[Exercice 2/1] : $(E_{10})\ y'(x) = xy(x) - x$

Énoncé

Résoudre l'équation différentielle

$$(E_{10}) \quad y'(x) = x\,y(x) - x.$$

Mise sous forme linéaire

On met l'équation sous la forme standard d'une équation linéaire du premier ordre :

$$y'(x) - x\,y(x) = -x.$$

Calcul du facteur intégrant

Le facteur intégrant est

$$\mu(x) = \exp\Big(-\int x\,dx\Big) = \exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big) = e^{-x^2/2}.$$

Multiplication et intégration

En multipliant par $\mu(x)$ on obtient

$$\big(\mu(x)y(x)\big)' = \mu(x)\big(y'(x) - xy(x)\big) = \mu(x)(-x) = -xe^{-x^2/2}.$$

On intègre :

$$\mu(x)y(x) = \int -xe^{-x^2/2}\,dx + C.$$

Posons $u = -\frac{x^2}{2}$, alors $du = -x\,dx$ et

$$\int -xe^{-x^2/2}\,dx = \int e^u\,du = e^u = e^{-x^2/2}.$$

Donc

$$e^{-x^2/2}y(x) = e^{-x^2/2} + C,$$

d'où

$$y(x) = 1 + Ce^{x^2/2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Vérification rapide

Pour $y(x) = 1 + Ce^{x^2/2}$,

$$y'(x) = Cxe^{x^2/2}, \qquad xy(x) - x = x(1 + Ce^{x^2/2}) - x = Cxe^{x^2/2},$$

d'où $y'(x) = xy(x) - x$, la solution est correcte.

Solution générale

$$\boxed{y(x) = 1 + Ce^{x^2/2}, \quad C \in \mathbb{R}}$$

[Exercice 2/2] : $(E_{11})\ y'(x) = \sin(x)y(x) - 3\sin(x)$

Énoncé

Résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$(E_{11}) \qquad y'(x) = \sin(x)\,y(x) - 3\sin(x).$$

Résolution (méthode de l'intégration par facteur)

On réécrit l'équation sous la forme standard

$$y'(x) - \sin(x)\,y(x) = -3\sin(x).$$

C'est une équation linéaire de la forme $y' + p(x)y = q(x)$ avec $p(x) = -\sin x$. Le facteur intégrant est

$$\mu(x) = \exp\Big(\int p(x)\,dx\Big) = \exp\Big(\int -\sin x\,dx\Big) = \exp(\cos x).$$

On multiplie l'équation par $\mu(x)$:

$$\big(e^{\cos x}y(x)\big)' = -3\sin x\,e^{\cos x}.$$

On intègre : poser $u = \cos x$ (donc $du = -\sin x\,dx$) donne

$$\int -3\sin x\,e^{\cos x}\,dx = 3\int e^u\,du = 3e^{\cos x} + C.$$

Ainsi

$$e^{\cos x}y(x) = 3e^{\cos x} + C,$$

donc en divisant par $e^{\cos x}$ on obtient la solution générale

$$\boxed{y(x) = 3 + Ce^{-\cos x}, \quad C \in \mathbb{R}\,.}$$

Vérification rapide

Pour $y(x) = 3 + Ce^{-\cos x}$,

$$y'(x) = C\frac{d}{dx}\left(e^{-\cos x}\right) = Ce^{-\cos x}\sin x,$$

et

$$\sin x\, y(x) - 3\sin x = \sin x\left(3 + Ce^{-\cos x}\right) - 3\sin x = Ce^{-\cos x}\sin x,$$

ce qui confirme que l'expression trouvée satisfait bien l'équation.

[Exercice 2/3] : $(E_{12})\ y'(x) + x^2y(x) + 2x^2 = 0$

Énoncé

Résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$(E_{12}) \qquad y'(x) + x^2y(x) + 2x^2 = 0.$$

Résolution (chaque étape expliquée)

1. Écrire l'équation sous la forme standard $y' + p(x)y = q(x)$. Ici

   $$y'(x) + x^2y(x) = -2x^2,$$

   donc $p(x) = x^2$ et $q(x) = -2x^2$.

2. Calculer le facteur intégrant $\mu(x) = \exp\left(\int p(x)\,dx\right)$. On a

   $$\int p(x)\,dx = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3},$$

   donc

   $$\mu(x) = e^{x^3/3}.$$

3. Multiplier l'équation par $\mu(x)$ pour obtenir une dérivée exacte :

   $$e^{x^3/3}y'(x) + x^2e^{x^3/3}y(x) = -2x^2e^{x^3/3},$$

   soit

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x^3/3}y(x)\right) = -2x^2e^{x^3/3}.$$

4. Intégrer les deux membres par rapport à x. Pour l'intégrale de droite, poser $u = \frac{x^3}{3}$ donc $du = x^2dx$. On obtient

   $$\int -2x^2e^{x^3/3}\,dx = -2\int e^u\,du = -2e^u + C = -2e^{x^3/3} + C.$$

   Ainsi

   $$e^{x^3/3}y(x) = -2e^{x^3/3} + C,$$

   où C est une constante d'intégration.

