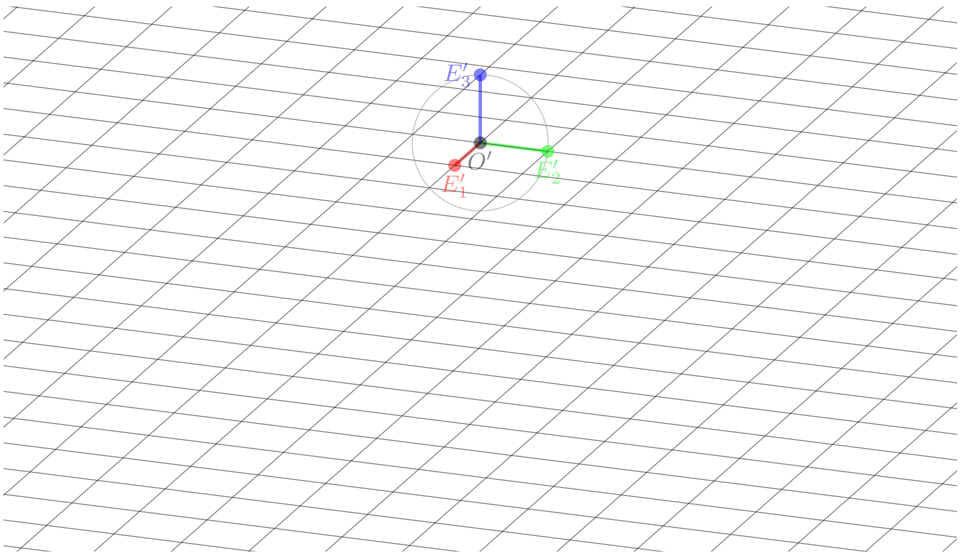
(c) Überprüfen Sie, ob die Anzahl e der Ecken, die Anzahl f der Flächen und die Anzahl k der Kanten **für den Kuboktaeder** die Eulersche Polyederformel erfüllt:

$$e - k + f = 2.$$

(d) Bestimmen Sie die Anzahl e_W der Ecken, die Anzahl f_W der Flächen und die Anzahl k_W der Kanten **für den Würfel** und überpfüfen Sie auch hier die Gültigkeit der Polyederformel.

(e) Wiederholen Sie die Aufgabe bei Verwendung einer Kavalierprojektion, wobei Sie zum Beispiel $\overrightarrow{O'E_1'} = \binom{-2\,\text{cm}}{-4\,\text{cm}}$ oder auch $\overrightarrow{O'E_1'} = \binom{-4\,\text{cm}}{-2\,\text{cm}}$ wählen.

Aufgabe H 3. *Dimetrische Projektion nach DIN ISO 5456-3 (Ingenieur-Axonometrie)*



(a) **Zeichnen Sie** in die Skizze die Projektionsbilder der Koordinatenhalbachsen **ein**.

(b) **Stellen Sie** einen Glaswürfel mit achsparallelen Kanten der Länge 3 (Längeneinheiten), dessen linker, hinterer, oberer Eckpunkt bei $(2, -4, 0)$ liegt, unter in der hier spezifizierten Parallelprojektion (Dimetrie bzw. Ingenieur-Axonometrie) **dar**.

Hinweis: Wiederum hängt die Angabe „linker, hinterer, oberer Eckpunkt" vom Betrachter ab, treffen Sie hier eine sinnvolle Wahl!

(c) Wie bewerten Sie diese Art der Darstellung bzgl. Anschaulichkeit und Handhabbarkeit?

(d) Bestimmen Sie die Verhältnisse $\frac{s_1}{s_2}$ und $\frac{s_3}{s_2}$ sowie die übrigen axonometrische Angaben α und β beispielsweise durch Messung mit einem Geodreieck.

P1 Parallelprojektion

Diese Aufabe wurde in der Vorlesung behandelt.

P2 Quader in verschiedenen Projektionen

Kavalierprojektion:

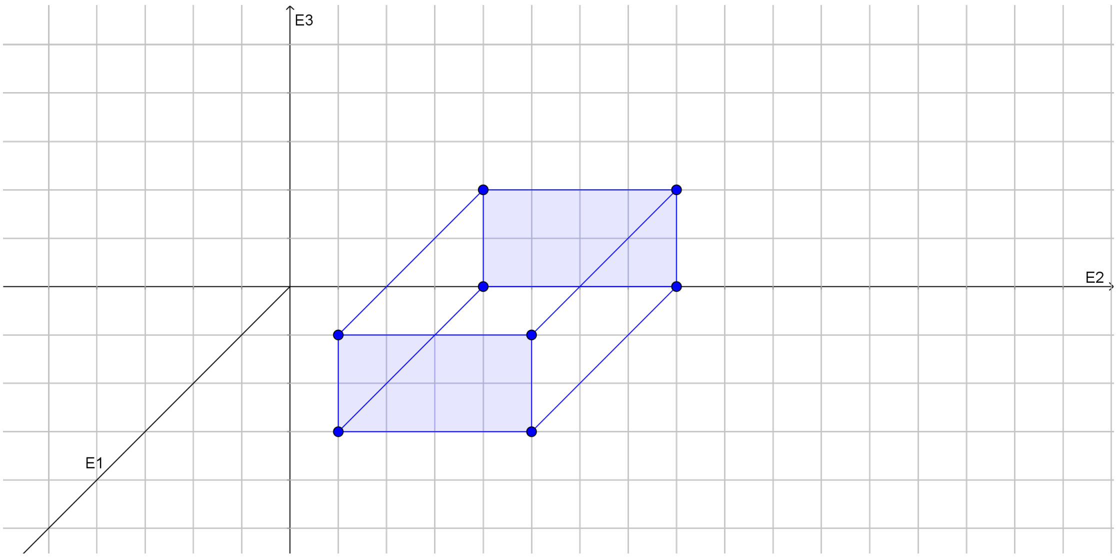


Abbildung 1: Quader in Kavalierprojektion

Militärprojektion:

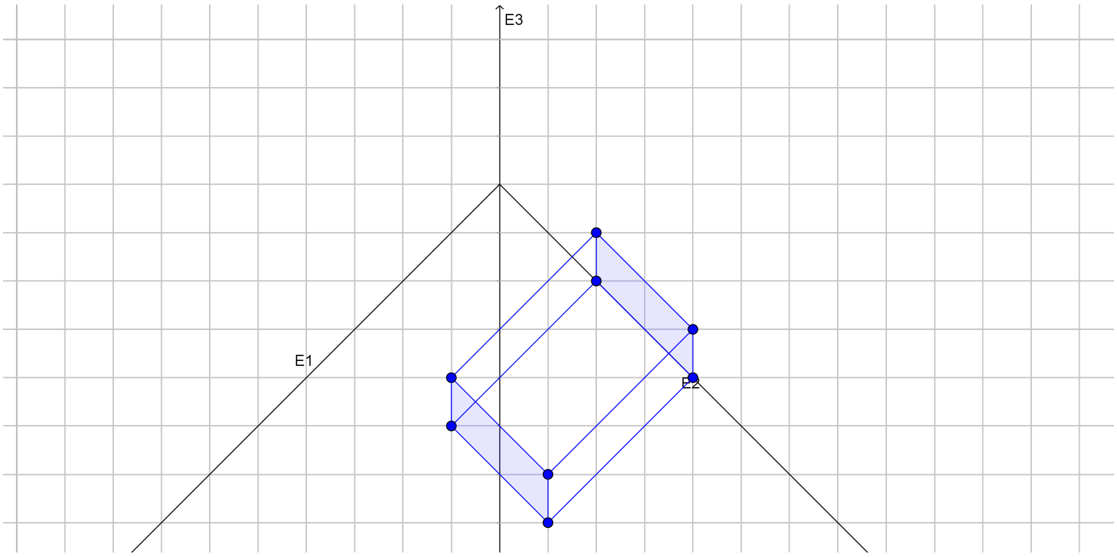


Abbildung 2: Quader in Militärprojektion

H1 Quader in verschiedenen Projektionen

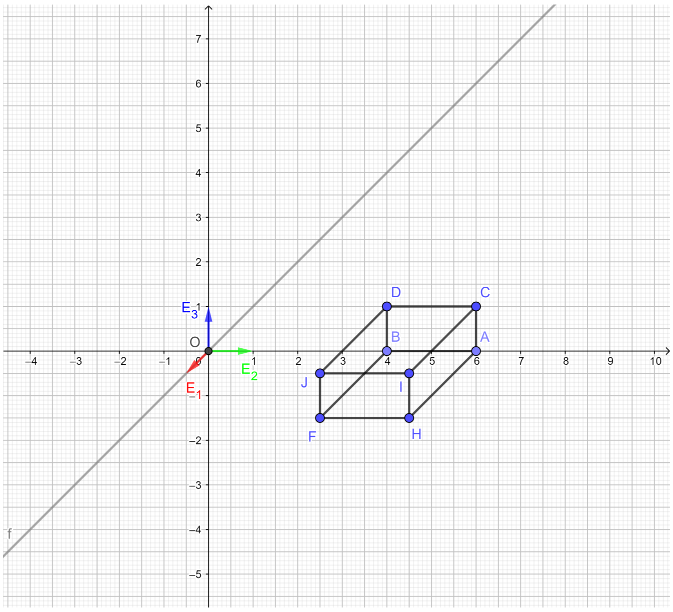


Abbildung 3: „Kavalierprojektion“ oder „Kabinettprojektion“

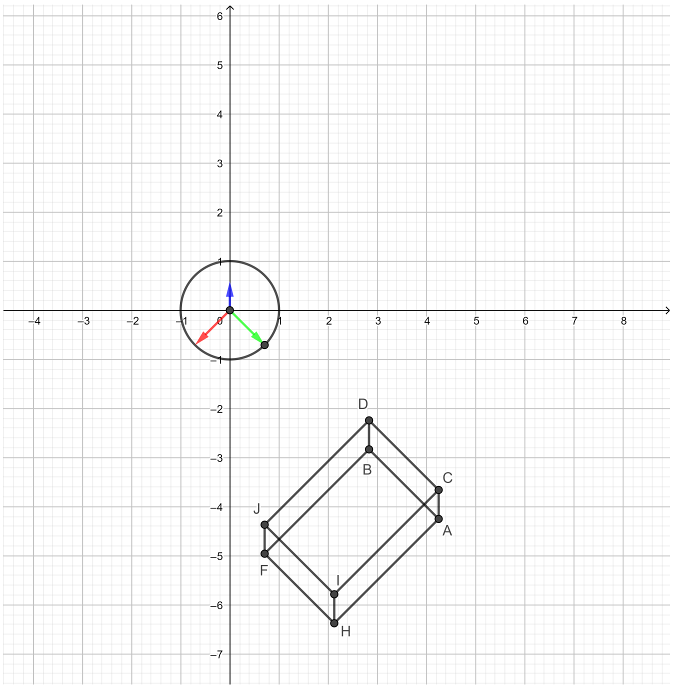


Abbildung 4: Militärprojektion

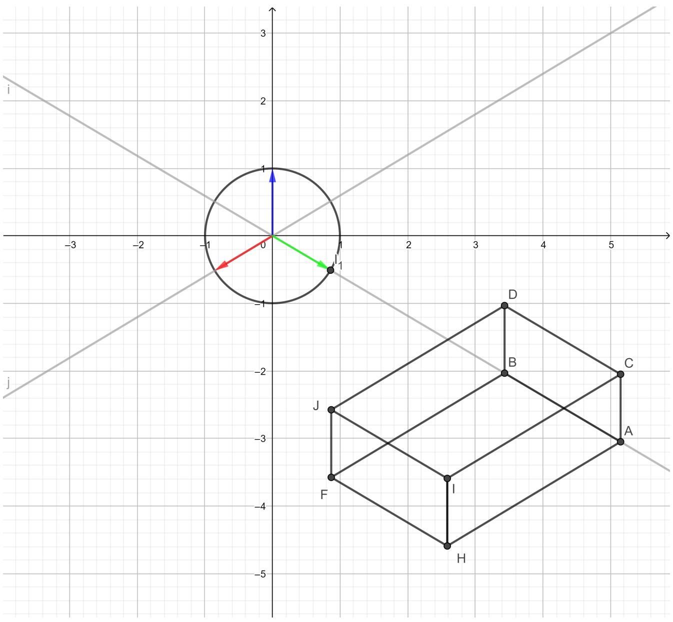


Abbildung 5: Isometrische Projektion

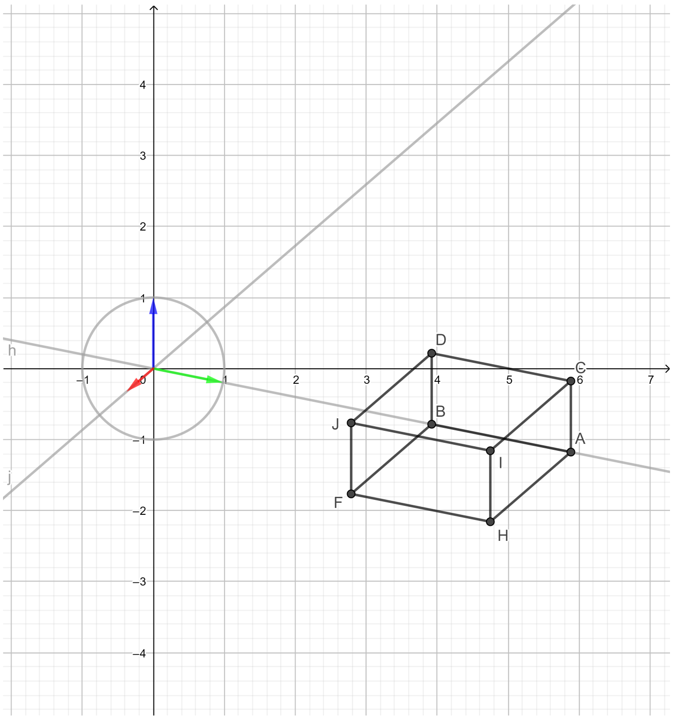


Abbildung 6: Dimetrische Projektion

H2 Kuboktaeder

a) Wir berechnen im folgenden den Skalierungsfaktor:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= \frac{\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2}}{10} \\
&= \frac{\sqrt{4+16}}{10} \qquad = \frac{\sqrt{20}}{10} = \frac{2\cdot\sqrt{5}}{10} \qquad = \frac{2\cdot\sqrt{5}}{10} \approx 0,45
\end{aligned}
$$

b) **Kuboktaeder:**
Ecken(e): 12
Kanten(k): 24
Flächen:(f): 14

c)

$$12 - 24 + 14 = 2$$

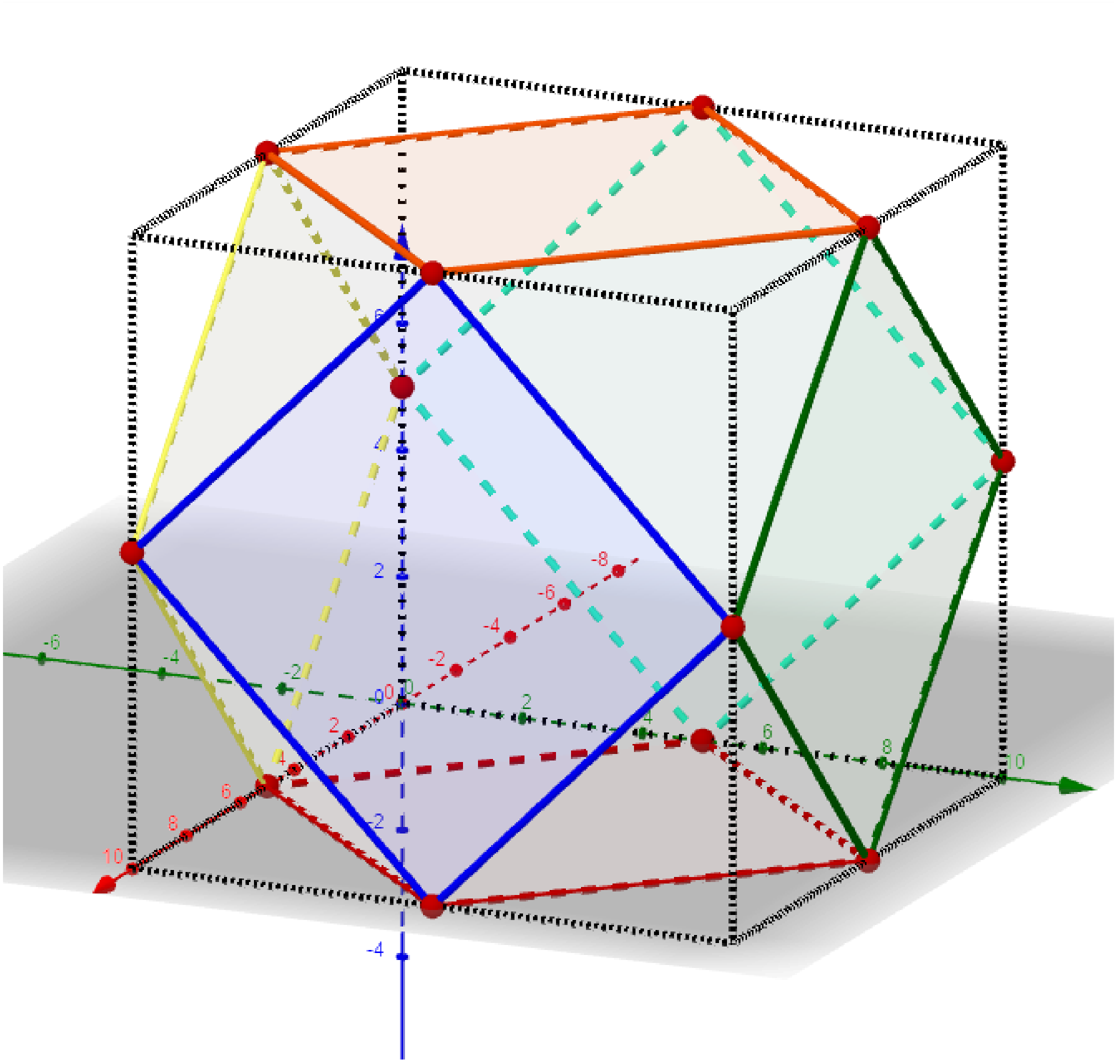


Abbildung 7: Ansicht 1

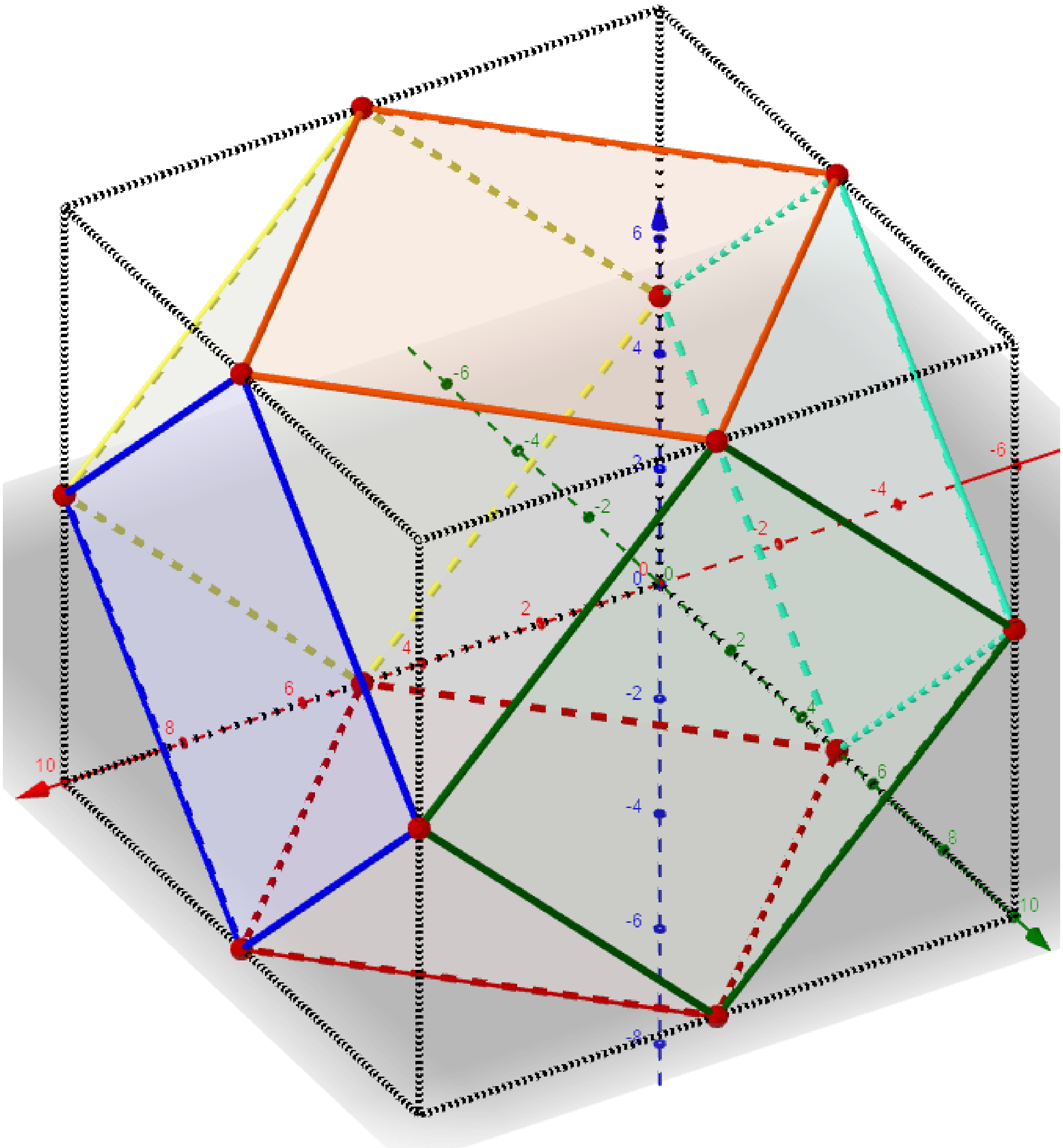


Abbildung 8: Ansicht 2

d)

H3 Dimetrische Projektion

Diese Aufabe wurde in der Vorlesung behandelt.

Übungseinheit 2

Hinweise zu verwendeten Symbolen und zu trigonometrischen Funktionen (Winkelfunktionen)

- Das Symbol $\mathbb{N} = 0, 1, 2, 3, \ldots$ steht für die Menge aller natürlichen Zahlen (einschließlich der Null), das Symbol $\mathbb{Z}$ bezeichnet die Menge aller ganzen Zahlen, das Symbol $\mathbb{R}$ bezeichnet die Menge aller reellen Zahlen.
- Es gilt $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\cos(x) \neq 0$.
- Für alle $x,\ y \in \mathbb{R}$ gelten folgende Identitäten **(Additionstheoreme)**:

$$\cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y), \tag{AT1}$$
$$\cos(x-y) = \cos(x) \cdot \cos(y) + \sin(x) \cdot \sin(y), \tag{AT2}$$
$$\sin(x+y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y), \tag{AT3}$$
$$\sin(x-y) = \sin(x) \cdot \cos(y) - \cos(x) \cdot \sin(y). \tag{AT4}$$

- In der folgenden Tabelle sind einige Werte von Winkelfunktionen für Winkel im Gradmaß und im Bogenmaß aufgeführt. Weitere Werte erhalten Sie mit Hilfe der Additionstheoreme, zum Beispiel gilt $\cos(135°) = \cos(90° + 45°) = \ldots$

Winkel		Funktionswerte trigonometrischer Funktionen		
Gradmaß	Bogenmaß x	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
$0°$	0	0	1	0
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	nicht definiert
$120°$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$180°$	π	0	-1	0
$240°$	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$270°$	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	nicht definiert
$360°$	2π	0	1	0
$-45°$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$-90°$	$-\frac{\pi}{2}$	-1	0	nicht definiert
$-180°$	$-\pi$	0	-1	0

Präsenzübungen

Aufgabe P 3. *Analyse von Kavalierprojektionen*

Zur axonometrischen Festlegung einer Kavalierprojektion wird das räumliche Dreibein (O, E_1, E_2, E_3) in die y-z-Koordinatenebene abgebildet (projiziert). Nach Einführung eines Koordinatensystems $(O; \vec{u}, \vec{v})$ in dieser Ebene mit $\vec{u} = \overrightarrow{OE_2}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{OE_3}$ ergeben sich für die (projizierten) Bildpunkte O', E_2' und E_3' die Koordinaten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$, und zwar für jede Projektionsrichtung. Wir überlegen uns noch, wo der Bildpunkt E_1' liegt.

Hierzu legen wir eine Projektionsrichtung $\langle \vec{p} \rangle$ durch Winkel θ und φ fest, wie in Abbildung 1 veranschaulicht. Diese Winkel entsprechen den „geographische Koordinaten“, d.h. dem Längengrad φ bzw. dem Breitengrad θ des Durchstoßpunktes der Projektionsgeraden durch die im Ursprung zentrierte Einheitskugel. Man kann rechnerisch zeigen, dass der Bildpunkt E_1' die Koordinaten $\begin{pmatrix} -\tan(\varphi) \\ -\frac{\tan(\theta)}{\cos(\varphi)} \end{pmatrix}$ hat.

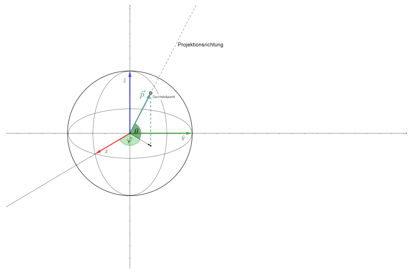
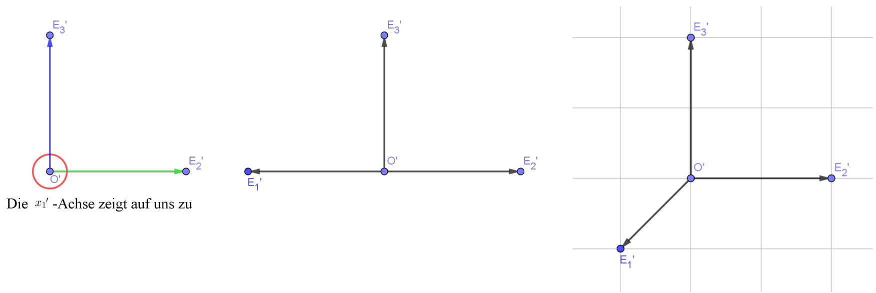


Abbildung 1: Zur Festlegung der Projektionsrichtung mit „geografischen“ Winkeln.

(a) Berechnen Sie E_1' und zeichnen Sie das ebene Dreibein für den Fall $\theta = 45°$ und $\varphi = 45°$.

(b) Beschreiben Sie, welche Parallelprojektionen das räumliche Dreibein jeweils auf die folgenden ebenen Dreibeine abbilden.



Hinweis: Zur Analyse der Grafik ganz rechts können Sie auf die Gleichung $\begin{pmatrix} -\tan(\varphi) \\ -\frac{\tan(\theta)}{\cos(\varphi)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ *zurückgreifen, vgl. Aufgabe P 1. Alternativ hierzu könnten Sie die Projektionsrichtung in dem vorliegenden (speziellen) Fall so angeben wie in Aufgabe H 4. Dort werden allerdings **nicht** die Winkel* θ *und* φ *verwendet.*

Lösung:
Aus der angegebenen Gleichung folgt $\tan(\varphi) = \frac{1}{2}$ somit $\cos(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{5}}$ und $\sin(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Damit folgt weiter $\tan(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, somit $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$ und $\sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Mit der Formel für Kugelkoordinaten ergibt sich somit der Projektionsvektor

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\,\cos(\varphi) \\ \cos(\theta)\,\sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

In Hausübung H 4 wird ein Winkel δ verwendet, der die Neigung des Projektionsrichtung zur x_2-x_3-Ebene angibt. Hier ergibt sich die Forderung $\tan(\delta) = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$. Hieraus ergibt sich $\cos(\delta) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ und $\sin(\delta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Somit ergibt sich für den Projektionsvektor

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} \sin(\delta) \\ \cos(\delta)\,\cos(45^\circ) \\ \cos(\delta)\,\sin(45^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Für Schnelle zugleich, für alle anderen zuhause:

Aufgabe P 4. *Analyse von Kavalierprojektionen – Fortsetzung*

(a) Für welche Kombination von θ und φ ergibt sich die folgende Axonometrie:

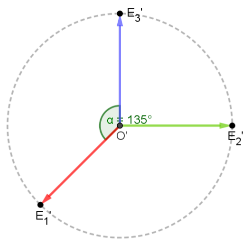


Abbildung 2: Kabinett- bzw. Kavalierprojektion mit $\alpha = 135^\circ$ und $s_1 = 1$.

Hinweis: Überzeugen Sie sich zunächst davon, dass der rote Vektor in Abbildung 2 die Koordinaten $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ besitzt. Bestimmen Sie dann Werte für θ und φ so, dass die Gleichung

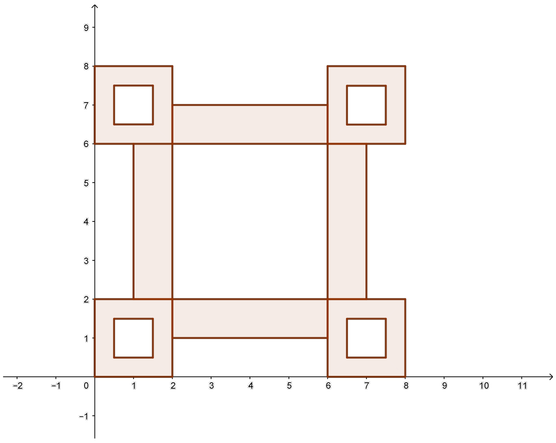
$$\begin{pmatrix} -\tan(\varphi) \\ -\frac{\tan(\theta)}{\cos(\varphi)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

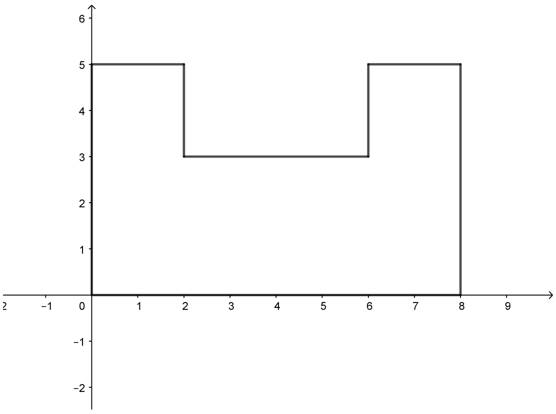
erfüllt ist.

Hausübungen

Aufgabe H 4. *Castellum*

Im Folgenden sind der Grundriss sowie der Aufriss eines Castells gegeben. Fertigen Sie hieraus eine parallelperspektivische Darstellung in Militärperspektive an.





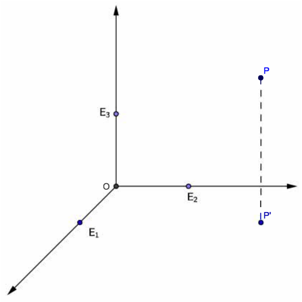
Aufgabe H 5. *Dynamische veränderbare Darstellungen mit Geogebra*

(a) Erzeugen Sie eine Geogebra-Datei, in der Sie die axonometrischen Angaben flexibel einstellen können.

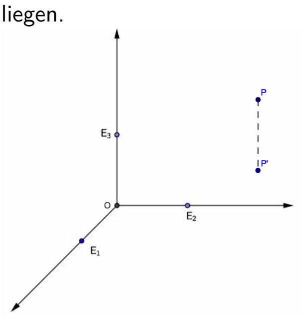
(b) Verwenden Sie diese Geogebra-Datei als Grundlage für Darstellungen des „Castellum“von Aufgabe H 1. Da die axonometrischen Angaben mit Hilfe der „Schieberegler“ interaktiv veränderbar sind, können Sie viele verschiedene parallelperspektivische Darstellungen ausprobieren.

Aufgabe H 6. *Koordinatenquader – Koordinatenbestimmung*

Übertragen Sie die folgende Figur auf Ihr Papier, zeichnen Sie den Koordinatenquader von P und lesen Sie die Koordinaten des Punktes P ab. Der eingezeichnete Punkt P' soll in der Grundrissebene liegen.



Übertragen Sie die folgende Figur auf Ihr Papier, zeichnen Sie den Koordinatenquader von P und lesen Sie die Koordinaten des Punktes P ab. Der eingezeichnete Punkt P' soll in der Grundrissebene liegen.



Aufgabe H 7. *Analyse einiger Kavalierprojektionen*

Untersuchen Sie einige spezielle Kavalierprojektionen. Die Bildebene ist jeweils die x_2-x_3-Ebene. Die Projektionsrichtung liegt immer in derjenigen Ebene , welche die x_1-Achse enthält und den Winkel zwischen der x_2-Achse und der x_3-Achse halbiert. Diese Ebene ist durch die Gleichung $x_2 = x_3$ gegeben. Im Folgenden bezeichne E_1' stets den Schnittpunkt der durch E_1 verlaufenden Projektionsgeraden mit der Bildebene. Bei den hier untersuchten Parallelprojektionen ergibt sich stets $\alpha = 45°$, der Skalierungsfaktor s_1 variiert je nachdem, wie flach oder steil die Projektionsrichtung gewählt wird.

(a) Die Projektionsrichtung sei um $45°$ zur x_2-x_3-Ebene geneigt. Bestimmen Sie die Länge der Strecke $s_1 = \overline{OE_1'}$.

(b) Die Projektionsgerade habe die Steigung $m_2 = \frac{2}{1}$. Bestimmen Sie die Länge der Strecke $s_1 = \overline{OE_1'}$ sowie den Neigungswinkel δ_2 der Projektionsgeraden zur x_2-x_3-Ebene.

(c) Die Projektionsgerade habe die Steigung $m_3 = \frac{1}{2}$. Bestimmen Sie die Länge der Strecke $s_1 = \overline{OE_1'}$ sowie den Neigungswinkel δ_3 der Projektionsgeraden zur x_2-x_3-Ebene.

(d) In der Schule haben Sie zur Darstellung räumlicher Objekte möglicherweise immer wieder eine Axonometrie verwendet, bei der $s_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\alpha = 45°$ galt. Welchen Neigungswinkel δ muss die Projektionsgerade zur x_2-x_3-Ebene haben, damit sich $s_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ergibt?

Aufgabe H 8. *Fortsetzung der Analyse von Aufgabe H 4 – Projektion auf verschiedene Ebenen*

(a) Die Bildebene werden nun so „tiefergelegt“, dass sie **parallel zur** x_2-x_3-Ebene ist und den Punkt $(-1, 0, 0)$ enthält. Untersuchen Sie, wie die Punkte O, und E_1 projiziert werden, wenn die Projektionsrichtung so ist wie in der ersten Teilaufgabe von H 4. Ist der Skalierungsfaktor s_1 im Vergleich zur Aufgabe H 4 verändert?

(b) Was verändert sich, wenn Sie die Bildebene π um eine weitere Längeneinheit „tieferlegen“, so dass sie den Punkt $(-2, 0, 0)$ enthält.

(c) Versuchen Sie einen Ergebnissatz zu formulieren, der die von Ihnen beobachteten Sachverhalte bei Parallelprojektionen zusammenfasst:

Wenn man bei gegebenem räumlichen Dreibein $\big(O;\ E_1,\ E_2,\ E_3\big)$ *und gegebener Projektionsrichtung unterschiedliche zueinander parallel liegende Bildebenen wählt, so verändert sich zwar die Lage . . . , die . . . bleiben jedoch unverändert.*

Tutoriumsübungen

Aufgabe T 1. *Günstige und weniger günstige Parallelperspektiven*

(a) Skizzieren Sie einen achsenparallelen Quader mit Breite 2, Höhe 4 und Tiefe 3 (Längeneinheiten), dessen linke hintere untere Ecke am Punkt $(0, 4, 0)$ liegt. Verwenden Sie hierzu eine sog. „Militärprojektion“ mit den Angaben $\alpha = 135°$, $\beta = 135°$, $s_1 = 1$, $s_2 = 1$ und $s_3 = \frac{1}{2}$.

(b) Skizzieren Sie den Quader nun in einer Parallelprojektion mit den axonometrischen Angaben $\alpha = 90°$, $\beta = 90°$, $s_1 = 1$, $s_2 = 1$, $s_3 = 1$. Ist dies in punkto Anschaulichkeit eine günstige Projektion?

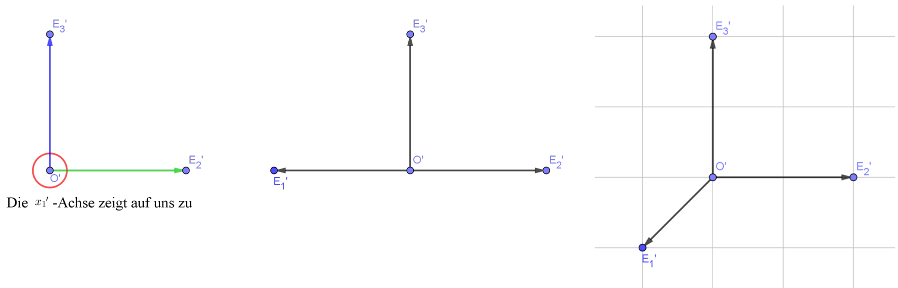
Aufgabe T 2. *Pyramidenstumpf in Kavalierprojektion*

Zeichnen Sie einen Pyramidenstumpf mit quadratischem Grundriss (die Kantenlänge dürfen Sie wählen, 4 Einheiten könnte eine gute Wahl sein). Die Spitze der vollständigen Pyramide läge im Punkte $S = (0, 0, 5)$. Der Boden des Pyramidenstumpfs liegt in der x_1-x_2-Ebene, der Deckel 3 Einheiten darüber. Verwenden Sie hierzu die Kavalierprojektion mit den axonometrischen Angaben $\alpha = 135°$, $\beta = 90°$, $s_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $s_2 = 1$ und $s_3 = 1$

Aufgabe T 3. *Parallelprojektionen in die Aufrissebene*

Wir wollen noch einmal ebene Dreibeine (O', E_1', E_2', E_3') untersuchen, die durch Projektion eines kartesischen räumlichen Dreibeins (O, E_1, E_2, E_3) auf die x_2-x_3-Ebene entstehen. Im projizierten Bild zeigt die x_2'-Achse jeweils nach rechts, die x_3'-Achse nach oben. Um die Projektionsrichtung im Raum anzugeben, verwenden wir „geographische Koordinaten“, d.h. den Längengrad φ und den Breitengrad θ des Durchstoßpunktes der Projektionsgeraden durch die im Ursprung zentrierte Einheitskugel (vgl. die Abbildung 1).

Beschreiben Sie, welche Parallelprojektionen das räumliche Dreibein jeweils auf die folgenden ebenen Dreibeine abbilden.



Hinweis: Zur Analyse der Grafik ganz rechts können Sie auf die Gleichung $\begin{pmatrix} -\tan(\varphi) \\ -\frac{\tan(\theta)}{\cos(\varphi)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ *zurückgreifen, vgl. Aufgabe P 1. Alternativ hierzu können Sie die Projektionsrichtung so angeben wie in Hausübung H 4. Dort werden allerdings* ***nicht*** *die Winkel θ und φ verwendet.*

(a) Für welche Kombination von θ und φ ergibt sich die folgende Axonometrie:

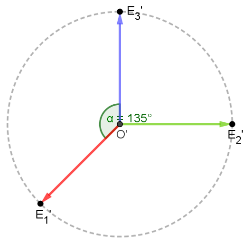


Abbildung 3: Kabinett- bzw. Kavalierprojektion mit $\alpha = 135°$ und $s_1 = 1$.

Hinweis: Überzeugen Sie sich zunächst davon, dass der rote Vektor in Abbildung 3 die Koordinaten $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ besitzt. Bestimmen Sie dann Werte für θ und φ so, dass die Gleichung

$$\begin{pmatrix} -\tan(\varphi) \\ -\frac{\tan(\theta)}{\cos(\varphi)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

erfüllt ist.

P4 Variable parallelperspektivische Darstellungen mit Geogebra

Keine Lösungen

H4 Castellum

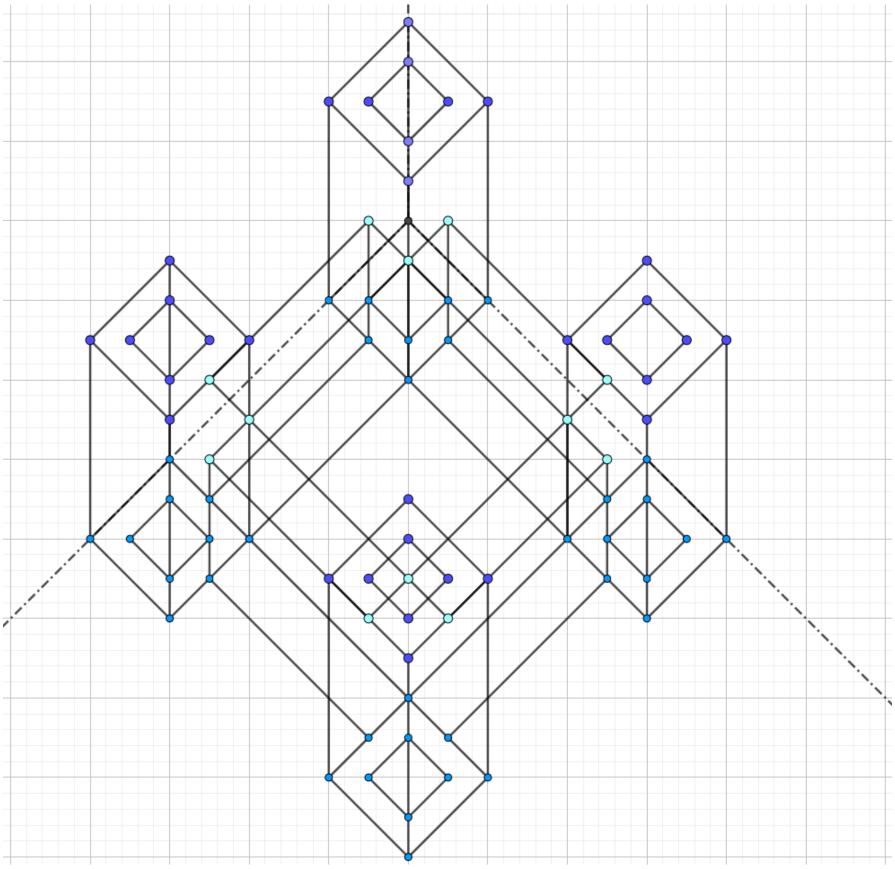


Abbildung 9: Vollständige Darstellung in Militärperspektive

T1 Günstige und weniger günstige Parallelperspektiven

a) Militärprojektion zeichnen:

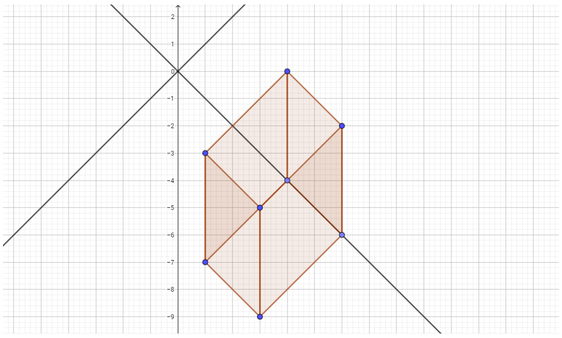


Abbildung 10: Militärprojektion des Quaders

b) Parallelprojektion zeichnen:

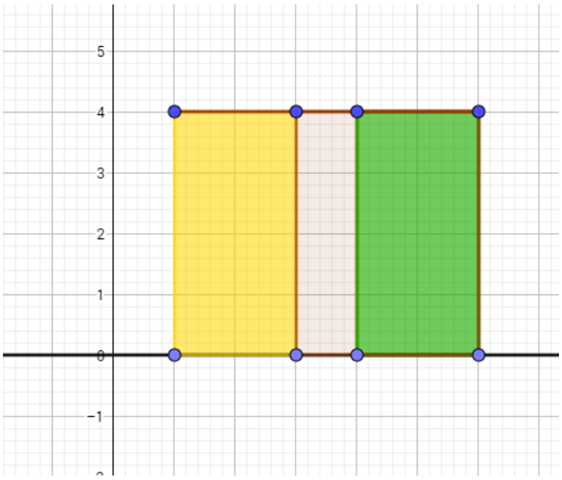


Abbildung 11: Ungünstige Projektion des Quaders, da die x- und y- Achse aufeinander liegen und der Quader so nicht mehr erkennbar ist. Die Vorderseite des Quaders wurde in Gelb markiert, die Rückseite in Grün.

T2 Pyramidenstumpf in Kavalierprojektion

Pyramidenstumpf zeichnen:

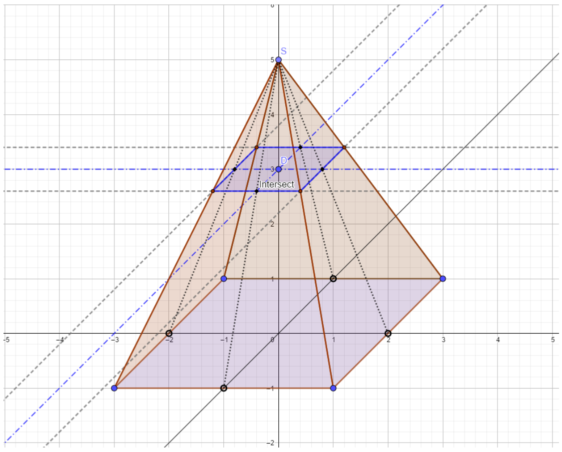


Abbildung 12: Weg 1

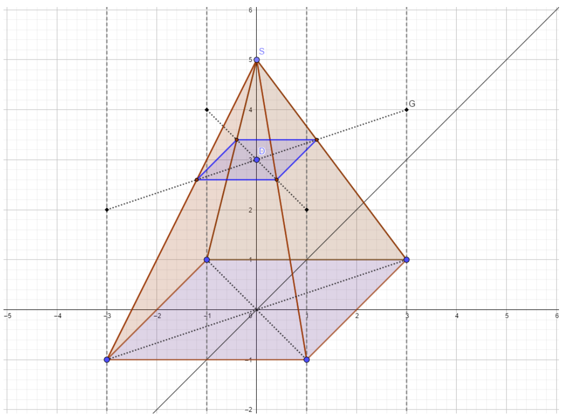


Abbildung 13: Weg 2

T3 Analyse Kavalierprojektionen

a) Wir berechnen E'_1 mit der gegebenen Formel:

$$\begin{aligned}
E'_1 &= \begin{pmatrix} -\tan(45) \\ \frac{-\tan(45)}{\cos(45)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

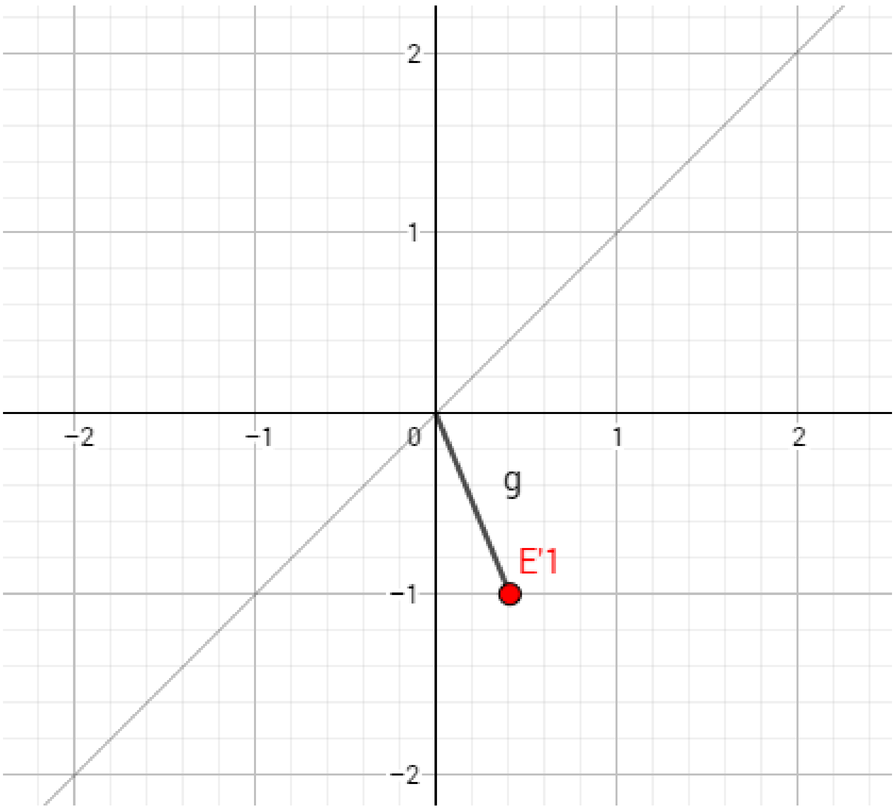


Abbildung 14: Projizierter PunktE'_1.

b) Keine Lösung darstellbar, hier geht es um euer Verständnis für die verschiedenen

Perspektiven

Übungseinheit 3

Hausübungen

Aufgabe H 9. *Pyramidenstumpf und Kegelstumpf in Kavalierprojektion*

In der Übungseinheit 2 hatten Sie u.a. einen Pyramidenstumpf in Kavalierprojektion gezeichnet. Sie sollen Ihre Figur nun um einen Kegelstumpf ergänzen. Wir wiederholen hier die Anweisungen für die Konstruktion des Pyramidenstumpfs.

(a) Zeichnen Sie einen Pyramidenstumpf mit quadratischem Grundriss (die Kantenlänge dürfen Sie wählen, 4 Einheiten könnte eine gute Wahl sein). Die Spitze der vollständigen Pyramide läge im Punkte $S = (0, 0, 5)$ liegt. Der Boden des Pyramidenstumpfs liegt in der x_1-x_2-Ebene, der Deckel 3 Einheiten darüber. Verwenden Sie hierzu die Kavalierprojektion mit den axonometrischen Angaben $\alpha = 135°$, $\beta = 90°$, $s_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $s_2 = 1$ und $s_3 = 1$

(b) Zeichnen Sie separat einen Grundriss des Pyramidenstumpfbodens. Fügen Sie zum Grundrissquadrat einen Inkreis hinzu. Markieren Sie die Punkte, an denen der Kreis das Quadrat berührt.

(c) Fügen Sie nun zu Ihren zuvor angefertigten parallelperspektivischen Darstellungen die Projektionsbilder des o.g. Kreises hinzu. *Hinweis: Dieser Kreis erscheint als Ellipse, die Berührpunkte mit dem Bild des Grundrissquadrats werden „richtig“ übertragen, Hilfestellungen hierzu finden Sie in den folgenden Aufgaben.*

(d) Zeichnen Sie nun in einer Ihrer zuvor angefertigten Darstellungen einen Kegelstumpf ein, der oben bzw. unten vom Deckel bzw. vom Boden des Pyramidenstumpfes begrenzt wird. Würde der Kegel vollständig gezeichnet, so würde seine Spitze mit der Spitze der Pyramide übereinstimmen.

In der Vorlesung hatten wir einen Kreis K mit seinem Umquadrat Q in einer Kavalierprojektion dargestellt, hierbei entstand eine Ellipse. Wir nutzen aus, dass sich Ellipse an das Projektionsbild Q' des Umquadrats anschmiegt. Außerdem hatten wir, um die Ellipse möglichst genau zeichnen zu können, das Teilverhältnis $1\colon \sqrt{2}$ auf die Diagonalenhälften des Parallelogramms Q' übertragen. Mit demn folgenden Aufgaben haben Sie Möglichkeit, diese Techniken zu vertiefen und per (Freihand-)Zeichnung oder mit der Software *Geogebra* nachzuvollziehen

Aufgabe H 10. *Übertragung von Teilverhältnissen – konstruktiv ohne Rechnung*

Wir studieren zunächst, wie sich ein Teilverhältnis von einer Strecke auf eine andere Strecke übertragen lässt. In der Abbildung 1 ist eine Strecke $\overline{AB}$ mit einem Zwischenpunkt C gegeben, der die Strecke im Verhältnis $3\colon 2$ unterteilt.[2] Wir wollen das Teilverhältnis $\overline{AC}\colon\overline{CB}$ auf die Strecke $\overline{DE}$ übertragen. Anders ausgedrückt: Wir wollen auf der Strecke $\overline{DE}$ einen Zwischenpunkt Z so bestimmen, dass

$$\frac{\overline{DZ}}{\overline{ZE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{3}{2} \quad \text{gilt.}$$

Hierzu gehen wir in zwei Schritten vor:

[2] Man braucht den Wert $\frac{3}{2}$ des Teilverhältnisses **nicht** zu kennen bzw. zu messen, um das Verfahren durchzuführen.

