

Filtrage de Kalman

Valentin SIX
Théo NIEMANN

26 décembre 2023

1 Interprétation

En regardant la matrice F_k : 1 multiplie la position p_x et la vitesse \dot{p}_x est multipliée par T_e qui constitue le delta élémentaire du chemin parcouru par l'avion auquel on ajoute un bruit gaussien U_k de moyenne nulle (terme d'erreur).

2 Préliminaires

Question 1

On cherche à exprimer $m_{t+1|t+1}$ et $P_{t+1|t+1}$ en fonction de $m_{t|t}$ et $P_{t|t}$.

Intéressons nous d'abord à $p(x_{t+1}|y_{0:t+1})$, on a :

$$\begin{aligned} p(x_{t+1}|y_{0:t+1}) &= p(x_{t+1}|y_{0:t}, y_{t+1}) \\ &= p(y_{t+1}|x_{t+1}, y_{0:t})p(x_{t+1}|y_{0:t}) \\ &= \frac{p(x_{t+1}|y_{0:t})p(y_{t+1}|x_{t+1})}{p(y_{t+1}|y_{0:t})} \quad \text{car } y_{t+1} \text{ ne dépend pas de } y_{0:t} \\ &= \frac{p(x_{t+1}|y_{0:t})p(y_{t+1}|x_{t+1})}{\int p(y_{t+1}|x_{t+1})p(x_{t+1}|y_{0:t})dx_{t+1}} \quad (1) \\ &= \frac{p(x_{t+1}|y_{0:t})p(y_{t+1}|x_{t+1})}{\int N dx_{t+1}} \quad \text{où } N \text{ est le numérateur} \end{aligned}$$

Concentrons nous d'abord sur le terme $p(x_{t+1}|y_{0:t})$.

$$\begin{aligned} p(x_{t+1}|y_{0:t}) &= \int p(x_{t+1}, x_t|y_{0:t})dx_t \\ &= \int p(x_{t+1}|y_{0:t}, x_t)p(x_t|y_{0:t})dx_t \quad \text{par la formule de Bayes} \\ &= \int p(x_{t+1}|x_t)p(x_t|y_{0:t})dx_t \quad \text{car } x_{t+1} \text{ ne dépend pas de } y_{0:t} \\ &= \int \mathcal{N}(x_{t+1}|Fx_t, Q)\mathcal{N}(x_t; m_{t|t}, P_{t|t})dx_t \\ &= \int \mathcal{N}(x_{t+1}; m_{t+1|t}, P_{t+1|t})dx_t \quad \text{avec } m_{t+1|t} = Fm_{t|t} \text{ et } P_{t+1|t} = Q + FP_{t|t}F^T \end{aligned}$$

Pour trouver $m_{t+1|t}$ et $P_{t+1|t}$, on a utilisé la formule suivante :

$$\int \mathcal{N}(y; Ax + b, L)\mathcal{N}(x; \mu, G)dx = \mathcal{N}(y; A\mu + b, L + AGA^T) \quad (*)$$

avec $y = x_{t+1}$, $Ax = Fx_t$, $L = Q$, $x = x_t$, $\mu = m_{t|t}$ et $G = P_{t|t}$

À présent, on revient à (1) en sachant que $p(y_{t+1}|x_{t+1}) = \mathcal{N}(y_{t+1}|Hx_{t+1}, R)$ On a :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\int \mathcal{N}(y_{t+1}; Hx_{t+1}, R) \mathcal{N}(x_{t+1}|m_{t+1|t}, P_{t+1|t}) dx_{t+1}}{\int N dx_{t+1}}$$

On utilise à présent une autre identité gaussienne :

$$\mathcal{N}(y; Hx, R) \mathcal{N}(x; m, p) = q(y) \mathcal{N}(x; \hat{m}, \hat{P}) \quad (**)$$

$$\text{où } \hat{m} = m + K(y - Hm), \hat{P} = (I - KH)P \text{ et } K = PH^T(HPH^T + R)^{-1}$$

On obtient alors pour notre problème :

$$\mathcal{N}(y_{t+1}; Hx_{t+1}, R) \mathcal{N}(x_{t+1}; m_{t+1|t}, P_{t+1|t}) = q(y_{t+1}) \mathcal{N}(x_{t+1}; m_{t+1|t+1}, P_{t+1|t+1})$$

$$\text{avec } m_{t+1|t+1} = m_{t+1|t} + K(y_{t+1} - Hm_{t+1|t}), K = P_{t+1|t}H^T(HP_{t+1|t}H^T + R)^{-1}$$

$$\text{et } P_{t+1|t+1} = (I - KH)P_{t+1|t}$$

Démonstration de ():**

On admet que les matrices $P, (H^T R^{-1} H + P^{-1})$ sont inversibles pour cette démonstration

On a $\mathcal{N}(y; Hx, R) \mathcal{N}(x; m, P)$ qui s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k_y} |R|}} e^{-\frac{1}{2}(y-Hx)^T R^{-1}(y-Hx)} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k_x} |P|}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)^T P^{-1}(x-m)}$$

Intéressons nous au terme dans l'exponentielle, on a :

$$-\frac{1}{2}(y-Hx)^T R^{-1}(y-Hx) - \frac{1}{2}(x-m)^T P^{-1}(x-m)$$

en développant, on obtient :

$$-\frac{1}{2}y^T R^{-1}y + y^T R^{-1}Hx - \frac{1}{2}x^T H^T R^{-1}Hx - \frac{1}{2}x^T P^{-1}x + x^T P^{-1}m - \frac{1}{2}m^T P^{-1}m$$

Arrangeons l'expression :

1. Termes en x :

$$-\frac{1}{2}x^T (H^T R^{-1}H + P^{-1})x + x^T (H^T R^{-1}y + P^{-1}m)$$

Pour simplifier ces termes, nous souhaitons qu'elle prenne la forme :

$$-\frac{1}{2}(x - \mu)^T \Sigma^{-1}(x - \mu)$$

où Σ est la matrice de covariance et μ est la moyenne.

2. Termes indépendants de x : ils constituent une certaine fonction $q(y)$

On veut compléter le carré pour faire apparaître une $\mathcal{N}(y; \hat{m}, \hat{P})$.