5. Isoler $y(x)$ en divisant par $e^{x^3/3}$:

   $$y(x) = -2 + Ce^{-x^3/3}.$$

Solution générale

$$\boxed{y(x) = -2 + Ce^{-x^3/3}, \quad C \in \mathbb{R}}$$

(Vérification rapide : en dérivant et en remplaçant dans l'équation on retrouve l'égalité initiale.)

[Exercice 2/4] : $(E_{13})\ y'(x) = \dfrac{y(x)}{x} + x^2e^x$

Énoncé

Résoudre l'équation différentielle

$$(E_{13}) \qquad y'(x) = \frac{y(x)}{x} + x^2e^x,$$

en précisant chaque étape du raisonnement (on suppose $x \neq 0$).

Mise sous forme standard et facteur intégrant

On réécrit l'équation sous la forme linéaire standard

$$y'(x) - \frac{1}{x}y(x) = x^2e^x.$$

C'est une équation linéaire du premier ordre de la forme $y' + p(x)y = q(x)$ avec $p(x) = -\frac{1}{x}$. Le facteur intégrant est

$$\mu(x) = \exp\Big(\int p(x)\,dx\Big) = \exp\Big(\int -\frac{1}{x}\,dx\Big) = \exp(-\ln|x|) = \frac{1}{|x|}.$$

Sur un intervalle où x garde le signe (par exemple $x > 0$ ou $x < 0$), on peut prendre $\mu(x) = \frac{1}{x}$. Multiplions l'équation par $\frac{1}{x}$ (valide pour $x \neq 0$) :

$$\frac{1}{x}y'(x) - \frac{1}{x^2}y(x) = xe^x.$$

Reconnaissance d'une dérivée

Le membre de gauche est la dérivée du quotient $y(x)/x$:

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{y(x)}{x}\Big) = \frac{y'(x)\,x - y(x)}{x^2} = \frac{1}{x}y'(x) - \frac{1}{x^2}y(x).$$

Donc l'équation devient

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{y(x)}{x}\Big) = xe^x.$$

Intégration

Intégrons par rapport à x :

$$\frac{y(x)}{x} = \int xe^x\,dx + C,$$

où C est une constante d'intégration. Calculons l'intégrale par parties :

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x = (x-1)e^x.$$

On obtient donc

$$\frac{y(x)}{x} = (x-1)e^x + C.$$

Expression de la solution générale

En multipliant par x :

$$y(x) = x\big((x-1)e^x + C\big) = (x^2 - x)e^x + Cx,$$

où $C \in \mathbb{R}$. Cette expression est valable sur tout intervalle où $x \neq 0$ (par exemple pour $x > 0$ et pour $x < 0$ éventuellement avec C différent sur chaque intervalle).

Solution finale

Pour $x \neq 0$,

$$\boxed{y(x) = (x^2 - x)e^x + Cx, \quad C \in \mathbb{R}}$$

[Exercice 2/5] : $(E_{14})\ xy'(x) = -2y(x) + e^x$

Énoncé

Résoudre l'équation différentielle

$$(E_{14}) \qquad x\,y'(x) = -2y(x) + e^x.$$

Résolution

1. Mettons l'équation sous la forme standard pour $x \neq 0$:

$$y'(x) + \frac{2}{x}y(x) = \frac{e^x}{x}.$$

1. Calculons le facteur intégrant $\mu(x)$:

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{2}{x}\,dx\right) = \exp(2\ln|x|) = x^2 \quad (x \neq 0).$$

1. Multiplions l'équation par $\mu(x) = x^2$:

$$x^2y'(x) + 2xy(x) = x^2\frac{e^x}{x} = xe^x.$$

Le membre de gauche est la dérivée de $x^2y(x)$, donc

$$\frac{d}{dx}\left(x^2y(x)\right) = xe^x.$$

1. Intégrons :

$$x^2y(x) = \int xe^x\,dx + C.$$

Calcul de l'intégrale par parties :

$$\int xe^x \, dx = xe^x - \int e^x \, dx = (x-1)e^x + C_1.$$

D'où, en absorbant les constantes,

$$x^2 y(x) = (x-1)e^x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

1. On obtient la solution générale (pour $x \ / \ 0$) $\div$

$$\boxed{y(x) = \frac{(x-1)e^x + C}{x^2}, \qquad C \in \mathbb{R}, \ x \ / \qquad}$$