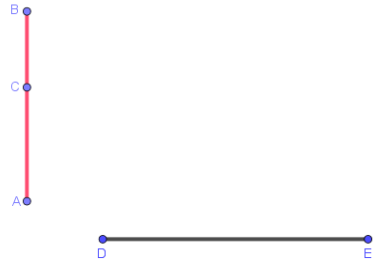
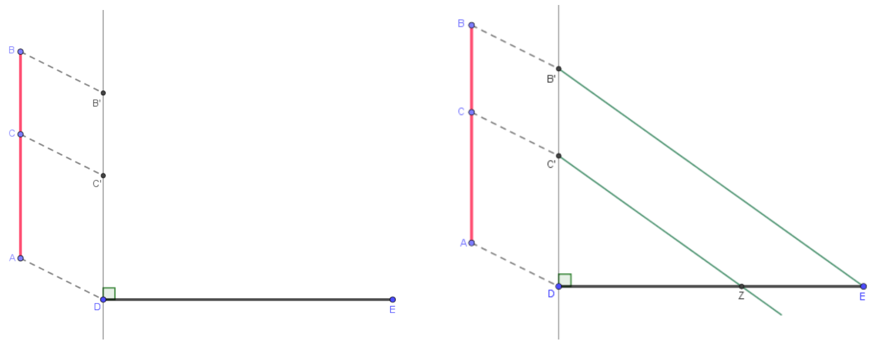


Abbildung 4: Übertragung des Teilverhältnisses $\overline{AC} : \overline{CB}$ auf die Strecke $\overline{DE}$.



(a) Schritt 1 (b) Schritt 2

Abbildung 5: Übertragung des Teilverhältnisses $\overline{AC} : \overline{CB}$ auf die Strecke $\overline{DE}$.

(1) Wir zeichnen durch den Punkt D eine Hilfsgerade h, die auf $\overline{DE}$ senkrecht steht. **Parallelen** zur Verbindungsstrecke $\overline{AD}$ durch die Punkte C bzw. B werden mit der Geraden h geschnitten und ergeben die Schnittpunkte C' bzw. B'.

(2) Wir zeichnen die Verbindungsstrecke $\overline{B'E}$ und hierzu eine **Parallele** durch den Punkt C'. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Strecke $\overline{DE}$ ist der gesuchte Zwischenpunkt Z. Da die Dreiecke DEB' und DZC' **ähnlich** sind, sind alle einander entsprechene Teilverhältnisse gleich, insbesondere gilt $\overline{DZ} : \overline{ZE} = \overline{DC'} : \overline{C'B'}$.

Aufgabe H 11. *Ubertragung von Teilverhältnissen auf (Halb-)Diagonalen eines Parallelogramms*

Betrachten Sie die Abbildung 3 Wir wollen die Strecke AM so durch einen Punkt S unterteilen, dass $\frac{MS}{MA} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ gilt. Hierzu verwenden wir ein Quadrat $EAFG$ als Referenz, dieses liefert uns das Verhältnis $\frac{AE}{AG} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Wir ziehen einen Kreisbogen mit Radius $r = \overline{AG}$ um den Punkt A, den Schnittpunkt des Kreisbogens mit der Geraden $A \vee E$ nennen wir W. Die Strecke $\overline{AW}$ wird durch den Punkt E so unterteilt, dass für das Teilverhältnis ebenfalls $\frac{AE}{AW} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ gilt.

(a) **Begründen Sie**, dass der Punkt S' die Strecke $M'W'$ so unterteilt, dass $\frac{M'S'}{M'W'} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ gilt.

(b) **Begründen Sie**, dass der Punkt S die Strecke AM so unterteilt, dass $\frac{MS}{MA} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ gilt.

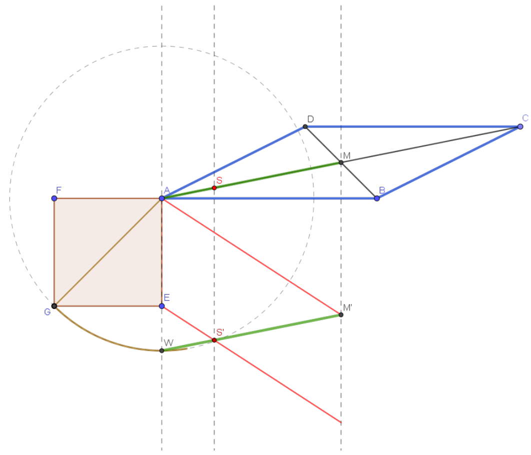


Abbildung 6: Übertragung von Teilverhältnissen auf (Halb-)Diagonalen eines Parallelogramms.

Wir wollen nun auch noch die Strecke MC so durch einen Punkt S_2 unterteilen, dass $\frac{MS_2}{MC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ gilt.

(c) **Begründen Sie**, dass die in Abbildung 4 gezeigte Konstruktion dies leistet.

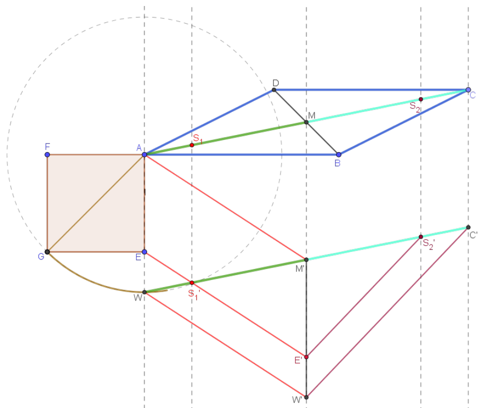


Abbildung 7: Erweiterung der Konstruktion zur Übertragung eines Teilverhältnisses auf die andere Halbdiagonale des Parallelgramms.

Aufgabe H 12. *Konstruktion einer Ellipse in einem umgebenden Parallelogramm*

Um eine Ellipse in das gegebene Parallelogramm einzupassen, verfährt man, wie oben geschildert, danach werden auch auf der anderen Diagonalen Unterteilungspunkte S_3 und S_4 konstruiert. Nachdem ferner die vier Berührpunkte (durch Habierung der Kanten des Parallelogramms) gezeichnet wurden, kann die Ellipse durch die acht Punkte B_1 bis B_4 sowie S_1 bis S_4 auch von Hand recht sicher und glatt gezeichnet werden, vgl. Abbildung 5.

Führen Sie die angegebenen Konstruktionsschritte für von Ihnen beliebig wählbare Parallelogramme **durch**.

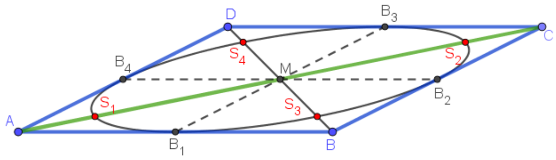


Abbildung 8: Konstruktion einer Ellipse in einem umgebenden Parallelogramm.

H8 Pyramidenstumpf und Kegelstumpf in Kavalierprojektion

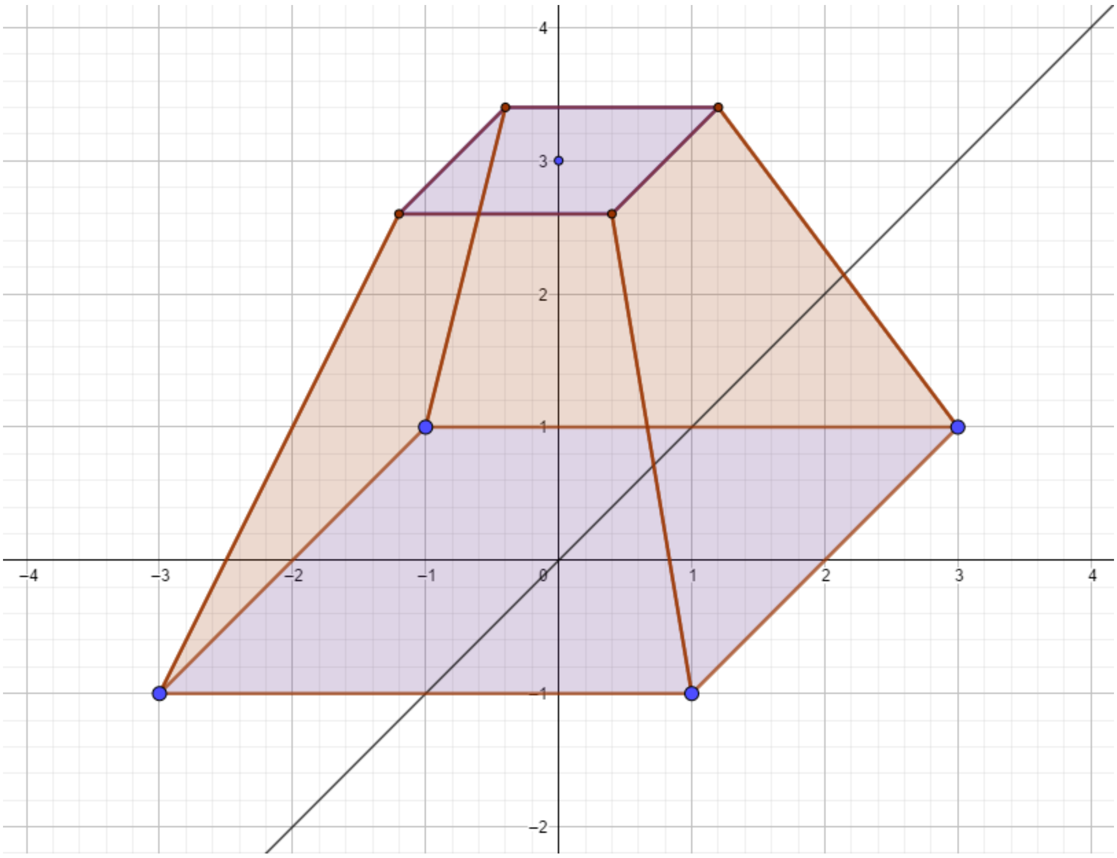
a) 

Abbildung 15: Wir zeichnen den Pyramidenstumpf wie in 13 b)

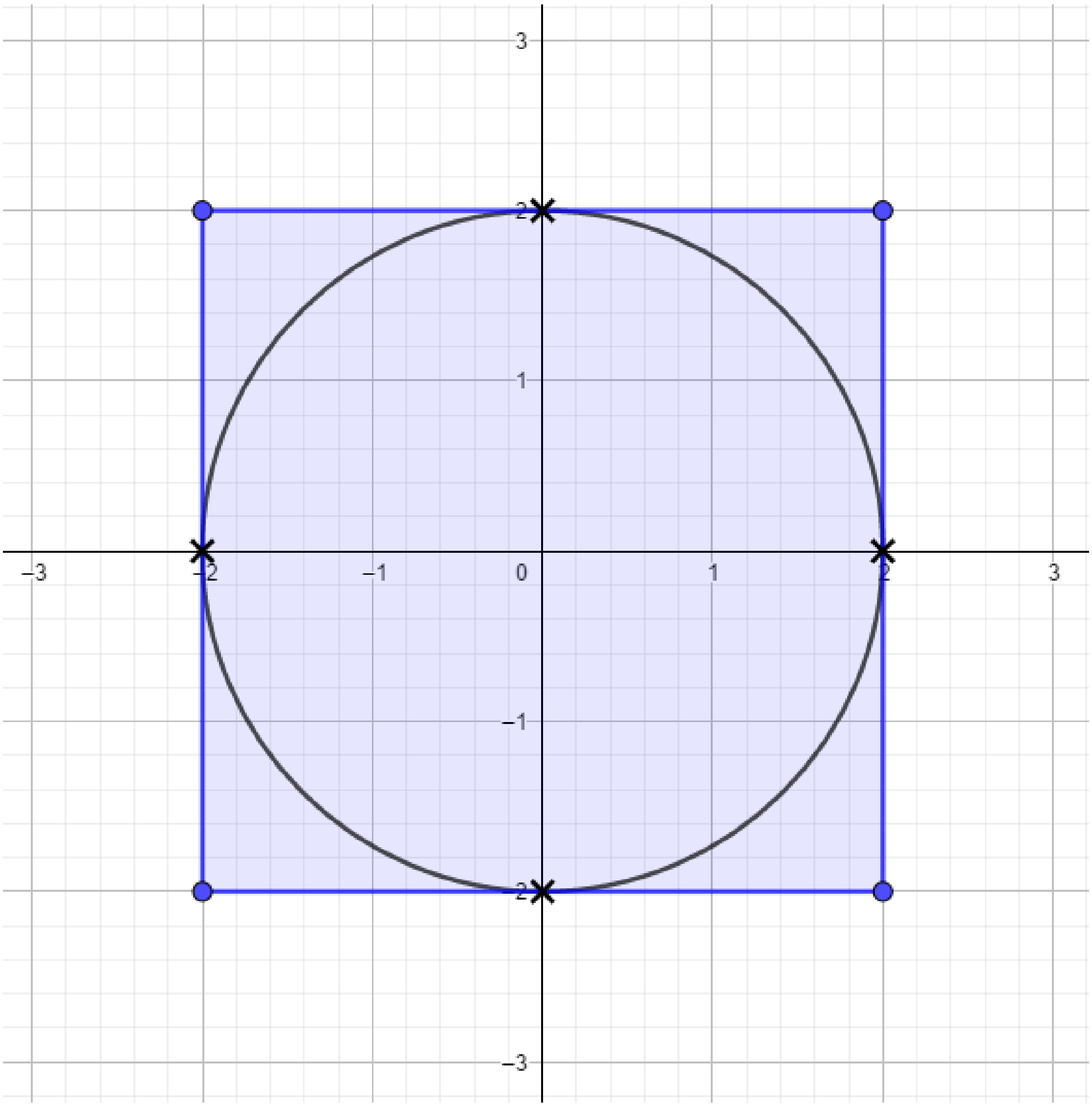


Abbildung 16: Für den Grundriss reichen 2 Achsen

c)

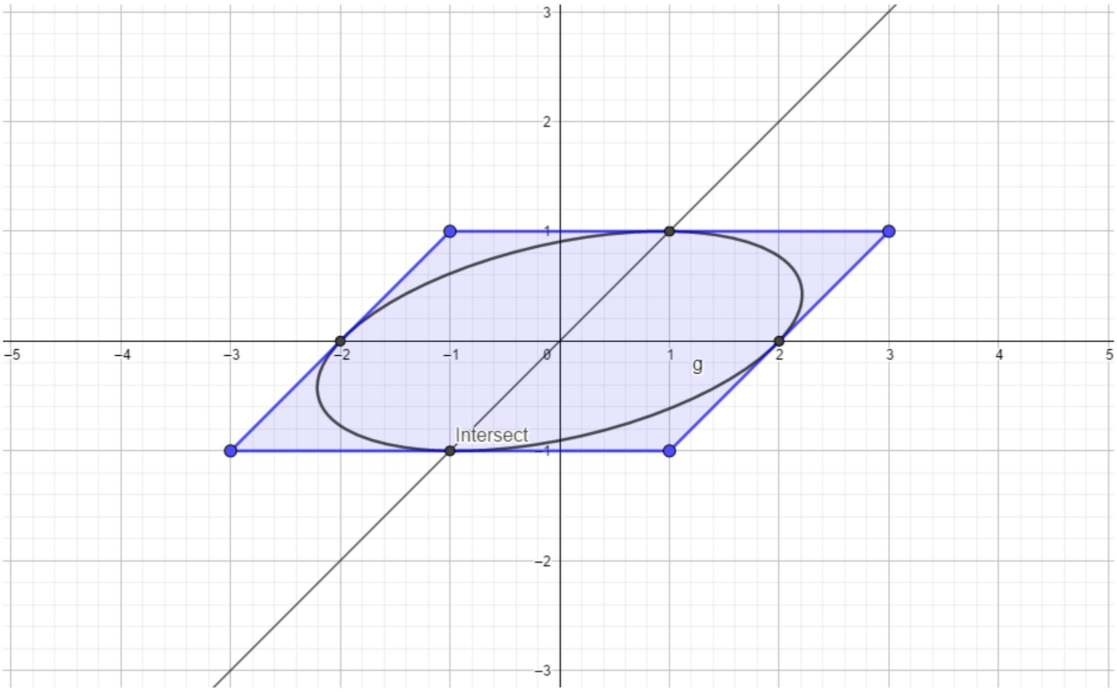
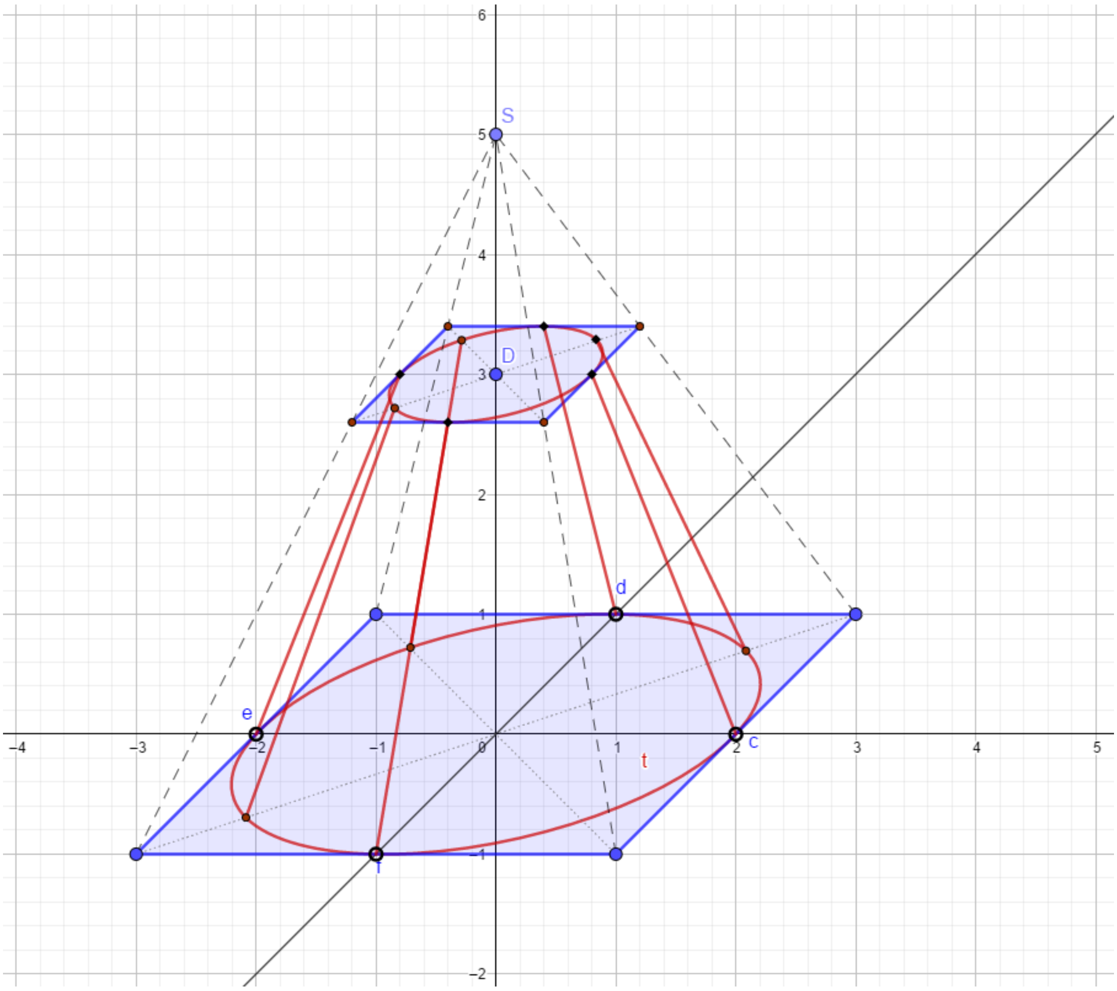


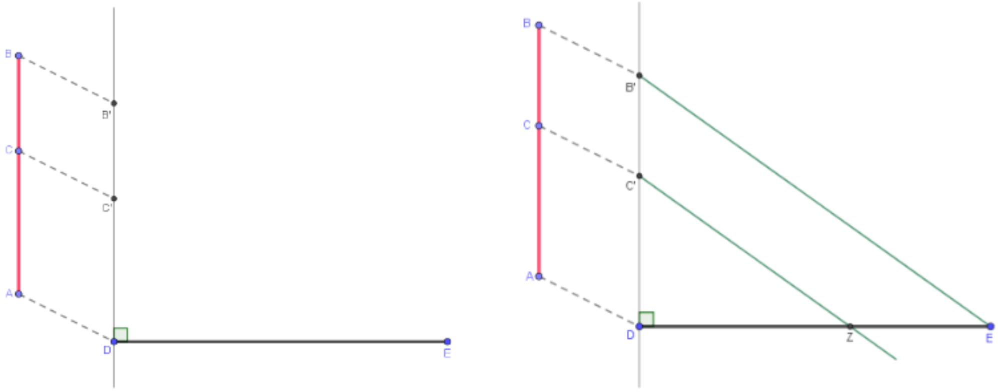
Abbildung 17: Der Kreis erscheint als Elipse



d)

Abbildung 18: Der Kegelstumpf kann durch das Verbinden bekannter Punkte dargestellt werden

H9 Übertragung von Teilverhältnissen – konstruktiv ohne Rechnung



(a) Schritt 1 (b) Schritt 2

Abbildung 19: Teilverhältnis einer Strecke auf eine andere Strecke übertragen. Z unterteilt die Strecke $\overline{DE}$ im gleichen Verhältnis wie C die Strecke $\overline{AB}$.

H10 Übertragung von Teilverhältnissen auf (Halb-)Diagonalen eines Parallelogramms

a) $\frac{\overline{M'S'}}{\overline{M'W'}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ stimmt, weil $\frac{\overline{MS}}{\overline{MA}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und beide parallel zueinander stehen und sie von untereinander parallelen Geraden geschnitten werden.

b) Der Punkt S unterteilt die Strecke AM im Verhältnis $\frac{1}{\sqrt{2}}$, weil $\overline{AW} = \overline{AG}$ und $\overline{MS} = \overline{AE}$ und damit $\frac{\overline{AE}}{\overline{AG}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ergibt.

c) Ja stimmt, da $\overline{AE} = 1$, $\overline{EG} = 1$, $\overline{GF} = 1$, $\overline{AF} = 1$ und damit ein Einheits-Quadrat ist. Ebenso ist $\overline{AG} = \sqrt{2}$ und somit $\overline{AW} = \sqrt{2}$. Deswegen unterteilt Punkt E die Strecke $\overline{AW}$ im Verhältnis $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Der Punkt S_2' unterteilt $\overline{M'C'}$ genauso wie E' die Strecke $\overline{M'W'}$. S_2' wird nach oben projiziert und unterteilt die Strecke $\overline{MC}$ im gleichen Verhältnis wie $\overline{M'C'}$.

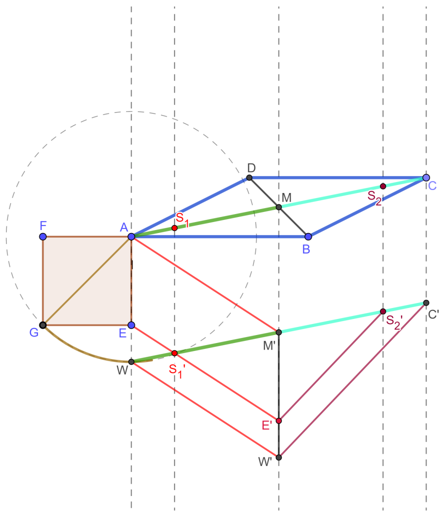


Abbildung 20: Übertragung von Teilverhältnissen auf (Halb-)Diagonalen eines Parallelogramms

H11 Konstruktion einer Ellipse in einem umgebenden Parallelogramm

Die Lösung ist schon in der Aufgabenstellung enthalten.

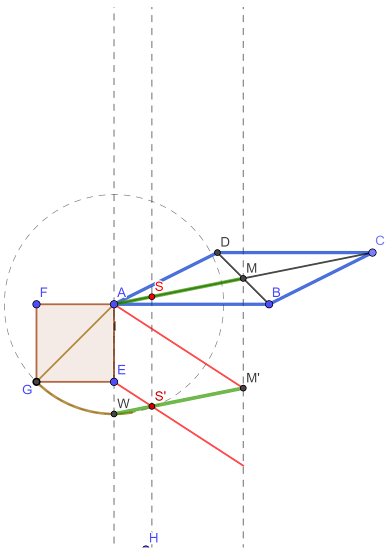


Abbildung 21: Erweiterung der Konstruktion zur Übertragung eines Teilverhältnisses auf die andere Halbdiagonale des Parallelogramms

Übungseinheit 4

Präsenzübungen

Aufgabe P 4. *Zentralperspektive – Sitzung 1*

Im dreidimensinalen Raum sei ein kartesisches Koordinatensystem gegeben. Wir betrachten die Zentralprojektion mit den folgenden Daten: Das Projektionszentrum mit Koordinaten $Z = (0, 4, -12)$, der Hauptpunkt mit Koordinaten $H = (0, 4, 0)$ sowie die Bildebene $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$. Die Bildebene ist also die x-y-Koordinatenebene.

In vielen realen Szenen gibt es eine ausgezeichnete Ebene, die sogenannte Standebene. Diese kann in der Realität durch die Ebene gegeben sein, in der eine Straßen- bzw. Fahrbahnoberfläche liegt und auf der Gebäude errichtet sind, oder durch die Ebene einer Tischplatte, auf der sich Gegenstände befinden, etc.

Wir wählen als Standebene σ die x-z-Ebene, also $\sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$. In dieser Standebene befinde sich ein Quadrat mit den Eckpunkten

$$P = (6, 0, -5), \quad Q = (8, 0, -5), \quad R = (8, 0, -3) \quad \text{und} \quad T = (6, 0, -3).$$

(a) **Konstruieren Sie** die Projektionsbilder $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}$ und $\overline{T}$ der gegebenen vier Punkte. Sie benötigen hierzu den in die Bildebene liegenden Punkt $\tilde{Z}$, der durch Drehung (oder „Klappung“) des Punktes Z in die Bildebene entsteht. Ferner benötigen Sie die Punkte $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$, $\tilde{R}$ und $\tilde{T}$, die durch Klappen der Punkte P, Q, R und T in die Bildebene entstehen.

(b) Die Geraden $P \vee T$ und $Q \vee R$ sind parallel. Deren Projektionsbilder $\overline{P} \vee \overline{T}$ und $\overline{Q} \vee \overline{R}$ schneiden sich in einem Punkt, dem *Fluchtpunkt* F_1. **Ermitteln Sie** in Ihrer Skizze den Punkt F_1.

(c) Es seien ferner gegeben die Punkte $A = (5, 0, -4)$ und $B = (7, 0, -4)$. **Konstruieren Sie** die das Projektionsbild des Quadrates $(APBT)$.

(d) **Ermitteln Sie** in Ihrer Skizze den Fluchtpunkt F_2 für die (im Raum zueinander parallelen) Geraden $P \vee A$ und $B \vee T$. **Ermitteln Sie** ferner den Fluchtpunkt F_3 für die Geraden $A \vee T$ und $P \vee B$.

(e) Ein weiteres Quadrat liege an der Kante $B \vee T$ an und enthalte als dritten Eckpunkt den Punkt R. **Konstruieren Sie** das Projektionsbild dieses Quadrats unter Verwendung der Fluchtpunkte F_2 und F_3.

Für Schnelle sogleich, für alle anderen zuhause:

(f) Bearbeiten Sie mit der Software Geogebra die Aufgabe H 12.

Bitte installieren Sie die kostenlose Software *Geogebra Classic* auf Ihrem Rechner und bringen Sie diesen zur Übungssitzung mit.

Aufgabe P 5. *Zentralperspektive – Sitzung 2*

Wir betrachten die Zentralprojektion mit dem Projektionszentrum $Z = (0, 0, -12)$, dem Hauptpunkt $H = (0, 0, 0)$ sowie der Bildebene

$$\pi := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z = 0\right\}.$$

Die „Szene" bestehe aus einem Quader Q der Höhe 2 mit quadratischem Grundriss. Die Eckpunkte am Boden des Quaders, die in der Standebene $\sigma := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, y = -4\right\}$ liegen, seien

$$P_1 = (7, -4, -6), \quad Q_1 = (8, -4, -4), \quad R_1 = (6, -4, -3) \quad \text{und} \quad T_1 = (5, -4, -5).$$

(a) **Konstruieren Sie** zunächst das Projektionsbild der Grundfläche des Quaders, also das Bild des Grundrissquadrats (P_1, Q_1, R_1, T_1), in der angegebenen Zentralprojektion.

(b) **Ermitteln Sie** in Ihrer Skizze für die (zueinander parallelen) Geraden $P_1 \vee Q_1$ und $T_1 \vee R_1$ den zugehörigen Fluchtpunkt E. **Bestimmen Sie** ferner für die (zueinander parallelen) Geraden $P_1 \vee T_1$ und $Q_1 \vee R_1$ den zugehörigen Fluchtpunkt F.

(c) Konstruieren Sie das Projektionsbild des Quaders Q. Hierzu müssen Sie zunächst die Projektionsbilder der Punkte $P_2 = (7, -2, -6)$, $Q_2 = (8, -2, -4)$, $R_2 = (6, -2, -3)$ und $T_2 = (5, -2, -5)$ konstruieren, die in der Deckelfläche des Quaders liegen.

(d) Prüfen Sie zur Kontrolle Ihrer Konstruktion nach, ob sich für die Deckelkanten $P_2 \vee Q_2$ und $T_2 \vee R_2$ derselbe Fluchtpunkt E ergibt wie für die entsprechenden Kanten der Bodenfläche.

(e) Konstruieren Sie nun das Bild des gleichen Quaders noch einmal, verwenden Sie jedoch als **neue Standebene** σ' die Ebene, die den **Deckel** des Quaders enthält. *Hinweis: Sie können sich hiermit klarmachen, dass das Konstruktionsergebnis bzw. das Projektionsbild (natürlich) nicht von der (oft recht willkürlichen) Wahl der Standebene abhängt.*

(f) **Markieren Sie** den Fluchtpunkt der (zueinander parallelen) Geraden $P_1 \vee R_1$ und $P_2 \vee R_2$.

Für Schnelle sogleich, für alle anderen zuhause:

Bearbeiten Sie die Aufgabe H 13

Hausübungen

Aufgabe H 12. *Zentralperspektivische Darstellung eines Fliesenmusters*

Bearbeiten Sie diese Aufgabe mit der Software Geogebra.

Im dreidimensinalen Raum sei ein kartesisches Koordinatensystem gegeben. Wir betrachten wieder die Zentralprojektion mit Projektionszentrum $Z = (0, 4, -12)$, Hauptpunkt $H = (0, 4, 0)$ sowie die Bildebene $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$.

Wir wählen als Standebene σ die x-z-Ebene, also $\sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$. In dieser Standebene befinde sich ein Quadrat mit den Eckpunkten

$$A = (5, 0, -4), \quad P = (6, 0, -5), \quad B = (7, 0, -4) \quad \text{und} \quad T = (6, 0, -3).$$

(a) **Konstruieren Sie** die Projektionsbilder $\overline{A}$, $\overline{P}$, $\overline{B}$ und $\overline{T}$ der gegebenen vier Punkte und (damit) das Projektionsbild des Quadrates $(APBT)$. Sie benötigen hierzu den in die Bildebene liegenden Punkt $\tilde{Z}$, der durch Drehung (oder „Klappung") des Punktes Z in die Bildebene entsteht. Ferner benötigen Sie die Punkte $\tilde{A}$, $\tilde{P}$, $\tilde{B}$ und $\tilde{T}$, die durch Klappen der Punkte A, P, B und T in die Bildebene entstehen.

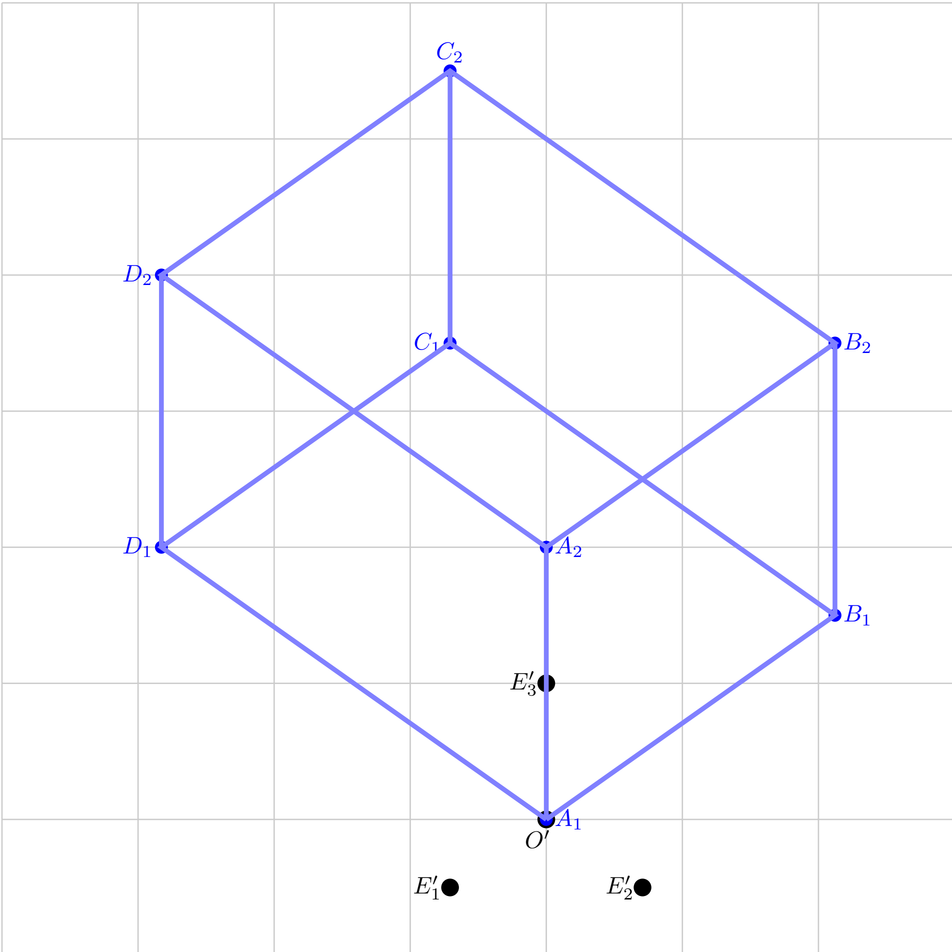
(b) **Ermitteln Sie** in Ihrer Skizze den Fluchtpunkt F_2 für die (im Raum zueinander parallelen) Geraden $P \vee A$ und $B \vee T$. **Ermitteln Sie** ferner den Fluchtpunkt F_3 für die Geraden $A \vee T$ und $P \vee B$.

(c) Ein weiteres Quadrat liege an der Kante $B \vee T$ an und enthalte als dritten Eckpunkt den Punkt $R = (8, 0, -3)$. **Konstruieren Sie** das Projektionsbild dieses Quadrats unter Verwendung der Fluchtpunkte F_2 und F_3.

(d) **Ergänzen Sie** Ihre Skizze zu einer „Parkettierung", die Sie sich im Original als Muster aus quadratischen Fliesen denken dürfen, die in Größe und Ausrichtung dem Quadrat $(APBT)$ entsprechen. Verwenden Sie hierzu Strahlen, die von den Fluchtpunkten F_2 und F_3 ausgehen. Alle Strahlen, die ausgehend von F_2 auf Flieseneckpunkte, die zueinander benachbart sind und untereinander auf der gleichen Geraden liegen, zulaufen, schneiden die Grundlinie in gleichen Abständen. Ebenso liegen die Schnittpunkte der entsprechenden von F_3 ausgehenden Strahlen mit der Grundlinie *äquidistant*.

Aufgabe H 13. *Parallelperspektive und (extreme) Zentralperspektive*

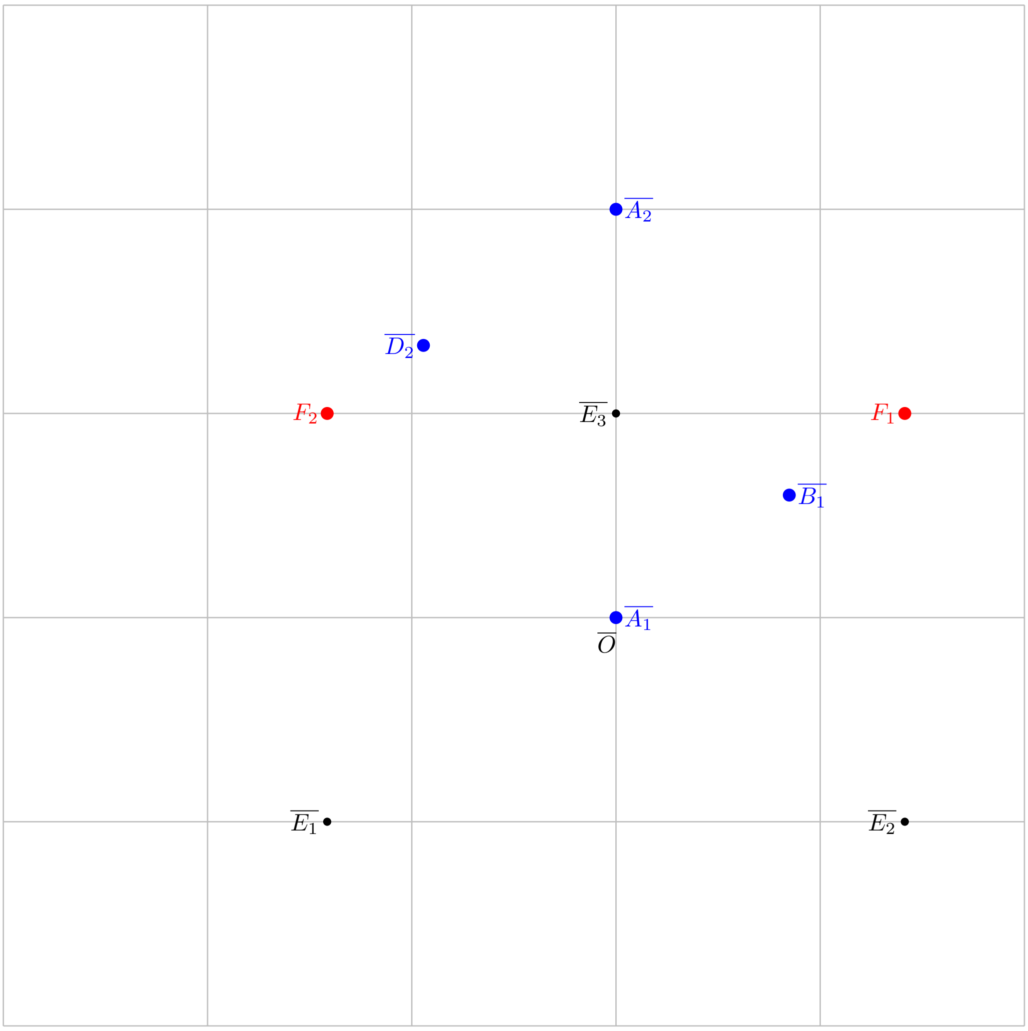
Die folgende Abbildung zeigt einen Quader in einer Parallelprojektion:



Vervollständigen Sie die Darstellung des Quaders in der umseitig angegebenen zentralperspektivischen Darstellung. Der Punkt F_1 bezeichnet den Fluchtpunkt aller zur Kante $A_1 \vee B_1$ parallelen Geraden, der Punkt F_2 ist der Fluchtpunkt aller zur Kante $A_1 \vee D_1$ parallelen Geraden. Die Bildebene ist parallel zu der Kante $A_1 \vee A_2$ (steht also senkrecht auf der Standebene), der Hauptpunkt der Zentralprojektion liegt bei E_3.

Hinweise: Alle Projektionsbilder sind in der umseitigen Darstellung mit Überstrichen markiert, z.B. $\overline{A_1}$; die Projektionsbilder der Einheitspunkte E_1, E_2 und E_3 dienen nur dem Vergleich mit der umseitigen Parallelprojektion, sie sind für Ihre Konstruktion nicht weiter wichtig. Die Bildebene ist parallel zu der Kante $A_1 \vee A_2$, der Hauptpunkt der Zentralprojektion liegt bei E_3. Das Projektionszentrum befindet sich sehr nah am Gebäude, daher ergibt sich eine recht „extreme" Perspektive. Dies können Sie schon aus der Tatsache schließen, dass der Abstand der beiden Fluchtpunkte vergleichsweise gering ist.

Bitte zeichnen Sie Ihre „Antwort“ in das folgende Diagramm ein:



Tutoriumsübungen

Aufgabe T 4. *Zentralperspektive*

Gegeben sei eine Zentralprojektion durch das Projektionszentrum mit Koordinaten $Z = (0, 0, -12)$, den Hauptpunkt mit Koordinaten $H = (0, 0, 0)$ sowie die Bildebene

$$\pi = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = 0 \right\}.$$

Es sei ferner gegeben ein Quader der Höhe 3 mit quadratischem Grundriss. Die Eckpunkte des Quaders, die in der Standebene $\sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = -5 \right\}$ liegen, seien

$$A_1 = (4, -5, -7), \quad B_1 = (5, -5, -6), \quad C_1 = (4, -5, -5) \quad \text{und} \quad D_1 = (3, -5, -6).$$

(a) **Konstruieren Sie** das Bild der Grundfläche (des Grundriss-Quadrats) in der angegebenen Zentralprojektion. Nutzen Sie hierzu die Vorlage auf der zweiten Seite.

(b) **Ermitteln Sie** in Ihrer Skizze für die (zueinander parallelen) Geraden $A_1 \vee B_1$ und $C_1 \vee D_1$ den zugehörigen Fluchtpunkt F_1. Ermitteln Sie ferner den Fluchtpunkt F_2 für die (zueinander parallelen) Geraden $A_1 \vee D_1$ und $B_1 \vee C_1$.

(c) Vervollständigen Sie nun Ihre Zeichnung, so dass der komplette Quaders zu sehen ist. Hierzu müssen Sie die Projektionsbilder der Punkte A_2, B_2, C_2 und D_2 konstruieren, die in der Deckelfläche liegen.

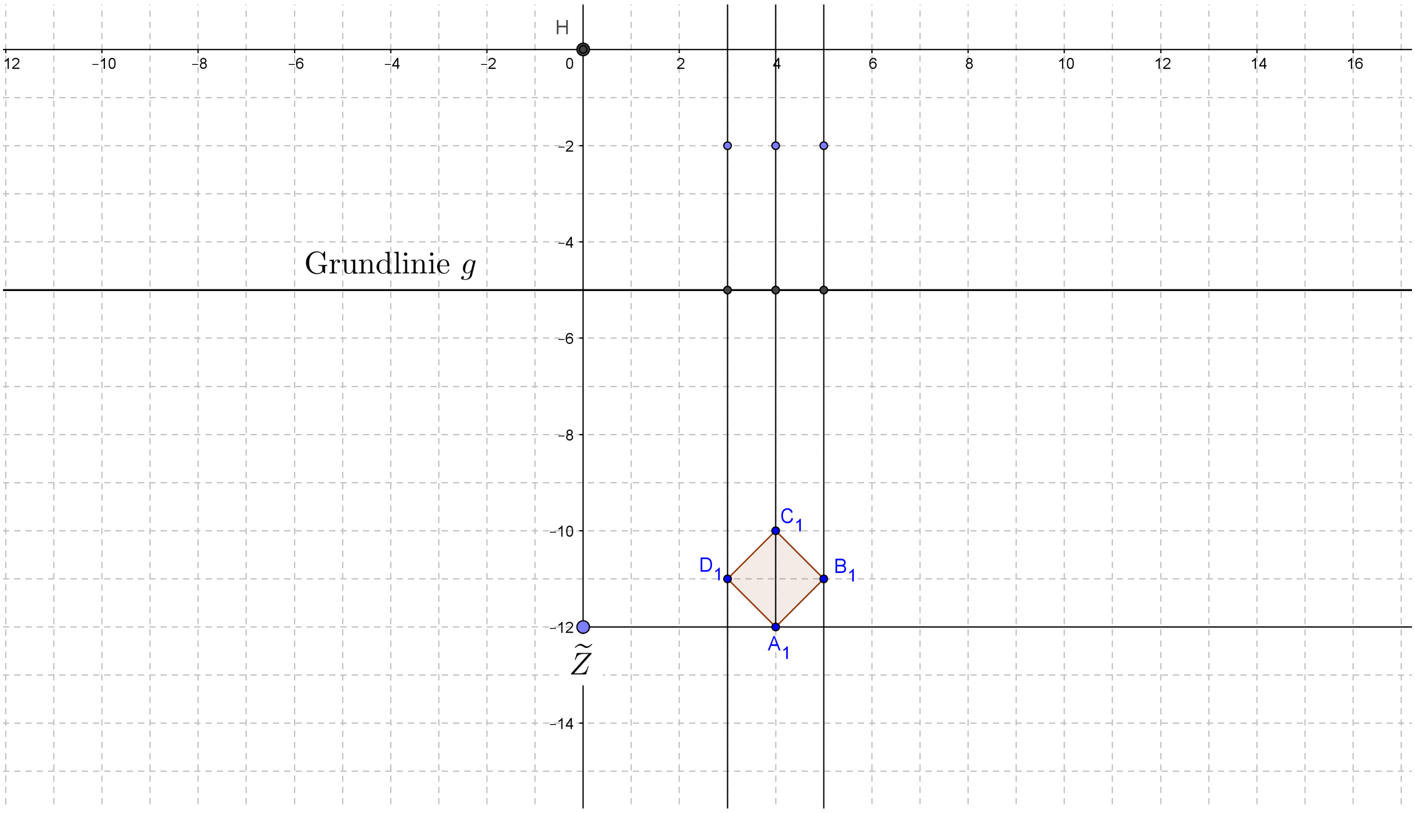
(d) Konstruieren Sie (auf der Vorlage der dritten Seite) das Bild des gleichen Quaders noch einmal, verwenden Sie jedoch als **neue „Standebene“** die Ebene, die den Deckel des Quaders enthält.
Hinweis: Sie können sich hiermit klarmachen, dass das Konstruktionsergebnis bzw. das Projektionsbild (natürlich) nicht von der (oft recht willkürlichen) Wahl der Standebene abhängt.

Für Schnelle sogleich, für alle anderen zuhause:

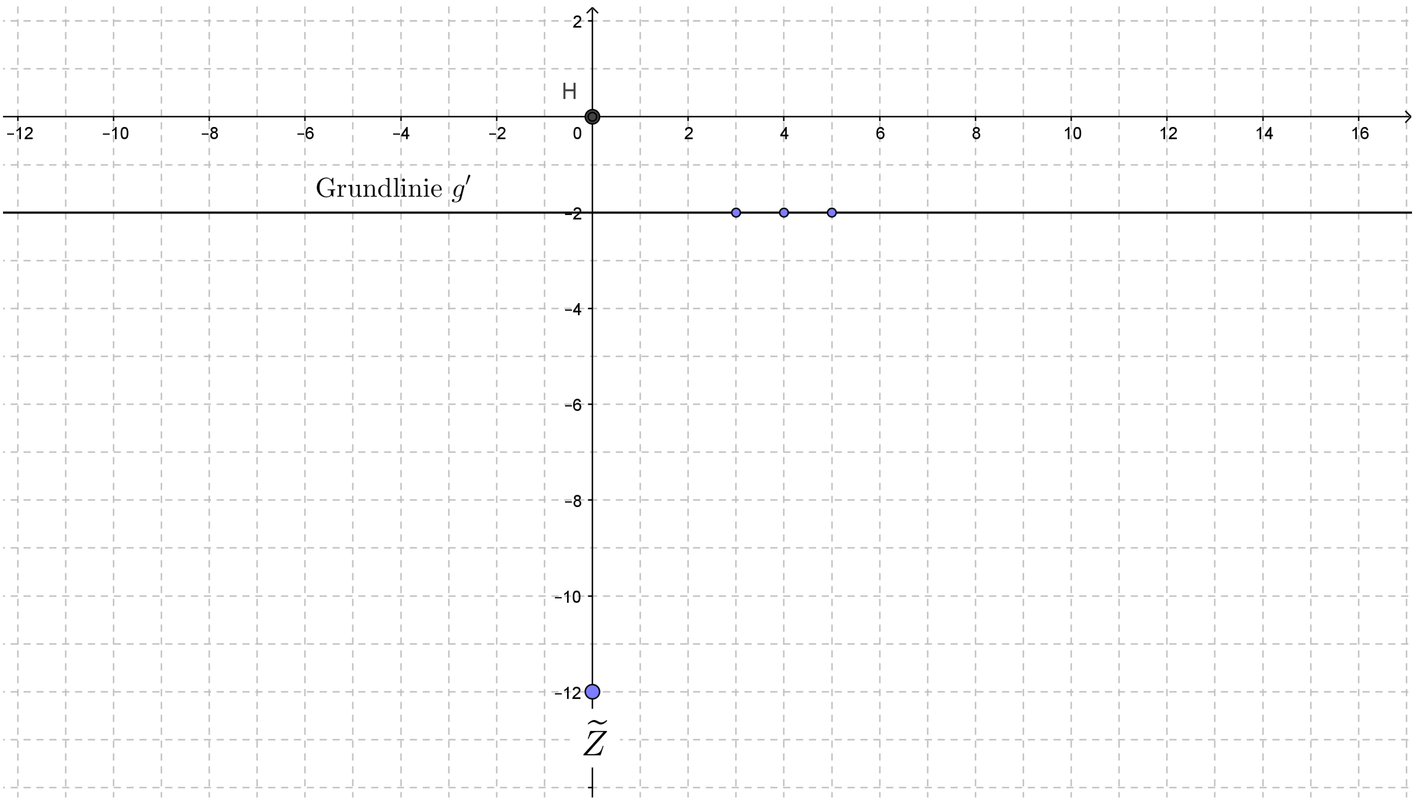
(e) Wählen Sie eine neue Zentralperspektive mit Projektionszentrum $Z_2 = (0, -2, -12)$ und Hauptpunkt $H_2 = (0, -2, 0)$ **Zeichnen Sie** den Punkt $\widetilde{Z_2}$ ein, der durch Klappen des Punktes Z_2 in die Bildebene entsteht. **Konstruieren** Sie dann das Bild des oben gegebenen Quaders unter dieser Zentralprojektion.

Aufgabe T 5. *Mehr Zentralperspektive*

Vervollständigen Sie ggf. Ihre Arbeit an den Aufgaben P 4 und P 5.



