**Exercice.** Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension 2 et $u \in L(E)$ un endomorphisme tel que

$$u^2 = -\mathrm{id}_E.$$

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Correction.**
Choisissons un vecteur $e_1 \in E$, $e_1 \neq 0$, et posons

$$e_2 = u(e_1).$$

Nous allons montrer que $(e_1, e_2)$ est une base de $E$. Supposons que $\lambda e_1 + \mu e_2 = 0$ pour certains scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lambda e_1 + \mu u(e_1) = 0.$$

En appliquant $u$ à cette relation, on obtient

$$\lambda u(e_1) + \mu u^2(e_1) = \lambda e_2 - \mu e_1 = 0.$$

On obtient donc le système

$$\begin{cases} \lambda e_1 + \mu e_2 = 0 \\ -\mu e_1 + \lambda e_2 = 0 \end{cases}.$$

Comme $e_1 \neq 0$, la seule solution est $\lambda = \mu = 0$. Donc $(e_1, e_2)$ est une base de $E$.

Dans la base $(e_1, e_2)$ :

$$u(e_1) = e_2, \quad u(e_2) = u(u(e_1)) = u^2(e_1) = -e_1.$$

Ainsi, la matrice de $u$ dans cette base est

$$\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Conclusion.** Il existe donc bien une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de $E$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**Un autre exercice**
Soit $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in L(E)$. On suppose qu'il existe $\lambda \neq \mu \in K$ tels que

$$(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) \circ (u - \mu\,\mathrm{id}_E) = 0_{L(E)}.$$

1. Montrer que

$$\ker(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) \oplus \ker(u - \mu\,\mathrm{id}_E) = E.$$

2. Montrer qu'il existe une base de $E$ dans laquelle $u$ s'écrit

$$\mathrm{diag}(\underbrace{\lambda, \dots, \lambda}_{k \text{ fois}}, \underbrace{\mu, \dots, \mu}_{n-k \text{ fois}}),$$

pour un certain entier $k$.

**Correction.**
**1. Décomposition en somme directe.**
Soit $x \in E$. Alors

$$(u - \lambda\,\mathrm{id}) \circ (u - \mu\,\mathrm{id})(x) = 0.$$

Posons
$$y = (u - \mu\,\mathrm{id})(x) \in E.$$
Alors $(u - \lambda\,\mathrm{id})(y) = 0$, donc $y \in \ker(u - \lambda\,\mathrm{id})$. De plus, on a

$$x = (x - y) + y \quad \text{avec} \quad x - y = x - (u - \mu)(x) = \mu x - u(x) \in \ker(u - \mu\,\mathrm{id}).$$

Ainsi, tout $x \in E$ s'écrit comme une somme

$$x = y_\lambda + y_\mu, \quad y_\lambda \in \ker(u - \lambda\,\mathrm{id}),\ y_\mu \in \ker(u - \mu\,\mathrm{id}),$$

ce qui montre que

$$E = \ker(u - \lambda\,\mathrm{id}) + \ker(u - \mu\,\mathrm{id}).$$

Pour montrer que la somme est directe, supposons que $x \in \ker(u - \lambda\,\mathrm{id}) \cap \ker(u - \mu\,\mathrm{id})$. Alors

$$u(x) = \lambda x = \mu x \implies (\lambda - \mu)x = 0 \implies x = 0$$

(car $\lambda \neq \mu$).

Donc la somme est bien directe :

$$E = \ker(u - \lambda\,\mathrm{id}) \oplus \ker(u - \mu\,\mathrm{id}).$$

**2. Matrice diagonale.**

Comme $E$ est la somme directe de $\ker(u - \lambda\,\mathrm{id})$ et $\ker(u - \mu\,\mathrm{id})$, choisissons une base de chaque noyau :

$$\mathcal{B}_\lambda \text{ base de } \ker(u - \lambda\,\mathrm{id}), \quad \mathcal{B}_\mu \text{ base de } \ker(u - \mu\,\mathrm{id}).$$

Alors la base union

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_\lambda \cup \mathcal{B}_\mu$$

est une base de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ est diagonale :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda, \dots, \lambda}_{\dim\ker(u-\lambda)}, \underbrace{\mu, \dots, \mu}_{\dim\ker(u-\mu)}).$$

***Remarque :*** *J'utilise ici uniquement des outils élémentaires d'algèbre linéaires mais on aurait bien sûr pu utilser le lemme des noyaux qui nous aurait largement facilité la tâche !*

**Projecteur et trace**
Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$.

1. On définit la trace de $f$ comme
$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)),$$
où $\mathcal{B}$ est une base de $E$. Montrer que cette quantité est bien définie, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$.

2. Soit $\pi \in L(E)$ un projecteur ($\pi^2 = \pi$).
   (a) En travaillant avec une base adaptée, déterminer $\mathrm{tr}(\pi)$.
   (b) Montrer que si $M \in M_n(K)$ est telle que $M^2 = M$, alors $\mathrm{tr}(M) \in \mathbb{N}$.

**Correction.**
**1. Indépendance de la base.**
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $E$ et soit $P$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\,P.$$
Or, pour toute matrice $A$ et tout $P$ inversible, $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$. Donc $\mathrm{tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)) = \mathrm{tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$, ce qui montre que $\mathrm{tr}(f)$ est bien définie.

**2(a). Trace d'un projecteur.**
Soit $\pi \in L(E)$ avec $\pi^2 = \pi$. Considérons la décomposition de $E$ :
$$E = \ker(\pi) \oplus \mathrm{Im}(\pi).$$
Choisissons une base adaptée : une base de $\ker(\pi)$ suivie d'une base de $\mathrm{Im}(\pi)$. Dans cette base, la matrice de $\pi$ est diagonale :
$$\mathrm{Mat}(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_r \end{pmatrix},$$
où $r = \dim(\mathrm{Im}(\pi))$. Ainsi,
$$\mathrm{tr}(\pi) = r = \dim(\mathrm{Im}(\pi)).$$

**2(b). Trace d'une matrice idempotente.**

Si $M \in M_n(K)$ et $M^2 = M$, alors $M$ est un projecteur sur $K^n$. D'après le résultat précédent,

$$\mathrm{tr}(M) = \dim(\mathrm{Im}(M)) \in \mathbb{N}.$$