Discussion sur $x = 0$

L'équation est singulière en $x = 0$. Si l'on cherche une solution définie et continue en 0, il faut que la limite de $y(x)$ quand $x \to 0$ existe. Développons le numérateur au voisinage de 0 :

$$(x-1)e^x + C = -1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + C.$$

Pour que $\dfrac{(x-1)e^x + C}{x^2}$ ait une limite finie lorsque $x \to 0$, il faut et il suffit que la constante termique s'annule : $C - 1 = 0$, donc $C = 1$. Dans ce cas

$$y(x) = \frac{(x-1)e^x + 1}{x^2} \quad (x \ / \ 0), \qquad\qquad =$$

et en passant à la limite on obtient

$$y(0) = \lim_{x \to 0} y(x) = \frac{1}{2}.$$

Plus précisément, le développement en série donne

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{8} + \cdots,$$

donc la solution s'étend analytiquement en 0 pour $C = 1$ (avec $y'(0) = 1/3$, etc.).

Solution finale

- Solutions sur chaque intervalle ne contenant pas 0 :

$$y(x) = \frac{(x-1)e^x + C}{x^2}, \qquad C \in \mathbb{R},\ x \neq 0.$$

- Si l'on impose que la solution soit définie et continue (même analytique) en $x = 0$, alors nécessairement $C = 1$ et la solution étendue est

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)e^x + 1}{x^2} & (x \neq 0), \\ \dfrac{1}{2} & (x = 0). \end{cases}$$

[Exercice 2/6] : $(E_{15})\ e^x y'(x) = y(x)$

Énoncé

Résoudre l'équation différentielle $(E_{15})\ :\ e^x y'(x) = y(x)$.

Résolution détaillée

1. On met l'équation sous une forme standard. Pour $e^x \neq 0$ (ce qui est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$) on peut écrire

$$y'(x) = e^{-x} y(x).$$

1. C'est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre, ou simplement une équation séparable. On sépare les variables :

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = e^{-x}.$$

Pour $y(x) \neq 0$ on intègre les deux membres par rapport à x :

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\, dx = \int e^{-x}\, dx.$$

1. Calcul des intégrales :

$$\ln|y(x)| = -e^{-x} + C,$$

où C est une constante d'intégration.

1. On exponentie pour obtenir y :

$$|y(x)| = e^C e^{-e^{-x}}.$$

En posant $K \in \mathbb{R}$ (constante qui peut être nulle et dont le signe absorbe la valeur absolue), on obtient la solution générale

$$\boxed{y(x) = K\, e^{-e^{-x}}, \qquad K \in \mathbb{R}\,.}$$

Vérification

Calculons $y'(x)$ pour vérifier :

$$y(x) = Ke^{-e^{-x}} \quad \Rightarrow \quad y'(x) = Ke^{-e^{-x}} \cdot \big(-e^{-x}\big)' = Ke^{-e^{-x}} \cdot \big(-(-e^{-x})\big)e^{-x}?$$

Reprenons proprement : si $y = K\exp(-e^{-x})$, alors

$$y'(x) = K\exp(-e^{-x}) \cdot \big(-\big(-e^{-x}\big)'\big) = K\exp(-e^{-x}) \cdot \big(e^{-x}\big).$$

Donc $y'(x) = e^{-x}y(x)$, et en multipliant par e^x on retrouve $e^x y'(x) = y(x)$. L'égalité est bien vérifiée.

Domaine

La solution est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

[Exercice 2/7] : $(E_{16})\ y'(x) = \dfrac{y(x)}{x^2 - 3x + 2}$

Énoncé

Résoudre l'équation différentielle

$$(E_{16}) \qquad y'(x) = \frac{y(x)}{x^2 - 3x + 2}.$$

Méthode et résolution (détaillée)

1. Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre, séparables (ou linéaire homogène). Si y n'est pas identiquement nulle, on peut séparer les variables en divisant par $y(x)$:

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}.$$

1. Intégrons des deux côtés par rapport à x :

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\, dx = \int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}.$$

Le côté gauche donne $\ln|y(x)|$. Pour le côté droit, factorisons le dénominateur :

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2).$$

1. Décomposons en éléments simples :

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}.$$

On a $A + B = 0$ et $-2A - B = 1$. Donc $A = -1$ et $B = 1$. Ainsi

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}.$$

1. Intégration du côté droit :

$$\int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = \int \left(-\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}\right) dx = -\ln|x-1| + \ln|x-2| + C.$$

