Exercice. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 > 0, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}.$$

Donner un équivalent de la suite.

Corrigé.

1. Montrons que la suite diverge.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante : en effet, pour tout $n \geqslant 0$, $u_n > 0$ donc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0.$$

Supposons par l'absurde que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $L \in \mathbb{R}$. Alors, en passant à la limite dans la récurrence, on aurait

$$L = L + \frac{1}{L} \implies \frac{1}{L} = 0,$$

ce qui est impossible. Donc $u_n \to +\infty$.

2. Étude de la croissance et équivalent.

Considérons le carré de la suite :

$$u_{n+1}^2 = \left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)^2 = u_n^2 + 2 + \frac{1}{u_n^2}.$$

Ainsi, on a

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 = 2 + \frac{1}{u_n^2}.$$

Comme $u_n \to +\infty$, le terme $\frac{1}{u_n^2} \to 0$, donc

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 \sim 2.$$

3. Application du théorème de Césaro.

Si une suite a_n vérifie $a_{n+1} - a_n \to \ell$, alors $a_n \sim n\ell$. .

Ici, $a_n = u_n^2$ et $a_{n+1} - a_n \sim 2$. Donc, par le théorème de Césaro :

$$u_n^2 \sim 2n \implies u_n \sim \sqrt{2n}.$$

Conclusion.
Un équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

$$\boxed{u_n \sim \sqrt{2n}}.$$