Stage de Recherche

Phytem Master Première Année

Etude Approfondie de la Solution de Trou Noir Chargé en Relativité Intriquée

Etudiant :
Théo ABRIAL

Encadrant :
Olivier MINAZZOLI

Laboratoire d'accueil :
Laboratoire Artemis
96, Bd de l'Observatoire,
06304 NICE

27 Mars 2023 - 7 Juillet 2023

Table des matières

Introduction

Selon Einstein, une *bonne* théorie relativiste de la gravitation doit satisfaire trois principes : le principe de relativité, d'équivalence et de relativité de l'inertie [1].

Le *principe de relativité*, ou *principe de covariance généralisée*, affirme que les lois de la physique doivent être les mêmes dans tous les référentiels, inertiels ou non. Ce principe est vérfié dès lors que les lois de la physique sont énoncées de manière tensorielle.

Le *principe d'équivalence* énonce que les effets de la gravitation sont les mêmes que les effets d'une accélération du référentiel de l'observateur. C'est ce principe qui conduit Einstein à considérer une variété courbe pour décrire l'espace-temps où la métrique de cette variété contient, à elle seule, toutes les informations sur le champ gravitationnel.

Le *principe de relativité de l'inertie*, ou *principe de Mach* affirme qu'il est impossible de définir un mouvement, et même l'espace-temps lui-même, sans matière. Ainsi, il ne peut pas exister de solution du vide.

Ce dernier principe n'est pas vérifié par la Relativité Générale (RG). En effet, on connaît aujourd'hui de nombreuses solutions du vide (Solution de Minkowski, par exemple). Einstein avait alors ajouté la constante cosmologique aux équations de la RG pour empêcher ces solutions d'exister [1, 2]. Cependant, on connaît aussi aujourd'hui des solutions du vide avec une constante cosmologique non nulle (Solution de de-Sitter, par exemple).

De plus, lors de l'écriture de la RG et du modèle standard sous forme d'intégrale de chemin, trois constantes apparaîssent : $\hbar$ la constante de Planck, c la constante de structure causale de l'espace-temps et $\tilde{\kappa}$ la constante d'Einstein, reliée à la constante G de Newton.

Grâce à ces constantes, on peut former les unités de Planck, telles que l'énergie, la longueur ou le temps de Planck. A cause du principe d'incertitude de Heisenberg, si on voulait regarder ce qui se passe à la longueur de Planck, il faudrait mobiliser une énergie égale à l'énergie de Planck. La RG prédit alors la création d'un trou noir : une singularité cachée derrière un horizon.

Ainsi, la strucure même de l'univers est remise en cause à cette échelle. On ne peut plus parler d'espace-temps, donc on ne peut plus définir l'intégrale de chemin. On introduit alors uné énergie seuil comme limite supérieure de l'intégrale de chemin.

La Relativité Intriquée (RI) est une théorie qui, de part son écriture, vérifie le principe de Mach. De plus, on ne peut pas définir de longueur de Planck, donc la structure de l'univers pourrait être conservée quelle que soit l'échelle.

Pour éprouver cette théorie, on la teste d'abord dans des cas où l'observation permet de mettre des contraintes fortes sur la théorie. On se propose ici d'étudier en particulier le cas du trou noir chargé.

1 La Relativité Intriquée

1.1 Intégrale de Chemin

La théorie de la RI s'exprime comme une intégrale de chemin [3] :

$$Z_{ER} = \int \mathcal{D}g \prod_i \mathcal{D}f_i \exp\left(-\frac{i}{2\epsilon^2}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\frac{\mathcal{L}_m^2}{R}\right) \tag{1}$$

avec R la courbure scalaire de l'espace-temps, dépendant de la métrique $g_{\mu\nu}$ et de ses dérivées et $\mathcal{L}_m$ le lagrangien décrivant la matière, dépendant de la métrique et des autres champs f_i. ϵ est une constante ayant la dimension d'une énergie. $g = \det(g_{\mu\nu})$ est le déterminant de la métrique.

Comme mentionné en introduction, il est aisé de voir que l'écriture même de la théorie permet de vérifier le pincipe de Mach. En effet, si $\mathcal{L}_m = \emptyset$, alors la phase de l'intégrale est nulle et on ne peut donc pas définir la théorie sans matière.

Les seules constantes fondamentales de cette théorie sont c, qui apparaît dans d^4x, et ϵ. A partir de ces constantes, il est impossible de construire la longueur de Planck. Cette échelle de longueur ne joue, a priori, aucun rôle dans la structure de l'espace-temps.