On a par identification de la forme quadratique et du terme linéaire en x :

$$\begin{aligned}\Sigma^{-1} &= (H^T R^{-1} H + P^{-1}) \\ \mu &= \Sigma(H^T R^{-1} y + P^{-1} m)\end{aligned}$$

On pose à présent :

$$K = PH^T (HPH^T + R)^{-1}$$

Pour pouvoir aboutir à nos formes voulues, nous devons utiliser le complément de Schur, dont voici une démonstration

Démonstration Complément de Schur

Soit M une matrice $n \times n$ réécrit en matrice bloc 2×2 , on a :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

où A est de taille $p \times p$ et D est de taille $q \times q$, avec $n = p + q$ (donc, B est de taille $p \times q$ et C est de taille $q \times p$). On va chercher à inverser cette matrice. Pour cela, on résout le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},$$

ie

$$\begin{aligned}Ax + By &= c, \\ Cx + Dy &= d,\end{aligned}$$

En supposant que D est inversible on résout d'abord pour y , on a :

$$y = D^{-1}(d - Cx)$$

en substituant y dans la première équation, il vient :

$$Ax + B(D^{-1}(d - Cx)) = c,$$

c'est-à-dire,

$$(A - BD^{-1}C)x = c - BD^{-1}d.$$

En supposant que la matrice $A - BD^{-1}C$ est inversible, on obtient la solution de notre système :

$$\begin{aligned}x &= (A - BD^{-1}C)^{-1}(c - BD^{-1}d) \\ y &= D^{-1}(d - C(A - BD^{-1}C)^{-1}(c - BD^{-1}d)).\end{aligned}$$

Ces équations permettent de trouver une formule pour l'inverse de M dans le sens du complément de Schur en M , soit :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \end{pmatrix}.$$

On peut alors se rendre compte que :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -BD^{-1} \\ -D^{-1}C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix},$$

et alors :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ D^{-1}C & I \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors immédiatement que :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ D^{-1}C & I \end{pmatrix}.$$

Cette expression a pour avantage de ne demander que l'inversibilité de D .

Remarque : Si A est inversible alors on peut utiliser le complément de Schur $D - CA^{-1}B$, de A pour obtenir la factorisation de M suivante :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Si $D - CA^{-1}B$ est inversible, on peut inverser les trois matrices ci-dessus et aboutir à une autre formule pour l'inverse de M par rapport $(D - CA^{-1}B)$, soit,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Par unicité de l'inversion matricielle, on a l'égalité des blocs matriciels. L'égalité qui nous intéresse est la suivante :

$$(A + BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} = A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \quad (i)$$

À présent, nous pouvons utiliser ces formules d'inversion pour trouver les expressions de Σ et μ
On a :

$$K = PH^T(HPH^T + R)^{-1}$$

soit

$$K = (H^T R^{-1} H + P^{-1})^{-1} H^T R^{-1}$$

La deuxième égalité provient de la formule d'inversion découlant du complément de Schur (i) :
avec $A^{-1} = P, B = H^T, C = H$ et $D = R$

On reconnaît alors Σ et on a :

$$\begin{aligned} K &= \Sigma H^T R^{-1} \\ KH &= \Sigma H^T R^{-1} H && \text{or } H^T R^{-1} H = (\Sigma^{-1} - P^{-1}) \\ KH &= \Sigma(\Sigma^{-1} - P^{-1}) \\ KH &= I - \Sigma P^{-1} \\ \Sigma P^{-1} &= I - KH \\ \Sigma &= (I - KH)P \end{aligned}$$

Comme $\mu = \Sigma(H^T R^{-1} y + P^{-1} m)$, en substituant, on obtient :

$$\begin{aligned} \mu &= \Sigma H^T R^{-1} y + \Sigma P^{-1} m \\ \mu &= Ky + \Sigma P^{-1} m && \text{car on a démontré juste avant que } K = \Sigma H^T R^{-1} \\ \mu &= Ky + (I - KH)PP^{-1}m \\ \mu &= Ky + (I - KH)m \\ \mu &= m + K(y - Hm) \end{aligned}$$

D'où le résultat :

$$\mathcal{N}(y; Hx, R)\mathcal{N}(x; m, P) = q(y)\mathcal{N}(x; \hat{m}, \hat{P})$$

Démonstration de (*) :

On utilise exactement le même principe que pour la première démonstration avec des calculs plus fastidieux, une intégration

$$\int \mathcal{N}(y; Ax + b, L) \mathcal{N}(x; \mu, G) dx$$

se réécrit en :

$$\int \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k_y} |L|}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k_x} |G|}} e^{-\frac{1}{2}((y-(Ax+b))^T L^{-1}(y-(Ax+b)) + (x-\mu)^T G^{-1}(x-\mu))} dx$$

On développe et on sépare à présent les termes en x des termes en y, on a alors au sein de l'exponentielle :

1. Le terme avec L^{-1} est : $(y - (Ax + b))^T L^{-1}(y - (Ax + b))$

En développant on a :

$$y^T L^{-1} y - y^T L^{-1} A x - y^T L^{-1} b - (A x)^T L^{-1} y + (A x)^T L^{-1} A x + (A x)^T L^{-1} b - b^T L^{-1} y + b^T L^{-1} A x + b^T L^{-1} b$$

2. Le terme avec G^{-1} est : $(x - \mu)^T G^{-1}(x - \mu)$

En développant ce terme, on obtient :

$$x^T G^{-1} x - x^T G^{-1} \mu - \mu^T G^{-1} x + \mu^T G^{-1} \mu$$

Nous avons l'expression développée suivante :

$$y^T L^{-1} y - y^T L^{-1} A x - y^T L^{-1} b - x^T A^T L^{-1} y + x^T A^T L^{-1} A x + x^T A^T L^{-1} b - b^T L^{-1} y + b^T L^{-1} A x + b^T L^{-1} b \\ + x^T G^{-1} x - x^T G^{-1} \mu - \mu^T G^{-1} x + \mu^T G^{-1} \mu$$

Maintenant, réorganisons cette expression :

