Exercice — Variables aléatoires discrètes : maximum et minimum.

Soit un entier $n > 2$ et deux variables aléatoires indépendantes X, Y suivant la loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$, notée $U(\{1, \dots, n\})$. On définit :

$$N = \min(X, Y) \qquad \text{et} \qquad M = \max(X, Y).$$

1. Calculer, pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}(M \leqslant k)$.
2. En déduire la loi de M ainsi que son espérance $\mathbb{E}(M)$.
3. En utilisant la linéarité de l'espérance, déterminer $\mathbb{E}(N)$.
4. Retrouver $\mathbb{E}(N)$ à l'aide de la formule
$$\mathbb{E}(N) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N \geqslant k).$$
5. Calculer la variance $\mathrm{Var}(M)$.

Correction :

1) Calcul de $\mathbb{P}(M \leqslant k)$

Rappel : $M = \max(X, Y)$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\{M \leqslant k\} = \{\max(X, Y) \leqslant k\} = \{X \leqslant k\} \cap \{Y \leqslant k\},$$

car le maximum est $\leqslant k$ si et seulement si *les deux* coordonnées sont $\leqslant k$.

Pour $k < 1$ on a $\mathbb{P}(M \leqslant k) = 0$. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, comme X et Y sont indépendantes et uniformes sur $\{1, \dots, n\}$,

$$\mathbb{P}(X \leqslant k) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X = k) = \frac{k}{n}, \qquad \mathbb{P}(M \leqslant k) = \mathbb{P}(X \leqslant k)\mathbb{P}(Y \leqslant k) = \left(\frac{k}{n}\right)^2.$$

Pour $k \geqslant n$, $\mathbb{P}(M \leqslant k) = 1$.

2) Loi de M et calcul de $\mathbb{E}(M)$

Pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathbb{P}(M = k) = \mathbb{P}(M \leqslant k) - \mathbb{P}(M \leqslant k - 1) = \frac{k^2 - (k-1)^2}{n^2} = \frac{2k - 1}{n^2}.$$

Vérification rapide : $\sum_{k=1}^{n}(2k - 1) = n^2$, donc la loi est bien normalisée.

L'espérance est

$$\mathbb{E}(M) = \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(M=k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k(2k-1) = \frac{1}{n^2}\Big(2\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k\Big).$$

En utilisant $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, on obtient après simplification

$$\boxed{\mathbb{E}(M) = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}}.$$

3) Calcul de $\mathbb{E}(N)$ par linéarité

On utilise l'identité évidente (pour chaque réalisation) :

$$X + Y = N + M.$$

Donc en prenant l'espérance :

$$\mathbb{E}(N) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(M).$$

Or $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \frac{n+1}{2}$. D'où

$$\mathbb{E}(N) = (n+1) - \frac{(n+1)(4n-1)}{6n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}.$$

On a donc

$$\boxed{\mathbb{E}(N) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}}.$$

4) Méthode alternative pour le calcul de $\mathbb{E}(N)$

On utilise la formule générale pour une variable à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$:

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N \geqslant k).$$

Or

$$\{N \geqslant k\} = \{\min(X,Y) \geqslant k\} = \{X \geqslant k\} \cap \{Y \geqslant k\},$$

donc, par indépendance,

$$\mathbb{P}(N \geqslant k) = \mathbb{P}(X \geqslant k)^2 = \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2.$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n},$$

ce qui retrouve la valeur trouvée en 3).

5) Calcul de $\mathrm{Var}(M)$

On commence par calculer $\mathbb{E}(M^2)$:

$$\mathbb{E}(M^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \mathbb{P}(M = k) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^2(2k-1) = \frac{1}{n^2}\Big(2\sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} k^2\Big).$$

En utilisant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ et la formule pour $\sum k^2$, on obtient

$$\mathbb{E}(M^2) = \frac{(n+1)(3n^2+n-1)}{6n}.$$

La variance est alors , d'après la formule de König-Huygens :

$$\mathrm{Var}(M) = \mathbb{E}(M^2) - \big(\mathbb{E}(M)\big)^2 = \frac{(n+1)(3n^2+n-1)}{6n} - \left(\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}\right)^2.$$

Après simplification on peut écrire :

$$\boxed{\mathrm{Var}(M) = \frac{2n^4 - n^2 - 1}{36\,n^2}.}$$