$\mathbb{C}$ommutateur et diagonalisabilité

On considère le *le commutateur* , défini pout tout $M \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ par $com_A(M) = AM - MA$. C'est bien sûr un endomorphisme . On va montrer le résultat suivant

> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
> Si com_A est diagonalisable alors A l'est aussi .

Démonstration. Considérons $A = D + N$ la décomposition de Dunford de la martice A. Après un petit calcul il vient que

$$com_A = com_D + com_N$$

Montrons d'abord que com_D est diagonalisable et que com_N est nilpotent . Soit $A \in M_n(K)$ diagonalisable. Il existe $P \in GL_n(K)$ et une matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

Considérons l'application linéaire $\Phi : \mathcal{M}_n(K) \to \mathcal{M}_n(K)$ donnée par $\Phi(M) = P^{-1}MP$. C'est un automorphisme . On vérifie la conjugaison du commutateur :

$$\Phi\big(\mathrm{com}_A(M)\big) = \Phi(AM - MA)$$

$$= P^{-1}AMP - P^{-1}MAP$$

$$= (P^{-1}AP)(P^{-1}MP) - (P^{-1}MP)(P^{-1}AP)$$

$$= \mathrm{com}_D\big(\Phi(M)\big)$$

Ainsi com_A est semblable à com_D. La propriété d'être diagonalisable est conservée par conjugaison, donc il suffit de montrer que com_D est diagonalisable.

Soit E_{ij} la matrice élémentaire (1 en position (i, j), 0 ailleurs). Pour la matrice diagonale D on a

$$\mathrm{com}_D(E_{ij}) = DE_{ij} - E_{ij}D = d_iE_{ij} - d_jE_{ij} = (d_i - d_j)E_{ij}.$$

Donc chaque E_{ij} est un vecteur propre de com_D de valeur propre $d_i - d_j$. Les n^2 matrices E_{ij} forment une base de $\mathcal{M}_n(K)$, donc com_D est diagonalisable (base de vecteurs propres) et par conséquent com_A est diagonalisable.

Supposons maintenant $N \in M_n(K)$ nilpotente d'indice k, c.-à-d. $N^k = 0$ et $N^{k-1} \neq 0$ (ou au moins $N^k = 0$).
On montre facilement par récurrence en utilisant $\mathrm{com}_N^{t+1}(M) = \mathrm{com}_N\left(\mathrm{com}_N^t(M)\right)$ et l'identité de Pascal pour les coefficients binomiaux que

$$\mathrm{com}_N^t(M) = \sum_{p=0}^{t} (-1)^{t-p} \binom{t}{p} N^p M N^{t-p}, \qquad t \geq 0.$$

Maintenant, si $t \geq 2k-1$, alors pour tout $p \in \{0, \ldots, t\}$ on a soit $p \geq k$ soit $t - p \geq k$ (puisque $p + (t-p) = t \geq 2k-1$). Dans ces deux cas la puissance correspondante de N est nulle, donc chaque terme de la somme est nul. Il s'ensuit que $\mathrm{com}_N^t(M) = 0$ pour tout M dès que $t \geq 2k-1$. En particulier com_N est nilpotente et

$$\mathrm{com}_N^{2k-1} = 0.$$

Ainsi l'indice de nilpotence de com_N est au plus $2k-1$.

De fait , si com_D et com_N commutent , on disposera de la décomposition de Dunford de com_A.
Or ;

$$\begin{aligned} com_D \circ com_N(M) = com_D(NM - MN) &= D(NM - MN) - (NM - MN)D \\ &= DNM - DMN - NMD - MDN \end{aligned}$$

et de la même manière :

$$com_N \circ com_D(M) = DNM - DMN - NMD - MDN$$

Ainsi, com_D et com_N commutent et on dispose de la décomposition de Dunford de com_A.
e plus , puisque par hypothèse , com_A est diagonalisable , on en déduit que $com_N = 0_n$.
De fait , $N = \lambda I_n$ (En effet , son commutateur est nul donc elle commute avec toutes les matrices et les seuls matrices de ce type sont les matrices d'homothétie i.e de la forme λI_n) .

Or , N est nilpotente donc N est la matrice nulle et on obtient finalement :

$$A = D$$

c'est-à-dire , A est diagonalisable . $\square$