1.2 Action et équation de champ

La phase apparaîssant dans l'intégrale de chemin est [3, 4, 5] :

$$\theta_{ER} = -\frac{1}{2\epsilon^2}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\frac{\mathcal{L}_m^2}{R} \tag{2}$$

Les équations du mouvement sont données par la condition $\delta\theta_{ER} = 0$.

Une transformation de cette phase permet d'écrire la théorie sous une forme dite tenseur-scalaire, où apparaît un nouveau champ [6] :

$$\begin{aligned}\theta_{ER} &= \frac{1}{\epsilon^2}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\frac{1}{\kappa}\left(\frac{R}{2\kappa}+\mathcal{L}_m\right)\\ &= \frac{1}{\epsilon^2\tilde{\kappa}}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left(\frac{\varphi^2 R}{2\tilde{\kappa}}+\varphi\mathcal{L}_m\right)\end{aligned} \tag{3}$$

$\tilde{\kappa}$ est la constante d'Einstein, κ et φ sont des champs scalaires tels que $\varphi = \frac{\tilde{\kappa}}{\kappa}$. L'équivalence des deux écritures est assurée *sur-couche*. En effet, l'équation du mouvement pour φ (donnée par l'équation d'Euler-Lagrange) est [4, 6] :

$$\varphi = -\tilde{\kappa}\frac{\mathcal{L}_m}{R} \tag{4}$$

et en réinjectant dans (3), on retrouve bien la forme initiale.

L'équation d'Einstein s'écrit maintenant avec un terme en plus [4, 6] :

$$G_{\mu\nu} = \frac{\tilde{\kappa}}{\varphi}T_{\mu\nu} + \frac{1}{\varphi^2}\left(\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box\right)\varphi^2 \tag{5}$$

$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ est le tenseur d'Einstein et $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion défini par :

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m\right)}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{6}$$

Le tenseur énergie-impulsion n'est plus conservé :

$$\nabla_\nu\left(\varphi T^{\mu\nu}\right) = \mathcal{L}_m\nabla^\mu\varphi \tag{7}$$

1.3 La Relativité Générale comme limite

Dans les théories tenseurs-scalaires, on obtient une équation d'évolution pour le champ scalaire φ en prenant la trace de l'équation d'Einstein. Ici, la trace de (5) donne :

$$\begin{aligned}\frac{3}{\varphi^2}\Box\varphi^2 &= \frac{\tilde{\kappa}T}{\varphi}+R\\ &= \frac{\tilde{\kappa}}{\varphi}\left(T-\mathcal{L}_m\right)\end{aligned} \tag{8}$$

Pour de la matière sous forme de poussières sans pression ou d'un rayonnement électromagnétique, le second membre de l'équation (8) s'annule.

En effet, pour de la poussière $\mathcal{L}_m = -\rho$ où ρ est la densité de masse et $T = -\rho + 3p = -\rho$ avec p la pression, nulle ici. Pour un rayonnement électromagnétique, on a $T = 0$ et $\mathcal{L}_m \propto B^2 - E^2 = 0$.

Donc, dans la plupart des cas recontrés dans l'univers, le champ scalaire φ n'est pas sourcé et devient constant égal à 1.

La phase (3) s'écrit de la même façon que la phase de l'intégrale de chemin de la Relativité Générale (RG) :

$$\theta_{RG} = \frac{1}{\hbar c}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left(\frac{R}{2\tilde{\kappa}}+\mathcal{L}_m\right) \tag{9}$$

Pour redonner la RG, il faut donc fixer la valeur de ϵ à l'énergie de Planck :

$$\epsilon = \sqrt{\frac{\hbar c}{\tilde{\kappa}}} \tag{10}$$

1.4 Le Modèle Standard comme limite

Dans cette partie, on considère $\mathcal{L}_m$ comme le lagrangien du modèle standard.

Si on veut négliger la gravité et travailler en espace-temps plat, des instabilités de la théorie semblent apparaître :
- Si on injecte $R = cte$ dans (2), on se retrouve avec l'intégrale du lagrangien au carré, créant des instabilités ;
- L'équation (2) diverge lorsque $R = 0$.

Ces deux problèmes sont facilement résolus en comprenant le rôle central que joue le champ φ (ou κ).