1. En égalant les deux intégrales :

$$\ln|y(x)| = -\ln|x-1| + \ln|x-2| + C = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C.$$

Exponentions :

$$|y(x)| = e^C \left|\frac{x-2}{x-1}\right|.$$

Posons $K \in \mathbb{R}$ une constante arbitraire (peut être nulle et porter le signe), on obtient la forme générale

$$y(x) = K\,\frac{x-2}{x-1}.$$

Remarques sur le domaine de définition

- L'équation a des singularités en $x = 1$ et $x = 2$. Les solutions non nulles $y(x) = K\frac{x-2}{x-1}$ sont définies sur chaque intervalle où le membre de droite est continu, c'est-à-dire sur $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$ et $(2, \infty)$ (avec éventuellement des constantes K différentes sur des intervalles distincts si l'on considère des solutions définies par morceaux).
- La solution triviale $y \equiv 0$ est aussi une solution (correspond à $K = 0$).

Solution générale

$$\boxed{y(x) = K\,\frac{x-2}{x-1} \quad \text{pour une constante } K \in \mathbb{R}, \text{ définie sur tout intervalle ne contenant}}$$

[Exercice 3/Questions faciles/1] : (E_{17}) $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 6e^{-x}$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$

Énoncé

Résoudre l'équation différentielle

$$(E_{17}) \qquad y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 6e^{-x}$$

avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.
Je détaille chaque étape du raisonnement.

1) Solution générale de l'équation homogène

Considérons l'équation homogène associée :

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 - 3r + 2 = 0.$$

Résolvons-la : $r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2) = 0$, donc $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$.
Ainsi la solution générale de l'homogène est

$$y_h(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x},$$

où C_1, C_2 sont des constantes.

2) Recherche d'une solution particulière

Le second membre est $6e^{-x}$. Comme -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = Ae^{-x},$$

où A est une constante à déterminer. Calculons les dérivées :

$$y_p'(x) = -Ae^{-x}, \qquad y_p''(x) = Ae^{-x}.$$

Substituons dans l'équation :

$$y_p'' - 3y_p' + 2y_p = Ae^{-x} - 3(-Ae^{-x}) + 2Ae^{-x} = (A + 3A + 2A)e^{-x} = 6Ae^{-x}.$$

On impose $6Ae^{-x} = 6e^{-x}$, donc $6A = 6$ et $A = 1$. Ainsi

$$y_p(x) = e^{-x}.$$

3) Solution générale de l'équation non homogène

Par superposition,

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} + e^{-x}.$$

4) Application des conditions initiales

Calculons $y(0)$ et $y'(0)$ en fonction de C_1, C_2.

$$y(0) = C_1 + C_2 + 1 \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = 0.$$

Dérivons y :

$$y'(x) = C_1e^x + 2C_2e^{2x} - e^{-x},$$

donc

$$y'(0) = C_1 + 2C_2 - 1 \stackrel{!}{=} 2 \quad \Rightarrow \quad C_1 + 2C_2 = 3.$$

Résolvons le système

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 + 2C_2 = 3. \end{cases}$$

En soustrayant la première équation de la seconde on obtient $C_2 = 3$, puis $C_1 = -3$.

5) Solution particulière satisfaisant les conditions initiales

En remplaçant C_1 et C_2 on obtient la solution recherchée :

$$\boxed{y(x) = -3e^x + 3e^{2x} + e^{-x}}$$

On peut vérifier en calculant $y(0) = -3 + 3 + 1 = 1$ et $y'(0) = -3 + 6 - 1 = 2$, ce qui satisfait bien les conditions initiales.

[Exercice 3/Questions faciles/2] : (E_{18}) $y''(x) - y'(x) - y(x) + 3x^2 - 1 = 0$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

Énoncé

Résoudre l'équation différentielle

$$(E_{18}) \quad y''(x) - y'(x) - y(x) + 3x^2 - 1 = 0$$

avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

1. Solution générale de l'équation homogène

Considérons l'équation homogène associée :

$$y'' - y' - y = 0.$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 - r - 1 = 0.$$

Ses racines sont

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

La solution générale de l'homogène est donc

$$y_h(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x},$$

où C_1, C_2 sont deux constantes.

2. Recherche d'une solution particulière

Comme le second membre est un polynôme de degré 2, on cherche une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = ax^2 + bx + c.$$

Calculons les dérivées :

$$y_p'(x) = 2ax + b, \qquad y_p''(x) = 2a.$$

On remplace dans l'équation :

$$2a - (2ax + b) - (ax^2 + bx + c) + 3x^2 - 1 = 0.$$

Regroupons les coefficients selon les puissances de x :

- coefficient de x^2 : $-a + 3 = 0$ donc $a = 3$,
- coefficient de x : $-2a - b = 0$ donc, avec $a = 3$, $b = -6$,
- terme constant : $2a - b - c - 1 = 0$. Avec $a = 3$ et $b = -6$ on obtient $6 + 6 - c - 1 = 0$ donc $c = 11$.

