

Un exemple de réduction de Jordan à l'aide des tableaux de Young

Théo Lo Presti

Novembre 2025

Considérons la matrice $A \in \mathcal{M}_6(\mathbb{C})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Remarquons immédiatement que $\chi_M(X) = (X + 1)(X - 2)^5$. De fait ,

$$\dim(\ker(A + I_6))=1 \text{ et } \ker(A + I_6) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}(e_1).$$

On dispose ainsi du premier bloc de Jordan donné par la matrice de taille 1 : (-1) .
Intéressons nous maintenant à la valeur propre 2 . On a alors après quelques calculs pas très fastidieux :

$$\ker(A - 2I_6) = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^6 \mid x_3 = x_6 = 0, x_5 = x_1 - x_2 \right\}$$

et

$$\ker((A - 2I_6)^2) = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^6 \mid x_3 = x_6 \right\}$$

Ainsi $\dim(\ker(A - 2I_6))= 3$ et $\dim(\ker((A - 2I_6)^2))= 5$. Puisque $m_a(2) = 5$, on a¹ $\dim(F_2(A))= 5$.

1. $F_\lambda(A)$ est le sous espace caractéristique de A défini par $\bigcup_{n \geq 0} \text{Ker}((A - \lambda Id)^n)$

On peut alors représenter l'endomorphisme induit par $F_5(A)$ avec le *tableau de Young* suivant :

e_5	e_6
e_3	e_4
e_2	

La première colonne nous donne en effet la dimension de $\ker(M - 2I_6)$ qui est bien 3 comme escompté . La somme des deux colonnes nous donne bien la dimension de $\ker(M - 2I_6)^2 = F_2(A) = 5$.

De plus la lecture des lignes nous donne une autre information très intéressante . En effet , la première ligne nous indique que le premier bloc de Jordan associé est la matrice de taille $1 : (2)^2$. La deuxième et troisième ligne nous indique les deux autres blocs de Jordan de la forme :

$$J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour être plus précis , la taille de la $i^{\text{ème}}$ colonne nous indique la dimension du $i^{\text{ème}}$ bloc de Jordan associée à la valeur propre 2 .

Ainsi la matrice de l'endomorphisme induit par $F_5(A)$ a pour matrice dans la base $(e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$ ³ la matrice :

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Et finalement dans la base $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$ la matrice A est de la forme :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Bien évidemment , il faut ensuite calculer la base $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$. Ceci n'est pas très compliqué et ce fait de manière algorithmique :

Les vecteurs e_6 et e_4 doivent être une base de F où F est le sous espace tel que

$$\ker((M - 2I_6)^2) = F \oplus \ker(M - 2I_6)$$

On vérifie alors facilement que les vecteurs

$$e_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. En effet , cela correspond à la valeur propre 2

3. Ce recollement de base est licite étant donné que tout endomorphisme de \mathbb{C}^6 est trigonalisable et que pour de tels endomorphismes f on a la décomposition suivante : $\mathbb{C}^6 = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} F_\lambda(f)$

conviennent . Après quelques calculs , on obtient ensuite :

$$e_5 = (A - 2I_6)e_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$e_3 = (A - 2I_6)e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Enfin on complète la famille libre (e_3, e_5) en une base de $\text{Ker}(A - 2I_6)$ en prenant $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

On peut vérifier avec *Python* ou *Magma*⁴ que dans la base $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$, on a bien

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4. car on a déjà bien travaillé !

La réduction de Jordan est utile dans la mesure où il est ensuite aisé de calculer des puissances successives de matrices sous cette forme . En effet chaque blocs de jordan s'écrit $J = \lambda I_n + N$ où N est de la forme :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Disons par exemple que N est nilpotente d'ordre p . Ainsi d'après la formule du binôme , il vient que

$$J^n = \sum_{i=0}^{p-1} \binom{n}{i} \lambda^{n-i} N^i.$$

et ainsi

$$J^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & \binom{n}{1} \lambda^{n-1} & \cdots & \binom{n}{p-1} \lambda^{n-p+1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \binom{n}{1} \lambda^{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

On peut alors réussir , même si cela demande un peu plus de travail que dans le cas diagonalisable , à résoudre des problème de suites récurrentes linéaires ou de systèmes d'équations différentielles linéaires .