1. Termes Quadratiques en x :

$$x^T A^T L^{-1} A x + x^T G^{-1} x$$

soit encore :

$$x^T (A^T L^{-1} A + G^{-1}) x$$

2. Termes Linéaires en x :

$$-x^T A^T L^{-1} y - x^T G^{-1} \mu + x^T A^T L^{-1} b - y^T L^{-1} A x + b^T L^{-1} A x - \mu^T G^{-1} x$$

soit encore :

$$-x^T (A^T L^{-1} y + G^{-1} \mu - A^T L^{-1} b) - (y^T L^{-1} A - b^T L^{-1} A + \mu^T G^{-1}) x$$

comme les deux expressions sont transposées l'une de l'autre, on a par symétrie du produit scalaire :

$$-2x^T (A^T L^{-1} y + G^{-1} \mu - A^T L^{-1} b)$$

3. Termes Indépendants de x :

$$y^T L^{-1} y - y^T L^{-1} b - b^T L^{-1} y + b^T L^{-1} b + \mu^T G^{-1} \mu$$

Notre expression devient alors :

$$x^T(A^T L^{-1}A + G^{-1})x - 2x^T(A^T L^{-1}y + G^{-1}\mu - A^T L^{-1}b) + \text{termes indépendants de } x$$

Nous devons à présent compléter le carré. Pour le compléter, nous devons réorganiser cette expression pour qu'elle ressemble à la forme $(x - M)^T N^{-1}(x - M)$, où M et N sont des vecteurs/matrices appropriés.

Comme pour la première démonstration, on a par identification :

$$\begin{aligned} N^{-1} &= A^T L^{-1}A + G^{-1} \\ M &= (A^T L^{-1}A + G^{-1})^{-1}(A^T L^{-1}y + G^{-1}\mu - A^T L^{-1}b) \end{aligned}$$

En utilisant à nouveau le complément de Schur, on trouve une expression simplifiée de notre intégrale :

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k_y}|L|}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k_x}|G|}} \int e^{-\frac{1}{2}(x^T N x - 2x^T K + y^T L^{-1}y - y^T L^{-1}b - b^T L^{-1}y + b^T L^{-1}b)} dx$$

où $N = A^T L^{-1}A + G^{-1}$ et $K = A^T L^{-1}y + G^{-1}\mu - A^T L^{-1}b$.

L'intégrale multivariée en x est :

$$\int e^{-\frac{1}{2}(x-M)^T N^{-1}(x-M)} dx = \sqrt{(2\pi)^{k_x}|N|}$$

Ainsi, le terme général n'est composé plus que de termes indépendants de x , soit

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k_y}|L|}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k_x}|G|}} \sqrt{(2\pi)^{k_x}|N|} e^{-\frac{1}{2}y^T L^{-1}y + \frac{1}{2}y^T L^{-1}b + \frac{1}{2}b^T L^{-1}y - \frac{1}{2}b^T L^{-1}b + \frac{1}{2}M^T N M} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k |L + AGA^T|}} e^{-\frac{1}{2}(y - (A\mu + b))^T (L + AGA^T)^{-1} (y - (A\mu + b))} \quad \text{on reconnaît une loi } \mathcal{N}(y; A\mu + b, L + AGA^T) \end{aligned}$$

D'où le résultat :

$$\int \mathcal{N}(y; Ax + b, L) \mathcal{N}(x; \mu, G) dx = \mathcal{N}(y; A\mu + b, L + AGA^T)$$

3 Implémentation Pratique 1 : Poursuite en coordonnées cartésiennes

Question 2 à 10

On cherche à présent à implémenter un filtre de Kalman en utilisant Python.

3.1 Création des positions de la cible et de nos observations

On commence par initialiser certaines variables et définir nos matrices F, Q, R et H puis on va créer une trajectoire aléatoire de la cible, ici un avion. Ensuite, nous allons chercher à approcher ses positions en se basant sur des observations. Ainsi, en créant les observations de l'avion, on va pouvoir les comparer à la trajectoire. Voici nos observations en orange et la trajectoire en bleue :

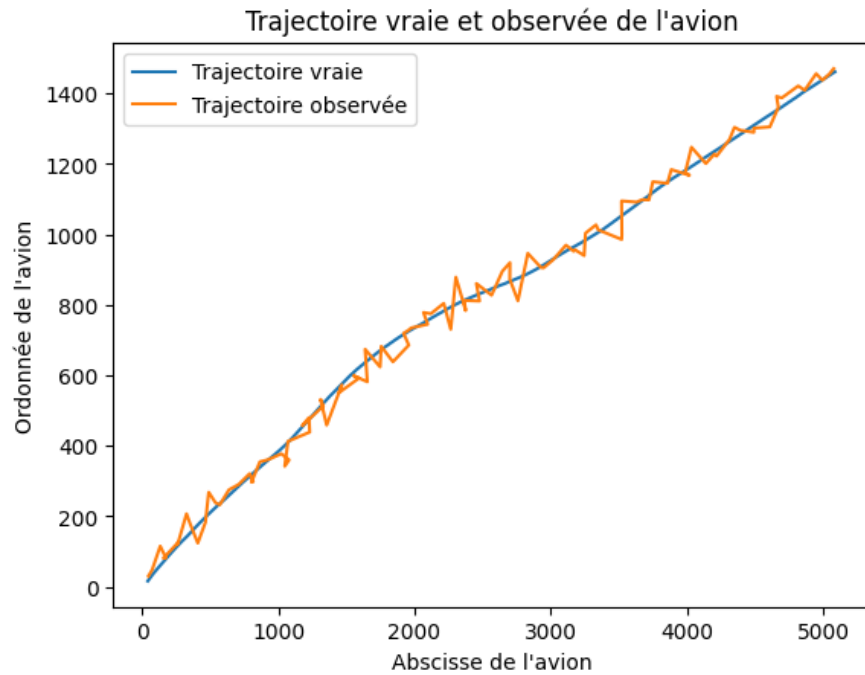


FIGURE 1 – Courbe de nos observations et de la trajectoire.