En RG, trouve une "équation d'évolution" de $\tilde{\kappa}$ en prenant la trace de l'équation d'Einstein :

$$\tilde{\kappa} = -\frac{R}{T} \tag{11}$$

Cette façon d'écrire cette équation suggère que $\tilde{\kappa}$ diverge lorsque $T = 0$. Ce n'est pas le cas, car on a aussi $R = 0$ et $\tilde{\kappa}$ garde sa valeur.

Le terme de source de l'équation (8) est majoré par la densité d'énergie ρ :

$$\frac{\kappa}{3}\left(T - \mathcal{L}_m\right) < \frac{\kappa\rho}{2} \tag{12}$$

Le champ φ est donc du même ordre de grandeur que les termes du développement post-newtonien de la métrique en RG. Si on néglige la gravité, donc les variations de la métrique, on néglige aussi les variations de $\kappa = -\frac{R}{\mathcal{L}_m}$ (ou φ). Dans ce cadre-là, on prendra $\kappa = \tilde{\kappa}$ (ou $\varphi = 1$). Ainsi, l'intégrale de chemin de la RI peut s'écrire, sous une forme approchée :

$$Z_{ER} \approx \int \mathrm{D}g \prod_i \mathrm{D}f_i \exp\left(\frac{i}{2\epsilon^2\tilde{\kappa}} \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}_m\right) \tag{13}$$

qui est exactement l'intégrale de chemin du modèle standard avec la gravité négligée.

2 Trou Noir Chargé en Relativité Intriquée

Pour étudier un trou noir, on ne peut pas étudier un trou noir du vide, tel que celui de Schwarzschild, car on a $\mathcal{L}_m = 0$. Le plus simple est de considérer un trou noir chargé électriquement, créant ainsi un champ électrique.

On considère donc un trou noir de masse M et de charge Q. On travaille dans un système d'unité tel que $c = \tilde{\kappa} = 1$.

2.1 Lagrangien et équations de champs

L'action s'écrit :

$$S \propto \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\frac{\mathcal{L}_m^2}{R} \tag{14}$$

ou sous sa forme tenseur-scalaire :

$$S \propto \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left(\frac{\varphi^2 R}{2\tilde{\kappa}} + \varphi\mathcal{L}_m\right) \tag{15}$$

avec

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{16}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{17}$$

A_μ est le quadri-potentiel vecteur. On en déduit le tenseur énergie impulsion :

$$T_{\mu\nu} = 2\left(F_{\mu\sigma} F_\nu{}^\sigma + g_{\mu\nu} \frac{\mathcal{L}_m}{2} \right) \tag{18}$$

On rappelle les équation de champ (4) et (5) :

$$\begin{aligned} \varphi &= -\tilde{\kappa} \frac{\mathcal{L}_m}{R} \\ G_{\mu\nu} &= \frac{\tilde{\kappa}}{\varphi} T_{\mu\nu} + \frac{1}{\varphi^2} \left(\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \Box \right) \varphi^2 \end{aligned}$$

et l'équation sur le champ électromagnétique :

$$\nabla_\nu \left(\varphi F^{\mu\nu} \right) = 0 \tag{19}$$

2.2 Transformation conforme et gravitation Einstein-Maxwell-dilaton

Le but d'une transformation conforme est de changer la métrique :

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow g^*_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu} \tag{20}$$

où Ω est une fonction à choisir et qui va permettre de découpler les champs R et φ dans l'action. En choisissant $\Omega = \varphi = e^{-2\beta\phi}$, l'action s'écrit [6] :

$$S = \int \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g^*} \left(\frac{R^*}{2\tilde{\kappa}} - \frac{12\beta^2}{\tilde{\kappa}} g^{*\mu\nu} \partial_\mu \phi \, \partial_\nu \phi + e^{-2\beta\phi} \mathcal{L}^*_m \right) \tag{21}$$

Toutes les grandeurs avec une étoile ont été calculées avec la nouvelle métrique. Les détails de la transformation conforme sont en annexes.

Cette action est très proche de l'action de la gravitation Einstein-Maxwell-dilaton (EMd), donnée par :

$$S = \int \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\tilde{\kappa}} \left(R - 2 \partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi \right) + e^{-2\alpha\phi} \mathcal{L}_m \right) \tag{22}$$

Cette action comporte des termes connus : la courbure scalaire R et le lagrangien $\mathcal{L}_m$. On rajoute à cela un champ scalaire ϕ avec un terme cinétique et un couplage non-linéaire au champ électromagnétique. La force de ce couplage est donnée par la valeur de α.