H
Grundlinie g
C_1
D_1
B_1
A_1
$\widetilde{Z}$



H
Grundlinie g'
$\widetilde{Z}$

P5 Zentralperspektive - Sitzung 1

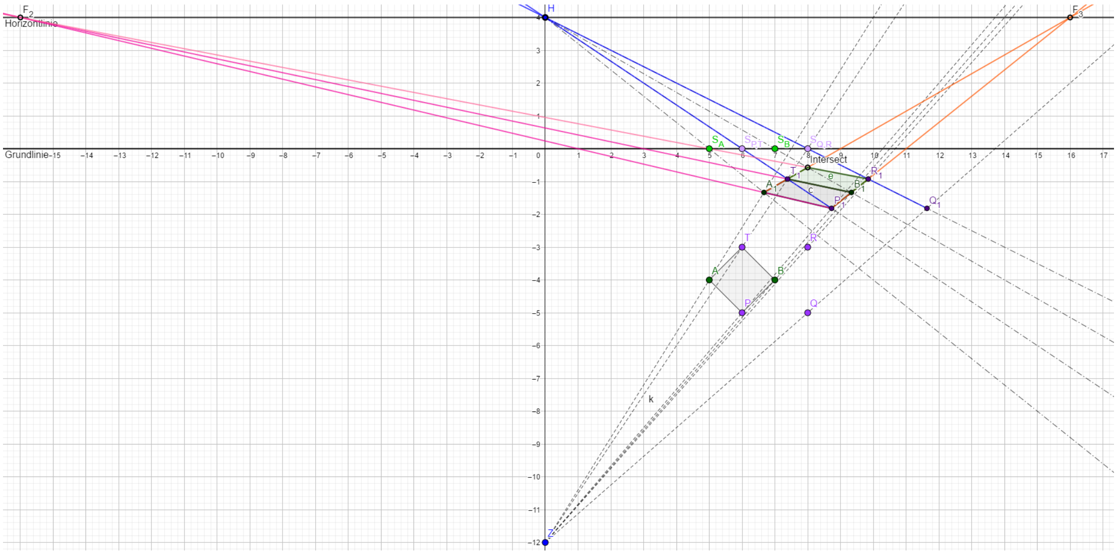


Abbildung 22: Vollständige Darstellung bis Teilaufgabe e

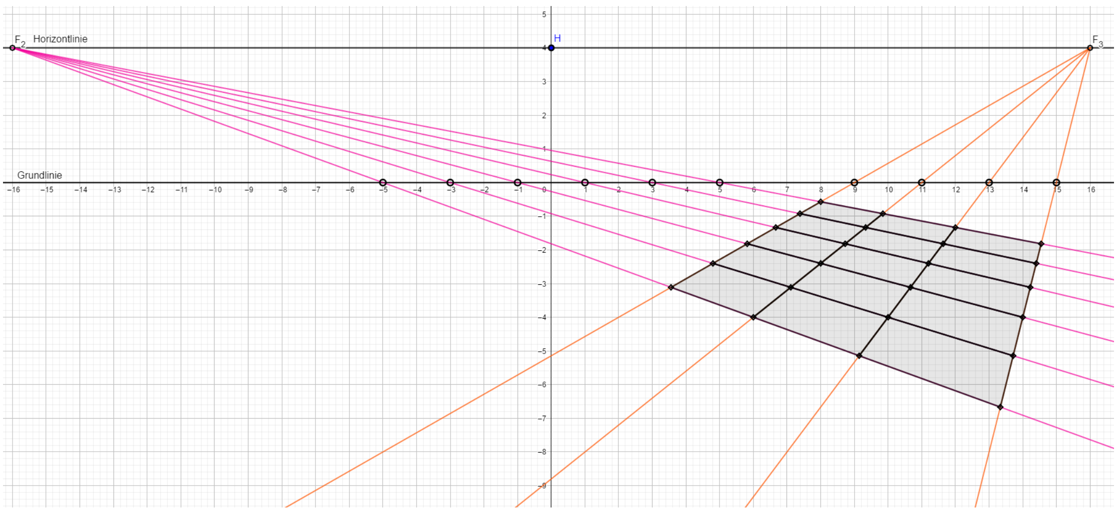


Abbildung 23: Vollständige Darstellung Teilaufgabe f

P6 Zentralperspektive - Sitzung 2

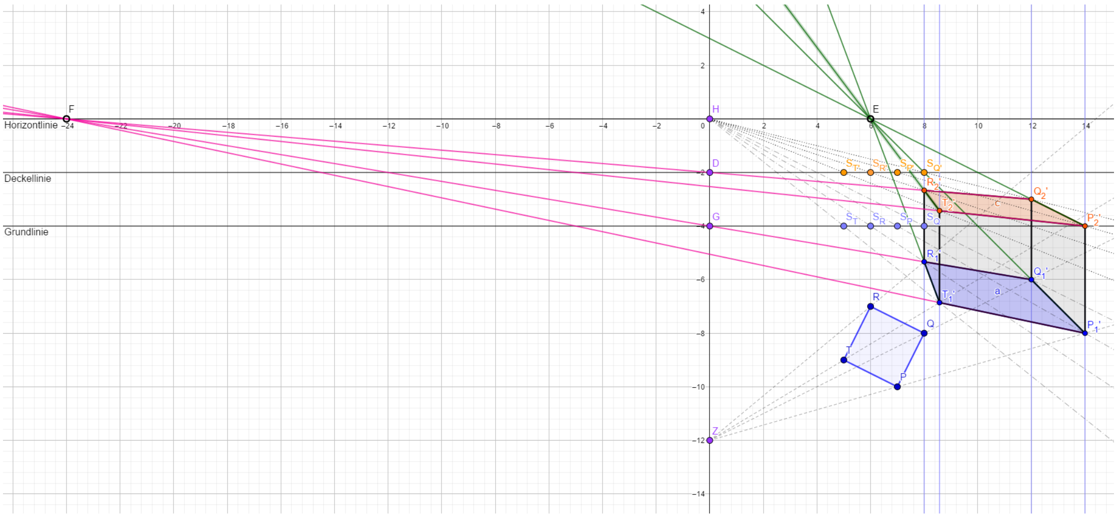


Abbildung 24: Vollständige Darstellung bis Teilaufgabe d.

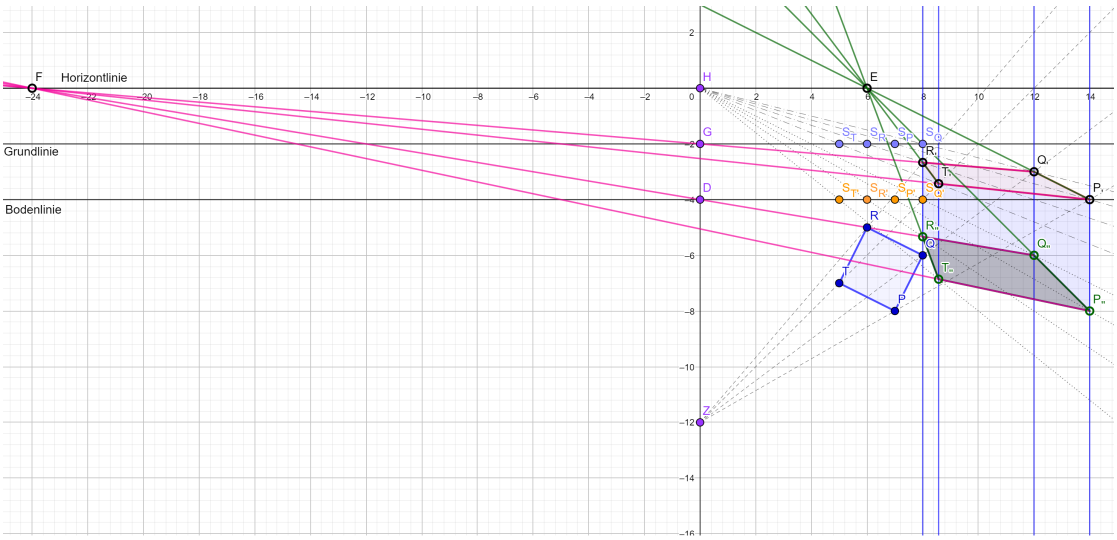


Abbildung 25: Vollständige Darstellung Teilaufgaben e und f.

H12 Keine Lösung vorhanden.

H13 Keine Lösung vorhanden.

T4 Zentralperspektive

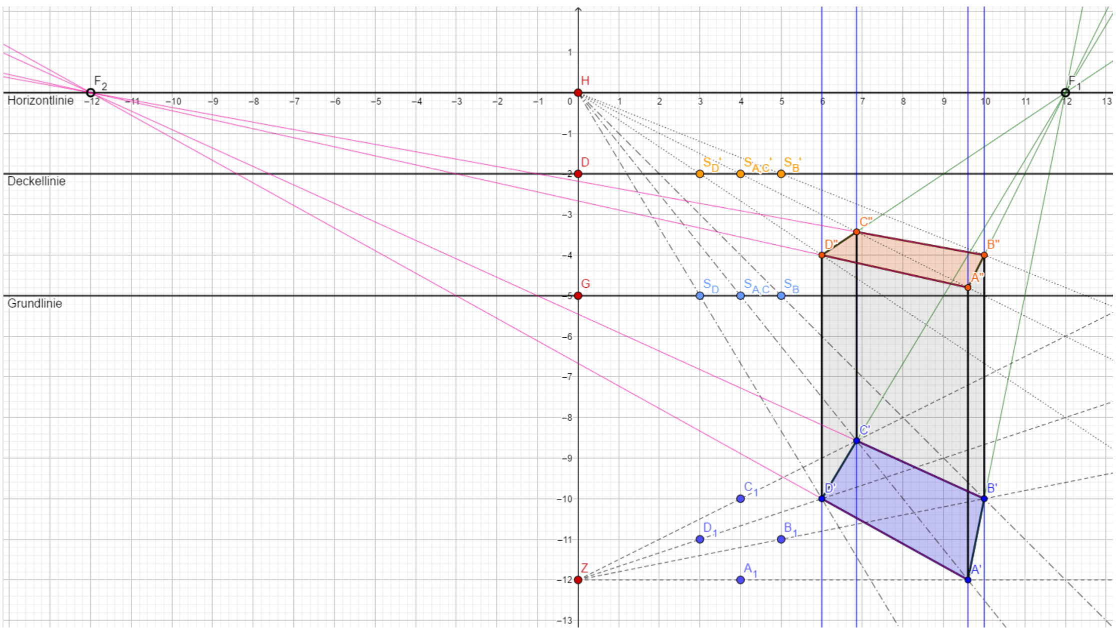


Abbildung 26: Vollständige Darstellung bis Teilaufgabe c

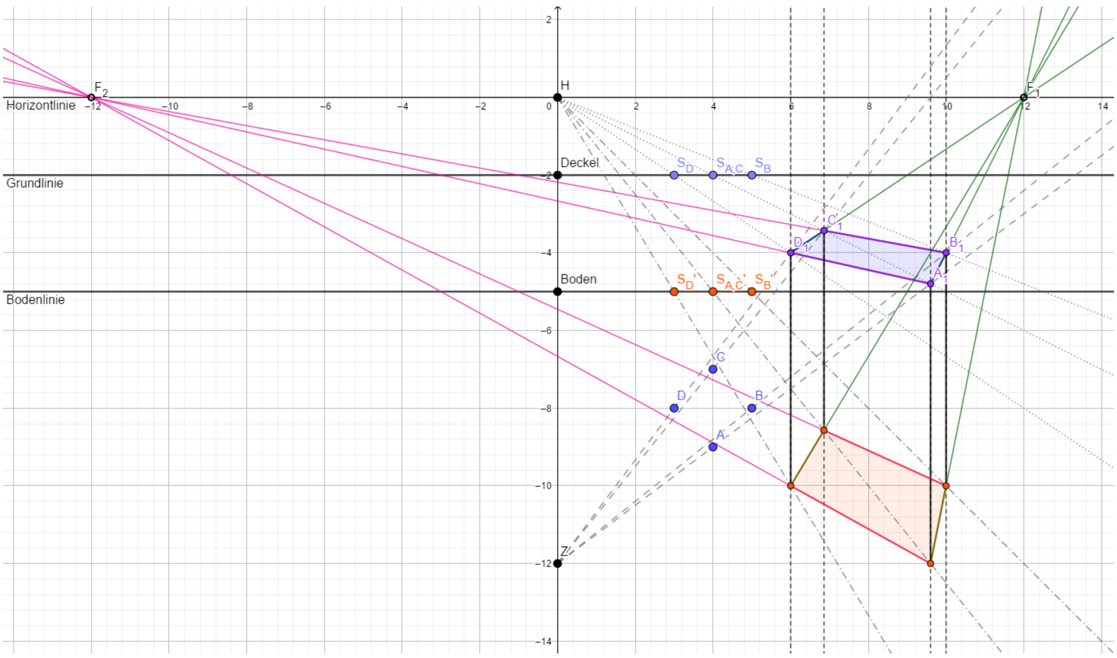


Abbildung 27: Vollständige Darstellung Teilaufgabe d

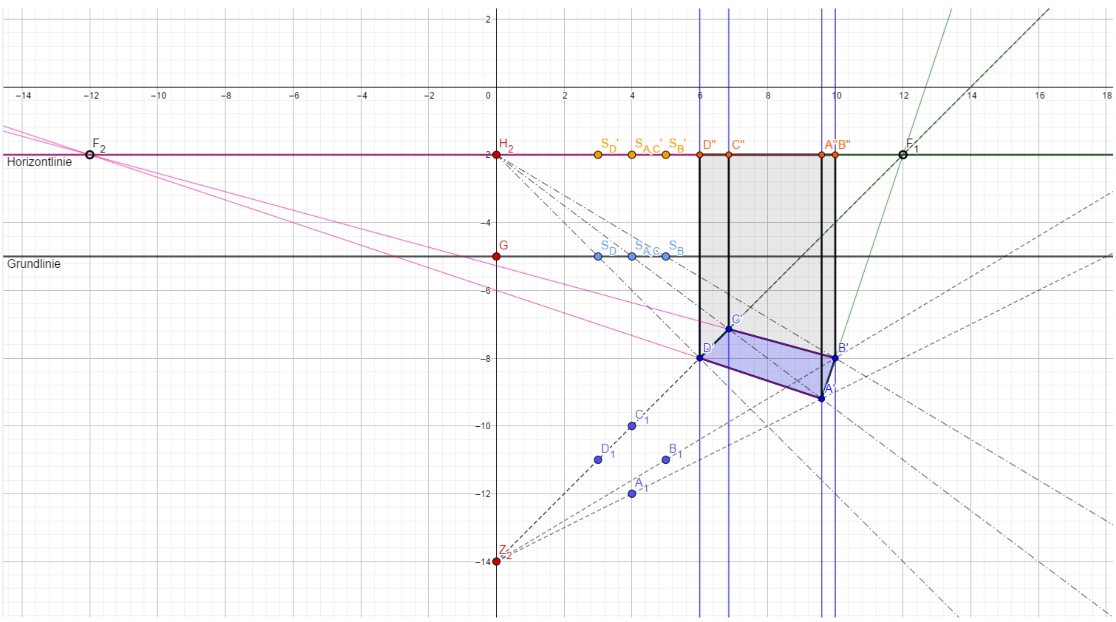


Abbildung 28: Vollständige Darstellung Teilaufgabe e

T5 Mehr Zentralperspektive

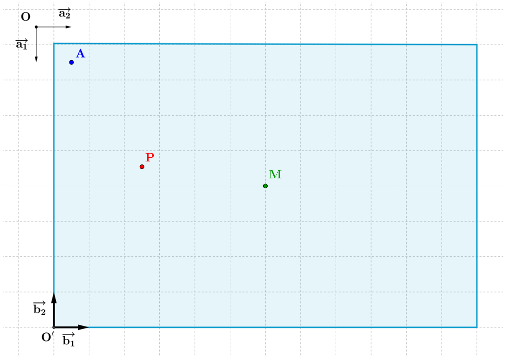
Keine Lösungsdarstellung möglich, siehe P6 und P7.

Übungseinheit 5

Hausübungen

Aufgabe H 14. *Koordinatensysteme am Computerbildschirm*

Für die Beschreibung der Lage von Punkten auf Bildschirmen (bzw. ganz generell in digitalen Bildern) sind u.a. die beiden in dieser Aufgabe betrachteten Koordinatensysteme üblich. Zur Erläuterung betrachten wir einen „Modellbildschirm“ mit einer Höhe von 8 Pixeleinheiten:



Bezüglich des Koordinatensystems $K = (O; \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})$ hat der Punkt A die Koordinaten $(1, 1)$. Bezüglich des anderen Koordinatensystems $K' = \left(O'; \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\right)$ besitzt der Punkt A die Koordinaten $(0.5, 7.5)$.

(a) Bestimmen Sie die Koordinaten (i, j) der Punkte P und M (Bildschirmmittelpunkt) bzgl. des Koordinatensystems $K = (O; \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})$.

(b) Bestimmen Sie die Koordinaten (x, y) der Punkte P und M bzgl. des Koordinatensystems $K' = \left(O'; \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\right)$.

(c) Stellen Sie die Gleichungen für die Beziehung zwischen den beiden Koordinatensystemen auf:

$$\begin{aligned} O' &= O + \ldots \overrightarrow{a_1} + \ldots \overrightarrow{a_2} \\ \overrightarrow{b_1} &= \ldots \overrightarrow{a_1} + \ldots \overrightarrow{a_2} \\ \overrightarrow{b_2} &= \ldots \overrightarrow{a_1} + \ldots \overrightarrow{a_2} \end{aligned}$$

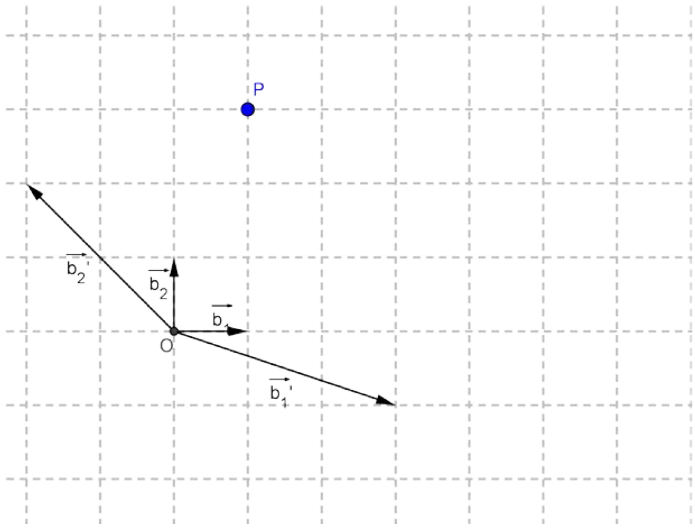
(d) Mitunter wird K als *Pixelkoordinatensystem* und K' als *Standardkoordinatensystem* bezeichnet. Nutzen Sie die Beziehungsgleichungen, um eine allgemeine Transformationsformel anzugeben, mit der man aus den Pixelkoordinaten (i, j) eines Punktes die zugehörigen Standardkoordinaten (x, y) dieses Punktes erhält. Testen Sie Ihre Formel anhand der Punkte A, M und P.

(e) Können Sie dies auch allgemein für ein Bild mit einer Breite von B Pixeleinheiten und einer Höhe von H Pixeleinheiten. Wenden Sie Ihre Transformationsformel für den Fall $B = 1920$, $H = 1080$ auf den Bildmittelpunkt an.

Bemerkungen: Die Pixelkoordinaten (i, j) werden auch Pixelindizes genannt. Man erhält das Seitenverhältnis für das „Full-HD“-Bildformat über die Beziehungen $1920 = 16 \cdot 120$ und $1080 = 9 \cdot 120$.

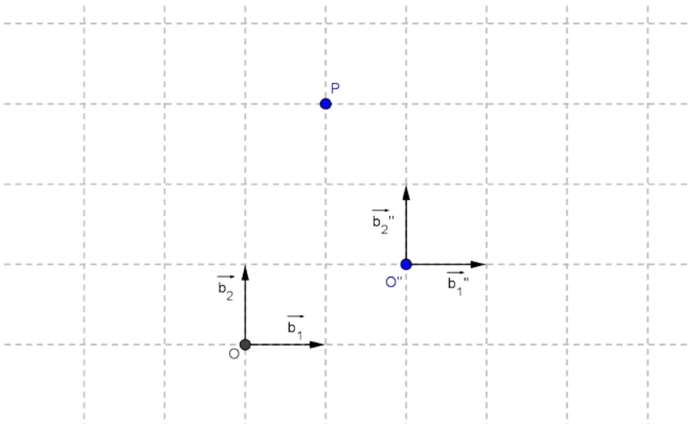
Aufgabe H 15. *Koordinatendarstellungen von Punkten der Ebene*

Der folgenden Abbildung können Sie entnehmen, dass der Punkt P bezüglich des Koordinatensystems $K = (O; \vec{b_1}, \vec{b_2})$ die Koordinaten $(P)_K = (1, 3)$ besitzt.



(a) Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung $(P)_{K'}$ des Punktes P bezüglich des Koordinatensystems $K' = (O; \vec{b_1}', \vec{b_2}')$, das Sie der Abbildung entnehmen können. Gesucht sind also Zahlen p'_1 und p'_2 so, dass die Gleichung $P = O + p'_1\,\vec{b_1}' + p'_2\,\vec{b_2}'$ erfüllt ist. *Hinweis: Lösen Sie die Aufgabe zunachst grafisch und dann rechnerisch.*

(b) Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung $(P)_{K'}$ des Punktes P bezüglich des Koordinatensystems $K'' = (O''; \vec{b_1}'', \vec{b_2}'')$.



Aufgabe H 16. *Eine Raute in der Ebene*

(a) **Wählen Sie** ein kartesisches Koordinatensystem $K = \big(O; \vec{e_1}, \vec{e_2}\big)$ in Ihrer Zeichenebene. **Zeichnen Sie** den Ursprung O sowie die Basisvektoren $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$.

Betrachten Sie eine Raute, von der zwei Eckpunkte gegeben sind, nämlich O und P mit Koordinatendarstellungen $(O)_K = (0,0)$ und $(P)_K = (3,0)$. Der linke obere Eckpunkt der Raute heiße Q, der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{p} := \overrightarrow{OP}$ und $\vec{q} := \overrightarrow{OQ}$ ist $60°$. Der Punkt Q besitzt bzgl. des Koordinatensystems K die folgenden Koordinaten:

$$(Q)_K = \left(\tfrac{3}{2}, 3\,\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

(b) **Zeichnen Sie** die Punkte O, P und Q in Ihre Zeichenebene ein. **Verwenden Sie** zur Konstruktion des Punktes Q einen Zirkel.

(c) **Bestimmen Sie** den Vektor $\vec{s} := \vec{p} + \vec{q}$ zeichnerisch.

Hinweis: $O + \vec{p} + \vec{q}$ ist der vierte Eckpunkt der Raute.

(d) **Berechnen Sie** die Koordinaten des Vektors $\vec{s} = \vec{p} + \vec{q}$ sowie dessen Länge $\|\vec{s}\|$.

(e) **Zeichnen Sie** den Vektor $\vec{q} - \vec{p} = \vec{q} + (-\vec{p})$ in die Raute ein, **heften Sie** ihn hierzu am Punkte P **an**.

(f) **Bestimmen Sie** die Koordinaten $(D)_K = (d_1, d_2)$ des Diagonalenschnittpunkts D der Raute.

Betrachten Sie nun das Koordinatensystem $K' = (O; \vec{p}, \vec{q})$.

(g) Welche Punkte haben bezüglich K' die Koordinaten $(1,0)$ bzw. $(0,1)$ bzw. $(1,1)$?

(h) **Bestimmen Sie** die Koordinaten $(D)_{K'}$ des Diagonalenschnittpunkts D bezüglich K'.

Tutoriumsübungen

Aufgabe T 6. *Länge von Vektoren, Abstand von Punkten und Winkel*

(a) Wählen Sie ein kartesisches Koordinatensystem $K = \left(O; \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$ in Ihrer Zeichenebene. Zeichnen Sie den Ursprung O sowie die Basisvektoren $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$.

Erinnerung: Kartesische Koordinatensysteme zeichnen sich dadurch aus, dass alle Basisvektoren die Länge 1 besitzen und paarweise aufeinander senkrecht stehen.

(b) Bezüglich dieses Koordinatensystems sollen die Punkte P und Q die Koordinatendarstellungen $(P)_K = (-2, 1)$ und $(Q)_K = (3, 3)$ besitzen.

(c) Zeichnen Sie die Punkte P und Q, den Verbindungsvektor $\overrightarrow{PQ}$ sowie die Ortsvektoren $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ und $\vec{q} = \overrightarrow{OQ}$.

(d) Berechnen Sie die Länge $\|\vec{p}\|$ des Vektors $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ (und damit den Abstand $d(O, P)$ des Punktes P vom Ursprung O).

(e) Berechnen Sie den Winkel α zwischen den Vektoren $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ und $\vec{q} = \overrightarrow{OQ}$. Verwenden Sie hierzu die Formel

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{\|\vec{p}\| \, \|\vec{q}\|}.$$

Messen Sie den Winkel mit Ihrem Geodreieck und vergleichen Sie die Werte.

Hinweis: $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \approx 108°$.

(f) Berechnen Sie den Abstand $d(P, Q)$ der Punkte P und Q voneinander bzw. die Länge $\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|$ des Vektors $\overrightarrow{PQ}$.

(g) Zeichnen Sie den (Summen-)Vektor $\vec{s} := \vec{p} + \vec{q}$.

(h) Berechnen Sie den Diagonalenschnittpunkt D in dem Parallelogramm mit den Eckpunkten O, Q, $Q + \vec{p}$ und P.

Aufgabe T 7. *Einheitsvektoren und normierte Vektoren*

Ein Vektor der Länge 1 heißt **Einheitsvektor**. Zu einem gegebenen Vektor $\vec{v} \neq 0$ erhält man einen Einheitsvektor $\hat{v}$, der in dieselbe Richtung wie $\vec{v}$ zeigt, durch die sogenannte „Normierung“:

$$\hat{v} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}.$$

(a) Ist der Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ein Einheitsvektor?

(b) Wie würden Sie diesen Vektor mit Zirkel und Lineal konstruieren?

(c) **Normieren Sie** den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$, bestimmen Sie also den Einheitsvektor $\hat{v}$, der in die gleiche Richtung wie $\vec{v}$ zeigt.

Aufgabe T 8. *Koordinatendarstellungen von Punkten der Ebene*

Jedes Koordinatensystem $K = \big(O;\vec{b_1},\vec{b_2}\big)$ der Ebene besteht aus einem Koordinatenursprung O und zwei Basisvektoren $\vec{b_1}$ und $\vec{b_2}$. Man kann jedem Punkt P der Ebene seine Koordinaten $(P)_K = (p_1, p_2)$ bezüglich des Koordinatensystems K zuweisen, indem man die Skalare p_1 und p_2 so bestimmt, dass die Beziehnung $P = O + p_1\,\vec{b_1} + p_2\,\vec{b_2}$ gilt.

Die folgende Abbildung 1 zeigt, dass für den Punkt P die Gleichung $P = O + 1\,\vec{b_1} + 3\,\vec{b_2}$ erfüllt ist. Die Koordinatendarstellung $(P)_K$ des Punktes P bezüglich des Koordinatensystems $K = \big(O;\vec{b_1},\vec{b_2}\big)$ ist somit gegeben durch $(P)_K = (1, 3)$.

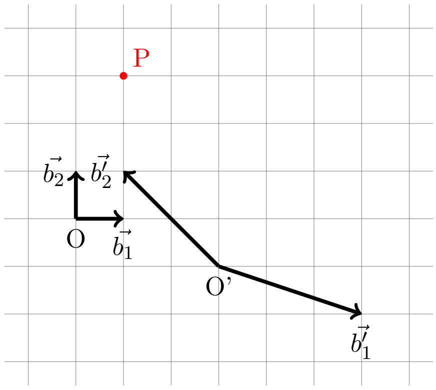


Abbildung 10: Koordinatensysteme K und K'.

Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung $(P)_{K'}$ des Punktes P bezüglich des Koordinatensystems $K' = \big(O';\vec{b_1}',\vec{b_2}'\big)$, das Sie der Abbildung entnehmen können.

(a) **Lösen Sie** die Aufgabe zunachst grafisch.

(b) Für die rechnerische Lösung verfahren Sie wie folgt:

- **Notieren Sie** zunächst die (sich aus der Abbildung ergebenden) Beziehungsgleichungen:

  $O' = O + 3\,\vec{b_1} + (-1)\,\vec{b_2}$ $\qquad\vec{b_1}' = \ldots$ $\qquad\vec{b_2}' = \ldots$

- **Setzen Sie** die Beziehungsgleichungen in die Gleichung

  $$O + 1\,\vec{b_1} + 3\,\vec{b_2} = P = O' + p_1'\,\vec{b_1}' + p_2'\,\vec{b_2}'$$

  ein.

- **Bestimmen Sie** die Werte für p_1' und p_2', indem Sie das Gleichungssystem, das sich nach geeignetem Koeffizientenvergleich ergibt, aufstellen und lösen.

H14 Koordinatensystem am Computerbildschirm

a) Ablesen der Koordinaten bezüglich des Koordinatensystems K:

$$\begin{aligned} (P)_K &= (4,3) \\ (M)_K &= (4.5, 6.5) \end{aligned}$$

b) Ablesen der Koordinaten bezüglich des Koordinatensystems K':

$$\begin{aligned} (P)_{K'} &= (2.5, 4.5) \\ (M)_{K'} &= (6,4) \end{aligned}$$

c) Aus der Zeichnung lesen wir ab, dass folgende Beziehungsgleichungen gelten:

$$\begin{aligned} O' &= O + 8,5\,\overrightarrow{a_1} + 0,5\,\overrightarrow{a_2} \\ \overrightarrow{b_1} &= \overrightarrow{a_2} \\ \overrightarrow{b_2} &= -\overrightarrow{a_2} \end{aligned}$$

d) Gegeben ist die Darstellung: $O + i\,\overrightarrow{a_1} + j\,\overrightarrow{a_2}$

Gesucht ist die Darstellung: $O' + x\,\overrightarrow{b_1} + y\,\overrightarrow{b_2}$

Mit den bereits hergeleiteten Beziehungsgleichungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} O' + x\,\overrightarrow{b_1} + y\,\overrightarrow{b_2} &= (O + 8,5\,\overrightarrow{a_1} + 0,5\,\overrightarrow{a_2}) + x\,(\overrightarrow{a_2}) + y\,(\overrightarrow{-a_1}) \\ &= O + 8,5\,\overrightarrow{a_1} + 0,5\,\overrightarrow{a_2} + x\,(\overrightarrow{a_2}) + y\,(\overrightarrow{-a_1}) \\ &= O + (8,5 - y)\,\overrightarrow{a_1} + (0,5 + x)\,\overrightarrow{a_2} \end{aligned}$$

Nun entspricht der Ausdruck in der Klammer vor $\overrightarrow{a_1}$ dem i und der Ausdruck der Klammer vor $\overrightarrow{a_2}$ dem j in der gegebenen Darstellung:

$$\begin{aligned} \Rightarrow 8,5 - y &= i & \qquad \Rightarrow y &= 8,5 - i \\ \Rightarrow x + 0,5 &= j & \qquad \Rightarrow x &= j - 0,5 \end{aligned}$$

Für den Punkt P gilt also $x = 2,5$ und $y = 4,5$ mit $i = (8,5 - 4,5) = 4$ und $j = (2,5 + 0,5) = 3$.

Für den Bildschirmmittelpunkt M gilt $i = (8,5 - 4) = 4,5$ und $j = (6 + 0,5) = 6,5$.

Für den Punkt A gilt $i = (8,5 - 7,5) = 1$ sowie $j = (0,5 + 0,5) = 1$.

e) Die Aufgabe wird wie im Aufgabenteil d) gelöst. Hier liegt lediglich ein anderes Seitenverhältnis vor. Dabei betrachten wir 1920 als die Breite und 1080 als die Höhe.

Die Beziehungsgleichung sieht wie folgt aus:

$$\begin{aligned} O' &= O + (H + 0,5)\,\overrightarrow{a_1} + 0,5\,\overrightarrow{a_2} \\ \overrightarrow{b_1} &= \overrightarrow{a_2} \\ \overrightarrow{b_2} &= -\overrightarrow{a_2} \end{aligned}$$

Mit dieser Beziehungsgleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned} O + (H + 0,5)\,\overrightarrow{a_1} + 0,5\,\overrightarrow{a_2} &= (O + 1080,5\,\overrightarrow{a_1} + 0,5\,\overrightarrow{a_2}) + x\,(\overrightarrow{a_2}) + y\,(\overrightarrow{-a_1}) \\ &= O + 1080,5\,\overrightarrow{a_1} + 0,5\,\overrightarrow{a_2} + x\,(\overrightarrow{a_2}) + y\,(\overrightarrow{-a_1}) \\ &= O + (1080,5 - y)\,\overrightarrow{a_1} + (0,5 + x)\,\overrightarrow{a_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1080,5 - y &= i \qquad & \Rightarrow y &= 1080,5 - i \\ \Rightarrow x + 0,5 &= j \qquad & \Rightarrow x &= j - 0,5 \end{aligned}$$

Der Bildschirmmittelpunkt befindet sich in diesem Koordinatensystem bei jeweils der Hälfte der Höhe und Breite. Somit gilt $x = 960$ und für $y = 540$. Daraus folgt:

$$M(i,j) = ((1080,5 - 540), (0,5 + 960))$$

Somit hat der Mittelpunkt die Koordinaten:

$$M(540,5/960,5)$$

H15 Koordinatendarstellung von Punkten der Ebene

a) Es sind die beiden Koordinatensysteme $K = \left(O, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\right)$ und $K' = (0, \overrightarrow{b_1}', \overrightarrow{b_2}')$ gegeben, sowie der Punkt $(P)_K = (1,3)$.

Gegeben: $P = O + 1\overrightarrow{b_1} + 3\overrightarrow{b_2}$

Gesucht: $P = O + p_1\overrightarrow{b_1}' + p_2\overrightarrow{b_2}'$

Aus der Zeichnung lesen wir ab, dass folgende Beziehungsgleichungen gelten:

$$\begin{aligned} 0' &= 0 \\ \overrightarrow{b_1}' &= 3\overrightarrow{b_1} + (-1)\overrightarrow{b_2} \\ \overrightarrow{b_2}' &= -2\overrightarrow{b_1} + 2\overrightarrow{b_2} \end{aligned}$$

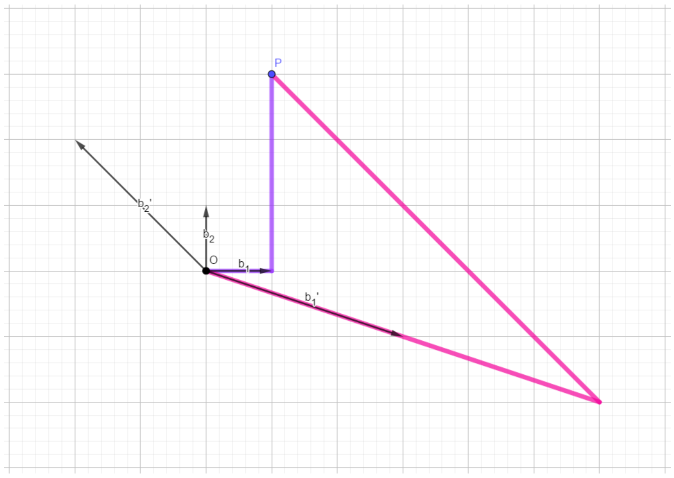


Abbildung 29: Gegebene Koordinatendarstellung und Wege zu P

Wir setzen $\overrightarrow{b_1}'$ und $\overrightarrow{b_2}'$ in die Beziehung $P \ = \ O + p_1\overrightarrow{b_1}' + p_2\overrightarrow{b_2}'$ ein und erhalten somit:

$$P \ = \ O + p_1\left(3\overrightarrow{b_1} + (-1)\overrightarrow{b_2}\right) + p_2\left((-2)\overrightarrow{b_1} + 2\overrightarrow{b_2}\right)$$

Durch Ausmultiplizieren erhalten wir:

$$\begin{aligned} P \ &= \ O + p_1 3\overrightarrow{b_1} - p_1\overrightarrow{b_2} - p_2 2\overrightarrow{b_1} + p_2 2\overrightarrow{b_2} \\ &= \ O + p_1 3\overrightarrow{b_1} - p_2 2\overrightarrow{b_1} - p_1\overrightarrow{b_2} + p_2 2\overrightarrow{b_2} \end{aligned}$$

Wir klammern $\overrightarrow{b_1}$ bzw. $\overrightarrow{b_2}$ aus:

$$P \ = \ O + \underline{(3p_1 - 2p_2)}\overrightarrow{b_1} + \underline{(-p_1 + 2p_2)}\overrightarrow{b_2}$$

Andererseits gilt gemäß der gegebenen Gleichung bezüglich des ersten Koordinatensystems ebenfalls $P = O + \underline{1}\overrightarrow{b_1} + \underline{3}\overrightarrow{b_2}$. Damit die Identität der Gleichung erfüllt ist, müssen die beiden Klammern vor b_1 und b_2 den Skalaren vor b_1 und b_2 entsprechen. Daher können wir folgende zwei Gleichungen aufstellen:

$$\begin{aligned} 3p_1 - 2p_2 \ &= \ 1 \quad \textbf{(I)} \\ -p_1 + 2p_2 \ &= \ 3 \quad \textbf{(II)} \end{aligned}$$

Wir erhalten ein Gleichungssystem und lösen dieses zunächst mithilfe von I nach p_1 auf:

$$p_1 \ = \ \frac{1 + 2p_2}{3}$$

Dann setzen wir p_1 in II ein und lösen nach p_2 auf:

$$\begin{aligned} -\left(\frac{1+2p_2}{3}\right)+2p_2 &= 3 \\ p_2 &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Wenn wir nun das Ergebnis von p_2 in I einsetzen folgt:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1+2p_2}{3} \\ p_1 &= \frac{1+5}{3}=2 \end{aligned}$$

Auf diese Weise erhalten wir die Koordinatendarstellung $(P)_{K'}$ des Punktes P bezüglich des Koordinatensystems K':

$$(P)_{K'} = \left(2, \frac{5}{2}\right)$$

b) Diese Aufgabe kann auf die gleiche Art und Weise, wie die Teilaufgabe a gelöst werden.

Gegeben sind die Gleichungen:

$$\begin{aligned} &Q = P + 2\vec{b_1} + (-1)\vec{b_2} \\ &Q = P + (3v_1' - 2v_2')\vec{b_1} + (-v_1' + 2v_2')\vec{b_2} \end{aligned}$$

Aus diesen können die folgenden beide Gleichungen gebildet werden:

$$\begin{aligned} 3v_1' - 2v_2' = 2 \\ -v_1' + 2v_2' = -1 \end{aligned}$$

Jetzt muss nur noch zum Beispiel die zweite Gleichung nach v_1' aufgelöst werden:

$$v_1' = 1 + 2v_2'$$

Und in die erste Gleichung eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} 3 + 4v_2' = 2 \\ v_2' = -\frac{1}{4} \\ v_1' 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit setzen wir hier ${p_1}' = q_1$ und ${p_2}' = q_2$.

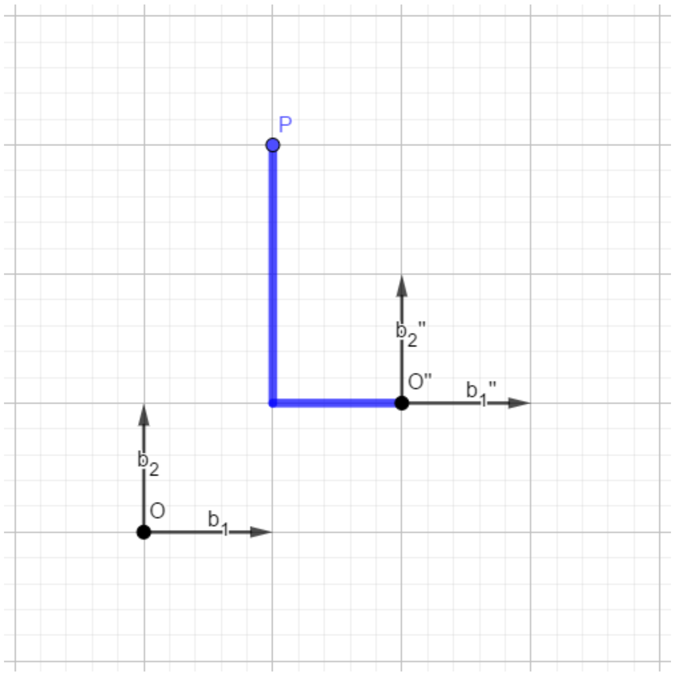


Abbildung 30: Gegebene Koordinatendarstellung und Weg zu P

Gegeben: $P \;=\; O + 1\overrightarrow{b_1} + 3\overrightarrow{b_2}$

Gesucht: $P \;=\; O'' + q_1\overrightarrow{b_1}'' + q_2\overrightarrow{b_2}''$

Aus der Zeichnung lesen wir ab, dass folgende Beziehungsgleichungen gelten:

$$\begin{aligned} O'' &= O + 2\overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{b_2} \\ \overrightarrow{b_1}'' &= \overrightarrow{b_1} \\ \overrightarrow{b_2}'' &= \overrightarrow{b_2} \end{aligned}$$

Wir setzen diese in die Gleichung $P = O'' + q_1\overrightarrow{b_1}'' + q_2\overrightarrow{b_2}''$ ein und erhalten somit:

$$P = (O + 2\overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{b_2}) + q_1\overrightarrow{b_1} + q_2\overrightarrow{b_2}$$

Wir klammern nun $\overrightarrow{b_1}$ bzw. $\overrightarrow{b_2}$ aus:

$$P \;=\; O + \underline{(2 + q_1)}\overrightarrow{b_1} + \underline{(1 + q_2)}\overrightarrow{b_2}$$

Andererseits gilt gemäß der gegebenen Gleichung bezüglich des ersten Koordinatensystems ebenfalls $P = O + \underline{1}\overrightarrow{b_1} + \underline{3}\overrightarrow{b_2}$. Damit die Identität der Gleichung erfüllt ist, müssen die beiden Klammern vor b_1 und b_2 den Skalaren vor b_1 und b_2 entsprechen. Daher können wir folgende zwei Gleichungen aufstellen und gelangen so zu folgendem Ergebnis für q_1 und q_2:

$$\begin{aligned} 2 + q_1 &= 1 \quad \textbf{(I)} \rightsquigarrow q_1 = -1 \\ 1 + q_2 &= 3 \quad \textbf{(II)} \rightsquigarrow q_2 = 2 \end{aligned}$$

Die Koordinatendarstellung $(P)_{K''}$ des Punktes P bezüglich des Koordinatensystems K" ist somit:

$$(P)_{K''} = (-1, 2)$$

Wenn wir die Koordinaten des Punkte P in die Gleichung: $Q = P + 2\vec{b_1} - \vec{b_2}$ einsetzen erhalten wir dadurch:

$$\begin{aligned} Q &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 + 2 \\ 2 - 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Q hat demnach die Koordinaten $(1, 1)$. Wenn wir P von Q subtrahieren erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 1 + 1 \\ 1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dies entspricht dem Vektor $\overrightarrow{PQ}$.

H16 Eine Raute in der Ebene

d)

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{q} &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 3\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

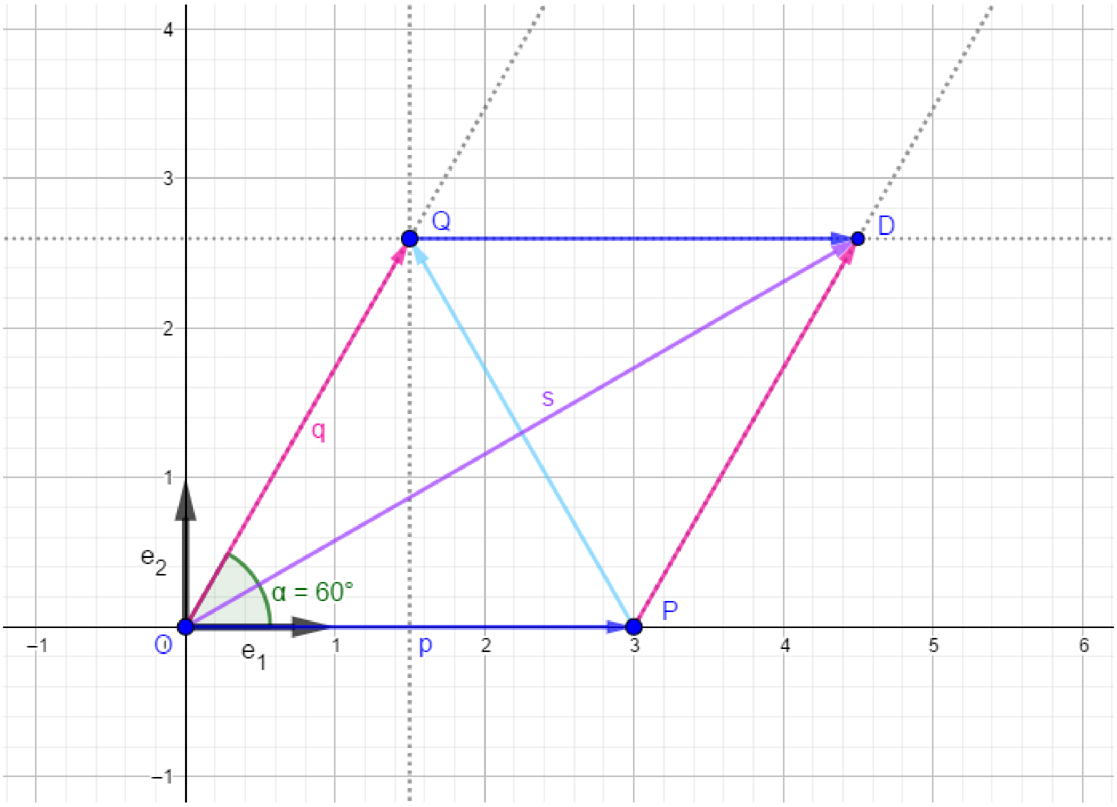


Abbildung 31: Vollständige Darstellung

T6 Länge von Vektoren, Abstand von Punkten und Winkel

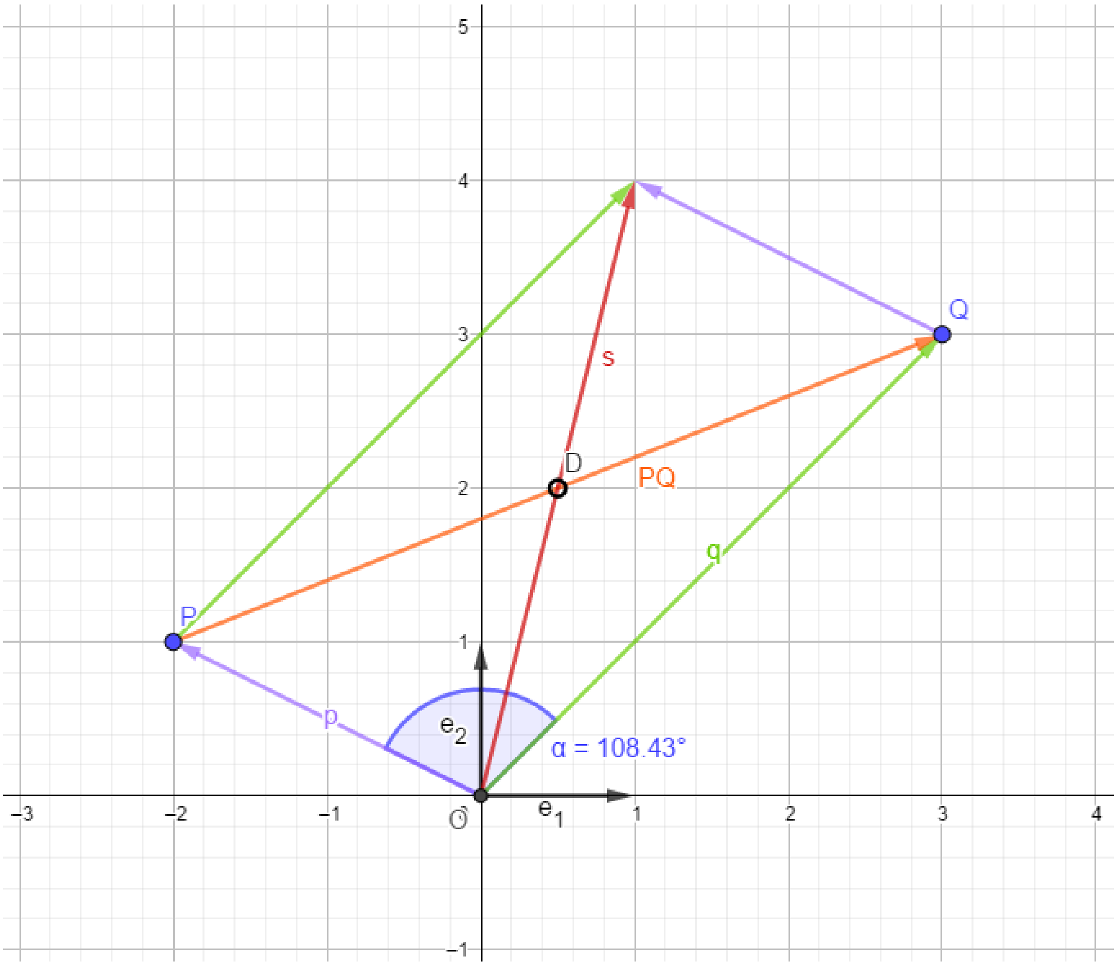


Abbildung 32: Vollständige Darstellung

T7 Einheitsvektoren und normierte Vektoren

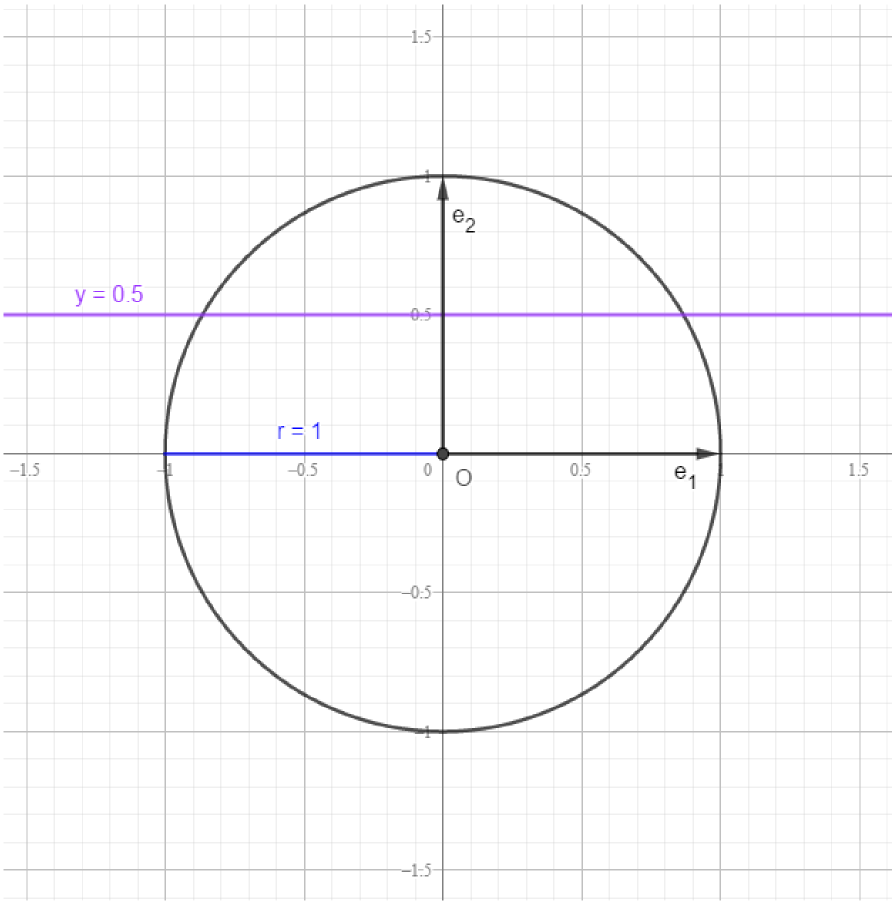
a) Um diese Frage beantworten zu können, berechnen wir die Länge des Vektors $\overrightarrow{u}$.

gegeben: $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

Das bedeutet: Ja, der Vektor $\overrightarrow{u}$ ist ein Einheitsvektor.

b) Der Vektor kann folgendermaßen konstruiert werden:



Vorgehen: Zunächst wird eine vertikale Gerade an Stelle $x = 0.5$ konstruiert und anschließend ein Kreis mit dem Radius 1 gezeichnet und dem Ursprung als Mittelpunkt des Kreises. Der Vektor $\overrightarrow{u}$ kann nun vom Ursprung bis zu dem Schnittpunkt der Gerade und des Kreis eingezeichnet werden.

c) gegeben: $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\hat{v} &= \frac{1}{||\overrightarrow{v}||} \cdot \overrightarrow{v} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{16+9}} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

T8 Koordinatendarstellung von Punkten der Ebene

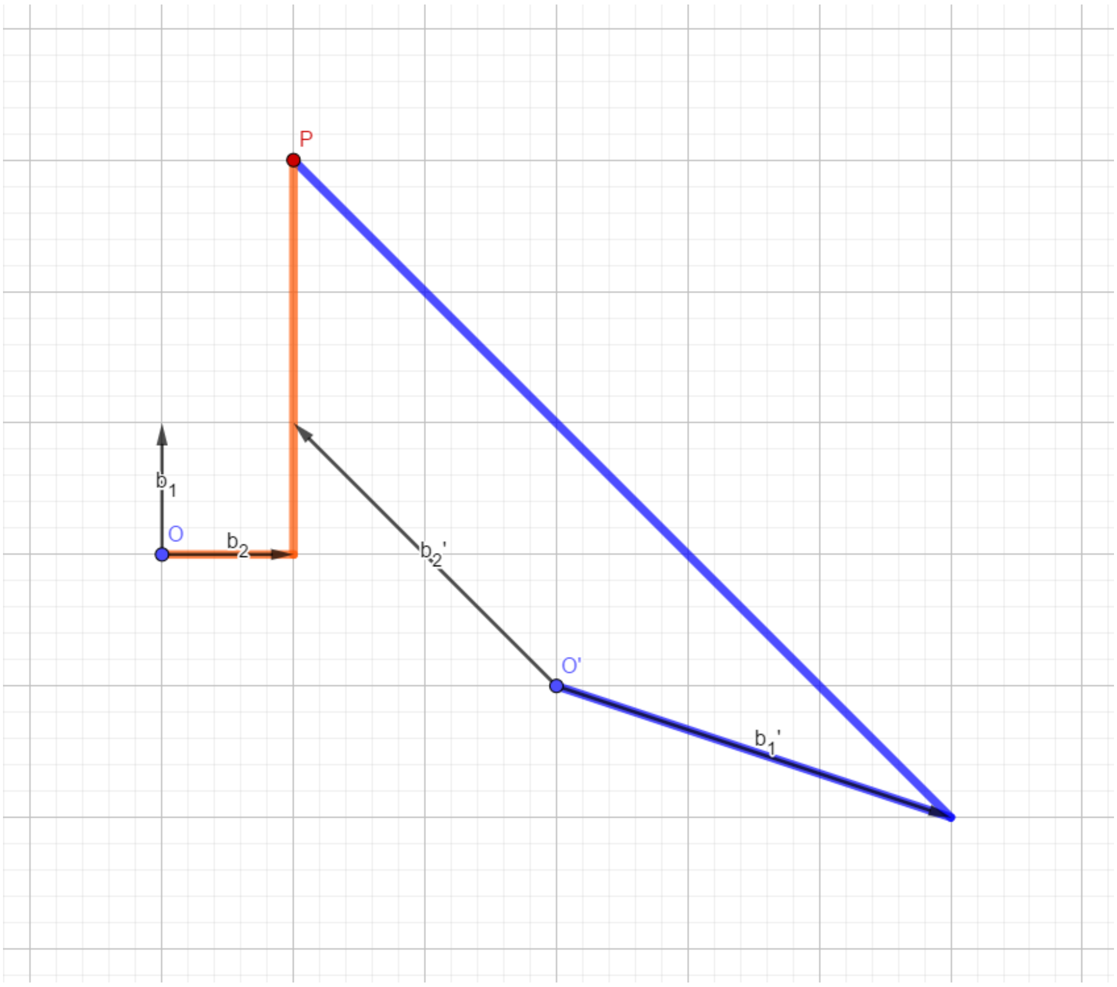


Abbildung 33: Vollständige Darstellung

Übungseinheit 6

Hinweise zu verwendeten Symbolen und zu trigonometrischen Funktionen (Winkelfunktionen)

- Das Symbol $\mathbb{N} = 0, 1, 2, 3, \ldots$ steht für die Menge aller natürlichen Zahlen (einschließlich der Null), das Symbol $\mathbb{Z}$ bezeichnet die Menge aller ganzen Zahlen, das Symbol $\mathbb{R}$ bezeichnet die Menge aller reellen Zahlen.
- Es gilt $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\cos(x) \neq 0$.
- Für alle $x,\ y \in \mathbb{R}$ gelten folgende Identitäten **(Additionstheoreme)**:

$$\cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y), \tag{AT1}$$
$$\cos(x-y) = \cos(x) \cdot \cos(y) + \sin(x) \cdot \sin(y), \tag{AT2}$$
$$\sin(x+y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y), \tag{AT3}$$
$$\sin(x-y) = \sin(x) \cdot \cos(y) - \cos(x) \cdot \sin(y). \tag{AT4}$$

- In der folgenden Tabelle sind einige Werte von Winkelfunktionen für Winkel im Gradmaß und im Bogenmaß aufgeführt. Weitere Werte erhalten Sie mit Hilfe der Additionstheoreme, zum Beispiel gilt $\cos(135°) = \cos(90° + 45°) = \ldots$

Winkel		Funktionswerte trigonometrischer Funktionen		
Gradmaß	Bogenmaß x	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
$0°$	0	0	1	0
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	nicht definiert
$120°$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$180°$	π	0	-1	0
$240°$	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$270°$	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	nicht definiert
$360°$	2π	0	1	0
$-45°$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$-90°$	$-\frac{\pi}{2}$	-1	0	nicht definiert
$-180°$	$-\pi$	0	-1	0

Hausübungen

Aufgabe H 17. *Vektorrechnung: Skalarprodukt und Kreuzprodukt*

Es sei $\vec{u} = (0, -\frac{1}{2}, 1)^T$ und $\vec{v} = (-1, -1, 1)^T$.

