On va montrer le résultat suivant :

Soit $X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ on a $\forall p \geq 1$ :

$$||X||_\infty \leq ||X||_p \leq n^{1/p}||X||_\infty$$

*Proof.* Pour $i \in \{1, ..., n\}$ ,

$$|x_i| = (|x_i|)^{1/p} \leq (|x_1|^p + ... + |x_n|^p)^{1/p} = ||X||_p$$

Ainsi

$$\max_{i \in [\![1,n]\!]}|x_i| \leq ||X||_p$$

D'où

$$||X||_\infty \leq ||X||_p$$

De plus notons $m = \max_{i \in [\![1,n]\!]}|x_i|$ . Alors , il vient que :

$$||X||_p = (|x_1|^p + ... + |x_n|^p)^{1/p} \leq (n|x_m|^p)^{1/p} = n^{1/p}|x_m| = n^{1/p}||X||_\infty$$

D'où le résultat . $\square$

On a en fait montré que les normes $||.||_\infty$ et $||.||_p$ sont équivalentes dans $\mathbb{K}^n$.