En faisant varier cette action par rapport aux différents champs, on trouve les équations suivantes :

$$\begin{cases} \nabla_\nu \left(\mathrm{e}^{-2\alpha\phi} F^{\mu\nu} \right) = 0 \\ \Box \phi = -\dfrac{\alpha}{2} \mathrm{e}^{-2\alpha\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ R_{\mu\nu} = 2 \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + \mathrm{e}^{-2\alpha\phi} T_{\mu\nu} \end{cases} \tag{23}$$

On a posé $\tilde{\kappa} = 1$. On retrouve la RG avec un champ scalaire non-couplé pour $\alpha = 0$, la théorie de Kaluza-Klein pour $\alpha = \sqrt{3}$ et la RI pour $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

2.3 Théorie de Kaluza-Klein

Dans ce paragraphe, tout indice grec ($\mu, \nu, \lambda, \dots$) prend les valeurs $\{0, 1, 2, 3\}$ et tout indice latin ($a, b, c, \dots$) prend les valeurs $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

La théorie de Kaluza-Klein fait l'hypothèse d'un univers à cinq dimensions, avec une dimension compactifiée : y. L'ajout d'une dimension supplémentaire va permettre d'introduire, directement dans la métrique, le quadri-vecteur de l'électromagnétisme et un champ scalaire de la façon suivante [7] :

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \phi^2 A_\mu A_\nu & A_\mu \phi^2 \\ A_\nu \phi^2 & \phi^2 \end{pmatrix} \tag{24}$$

avec $g_{\mu\nu}$ la métrique classique à quatre dimensions, A_μ le potentiel électromagnétique et ϕ un champ scalaire. On ajoute aussi un terme sur les indices de 0 à 4 pour simplifier le calcul du déterminant : $\det(g_{ab}) = \phi^2 \det(g_{\mu\nu})$.

On fait aussi l'hypothèse de compactification suivante [7] :

$$\frac{\partial g_{ab}}{\partial y} = 0 \tag{25}$$

L'observation impose cette condition. On ne voit pas de dimension supplémentaire donc celle-ci doit être compactifiée et, a priori, cylindrique [7]. De plus, de manière effective, on n'observe pas de dépendance des différents champs par rapport à cette nouvelle coordonnée.

L'action s'écrit :

$$S = \int \mathrm{d}^4x \mathrm{d}y \sqrt{-{}^{(5)}g}\ {}^{(5)}R \tag{26}$$

Après calcul de la courbure scalaire ${}^{(5)}R$ à cinq dimensions et une transformation conforme, l'action et les équations de champs de la théorie Kaluza-Klein prennent la même forme que l'action (22) et les équations (23) avec $\alpha = \sqrt{3}$. Les calculs aboutissant à ce résultat sont en annexes.

L'intérêt de cette théorie est que les solutions sont faciles à trouver car ce sont des solutions du vide à cinq dimensions. La proximité des équations de champs permet également d'intuiter les solutions pour la gravité EMd et donc pour la RI.

3 Etude de la solution de Trou Noir chargé statique en Relativité Intriquée

3.1 Solution en gravitation EMd

La solution de trou noir chargé en gravitation EMd est donnée par [8, 9] :

$$\mathrm{d}s^2 = -\lambda^2 \mathrm{d}t^2 + \lambda^{-2}\mathrm{d}r^2 + \rho'^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2\right) \tag{27}$$

$$\mathrm{e}^{-2\alpha\phi} = \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{\frac{-2\alpha^2}{1+\alpha^2}} \tag{28}$$

$$A = -\frac{Q}{r}\mathrm{d}t \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)\left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}} \\ \rho'^2 &= r^2 \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{\frac{2\alpha^2}{1+\alpha^2}} \end{aligned} \tag{30}$$

Les paramètres r_+ et r_- sont reliés à la masse M et la charge Q par les relations :

$$2M = r_+ + \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} r_- \qquad Q^2 = \frac{r_+ r_-}{1+\alpha^2} \tag{31}$$

Avant d'étudier cette solution, je l'ai vérifiée sur SageManifolds. Le code est disponible en [10].