(a) Berechnen Sie die Länge $\|\vec{v}\|$ des Vektors $\vec{v}$, das Skalarprodukt $\vec{u} \cdot \vec{v}$, das Kreuzprodukt $\vec{u} \times \vec{v}$ sowie die Zahl $\frac{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$.

(b) Berechnen Sie die orthogonale Projektion $\vec{u}_{\| \langle \vec{v} \rangle} := \text{proj}_{\langle \vec{v} \rangle}(\vec{u})$ des Vektors $\vec{u}$ auf die von $\vec{v}$ erzeugte Urprungsgerade $\langle \vec{v} \rangle$.

(c) Berechnen Sie den Vektor $\vec{u}_{\perp \langle \vec{v} \rangle} := \vec{u} - \vec{u}_{\| \langle \vec{v} \rangle}$ und dessen Länge.

Aufgabe H 18. *Zerlegung von Vektoren – orthogonale Projektion*

In der folgenden Abbildung ist eine Ursprungsgerade g dargestellt, die von einem Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ erzeugte wird, wir schreiben $g := \langle \vec{v} \rangle$. Ein Punkt U liege abseits der Geraden, sein Ortsvektor werde mit $\vec{u}$ bezeichnet. Man kann den Vektor $\vec{u}$ als Summe zweier Vektoren schreiben:

$$\vec{u} \; = \; \vec{u}_{\| g} \; + \; \vec{u}_{\perp g}$$

Hierbei ist $\vec{u}_{\| g}$ die Komponente von $\vec{u}$ **parallel** zur Geraden g und $\vec{u}_{\perp g}$ die Komponente von $\vec{u}$ **senkrecht** zur Geraden g. In der Abbildung 11 ist $\vec{u}_{\perp g}$ gleich dem Verbindungsvektor $\overrightarrow{LU}$. Man nennt $\vec{u}_{\| g}$ auch **orthogonale Projektion** von $\vec{u}$ auf g und schreibt anstelle von $\vec{u}_{\| g}$ auch $\text{proj}_{\langle \vec{v} \rangle}(\vec{u})$.

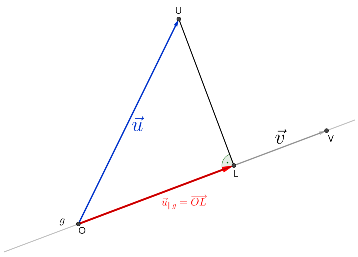


Abbildung 11: Punkt U und Gerade g: Bestimmung des Lotfußpunkts auf g und des Abstands $d(U, g)$.

Es sei $g = \langle \vec{v} \rangle$ die vom Vektor $\vec{v} = (2, 1)^T$ erzeugte Ursprungsgerade und es sei U der Punkt mit Koordinaten $(6, -2)$, ferner sei $\vec{u} := \overrightarrow{OU} = \binom{6}{-2}$.

(a) Skizzieren Sie die Gerade g, den Vektor $\vec{v}$ und den Punkt U.

(b) Berechnen Sie die zur Geraden g **parallele** Komponente $\vec{u}_{\| g}$ des Vektors $\vec{u}$.

(c) Bestimmen Sie die zur Geraden g **senkrechte** Komponente $\vec{u}_{\perp g}$ des Vektors $\vec{u}$ sowie den (orthogonalen) Abstand des Punktes U von der Geraden g.

(d) Machen Sie sich noch einmal klar, dass $\vec{u}_{\| g}$ durch die Beziehung

$$\vec{u}_{\| g} \; = \; \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \, \vec{v}$$

gegeben ist. Verifizieren Sie hierzu, dass die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{u} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \, \vec{v}$ **aufeinander senkrecht** stehen.
Hinweis: Nutzen Sie die in den Vorlesungsfolien angegebenen Rechengesetze für das Skalarprodukt.

Aufgabe H 19. *Anwendungen des Kreuzprodukts*

(a) Es seien die Vektoren $\vec{u} = (3, 0, 0)^T$ und $\vec{v} = (2, 4, 0)^T$ gegeben. Berechnen Sie den Vektor $\vec{u} \times \vec{v}$. Versuchen Sie, sich die Lage der Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{u} \times \vec{v}$ im Raum vorzustellen. Hierzu müssen Sie zunächst ein kartesisches Koordinatensystem im Raum wählen.

(b) Berechnen Sie mithilfe des Kreuzproduktes den Flächeninhalt des Parallelogramms, welches von den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannt wird.

(c) Berechnen Sie die Zahl $\left(\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \times \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Hinweis: Die Zahl $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ entspricht dem Flächeninhalt des von den drei „beteiligten“ Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten „Parallelflachs“ („Spates“ oder „Parallelepipeds“.)

(d) Es seien die Vektoren $\vec{a} = (1, 1, 0)^T$, $\vec{b} = (-1, 1, 0)^T$, $\vec{c} = (1, 1, 1)^T$ und $\vec{d} = (-1, 1, 1)^T$ gegeben. Berechnen Sie die Vektoren $\vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{c} \times \vec{d}$. Bestimmen Sie den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und den Winkel zwischen $\vec{c}$ und $\vec{d}$. Versuchen Sie, sich die Lage der Vektoren $\vec{c}$, $\vec{d}$ und $\vec{c} \times \vec{d}$ zu veranschaulichen.

Aufgabe H 20. *Etüde zum Kreuzprodukt*

Betrachten Sie die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Kreuzprodukte $\vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{c}$ sowie $\vec{a} \times \vec{d}$.

(b) Zeichnen Sie die (drei) Parallelogramme, die von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bzw. $\vec{a}$ und $\vec{c}$ bzw. $\vec{a}$ und $\vec{d}$ aufgespannt werden. Stellen Sie die Beziehung zwischen den Flächeninhalten dieser Parallelogramme und den zuvor berechneten Kreuzprodukten her.

(c) Berechnen Sie von jedem der drei Kreuzproduktvektoren **die Länge** mithilfe der Formel

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin(\alpha),$$

wobei α den Winkel bezeichnet, den die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ einschließen.

Hinweis: Sie können den Wert von $\sin(\alpha)$ anhand ihrer Zeichnungen und der Vorschrift

$$\sin(\alpha) = \frac{\textit{Gegenkathete}}{\textit{Hypotenuse}}$$

bestimmen.

Aufgabe H 21. *Verschiedene Koordinatensysteme $\rightsquigarrow$ verschiedene Kooordinaten*

Jedes Koordinatensystem $K = \left(O; \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\right)$ der Ebene besteht aus einem Koordinatenursprung O und zwei Basisvektoren $\overrightarrow{b_1}$ und $\overrightarrow{b_2}$. Man kann jedem Punkt P der Ebene seine Koordinaten $(P)_K = (p_1, p_2)$ bezüglich des Koordinatensystems K zuweisen, indem man die Skalare p_1 und p_2 so bestimmt, dass die Gleichung $P = O + p_1 \overrightarrow{b_1} + p_2 \overrightarrow{b_2}$ erfüllt ist.

Die folgende Abbildung 12 zeigt, dass für den Punkt P die Gleichung $P = O_1 + 1\,\overrightarrow{b_1} + 3\,\overrightarrow{b_2}$ gilt. Somit ist die Koordinatendarstellung $(P)_{K_1}$ des Punktes P bezüglich des Koordinatensystems $K_1 = \left(O_1; \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\right)$ gegeben durch $(P)_{K_1} = (1, 3)$.

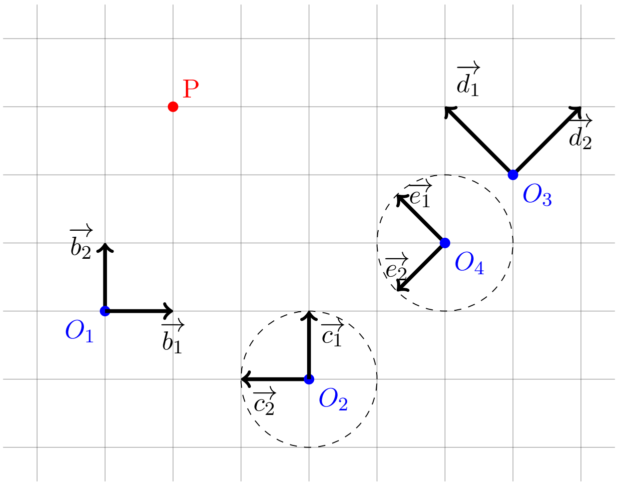


Abbildung 12: Vier Koordinatensysteme: K_1 bis K_4.

(a) **Bestimmen Sie** die Koordinatendarstellung $(P)_{K_2}$ des Punktes P bezüglich des Koordinatensystems $K_2 = \left(O_2; \vec{c_1}, \vec{c_2}\right)$, das Sie der Abbildung 12 entnehmen können.

(i) **Lösen Sie** die Aufgabe zunachst grafisch.

(ii) Für die rechnerische Lösung verfahren Sie wie folgt:

- **Notieren Sie** zunächst die (sich aus der Abbildung ergebenden) Beziehungsgleichungen: $O_2 \ = \ O_1 \ + 3\,\vec{b_1} \ + (-1)\,\vec{b_2}, \qquad \vec{c_1} \ = \ \ldots \qquad \vec{c_2} \ = \ \ldots.$
- **Setzen Sie** die Beziehungsgleichungen in die Gleichung

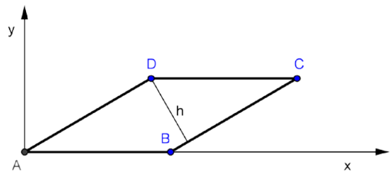
$$O_1 \ + 1\,\vec{b_1} \ + 3\,\vec{b_2} \ = P \ = O_2 \ + p_1'\,\vec{c_1} \ + p_2'\,\vec{c_2} \qquad \text{ein.}$$

- **Bestimmen Sie** die Werte für p_1' und p_2', indem Sie das Gleichungssystem, das sich nach geeignetem Koeffizientenvergleich ergibt, aufstellen und lösen.

(b) Verfahren Sie analog zur Bestimmung von $(P)_{K_3}$ und $(P)_{K_4}$.

Aufgabe H 22. *Parallelogramm und Kreuzprodukt*

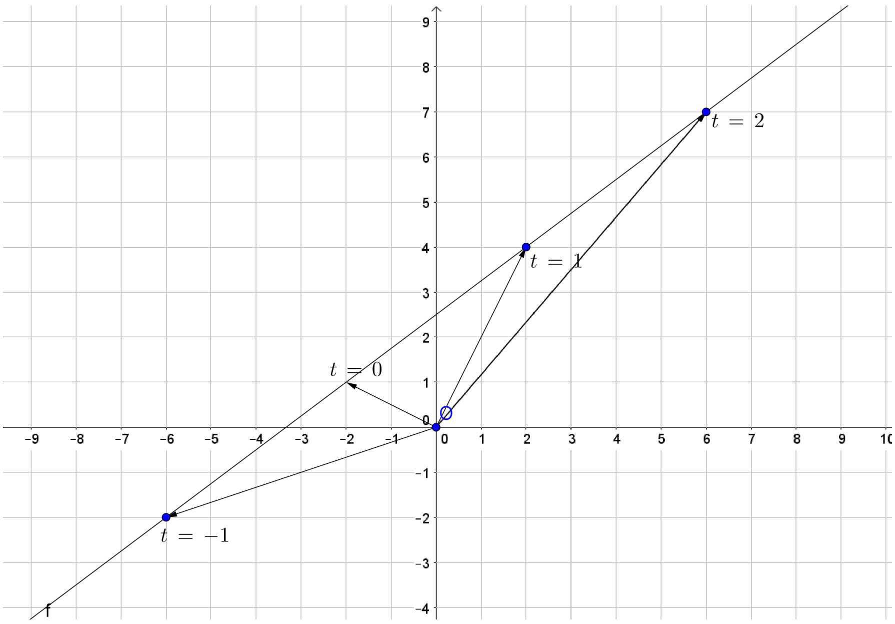
Die Abbildung zeigt das Parallelogramm mit den Eckpunkten $A = (0,0,0)$, $B = (2,0,0)$, $C = (2+\sqrt{3},1,0)$ und $D = (\sqrt{3},1,0)$. Stellen Sie sich vor, dass die in der Skizze nicht dargestellte z-Achse aus der Papierebene heraus auf Sie hin zeigt. Betrachten Sie die Strecke $\overline{BC}$ als Grundseite dieses Parallelograms und bestimmen Sie die Höhe h des Parallelogramms über $\overline{BC}$.



Hinweis: Es gibt verschiedene Möglichkeiten zur Lösung dieser Aufgabe. Der Lösungsweg, der hier beschritten werden soll, verwendet das Kreuzprodukt.

H17 Keine Lösung vorhanden.

H18 Orthogonale Projektion



a)

b) Gesucht: Die zur Geraden g parallele Komponente $\overrightarrow{u}_{||g}$ des Vektors $\overrightarrow{u}$.

g = $<\overrightarrow{v}>$

Hierfür gilt die allgemeine Formel: $\overrightarrow{u}_{||g} = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}} \cdot \overrightarrow{v}$
Zur Berechnung die gegebenen Werte in die Formel einsetzen und auflösen:

$$= \frac{6 \cdot 2 + (-2) \cdot 1}{2 \cdot 2 + 1 \cdot 1} \cdot \overrightarrow{v}$$
$$= \frac{10}{5} \cdot \overrightarrow{v}$$
$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{u}_{||g} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) Die zur Geraden g senkrechte Komponente $\overrightarrow{u}_{\perp g}$ bestimmt sich mit folgender Formel:

$\overrightarrow{u}_{\perp g} = \overrightarrow{u}$ - $\overrightarrow{u}_{||g}$

Für das Ergebnis die gegebenen bzw zuvor berechneten Werte in die Formel einsetzen und anschließend die Länge berechnen:

$$= \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$
$$||U|| = \sqrt{(2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

d) Der Term $(\overrightarrow{u} - \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}} \cdot \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{v}$ wird mit dem Skalarprodukt berechnet und muss 0 entsprechen, damit die beiden Vektoren aufeinander senkrecht stehen:

$(\overrightarrow{u} - \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}} \cdot \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{v} = 0$

Zuerst wird der Ausdruck innerhalb der Klammer mit $\overrightarrow{v}$ ausmultipliziert:

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} - (\frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}}) \cdot \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = 0$

Nun kann man das $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}$ unterhalb des Bruchstriches und das rechts der Klammer rauskürzen:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$$

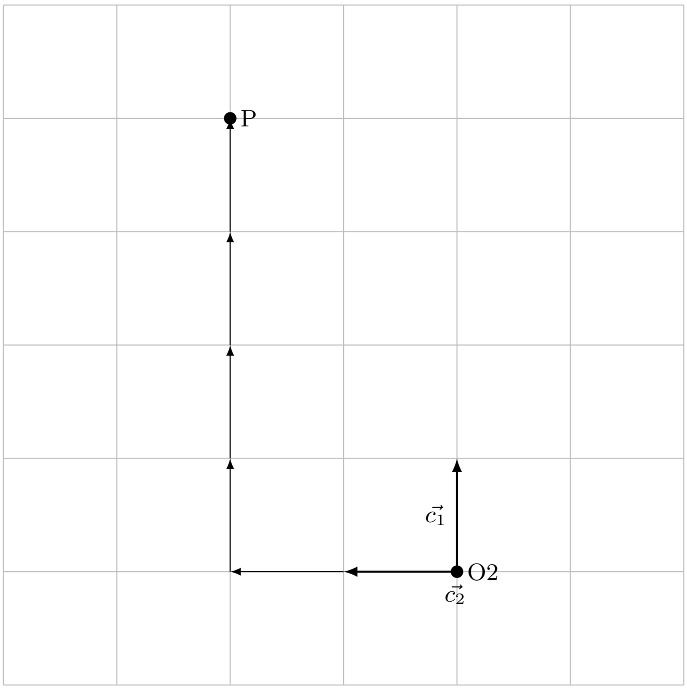
Der Rest lässt sich gegenseitig wegsubtrahieren und ergibt 0. Somit ist bewiesen, dass $\overrightarrow{u} - \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}} \cdot \overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{v}$ aufeinander senkrecht stehen.

H19 Keine Lösung vorhanden.

H20 Keine Lösung vorhanden.

H21 Verschiedene Koordinatensysteme

a) (i) Für die grafische Lösung geht man den Weg vom Urspung O_2 zum Punkt P in Richtung der beiden Vektoren ab und misst dann die Länge der Strecken. $(P)_{K2}$ hat demnach die Koordinaten (4, -2).



(ii) Die beiden Vektoren $\vec{c_1}$ und $\vec{c_2}$ muss man im Bezug zu den Richtungen der Vektoren $\vec{b_1}$ und $\vec{b_2}$ sehen. Daraus folgt:

$$\vec{c_1} = 0\vec{b_1} + 1\vec{b_2}$$
$$\vec{c_2} = -1\vec{b_1} + 0\vec{b_2}$$

Gegeben sind die Gleichungen:

$$O_2 = O_1 + 3\vec{b_1} + (-1)\vec{b_2}$$
$$O_1 + \vec{b_1} + 3\vec{b_2} = P = O_2 + p'_1\vec{c_1} + p'_2\vec{c_2}$$
$$1) = O_2 + p'_1\vec{b_2} - p'_2\vec{b_1}$$

Durch den Koeffizientenvergleich kann man daraus folgende Gleichungen ablesen:

$$-1 + p'_1 = 3$$
$$p'_1 = 4$$

$$3 - p'_2 = 1$$
$$p'_2 = 3 - 1$$
$$p'_2 = 2$$
$$P = O_1 + 1\vec{b_1} + 3\vec{b_2}$$

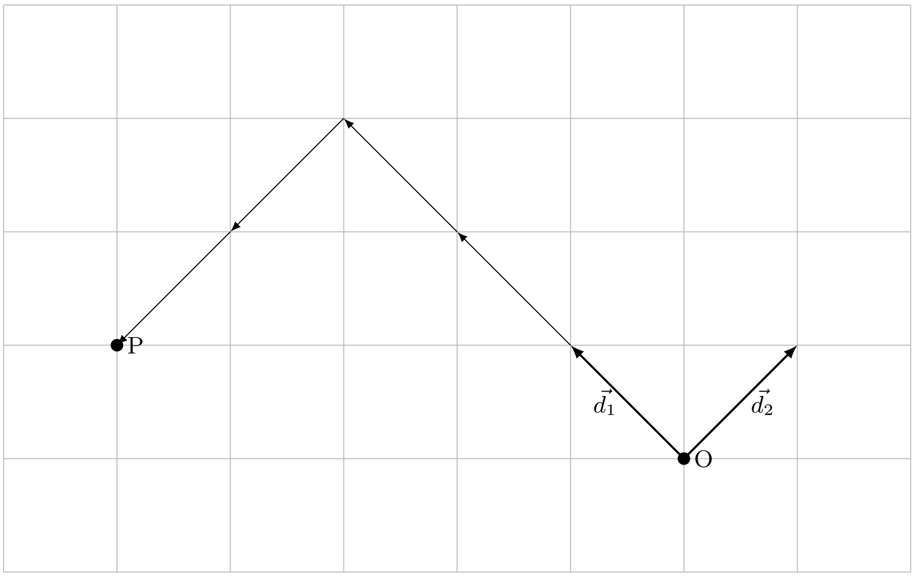
Wählt man p_1' und p_2' mit $P = O_2 + p_1'\vec{c_1} + p_2'\vec{c_2}$ wird durch das Einsetzen in die Beziehungsgleichung folgendes erzeugt:

$$\begin{aligned} P &= O_1 + 3\vec{b_1} + (-1)\vec{b_2} + p_1'\vec{b_2} + p_2' - \vec{b_1} \\ &= p_1'(3 - p_2') + \vec{b_1} + (-1 + p_1')\vec{b_2} \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass der Punkt P bezüglich des Koordinatensystems K_2 die Koordinaten $K_2 = (O_2; 4, 2)$ hat.

b) $(P)_{K3}$ und $(P)_{K4}$ wird nach dem gleichen Prinzip wie $(P)_{K2}$ abgehandelt.

$(P)_{K3}$ grafische Lösung:



$(P)_{K3}$ rechnerische Lösung:

Basierend der Richtungen der Vektoren $\vec{b_1}$ und $\vec{b_2}$ kann man ablesen, dass die beiden Vektoren $\vec{d_1}$ und $\vec{d_2}$ folgende Werte haben:

$$\vec{d_1} = (-\vec{b_1} + \vec{b_2})\vec{d_2} = (\vec{b_1} + \vec{b_2})$$

Weiterhin sind folgende beide Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} O_3 &= O_1 + 6\vec{b_1} + 2\vec{b_2} \\ O_1 + \vec{b_1} + 3\vec{b_2} = P &= O_3 + p_1'\vec{d_1} + p_2'\vec{d_2} \\ &= O_3 + p_1'(-\vec{b_1} + \vec{b_2}) + p_2'(\vec{b_1} + \vec{b_2}) \end{aligned}$$

Um den Koeffizientenvergleich durchführen zu können, müssen erstmal die Vektoren $\vec{b_1}$ und $\vec{b_2}$ ausgeklammert werden.

$$\begin{aligned} P &= O_3 - p_1'\vec{b_1} + p_1'\vec{b_2} + p_2'\vec{b_1} + p_2'\vec{b_2} \\ &= O_3 + \vec{b_1}(-p_1' + p_2') + \vec{b_2}(p_1' + p_2') \end{aligned}$$

Jetzt kann der Koeffizientenvergleich durchgeführt werden. Es muss in einer der beiden Gleichungen nach p_1', oder p_2' aufgelöst werden und in die andere eingesetzt werden.

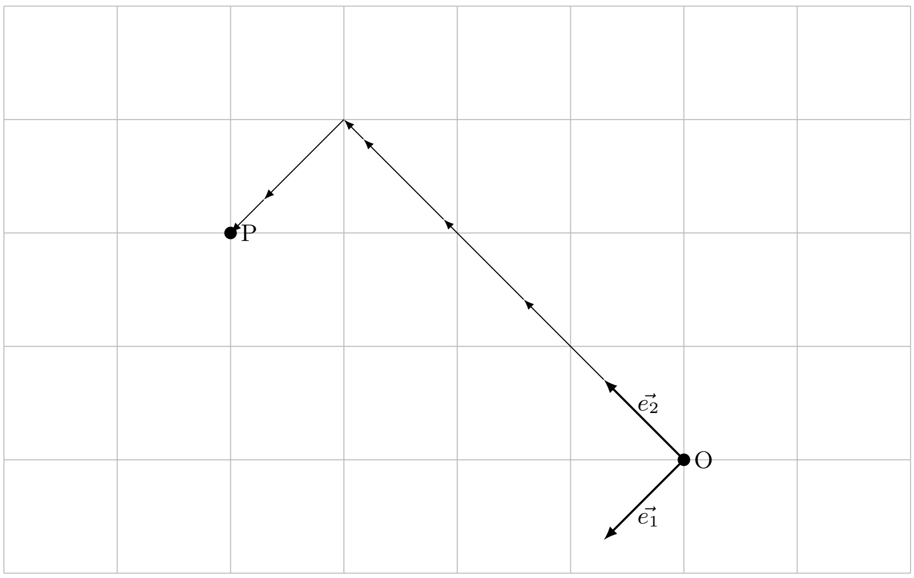
$$\begin{aligned} -p1' + p2' + 6 &= 1 \\ p1' + p2' + 2 &= 3 \end{aligned}$$

Nach p_2' wird aufgelöst und das Ergebnis in die zweite Gleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned} p2' &= p1' - 5 \\ 2p1' - 3 &= 3 \\ p1' &= 3 \\ p2' &= 3 - 5 = -2 \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass der Punkt P im Koordinatensystem K_3 die Werte $(O_3; 3, -2)$ besitzt.

$(P)_{K4}$ grafische Lösung:



$(P)_{K4}$ rechnerische Lösung:

Sowohl $\vec{e_1}$, als auch $\vec{e_2}$ sind Winkelhalbierende inerhalb des Einheitskreises. Anhand des Satz des Pythogaras kann man berechnen, dass Betragsmäßig sowohl in x-

Richtung, als auch in y-Richtung $\frac{\sqrt{2}}{2}$ verlaufen:

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 &= 1 \\
a &= b \\
2a^2 &= 1 \\
a &= \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\vec{e_1} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{b_1} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{b_2})$ und $\vec{e_2} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{b_1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{b_2})$ ist.

Außerdem sind wieder folgende Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned}
O_4 &= O_1 + 5\vec{b_1} + \vec{b_2} \\
O_1 + \vec{b_1} + 3\vec{b_2} = P &= O_4 + p_1'\vec{e_1} + p_2'\vec{e_2} \\
&= O_4 + p_1'(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{b_1} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{b_2}) + p_2'(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{b_1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{b_2})
\end{aligned}$$

Auch hier müssen $\vec{b_1}$ und $\vec{b_2}$ ausgeklammert werden, um den Koeffizientenvergleich durchführen zu können.

$$\begin{aligned}
P &= O_4 - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{b_1}p_1' + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{b_2}p_1' - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{b_1}p_2' - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{b_2}p_2' \\
&= \vec{b_1}(\frac{\sqrt{2}}{2}p_1' - \frac{\sqrt{2}}{2}p_2') + \vec{b_2}(\frac{\sqrt{2}}{2}p_1' - \frac{\sqrt{2}}{2}p_2')
\end{aligned}$$

Jetzt erhält man folgende beide Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2}}{2}p_1' - \frac{\sqrt{2}}{2}p_2' + 1 &= 3 \\
-\frac{\sqrt{2}}{2}p_1' - \frac{\sqrt{2}}{2}p_2' + 5 &= 1
\end{aligned}$$

Es wird nach p_1' aufgelöst:

$$\begin{aligned}
-\frac{\sqrt{2}}{2}p_1' &= -4 + \frac{\sqrt{2}}{2}p_2' \\
p_1' &= 4\sqrt{2} - p_2'
\end{aligned}$$

Und in die zweite Gleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2}}{2}(4\sqrt{2} - p_2') - \frac{\sqrt{2}}{2}p_2' &= 2 \\
4 - \sqrt{2}p_2' &= 2 \\
\sqrt{2}p_2' &= 2 \\
p_2' &= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Der Wert für p_2' wird schlussendlich in die nach p_1' aufgelöste Gleichung eingesetzt.

$$p_1' = 4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

Der Punkt P hat im Koordinatensytem K_4 die Koordinaten $(O_4; 3\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

H22 Parallelogramm und Skalar-oder Kreuzprodukt

Die Höhe des Parallelogramms wird über den Flächeninhalt berechnet. Dies ist auf zwei Arten möglich. So lässt sich der Flächeninhalt F über das durch die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ aufgespannte Parallelogramm mit Hilfe des Kreuzprodukts berechnen:

$$\begin{aligned} F &= \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \right\| \\ &= \left\| \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

Der Fächeninhalt eines Parallelogramms lässt sich zudem über das Produkt aus Grundseite und Höhe berechnen. In diesem Fall gilt: $F = ||\overrightarrow{BC}|| \cdot h$ mit

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \\ &= \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$F = \left\| \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \cdot h = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2 + (0)^2} \cdot h = \sqrt{4} \cdot h = 2 \cdot h$$

Gleichsetzen mit der zuvor erhaltenen Beziehung $F = 2$ liefert

$$2 = 2 \cdot h$$

Damit ergibt sich für die Höhe des Parallelograms:

$$h = 1.$$

Übungseinheit 7

Präsenzübungen

Aufgabe P 6. *Eine Gerade in der Ebene*

In einem kartesischen Koordinatensystem seien die Punkte $E = (-4, -2)$ und $F = (0, 1)$ gegeben.

(a) **Zeichnen Sie** die Punkte E und F in ein kartesisches Koordinatensystem ein und skizzieren Sie die Verbindungsgerade g, welche durch die beiden Punkte verläuft.

(b) **Stellen Sie** eine Parametergleichung der Form $\vec{x} = \vec{p} + t\,\vec{r}$ für die Ortsvektoren der Punkte auf der Geraden g auf. **Zeichnen Sie** die vier Ortsvektoren (und die zugehörigen Punkte auf der Geraden g), die sich ergeben, wenn Sie dem Parameter t (nacheinander) die Werte $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ bzw. $t = -1$ zuweisen.

Aufgabe P 7. *Eine Gerade in der Ebene – Fortsetzung der Aufgabe P 1*

(a) Liegt der Punkt G mit den Koordinaten $(-8, -5)$ auf der Geraden g? Um diese Frage zu beantworten, müssen Sie klären, ob es eine Zahl $t \in \mathbb{R}$ derart gibt, dass die Gleichung $\binom{-8}{-5} = \vec{p} + t\,\vec{r}$ erfüllt ist. **Zeigen Sie** ferner, dass der Punkt B mit den Koordinaten $(7, 0)$ **nicht** auf der Geraden g liegt.

(b) **Wählen Sie** einen Normalenvektor $\vec{n}$ für die Gerade g.
*Hinweis: Der Vektor $\vec{n}$ muss senkrecht auf dem Vektor $\vec{r}$ stehen, den Sie in Teilaufgabe P 1 **(b)** gefunden haben, die Bedingung hierfür ist, dass $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$ gilt.*

(c) **Stellen Sie** eine Hesse'sche Normalengleichung (HNG) für die Gerade g auf. Diese ist von der Form $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$, wobei Sie für $\vec{p}$ den Ortsvektor eines beliebigen Punktes auf g wählen können. Prüfen Sie nach, ob die Punkte mit Koordinaten $(-8, -5)$ bzw. $(4, 3)$ die HNG erfüllen.

(d) Aus der Gleichung $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$ erhalten Sie durch Ausmultiplizieren der linken Seite eine Allgemeine Koordinatengleichung (AKG) für die Gerade g. **Führen Sie** dies **aus**.

(e) **Berechnen Sie** den Abstand des Punktes B mit Koordinaten $(7, 0)$ von der Geraden g.
Eine mögliche Vorgehensweise hierfür ist, dass Sie die Komponente $\vec{v}_{\|}$ des Vektors $\vec{v} = \overrightarrow{FB}$ bestimmen, die parallel (bzw. antiparallel) zu $\vec{n}$ ist: $\vec{v}_{\|} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}}\,\vec{n}$. **Machen Sie sich** dies anhand einer Skizze **klar**.
Alternativ hierzu könnten Sie für $\vec{v}$ auch $\overrightarrow{EB}$ oder $\overrightarrow{XB}$ mit einem beliebigen anderen Punkt $X \in g$ wählen.

Hausübungen

Aufgabe H 23. *Geraden in der Ebene – Schnittpunkte*

Für die Bestimmung des Schnittpunkts zweier Geraden gibt es viele Möglichkeiten. Eine Variante, die wir in ähnlicher Form auch später verwenden werden (nämlich zur Berechnung der axonometrischen Angaben für Parallelprojektionen durch Schnitt der Projektionsgeraden mit der Bildebene), soll anhand eines Beispiels illustriert werden:

Es sei die Gerade ℓ gegeben durch eine Allgemeine Koordinatengleichung (AKG) $2\,x_1 + 4\,x_2 - 24 = 0$. Die Gerade g sei wie in Aufgabe P 1, vgl. die Abbildung 1. Wir bestimmen den Schnittpunkt der Geraden g und ℓ wie folgt:

(a) Der Parametergleichung $\vec{x} = \vec{p} + t\,\vec{r}$ der Geraden g (vgl. Aufgabe P 1) entnehmen Sie die beiden Gleichungen für die erste bzw. zweite Komponente von $\vec{x} = \binom{x_1}{x_2}$. Die entsprechenden Ausdrücke setzen Sie in die AKG von ℓ ein und lösen nach t auf.

(b) **Bestimmen Sie** den Schnittpunkt nun auch zeichnerisch. Um die Gerade ℓ zu zeichnen, können Sie zunächst zwei auf ℓ liegende Punkte bestimmen: Wenn Sie $x_1 = 0$ setzen und die AKG nach x_2 auflösen, erhalten Sie eine ersten Punkt $(0, x_2)$. Setzen Sie danach $x_2 = 0$ und lösen die AKG nach x_1 auf, so erhalten Sie eine zweiten Punkt $(x_1, 0)$.

Aufgabe H 24. *Geraden in der Ebene – Fortsetzung von Aufgabe P 1*

(a) **Bestimmen Sie** den Abstand d des Punktes $A = (9.5, 5)$ von der Geraden g sowie den zugehörigen Lotfußpunkt L. Betrachten Sie hierzu die Abbildung und wählen Sie aus mehreren Optionen eine Berechnungsmöglichkeit aus:

- Bestimmen Sie den Punkt L als Schnittpunkt der Geraden g und der dazu senkrechten Geraden $h = \{A + \tau\,\vec{n} \mid \tau \in \mathbb{R}\}$.
- Berechnen Sie die Komponente $\vec{u}_\parallel$ des Vektors $\vec{u} := \overrightarrow{AF}$ parallel zur Geraden h. Dann ist $\vec{u}_\parallel = \overrightarrow{AL}$ sowie $d = \|\vec{u}_\parallel\|$. *Hinweis: Es gilt* $\vec{u}_\parallel = \frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\,\vec{n}$, *vgl. Vorlesung.*

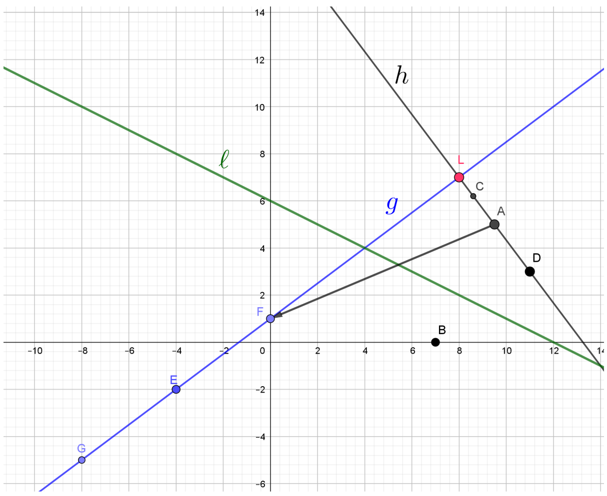


Abbildung 13: Darstellung der Geraden und Punkte

(b) **Bestimmen Sie** denjenigen Punkt C, der auf der Verbindungsstrecke zwischen den Punkten $L = (8, 7)$ und $D = (11, 3)$, liegt und den Abstand $d(C, g) = 1$ von der Geraden g besitzt. *Lösung:* $C = (8.6, 6.2) = \left(\frac{33}{5}, \frac{31}{5}\right)$.

(c) Stellen Sie sich vor, dass Sie die Bewegung zweier Leuchtpunkte auf Ihrem Bildschirm definieren wollen. Nehmen Sie hierzu an, dass die Länge der beiden Basisvektoren Ihres Koordinatensystems jeweils einem Zentimeter (cm) entspricht und dass die Parameterwerte in Sekunden gemessen werden.

Bestimmen Sie zwei Parametrierungen so, dass sich im Verlauf von 10 Sekunden der erste Leuchtpunkt geradlinig von E nach L bewegt und **gleichzeitig** der zweite Leuchtpunkt von L nach D. Wie groß sind jeweils die Geschwindigkeiten, gemessen in cm je Sekunde?

Tutoriumsübungen

Aufgabe T 9. *Geraden in der Ebene – Bestimmung von Schnittpunkten*

Es sei g die Verbindungsgerade der Punkte $P = (-2, 1)$ und $Q = (2, 4)$. Es seien ferner Geraden h und f durch **Allgemeine Koordinatengleichungen (AKG)**

$$2\,x_1 + 2\,x_2 - 5 = 0 \qquad (\text{für } h)$$

bzw.

$$-6\,x_1 + 8\,x_2 - 12 = 0 \qquad (\text{für } f)$$

gegeben.

(a) Zeichnen Sie die beiden Punkte P und Q sowie die Gerade g.

(b) Stellen Sie eine Parametergleichung für die Gerade g auf.

(c) Bestimmen Sie zwei Punkte, die auf der Geraden h liegen, wie folgt:

- Setzen Sie zunächst $x_1 = 0$ und lösen die AKG $2\,x_1 + 2\,x_2 - 5 = 0$ nach x_2 auf. Geben Sie dem so errechneten Punkt den Namen A.
- Setzen Sie dann $x_1 = 1$ und lösen die AKG $2\,x_1 + 2\,x_2 - 5 = 0$ nach x_2 auf. Bezeichnen Sie den so errechneten Punkt mit B.

(d) Zeichnen Sie die Gerade h.

(e) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden g und h. Stellen Sie dazu zunächst eine Parametergleichung für die Gerade h auf. Setzen Sie die beiden Parametergleichungen für g und h dann gleich.

Hinweis: Um von der AKG in die Parameterform überzugehen können Sie so vorgehen: Führen Sie zunächst einen Parameter s ein und setzen z.B. $x_1 = s$. Setzen Sie dies in die AKG ein und lösen Sie nach x_2 auf. Sie haben nun eine Ausdruck $\vec{x} = (x_1, x_2)^T = (s, \ldots)^T$ erhalten, der die AKG der Geraden erfüllt. Daraus erhalten Sie ohne Weiteres die Parametergleichung der Geraden.

(f) Eine andere Möglichkeit für die Bestimmung des Schnittpunktes von g und h ist wie folgt: Der Parametergleichung $\vec{x} = \vec{p} + t\,\vec{r}$ der Geraden g entnehmen Sie die beiden Gleichungen für die erste bzw. zweite Komponente von $\vec{x} = \binom{x_1}{x_2}$. Die entsprechenden Ausdrücke setzen Sie in die AKG von h ein und lösen nach t auf.

(g) Eine dritte Möglichkeit besteht darin, sich eine AKG für die Gerade g zu beschaffen und die beiden AKGen der Geraden g und h zu einem linearem Gleichungssystem (LGS) zusammenzufassen. Lösen sie dieses und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Welches Verfahren sagt Ihnen mehr zu?

(h) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden g und f (sofern vorhanden).

(i) Fügen Sie Ihrer Zeichnung noch die Geraden h und f hinzu.

Aufgabe T 10. *Eine bekannte Aufgabe einmal anders gelöst*

Sie „dürfen"die Aufgabenstellung der Aufgabe H 18 des Arbeitsblattes 6 nun mit einer anderen Methode lösen. Zur Erinnerung ist in der folgenden Abbildung eine Ursprungsgerade $g := \langle \vec{v} \rangle$ dargestellt, die von einem Vektor $\vec{v} = (2,1)^T$ erzeugt wird. Ein Punkt U mit Koordinaten $(6,-2)$ liegt abseits der Geraden, sein Ortsvektor werde mit $\vec{u}$ bezeichnet.

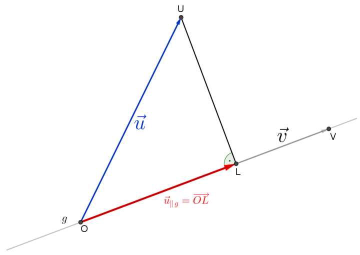


Abbildung 14: Punkt U und Gerade g: Bestimmung des Lotfußpunkts auf g und des Abstands $d(U,g)$.

(a) Skizzieren Sie die Gerade g, den Vektor $\vec{v}$ und den Punkt U.

(b) Stellen Sie Parametergleichung für die Gerade g, auf.

(c) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{n}$, der senkrecht auf der Richtung der Geraden g steht.

(d) Stellen Sie Parametergleichung für die Gerade h auf, die den Punkt U enthält und deren Richtung durch den Vektor $\vec{n}$ gegeben ist.

(e) Bestimmen Sie den Schnittpunkt L der Geraden g und h, indem Sie die beiden Parametergleichungen „gleichsetzen" und das resultierende Gleichungssystem lösen.

Aufgabe T 11. *Geraden in der Ebene – Systeme linearer Gleichungen*

Jedes der Gleichungssysteme in den folgenden Teilaufgaben beschreibt ein Paar von Geraden.

- Skizzieren sie die jeweiligen Geradenpaare.
- Bestimmen Sie für jedes Gleichungssystem die jeweilige Lösungsmenge. Verwenden Sie hierzu eine **Methode Ihrer Wahl**.

(a) $$\begin{aligned} 6x_1 + 6x_2 &= 30 \\ 4x_1 + 2x_2 &= 12 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} -6x_1 + 8x_2 &= 24 \\ 3x_1 - 4x_2 &= -12 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} -6x_1 + 8x_2 &= 24 \\ 3x_1 - 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$

(d) $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$

P6 Eine Gerade in der Ebene

a) Die Abbildung 34 zeigt die Gerade g durch die Punkte $E = (-2, 1)$ und $F = (2, 4)$ sowie ihre jeweiligen Ortsvektoren $\vec{e}$ und $\vec{f}$.

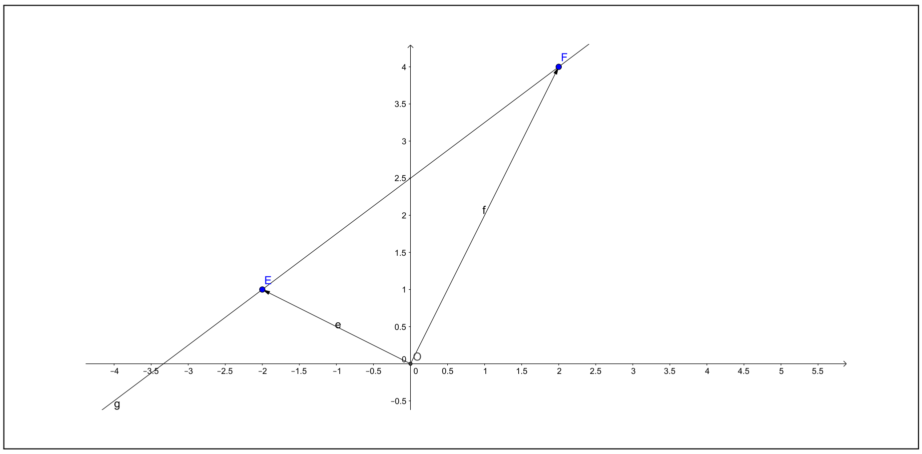


Abbildung 34: Gerade g

b) Die Parametergleichung einer Geraden hat die folgende Form: $\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{r}$. Hierbei ist $\vec{p}$ ein Stützvektor (d.h. der Ortsvektor eines Punktes auf der Geraden) und $\vec{r}$ ein Richtungsvektor. Im vorliegenden Beispiel können wir als Stützvektor z.B. den Ortsvektor des gegebenen Punktes E wählen. Den Richtungsvektor erhält man, indem man nun einen zweiten Punkt auf der Geraden (z.B. den gegebenen Punkt F) nimmt und von dessen Ortsvektor den Stützvektor abzieht:

$$\vec{r} = \vec{f} - \vec{e} = \binom{2}{4} - \binom{-2}{1} = \binom{4}{3}.$$

Somit ergibt sich die folgende Parametergleichung für die Gerade:

$$g:\ \vec{x} = \binom{-2}{1} + t \cdot \binom{4}{3},\ t \in \mathbb{R}.$$

Für $t = 0$ ergibt sich

$$\vec{x} = \binom{-2}{1} + 0 \cdot \binom{4}{3} = \binom{-2}{1}.$$

Für $t = 1$ erhält man

$$\vec{x} = \binom{-2}{1} + 1 \cdot \binom{4}{3} = \binom{2}{4}.$$

Für $t = 2$ ergibt sich

$$\vec{x} = \binom{-2}{1} + 2 \cdot \binom{4}{3} = \binom{6}{7}.$$

Für $t = -1$ schließlich:

$$\vec{x} = \binom{-2}{1} + (-1) \cdot \binom{4}{3} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

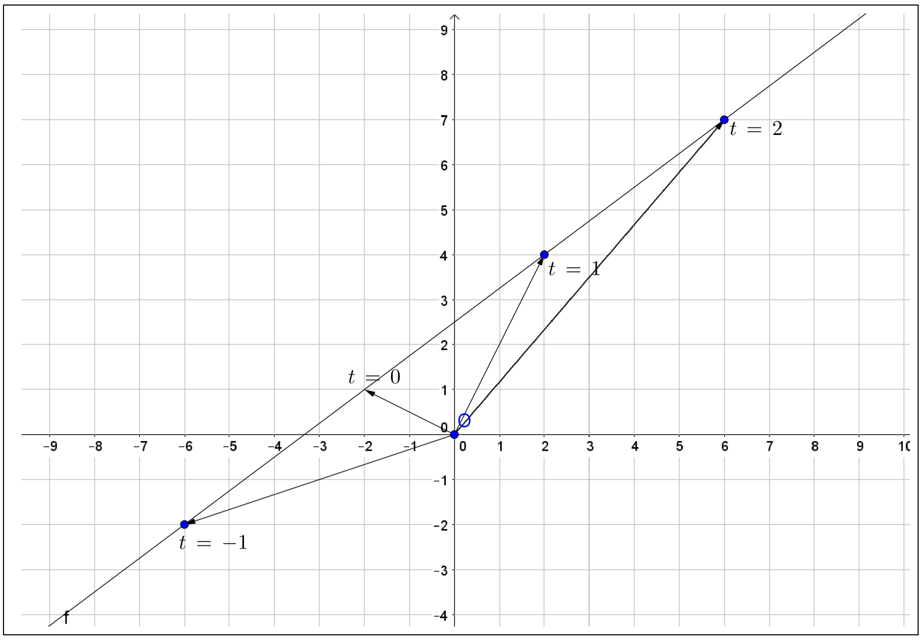


Abbildung 35: Ortsvektoren

c) Um zu prüfen, ob der Punkt auf der Geraden liegt, nimmt man den zu prüfenden Punkt und setzt ihn in die Parametergleichung ein: $\binom{6}{7} = \binom{-2}{1} + t \cdot \binom{4}{3}$. Gibt es für t einen Wert, mit dem die Gleichung lösbar ist, liegt der Punkt auf der Geraden. Aus der oberen Zeile ergibt sich $6 = -2 + 4t$, d.h. $t = 2$. Aus der unteren ergibt sich $7 = 1 + 3t$, d.h. ebenfalls $t = 2$. Der Punkt liegt somit auf der Geraden.

Der zweite zu prüfende Punkt ist $(9, 3)$.

$$\begin{aligned} \binom{9}{3} &= \binom{-2}{1} + t \cdot \binom{4}{3} \\ &= \begin{pmatrix} -2+4t \\ 1+3t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für t gibt es in diesem Fall keine Lösung, denn aus der oberen Zeile folgt $9 = -2 + 4t$, d.h. $t = \frac{4}{11}$, aus der unteren Zeile jedoch $3 = 1 + 3t$, d.h. $t = \frac{3}{2}$, was sich widerspricht. Somit sieht man, dass es keinen Wert für t in $\mathbb{R}$ derart gibt, sodass beide Gleichungen erfüllt wären.

P7 Eine Gerade in der Ebene – Fortsetzung der Aufgabe P11

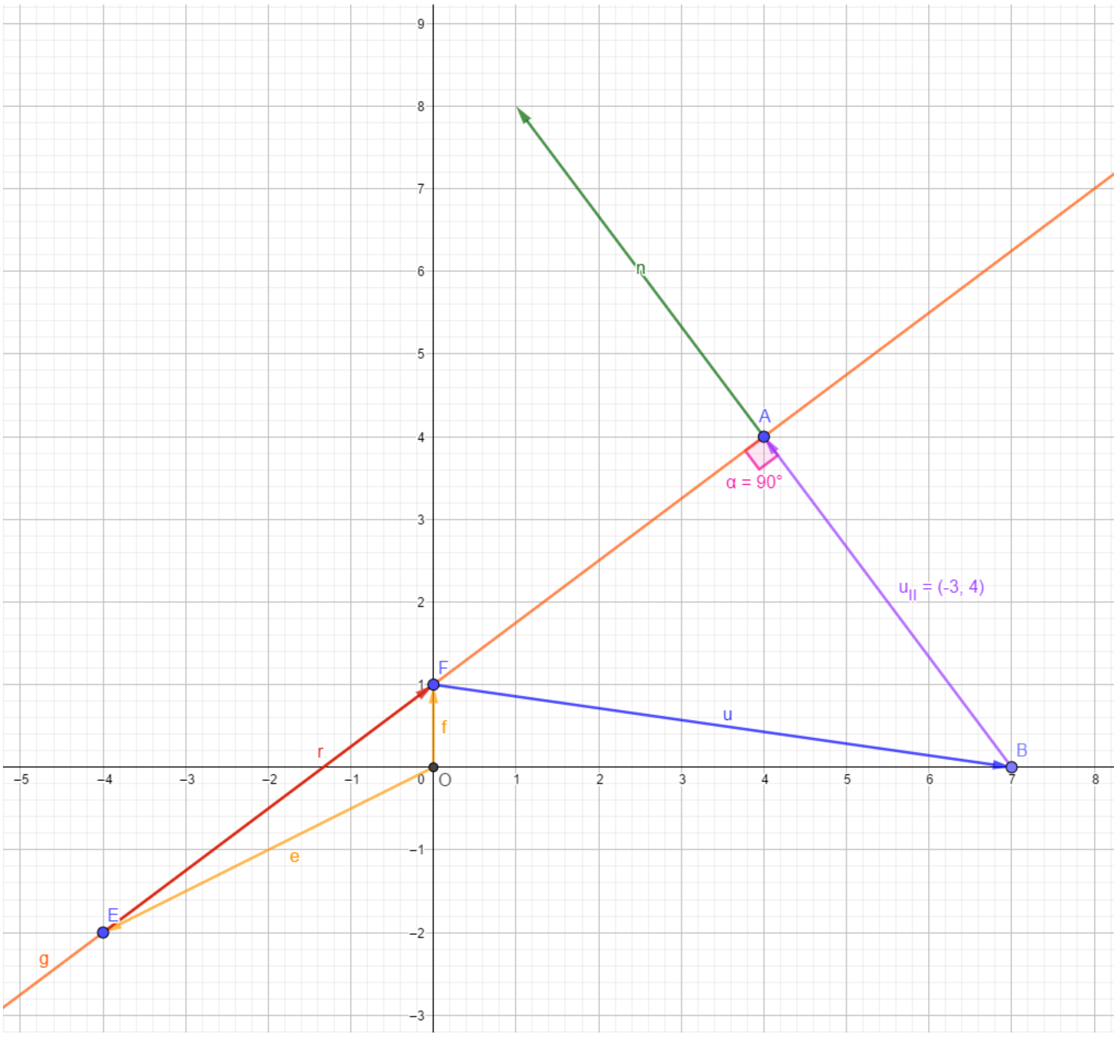


Abbildung 36: Vollständige Darstellung

a) Für die Überprüfung setzen wir den gegebenen Punkt mit der Parametergleichung von g gleich:

$$\begin{pmatrix} -8 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Um zu beweisen, dass der Punkt L auf der Geraden liegt, ist zu zeigen, dass sich für beide Komponenten der Vektorgleichung derselbe Wert für t ergibt.

$$\begin{aligned} & -8 = -4 + 4\,t \\ \leftrightarrow\quad & -4 = 4\,t \\ \leftrightarrow\quad & t = -1 \end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} & -5 = -2 + 3\,t \\ \leftrightarrow\quad & -3 = 3\,t \\ \leftrightarrow\quad & t = -1 \end{aligned}$$

Also liegt L in der Tat auf g.