Ainsi

$$y_p(x) = 3x^2 - 6x + 11.$$

3. Solution générale de l'équation non homogène

Par superposition,

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + 3x^2 - 6x + 11.$$

4. Application des conditions initiales

Calculons $y(0)$ et $y'(0)$. On a

$$y(0) = C_1 + C_2 + 11, \qquad y'(x) = C_1 r_1 e^{r_1 x} + C_2 r_2 e^{r_2 x} + 6x - 6,$$

donc

$$y'(0) = C_1 r_1 + C_2 r_2 - 6.$$

Les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ donnent le système

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 11 = 0, \\ C_1 r_1 + C_2 r_2 - 6 = 1. \end{cases}$$

Ceci se réécrit

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -11, \\ C_1 r_1 + C_2 r_2 = 7. \end{cases}$$

En résolvant ce système (en notant $s = \sqrt{5}$, $r_1 = \frac{1+s}{2}$, $r_2 = \frac{1-s}{2}$) on obtient, après simplification,

$$C_1 = \frac{5\sqrt{5} - 11}{2}, \qquad C_2 = -\frac{11 + 5\sqrt{5}}{2}.$$

5. Solution finale

La solution du problème de Cauchy est donc

$$\boxed{y(x) = \frac{5\sqrt{5}-11}{2}\, e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} \;-\; \frac{11+5\sqrt{5}}{2}\, e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}x} \;+\; 3x^2 - 6x + 11\,.}$$

[Exercice 3/Questions faciles/3] : (E_{19}) $y''(x) = -2y'(x) - 2y(x) + \sin(x)$ avec $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$

Énoncé

Résoudre l'équation différentielle

$$(E_{19}) \quad y''(x) = -2y'(x) - 2y(x) + \sin x$$

avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = -1$.

Résolution détaillée

1. Mettre l'équation sous forme standard :

$$y'' + 2y' + 2y = \sin x.$$

1. Résolution de l'équation homogène associée $y'' + 2y' + 2y = 0$.

L'équation caractéristique est

$$r^2 + 2r + 2 = 0,$$

dont les racines sont

$$r = -1 \pm i.$$

Donc la solution générale de l'homogène est

$$y_h(x) = e^{-x}\big(A\cos x + B\sin x\big),$$

où A et B sont des constantes réelles.

1. Recherche d'une solution particulière y_p de l'équation non homogène.

Le second membre est $\sin x$. On cherche donc une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = a\cos x + b\sin x,$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$. Calculons les dérivées :

$$y_p' = -a\sin x + b\cos x, \qquad y_p'' = -a\cos x - b\sin x = -y_p.$$

Substituons dans l'équation :

$y_p'' + 2y_p' + 2y_p = (-a\cos x - b\sin x) + 2(-a\sin x + b\cos x) + 2(a\cos x + b\sin x).$

Regroupons les coefficients devant $\cos x$ et $\sin x$:

$$\begin{cases} \text{coef de } \cos x : & -a + 2b + 2a = a + 2b, \\ \text{coef de } \sin x : & -b - 2a + 2b = -2a + b. \end{cases}$$

On impose que ce résultat égale $\sin x$, donc

$$a + 2b = 0, \qquad -2a + b = 1.$$

Résolvons ce système : de la première équation $a = -2b$. Substitution dans la deuxième :

$$-2(-2b) + b = 1 \implies 4b + b = 1 \implies 5b = 1 \implies b = \tfrac{1}{5},$$

donc $a = -\frac{2}{5}$.

Ainsi

$$y_p(x) = -\tfrac{2}{5}\cos x + \tfrac{1}{5}\sin x.$$

1. Solution générale de l'équation non homogène :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x}\big(A\cos x + B\sin x\big) - \tfrac{2}{5}\cos x + \tfrac{1}{5}\sin x.$$

1. Application des conditions initiales pour déterminer A et B.

Calculons $y(0)$:

$$y(0) = A - \tfrac{2}{5} = 0 \implies A = \tfrac{2}{5}.$$

Calculons $y'(x)$. Pour $y_h = e^{-x}u(x)$ avec $u(x) = A\cos x + B\sin x$, on a

$$y_h'(x) = e^{-x}\big(u'(x) - u(x)\big) = e^{-x}\Big((-A\sin x + B\cos x) - (A\cos x + B\sin x)\Big).$$

Donc

$$y'(x) = e^{-x}\big((B - A)\cos x - (A + B)\sin x\big) + \big(-a\sin x + b\cos x\big),$$

où $a = -\frac{2}{5}$ et $b = \frac{1}{5}$.