3.2 Estimation de nos observations par Kalman pour obtenir des positions estimées

Après avoir construit nos observations, on peut construire notre filtre de Kalman afin d'obtenir des positions \hat{x} estimées. Voici la courbe des positions estimées de la cible :

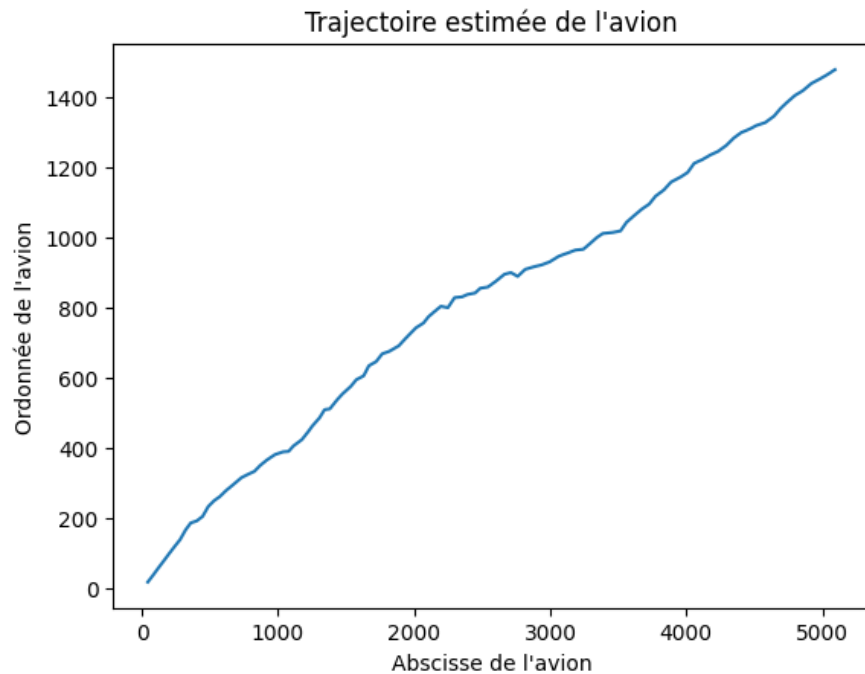


FIGURE 2 – Courbe des positions estimées \hat{x} .

3.3 Comparaison de nos positions estimées

En utilisant l'erreur quadratique moyenne : $EQM(k) = (x_k - \hat{x}_{k|k})^T (x_k - \hat{x}_{k|k})$
et l'erreur moyenne : $Mean_error = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T EQM(k)$
Nous pouvons comparer nos positions estimées \hat{x} des positions réelles. On obtient :

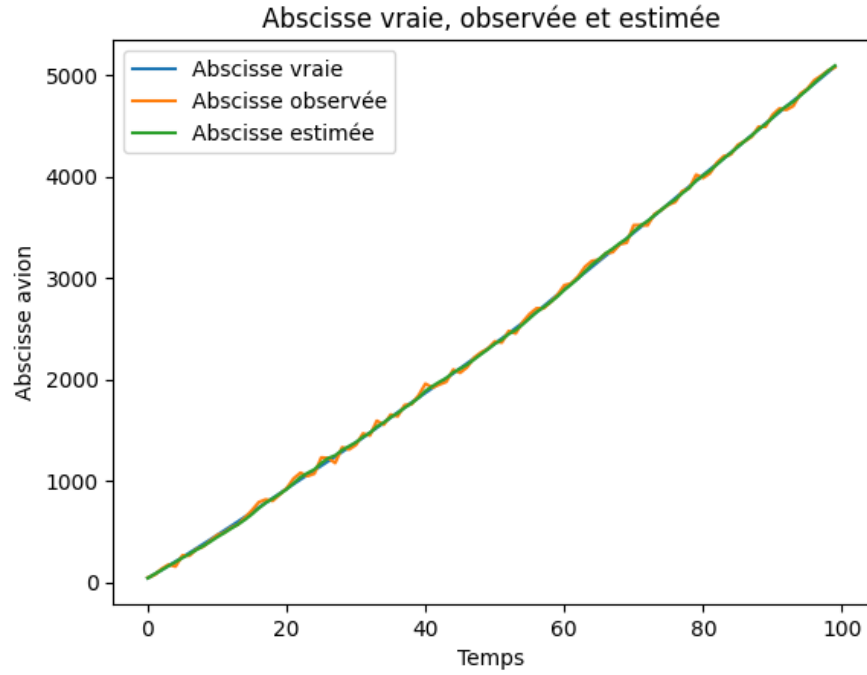


FIGURE 3 – Abscisses estimées

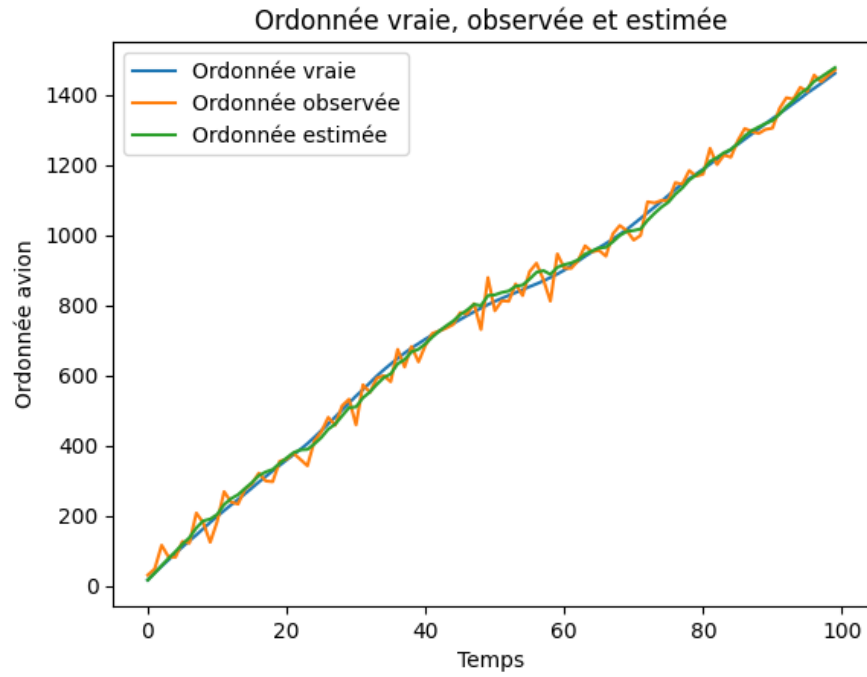
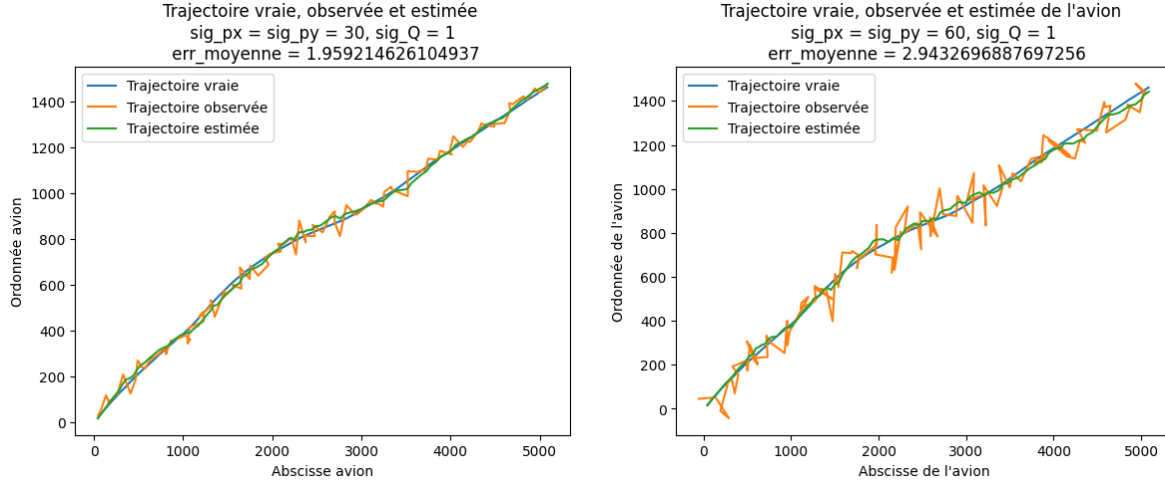