Läge B auf g, so gäbe es einen Wert für t, so dass

$$\begin{aligned} & 7 = -4 + 4\,t \\ \leftrightarrow\quad & 11 = 4\,t \\ \leftrightarrow\quad & t = \frac{11}{4} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & 0 = -2 + 3\,t \\ \leftrightarrow\quad & 2 = 3\,t \\ \leftrightarrow\quad & t = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

gilt. Daraus folgte $t = \frac{11}{4}$ und $t = \frac{2}{3}$, ein Widerspruch. Also kann die Annahme, dass B auf g liegt nicht richtig sein.

b) Um einen Vektor zu finden, der senkrecht auf einem gegebenen Vektor $\binom{x_1}{x_2}$ steht, geht man wie folgt vor:

Vertausche x_1 und x_2, setze vor eine der beiden Koordinaten ein anderes Vorzeichen. Beispiel: Die Vektoren $\binom{x_1}{x_2}$ und $\binom{-x_2}{x_1}$ stehen senkrecht zueinander, denn für ihr Skalarprodukt gilt:
$\binom{x_1}{x_2} \cdot \binom{-x_2}{x_1} = 0$,

In unserer Aufgabe verwenden wir diese Faustregel, um den senkrechten Vektor $\vec{n}$ zum Richtungsvektor $\vec{r} = \binom{4}{3}$ unserer Geraden aufzustellen, $\vec{n}$ ist also
$\binom{-3}{4}$ oder $\binom{3}{-4}$.

c) Um die HNG zu erhalten setzen wir $\vec{n}$ und $\vec{p}$ in die gegebene HNG Gleichung ein.

$$0 = \binom{-3}{4} \cdot \left(\vec{x} - \binom{-2}{1}\right)$$

Nun setzen wir den Punkt $(6,7)$ für $\vec{x}$ ein.

$$\begin{aligned} & 0 = \left(\begin{smallmatrix}-3\\4\end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\left(\begin{smallmatrix}6\\7\end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix}-2\\1\end{smallmatrix}\right)\right) \\ & 0 = \left(\begin{smallmatrix}-3\\4\end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix}8\\6\end{smallmatrix}\right) \\ \rightsquigarrow\ & 0 = (-3 \cdot 8) + (4 \cdot 6) \\ & 0 = -24 + 24 \\ & 0 = 0 \end{aligned}$$

Der Punkt $(6,7)$ erfüllt somit die HNG.

Nun setzen wir den Punkt $(4,3)$ für $\vec{x}$ ein:

$$\begin{aligned} & 0 = \left(\begin{smallmatrix}-3\\4\end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\left(\begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix}-2\\1\end{smallmatrix}\right)\right) \\ & 0 = \left(\begin{smallmatrix}-3\\4\end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix}6\\2\end{smallmatrix}\right) \\ \rightsquigarrow\ & 0 = (-3 \cdot 6) + (4 \cdot 2) \\ & 0 = -18 + 8 \\ & 0 = -10 \end{aligned}$$

Da 0 nicht gleich -10 ist, gibt es für den Punkt $(4,3)$ keine wahre Aussage, der Punkt erfüllt die HNG somit nicht.

d) Wir multiplizieren das Skalarprodukt der HNG aus, um die AKG zu erhalten:

$$\begin{aligned} & 0 = \left(\begin{smallmatrix}-3\\4\end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix}-2\\1\end{smallmatrix}\right)\right) \\ \rightsquigarrow\quad & 0 = -3x_1 - 6 + 4x_2 - 4 \\ \rightsquigarrow\quad & 0 = -3x_1 + 4x_2 - 10 \end{aligned}$$

e) $\vec{u}$ ist in unserem Fall $\vec{FB} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$. Nun setzen wir die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{n}$ in die

Gleichung ein:

$$
\begin{aligned}
\vec{u_{||}} &= \frac{\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{7 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4}{-3 \cdot (-3) + 4 \cdot 4} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-21 \ - 4}{9 + 16} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-25}{25} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Nun berechnen wir die Länge von $\vec{u_{||}}$:

$$
\begin{aligned}
||\,\vec{u_{||}}\,|| &= \sqrt{3^2 + (-4)^2} \\
&= \sqrt{25} \\
&= 5
\end{aligned}
$$

H23 Zum Selbermachen.

Geraden in der Ebene – Schnittpunkte

H24 Keine Lösung vorhanden.

T9 Geraden in der Ebene - Bestimmung von Schnittpunkten

a) Wir zeichnen die Verbindungsgerade der Punkte $P = (-2, 1)$ und $Q = (2, 4)$ folgendermaßen:

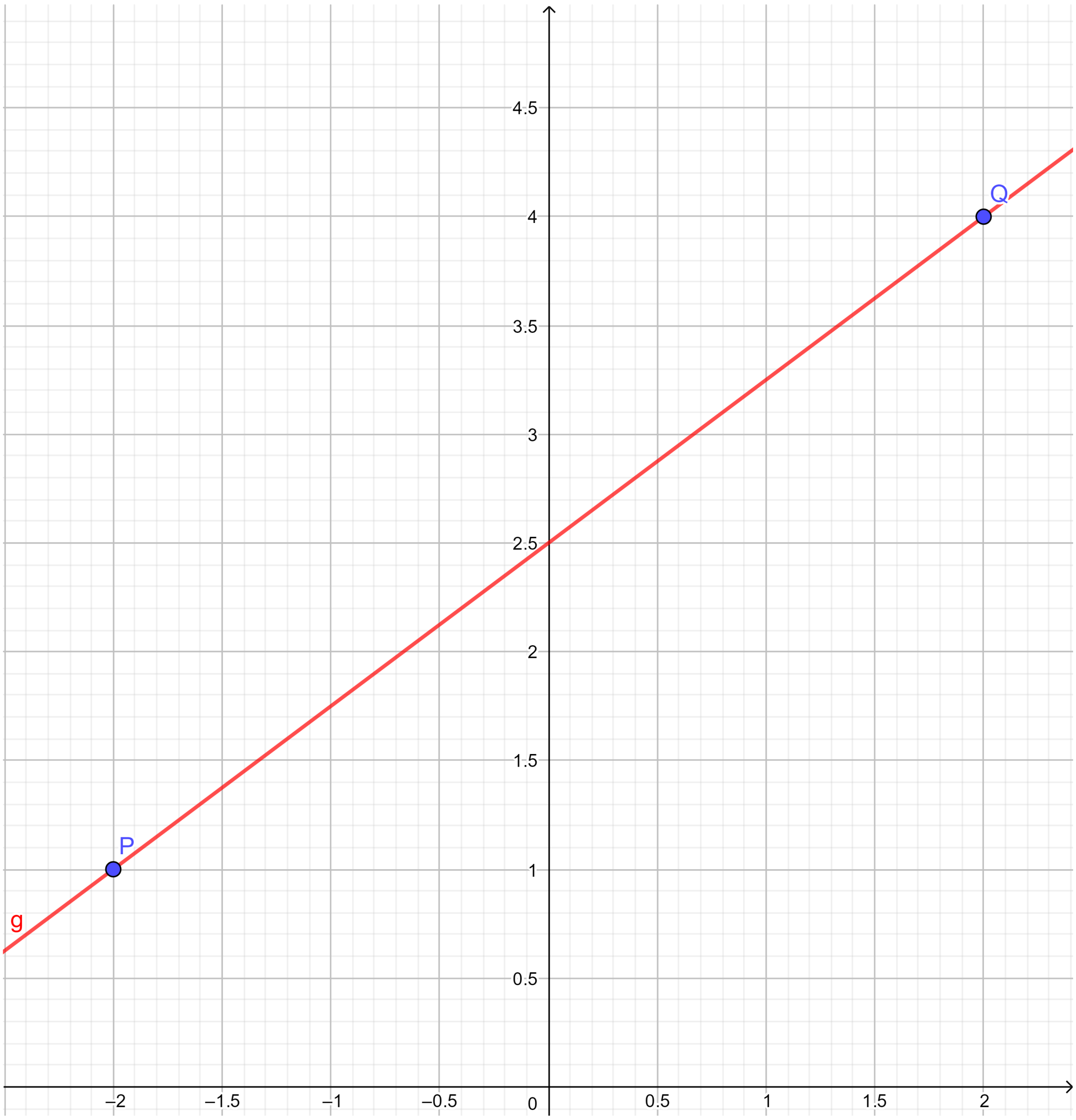


Abbildung 37: Die rote Gerade stellt die Gerade g dar.

b) Gesucht ist eine Parametergleichung der Form $\vec{x} = p + tr, t \in \mathbb{R}$. Wir erhalten einen Richtungsvektor $\vec{r}$ wie folgt:

$$\vec{r} = \vec{q} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Jetzt kann man die Parametergleichung aufstellen:

$$\vec{x}(t) \;=\; \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

c) Wir ermitteln einen Punkt A, der auf der Geraden h liegt. Hierzu setzen wir zunächst $x_1 = 0$, die folgende Rechnung liefert die Koordinaten des Schnittpunktes A der Geraden h mit der x_2-Achse: aus der AKG $2x_1 + 2x_2 - 5 = 0$ von h folgt:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 0 + 2x_2 - 5 &= 0 \\ 2x_2 - 5 &= 0 \\ 2x_2 &= 5 \\ x_2 &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Demnach besitzt der Punkt A die Koordinaten $\left(0, \frac{5}{2}\right)$.

Wir ermitteln einen Punkt B, der auf der Geraden h liegt. Hierzu setzen wir $x_1 = 1$:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 + 2x_2 - 5 &= 0 \\ 2 + 2x_2 - 5 &= 0 \\ x_2 - 3 &= 0 \\ 2x_2 &= 3 \\ x_2 &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Demnach hat der Punkt B die Koordinaten $\left(1, \frac{3}{2}\right)$.

d) Wir zeichnen der Zeichnung die Gerade h hinzu:

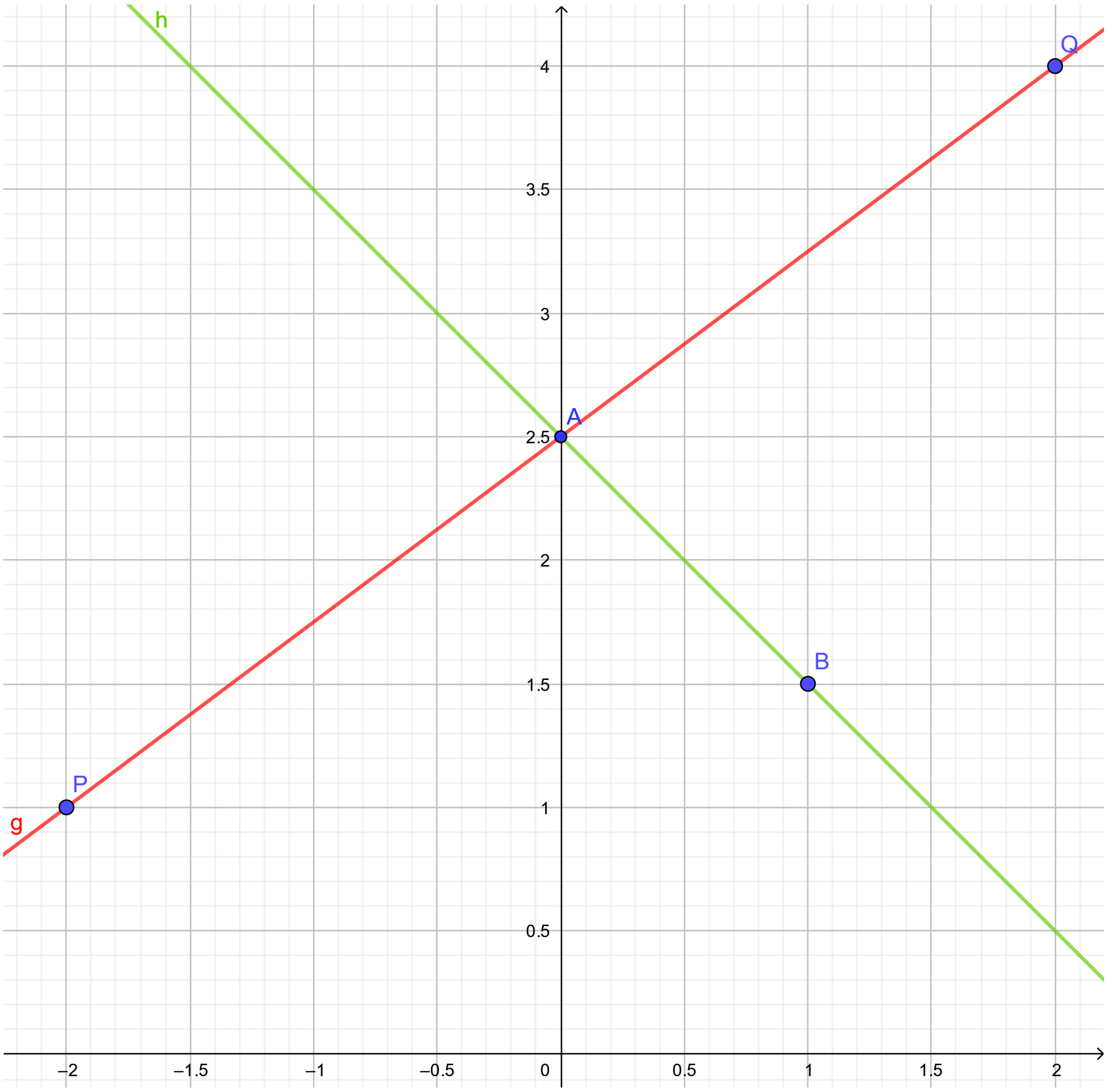


Abbildung 38: Die grüne Gerade stellt die Gerade h dar.

e) Wie im Hinweis beschrieben, bestimmen wir den Schnittpunkt der beiden Geraden g und h, um die AKG zu einer Parametergleichung um zuwandeln setzen wir zunächst $x_1 = s$ und berechnen x_2:

$$\begin{aligned} 2s + 2x_2 - 5 &= 0 \\ 2s + 2x_2 &= 5 \\ 2x_2 &= 5 - 2s \\ x_2 &= \frac{5}{2} - s \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} s \\ frac52 - s \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Parametergleichung von h sieht also folgendermaßen aus:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nun setzen wir die Parametergleichungen von g und h gleich:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt: $-2 + 4t = s$ und $1 + 3t = \frac{5}{2} - s$

Wir können nun unser berechnetes s in $1 + 3t = \frac{5}{2} - s$ einsetzen.

$$\begin{aligned} 1 + 3t &= \frac{5}{2} - (-2 + 4t) \\ 1 + 3t &= \frac{5}{2} + 2 - 4t \\ 1 + 3t &= \frac{5}{2} + \frac{2}{1} - 4t \\ 1 + 3t &= \frac{5}{2} + \frac{4}{2} - 4t \\ 1 + 3t &= \frac{9}{2} - 4t \\ 1 + 7t &= \frac{9}{2} \\ 7t &= \frac{9}{2} - 1 \\ 7t &= \frac{7}{2} \\ t &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Jetzt können wir t in die Parametergleichung von $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein:

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \\
\vec{x} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \\
\vec{x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Der Schnittpunkt der Geraden g und h befindet sich am also im Punkt $S = (0, \frac{5}{2})$.

f) Eine weitere Möglichkeit den Schnittpunkt zu bestimmen, ist die Parametergleichung von g in die AKG von h ein zu setzen.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad 2x_1 + 2x_2 - 5 = 0$$

$$\begin{aligned}
2 \cdot (-2 + 4t) + 2 \cdot (1 + 3t) - 5 &= 0 \\
-4 + 8t + 2 + 6t - 5 &= 0 \\
14t - 7 &= 0 \\
17t &= 7 \\
t &= \frac{7}{14} \\
t &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Jetzt können wir t in die Parametergleichung von g einsetzen: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \\
\vec{x} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \\
\vec{x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Der Schnittpunkt der Geraden g und h liegt also im Punkt $S = (0, \frac{5}{2})$.

g) Eine dritte Möglichkeit, um den Schnittpunkt zu bestimmen:

Es gilt $x_1 = -2 + 4t$ und $x_2 = 1 + 3t$.
Nun können wir die beiden Gleichungen so erweitern, dass t sich selbst auflöst. Erweitere x_1 mit 3 und x_2 mit -4.

$$\begin{aligned} x_1 &= -2 + 4t \\ 3x_1 &= -6 + 12t \\ 3x_1 - 12t + 6 &= 0 x_2 && = 1 + 3t \\ -4x_2 &= -4 - 12t \\ -4x_2 + 12t + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Nun addieren wir die Ausdrücke für x_1 und x_2:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 12t + 6 - 4x_2 + 12t + 4 &= 0 \\ 3x_1 + 6 - 4x_2 + 4 &= 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 10 &= 0 \end{aligned}$$

Jetzt können wir ein Lineares Gleichungssystem mit den beiden AKG von g und h erstellen.

$$\begin{aligned} I :=&\ 2x_1 + 2x_2 - 5 = 0 \\ II :=&\ 3x_1 - 4x_2 + 10 = 0 \end{aligned}$$

Erweitere I mit 2, damit x_2 sich selbst auflöst.

$$I \cdot 2 :=\ 4x_1 + 4x_2 - 10 = 0$$

Nun werden I' und II addiert:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + 10 + 4x_1 + 4x_2 - 10 &= 0 \\ 7x_1 &= 0 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

Setze nun x_1 in I ein

$$\begin{aligned} 2 \cdot 0 + 2x_2 - 5 &= 0 \\ 2x_2 - 5 &= 0 \\ 2x_2 &= 5 \\ x_2 &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Damit liegt der Schnittpunkt der Geraden g und h im Punkt $S = (0, \frac{5}{2})$.

h) Eine weitere Möglichkeit, um den Schnittpunkt von g und h zu bestimmen, ist Folgende (vgl. f):

Es gilt $x_1 = -2 + 4t$ und $x_2 = 1 + 3t$.
Nun setzen wir x_1 und x_2 in die AKG von $h := -6x_1 + 8x_2 - 12 = 0$ ein:

$$\begin{aligned} -6 \cdot (-2 + 4t) + 8 \cdot (1 + 3t) - 12 &= 0 \\ 12 - 24t + 8 + 24t - 12 &= 0 \\ 20 - 12 &= 0 \\ 8 &= 0 \end{aligned}$$

$8 = 0$ ist eine falsche Aussage. Daher haben die Geraden g und f keinen gemeinsamen Schnittpunkt, sie sind parallel zueinander.

i) Wir fügen zu unserer Zeichnung noch die Geraden h und f hinzu:

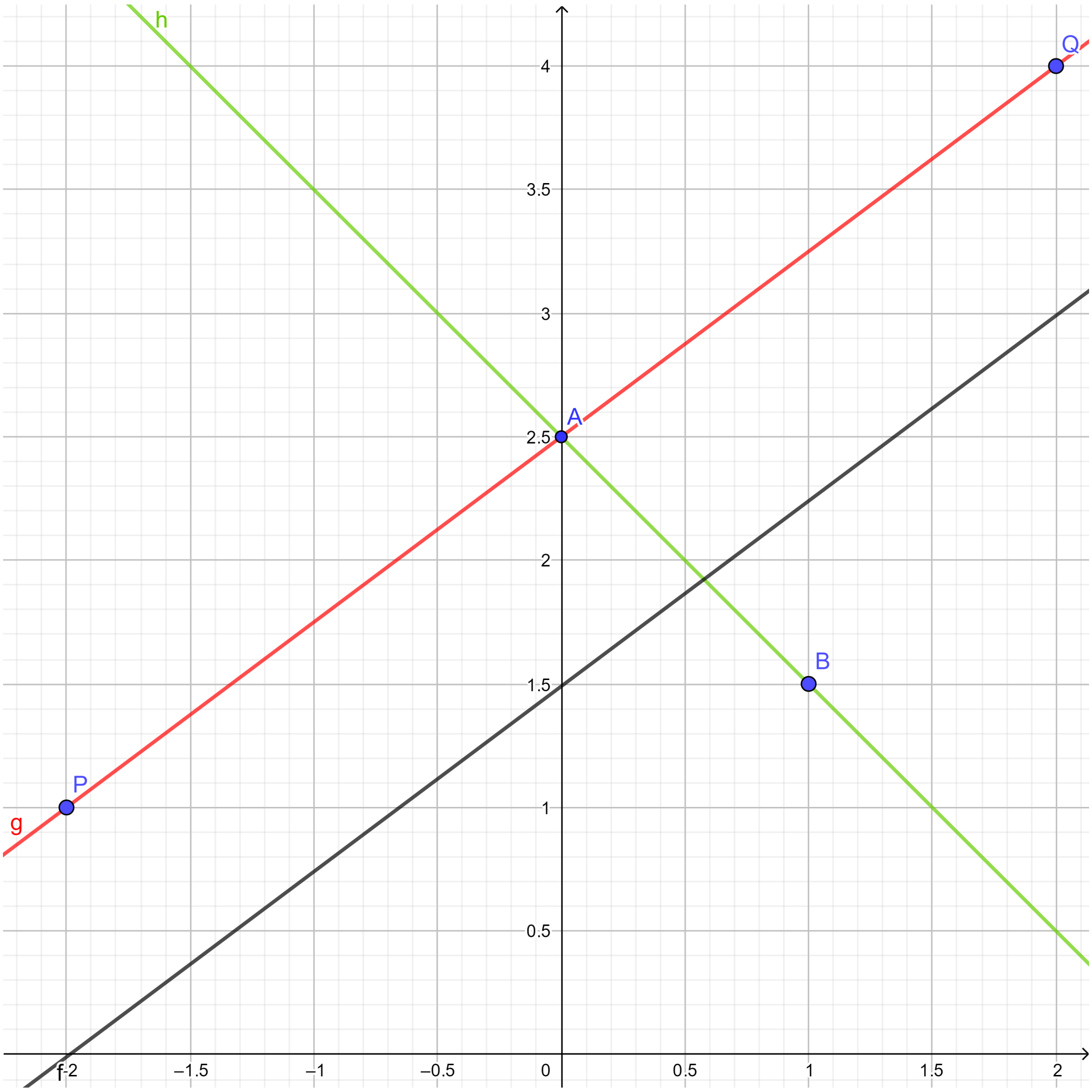


Abbildung 39: Die schwarze Gerade stellt die Gerade f dar.

T10 Keine Lösung vorhanden.

T11 Keine Lösung vorhanden.

Übungseinheit 8

Hausübungen

Aufgabe H 25. *Ein Würfel und zwei Ebenen*

Es sei W der Würfel, der den Koordinatenursprung $O = (0,0,0)$ sowie die Achseneinheitspunkte $X_1 = (1,0,0)$, $X_2 = (0,1,0)$ und $X_3 = (0,0,1)$ enthält. Es sei ferner E die Ebene, die durch die Punkte $A = (0,0,1)$, $B = (0,1,1)$, $C = (1,0,0)$ und $D = (1,1,0)$ verläuft.

(a) **Zeichnen Sie** den Würfel W und den im Innern von W liegenden Teil der Ebene E.

Verwenden Sie hierzu eine Kavalierprojektion (bei der die x_1-Achse „nach vorne" auf Sie zu zeigt). Um Überdeckungen zu vermeiden, wählen Sie für die Steigung Ihrer x_1-Achse am besten **nicht** den Wert 1, sondern z.B. den Wert $\frac{1}{2}$.

(b) **Stellen Sie** eine Parametergleichung der Form $\vec{x} = \vec{p} + s\,\vec{u} + t\,\vec{v}$ für die Ebene E auf.

(c) **Verwenden Sie** das Kreuzprodukt, um einen Normalenvektor $\vec{n}$ für die Ebene E zu berechnen: $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$.

Hinweis: Für zwei Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ ist

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2\,v_3 - u_3\,v_2 \\ u_3\,v_1 - u_1\,v_3 \\ u_1\,v_2 - u_2\,v_1 \end{pmatrix}.$$

(d) **Stellen Sie** eine Hesse'sche Normalengleichung (HNG) der Form $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$ für E **auf**. **Setzen Sie** einen der Punkte, von dem Sie sicher wissen, dass er auf der Ebene E liegt, in die HNG **ein** und **prüfen Sie** nach, dass sich eine wahre Aussage ergibt.

(e) **Schreiben Sie** eine allgemeine Koordinatengleichung (AKG) der Form

$$A\,x_1 + B\,x_2 + C\,x_3 + D = 0$$

auf, welche die Punkte der Ebene E beschreibt. Sie erhalten diese, indem Sie die linke Seite der HNG

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \right) = 0$$

ausmultiplizieren.

(f) Eine zweite Ebene E' sei durch die Gleichung[1]

$$x_2 + x_3 - 1 = 0$$

beschrieben? Welche Eckpunkte des Würfels W liegen auf E'?

(g) **Berechnen Sie** die Gerade g, die sich als Schnittmenge der Ebenen E und E' ergibt und zeichnen Sie die Teilstrecke von g die im Inneren des Würfels verläuft, in Ihre Skizze aus Teilaufgabe **(a)** ein.

Hinweis: Sie könnten sich hierzu eine AKG der Ebene E verschaffen und das System der beiden AKGen lösen. Alternativ hierzu können Sie die Ausdrücke für die Komponenten x_1, x_2 und x_3, die sich aus der Parametergleichung der Ebene E ergeben, in die gegebene AKG der Ebene E' einsetzen. Sie erhalten dann eine Gleichung, die Sie nach einem der Parameter s oder t auflösen.

[1] Dass dies eine Allgemeine Koordinatengleichung ist, sehen Sie spätestens, wenn Sie sie ausführlich so schreiben: $0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + (-1) = 0$.

Aufgabe H 26. *Mögliche (relative) Lagen zweier Geraden in der Ebene*

Für die Lage zweier Geraden (in der Ebene) zueinander gibt es drei grundsätzlich verschiedene Möglichkeiten:

i) Die beiden Geraden schneiden sich genau in einem Punkt.

ii) Die beiden Geraden stimmen in allen Punkten überein.

iii) Die beiden Geraden sind parallel[2] und voneinander verschieden.

Geben Sie für jeden dieser drei Fälle ein passendes Gleichungssystem **an**. *Hinweis: Jedes derartige System besteht aus zwei linearen Gleichungen in zwei Unbekannten*

Aufgabe H 27. *Geraden und Ebenen im Raum*

Es sei $\vec{u} = (0, -\frac{1}{2}, 1)^T$ und $\vec{v} = (-1, -1, 1)^T$.

(a) Stellen Sie eine Parametergleichung für die Gerade g im Raum auf, welche die Punkte $(0, 0, 1)$ und $(1, 1, 0)$ verbindet.

(b) Stellen Sie eine Parametergleichung der Ebene E im Raum auf, welche durch den Punkt $(0, 0, 1)$ verläuft und die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ als Richtungsvektoren besitzt.

(c) Stellen Sie eine Hesse'sche Normalengleichung für die Ebene E aus Teilaufgabe **(b)** auf.

Hinweis: Wählen Sie den Normalenvektor $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$.

(d) Stellen Sie eine Allgemeine Koordinatengleichung für die Ebene E auf.

(e) Bestimmen Sie den Abstand der Ebene E vom Koordinatenursprung.

(f) Bestimmen Sie den Abstand der Ebene E vom Punkt $(1, 1, 0)$.

[2] Zwei Geraden heißen **parallel**, wenn sie entweder gleich sind, oder aber keine Schnittpunkte besitzen.

H25 Ein Würfel und zwei Ebenen

a) In der Abbildung 40 ist der Einheitswürfel und die Ebene E dargestellt.

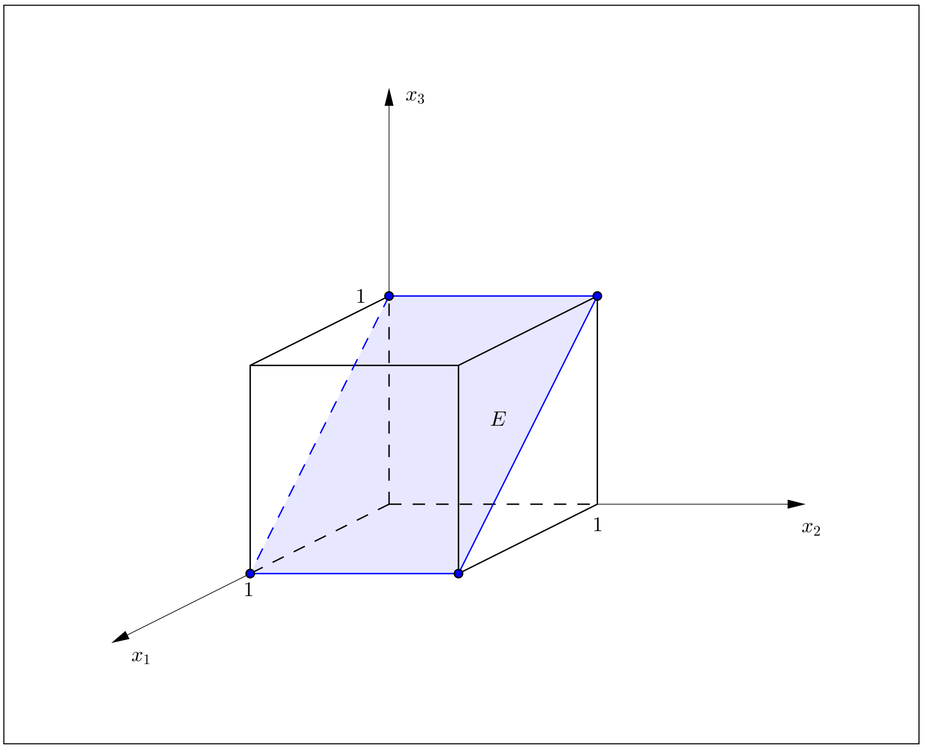


Abbildung 40: Einheitswürfel und Ebene E

b) Um die Parametergleichung der Form $\vec{x} = \vec{p} + s\,\vec{u} + t\,\vec{v}$ der Ebene E aufzustellen wird zunächst der Ortsvektor eines Punktes der Ebene als Stützvektor gewählt. Schließlich werden zwei Vektoren, die in der Ebene liegen, als Richtungsvektoren gewählt. Dafür werden zwei Verbindungsvektoren gegebener Punkte berechnet. Wähle z.B. :

$$\begin{aligned}
\vec{p} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\vec{u} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\vec{v} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Parametergleichung:

$$\vec{x} \;=\; \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

c) Berechnung des Kreuzproduktes und damit eines Normalenvektors $\vec{n}$ der Ebene E:

$$\begin{aligned}\vec{n} \;=\; \vec{u}\times\vec{v} \;&=\; \begin{pmatrix}1\cdot(-1) & - & 0\cdot 1\\ 0\cdot 1 & - & 0\cdot(-1)\\ 0\cdot 1 & - & 1\cdot 1\end{pmatrix}\\ &=\; \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

d) Mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ lässt sich eine Hesse'sche Normalengleichung der Ebene E aufstellen.

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}\cdot\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) \;=\; 0$$

e) Die Form der allgemeinen Koordinatengleichung lautet:

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D \;=\; 0$$

Man erhält sie durch Ausmultiplizieren der Hesse'schen Normalengleichung:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}\cdot\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) \;&=\; 0\\ \rightsquigarrow\; \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1-1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \;&=\; 0\end{aligned}$$

Dies ergibt die allgemeine Koordinatengleichung

$$-1\,x_1 + 0\,x_2 + (-1)\,x_3 + 1 \;=\; 0$$

f) Um diejenigen Eckpunkte des Würfels zu finden, die durch die Ebene E' mit der Gleichung $x_2 + x_3 - 1 \; = \; 0$ beschrieben wird, werden alle Punkte des Würfels in die Gleichung eingesetzt und überprüft, für welche Punkte die Gleichung erfüllt ist. Zum Beispiel gilt für den Punkt P mit $P \; = \; (0, \; 1, \; 0)$:

$$0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - 1 \; = \; 0 + 1 + 0 - 1 \; = \; 0$$

Nachdem wir uns vergewissert haben, dass (0, 0, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 1, 0) auf E' liegen, kann man E' in den Würfel einsetzen:

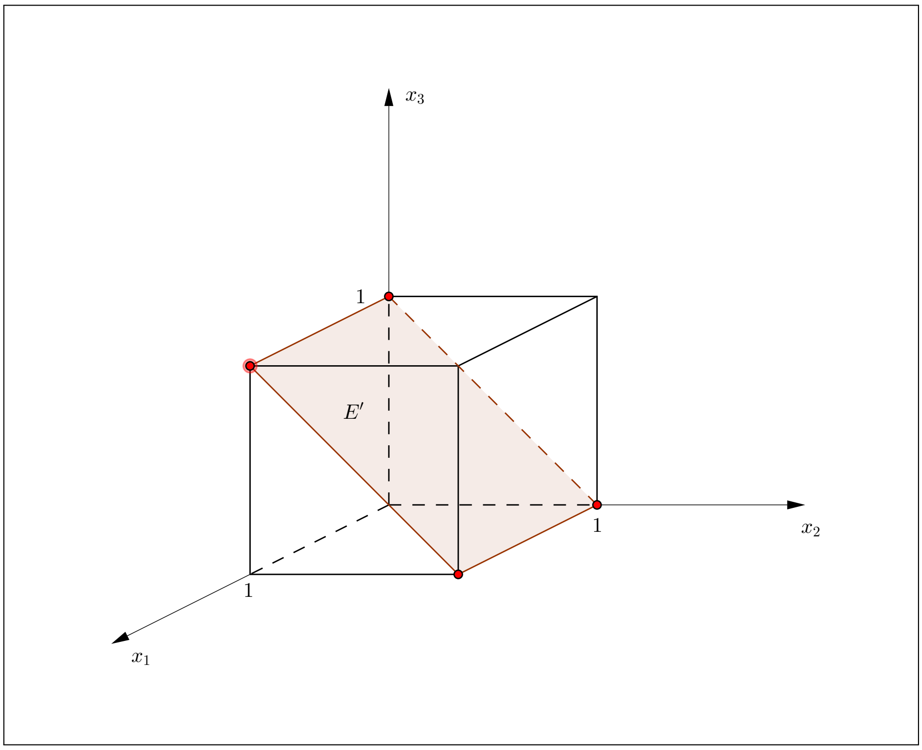


Abbildung 41: Der Würfel W und die Ebene E'

g) Zur Bestimmung der Geraden g gibt es ebenfalls mehrere Möglichkeiten:

1. Einerseits lässt sich die Gerade aus der Zeichnung der beiden Ebenen E und E' ablesen:

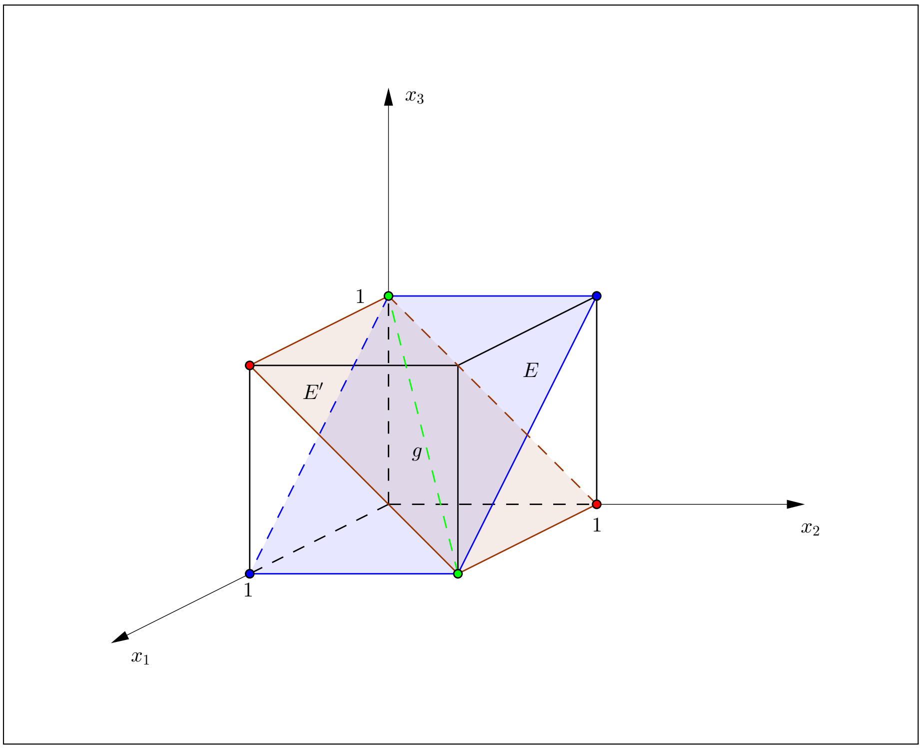


Abbildung 42: Der Würfel W und die Schnittgerade g der beiden Ebenen E und E'

Da die beiden Ebenen E und E' nicht parallel zueinander und auch nicht identisch sind, schneiden sie sich in einer Geraden. Wir wissen, dass die Punkte (0, 0, 1) und (1, 1, 0) auf beiden Ebenen liegen. Mithilfe dieser Punkte ist nun die Schnittgerade g zu bestimmen. Dabei ist der Ortsvektor des ersten Punkts der Stützvektor der Geraden und die Vektor von dem ersten zum zweiten Punkt der Richtungsvektor. Daraus folgt:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 & - & 0 \\ 1 & - & 0 \\ 0 & - & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Andererseits lässt sie sich berechnen. Dafür setzt man die Parametergleichung

von E in die AKG von E' ein. Die Parametergleichung der Ebene E lautet:

$$E: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ s+t \\ -t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow x_1 &= t \\ x_2 &= s+t \\ x_3 &= 1-t \end{aligned}$$

Die allgemeine Koordinatengleichung von E' ist gegeben durch:

$$E': \; x_2 + x_3 - 1 = 0$$

$$E': \; x_2 + x_3 - 1 = 0$$

$$E': \; x_2 + x_3 - 1 = 0$$

$$E': \; x_2 + x_3 - 1 = 0$$

Durch Einsetzen erhalten wir folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} s + t + 1 - t - 1 &= 0 \\ \rightsquigarrow \; s &= 0 \end{aligned}$$

Daraus wiederum folgt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. Eine weitere Möglichkeit ist das Gleichnungssystem, bestehend aus den beiden allgemeinen Koordinatengleichungen, zu lösen. Diese lauten:

$$\begin{aligned} E: \; 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 - 1 &= 0 \\ E': \; 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Formt man diese um, erhält man:

$$\begin{aligned} E: \; 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 &= 1 \\ E': \; 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Nun setzt man $x_3 = t$, daraus folgt:

$$\begin{aligned} x_1 + t &= 1 \\ x_2 + t &= 1 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen löst man nun nach x auf:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1-t \\ x_2 &= 1-t \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für x_1, x_2 und x_3:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1-t \\ x_2 &= 1-t \\ x_3 &= t \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Parametergleichung der Schnittgeraden g der beiden Ebenen:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$$

4. Eine weitere Methode ist die Berechnung mit Hilfe des Kreuzprodukts. So steht der Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden g senkrecht auf den Normalenvektoren $n = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $n' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Ebenen E und E'. Mit Hilfe des Kreuzproduktes lässt er sich berechnen.

$$\vec{u} = \vec{n} \times \vec{n'} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 & - & (-1) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 0 & - & (-1) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 1 & - & 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nun wird noch der Stützvektor der Geraden benötigt, dafür wird der Ortsvektor $\vec{v}$ eines Punktes P der auf der Geraden g liegt, verwendet. Diesen kann man entweder aus der Grafik entnehmen oder aus den Aufgabenstellungen der Aufgabe P13a) und P13f). So zum Beispiel der Punkt $P = (1, 1, 0)$. Damit ergibt sich für die Gerade g:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

h) Es soll der Abstand der Ebene E zu verschiedenen Punkten bestimmt werden.

i) Um den Abstand der Ebene zum Ursprung zu bestimmten, ist es sinnvoll eine Skizze des Würfels von der Seite anzufertigen, sodass man auf die x_1-x_3-Ebene schaut:

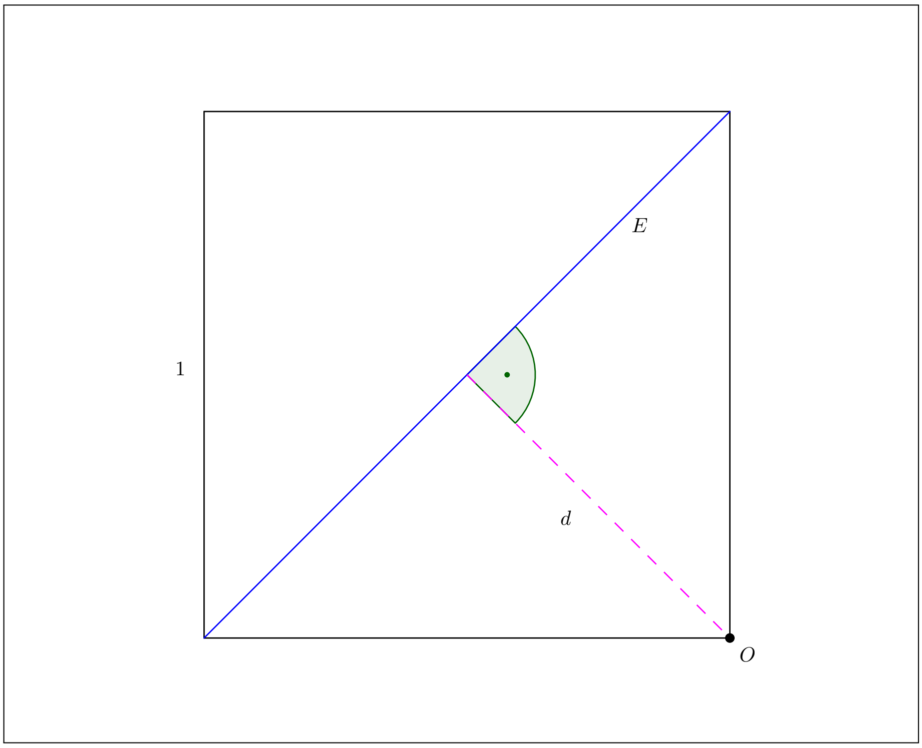


Abbildung 43: Seitenansicht des Würfels W

Aus dieser Ansicht kann man erkennen, dass der Abstand d mit einem Teil der Ebene E und der Kante des Würfels ein gleichschenkliges Dreieck aufspannt. Damit kann folgende Gleichung mit Hilfe des Satzes von Pythagoras abgeleitet werden:

$$d^2 + d^2 = 1^2$$

Stellt man diese Gleichung nach d um, erhält man den Abstand:

$$\begin{aligned} 2\,d^2 &= 1 \\ d^2 &= \frac{1}{2} \\ d &= \sqrt{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Dies kann man weiter vereinfachen:

$$\begin{aligned} d &= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Der Abstand der Ebene E zum Koordinatenursprung beträgt $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Möchte man den Abstand ohne Betrachtung der Grafik erhalten, so kann man die Abstandsformel verwenden. Diese lautet für eine Ebene E mit der Koordinatengleichung $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$ und einem Punkt $P(p_1, p_2, p_3)$

$$d = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Damit ergibt sich ebenfalls für den Abstand d:

$$\begin{aligned} d &= \frac{|(-1) \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{|1|}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

ii) Auch um den Abstand der Ebene E zum Punkt Z zu bestimmten, ist es sinnvoll eine entsprechende Skizze anzufertigen:

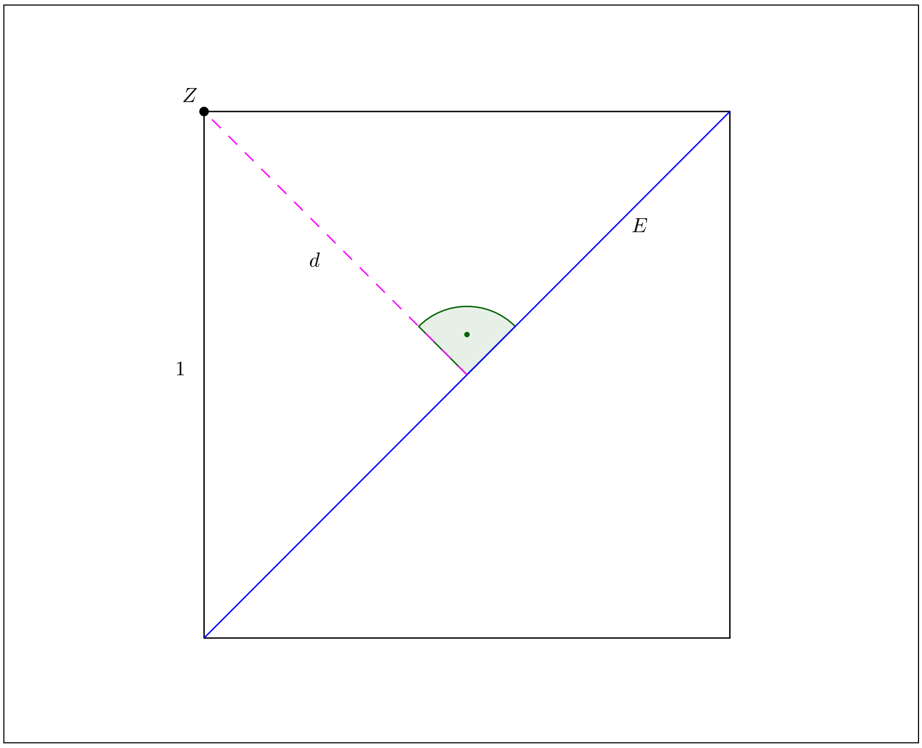


Abbildung 44: Seitenansicht des Würfels W

Auch aus dieser Ansicht kann man erkennen, dass der Abstand d mit einem Teil der Ebene E und der Kante des Würfels ein gleichschenkliges Dreieck aufspannt. Damit kann auch hier folgende Gleichung mit Hilfe des Satzes von Pythagoras abgeleitet werden:

$$d^2 + d^2 \ = \ 1^2$$

Es handelt sich um den selben Abstand, wie der zum Ursprung in Teilaufgabe H25 (Rechnung siehe oben). Der Abstand der Ebene E zum Punkt Z beträgt demnach $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

iii) Analog wird mit der Bestimmung des Abstandes d' des Punktes Z zur Ebene E' verfahren. Für die grafische Bestimmung wird jedoch die Frontansicht des Würfels verwendet:

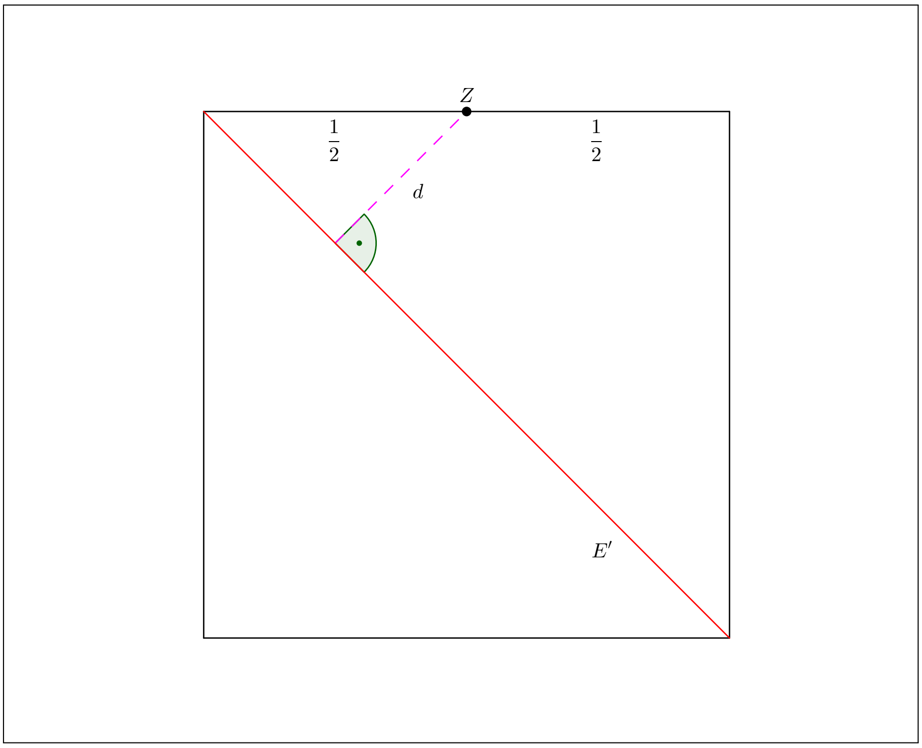


Abbildung 45: Frontansicht des Würfels W

Aus der Skizze kann man erkennen, dass der Abstand d mit einem Teil der Ebene E' und der Hälfte der Kante des Würfels ein gleichschenkliges Dreieck aufspannt. Damit kann mit Hilfe des Satz des Phytagoras folgende Gleichung abgeleitet werden:

$$d^2 + d^2 = (\frac{1}{2})^2$$

Stellt man diese Gleichung nach d um, erhält man den Abstand:

$$\begin{aligned} 2\,d^2 &= \frac{1}{4} \\ d^2 &= \frac{1}{8} \\ d &= \sqrt{\frac{1}{8}} \end{aligned}$$

Auch das kann man weiter vereinfachen:

$$\begin{aligned} d &= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{8}} \\ &= \frac{1 \cdot \sqrt{8}}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{8}} \\ &= \frac{\sqrt{8} \cdot \frac{1}{2}}{8 \cdot \frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{8 \cdot \frac{1}{4}}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Der Abstand der Ebene E zum Koordinatenursprung beträgt $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

i) Um den Abstand a des Punktes Z mit dem Ortsvektor $\vec{z}$ von der Geraden g der Form $\vec{x} = \vec{q} + t \cdot \vec{r}$ zu bestimmen, wird die angegebene Gleichung $a = \frac{\|(\vec{z}-\vec{q}) \times \vec{r}\|}{\|\vec{r}\|}$ verwendet:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\left\| \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|} \\ &= \frac{\left\| \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}}}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

H26 Keine Lösung vorhanden.

H27 Keine Lösung vorhanden.

Übungseinheit 9

Präsenzübungen

Aufgabe P 8. *Berechnung einer Parallelprojektion – in Anlehnung an eine Klausuraufgabe*

In Übungseinheit 2 haben wir damit begonnen Parallelprojektionen zu analysieren; hierbei war erhebliches räumliches Vorstellungsvermögen gefragt. Mit Vektorrechnung geht es deutlich einfacher.

Zur Erinnerung: Bei der Berechnung (der axonometrischen Angaben) von Parallelprojektionen gehen wir wie folgt vor:

- Zur Spezifikation einer Parallelprojektion wird zunächst eine **Bildebene** B festgelegt, z.B. durch eine Hesse'sche Normalengleichung (HNG) der Form $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$.
- Zweitens wird ein Richtungsvektor $\vec{r}$ festgelegt, der die Projektionsrichtung(en)[1] spezifiziert.
- Wenn A ein Punkt im Raum mit Ortsvektor $\vec{a}$ ist, so erhält man dessen Projektionsbild A', in der Bildebene indem man den Schnittpunkt derjenigen (Projektions-)Geraden g_A, die durch A verläuft und $\vec{r}$ als Richtungsvektor hat, mit der Bildebene bestimmt: $A' = g_A \cap B$.
- Für jeden Raumpunkt A müssen wir eine eigene Parametergleichung $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{r}$ für die entsprechende Projektionsgerade g_A aufstellen.
- Um nun zu einem gegebenen Raumpunkt A den Bildpunkt A' zu berechnen, setzt man den Ausdruck $\vec{a} + t\,\vec{r}$ anstelle von $\vec{x}$ in die HNG $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$ der Bildebene B ein. Die sich ergebende Gleichung
$$\vec{n} \cdot (\vec{a} + t\,\vec{r} - \vec{p}) = 0$$
löst man nach t auf, den so gefundenen Wert t^* setzt man in die Parametergleichung der Geraden ein und erhält
$$\vec{a}' = \vec{a} + t^*\,\vec{r}.$$

Betrachten Sie nun die Parallelprojektion auf die Bildebene B, welche die Punkte $E_1 = (1,0,0)$, $E_2 = (0,1,0)$ und $E_3 = (0,0,1)$ enthält. Als Richtungsvektor für die Projektionsgeraden wählen wir $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Damit Sie ein Bild vor Augen haben, zeichnen Sie einen Einheitswürfel mit Eckpunkten
$$O = (0,0,0),\ E_1 = (1,0,0),\ E_2 = (0,1,0),\ E_3 = (0,0,1),\ \dots$$
in einer beliebigen Parallelprojektion. Fügen Sie Ihrer Zeichnung den Vektor $\vec{r}$ hinzu; skizzieren Sie ferner den Teil der Ebene B, der innerhalb des Würfels liegt.