En $x = 0$ ceci donne

$$y'(0) = (B - A) + b.$$

La condition $y'(0) = -1$ avec $A = \frac{2}{5}$ et $b = \frac{1}{5}$ donne

$$B - \tfrac{2}{5} + \tfrac{1}{5} = -1 \implies B - \tfrac{1}{5} = -1 \implies B = -\tfrac{4}{5}.$$

1. On remplace A et B dans la solution générale.

La solution particulière du problème de Cauchy est donc

$$\boxed{y(x) = e^{-x}\Big(\tfrac{2}{5}\cos x - \tfrac{4}{5}\sin x\Big) - \tfrac{2}{5}\cos x + \tfrac{1}{5}\sin x}.$$

On peut factoriser par $\frac{1}{5}$ si on le souhaite :

$$y(x) = \tfrac{1}{5}\Big(e^{-x}(2\cos x - 4\sin x) - 2\cos x + \sin x\Big).$$

[Exercice 3/Questions un peu plus avancées/5] : (E_{20}) $y''(x) = 2y'(x) - y(x) + (x^2 - 2)e^x$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$

Énoncé

Résoudre l'équation différentielle

$$(E_{20}) \qquad y''(x) = 2y'(x) - y(x) + (x^2 - 2)e^x$$

avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$. On cherchera une solution particulière de la forme $y(x) = P(x)e^x$.

Remarques et réécriture

Mettons l'équation sous la forme standard en regroupant tous les termes à gauche :

$$y'' - 2y' + y = (x^2 - 2)e^x.$$

Notons l'opérateur différentiel $L = (D-1)^2$ où $D = \dfrac{d}{dx}$. En effet le polynôme caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$, racine double $r = 1$. La solution générale de l'équation homogène est donc

$$y_h(x) = (A + Bx)e^x.$$

Pour la partie particulière, utilisons la substitution standard pour les termes en e^x : cherchons $y(x) = e^x v(x)$. Calculons l'action de L sur une fonction de cette forme :

$$(D-1)(e^x v) = e^x v', \qquad (D-1)^2(e^x v) = (D-1)(e^x v') = e^x v''.$$

Donc l'équation se transforme en

$$e^x v''(x) = (x^2-2)e^x \quad \Longrightarrow \quad v''(x) = x^2 - 2.$$

Intégration pour trouver $v(x)$

Intégrons deux fois :

$$v'(x) = \int (x^2-2)\,dx = \frac{x^3}{3} - 2x + C_1,$$

$$v(x) = \int v'(x)\,dx = \frac{x^4}{12} - x^2 + C_1 x + C_2.$$

Ainsi la solution générale de l'équation complète est

$$y(x) = e^x v(x) = e^x \left(\frac{x^4}{12} - x^2 + C_1 x + C_2 \right).$$

Détermination des constantes par les conditions initiales

Calculons $v(0)$ et $v'(0)$ pour appliquer $y(0)$ et $y'(0)$. On a

$$v(0) = C_2, \qquad v'(0) = C_1.$$

Or $y(0) = e^0 v(0) = v(0) = C_2$. D'où $C_2 = 1$ (puisque $y(0) = 1$).

Pour y' : $y' = e^x(v + v')$, donc $y'(0) = v(0) + v'(0) = C_2 + C_1$. Avec $y'(0) = 2$ et $C_2 = 1$ on obtient $1 + C_1 = 2$, donc $C_1 = 1$.

Solution finale

En substituant $C_1 = 1$ et $C_2 = 1$, on obtient

$$v(x) = \frac{x^4}{12} - x^2 + x + 1,$$

et donc la solution du problème de Cauchy est

$$\boxed{y(x) = e^x \left(\frac{x^4}{12} - x^2 + x + 1 \right).}$$

[Exercice 3/Questions un peu plus avancées/6] :
(E_{21}) $y''(x) = -4y(x) + x^2e^x$ **avec** $y(0) = 0,\ y'(0) = -1$

Énoncé

Résoudre l'équation différentielle

$$(E_{21}) \quad y''(x) = -4y(x) + x^2e^x$$

avec les conditions initiales $y(0) = 0,\ y'(0) = -1$. On cherchera une solution particulière de la forme $y_p(x) = P(x)e^x$ où P est un polynôme.

1) Équation homogène

On écrit l'équation sous la forme

$$y'' + 4y = x^2e^x.$$

L'équation homogène associée est

$$y_h'' + 4y_h = 0,$$

dont l'équation caractéristique est $r^2 + 4 = 0$ avec racines $r = \pm 2i$. Donc

$$y_h(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x),$$

où A, B sont des constantes.