3.2 Solution en Relativité Intriquée

La solution en RI se retrouve en prenant $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ et en faisant la transformation conforme inverse [9, 11] :

$$\mathrm{d}s^2 = -\lambda_0^2 \mathrm{d}t^2 + \lambda_r^{-2} \mathrm{d}r^2 + \rho^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2\right) \tag{32}$$

$$\varphi = \mathrm{e}^{-\phi/\sqrt{3}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{\frac{2}{13}}} \tag{33}$$

$$A = -\frac{Q}{r}\mathrm{d}t \tag{34}$$

$$\begin{aligned} \lambda_0^2 &= \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)\left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{\frac{15}{13}} \\ \lambda_r^2 &= \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)\left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{\frac{7}{13}} \\ \rho^2 &= r^2 \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{\frac{6}{13}} \end{aligned} \tag{35}$$

Même s'il est impossible de prendre $r_- = 0$ (cela reviendrait à avoir $Q = 0$ et donc $\mathcal{L}_m = 0$), on peut faire approcher la charge aussi proche qu'on veut de 0. On remarque alors assez facilement que la solution tend vers la métrique de Schwarzschild.

Cette solution a aussi été vérifiée. Le code pour la vérification est au paragraphe *Vérification de la solution* de [12].

3.3 Le tenseur de Weyl

3.3.1 Définition

Le tenseur de Weyl est défini par :

$$C_{\kappa\lambda\mu\nu} = R_{\kappa\lambda\mu\nu} - \frac{1}{2}\left(R_{\kappa\mu}g_{\lambda\nu} - R_{\kappa\nu}g_{\lambda\mu} + R_{\lambda\nu}g_{\kappa\mu} - R_{\lambda\mu}g_{\kappa\nu}\right) + \frac{1}{6}\left(g_{\kappa\mu}g_{\lambda\nu} - g_{\kappa\nu}g_{\lambda\mu}\right) R$$

Il est la partie sans trace du tenseur de Riemann. On peut facilement vérifier qu'en multipliant par $g^{\kappa\mu}$ on obtient :

$$g^{\kappa\mu} C_{\kappa\lambda\mu\nu} = R_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}\left(R g_{\lambda\nu} + 2R_{\lambda\nu}\right) + \frac{1}{2} g_{\lambda\nu} R = 0$$

Du fait de ses symétries, le tenseur de Riemann $R_{\kappa\lambda\mu\nu}$ n'a que 20 composantes indépendantes (au lieu des 256 composantes au total). Les tenseurs de Ricci et de Weyl contiennent chacun 10 composantes indépendantes.

3.3.2 Les scalaires NP-Weyl

Tétrade nulle : Une tétrade nulle est un ensemble de quatre vecteurs $(l, n, m, \overline{m})$ dont la norme est nulle. Ils vérifient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} l_\mu l^\mu = n_\mu n^\mu = m_\mu m^\mu = \overline{m}_\mu \overline{m}^\mu = 0 \\ l_\mu n^\mu = -1 \qquad m_\mu \overline{m}^\mu = 1 \end{aligned} \tag{36}$$

Lorsque la métrique est diagonale, il est facile de construire cette tétrade. En effet, $(\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$ est une base orthogonale. En divisant par les normes respectives, on forme une base orthonormée : (e_0, e_1, e_2, e_3). On construit ensuite la tétrade nulle ainsi :

$$\begin{aligned} l &= \frac{e_0 + e_1}{\sqrt{2}} \\ n &= \frac{e_0 - e_1}{\sqrt{2}} \\ m &= \frac{e_2 + ie_3}{\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{37}$$

On complète ensuite la tétrade avec le complexe conjugué de m : $\overline{m}$.

La procédure est la même si on trouve une base orthonormale $(\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ avec ϵ_0 de type temps et les trois autres vecteurs de type espace.

La métrique s'exprime alors en fonction des composantes des formes associées à ces vecteurs :

$$g_{\mu\nu} = -l_\mu n_\nu - n_\mu l_\nu + m_\mu \overline{m}_\nu + \overline{m}_\mu m_\nu \tag{38}$$

Scalaires NP-Weyl : A partir d'une tétrade nulle $(l, n, m, \overline{m})$ et du tenseur de Weyl, on peut construire cinq scalaires complexes et indépendants dans lesquels on aura encodé toutes les informations sur ce tenseur :

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= C_{\kappa\lambda\mu\nu} l^\kappa m^\lambda l^\mu m^\nu \\ \Psi_1 &= C_{\kappa\lambda\mu\nu} l^\kappa n^\lambda l^\mu m^\nu \\ \Psi_2 &= C_{\kappa\lambda\mu\nu} l^\kappa m^\lambda \overline{m}^\mu n^\nu \\ \Psi_3 &= C_{\kappa\lambda\mu\nu} n^\kappa l^\lambda n^\mu \overline{m}^\nu \\ \Psi_4 &= C_{\kappa\lambda\mu\nu} n^\kappa \overline{m}^\lambda n^\mu \overline{m}^\nu \end{aligned} \tag{39}$$

3.3.3 Classification des espace-temps de Petrov

Soit l un vecteur de la tétrade nulle. l est appelé *direction nulle pincipale* (*dnp*) si et seulement si $\Psi_0 = 0$. Si le tenseur de Weyl est non-nul, il en existe toujours une.