(b) **Rechnen Sie** nach, dass der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor für die Bildebene ist. Setzen Sie hierzu z.B.
$$\vec{u} := \overrightarrow{E_2E_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{v} := \overrightarrow{E_2E_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
und berechnen Sie das Kreuzprodukt $\vec{u} \times \vec{v}$.

[1] Die tatsächlich verwendete Projektionsrichung ist entweder gleich der Richtung von $\vec{r}$ oder von $-\vec{r}$. Wenn man ganz präzise formulieren möchte, müsste man sagen, dass der Richtungsvektor $\vec{r}$ die **Parallelklasse** festlegt, der alle Projektionsgeraden angehören.

(c) **Stellen Sie** eine Hesse'sche Normalengleichung für die Bildebene B auf.

(d) **Bestimmen Sie ohne Rechnung** die Projektionsbilder der Punkte $E_1 = (1,0,0)$, $E_2 = (0,1,0)$ und $E_3 = (0,0,1)$.

Hinweis: Denken Sie daran, dass diese drei Punkte nach der oben gemachten Voraussetzung ***in der Bildebene*** *liegen.*

(e) **Berechnen Sie** das Projektionsbild O' des Punktes O.

(f) **Stellen Sie** den Vektor $\overrightarrow{O'E_1'}$ auf und **berechnen Sie** die Länge der Strecke $\overline{O'E_1'}$.

Hinweis: Damit haben Sie den Skalierungsfaktor s_1, also eine der axonometrischen Angaben der hier zu untersuchenden Parallelprojektion bestimmt.

(g) **Stellen Sie** den Vektor $\overrightarrow{O'E_3'}$ auf und **berechnen Sie** dessen Länge $\left\|\overrightarrow{O'E_3'}\right\|$.

Hinweis: Damit haben Sie den Skalierungsfaktor s_3 bestimmt.

(h) **Berechnen Sie** den Winkel α zwischen den Vektoren $\overrightarrow{O'E_1'}$ und $\overrightarrow{O'E_3'}$.

Hinweis: Damit haben Sie eine weitere axonometrische Angabe der Parallelprojektion bestimmt.

Für Schnelle sogleich, für alle anderen zuhause:

(i) **Berechnen Sie** nun auch den Skalierungsfaktor $s_2 = \left\|\overrightarrow{O'E_2'}\right\|$.

(j) **Bestimmen Sie** den Winkel β zwischen den Vektoren $\overrightarrow{O'E_2'}$ und $\overrightarrow{O'E_3'}$.

(k) **Holen Sie** sich aus dem DM-Intranet die Aufgabe H 1 und beginnen Sie damit, diese zu bearbeiten.

Hausübungen

Aufgabe H 28. *Eigenschaften orthogonaler Parallelprojektionen*

In Kapitel 1 der Vorlesungsfolien haben wir u.a. **orthogonale** Parallelprojektionen thematisiert, bei denen die Projektionsrichtung **senkrecht** zur Bildebene steht. Anders als bei Schrägprojektionen können die Skalierungsfaktoren s_1, s_2 und s_3 im Falle orthogonaler Projektionen **nicht** beliebig groß werden, vielmehr gelten die folgenden Beziehungen:

$$s_1 \leq 1,\ s_2 \leq 1,\ s_3 \leq 1, \qquad s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 2.$$

Wir werden dies nun begründen und hierzu die Techniken verwenden, die Sie in Aufgabe P 1 kennengelernt haben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir eine Bildebene, die den Koordinatenursprung enthält. Diese hat eine HNG der Form $\hat{n} \cdot \vec{x} = 0$, wobei $\hat{n} = \left(\begin{smallmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{smallmatrix}\right)$ ein Normalenvektor der Länge 1 ist. Somit gilt

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1.$$

Da wir von einer **orthogonalen** Parallelprojektion ausgehen, gibt der (auf der Bildebene senkrecht stehende) Normalenvektor $\hat{n}$ gleichzeit die Projektionsrichtung an.

(a) **Vollziehen Sie** alle Einzelschritte der folgende Berechnung für das Projektionsbild E_1' des Punktes $E_1 = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ **nach**:

Wir setzen den Ausdruck $\vec{x}(t) = \widehat{e}_1 + t\,\hat{n}$ für die von E_1 ausgehende Projektionsgerade in die HNG ein und erhalten:

$$\hat{n} \cdot (\widehat{e_1} + t\,\hat{n}) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \left(\begin{smallmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + t \left(\begin{smallmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{smallmatrix}\right)\right) = 0, \text{ also}$$

$$n_1 + t\left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right) = 0, \quad \text{d.h.} \quad n_1 + t = 0 \quad \text{bzw.} \quad t = -n_1 :$$

Der Bildpunkt E_1' hat also den Ortsvektor

$$\overrightarrow{OE_1'} = \widehat{e}_1 + (-n_1)\,\hat{n} = \begin{pmatrix} 1 - n_1^2 \\ -n_1\,n_2 \\ -n_1\,n_3 \end{pmatrix}.$$

Für den Skalierungsfaktor s_1 ergibt sich somit

$$\begin{aligned} s_1^2 &= \left\|\overrightarrow{OE_1'}\right\|^2 = \left(1 - n_1^2\right)^2 + (-n_1\,n_2)^2 + (-n_1\,n_3)^2 \\ &= 1 - 2\,n_1^2 + n_1^4 + n_1^2\,n_2^2 + n_1^2\,n_3^2 \\ &= 1 - 2\,n_1^2 + n_1^2 \cdot \left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right) \\ &= 1 - 2\,n_1^2 + n_1^2 \cdot 1 \\ &= 1 - n_1^2 \end{aligned}$$

(b) **Berechnen Sie** eigenständig die Projektionsbilder E_2' und E_3' der Punkte $E_2 = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0 \end{pmatrix}$ und $E_3 = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$. **Verifizieren Sie** die Beziehungen $s_2^2 = 1 - n_2^2$ und $s_3^2 = 1 - n_3^2$.

(c) **Folgern Sie** aus dem bislang Erarbeiteten, dass die Beziehungen $s_1 \leq 1,\ s_2 \leq 1,\ s_3 \leq 1$ und $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 2$ richtig sind.

Aufgabe H 29. *Berechnung von Kavalierprojektionen (für Fortgeschrittene)*

Führen Sie alle Schritte der Aufgabe P 1 nun auch für Kavalierprojektionen durch. Die Projektionsrichtung durch den Vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\,\cos(\varphi) \\ \cos(\theta)\,\sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ gegeben, die Bildebene ist die x_2-x_3-Ebene mit der Gleichung $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$. **Bestimmen Sie** alle axonometrischen Angaben $(s_1, s_2, s_3, \alpha, \beta)$.

Zu Ihrer Orientierung und zur Kontrolle Ihrer Rechnungen erinnern wir an die Übungseinheit 2, wo es hieß: Wenn eine Projektionsrichtung $\vec{p}$ durch die Winkel θ und φ beschrieben wird (vgl. Abbildung 1), so hat der Bildpunkt E_1' die Koordinaten $\begin{pmatrix} -\tan(\varphi) \\ -\frac{\tan(\theta)}{\cos(\varphi)} \end{pmatrix}$.

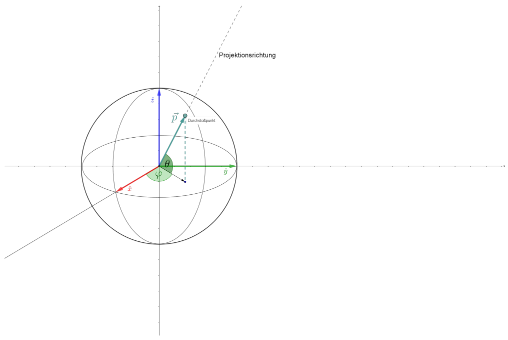


Abbildung 15: Zur Festlegung der Projektionsrichtung mit „geografischen“ Winkeln.

Aufgabe H 30. *Fortführung der Aufgabe H 2*

(a) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Welchen Wert a^* muss man wählen, damit der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{r}_{a^*} = \begin{pmatrix} a^* \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ genau $45°$ beträgt?

(c) Bestimmen Sie den Punkt E_1', der sich als Schnittpunkt der Geraden g_{a^*} mit Parametergleichung $\vec{x}(t) = \vec{e}_1 + t\,\vec{r}_{a^*}$ und der (Bild-)Ebene B mit HNG

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0$$

ergibt.

(d) Berechnen Sie die Länge des Vektors $\overrightarrow{OE_1'}$.

Tutoriumsübungen

Aufgabe T 12. *Schnittpunkte von Geraden und Ebene – Analyse von Kavalierprojektionen*

Jede Ebene im dreidimensionalen Raum lässt sich durch eine Hesse'sche Normalengleichung (HNG) der Form $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$, beschreiben.

(a) Es sei $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Welche Ebene B wird dann durch die HNG $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$ dargestellt?

Jede Gerade im Raum lässt sich durch eine Parametergleichung des Typs $\vec{x}(t) = \vec{p} + t\,\vec{r}$ darstellen. Wir betrachten im Folgenden jeweils Geraden, deren Richtungsvektoren $\vec{r}$ von der Form $\vec{r}_a = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind.

(b) Betrachten Sie zunächst den Richtungsvektor $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Damit Sie ein Bild vor Augen haben, zeichnen Sie einen Einheitswürfel mit Eckpunkten

$$O = (0,0,0),\ E_1 = (1,0,0),\ E_2 = (0,1,0),\ E_3 = (0,0,1),\ \ldots$$

in einer beliebigen Parallelprojektion. Fügen Sie Ihrer Zeichnung den Vektor $\vec{r}_1$ hinzu.

(c) Es sei $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie den Punkt E_1', der sich als Schnittpunkt der Geraden g_1 mit Parametergleichung $\vec{x} = \vec{e}_1 + t\,\vec{r}_1$ und der Ebene B ergibt.

Hinweis: Wandeln Sie hierzu die in der vorigen Übungseinheit erprobte Methode wie folgt ab: Setzen Sie die Komponenten x_1, x_2 und x_3, die sich aus der Parametergleichung der Geraden ergeben, in die Hesse'sche Normalengleichung $\vec{n} \cdot \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \vec{p} \right) = 0$ der Ebene ein.

(d) Fügen Sie Ihrer in Teilaufgabe **(b)** begonnenen Skizze die Gerade g_1 und den Schnittpunkt E_1' hinzu. Sie können Ihrem Auge helfen, indem Sie in Ihrer Zeichnung einen zweiten Würfel entlang der x_1-Achse vor den ersten setzen.

(e) Berechnen Sie die Länge des Vektors $\overrightarrow{OE_1'}$ sowie den Winkel α zwischen den Vektoren $\overrightarrow{OE_1'}$ und $\overrightarrow{OE_3}$.

(f) Wir wollen nun einen neuen Richtungsvektor $\vec{r}_a$ so bestimmen, dass der Schnittpunkt der Projektionsgeraden g_a mit der Bildebene B genau den Abstand $\frac{1}{\sqrt{2}}$ vom Ursprung besitzt. Mit den Begriffen der Axonometrie ausgedrückt: Wir erreichen, dass der Skalierungsfaktor s_1 den Wert $\frac{1}{\sqrt{2}}$ annimmt.

Es bezeichne also E_1'' den Schnittpunkt der Geraden g_a mit Parametergleichung

$$\vec{x}(t) = \vec{e}_1 + t \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und der Ebene B. Wie muss der Wert von a gewählt werden, damit die Länge des Vektors $\overrightarrow{OE_1''}$ gleich $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ist? Welchen Wert hat dann der Winkel α zwischen den Vektoren $\overrightarrow{OE_1''}$ und $\overrightarrow{OE_3}$.

P8 Berechnung einer Parallelprojektion – Klausuraufgabe vom Sommer 2018

a) Kreuzprodukt $\overrightarrow{E_2E_3} \times \overrightarrow{E_2E_1} =$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\cdot 0 & - & 1\cdot(-1) \\ 1\cdot 1 & - & 0\cdot 0 \\ 0\cdot(-1) & - & (-1)\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{n}}$$

b) Aufstellen der Hesse'schen Normalengleichung $\overrightarrow{\mathrm{n}} \cdot [\overrightarrow{\mathrm{x}} - \overrightarrow{\mathrm{p}}] = 0$

Wir verwenden als Stützvektor $p = (0, 0, 1)$ und als Normalenvektor den in Teilaufgabe a) berechneten Vektor $n = (1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$

c) E_1, E_2 und E_3 liegen in der BILD-Ebene, daher sind sie gleich ihren Projektionsbildern.

d) Mit Hilfe der allgemeinen Geradengleichung $\overrightarrow{\mathrm{x}} = \overrightarrow{\mathrm{a}} + t \cdot (\overrightarrow{\mathrm{r}})$

und der Hesse'schen Normalengleichung $\overrightarrow{\mathrm{n}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{x}} - \overrightarrow{\mathrm{p}}) = 0$ ergibt sich die Gleichung

$\overrightarrow{\mathrm{n}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{a}} + t \cdot \overrightarrow{\mathrm{r}} - \overrightarrow{\mathrm{p}}) = 0$. Wir verwenden als Stützvektor $p = (0, 0, 1)$, als Normalenvektor den in Teilaufgabe a) berechneten Vektor $n = (1, 1, 1)$ und

als Richtungsvektor $r = (1, 1, 1)$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t-1 \\ t \\ t \end{pmatrix} = 0$$

$\rightsquigarrow 3 \cdot t - 1 = 0$
$3 \cdot t = 1$
$t = \frac{1}{3}$

$$\rightsquigarrow O' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

e) $E_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{O'E_1'} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$$|\overrightarrow{OE_1'}| = \sqrt{\frac{2}{3}^2 + (-\frac{1}{3})^2 + (-\frac{1}{3})^2}$$

$$\rightsquigarrow \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}}$$

$$\rightsquigarrow \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

f) $\overrightarrow{O'E_1'} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{OE_1'} \cdot \overrightarrow{OE_3'}}{|\overrightarrow{OE_1'}| \cdot |\overrightarrow{OE_3'}|}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}}{\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}}$$

$$\rightsquigarrow \cos(\alpha) = \frac{\frac{2}{3} \cdot (-\frac{1}{3}) + (-\frac{1}{3}) \cdot (-\frac{1}{3}) + (-\frac{1}{3}) \cdot \frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{4}{9}}}$$

$$\rightsquigarrow \cos(\alpha) = \frac{-\frac{2}{9} + \frac{1}{9} - \frac{2}{9}}{\frac{2}{3}}$$

$$\rightsquigarrow \cos(\alpha) = \frac{-\frac{4}{9} + \frac{1}{9}}{\frac{2}{3}}$$

$$\rightsquigarrow \cos(\alpha) = \frac{-\frac{3}{9}}{\frac{2}{3}}$$

$$\rightsquigarrow \cos(\alpha) = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\rightsquigarrow \cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$$

H28 Eigenschaften orthogonaler Parallelprojektionen

Wir begründen, dass die folgenden Aussagen gelten:

$$s_1 \leq 1, s_2 \leq 1, s_3 \leq 1 \qquad \text{und} \qquad s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 2.$$

Im Folgenden sei generell

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1.$$

a) gegeben: $E_1 = (1, 0, 0)$

Wir setzen $\vec{x}(t) = \hat{e}_1 + t\hat{n}$ in die von E_1 ausgehende Parametergleichung $\hat{n}(\hat{e_1} + t\hat{n}) = 0$ der Projektionsgeraden, ein.

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \right] = 0$$

Wir multiplizieren mit dem Skalarprodukt aus.

$$\begin{aligned} n_1(1 + tn_1) + n_2(0 + tn_2) + n_3(0 + tn_3) &= 0 && \mid \text{ausmultiplizieren} \\ n_1 + n_1tn_1 + n_2tn_2 + n_3tn_3 &= 0 \\ n_1 + tn_1^2 + tn_2^2 + tn_3^2 &= 0 && \mid \text{t ausklammern} \\ n_1 + t \cdot (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) &= 0 \end{aligned}$$

wegen der Gleichung $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ folgt

$$\begin{aligned} n_1 + t \cdot (1) &= 0 \\ n_1 + t &= 0 && \mid -n_1 \\ \rightsquigarrow \quad t &= -n_1 \end{aligned}$$

Um den Ortsvektor von E_1' zu erhalten wird $t = -n_1$ in die Parametergleichung

$\vec{x}(t) = \hat{e}_1 + t\hat{n}$ der Projektionsgeraden, die von E_1 ausgeht, eingesetzt.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OE_1'} &= \hat{e_1} + (-n_1)\hat{n} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-n_1) \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -n_1 \cdot n_1 \\ -n_1 \cdot n_2 \\ -n_1 \cdot n_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 - n_1^2 \\ -n_1 n_2 \\ -n_1 n_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Für den Skalierungsfaktor s_1 ergibt sich somit:

$$s_1^2 = ||\overrightarrow{OE_1'}|| = (1 - n_1^2)^2 + (-n_1 n_2)^2 + (-n_1 n_3)^2$$

Wir quadrieren $(1 - n_1^2)^2$ mit Hilfe der zweiten binomischen Formel und erhalten

$$s_1^2 = 1 - 2n_1^2 + n_1^4 + n_1^2 n_2^2 + n_1^2 n_3^2$$

Wir klammern n_1^2 aus und erhalten

$$s_1^2 = 1 - 2n_1^2 + n_1^2 \cdot (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)$$

wegen der Gleichung $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ folgt

$$\begin{aligned}
& s_1^2 = 1 - 2n_1^2 + n_1^2 \cdot 1 \\
\rightsquigarrow\quad & s_1^2 = 1 - n_1^2
\end{aligned}$$

b) Projektionsbild für E_2'

gegeben: $E_2 = (0, 1, 0)$

Wir setzen $\vec{x}(t) = \hat{e}_2 + t\hat{n}$ in die von E_2 ausgehende Parametergleichung $\hat{n}(\hat{e_2} + t\hat{n}) = 0$ der Projektionsgeraden ein.

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \right] = 0$$

Wir multiplizieren mit dem Skalarprodukt aus.

$$\begin{aligned}
n_1(0 + tn_1) + n_2(1 + tn_2) + n_3(0 + tn_3) &= 0 \qquad | \text{ ausmultiplizieren} \\
n_1 t n_1 + n_2 + n_2 t n_2 + n_3 t n_3 &= 0 \\
tn_1^2 + n_2 + tn_2^2 + tn_3^2 &= 0 \qquad | \text{ t ausklammern} \\
n_2 + t \cdot (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) &= 0
\end{aligned}$$

wegen der Gleichung $n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$ folgt

$$\begin{aligned} n_2+t\cdot(1) &= 0 \\ n_2+t &= 0 && \mid -n_2 \\ \rightsquigarrow \quad t &= -n_2 \end{aligned}$$

Um den Ortsvektor von E_2' zu erhalten wird $t=-n_2$ in die Parametergleichung $\vec{x}(t)=\hat{e}_2+t\hat{n}$ der Projektionsgeraden die von E_2 ausgeht eingesetzt.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OE_2'} &= \hat{e_2}+(-n_2)\hat{n} \\ &= \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+(-n_2)\cdot\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-n_2\cdot n_1\\-n_2\cdot n_2\\-n_2\cdot n_3\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}-n_1n_2\\1-n_2^2\\-n_2n_3\end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für den Skalierungsfaktor s_2 ergibt sich somit:

$$s_2^2 \quad = \quad ||\overrightarrow{OE_2'}|| = (-n_1n_2)^2+(1-n_2^2)^2+(-n_2n_3)^2$$

Wir quadrieren $(1-n_2^2)^2$ mit Hilfe der zweiten binomischen Formel und erhalten

$$s_2^2 \quad = \quad n_1^2n_2^2+1-2n_2^2+n_2^4+n_2^2n_3^2$$

Wir klammern n_2^2 aus und erhalten

$$s_2^2 \quad = \quad 1-2n_2^2+n_2^2\cdot(n_1^2+n_2^2+n_3^2)$$

wegen der Gleichung $n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$ folgt

$$\begin{aligned} s_2^2 &= 1-2n_2^2+n_2^2\cdot 1 \\ \rightsquigarrow \quad s_2^2 &= 1-n_2^2 \end{aligned}$$

Wir erhalten somit für s_2^2 den Wert $1-n_2^2$. Damit ist die Behauptung der Aufgabenstellung verifiziert.

Projektionsbild für E_3'

gegeben: $E_3=(0,0,1)$

Wir setzen $\vec{x}(t) = \hat{e}_3 + t\hat{n}$ in die von E_3 ausgehende Parametergleichung $\hat{n}(\hat{e_3} + t\hat{n}) = 0$ der Projektionsgeraden ein.

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \right] = 0$$

Wir multiplizieren mit dem Skalarprodukt aus.

$$\begin{aligned}
n_1(0 + tn_1) + n_2(0 + tn_2) + n_3(1 + tn_3) &= 0 && \mid \text{ausmultiplizieren} \\
n_1tn_1 + n_2tn_2 + n_3 + n_3tn_3 &= 0 \\
tn_1^2 + tn_2^2 + n_3 + tn_3^2 &= 0 && \mid \text{t ausklammern} \\
n_3 + t \cdot (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) &= 0
\end{aligned}$$

wegen der Gleichung $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ folgt

$$\begin{aligned}
n_3 + t \cdot (1) &= 0 \\
n_3 + t &= 0 && \mid -n_3 \\
\rightsquigarrow \quad t &= -n_3
\end{aligned}$$

Um den Ortsvektor von E_3' zu erhalten wird $t = -n_3$ in die Parametergleichung $\vec{x}(t) = \hat{e}_3 + t\hat{n}$ der Projektionsgeraden die von E_3 ausgeht eingesetzt.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OE_3'} &= \hat{e_3} + (-n_3)\hat{n} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-n_3) \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -n_3 \cdot n_1 \\ -n_3 \cdot n_2 \\ -n_3 \cdot n_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -n_1n_3 \\ -n_2n_3 \\ 1 - n_3^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Für den Skalierungsfaktor s_3 ergibt sich somit:

$$s_3^2 = ||\overrightarrow{OE_3'}|| = (-n_1n_3)^2 + (-n_2n_3)^2 + (1 - n_3^2)^2$$

Wir quadrieren $(1 - n_3^2)^2$ mit Hilfe der zweiten binomischen Formel und erhalten

$$s_3^2 = n_1^2n_3^2 + n_2^2n_3^2 + 1 - 2n_3^2 + n_3^4$$

Wir klammern n_3^2 aus und erhalten

$$s_3^2 = 1 - 2n_3^2 + n_3^2 \cdot (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)$$

wegen der Gleichung $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ folgt

$$\begin{aligned} s_3^2 &= 1 - 2n_3^2 + n_3^2 \cdot 1 \\ \rightsquigarrow \quad s_3^2 &= 1 - n_3^2 \end{aligned}$$

Wir erhalten somit für s_3^2 den Wert $1 - n_3^2$. Damit ist die Behauptung der Aufgabenstellung verifiziert.

c) Wir wissen aus Aufgabenteil a) und b), dass $s_1^2 = 1 - n_1^2$, $s_2^2 = 1 - n_2^2$ und $s_3^2 = 1 - n_3^2$. Daraus können wir folgendes folgern:
Da n_1, n_2 und n_3 quadriert werden, ist ihr Wert immer ≥ 0. Somit ist das Ergebnis von $1 - n_1^2$, $1 - n_2^2$ und $1 - n_3^2$, also $1 - \geq 0$, immer ≤ 1.

Um zu beweisen, dass $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 2$ sind, setzen wir für s_1, s_2 und s_3 unsere errechneten Werte ein.

$$\begin{aligned} s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 &= 1 - n_1^2 + 1 - n_2^2 + 1 - n_3^2 \\ &= 3 - n_1^2 - n_2^2 - n_3^2 && \mid -1 \text{ ausklammern} \\ &= 3 - 1(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \end{aligned}$$

wegen der Gleichung $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ folgt

$$\begin{aligned} s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 &= 3 - 1(1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 2$ ist, also auch diese Beziehung richtig ist.

H29 Berechnung von Kavalierprojektionen

Keine Lösung vorhanden.

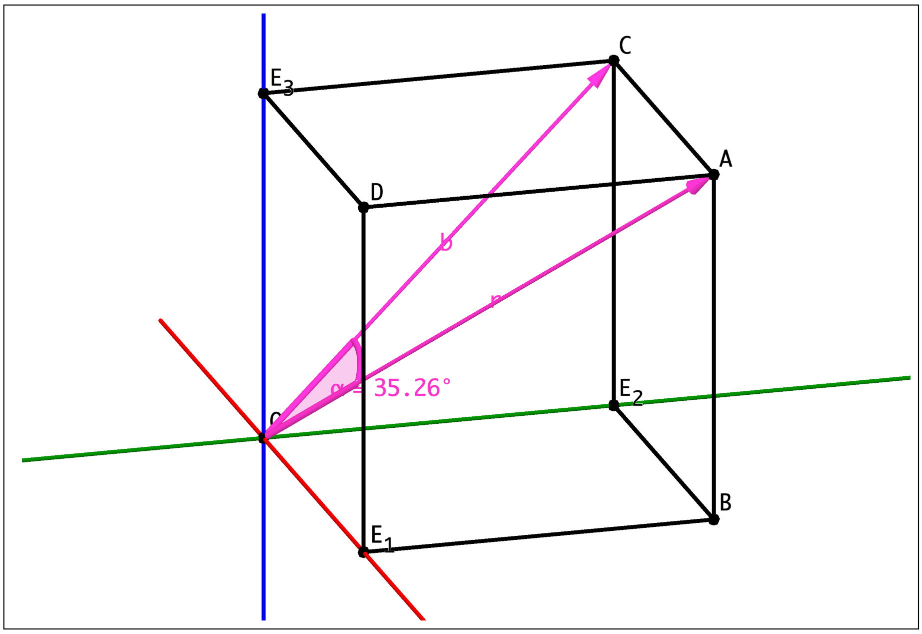


Abbildung 46: Würfel mit eingezeichneten Vektoren und Winkel

H30 Fortführung der Aufgabe H29.

a) Den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{r_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ berechnen.

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{r} \cdot \vec{b}}{||\vec{r}|| \cdot ||\vec{b}||}$$

$||\vec{r}|| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$
$||\vec{b}|| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

Der Winkel zwischen $\vec{r}$ und $\vec{b}$ beträgt $\approx 35,26°$.

b) Den Wert für $a*$ so bestimmen, dass der Winkel zwischen $\vec{r_a}* = \begin{pmatrix} r_a* \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 45° beträgt.

$$cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} a* \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{a^2+2} \cdot \sqrt{2}}$$

Das Ergebnis wird mit $\frac{1}{\sqrt{2}}$ gleichgesetzt, da $cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{a^2+2} \cdot \sqrt{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} && | \cdot \sqrt{2} \\ \frac{2}{\sqrt{a^2+2}} &= 1 && | \cdot \sqrt{a^2+2} \\ 2 &= \sqrt{a^2+2} && |zumQuadrat \\ 4 &= a^2+2 && |-2 \\ 2 &= a^2 && |Wurzelziehen \\ \sqrt{2} &= a \\ \vec{r_a}* &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\frac{2}{\sqrt{a^2+2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad | \cdot \sqrt{2}$$

$$\frac{2}{\sqrt{a^2+2}} = 1 \qquad | \cdot \sqrt{a^2+2}$$

$$2 = \sqrt{a^2+2} \qquad |zumQuadrat$$

$$4 = a^2+2 \qquad |-2$$

$$2 = a^2 \qquad |Wurzelziehen$$

$$\sqrt{2} = a$$

$$\vec{r_a}* = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Punkt E_1' berechnen. $E_1 = (1,0,0)$

$$g_a* : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$B : \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right] = 0$$

Der Ausdruck für $x(t)$ in der Parametergleichung für die Gerade g_a*wird in die HNG der Ebene B eingesetzt:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right] = 0$$

Daraus ergibt sich:

$$1 + \sqrt{2} \cdot t = 0 \qquad | -1$$
$$\sqrt{2} \cdot t = -1 \qquad | \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

t in die Parametergleichung von g_a* einsetzen:

$$\vec{x}(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (-\frac{1}{\sqrt{2}}) \cdot \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$E_1' = \begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

d) Den Abstand zwischen O und E_1' berechnen.

$\vec{OE_1'} = \begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

$$||\vec{OE_1'}|| = \sqrt{(-1)^2 + (-\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (-\frac{1}{\sqrt{2}})^2}$$
$$= \sqrt{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

Der Länge von $\vec{E_1'}$ (und somit der Abstand zwischen O und E_1') beträgt $\sqrt{2}$.

T12 Schnittpunkte von Geraden und Ebene, Analyse von Kavalierprojektionen

a) Wir bestimmen die Hesse'sche Normalengleichung für die Bildebene B

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0\,, \quad \text{B:} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

Die Gleichung beschreibt die y-z-Koordinatenebene.

b) In der folgenden Abbildung sehen wir den Vektor $\overrightarrow{r_1}$, hier in rot, im Würfel.

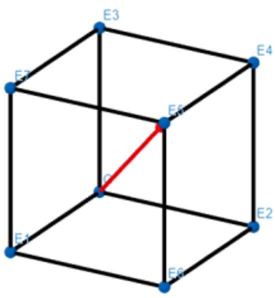


Abbildung 47: Einheitswürfel und Vektor r_1 .

c) Gegeben:

$$\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_1 : \overrightarrow{x_t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

Wir bestimmen den Schnittpunkt E_1' der Geraden g_1 mit der Bildebene B , indem wir die Gerade in die Bildebene einsetzen.

$$0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+t \\ t \\ t \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow 0 = 1 + t$$

$$\rightsquigarrow -1 = t$$

Wir erhalten $t = -1$ und setzen diesen Wert in die Parametergleichung der Geraden g_1 ein.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (-1) \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Das bedeutet, dass der Punkt E_1' die Koordinaten $(0, -1, -1)$ besitzt.

d) Die Gerade g_1 geht durch den Schnittpunkt E_1' und schneidet dabei den Würfel im Punkt E_3 . Der Vektor $\overrightarrow{r_1}$ ist paralell zur Geraden g_1 .

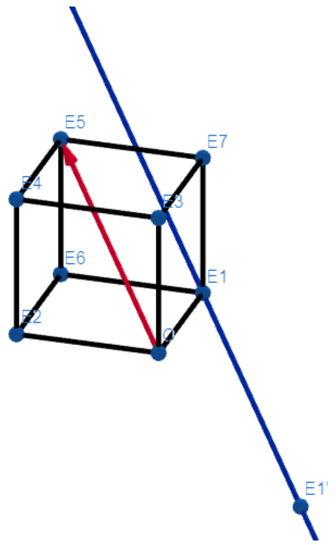


Abbildung 48: Eingezeichnete Gerade g_1 mit Schnittpunkt E_1'.

e) Wir bestimmen die Länge $\|\overrightarrow{OE_1}\|$ des Vektors $\overrightarrow{OE_1}$ sowie den Winkel α, den dieser mit der z-Achse einschließt.

$$\|\overrightarrow{OE_1}\| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{OE_1} \cdot \overrightarrow{OE_3}}{\|\overrightarrow{OE_1}\| \cdot \|\overrightarrow{OE_3}\|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2} \cdot 1} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\rightsquigarrow \quad \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\rightsquigarrow \quad \alpha = 135°$$

Somit ist der Winkel α gleich 135°.

f) Wir wollen $\overrightarrow{r_a} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ so bestimmen, dass $s_1 = \left\|\overrightarrow{OE_1}\right\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist.

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

Zuerst setzen wir die Gerade g mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{r_a}$,= $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in die Ebene

E ein, um den Parameter t mithilfe der Variable a auszudrücken:

$$0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1+t\,a\\t\\t\end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow 0 = 1 + t\,a = 0 \quad | -1$$

$$-1 = t\,a \quad | : a$$

$$-\frac{1}{a} = t$$

Nun setzen wir den ausgerechneten Wert für t in die Gerade g ein und erhalten den Vektor $\overrightarrow{x}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x} &= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{a}\right) \cdot \begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{a}\\-\frac{1}{a}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{a}\\-\frac{1}{a}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Die Länge dieses Vektors $\overrightarrow{x}$ soll nun $\frac{1}{\sqrt{2}}$ betragen. Mit dieser Information versuchen wir jetzt durch Quadrieren und Umformen a auszurechnen:

$$\begin{aligned}\sqrt{0^2 + \left(-\frac{1}{a}\right)^2 + \left(-\frac{1}{a}\right)^2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \left(-\frac{1}{a}\right)^2 + \left(-\frac{1}{a}\right)^2 &= \frac{1}{2}\\ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} &= \frac{1}{2}\\ \frac{2}{a^2} &= \frac{1}{2} \quad | \cdot a^2\\ \frac{a^2}{2} &= 2 \quad | \cdot 2\\ \rightsquigarrow a^2 &= 4\\ \rightsquigarrow a &= 2\end{aligned}$$

Wenn wir jetzt für a den Wert 2 in $\overrightarrow{x}$ einsetzen, erhalten wir die Lösung:

$$\overrightarrow{r_a} = \begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Übungseinheit 10

Präsenzübungen

Aufgabe P 9. *Zentralperspektive – Sitzung 3*

Gegeben sei eine Zentralprojektion durch das Projektionszentrum mit Koordinaten $Z = (0,0,-12)$, den Hauptpunkt mit Koordinaten $H = (0,0,0)$ sowie die Bildebene

$$\pi = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z = 0\right\}.$$

Es sei ferner gegeben ein Quader der Höhe 3 mit quadratischem Grundriss. Die Eckpunkte des Quaders, die in der Standebene $\sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, y = -5\right\}$ liegen, seien

$$A_1 = (4,-5,-7), \quad B_1 = (5,-5,-6), \quad C_1 = (4,-5,-5) \quad \text{und} \quad D_1 = (3,-5,-6).$$

(a) **Konstruieren Sie** das Bild der Grundfläche (des Grundriss-Quadrats) in der angegebenen Zentralprojektion. Verwenden Sier hierzu das anliegende Arbeitsblatt.

Zentralprojektionen lassen sich rechnerisch beschreiben. Hierzu wird jedem Punkt mit Koordinaten $X = (x,y,z)$ ein vierkomponentiger Vektor $\overline{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$ zugeordnet. Genauer bezeichnet $\overline{X}$ die Ursprungsgerade in $\mathbb{R}^4$, die durch $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$ verläuft. Jedes (von Null verschiedene) Vielfache von $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$ beschreibt dieselbe Ursprungsgerade. Für $k \neq 0$ ist also

$$\begin{bmatrix} k\,x \\ k\,y \\ k\,z \\ k \end{bmatrix} = \left[k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Man nennt $\overline{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$ eine Darstellung des Punktes $X = (x,y,z)$ in **homogenen Koordinaten**.

Wenn eine 4×4-Projektionsmatrix P gegeben ist, so erhält man das Projektionsbild X^C des Punktes X durch Matrix-Vektor-Multiplikation: $\overline{X^C} = P \cdot \overline{X}$.

(b) Für die in den Teilaufgaben (a) bis (g) betrachtete Zentralprojektion ist die Projektionsmatrix P gegeben durch

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} & 1 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie (ggf. arbeitsteilig) die Bildpunkte von A_1, B_1, C_1 und D_1. **Vergleichen Sie** Ihre Rechenergebisse mit Ihrer Konstruktion.

Beispielrechnung:

$$P \cdot \overline{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(c) **Ermitteln Sie** in Ihrer Skizze für die (zueinander parallelen) Geraden $A_1 \vee B_1$ und $C_1 \vee D_1$ den zugehörigen Fluchtpunkt F_1. Ermitteln Sie ferner den Fluchtpunkt F_2 für die (zueinander parallelen) Geraden $A_1 \vee D_1$ und $B_1 \vee C_1$.

Zur rechnerischen Bestimmung des Fluchtpunktes einer Geraden, welche durch zwei Punkte gegeben ist, bilden Sie Differenz der zugehörigen Boxed Vierervektoren. Diese Differenz ist ein Verbindungsvektor bzw. ein sogenannter **Fernpunkt**.† Wenn Sie die Projektionsmatrix auf diesen Fernpunkt anwenden, erhalten Sie den zugehörigen **Fluchtpunkt**. Wir führen eine Beispielrechnung vor:

$$\left[\overrightarrow{A_1\,B_1}\right] = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix} := \left[\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Anwendung der Projektionsmatrix auf diesen Fernpunkt ergibt

$$P \cdot \left[\overrightarrow{A_1\,B_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{12} \end{bmatrix} = \left[\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Der gesuchte Fluchtpunkt hat somit die Koordinaten $(12, 0, 0)$.

(d) **Berechnen Sie** die Koordinaten des Fluchtpunktes für die Geraden $B_1 \vee C_1$ bzw. $A_1 \vee D_1$.

(e) Bestimmen Sie nun auch die Bildpunkte der Deckelpunkte

$$A_2 = (4, -2, -7), \quad B_2 = (5, -2, -6), \quad C_2 = (4, -2, -5) \quad \text{und} \quad D_2 = (3, -2, -6)$$

zeichnerisch und rechnerisch.

(f) Bestimmen Sie schließlich den **Fluchtpunkt der Diagonalen** $A_1 \vee C_1$ bzw. $A_2 \vee C_2$ zeichnerisch und rechnerisch.

Abschließend noch zwei Variationen zur häuslichen Bearbeitung bzw. Nachbereitung:

(g) Wie verändert sich das Projektionsbild des Quaders, wenn Sie für die Konstruktion als „Standebene" die Ebene verwenden, welche den **Deckel** des Quaders enthält.

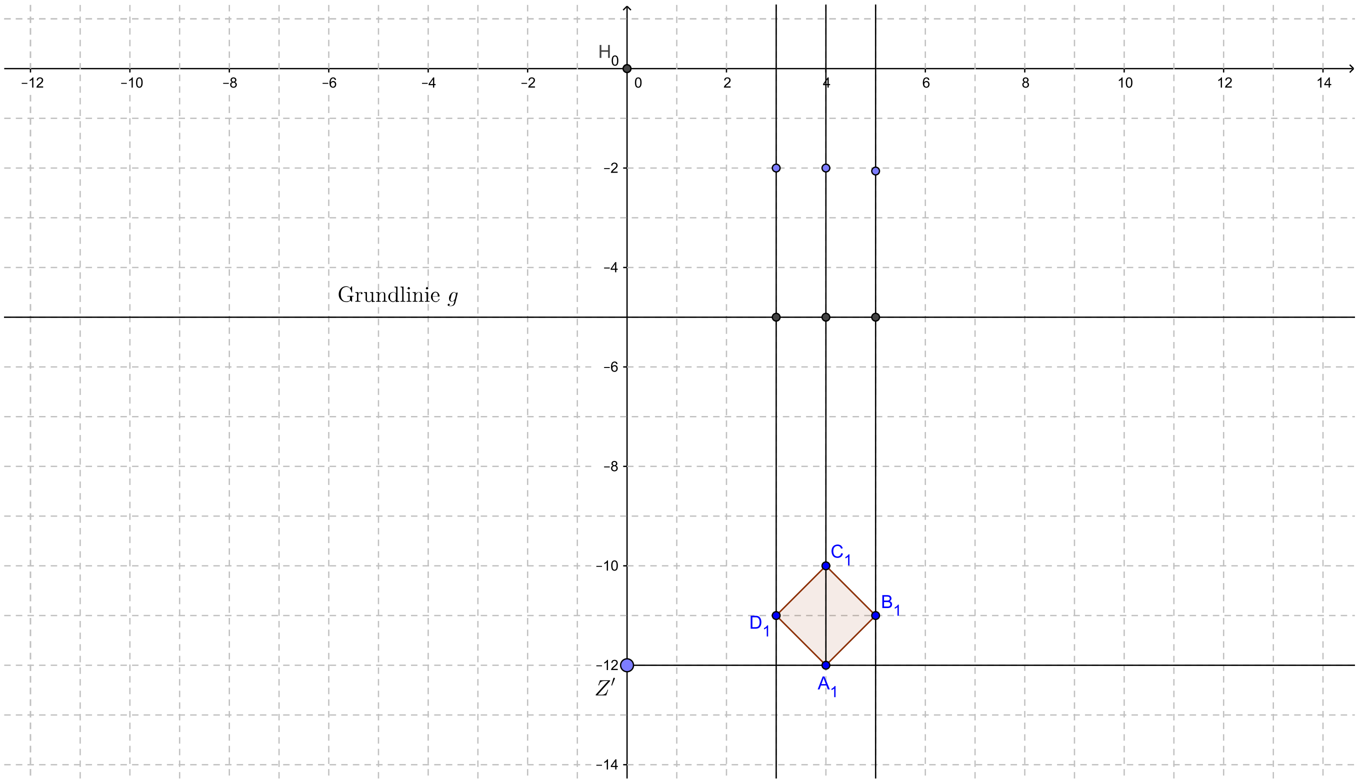
(h) Wie verändert sich das Projektionsbild des Quaders, wenn Sie als Projektionszentrum

- den Punkt Z_2 mit Koordinaten $Z_2 = (0, -3, -12)$,
- zum Studium der sogenannten „Froschperspektive" den Punkt Z_3 mit Koordinaten $Z_3 = (0, -6, -12)$

wählen. Erstellen Sie zur Übung und Klausurvorbereitung die entsprechenden (neuen) Konstruktionszeichnungen und führen Sie die zugehörigen Rechnungen analog zur obigen Vorgehensweise durch.

Hinweis: $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} & 1 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} & 1 \end{bmatrix}$

† Homogene Koordinaten von Fernpunkten erkennen Sie daran, dass der unterste Eintrag gleich 0 ist.



H0
Grundlinie g
C1
B1
D1
A1
Z'

Hausübungen

Aufgabe H 31. *Zentralprojektion – Abbildung eines Quaders*

Gegeben sei eine Zentralprojektion durch das Projektionszentrum mit Koordinaten $Z = (0, 0, -14)$, den Hauptpunkt mit Koordinaten $H = (0, 0, 0)$ sowie die Bildebene $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$. Es sei ferner gegeben ein Quader der Höhe 3 mit quadratischem Grundriss. Die Eckpunkte des Quaders, die in der Standebene $\sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = -4\}$ liegen, seien $A_1 = (4, -4, -8)$, $B_1 = (5, -4, -7)$, $C_1 = (4, -4, -6)$ und $D_1 = (3, -4, -7)$.

(a) Konstruieren Sie das Bild des Quaders in der angegebenen Zentralprojektion. Nutzen Sie hierzu die Vorlage und mit den bereits eingezeichneten Elementen.

(b) Ermitteln Sie für die (zueinander parallelen) Geraden $A_1 \vee B_1$ und $D_1 \vee C_1$ den zugehörigen Fluchtpunkt.

Zentralprojektionen lassen sich rechnerisch beschreiben. Hierzu wird jedem Punkt mit Koordinaten $X = (x, y, z)$ ein vierkomponentiger Vektor $\bar{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$ zugeordnet. Genauer bezeichnet $\bar{X}$ die Ursprungsgerade in $\mathbb{R}^4$, die durch $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$ verläuft. Jedes (von Null verschiedene) Vielfache von $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$ beschreibt dieselbe Ursprungsgerade. Für $k \neq 0$ ist also $\begin{bmatrix} k\,x \\ k\,y \\ k\,z \\ k \end{bmatrix} = \left[k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$.

Wenn eine 4×4-Projektionsmatrix P gegeben ist, so erhält man das Projektionsbild X^C des Punktes X durch Matrix-Vektor-Multiplikation $X^C = P \cdot \bar{X}$.

(c) Für die in dieser Aufgabe betrachtete Zentralprojektion ist die Projektionsmatrix P gegeben durch $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{14} & 1 \end{bmatrix}$. **Berechnen Sie** (ggf. arbeitsteilig) die Bildpunkte von A_1, B_1, C_1, D_1, $A_2 = (4, -1, -8)$, $B_2 = (5, -1, -7)$, $C_2 = (4, -1, -6)$ und $D_2 = (3, -1, -7)$. Vergleichen Sie Ihre Rechenergebisse mit Ihrer Konstruktion.

Beispielrechnung:

$$P \cdot \overline{D_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{14} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(d) Betrachten Sie nun die Konstruktionszeichnung 1 und ermitteln Sie zeichnerisch die Fluchtpunkte für die Geraden $A_1 \vee D_1$ bzw. $B_1 \vee C_1$ sowie $A_1 \vee C_1$.

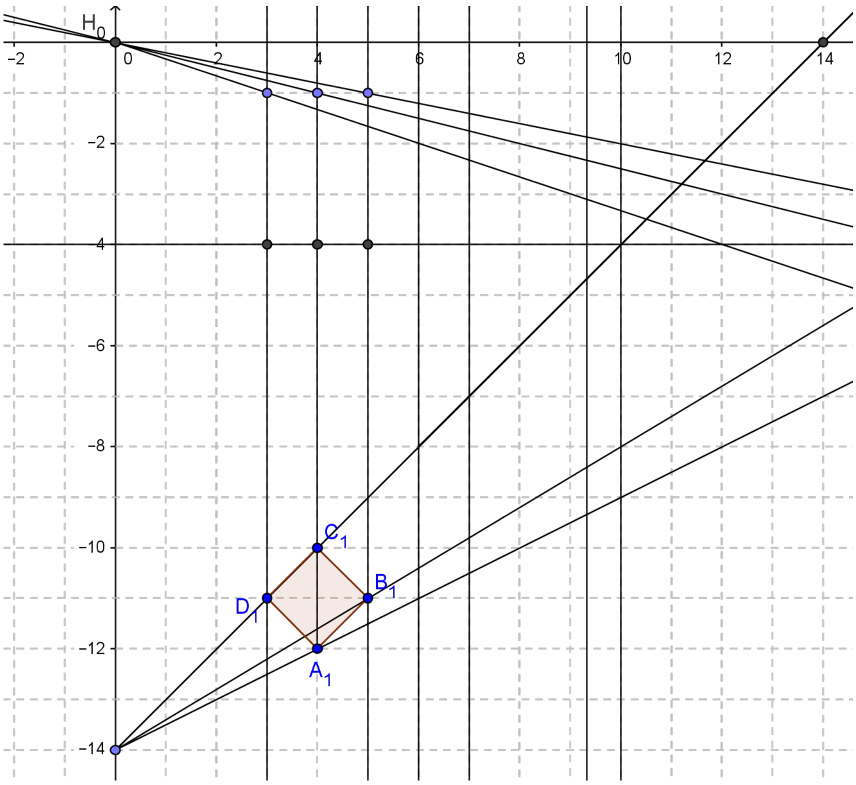


Abbildung 16: Konstruktionsvorlage für Zentralperspektive

(e) Zur rechnerischen Bestimmung des Fluchtpunktes einer Geraden, welche durch zwei Punkte gegeben ist, bilden Sie Differenz der zugehörigen Verervektoren. Dieser Differenz entspricht ein Fernpunkt. Wenn Sie die Projektionsmatrix auf diesen Fernpunkt anwenden, erhalten Sie den zugehörigen Fluchtpunkt. Wir führen eine Beispielrechnung vor:

$$\overrightarrow{A_1\,B_1} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix} := \left[\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Anwendung der Projektionsmatrix auf diesen Fernpunkt ergibt

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{14} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{14} \end{bmatrix} = \left[\frac{1}{14} \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Der gesuchte Fluchtpunkt hat somit die Koordinaten $(14,\,0,\,0)$.

Berechnen Sie die Koordinaten des Fluchtpunktes für die Geraden $B_1 \vee C_1$ bzw. $A_1 \vee D_1$ bzw. $B_2 \vee C_2$ bzw. $A_2 \vee D_2$.

(f) Bestimmen Sie nun auch den Fluchtpunkt der Diagonalen $A_1 \vee C_1$ bzw. $A_2 \vee C_2$ zeichnerisch und rechnerisch.

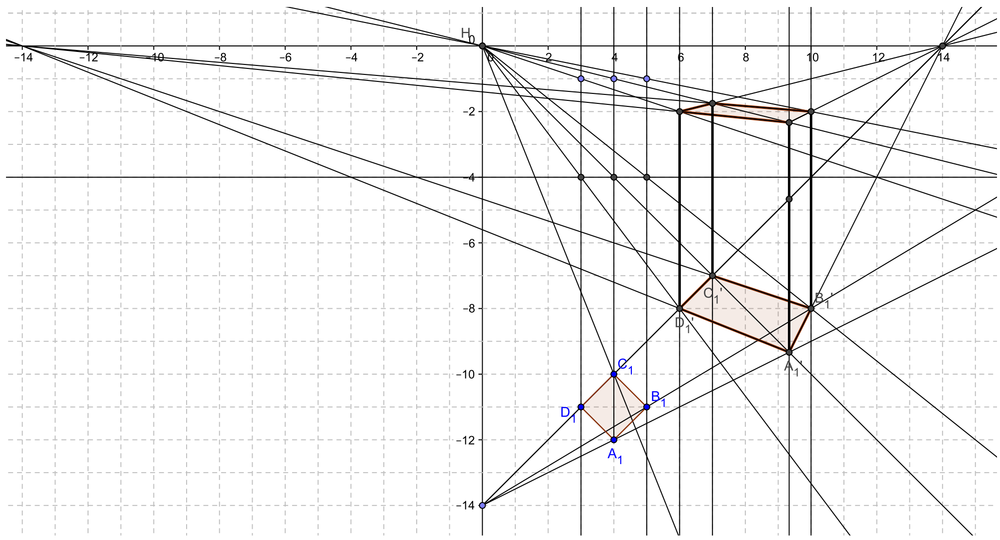


Abbildung 17: Konstruktion des Zentralprojektion der Säule und zweier Fluchtpunkte

Aufgabe H 32. *Satz von Desargues*

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass sich die Konstruktion von Projektionsbildern auf den sogenannten *affinen Satz von Desargues* stützt.

(a) Beweisen Sie den folgenden Spezialfall dieses Satzes:
Zwei verschieden große Dreiecke ABC und $A'B'C$ liegen so, dass einander entsprechende Dreiecksseiten zueinander parallel sind, d.h. $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$ und $CA \parallel C'A'$. Kein Eckpunkt des einen Dreiecks soll auf einer Seite des anderen Dreiecks liegen. Dann schneiden sich die Verbindungsgeraden $A \vee A'$, $B \vee B'$ und $C \vee C'$ in einem gemeinsamen Schnittpunkt.

Hinweise: Übersetzen Sie die gegebenen Bedingungen in die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= k\,\overrightarrow{A'B'}, \quad k \notin \{-1,0,1\}\\ \overrightarrow{BC} &= l\,\overrightarrow{B'C'}, \quad l \notin \{-1,0,1\}\\ \overrightarrow{CA} &= m\,\overrightarrow{C'A'}, \quad m \notin \{-1,0,1\}\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\overrightarrow{OA} + s\,\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OB} + t\,\overrightarrow{BB'}$$

eine Lösung (s^*, t^*) *hat und bestimmen Sie die Werte für* s^* *und* t^*.

Aus der Gleichung ergibt sich unter Ausnutzung der Beziehung

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'A'} \quad \textit{und} \quad \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB},$$

die sich durch eine Skizze veranschaulichen können, das Folgende:

$$\left(s - 1 - \tfrac{s}{k}\right)\overrightarrow{AB} = (t - s)\,\overrightarrow{BB'}.$$

Diese Gleichung kann, da $\overrightarrow{AB}$ *und* $\overrightarrow{BB'}$ *linear unabhängig sind, nur erfüllt werden, wenn* $\left(s - 1 - \tfrac{s}{k}\right) = 0$ *und* $(t - s) = 0$ *gilt.*

Zeigen Sie nun, dass es eine Zahl u *gibt mit*

$$\overrightarrow{OA} + s^*\,\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OC} + u\,\overrightarrow{CC'}.$$

(b) Zeigen Sie, dass $k = l = m$ gilt, dass die beiden Dreiecke also ähnlich sind.

Tutoriumsübungen

Aufgabe T 13. *Zentralperspektive*

Gegeben sei eine Zentralprojektion durch das Projektionszentrum mit Koordinaten $Z = (0,0,-12)$, den Hauptpunkt mit Koordinaten $H = (0,0,0)$ sowie die Bildebene

$$\pi = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = 0 \right\}.$$

Es sei ferner gegeben ein Quader der Höhe 3 mit quadratischem Grundriss. Die Eckpunkte des Quaders, die in der Standebene $\sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = -5 \right\}$ liegen, seien

$$A_1 = (4,-5,-7), \quad B_1 = (5,-5,-6), \quad C_1 = (4,-5,-5) \quad \text{und} \quad D_1 = (3,-5,-6).$$

(a) **Konstruieren Sie** das Bild der Grundfläche (des Grundriss-Quadrats) in der angegebenen Zentralprojektion. Nutzen Sie hierzu die Vorlage auf der zweiten Seite.