FIGURE 4 – Ordonnées estimées

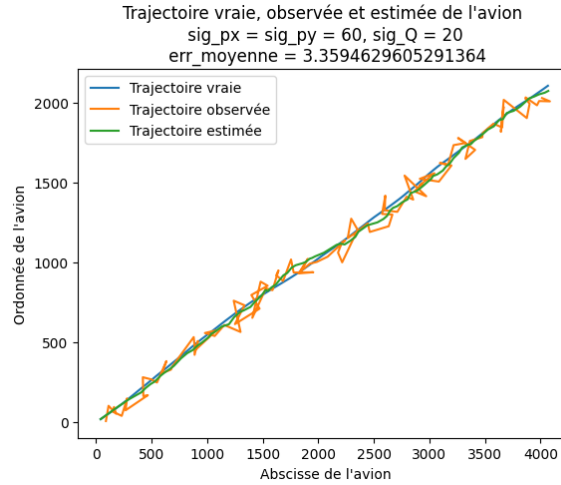
3.4 Comparaison de nos positions lorsque l'on modifie le bruit

On regarde à présent ce qu'il se passe lorsque l'on modifie le bruit du processus σ_q ainsi que le bruit des mesures σ_{p_x} et σ_{p_y} . On remarque alors que plus le bruit des mesures est élevé, moins la trajectoire estimée est précise. Si on ajoute à cela le bruit des mesures, alors nos observations sont encore plus bruitées et donc nos estimations encore moins précises.

Nota Bene : Lorsque l'on parle de précision, c'est au sens de l'erreur moyenne.



(a) Position estimée avec $\sigma_{p_x} = \sigma_{p_y} = 30$ et $\sigma_q = 1$ (b) Position estimée avec $\sigma_{p_x} = \sigma_{p_y} = 60$ et $\sigma_q = 1$



(c) Position estimée avec $\sigma_{p_x} = \sigma_{p_y} = 60$ et $\sigma_q = 20$

3.5 Application

Question 1 à 4

On souhaite à présent étudier des modèles d'avion de ligne d'une part, et d'avion de voltige d'autre part. La différence majeure se situe dans le fait que l'on ne détecte pas l'avion tout le temps, ainsi certaines de ces positions à un instant k sont inconnues (Informatiquement NaN). Regardons alors ce qu'il se passe :

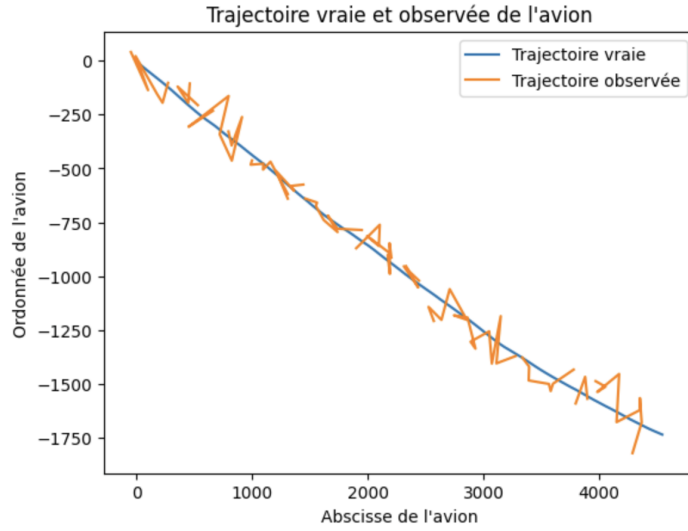


FIGURE 6 – Courbe de nos observations et de la trajectoire

On remarque quelques aberrations ou hallucinations de notre modèle au cours de la trajectoire car les données ne sont pas accessibles et donc la mise à jour des coordonnées se fait lorsqu'elle le peut (pas de NaN). Lorsque l'on rajoute du bruit, on perd encore plus en précision comme le montre la figure 7 :

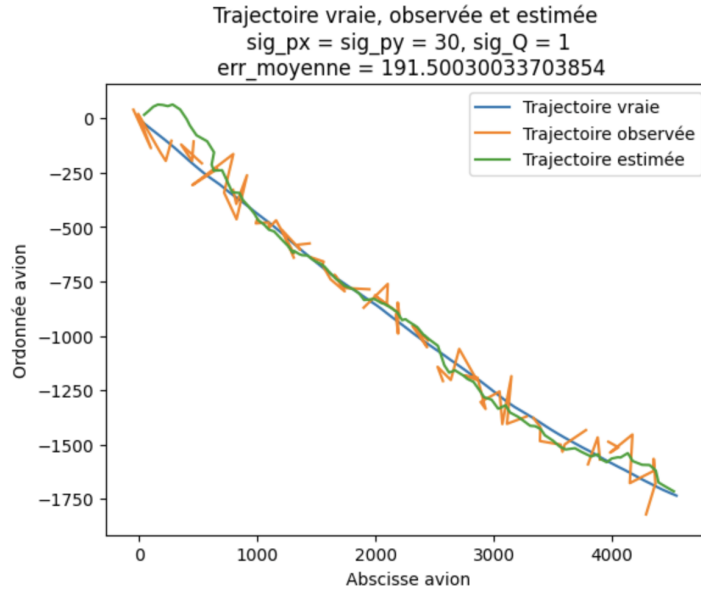


FIGURE 7 – Position estimée avec $\sigma_{p_x} = \sigma_{p_y} = 30$ et $\sigma_q = 1$

Regardons maintenant le cas d'un avion de voltige :
Comme sa trajectoire est plus complexe (même si dans notre cas très répétitive et donc prévisible), on a des hallucinations dès lors qu'il nous manque des données ce qui peut s'avérer cruciale comme on le remarque dans la trajectoire observée et la position estimée.