On dit que cette *dnp* est de multiplicité $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ si et seulement si $\Psi_0 = \cdots = \Psi_{k-1} = 0$ et $\Psi_k \neq 0$.

On classifie les espace-temps de la façon suivante :
- **type I** : quatre *dnp* distinctes
- **type II** : une *dnp* de multiplicité, les autres distinctes
- **type D** : deux *dnp* distinctes de multiplicité 2
- **type III** : une *dnp* de multiplicité 3, la dernière est distincte
- **type N** : une *dnp* de multiplicité 4
- **type O** : conformément plate (si le tenseur de Weyl est nul)

3.3.4 L'espace-temps du Trou Noir Chargé Statique en RI

La base $(e_0 = (\lambda_0, 0, 0, 0), e_1 = (0, \lambda_r^{-1}, 0, 0), e_2 = (0, 0, \rho, 0), e_3 = (0, 0, 0, \rho \sin(\theta)))$ est orthonormée.

On construit la tétrade $(l, n, m, \overline{m})$ à partir de cette base orthonormée comme expliqué ci-dessus. On calcule ensuite les scalaires NP-Weyl :

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= 0 \\ \Psi_1 &= 0 \\ \Psi_2 &\neq 0 \\ \Psi_3 &= 0 \\ \Psi_4 &= 0 \end{aligned} \tag{40}$$

l et n sont donc deux *dnp* de multiplicité 2. L'espace-temps du trou noir chargé en RI est donc de type D.

Les solutions extérieures de corps isolés caractérisés par leur masse et leur moment cinétique sont de type D (Espaces-temps de Schwarzschild, Reissner-Nordström, Kerr et Kerr-Newman par exemple).

Le calcul de la tétrade et des scalaires NP-Weyl pour la solution de trou noir chargé statique en RI est disponible au paragraphe *Tenseur de Weyl* de [12].

3.4 Une solution d'un trou noir chargé magnétiquement

On trouve une solution décrivant un trou noir chargé magnétiquement en faisant la transformation suivante [8] :

$$\varphi \longrightarrow \varphi_m = \frac{1}{\varphi} \tag{41}$$

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow F_{m\,\mu\nu} = \frac{1}{2}\varphi\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda} \tag{42}$$

où $\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}$ est le tenseur dualiseur de Levi-Cività. L'indice m est pour toutes les grandeurs calculées avec la solution de trou noir chargé magnétiquement. La charge Q est, dans ce paragraphe, associée à une charge magnétique.

En gravitation EMd, la métrique n'est pas changée. Mais pour retrouver la solution en RI, il faut effectuer une autre transformation conforme que celle effectuée pour le trou noir chargé électriquement. En effet, on fait la transformation suivante :

$$g^*_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu} = \varphi_m^{-2} g^*_{\mu\nu} = \varphi^2 g^*_{\mu\nu}$$

Dans cette nouvelle géométrie, l'équation du mouvement pour φ_m est toujours vérifiée. On a toujours $\varphi_m = -\mathcal{L}_{mm}/R_m$.

Lors de la transformation, $\mathcal{L}_m$ change de signe ($\mathcal{L}_m \propto B^2 - E^2$). R change aussi de signe :

$$\begin{aligned} R &\propto -\frac{1}{r^4\left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{6/13}} \\ R_m &\propto \frac{\left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{2/13}}{r^4} \end{aligned} \tag{43}$$

Le changement de signe de la courbure scalaire R assure que le champ scalaire φ ne change pas de signe.

La vérification de la solution et les différents calculs pour la solution chargée magnétiquement sont au paragraphe *Solution avec monopôle magnétique* de [12].

4 Trou Noir Chargé en rotation

Dans cette partie, on considèrera un trou noir chargé en rotation de masse M, de charge Q et de moment cinétique J. On définit $a = \frac{J}{M}$.

4.1 L'algorithme de Newman-Janis

4.1.1 Description de l'algorithme

En RG, il existe une procédure, l'Algorithme de Newman-Janis (ANJ), qui permet de passer de solutions statiques et à symétrie sphérique, à des solutions en rotation et à symétrie cylindrique [13].