(b) **Ermitteln Sie** in Ihrer Skizze für die (zueinander parallelen) Geraden $A_1 \vee B_1$ und $C_1 \vee D_1$ den zugehörigen Fluchtpunkt F_1. Ermitteln Sie ferner den Fluchtpunkt F_2 für die (zueinander parallelen) Geraden $A_1 \vee D_1$ und $B_1 \vee C_1$.

(c) Sie können die Fluchtpunkte zur Kontrolle auch berechnen. Verwenden Sie hierzu die Projektionsmatrix $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} & 1 \end{bmatrix}$ sowie die (homogen dargestellten) Vektoren $\overrightarrow{A_1B_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\overrightarrow{A_1D_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

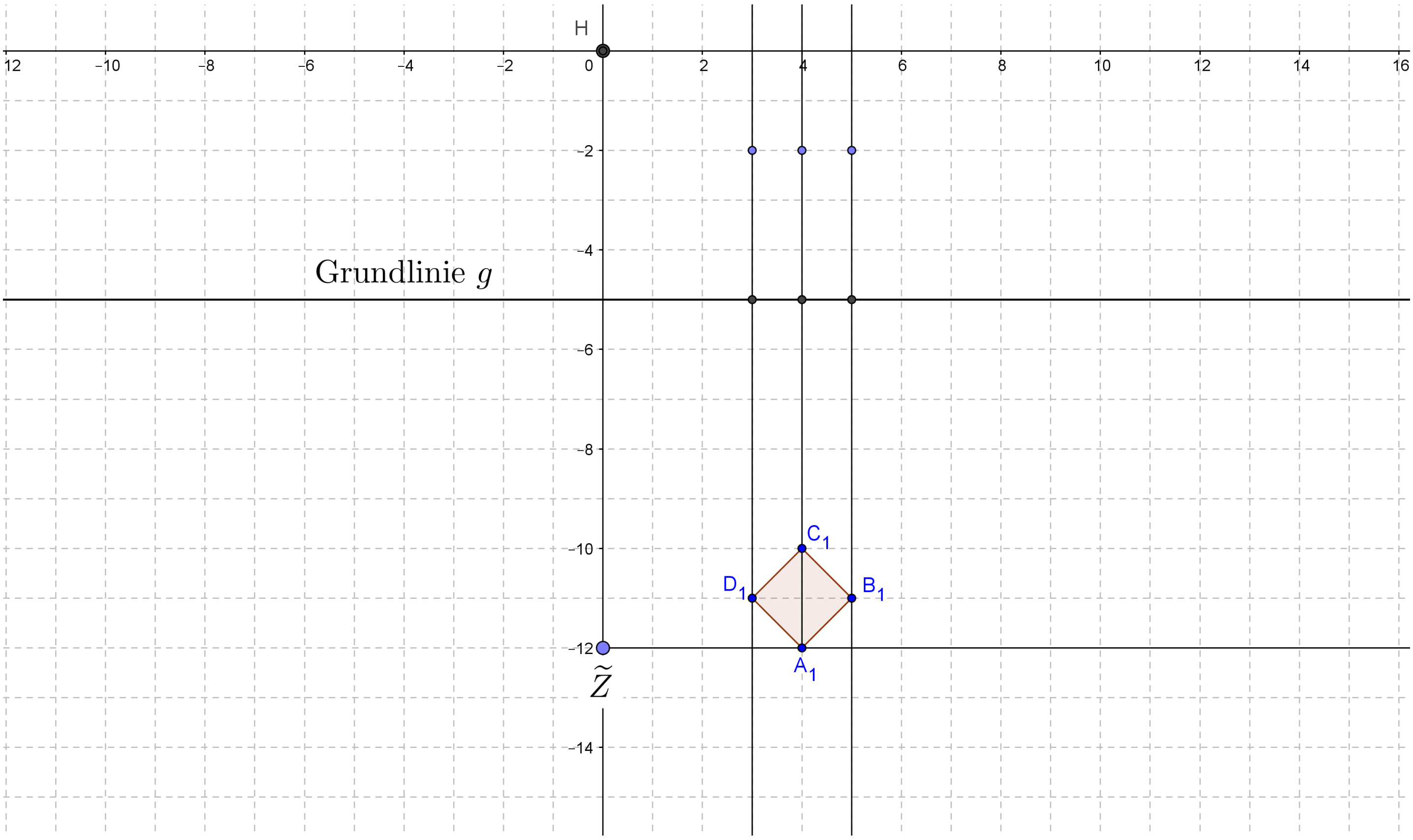
(d) Vervollständigen Sie nun Ihre Zeichnung, so dass der komplette Quaders zu sehen ist. Hierzu müssen Sie die Projektionsbilder der Punkte A_2, B_2, C_2 und D_2 konstruieren, die in der Deckelfläche liegen. Berechnen Sie zur Probe die Projektionsbilder der Deckelpunkte mithilfe der oben angegebenen Projektionsmatrix.

(e) Konstruieren Sie (auf der Vorlage der dritten Seite) das Bild des gleichen Quaders noch einmal, verwenden Sie jedoch als **neue „Standebene“** die Ebene, die den Deckel des Quaders enthält.
Hinweis: Sie können sich hiermit klarmachen, dass das Konstruktionsergebnis bzw. das Projektionsbild (natürlich) nicht von der (oft recht willkürlichen) Wahl der Standebene abhängt.

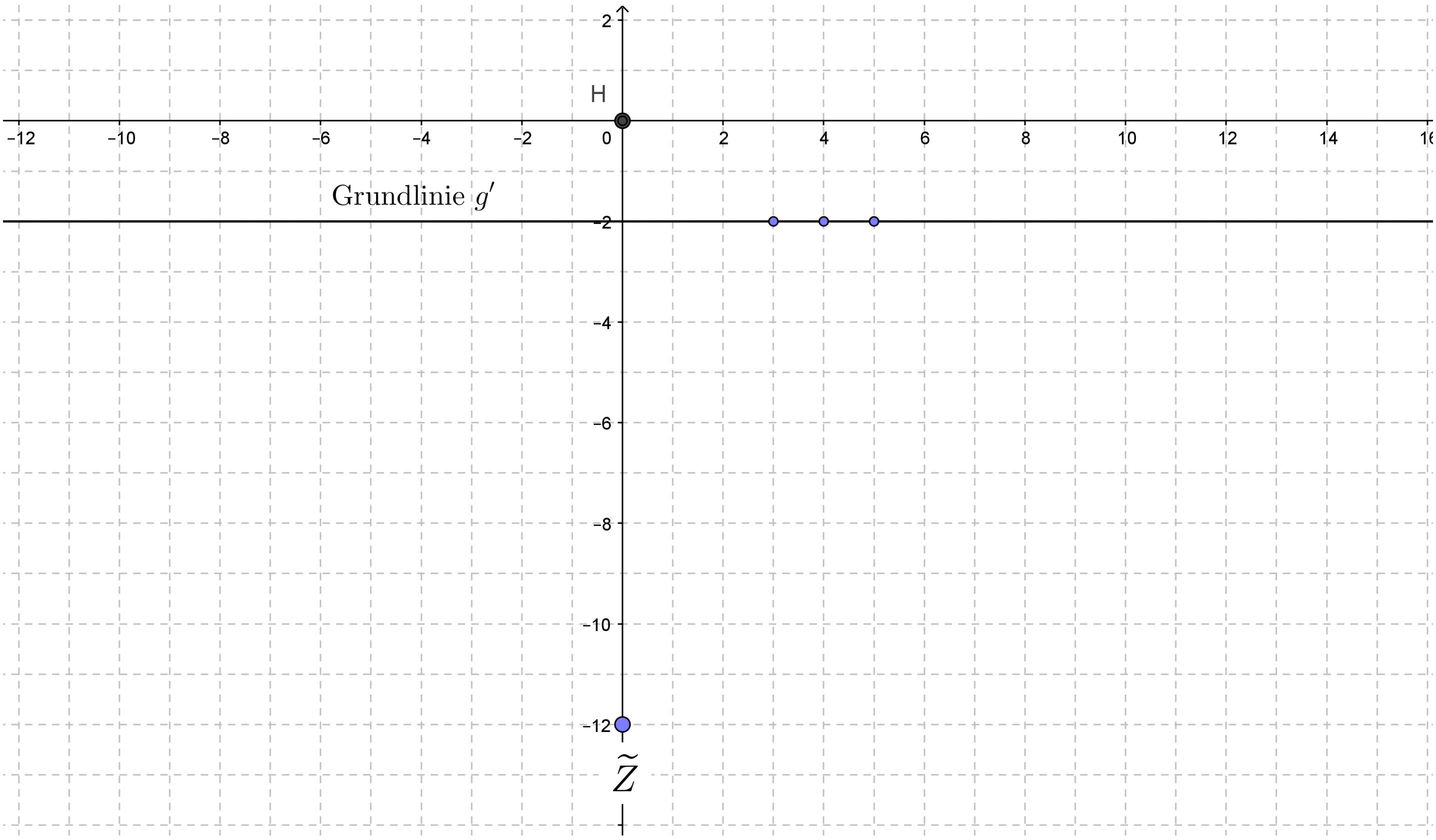
Für Schnelle sogleich, für alle anderen zuhause:

(f) Wählen Sie eine neue Zentralperspektive mit Projektionszentrum $Z_2 = (0,-2,-12)$ und Hauptpunkt $H_2 = (0,-2,0)$ Zeichnen Sie den Punkt $\widetilde{Z_2}$ ein, der durch Klappen des Punktes Z_2 in die Bildebene entsteht. Konstruieren Sie dann das Bild des oben gegebenen Quaders unter dieser Zentralprojektion.

(g) Konstruieren Sie das Projektionsbilder des Quaders aus der sogenannten „Froschperspektive“. Wählen Sie hierzu als Projektionszentrum den Punkt Z_4 mit Koordinaten $Z_4 = (0, -6, -12)$.



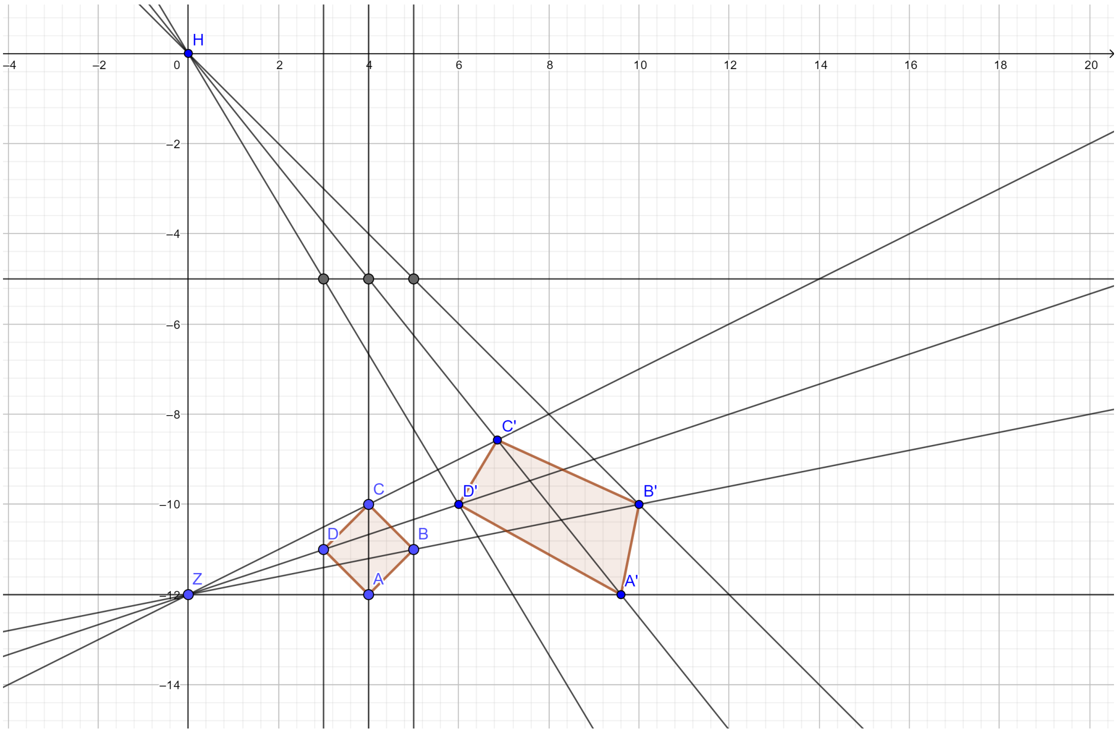
H
Grundlinie g
C_1
D_1
B_1
A_1
$\widetilde{Z}$



H
Grundlinie g'
$\widetilde{Z}$

P9 Zentralperspektive – Sitzung 3

a) Die konstruierte Grundfläche:



b) Um die projizierten Punkte zu berechnen, multiplizieren wir die Projektionsmatrix

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} & 1 \end{bmatrix}$$

mit den homogen dargestellten Ortsvektoren der jeweiligen Punkte. Um aus der homogenen Darstellung wieder die gewohnte Vektordarstellung zu machen, muss die unterste Ziffer in der homogenen Darstellung auf 1 erweitert werden.

Das Projektionsbild von A_1 ist:

$$\overline{A_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ \frac{5}{12} \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{48}{5} \\ -\frac{60}{5} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Für das Projektionsbild von B_1 ergibt sich:

$$\overline{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

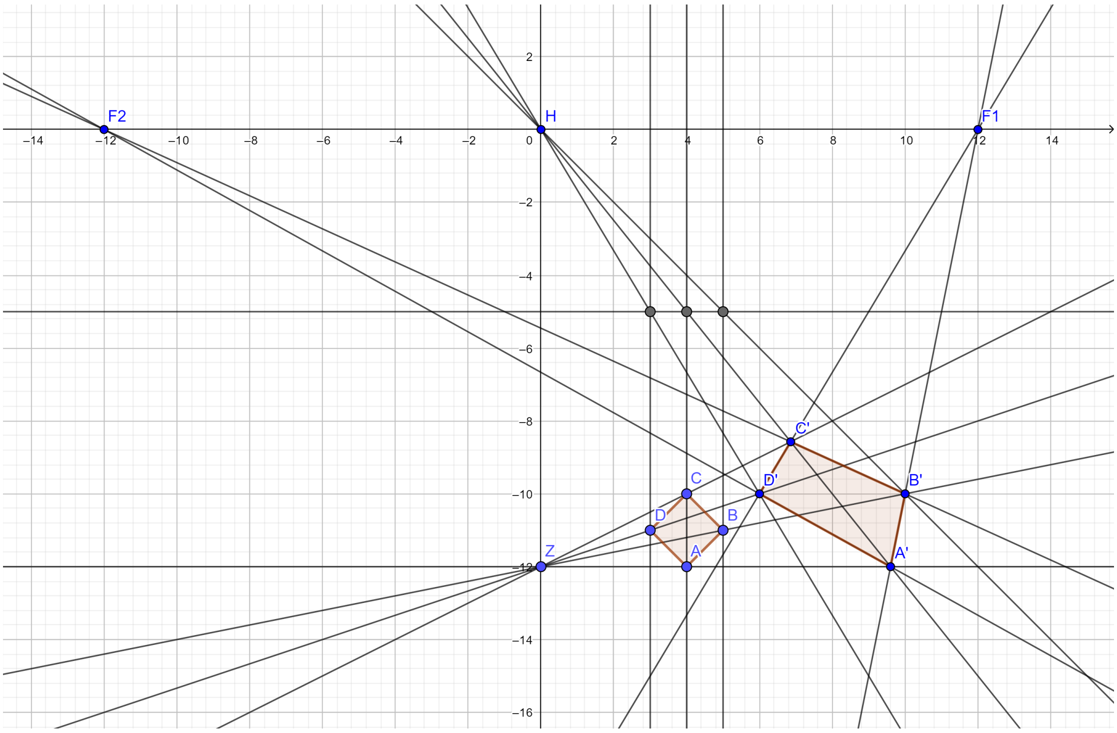
Das projizierte Bild von C_1:

$$\overline{C_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{7} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ \frac{7}{12} \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{48}{7} \\ -\frac{60}{7} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Für das Projektionsbild von D_1 erhalten wir:

$$\overline{D_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c) Zeichnet man die Punkte sowie deren projizierten Bilder in eine Skizze ein, so sieht das wie folgt aus:



d) Um die Fluchtpunkte zu berechnen, multiplizieren wir die Projektionsmatrix

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} & 1 \end{bmatrix}$$

mit den homogen dargestellten Vektoren. Wir berechnen F_1, den Fluchtpunkt zu $\overrightarrow{B_1C_1}$ aus:

$$\overrightarrow{B_1C_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nun multiplizieren wir die Projektionsmatrix P mit dem Verbindungsvektor $\overrightarrow{B_1C_1}$:

$$P \cdot \overrightarrow{B_1C_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

Diesen Ausdruck müssen wir nun mit 12 erweitern, damit in der untersten Ziffer der Matrix eine 1 steht:

$$[F_1] = \begin{bmatrix} 12 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{12} \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Der Fluchtpunkt F_1 hat also die Koordinaten (-12, 0, 0).

e) Um die projizierten Deckelpunkte zu berechnen, gehen wir so vor, wie in Teilaufgabe b)

Für das Projektionsbild von A_2 ergibt sich:

$$\overline{A_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ \frac{5}{12} \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{48}{5} \\ -\frac{24}{5} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,6 \\ -4,8 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Das projizierte Bild von B_2 ist:

$$\overline{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Für den projizierten Deckelpunkt C_2 erhalten wir:

$$\overline{C_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{7} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ \frac{7}{12} \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{48}{7} \\ -\frac{24}{7} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Der projizierte Deckelpunkt zu D_2 ist:

$$\overline{D_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Die Abbildung von c), erweitert um die projizierten Deckelpunkte:

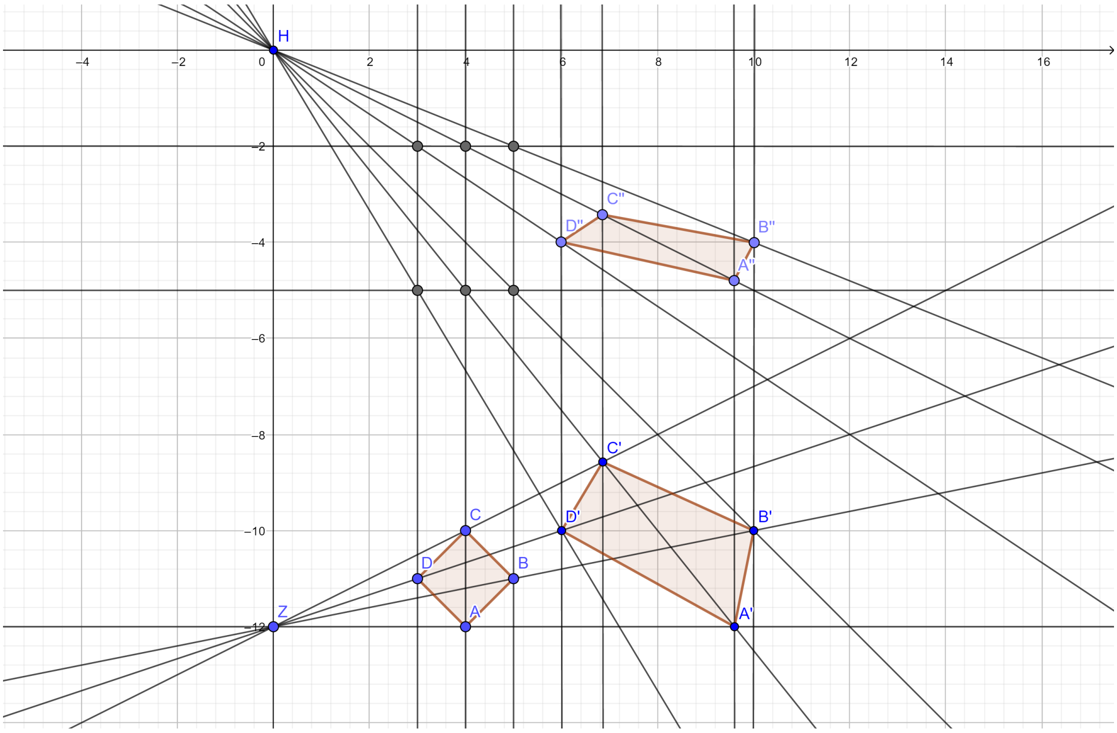


Abbildung 49

f) Um die Fluchtpunkte zu berechnen, gehen wir so vor wie in Teilaufgabe d)

$$\overrightarrow{A_1C_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nun multiplizieren wir die Projektionsmatrix P mit dem Verbindungsvektor $\overrightarrow{A_1C_1}$:

$$P \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Der Fluchtpunkt F_2 hat also die Koordinaten $(0, 0, 0)$.

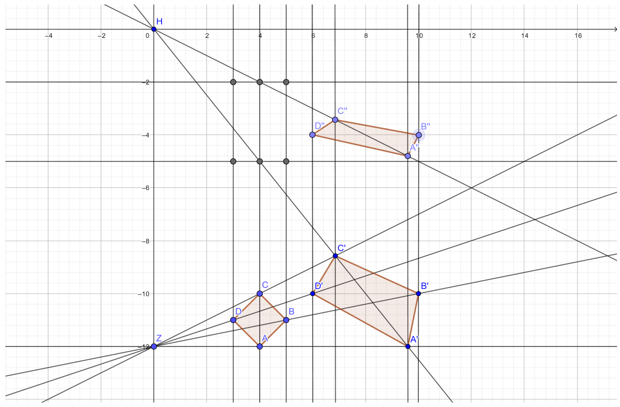


Abbildung 50: Skizze mit dem eingezeichneten Fluchtpunkt der Diagonalen.

g) Das Projektionsbild des Quaders ändert sich **nicht**, lediglich die Reihenfolge der Schritte ist eine andere. Anders als in den zuvor bearbeiteten Teilaufgaben wird hier zuerst der Deckel des Quaders und dann die Grundfläche konstruiert.

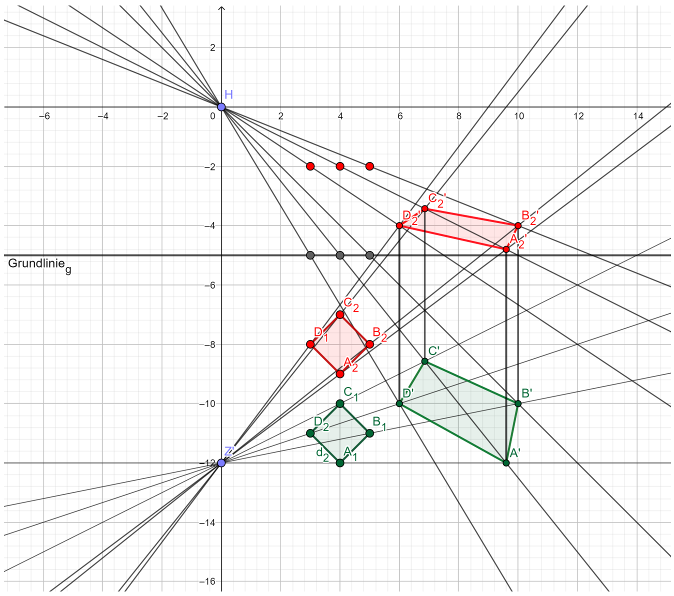


Abbildung 51: Das gleiche Projektionsbild mit der Deckelebene als Grundfläche.

h) Für die Zentralprojektion mit dem Punkt Z_2 ist die Projektionsmatrix P_2 gegeben durch

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{4} & 0 & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Für die Berechnung der Koordinaten des Projektionsbildes des Quaders mit dem Projektionszentrumzentrum Z_2, gehen Sie vor, wie in Teilaufgabe b) (für die Grundfläche), bzw. Teilaufgabe e) (für die Deckelpunkte).

Für die Zentralprojektion mit dem Punkt Z_3 ist die Projektionsmatrix P_3 gegeben durch

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Für die Berechnung der Koordinaten des Projektionsbildes des Quaders mit dem Projektionszentrumzentrum Z_3, gehen Sie vor, wie in Teilaufgabe b) (für die Grundfläche), bzw. Teilaufgabe e) (für die Deckelpunkte).

Die folgenden Konstruktionen beziehen sich auf die Teilaufgabe h) :

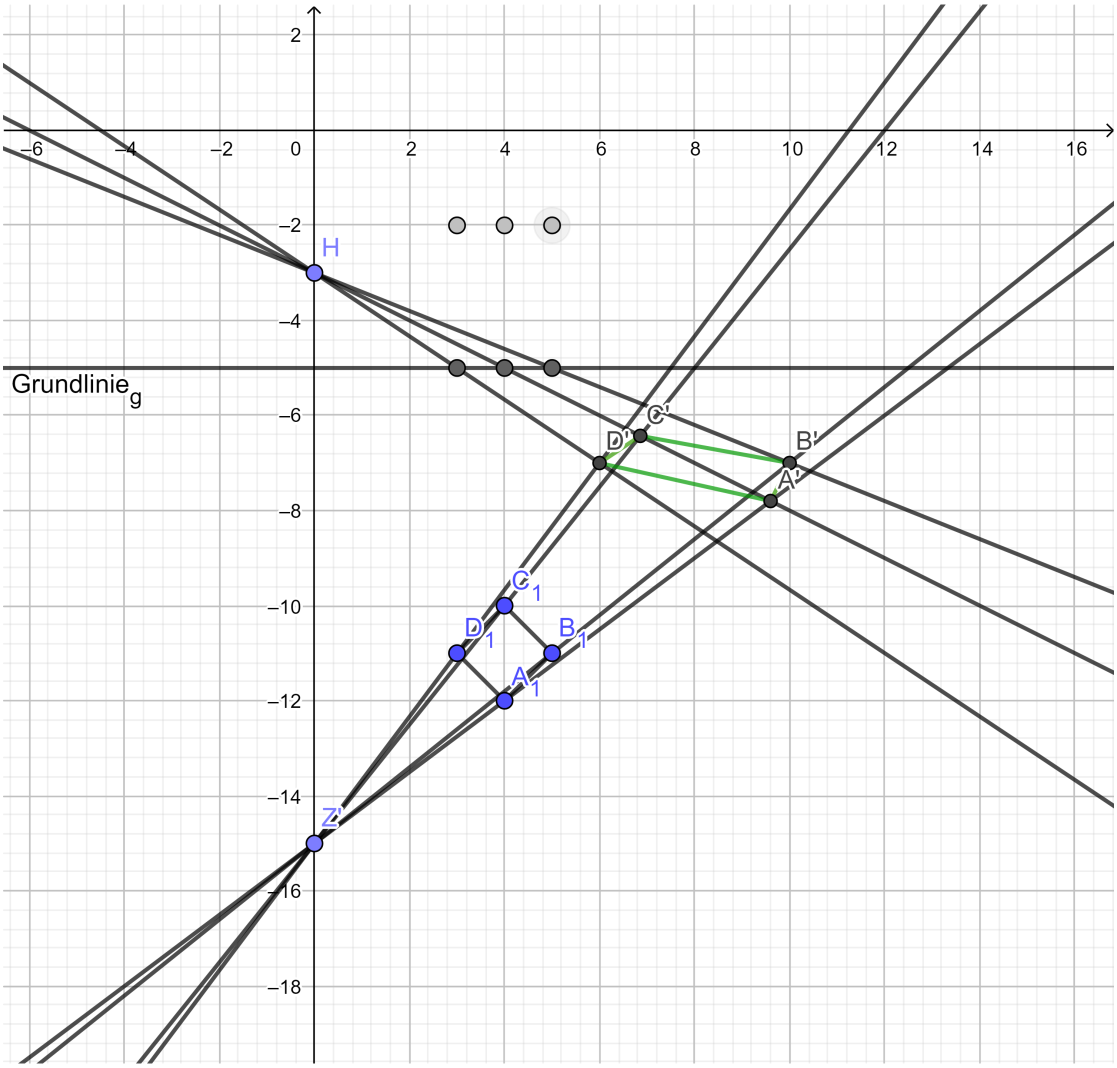


Abbildung 52: Konstruktion der h2-Grundfläche

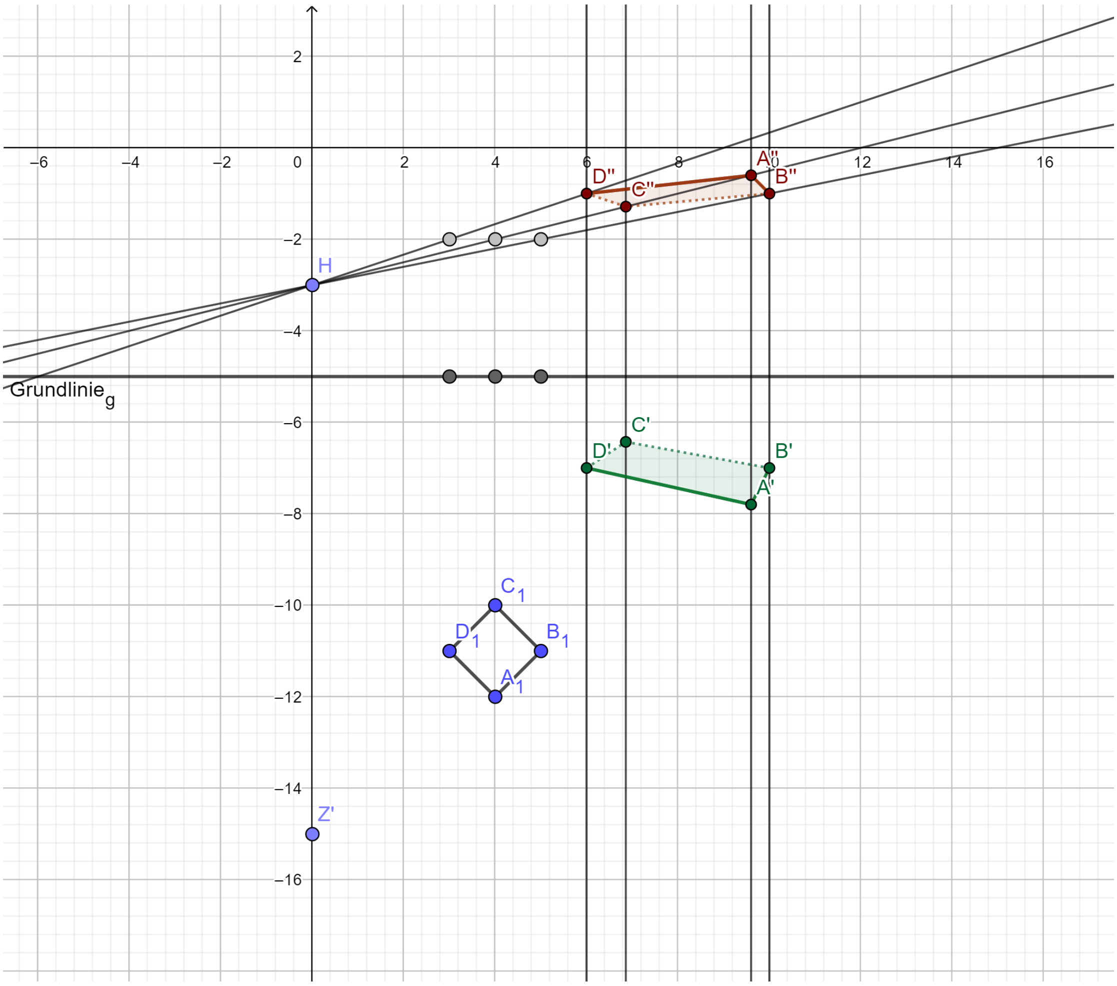


Abbildung 53: Konstruktion der h2-Deckelebene

Zeichnung h1-Fluchtpunkt:

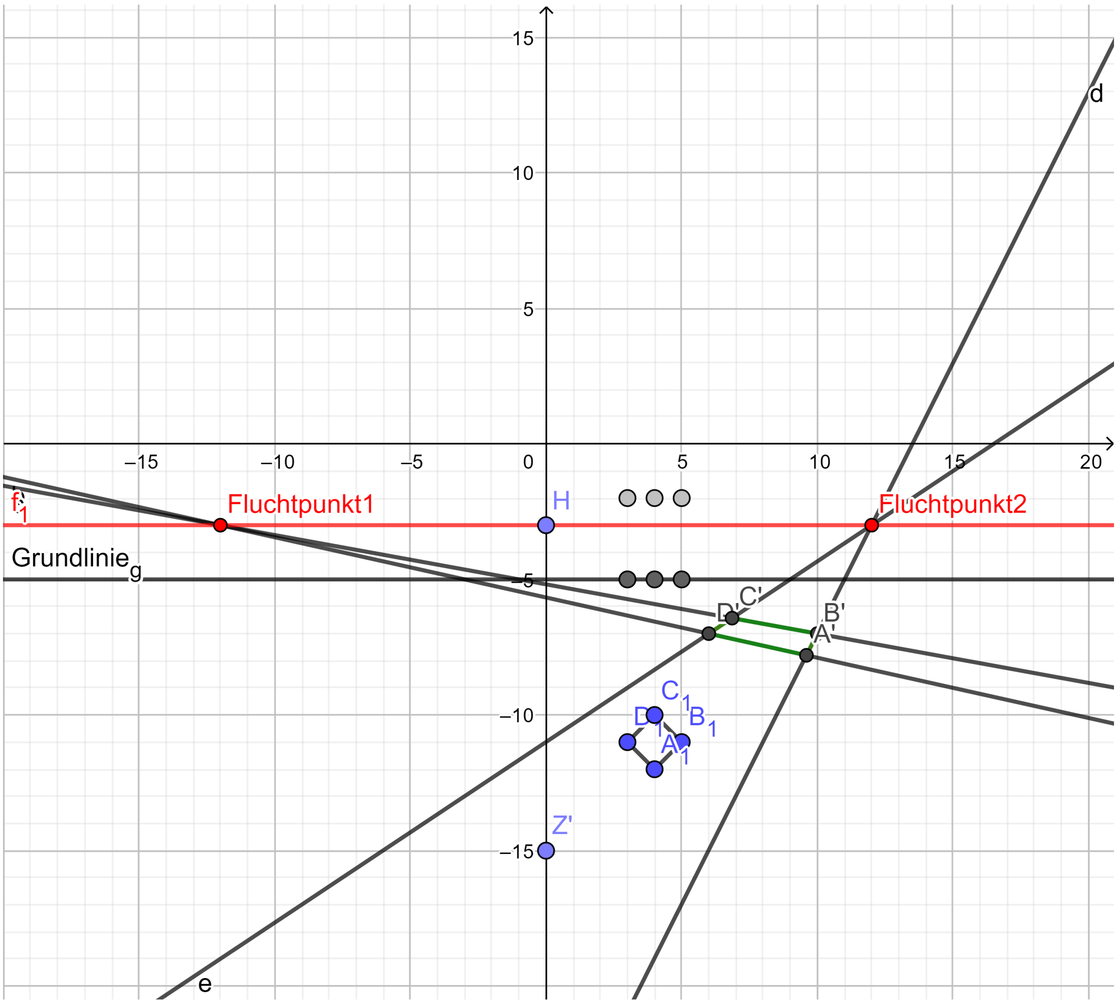


Abbildung 54: Zeichnung h1-Fluchtpunkte

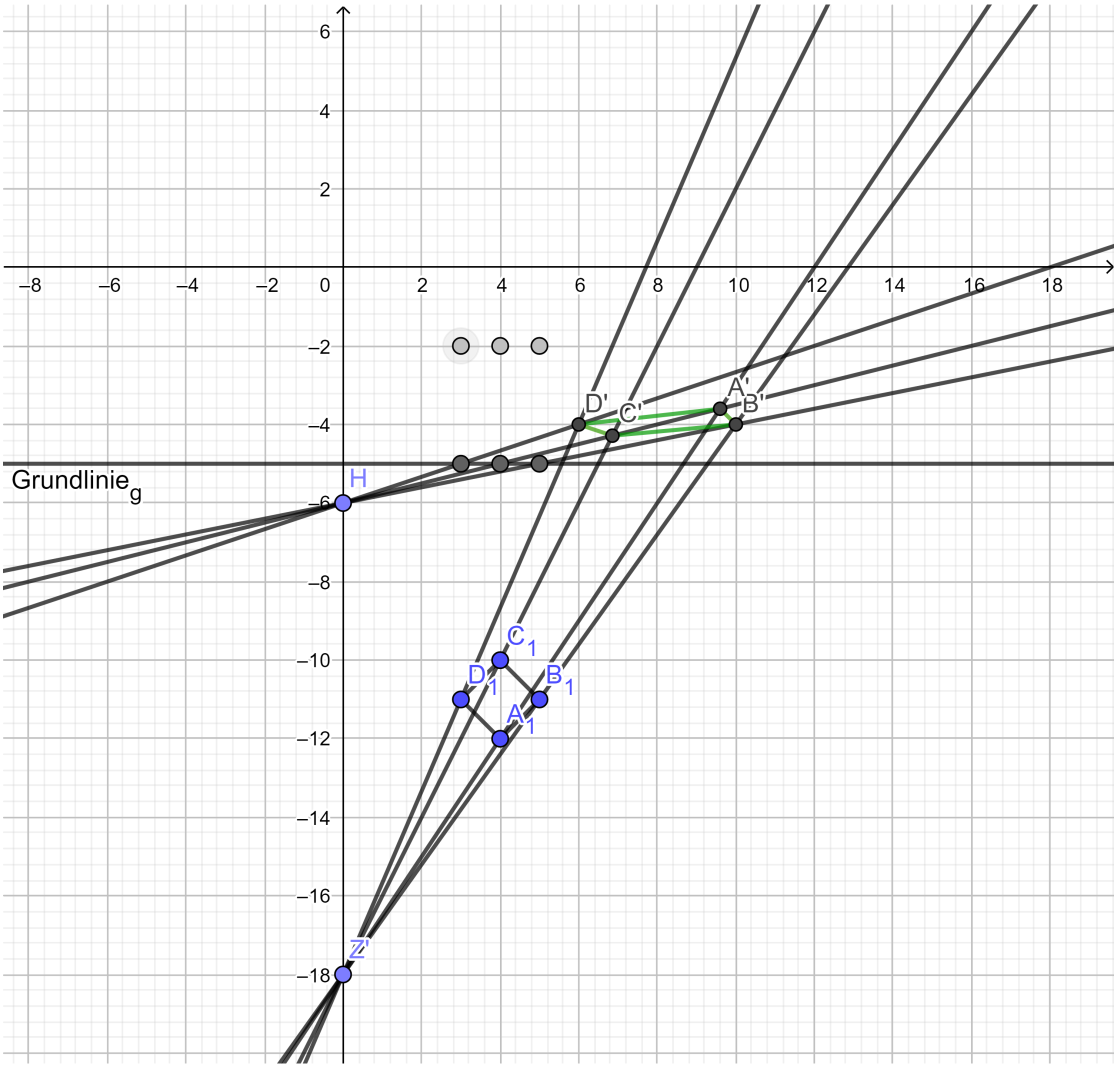


Abbildung 55: Zeichnung h2

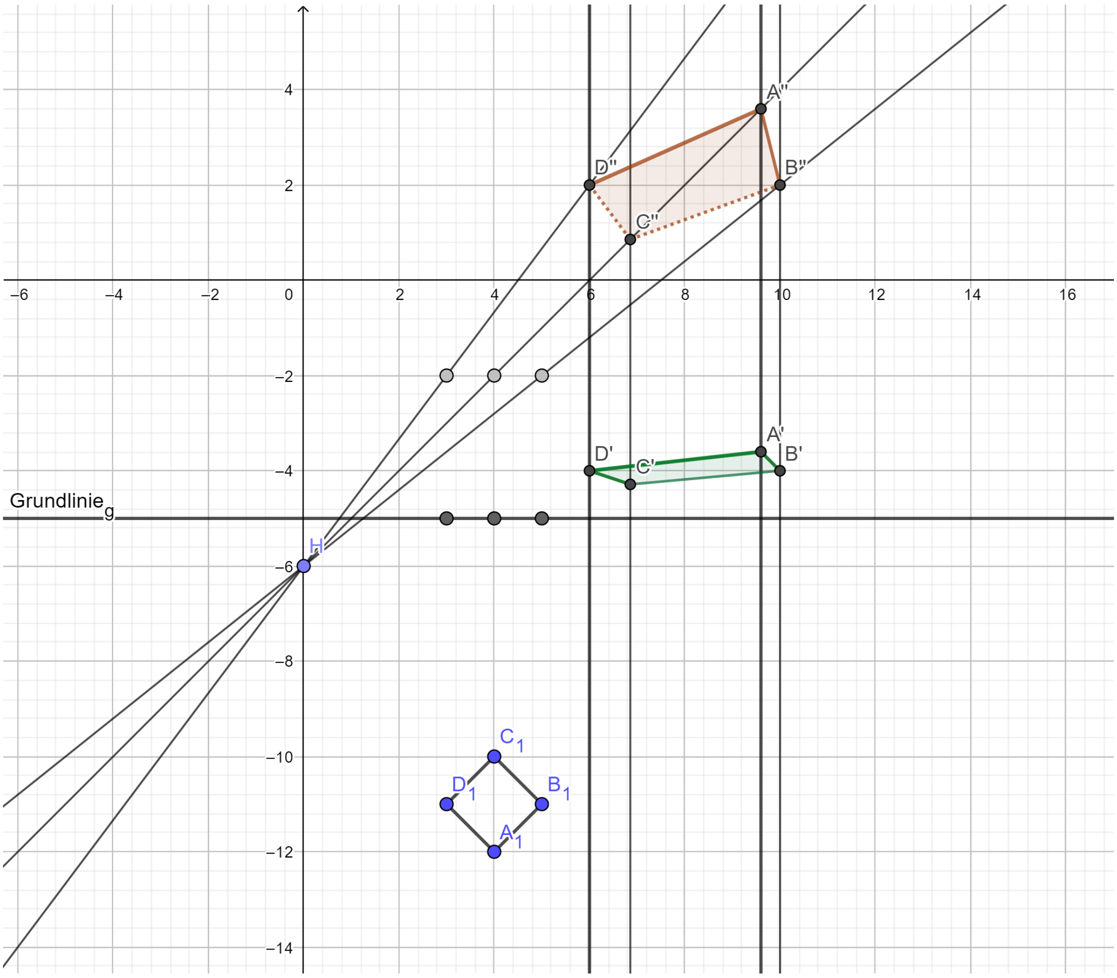


Abbildung 56: Zeichnung h2-Deckel

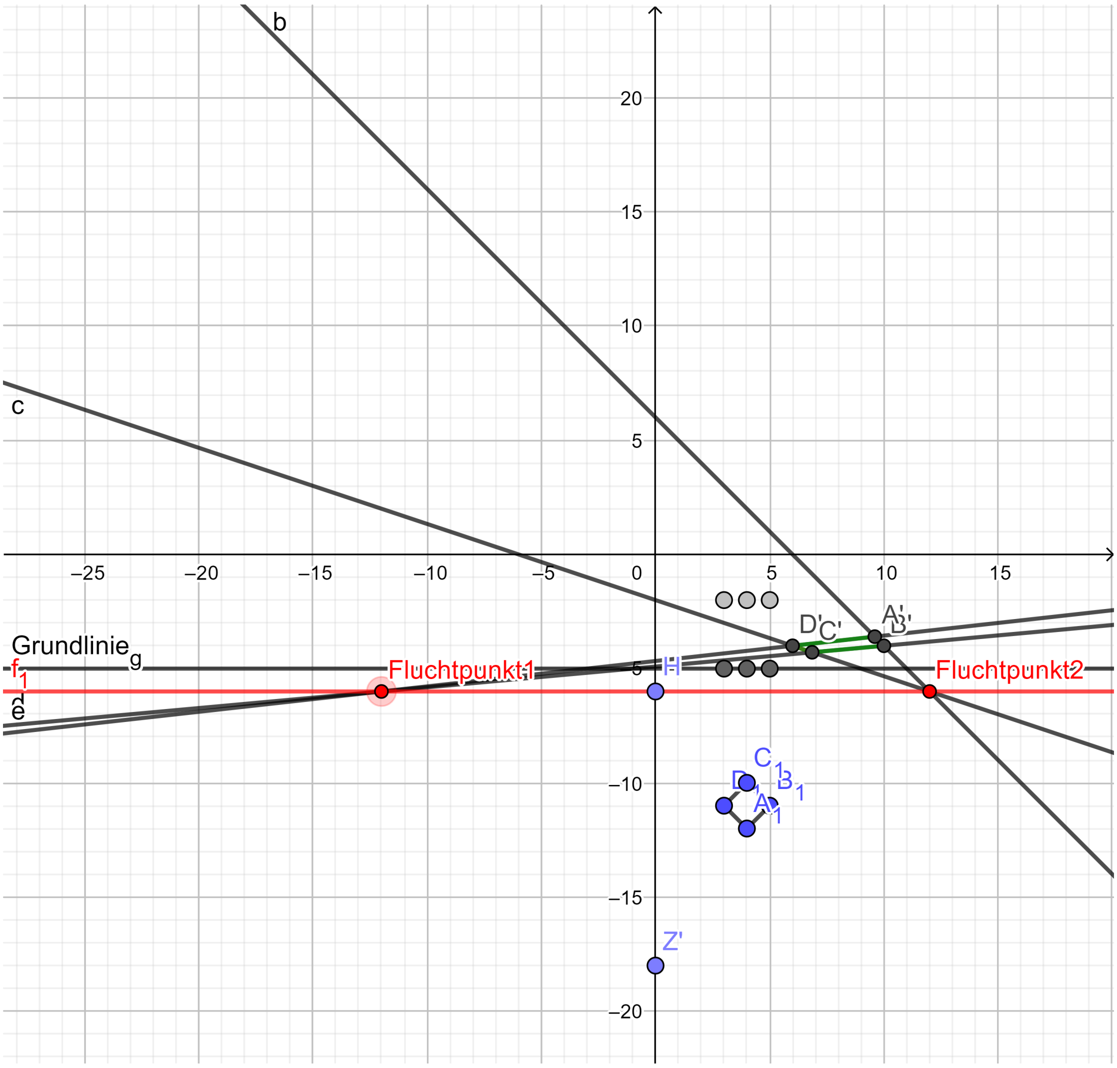


Abbildung 57: Zeichnung h2-Fluchtpunkt

H31 Keine Lösung vorhanden

H32 Keine Lösung vorhanden

T13 Zentralperspektive

a) Wir konstruieren die Grundfläche. Dazu legen wir Geraden, die jeweils durch das Projektionszentrum $Z(0, 0, -12)$ und durch die Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 der Grundfläche laufen. Weitere Geraden legt man durch den Hauptpunkt $H_0(0, 0, 0)$ und die Punkte der Grundfläche auf der Grundlinie. Die daraus resultierenden Schnittpunkte sind die Eckpunkte der konstruierten Fläche.

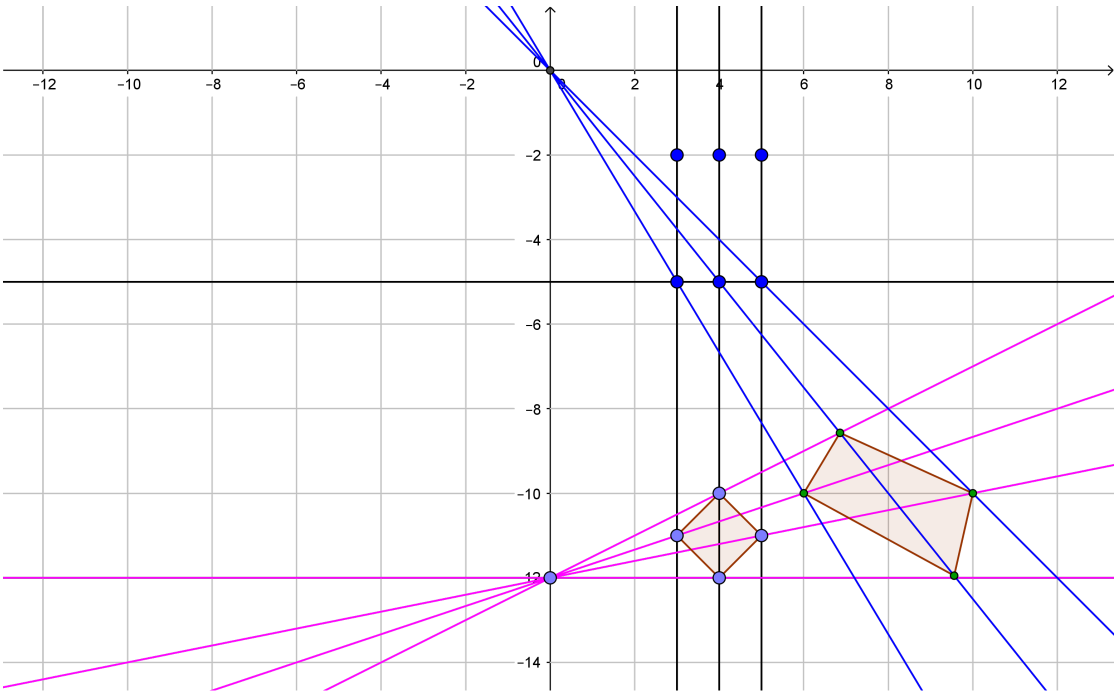


Abbildung 58: Grundfläche in Zentralprojektion

b) Die Fluchtpunkte kann man herausfinden, indem man die gegenüberliegenden Kanten der konstruierten Fläche weiter zeichnet, bis sie sich in einem Punkt schneiden. Die beiden Fluchtpunkte befinden sich immer auf der Horizontlinie.

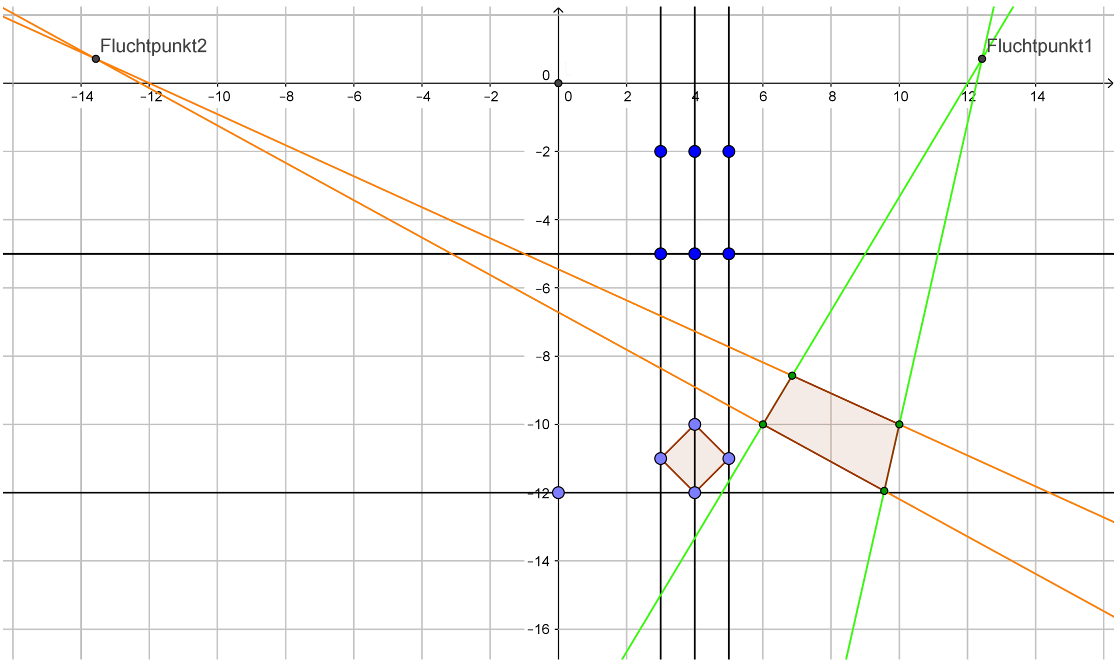


Abbildung 59: Fluchtpunkte

c) Um die Fluchtpunkte zu berechnen, multiplizieren wir die Projektionsmatrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} & 1 \end{bmatrix}$ mit den homogen dargestellten Vektoren $\overrightarrow{A_1B_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ bzw. $\overrightarrow{A_1D_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Hier gehen wir nach dem Schema *Zeile mal Spalte* vor.

Für $\overrightarrow{A_1B_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und F_1 folgt daher:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

Um aus der homogenen Darstellung wieder die gewohnte Vektordarstellung zu machen, muss die unterste Ziffer in der homogenen Darstellung auf 1 erweitert werden.

In unserem Fall bedeutet das, dass $\frac{1}{12}$ auf 1 erweitert werden muss.

Das geschieht, indem wir $\cdot 12$ nehmen.