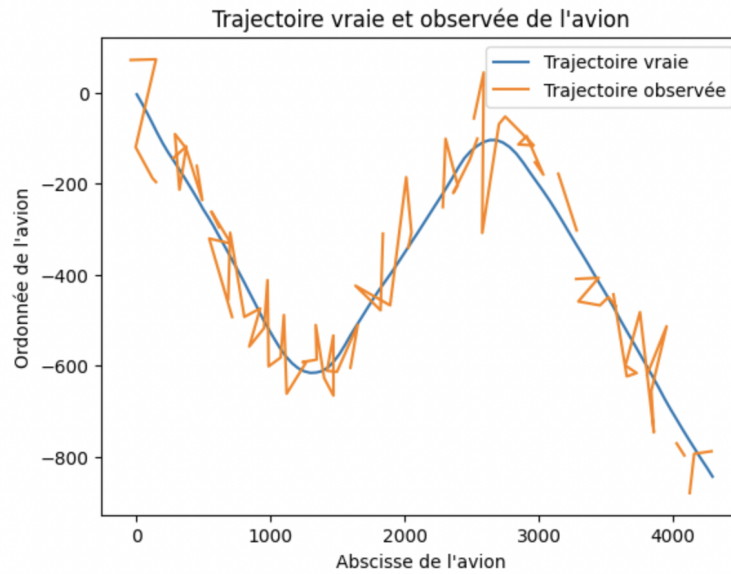


FIGURE 8 – Courbe de nos observations et de la trajectoire

La encore si on ajoute du bruit, cela devient vite très chaotique car nos observations sont très bruitées.

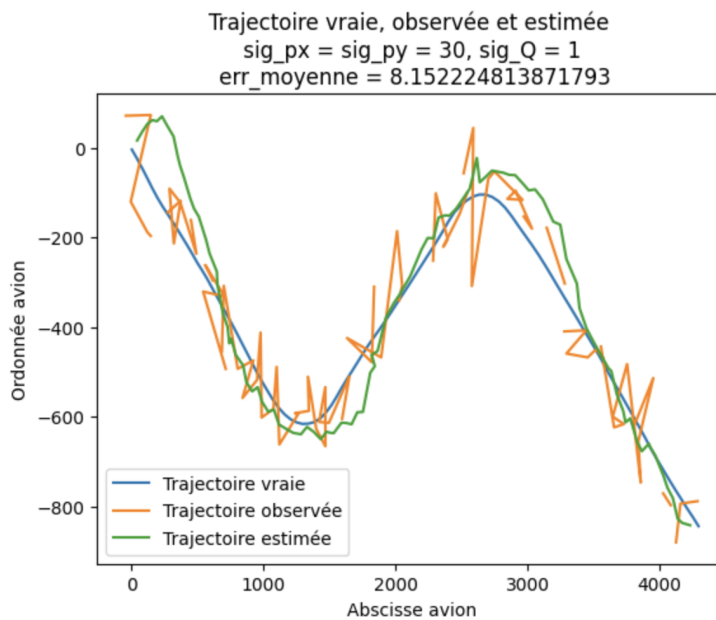


FIGURE 9 – Position estimée avec $\sigma_{p_x} = \sigma_{p_y} = 30$ et $\sigma_q = 1$

4 Implémentation Pratique 2 : Poursuite angle-distance

4.1 Implémentation naïve et problèmes théoriques

Question 1

Pour passer des coordonnées cartésiennes (p_x, p_y) aux coordonnées polaires (r, θ) , on a les formules :

$$\theta = \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right)$$

$$r = \|p_x + p_y\|_2 = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$

Question 2

En passant en coordonnées polaires, notre modèle initial devient obsolète. Pour l'adapter, remplaçons notre modèle par le bon vecteur de \mathbb{R}^2 . Par la question 1), on a :

$$x_{r,\theta} = \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}$$

Le modèle devient non linéaire, donc les formules utilisées ne sont plus valides et donc on ne peut rien dire à priori sur la loi de $g_k(y_k|x_k)$

Question 3

Question 4

Dans notre cas, le modèle de la trajectoire est inchangé mais le modèle des observations a changé. On observe des angles et des distances par rapport au capteur et donc le modèle devient non linéaire. On ne peut donc plus utiliser un filtre de Kalman car celui-ci repose sur deux conditions : la linéarité du modèle et les observations gaussiennes ce qui n'est plus notre cas. On va donc voir par la suite comment remédier à cela.

4.2 Solutions pour implémenter notre filtre de Kalman dans cette situation : Linéariser

Question 5

La solution pour remédier à cela est de linéariser notre formule sur les observations afin de se ramener à un cadre linéaire mais en perdant naturellement en précision ($\mathcal{O}(x)$). On a :

$$y_k = \begin{pmatrix} f(x_k) \\ g(x_k) \end{pmatrix} + v_k, \quad (1)$$

On peut alors se poser la question du point autour duquel on doit effectuer notre linéarisation. En se penchant sur notre processus de mise à jour (passage de $k-1$ à k) dans le filtre de Kalman, on remarque qu'avant l'instant de mise à jour c'est l'instant $\hat{x}_{k|k-1}$ qui nous fournit la meilleure approximation de nos observations. On choisit donc ce point pour notre linéarisation.

Effectuons donc un développement de Taylor autour de ce point $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = F\hat{x}_{k-1|k-1}$, on a :

$$f(x_k) \approx f(\hat{x}_{k|k-1}) + \nabla f(\hat{x}_{k|k-1})(x_k - \hat{x}_{k|k-1})$$

$$g(x_k) \approx g(\hat{x}_{k|k-1}) + \nabla g(\hat{x}_{k|k-1})(x_k - \hat{x}_{k|k-1}),$$

En sachant que si : $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$, $\nabla f(a) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_4}(a) \right]$.