Cet algorithme permet de passer de la solution de Schwarzschild (trou noir statique et non chargé) à celle de Kerr (trou noir en rotation et non chargé) et de celle de Reissner-Nordstöm (trou noir statique chargé) à celle de Kerr-Newman (trou noir chargé et en rotation).

L'algorithme est complexe et une étape semble plutôt arbitraire. En effet, il faut d'abord complexifier les coordonnées puis faire un changement de coordonées pour que la métrique reste réelle (par exemple, on fait le changement : $r \longrightarrow r + ia\cos(\theta)$). La première étape est arbitraire : la seule raison d'utiliser cette complexification des coordonnées plutôt qu'une autre est que cela donne le bon résultat. Une explication des différentes étapes de l'algorithme est disponible en annexes.

4.1.2 Utilisation de l'algorithme en RG

On part d'une métrique de la forme :

$$\mathrm{d}s^2 = -f\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{f} + r^2\mathrm{d}\Omega^2 \tag{44}$$

où f est une fonction de la coordonnée r seulement. Cette forme de métrique peut décrire la métrique de Schwarzschild ($f = 1-\frac{2M}{r}$) ou la métrique de Reissner-Nordstöm ($f = 1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}$).

Après les différentes étapes de l'algorithme, on trouve une métrique de la forme [14, 15] :

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{\Delta}{H}\left(\mathrm{d}t - a\sin^2(\theta)\,\mathrm{d}\varphi\right)^2 + \frac{H}{\Delta}\mathrm{d}r^2 + H\mathrm{d}\theta^2 + \frac{\sin^2(\theta)}{H}\left(a\mathrm{d}t - \left(r^2+a^2\right)\mathrm{d}\varphi\right)^2 \tag{45}$$

où on a défini :

$$\begin{aligned} H &= r^2 + a^2\cos^2(\theta) \\ \Delta &= r^2 f + a^2 \end{aligned} \tag{46}$$

Suivant le choix de f, on trouve la métrique de Kerr ou la métrique de Kerr-Newman.

4.1.3 L'algorithme de Newman-Janis en gravitation EMd

Il est possible d'appliquer l'algorithme de Newman-Janis à beaucoup de solutions, même hors de la RG. En revanche, il est compliqué de savoir si les métriques qu'on obtient sont bien solutions des équations de champ.

En reprenant les notations de la section 3.1, la métrique issue de l'algorithme est [16] :

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{\Delta'}{H'}\left(\mathrm{d}t - a\sin^2(\theta)\,\mathrm{d}\varphi\right)^2 + \frac{H'}{\Delta'}\mathrm{d}r^2 + H'\mathrm{d}\theta^2 + \frac{\sin^2(\theta)}{H'}\left(a\mathrm{d}t - \left(\rho'^2+a^2\right)\mathrm{d}\varphi\right)^2 \tag{47}$$

$$\begin{aligned} H' &= \rho'^2 + a^2\cos^2(\theta) \\ \Delta' &= \rho'^2\lambda^2 + a^2 \end{aligned} \tag{48}$$

Après multiples efforts pour trouver la transformation du champ électromagnétique et du champ scalaire, il semble que cette métrique ne puisse pas être solution des équations de la gravitation EMd.

4.2 La solution de Kaluza-Klein

Puisque la théorie de Kaluza-Klein est une théorie du vide, il est très simple de trouver des solutions. Il suffit de résoudre l'équation ${}^{(5)}R_{ab} = 0$. Mais il existe une méthode encore plus simple.

Considérons le cas où $\varphi = cte$, $F_{\mu\nu} = 0$ et $g_{\mu\nu}$ est n'importe quelle solution du vide de la relativité générale. Alors la métrique :

$$\mathrm{d}s_5^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu + \mathrm{d}y^2 \tag{49}$$

est aussi solution des équations de Kaluza-Klein.

Lorsque $F_{\mu\nu} \neq 0$, on ne peut plus utiliser cette astuce. Mais on peut générer un champ électromagnétique en faisant une transformation de Lorentz de la métrique (49) selon la direction y :

$$\begin{aligned} t &\longrightarrow t\cosh\gamma - y\sinh\gamma \\ y &\longrightarrow y\cosh\gamma - t\sinh\gamma \end{aligned} \tag{50}$$

γ est un paramètre dépendant de M et de Q.