Daraus folgt:

$$\left[12 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{12} \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nun kann man die unterste Ziffer wegstreichen. Somit hat der erste Fluchtpunkt F_1 die Koordinaten $(12, 0, 0)$.

Dasselbe Verfahren wendet man für F_2 mit $\overrightarrow{A_1D_1}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$ an.

Für $\overrightarrow{A_1D_1}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$ und F_2 folgt daher:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&\frac{1}{12}&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\\frac{1}{12}\end{bmatrix}$$

Auch hier muss mit $\cdot 12$ multipliziert werden, um normale Vektorkoordinaten zu erhalten.
Daraus folgt:

$$\begin{bmatrix}12\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\\frac{1}{12}\end{pmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-12\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Nun kann man die unterste Ziffer wegstreichen. Somit hat der zweite Fluchtpunkt F_2 die Koordinaten $(-12,0,0)$. Dieses System können wir auch zur Berechnung der Punkte A_1,B_1,C_1,D_1 benutzen.

d) Um die Deckelfläche zu konstruieren muss man von den Eckpunkten der Bodenfläche vertikale Geraden nach oben zeichnen und diese mit den, von dem Hauptpunkt ausgehenden Geraden, die durch die Punkte, 3 Einheiten über denen auf der Grundline aus, durchgehen schneiden. Die daraus resultierenden Punkte sind die Eckpunkte der Deckelfläche.

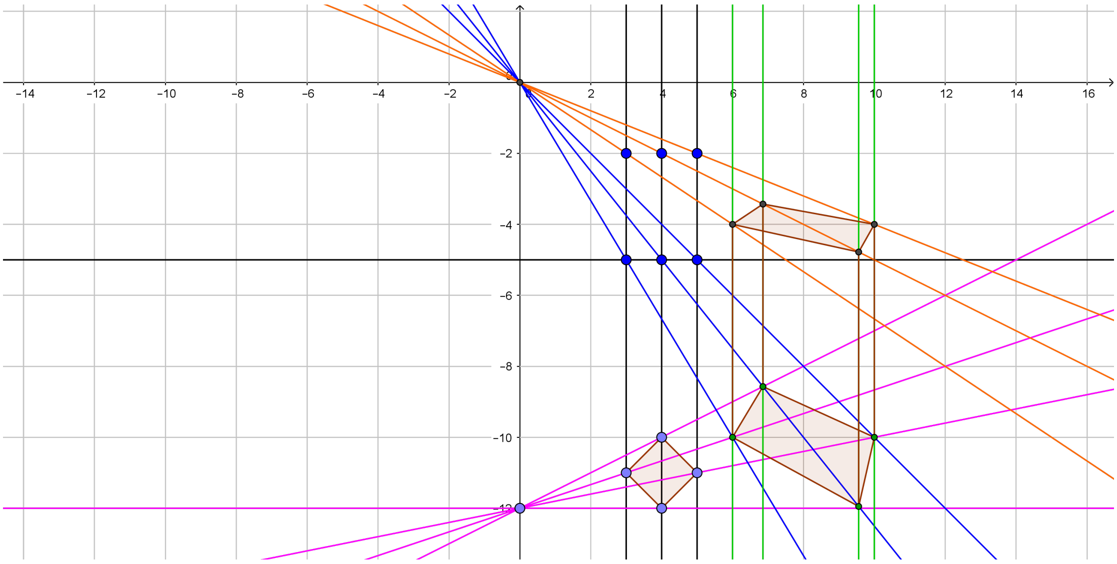


Abbildung 60: Deckelfläche

e) Das Konstruktionsergebnis hängt nicht von der Wahl der Standebene ab. Bei dieser Aufgabe fängt man lediglich mit der Konstruktion der Deckelfläche an und konstruiert dann die Bodenfläche.

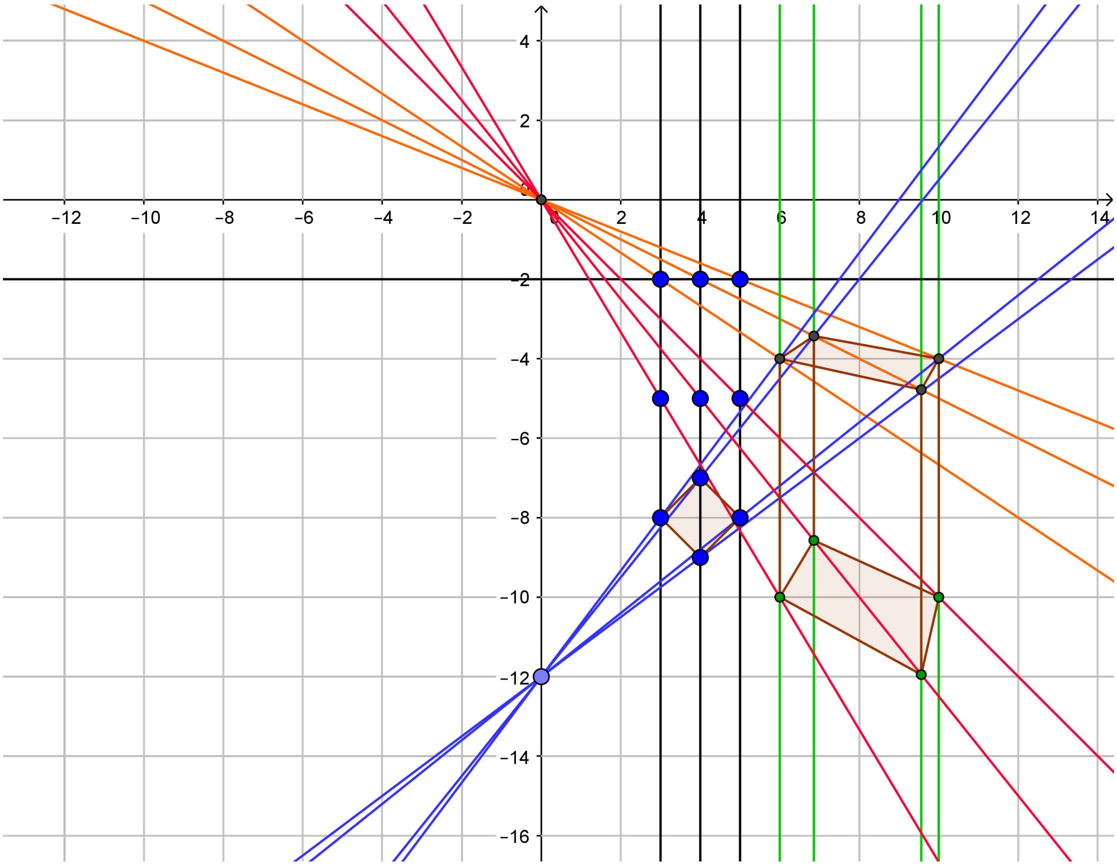


Abbildung 61: neue Standebene

Übungseinheit 11

Hausübungen

Aufgabe H 33. *Vergleich und Analyse: Parallelperspektive und Zentralperspektive*

Wir betrachten zunächst eine Parallelprojektion. Die Bildebene ist gegeben durch die Gleichung $x + y = 0$, alle Projektionsgeraden haben den Richtungsvektor $r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

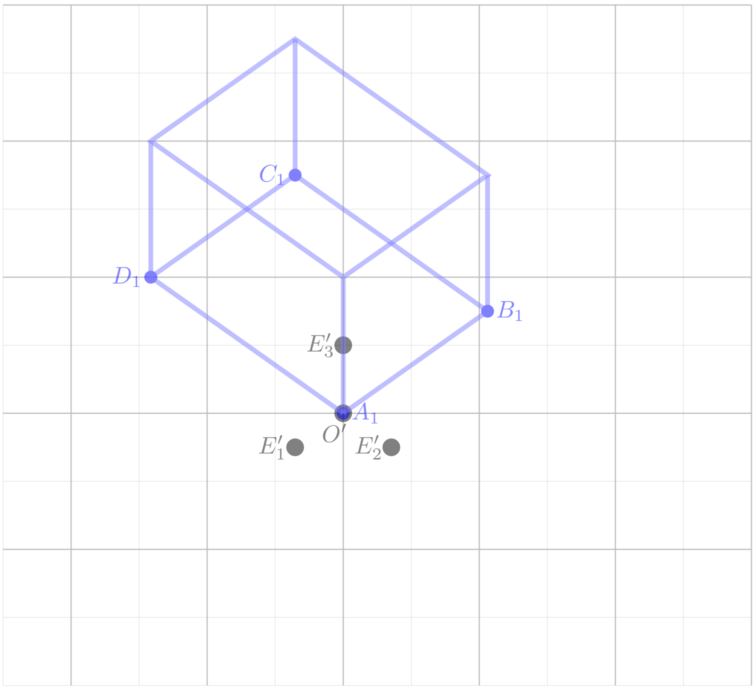
Ein Gebäude habe die folgenden Eckpunkte:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C_1 = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \\ A_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 2 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} -0 & -4 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die 3×4-Projektionsmatrix hat die Gestalt

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die folgende Abbildung zeigt einen Quader in einer Parallelprojektion:



Damit Sie sich die Konfiguration vorstellen können, **zeichnen** Sie einen Teil der Bildebene ein, und zwar ausgehend von den Punkten $0, 0, 0$ und $0, 0, 2.5$.

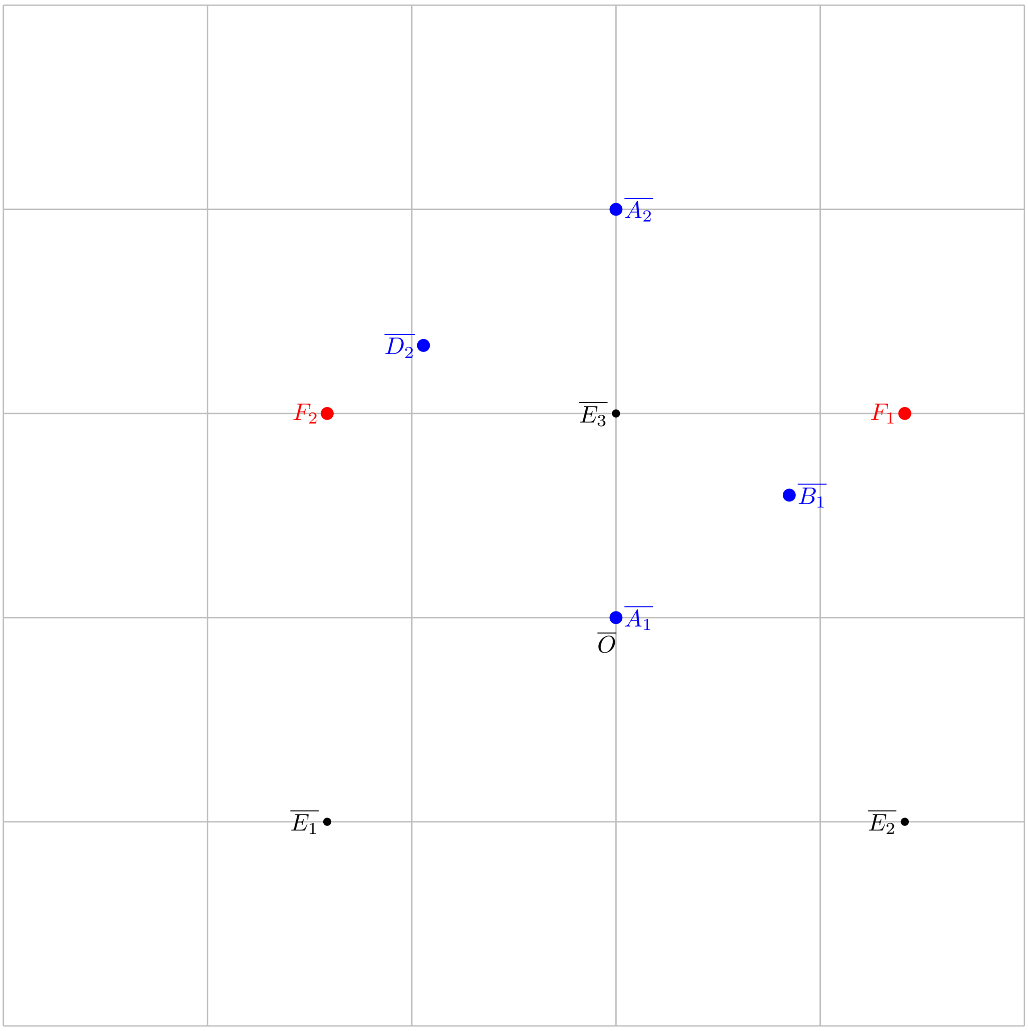
Zeichnen Sie noch fehlenden Punkte $E_1 + \widehat{e}_2$, $E_1 + \widehat{e}_3$, $E_2 + \widehat{e}_3$ und $R := E_3 + \widehat{e}_1 + \widehat{e}_2$ des Einheitswürfel ein. Zeichnen Sie den Verbindungsvektor $r = \overrightarrow{OR}$ ein.

Konstruieren Sie die Bildpunkte A_1' etc. mit der Durchstoßmethode.

Vervollständigen Sie die Darstellung des Quaders in der umseitig angegebenen zentralperspektivischen Darstellung. Der Punkt F_1 bezeichnet den Fluchtpunkt aller zur Kante $A_1 \vee B_1$ parallelen Geraden, der Punkt F_2 ist der Fluchtpunkt aller zur Kante $A_1 \vee D_1$ parallelen Geraden. Die Bildebene ist parallel zu der Kante $A_1 \vee A_2$ (steht also senkrecht auf der Standebene), der Hauptpunkt der Zentralprojektion liegt bei E_3.

Hinweise: Alle Projektionsbilder sind in der umseitigen Darstellung mit Überstrichen markiert, z.B. $\overline{A_1}$; die Projektionsbilder der Einheitspunkte E_1, E_2 und E_3 dienen nur dem Vergleich mit der umseitigen Parallelprojektion, sie sind für Ihre Konstruktion nicht weiter wichtig. Die Bildebene ist parallel zu der Kante $A_1 \vee A_2$, der Hauptpunkt der Zentralprojektion liegt bei E_3. Das Projektionszentrum befindet sich sehr nah am Gebäude, daher ergibt sich eine recht „extreme“ Perspektive. Dies können Sie schon aus der Tatsache schließen, dass der Abstand der beiden Fluchtpunkte vergleichsweise gering ist.

Bitte zeichnen Sie Ihre „Antwort" in das folgende Diagramm ein:



Aufgabe H 34. *Analyse von Kavalierprojektionen*

Zur axonometrischen Festlegung einer Kavalierprojektion wird das räumliche Dreibein (O, E_1, E_2, E_3) in die y-z-Koordinatenebene abgebildet (projiziert). Nach Einführung eines Koordinatensystems $(O; \vec{u}, \vec{v})$ in dieser Ebene mit $\vec{u} = \overrightarrow{OE_2'}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{OE_3'}$ ergeben sich für die (projizierten) Bildpunkte O', E_2' und E_3' die Koordinaten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$, und zwar für jede Projektionsrichtung. Wir überlegen uns noch, wo der Bildpunkt E_1' liegt.

Hierzu legen wir eine Projektionsrichtung $\langle \vec{p} \rangle$ durch Winkel θ und φ fest, wie in Abbildung 1 veranschaulicht. Diese Winkel entsprechen den „geographische Koordinaten", d.h. dem Längengrad φ bzw. dem Breitengrad

θ des Durchstoßpunktes der Projektionsgeraden durch die im Ursprung zentrierte Einheitskugel. Man kann rechnerisch zeigen, dass der Bildpunkt E_1' die Koordinaten $\begin{pmatrix} -\tan(\varphi) \\ -\frac{\tan(\theta)}{\cos(\varphi)} \end{pmatrix}$ hat.

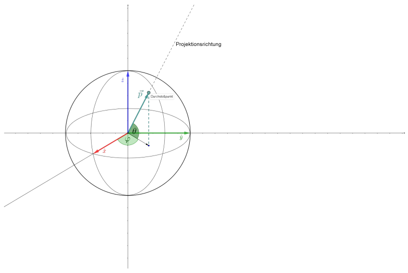
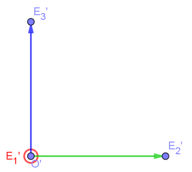


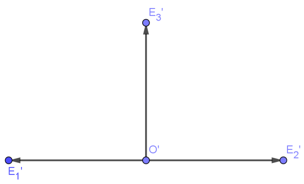
Abbildung 18: Zur Festlegung der Projektionsrichtung mit „geografischen" Winkeln.

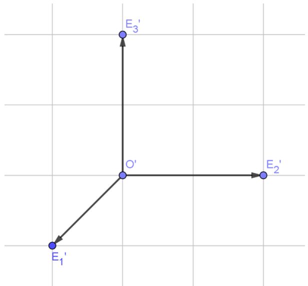
(a) Berechnen Sie E_1' und zeichnen Sie das ebene Dreibein für den Fall $\theta = 45°$ und $\varphi = 45°$.

(b) Beschreiben Sie, welche Parallelprojektionen das räumliche Dreibein jeweils auf die folgenden ebenen Dreibeine abbilden.



Der Punkt E_1' liegt über dem Punkt O'.
Dies soll durch den roten Kreis angedeutet werden.





Hinweis: Zur Analyse der Grafik ganz rechts können Sie auf die Gleichung $\begin{pmatrix} -\tan(\varphi) \\ -\frac{\tan(\theta)}{\cos(\varphi)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ *zurückgreifen, vgl. Aufgabe H 2. Alternativ hierzu könnten Sie die Projektionsrichtung in dem vorliegenden (speziellen) Fall so angeben wie in Aufgabe H 4. Dort werden allerdings **nicht** die Winkel θ und φ verwendet.*

Lösung:
Aus der angegebenen Gleichung folgt $\tan(\varphi) = \frac{1}{2}$ somit $\cos(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{5}}$ und $\sin(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Damit folgt weiter $\tan(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, somit $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$ und $\sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Mit der Formel für Kugelkoordinaten ergibt sich somit der Projektionsvektor

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\,\cos(\varphi) \\ \cos(\theta)\,\sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

In Hausübung H 4 wird ein Winkel δ verwendet, der die Neigung des Projektionsrichtung zur x_2-x_3-Ebene angibt. Hier ergibt sich die Forderung $\tan(\delta) = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$. Hieraus ergibt sich $\cos(\delta) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ und $\sin(\delta) =$

$\frac{1}{\sqrt{3}}$. Somit ergibt sich für den Projektionsvektor

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} \sin(\delta) \\ \cos(\delta)\,\cos(45^\circ) \\ \cos(\delta)\,\sin(45^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 35. *Analyse von Kavalierprojektionen – Fortsetzung*

(a) Für welche Kombination von θ und φ ergibt sich die folgende Axonometrie:

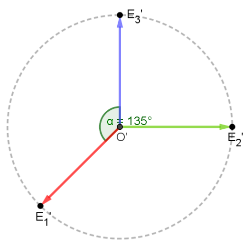


Abbildung 19: Kabinett- bzw. Kavalierprojektion mit $\alpha = 135^\circ$ und $s_1 = 1$.

Hinweis: Überzeugen Sie sich zunächst davon, dass der rote Vektor in Abbildung 2 die Koordinaten $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ besitzt. Bestimmen Sie dann Werte für θ und φ so, dass die Gleichung

$$\begin{pmatrix} -\tan(\varphi) \\ -\frac{\tan(\theta)}{\cos(\varphi)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

erfüllt ist.

Aufgabe H 36. *Analyse einiger Kavalierprojektionen*

Untersuchen Sie einige spezielle Kavalierprojektionen. Die Bildebene ist jeweils die x_2-x_3-Ebene. Die Projektionsrichtung liegt immer in derjenigen Ebene , welche die x_1-Achse enthält und den Winkel zwischen der x_2-Achse und der x_3-Achse halbiert. Diese Ebene ist durch die Gleichung $x_2 = x_3$ gegeben, ihr Schnitt mit der Bildebene ist eine Gerade, wir wir mit dem Symbold w (Winkelhalbierende) bezeichnen können. Im Folgenden bezeichne E_1', stets den Schnittpunkt der durch E_1 verlaufenden Projektionsgeraden mit der Bildebene. Bei den hier untersuchten Parallelprojektionen ergibt sich für die axonometrischen Angaben $(s_1, s_2, s_3, \alpha, \beta)$ stets $s_2 = 1$, $s_3 = 1$, $\alpha = 135^\circ$, $\beta = 90^\circ$, der Skalierungsfaktor s_1 variiert, je nachdem, wie flach oder steil die Projektionsrichtung gewählt wird.

(a) Die Projektionsrichtung sei um $\delta = 45^\circ$ zur x_2-x_3-Ebene bzw. zur Geraden w geneigt. Bestimmen Sie die Länge der Strecke $s_1 = \overline{OE_1'}$. Zeichnen Sie das resultierende Dreibein (O', E_1', E_2', E_3').

(b) Die Projektionsgerade habe die Steigung $m_2 = \frac{2}{1}$. Bestimmen Sie die Länge der Strecke $s_1 = \overline{OE_1'}$ sowie den Neigungswinkel δ_2 der Projektionsgeraden zur x_2-x_3-Ebene. Zeichnen Sie das resultierende Dreibein (O', E_1', E_2', E_3').

(c) Die Projektionsgerade habe die Steigung $m_3 = \frac{1}{2}$. Bestimmen Sie die Länge der Strecke $s_1 = \overline{OE_1'}$ sowie den Neigungswinkel δ_3 der Projektionsgeraden zur x_2-x_3-Ebene. Zeichnen Sie das resultierende Dreibein (O', E_1', E_2', E_3').

(d) In der Schule haben Sie zur Darstellung räumlicher Objekte möglicherweise immer wieder eine Axonometrie verwendet, bei der $s_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\alpha = 135°$ galt, vgl. Aufgabe H 2. Welchen Neigungswinkel δ muss die Projektionsgerade zur x_2-x_3-Ebene haben, damit sich $s_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ergibt?

Aufgabe H 37. *Fortsetzung der Analyse von Aufgabe H 4 – Projektion auf verschiedene Ebenen*

(a) Die Bildebene werden nun so „tiefergelegt“, dass sie **parallel zur** x_2-x_3-Ebene ist und den Punkt $(-1, 0, 0)$ enthält. Untersuchen Sie, wie die Punkte O, und E_1 projiziert werden, wenn die Projektionsrichtung so ist wie in der ersten Teilaufgabe von H 4. Ist der Skalierungsfaktor s_1 im Vergleich zur Aufgabe H 4 verändert?

(b) Was verändert sich, wenn Sie die Bildebene π um eine weitere Längeneinheit „tieferlegen“, so dass sie den Punkt $(-2, 0, 0)$ enthält.

(c) Versuchen Sie einen Ergebnissatz zu formulieren, der die von Ihnen beobachteten Sachverhalte bei Parallelprojektionen zusammenfasst:

Wenn man bei gegebenem räumlichen Dreibein $\big(O;\ E_1,\ E_2,\ E_3\big)$ *und gegebener Projektionsrichtung unterschiedliche zueinander parallel liegende Bildebenen wählt, so verändert sich zwar die Lage ..., die ... bleiben jedoch unverändert.*

H33 Keine Lösung vorhanden

H34 Keine Lösung vorhanden

H35 Keine Lösung vorhanden

H36 Keine Lösung vorhanden

H37 Keine Lösung vorhanden

Übungseinheit 12

Präsenzübungen

Aufgabe P 10. *Goldener Schnitt und Goldene Zahl*

Wenn die Verbindungsstrecke $\overline{AB}$ zweier Punkte A und B durch einen dritten Punkt S so unterteilt wird, dass

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{SB}}$$

gilt, so spricht man von einer **Teilung der Strecke** $\overline{AB}$ **nach dem Goldenen Schnitt**.

- Die Verhältniszahl $\Phi = \frac{\overline{AB}}{\overline{AS}}$ heißt dann **Goldene Zahl**.
- Ihr Kehrwert $\frac{1}{\Phi} = \frac{\overline{AS}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SB}}{\overline{AS}}$ heißt **Goldener Schnitt**.

(a) Probieren Sie verschiedene Unterteilungen der Strecke $\overline{AB}$ aus. Wählen Sie nacheinander eine Gesamtzahl von $n = 2,\ 3,\ 4,\ 5$ Teilstrecken. Fassen Sie eine oder mehrere Teilstrecken zu einer Strecke $\overline{AS}$ zusammen. Gelingt es Ihnen, die Situation $\frac{\overline{AB}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{SB}}$ (näherungsweise) herzustellen?

(b) Probieren Sie nun die Unterteilung mit $n = 8$ und $\overline{AS} : \overline{SB} = 5:3$ aus.

(c) Nehmen Sie die folgenden Verhältnisse zur Kenntnis:

- Für $n = 13$ und die Teilung im Verhältnis $8:5$ ergibt sich
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AS}} = \frac{13}{8} = 1.625 \quad \text{und} \quad \frac{\overline{AS}}{\overline{SB}} = \frac{8}{5} = 1.6.$$
- Für $n = 21$ und die Teilung im Verhältnis $13:8$ ergibt sich
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AS}} = \frac{21}{13} \approx 1.615 \quad \text{und} \quad \frac{\overline{AS}}{\overline{SB}} = \frac{13}{8} = 1.625.$$
- Für $n = 34$ und die Teilung im Verhältnis $21:13$ ergibt sich
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AS}} = \frac{34}{21} \approx 1.619 \quad \text{und} \quad \frac{\overline{AS}}{\overline{SB}} = \frac{21}{13} \approx 1.615.$$
- Für $n = 55$ und die Teilung im Verhältnis $34:21$ ergibt sich
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AS}} = \frac{55}{34} \approx 1.6176 \quad \text{und} \quad \frac{\overline{AS}}{\overline{SB}} = \frac{34}{21} \approx 1.619.$$
- Für $n = 89$ und die Teilung im Verhältnis $55:34$ ergibt sich
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AS}} = \frac{89}{55} \approx 1.6182 \quad \text{und} \quad \frac{\overline{AS}}{\overline{SB}} = \frac{34}{21} \approx 1.6176.$$

In den folgenden Aufgaben werden sich davon überzeugen, dass

- die Goldene Zahl Φ den Wert
$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \approx 1.618034\,,$$
- der Goldene Schnitt den Wert
$$\frac{1}{\Phi} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \approx 0.618034$$

besitzt.

Aufgabe P 11. *Goldene Zahl und Goldener Schnitt – Berechnung*

Wir unterteilen die Verbindungsstrecke $\overline{AB}$ zweier Punkte A und B durch einen dritten Punkt S so, dass $\frac{\overline{AB}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{SB}}$ gilt. Hierzu bestimmen wir die Zahl $k < 1$ mit $\overline{AS} = k \cdot \overline{AB}$.

(a) **Begründen Sie** anhand der Definition (Streckenteilung), dass für die Zahl k die folgende Gleichung gilt:
$$k^2 + k - 1 = 0.$$

(b) Bestimmen Sie die beiden Lösungen der Gleichung $k^2 + k - 1 = 0$ und verifizieren Sie, dass die positive Lösung k_+ den Wert
$$k_+ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \qquad \text{besitzt.}$$

(c) Bestimmen Sie den numerischen Wert von k_+ mit einer Genauigkeit von drei Nachkommastellen.

(d) Die sogenannte **Goldenen Zahl** Φ ist gerade der Kehrwert von k_+. Vollziehen Sie Folgendes nach:
$$\Phi = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{2 \cdot \left(\sqrt{5} + 1\right)}{\left(\sqrt{5} - 1\right) \cdot \left(\sqrt{5} + 1\right)} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}.$$

Aufgabe P 12. *Konstruktionen mit Zirkel und Lineal: Innere und äußere Teilung*

In dieser Aufgabe lassen wir nur Konstruktionen mit Zirkel und Lineal bzw. mit deren digitalen Entsprechungen zu.

(a) Eine Strecke $\overline{AB}$ soll mit dem sog. Verfahren der **innere Teilung** geteilt werden.

- Konstruieren Sie hierzu einen Punkt C, der sich senkrecht über B befinden und den Abstand $h = \frac{\overline{AB}}{2}$ von B haben soll. Dann hat die Strecke $\overline{AC}$ die Länge $\frac{\sqrt{5}}{2}\overline{AB}$, wie Sie sich mit dem Satz des Pythagoras überlegen können.
- Konstruieren Sie den Punkt D auf $\overline{AC}$ so, dass D den Abstand h von C besitzt.
- Der Punkt D hat den Abstand $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \overline{AB}$ von A.
- Ziehen Sie einen Kreis mit Radius r um A und schneiden Sie diesen mit der Strecke $\overline{AB}$. Der Schnittpunkt S teilt die Strecke $\overline{AB}$ im Goldenen Schnitt.

(b) Zu einer Strecke $\overline{AB}$ soll ein Punkt J so gefunden werden, dass

- J auf der Geraden $A \vee B$ (z.B. links von A) liegt,
- das Verhältnis $\frac{\overline{JB}}{\overline{AB}}$ gleich der Goldenen Zahl Φ ist.

Man nennt dies **äußere Teilung**.

Aufgabe P 13. *Konstruktion von Fünfeck und Pentagramm*

Zeichnen Sie eine Strecke $\overline{AB}$. **Konstruieren Sie** ein regelmäßiges Fünfeck über $\overline{AB}$, d.h. die Strecke $\overline{AB}$ soll eine der fünf Seiten des Fünfecks sein. Zeichnen Sie die Diagonalen des Fünfecks und markieren Sie das sogenannte **Pentagramm**.

Hinweise: Für das Längenverhältnis $\frac{d}{s}$ von Diagonalen und Seiten im regelmäßigen Fünfeck gilt $\frac{d}{s} = \Phi$. Gehen Sie daher so vor, dass Sie mit äußerer Teilung einen Punkt J auf der Geraden $A \vee B$ so konstruieren, dass $\frac{\overline{JB}}{\overline{AB}} = \Phi$ gilt.

Hausübungen

Aufgabe H 38. *Goldene Zahl und Fibonacci-Zahlen*

Zeigen Sie, dass die Goldene Zahl Φ die Gleichung

$$\Phi^2 = \Phi + 1.$$

erfüllt. Berechnen Sie Potenzen Φ^n der Goldenen Zahl für einige der Werte $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$ und stellen Sie diese Potenzen jeweils in der Form

$$\Phi^n = a_n \cdot \Phi + b_n \cdot 1$$

dar. Beschreiben Sie die Zahlenfolgen (a_n) und (b_n), am besten, indem Sie sogenannte Rekursionsformeln

$$a_{n+2} = \ldots \qquad \text{bzw.} \qquad b_{n+2} = \ldots$$

angeben.

Aufgabe H 39. *Forschungsprojekt für Fortgeschrittene*

Beweisen Sie, dass für das Längenverhältnis $\frac{d}{s}$ von Diagonalen und Seiten im regelmäßigen Fünfeck die Beziehung $\frac{d}{s} = \Phi$ gilt. Recherchieren Sie die hierfür notwendigen mathematischen Grundlagen.

Tutoriumsübungen

Aufgabe T 14. *Goldene Zahl und Goldener Schnitt – Berechnung*

Wenn die Verbindungsstrecke $\overline{AB}$ zweier Punkte A und B durch einen dritten Punkt S so unterteilt wird, dass

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{SB}}$$

gilt, so spricht man von einer **Teilung der Strecke $\overline{AB}$ nach dem Goldenen Schnitt**.

- Die Verhältniszahl $\Phi = \frac{\overline{AB}}{\overline{AS}}$ heißt dann **Goldene Zahl**.
- Ihr Kehrwert $\frac{1}{\Phi} = \frac{\overline{AS}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SB}}{\overline{AS}}$ heißt **Goldener Schnitt**.

In der Vorlesung haben wir für den Goldenen Schnitt die Variable k eingeführt:

$$k\,\overline{AB} = \overline{AS} \qquad \text{bzw.} \qquad k = \frac{\overline{AS}}{\overline{AB}}.$$

Wir haben dann anhand der Definition (Streckenteilung) gezeigt, dass k die Gleichung

$$k^2 + k - 1 = 0$$

erfüllen muss.

(a) **Begründen Sie**, dass für die Goldene Zahl $\Phi = \frac{1}{k}$ die folgende Gleichung gilt:

$$\Phi^2 = \Phi + 1.$$

(b) **Folgern Sie** hieraus, dass die Goldene Zahl Φ, eine Lösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 - x - 1 = 0 \qquad \text{ist.}$$

Bestimmen Sie die beiden Lösungen der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$ bezeichnen Sie die **positive** Lösung mit Φ und verifizieren Sie, dass diese den Wert

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \qquad \text{hat.}$$

(c) Rechnen Sie nach, dass sich für den Kehrwert $\frac{1}{\Phi}$ der Ausdruck

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}.$$

ergibt.

Aufgabe T 15. *Konstruktion von Φ mit Zirkel und Lineal: Äußere Teilung*

In dieser Aufgabe lassen wir nur Konstruktionen mit Zirkel und Lineal bzw. mit deren digitalen Entsprechungen zu.

(a) Zu einer Strecke $\overline{TB}$ soll ein Punkt A so gefunden werden, dass

- A auf der Geraden $T \vee B$, aber außerhalb der Strecke $\overline{TB}$ (z.B. links von T) liegt,
- das Verhältnis $\frac{\overline{AB}}{\overline{TB}}$ gleich der Goldenen Zahl Φ ist.

Man nennt dies **äußere Teilung**.

- Konstruieren Sie hierzu
  - den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{TB}$,
  - einen Punkt H, der sich **senkrecht über** T befinden und den Abstand $h = \overline{TB}$ von T haben soll.

  Dann hat die Strecke $\overline{MH}$ die Länge $\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \overline{TB}$, wie Sie sich mit dem Satz des Pythagoras überlegen können.
- Zeichnen Sie einen Kreis um den Punkt M mit Radius $r := \overline{MH}$. Der (linke) Schnittpunkt dieses Kreises mit der Geraden $T \vee B$ ist der gesuchte Punkt A.

(b) Begründen Sie, dass die Länge der Strecke $\overline{AB}$ den Wert $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \overline{TB}$ hat, vgl. Aufgabe T 1.

(c) Folgern Sie daraus, dass der Punkt T die Strecke $\overline{AB}$ im Goldenen Schnitt teilt.

Aufgabe T 16. *Konstruktion von Fünfeck und Pentagramm*

Diese Aufgabe wird im WS 2019/20 nicht im Tutorium, sondern in der Vorlesung behandelt.

Wählen Sie zwei Punkte A und B auf der x-Achse.

(a) Diese Punkte sollen zwei Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks sein, dessen übrige drei Eckpunkte Sie nach und nach konstruieren.

- **Bestimmen Sie** mit **äußerer Teilung** einen Punkt J so, dass A die Strecke $\overline{JB}$ im Goldenen Schnitt teilt.
- Ziehen Sie um den Punkt A einen Kreis mit Radius $\overline{AB}$. Ziehen Sie einen zweiten Kreis um den Punkt B mit Radius $\overline{BJ}$. Der obere der beiden Schnittpunkte dieser beiden Kreise ist der dritte Eckpunkt C des Fünfecks.
- Überlegen Sie sich eigenständig, wie Sie die verbleibenden beiden Eckpunkte D und E konstruieren können, um das Fünfeck zu vervollständigen.

Hinweis: Die Konstruktion basiert darauf, dass für das Längenverhältnis $\frac{d}{s}$ von Diagonalen und Seiten im regelmäßigen Fünfeck die Beziehung $\frac{d}{s} = \Phi$ gilt.

(b) Zeichnen Sie alle Diagonalen (AC, BD, ...) des Fünfecks ein und markieren Sie die entstehende Figur, das sogenannte **Pentagramm**.

(c) Im Innern des Pentagramms sehen Sie ein kleines auf der Spitze stehendes Fünfeck. Bestimmen Sie das Verhältnis des Seitenlängen dieses kleinen Fünfecks und des großen Fünfecks $ABCDE$.

P10 Keine Lösung vorhanden.

P11 Keine Lösung vorhanden.

P12 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal: Innere und Äußere Teilung

a) Innere Teilung

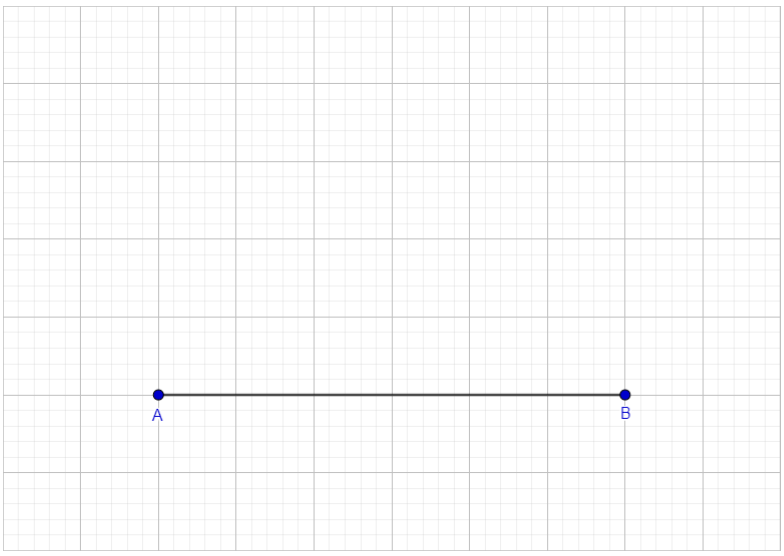


Abbildung 1: Zuerst wird eine beliebig lange Strecke $\overline{AB}$ gezeichnet.

b) Äußere Teilung

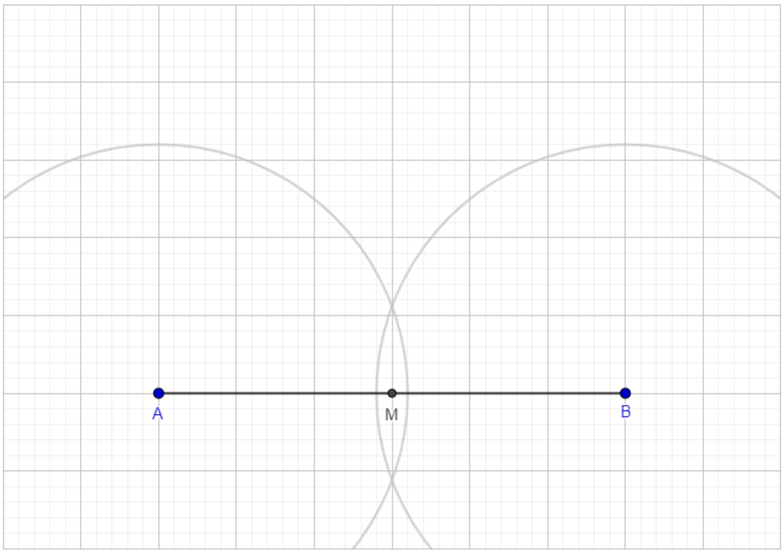


Abbildung 2: Dann wird mithilfe der Streckensymmetrale der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ ermittelt.

P13 Keine Lösung vorhanden.

H38 Keine Lösung vorhanden

H39 Keine Lösung vorhanden

T14 Keine Lösung vorhanden

T15 Keine Lösung vorhanden

T16 Keine Lösung vorhanden

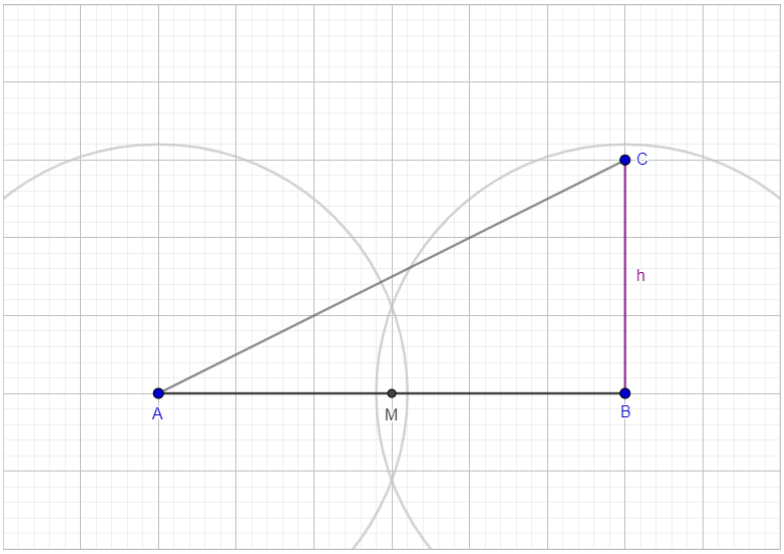


Abbildung 3: Danach wird der Punkt C konstruiert. Dieser befindet sich senkrecht über Punkt B mit einem Abstand $h = \overline{MB} = \frac{\overline{AB}}{2}$. Außerdem wird die Strecke $\overline{AC}$ eingezeichnet.

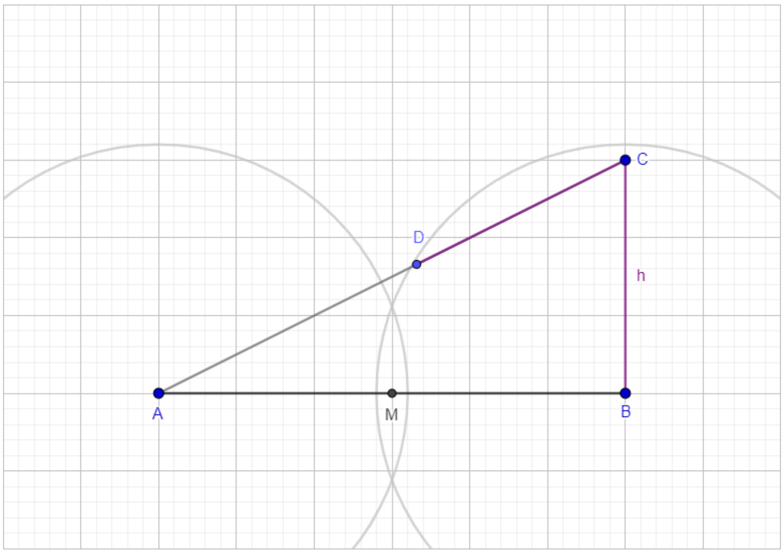


Abbildung 4: Danach wird der Punkt D auf der Strecke $\overline{AC}$ konstruiert. D hat den Abstand h von C.

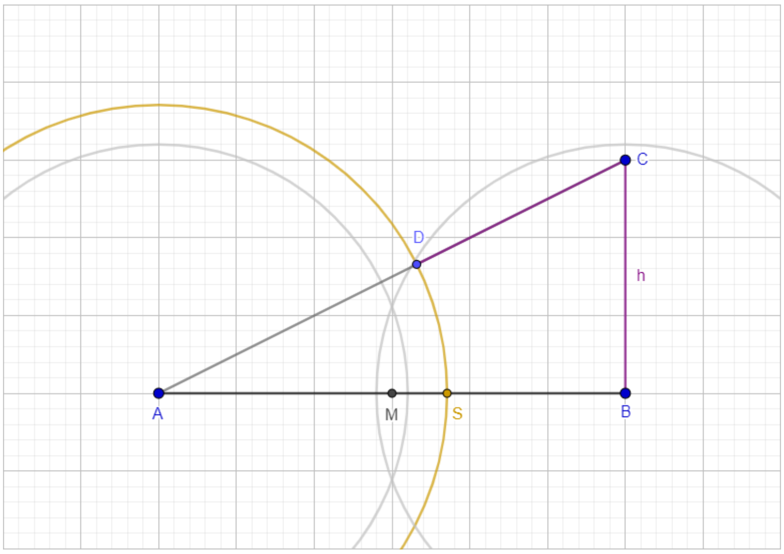


Abbildung 5: Zuletzt wird mit dem Radius $r = \overline{AD}$, ein Kreis um A gezogen. Es gilt $r = AC - DC = \frac{\sqrt{5}}{2}AB - \frac{1}{2}AB$. Der Schnittpunkt S dieses Kreises mit der Strecke $\overline{AB}$ teilt die Strecke $\overline{AB}$ im Goldenen Schnitt Φ.

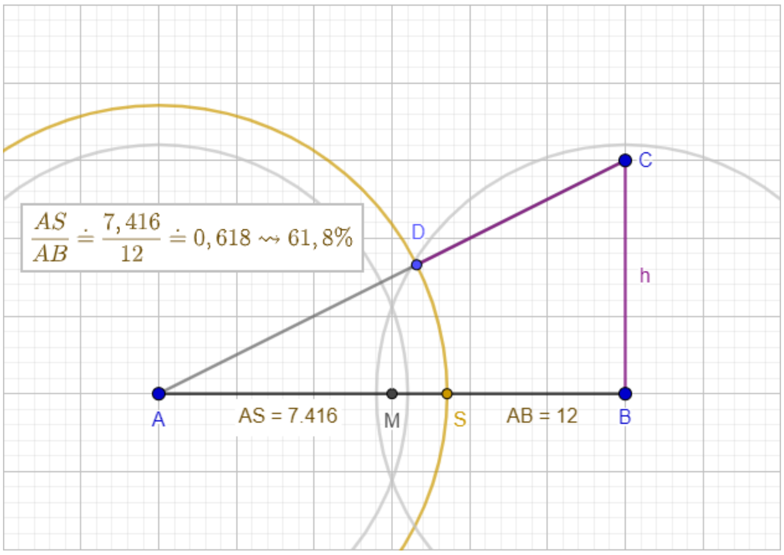


Abbildung 6: Wir berechnen das numerische Verhältnis der Strecken $\overline{AS}$ und $\overline{AB}$.

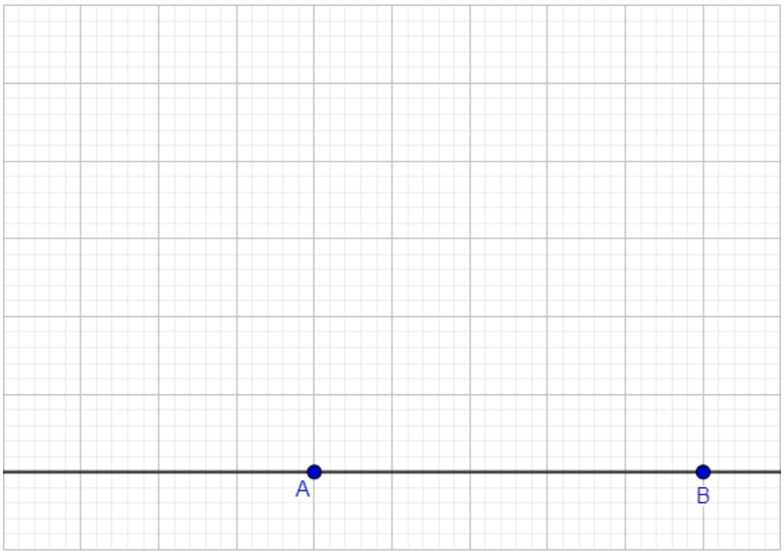


Abbildung 1: Zuerst wird eine beliebig lange Strecke $\overline{AB}$ gezeichnet und diese mit einer Gerade verlängert.

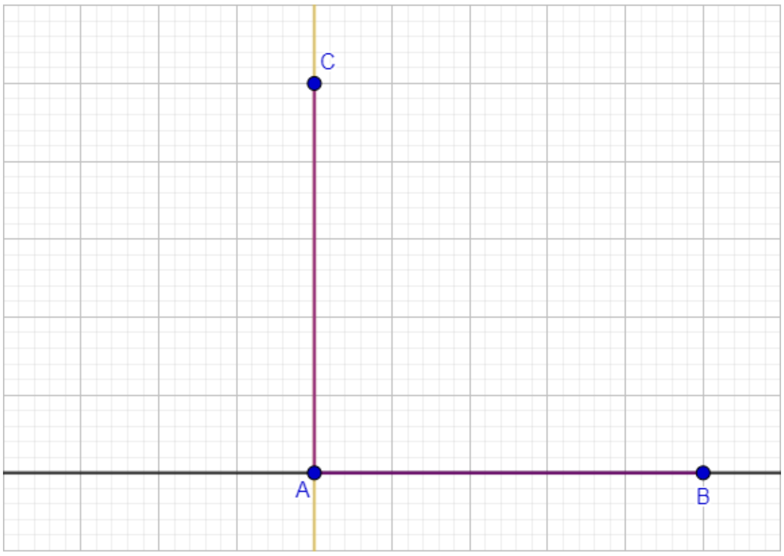


Abbildung 2: Danach wird der Punkt C konstruiert. Dieser befindet sich senkrecht über Punkt A mit einem Abstand von $h = \overline{AB}$.

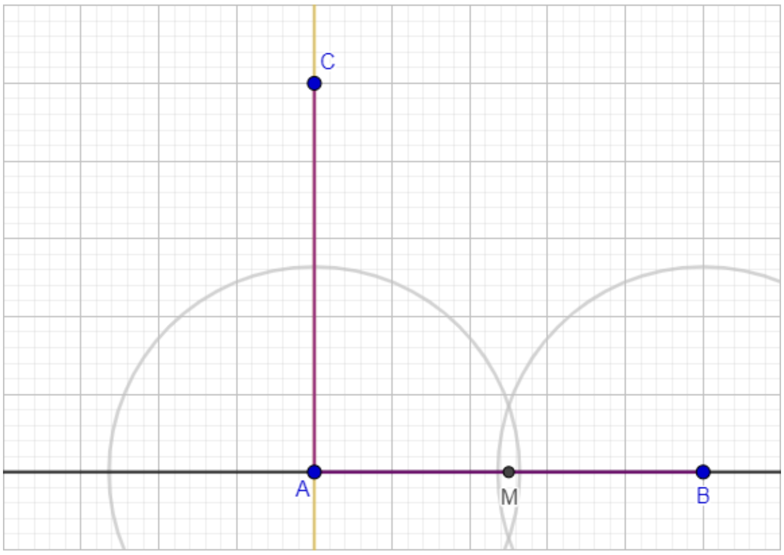


Abbildung 3: Dann wird mithilfe der Streckensymetrale der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ ermittelt.

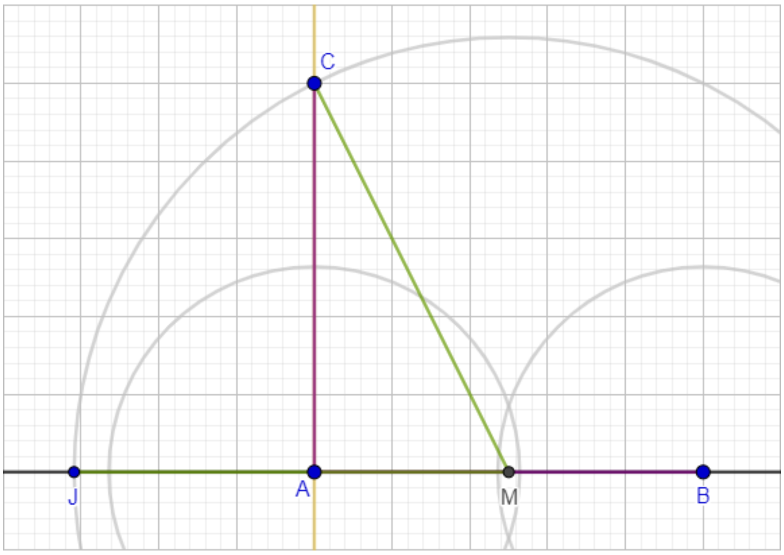


Abbildung 4: Danach wird der Punkt J konstruiert. Dieser liegt mit dem Abstand $\overline{MC}$ von M aus, in Richtung von A, auf der Gerade auf der $\overline{AB}$ liegt. Das Verhältnis von $\overline{JB}$ und $\overline{AB}$ ist gleich der goldenen Zahl Φ.

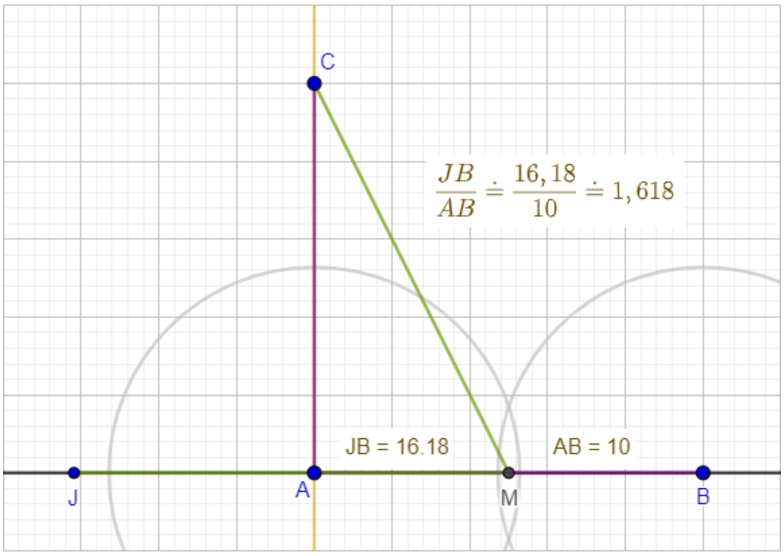


Abbildung 5: Wir berechnen das numerische Verhältnis der Strecken $\overline{JB}$ und $\overline{AB}$.