2) Recherche d'une solution particulière

On pose $y_p(x) = P(x)e^x$ avec $P(x) = ax^2 + bx + c$. Calculons les dérivées :

$$P'(x) = 2ax + b, \qquad P''(x) = 2a,$$

donc

$$y_p' = (P' + P)e^x, \qquad y_p'' = (P'' + 2P' + P)e^x.$$

Substituons dans l'équation $y'' + 4y = x^2e^x$:

$$(P'' + 2P' + P + 4P)e^x = x^2e^x \quad \Longrightarrow \quad P'' + 2P' + 5P = x^2.$$

Remplaçons P, P', P'' :

$$2a + 2(2ax + b) + 5(ax^2 + bx + c) = x^2.$$

Regroupons selon les puissances de x :

$$5a\,x^2 + (4a+5b)\,x + (2a+2b+5c) = 1\cdot x^2 + 0\cdot x + 0.$$

On obtient le système pour a, b, c :

$$\begin{cases} 5a = 1, \\ 4a+5b = 0, \\ 2a+2b+5c = 0. \end{cases}$$

En résolvant :

$$a = \tfrac{1}{5}, \qquad b = -\tfrac{4a}{5} = -\tfrac{4}{25}, \qquad 5c = -2a-2b = -\tfrac{2}{5} - 2\big(-\tfrac{4}{25}\big) = -\tfrac{2}{25},$$

donc

$$c = -\tfrac{2}{125}.$$

Ainsi

$$P(x) = \tfrac{1}{5}x^2 - \tfrac{4}{25}x - \tfrac{2}{125}, \qquad y_p(x) = \left(\tfrac{1}{5}x^2 - \tfrac{4}{25}x - \tfrac{2}{125}\right)e^x.$$

3) Solution générale

La solution générale est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x) + \left(\tfrac{1}{5}x^2 - \tfrac{4}{25}x - \tfrac{2}{125}\right)e^x.$$

4) Conditions initiales

Calculons $y(0)$ et $y'(0)$.

On a $P(0) = c = -\tfrac{2}{125}$ et $P'(0) = b = -\tfrac{4}{25}$.

- Condition $y(0) = 0$ donne

$$y(0) = A + P(0) = A - \tfrac{2}{125} = 0 \quad \Longrightarrow \quad A = \tfrac{2}{125}.$$

- Calcul de $y'(x)$:

$$y'(x) = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x) + (P'(x) + P(x))e^x.$$

Donc

$$y'(0) = 2B + (P'(0) + P(0)) = 2B + \left(-\tfrac{4}{25} - \tfrac{2}{125}\right) = 2B - \tfrac{22}{125}.$$

La condition $y'(0) = -1$ donne

$$2B - \tfrac{22}{125} = -1 \quad \Longrightarrow \quad 2B = -1 + \tfrac{22}{125} = -\tfrac{103}{125},$$

donc

$$B = -\tfrac{103}{250}.$$

5) Solution finale

La solution du problème de Cauchy est

$$\boxed{y(x) = \tfrac{2}{125}\cos(2x) - \tfrac{103}{250}\sin(2x) + \left(\tfrac{1}{5}x^2 - \tfrac{4}{25}x - \tfrac{2}{125}\right)e^x\,.}$$

[Exercice 3/Questions encore plus avancées et pas vraiment indispensables/7] : $(E_{22})\ y''(x) - y'(x) = e^x - x$

Énoncé

Résoudre l'équation différentielle

$$(E_{22}) \quad y''(x) - y'(x) = e^x - x.$$

1) Solution générale de l'équation homogène

Considérons l'équation homogène associée :

$$y'' - y' = 0.$$

L'équation caractéristique est $r^2 - r = 0$, soit $r(r-1) = 0$. Donc $r_1 = 0$ et $r_2 = 1$. La solution générale de l'homogène est

$$y_h(x) = C_1 + C_2 e^x,$$

avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

2) Recherche d'une solution particulière pour le second membre e^x

On résout d'abord

$$y'' - y' = e^x.$$

Comme e^x correspond à une solution de l'homogène ($r = 1$), on prend une solution particulière de la forme $y_{p1}(x) = axe^x$. Calculons :

$$
\begin{aligned}
y_{p1}(x) &= axe^x, \\
y'_{p1}(x) &= ae^x(1+x), \\
y''_{p1}(x) &= ae^x(2+x).
\end{aligned}
$$

