Développements limités

Théo Lo Presti

Septembre 2025

1 Les développements limités usuels en 0

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$
$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$
$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})$
$\forall \alpha \in \mathbb{R}\,, (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2.4}x^2 + \frac{1.3}{2.4.6}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1.3\cdots(2n-3)}{2.4\cdots(2n)}x^n + o(x^n)$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$

Chaque développement limité , même plus difficile s'obtient à l'aide des précédent (notamment par produit , composition , quotient , ou même dérivation et intégration terme à terme...).
Bien sûr il n'est pas nécessaire de les connaître par coeur mais il faut savoir les retrouver rapidement à l'aide de la formule de *Taylor Young* ;

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

2 Les utilisations pratiques des DL

2.1 Limites et DL

La première utilité des DL vient de l'étude de limite , en un point ou en l'infini . En effet , les DL nous permettent souvent d'obtenir des équivalents simples au voisinage désiré , comme en témoigne l'exemple ci-après.

$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\tan x - x}{\sin x - x} = -2$

Démonstration. Une observation rapide nous amène à la forme indéterminée "$\frac{0}{0}$". Cependant , les DL usuels donnent :

$$\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3) \sim -\frac{x^3}{6} \text{ et } \tan x - x = \frac{x^3}{3} + o(x^3) \ \sim \frac{x^3}{3}$$

Et on en déduit par compatibilité des équivalents avec les quotient que :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\tan x - x}{\sin x - x} = -2$$

□

2.2 Tangente en un point et position relative

Dans l'optique de l'étude locale de fonction f, il est assez facile à l'aide des DL , d'obtenir la tangente de la courbe représentative C_f au voisinage d'une point , et même d'établir la position relative entre C_f et celle-ci .

En pratique :
Pour trouver la tangente en $(a, f(a))$ à la courbe représentative $y = f(x)$, on calcule le développement limité à l'ordre 1 de f en a :

$$f(a + h) = a_0 + a_1 h + o(h).$$

Alors la droite $y = a_0 + a_1 x$ est la tangente à la courbe en $(a, f(a))$.

Pour étudier (localement) la position de la courbe par rapport à la tangente, on calcule le développement limité à un ordre supérieur, jusqu'à avoir un terme non nul :

$$f(a + h) = a_0 + a_1 h + a_p h^p + o(h^p), \quad a_p \neq 0.$$

— Si p est pair, la courbe reste (localement) toujours du même côté de la tangente : elle est au-dessus de la tangente si $a_p > 0$, en dessous si $a_p < 0$.
— Si p est impair, la tangente traverse la courbe au point $(a, f(a))$.