1 Dénombrabilité et non-dénombrabilité

1.1 Dénombrabilité de $\mathbb{Z}$

Théorème 1.1. *L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ est dénombrable.*

Proof. On peut établir une bijection explicite entre $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad f(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ -\frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair et } n > 0. \end{cases}$$

Cette fonction énumère les entiers de la manière suivante :

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$$

Ainsi, chaque entier apparaît exactement une fois, ce qui montre que $\mathbb{Z}$ est dénombrable. $\square$

1.2 Dénombrabilité de $\mathbb{Q}$

Théorème 1.2. *L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est dénombrable.*

Proof. On considère d'abord les rationnels positifs $\mathbb{Q}^+ = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{N}^*, \gcd(p, q) = 1\}$.

On peut les organiser dans un tableau infini :

	$q = 1$	$q = 2$	$q = 3$	$q = 4$	$\ldots$
$p = 1$	$1/1$	$1/2$	$1/3$	$1/4$	$\ldots$
$p = 2$	$2/1$	$2/2$	$2/3$	$2/4$	$\ldots$
$p = 3$	$3/1$	$3/2$	$3/3$	$3/4$	$\ldots$
$p = 4$	$4/1$	$4/2$	$4/3$	$4/4$	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Ensuite, on parcourt ce tableau en diagonale (méthode de Cantor) :

$$1/1, 1/2, 2/1, 3/1, 2/2, 1/3, 1/4, 2/3, 3/2, 4/1, \ldots$$

En ne gardant que les fractions irréductibles, on obtient une énumération de tous les rationnels positifs.

Enfin, en intercalant les rationnels positifs et négatifs :

$$0, 1, -1, 1/2, -1/2, 2, -2, 1/3, -1/3, \ldots$$

On obtient ainsi une bijection entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{N}$, ce qui montre que $\mathbb{Q}$ est dénombrable. $\square$

Remarque 1.1. *Bien que $\mathbb{Q}$ soit dense dans $\mathbb{R}$, il reste dénombrable, contrairement à $\mathbb{R}$ qui est non dénombrable.*

1.3 Non-dénombrabilité de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

Théorème 1.3 (Cantor). *L'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, noté $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, n'est pas dénombrable.*

Proof. Supposons par l'absurde que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ soit dénombrable. Alors il existerait une énumération :

$$S_1, S_2, S_3, \ldots$$

de toutes les parties de $\mathbb{N}$.

On construit la partie suivante :

$$D = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin S_n\}.$$

Par construction, D diffère de chaque S_n en au moins un élément : - si $n \in D$, alors $n \notin S_n$, donc $D \neq S_n$ - si $n \notin D$, alors $n \in S_n$, donc $D \neq S_n$

Ainsi, D n'est dans aucune position de l'énumération, ce qui est une contradiction.

Donc $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable. □

Remarque 1.2. *Ceci montre que l'infini des parties de $\mathbb{N}$ est « plus grand » que l'infini de $\mathbb{N}$ lui-même.*