Donc

$$y''_{p1} - y'_{p1} = ae^x(2+x) - ae^x(1+x) = ae^x.$$

Pour obtenir e^x il faut $a = 1$. Ainsi

$$y_{p1}(x) = xe^x.$$

3) Recherche d'une solution particulière pour le second membre $-x$

On résout ensuite

$$y'' - y' = -x.$$

Le second membre est un polynôme de degré 1. Comme $r = 0$ est une racine de la caractéristique (solution constante), il y a résonance d'ordre 1 : on multiplie l'ansatz polynômial par x. On cherche donc une solution particulière de la forme

$$y_{p2}(x) = Ax^2 + Bx.$$

Calculs :

$$
\begin{aligned}
y'_{p2}(x) &= 2Ax + B, \\
y''_{p2}(x) &= 2A,
\end{aligned}
$$

donc

$$y''_{p2} - y'_{p2} = 2A - (2Ax + B) = -2Ax + (2A - B).$$

On impose l'égalité avec $-x$: coefficients en x et en constante donnent

$$-2A = -1 \quad \Rightarrow \quad A = \tfrac{1}{2},$$

$$2A - B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 2A = 1.$$

Ainsi

$$y_{p2}(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + x.$$

4) Solution générale par superposition

Par linéarité, une solution particulière pour $e^x - x$ est la somme des deux solutions particulières précédentes :

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) = xe^x + \tfrac{1}{2}x^2 + x.$$

La solution générale de (E_{22}) est donc

$$\boxed{y(x) = C_1 + C_2e^x + xe^x + \tfrac{1}{2}x^2 + x\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

5) Vérification rapide

On peut vérifier en dérivant y et en calculant $y'' - y'$ que le membre de droite obtenu est bien $e^x - x$.

[Exercice 3/Questions encore plus avancées et pas vraiment indispensables/8] : $(E_{23})\ y''(x) = -2y'(x) - 2y(x) - \cos(x)e^x$

Énoncé

Résoudre l'équation différentielle

$$(E_{23}) \qquad y''(x) = -2y'(x) - 2y(x) - \cos(x)e^x.$$

1) Équation homogène

On considère l'opérateur linéaire L défini par

$$L[y] = y'' + 2y' + 2y.$$

L'équation homogène associée est

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

La résolution se fait par l'équation caractéristique

$$r^2 + 2r + 2 = 0.$$

Ses racines sont

$$r = -1 \pm i.$$

Donc la solution générale de l'homogène est

$$y_h(x) = e^{-x}\big(A\cos x + B\sin x\big),$$

où A et B sont des constantes réelles.

2) Recherche d'une solution particulière

Le membre de droite non homogène est $-\cos x\, e^{x}$. On utilise la méthode des exposants complexes en remarquant que

$$-\cos x\, e^{x} = \Re\big(-e^{(1+i)x}\big).$$

On cherche d'abord une solution complexe particulière $y_p^{\mathbb{C}}(x) = Ce^{(1+i)x}$ de l'équation complexe

$$L[y] = -e^{(1+i)x}.$$

Posons $\lambda = 1+i$. Alors

$$L\big(Ce^{\lambda x}\big) = C(\lambda^2 + 2\lambda + 2)e^{\lambda x}.$$

Calculons $\lambda^2 + 2\lambda + 2$:

$$\lambda^2 = (1+i)^2 = 2i, \qquad \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 2i + 2(1+i) + 2 = 4 + 4i = 4(1+i).$$

L'équation devient

$$C \cdot 4(1+i)\, e^{\lambda x} = -e^{\lambda x},$$

donc

$$C = -\frac{1}{4(1+i)}.$$

En rationalisant,

$$C = -\frac{1}{4(1+i)} = -\frac{1-i}{8} = \frac{-1+i}{8}.$$

La solution particulière réelle cherchée est la partie réelle de $y_p^{\mathbb{C}}$:

$$y_p(x) = \Re\big(Ce^{(1+i)x}\big) = e^{x}\Re\big(Ce^{ix}\big).$$

Écrivons $C = a + ib$ avec $a = -\frac{1}{8}$, $b = \frac{1}{8}$. Alors

$$\Re\big(Ce^{ix}\big) = a\cos x - b\sin x = -\frac{1}{8}\cos x - \frac{1}{8}\sin x = -\frac{\cos x + \sin x}{8}.$$

Ainsi

$$y_p(x) = -\frac{e^x}{8}\big(\cos x + \sin x\big).$$

On peut vérifier par calcul direct que $L[y_p] = -\cos x\, e^x$.

3) Solution générale

La solution générale de (E_{23}) est la somme de la solution générale de l'homogène et d'une solution particulière :

$$\boxed{y(x) = e^{-x}\big(A\cos x + B\sin x\big) \ - \ \frac{e^x}{8}\big(\cos x + \sin x\big), \quad A, B \in \mathbb{R}\,.}$$