On a, en remplaçant dans (1) :

$$y_k = \begin{pmatrix} f(\hat{x}_{k|k-1}) \\ g(\hat{x}_{k|k-1}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla f(\hat{x}_{k|k-1}) \\ \nabla g(\hat{x}_{k|k-1}) \end{pmatrix} (x_k - \hat{x}_{k|k-1}) + v_k,$$

Soit encore :

$$y_k = H(\hat{x}_{k|k-1}) + \nabla H(\hat{x}_{k|k-1})(x_k - \hat{x}_{k|k-1}) + v_k,$$

en posant $h(\hat{x}_{k|k-1}) = \begin{pmatrix} f(\hat{x}_{k|k-1}) \\ g(\hat{x}_{k|k-1}) \end{pmatrix}$

En développant, on a :

$$y_k = \nabla h(\hat{x}_{k|k-1})x_k + (h(\hat{x}_{k|k-1}) - \nabla h(\hat{x}_{k|k-1})\hat{x}_{k|k-1}) + v_k$$

On est presque revenu à notre cas initial (*matrice* \times *vecteur* + *bruit*), il reste à introduire la variable Z_k suivante : $Z_k = y_k - h(\hat{x}_{k|k-1}) + \nabla h(\hat{x}_{k|k-1})\hat{x}_{k|k-1}$ On obtient :

$$Z_k = \nabla h(\hat{x}_{k|k-1})x_k + v_k$$

On pose : $H(\hat{x}_{k|k-1}) = \nabla h(\hat{x}_{k|k-1})$
 Z_k devient :

$$Z_k = H(\hat{x}_{k|k-1})x_k + v_k$$

À présent, on peut utiliser notre formule pour faire la mise à jour $g_k(y_k|x_k)$ est de nouveau une loi normale : $\mathcal{N}(y_k; H(\hat{x}_{k|k-1}), R)$ et la formule (**) est applicable (linéaire et de la bonne forme). On peut donc utiliser le filtre de Kalman avec les mises à jours :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|k} &= \hat{x}_{k|k-1} + K(y_k - h(\hat{x}_{k|k-1})) \\ K &= P_{k|k-1}H(\hat{x}_{k|k-1})^T (H(\hat{x}_{k|k-1})P_{k|k-1}H(\hat{x}_{k|k-1})^T + R)^{-1} \\ P_{k|k} &= (I - KH(\hat{x}_{k|k-1}))P_{k|k-1} \end{aligned}$$

4.3 Implémentation de notre filtre de Kalman étendue

Question 6 et 7 Avec ces linéarisations, on peut à présent effectuer une implémentation de notre filtre de Kalman dont voici quelques graphes qui permettent de voir ce qu'il se passe :

NB : Pour ne pas être trop répétitifs, nous ne montrerons pas tous les graphes réalisés.

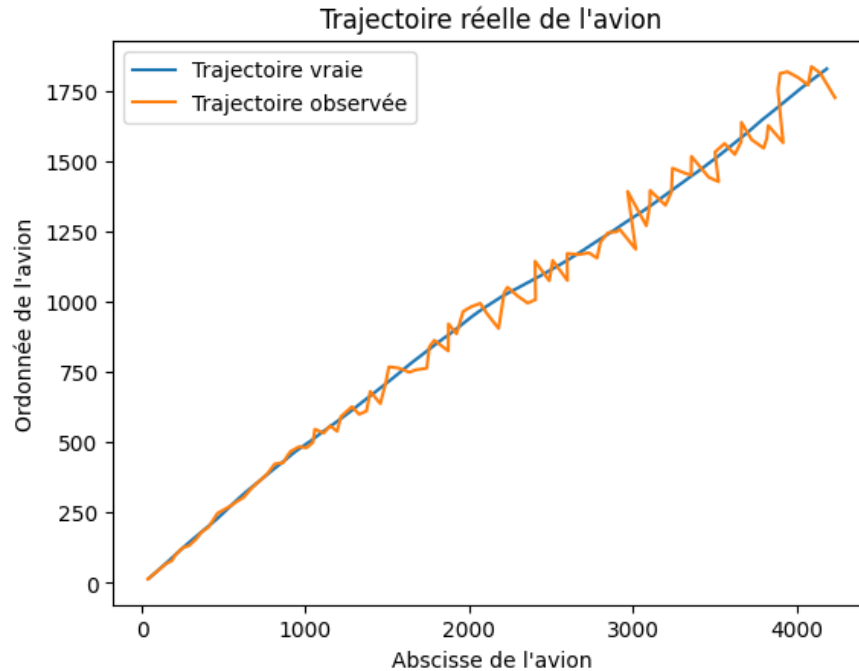


FIGURE 10 – Courbe de nos observations et de la trajectoire

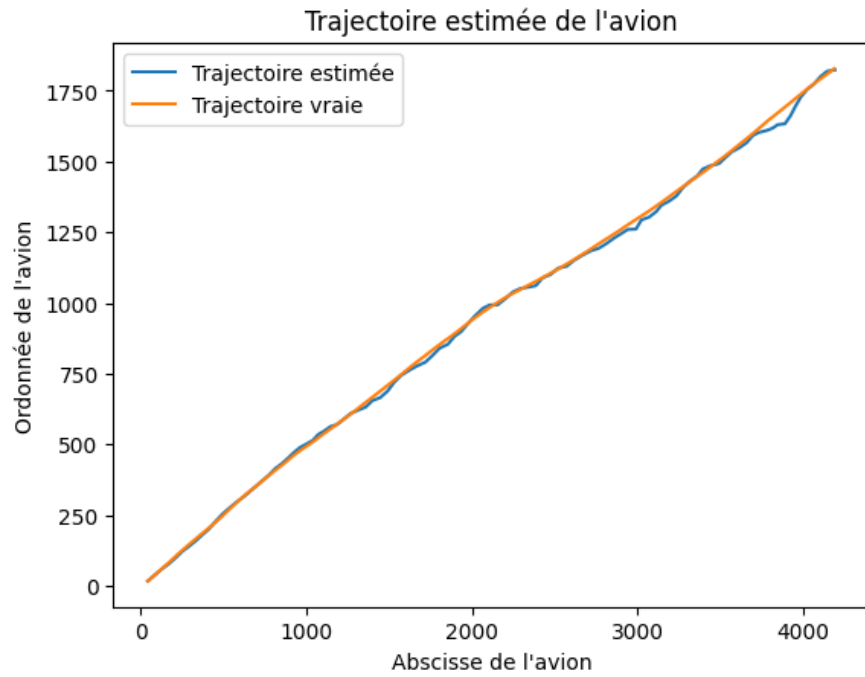


FIGURE 11 – Position estimée

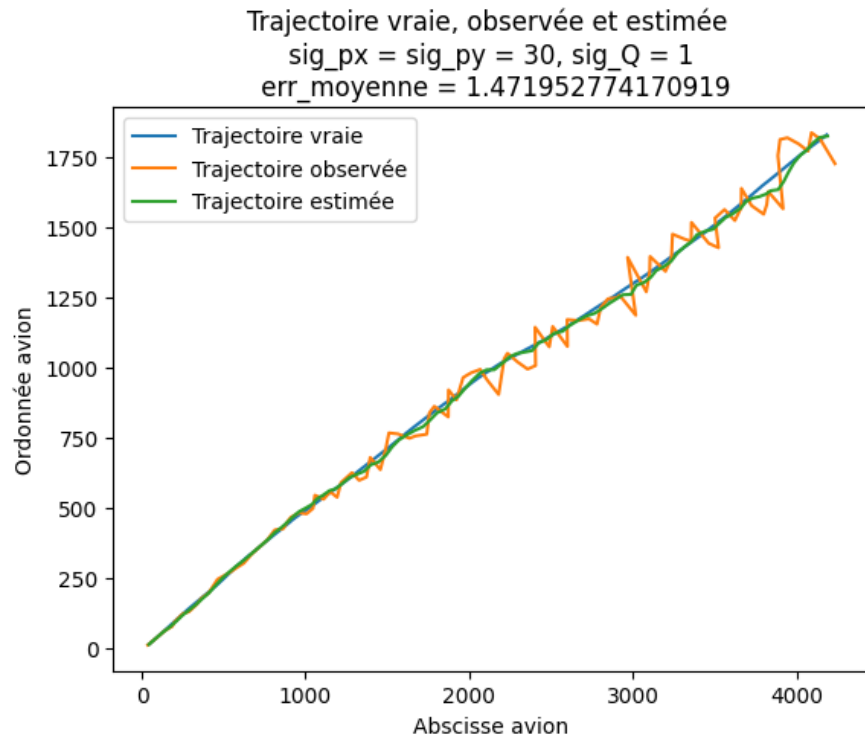


FIGURE 12 – Position estimée avec $\sigma_{p_x} = \sigma_{p_y} = 30$ et $\sigma_q = 1$

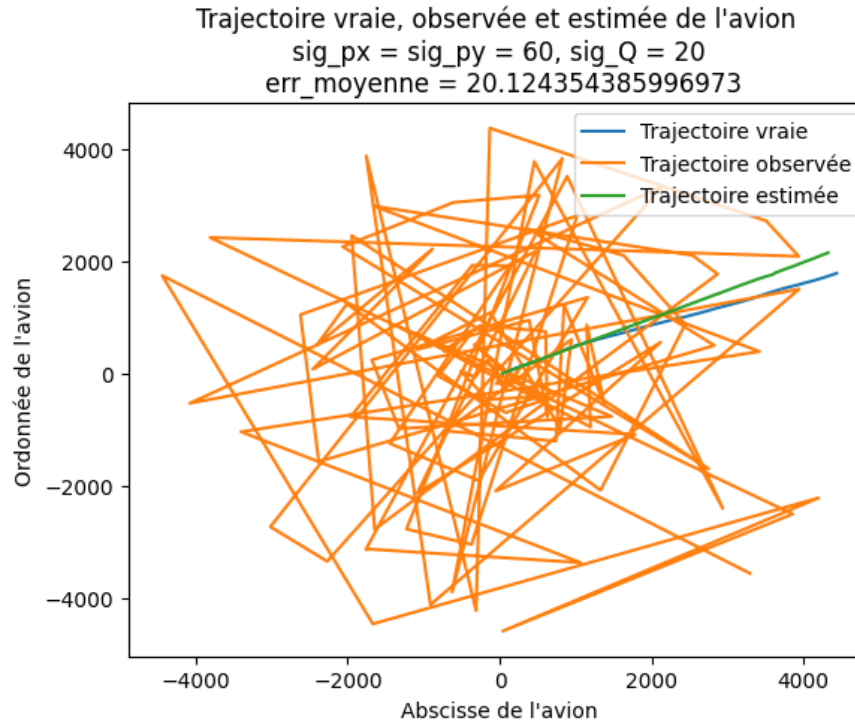


FIGURE 13 – Position estimée avec $\sigma_{p_x} = \sigma_{p_y} = 60$ et $\sigma_q = 20$

On peut alors noter que l'ajout de bruit influe énormément sur l'observation de notre trajectoire et donc sur la trajectoire estimée. Le filtre de Kalman étendue est plus complexe à réaliser (perte de précision à cause de linéarisation et sensibilité apparente au bruit et à Q) .

5 Une extension à la poursuite de plusieurs cibles

Finissons enfin par une extension du filtre de Kalman étendue à la poursuite de plusieurs cibles. Dans un premier temps, il semble difficile d'appliquer un filtrage de Kalman directement car on a soulevé dans cette partie le problème de la linéarisation lorsque nos données sont polaires. De plus, il semble impossible d'utiliser un filtrage de Kalman étendue à un seul capteur car celui-ci aura du mal à différencier une cible de l'autre. Ceci affecte fortement notre modèle. On peut ajouter que si les trajectoires se confondent, on peut finir par provoquer une collision (angle et distance similaires mais position différentes). Il faudrait alors implémenter un filtre de Kalman pour chaque cible. On doit alors effectuer une bonne initialisation et une mise à jour régulière des filtres pour chaque cible, tout en gérant les interactions potentielles entre celle-ci. Enfin, il est important que le capteur détecte et fasse la bonne distinction des cibles pour alimenter correctement chaque filtre de Kalman avec des données pertinentes.

Références

TP-Filtrage De Kalman : Application à la poursuite de cible mobile TélécomSudParis-MAT4501