En appliquant cette méthode à la métrique de Kerr, on obtient la solution de trou noir chargé et en rotation de la théorie de Kaluza-Klein. En revenant à quatre dimensions, la solution s'écrit [17, 18] :

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{\Delta_\theta}{\sqrt{H_1 H_2}}\left(\mathrm{d}t + \frac{\sqrt{2mq}}{\Delta_\theta} a\sin^2(\theta)\,\mathrm{d}\varphi\right)^2 + \sqrt{H_1 H_2}\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{\Delta} + \mathrm{d}\theta^2 + \frac{\Delta}{\Delta_\theta}\sin^2(\theta)\,\mathrm{d}\varphi^2\right) \tag{51}$$

$$A = -\frac{Qr}{H_2}\mathrm{d}t + \sqrt{\frac{m(q-2m)}{2}}\, ra\sin^2(\theta)\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{H_2} \tag{52}$$

$$\mathrm{e}^{-4\phi/\sqrt{3}} = \frac{H_2}{H_1} \tag{53}$$

avec :

$$\begin{aligned} H_1 &= r^2 + a^2\cos^2(\theta) \\ H_2 &= r^2 + a^2\cos^2(\theta) + r(q-2m) \\ \Delta &= r^2 - 2mr + a^2 \\ \Delta_\theta &= r^2 - 2mr + a^2\cos^2(\theta) \end{aligned} \tag{54}$$

q et m sont des paramètres reliés à la masse M et la charge Q par les relations :

$$\begin{aligned} 2M &= \frac{2m+q}{2} \\ Q^2 &= \frac{q(q-2m)}{4} \end{aligned} \tag{55}$$

4.3 Recherche de la solution de Trou Noir Chargé en rotation en gravitation EMd

4.3.1 Construction de la solution

Lors de mes recherches pour trouver une métrique, un champ électromagnétique et un champ scalaire, solutions des équations (23) et décrivant un trou noir chargé en rotation, j'ai posé quatre critères que cette solution devait vérifier :

- **Critère (I) :** La solution en rotation doit redonner la solution statique en gravitation EMd (27)-(29)-(28) lorsque $a = 0$.
- **Critère (II) :** La solution doit redonner la métrique de Kerr (45) lorsque la charge Q est nulle.
- **Critère (III) :** La solution doit coincider avec la solution de Kaluza-Klein (51) lorsque $\alpha = \sqrt{3}$.
- **Critère (IV) :** La solution doit coincider avec la solution de Kerr-Newman lorsque $\alpha = 0$.

On se propose dans cette partie de trouver une solution vérifiant ces critères.

Le passage de la solution de Kaluza-Klein (51)-(52)-(53) en statique ($a = 0$) à la solution en gravitation EMd (27)-(29)-(28) se fait avec un changement de coordonnées : $r \longrightarrow r - r_-$.

En appliquant la transformation inverse à la métrique (27) et en prenant $\alpha = \sqrt{3}$, on trouve les relations entre q, m, r_+ et r_- :

$$\begin{aligned} r_+ &= q \\ r_- &= q - 2m \end{aligned} \tag{56}$$

Ces équations sont cohérentes avec les relations (31) et (55).

Le critère **(III)** doit alors être modifié : La solution doit coincider avec la solution de Kaluza-Klein lorsque $\alpha = \sqrt{3}$ et après avoir fait le changement de variable $r \longrightarrow r + r_-$.

On propose donc la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = &-\frac{\Delta_\theta}{H_1^{\beta_1} H_2^{\beta_2}} \left(\mathrm{d}t + \frac{\sqrt{r_+ (r_+ - r_-)}}{\Delta_\theta} (r - r_-)\, a \sin^2(\theta)\, \mathrm{d}\varphi \right)^2 + H_1^{\beta_3} H_2^{\beta_4} \frac{\mathrm{d}r^2}{\Delta} \\ &+ H_1^{\beta_5} H_2^{\beta_6} \mathrm{d}\theta^2 + H_1^{\beta_7} H_2^{\beta_8} \frac{\Delta}{\Delta_\theta} \sin^2(\theta)\, \mathrm{d}\varphi^2 \end{aligned} \tag{57}$$

$$A = \frac{Q\,(r - r_-)}{H_2} \mathrm{d}t - \sqrt{\frac{r_- (r_+ - r_-)}{4}}\, a \sin^2(\theta)\, \frac{(r - r_-)}{H_2} \mathrm{d}\varphi \tag{58}$$

$$\mathrm{e}^{-2\alpha\phi} = \left(\frac{H_1}{H_2} \right)^{\frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1}} \tag{59}$$

où les fonctions H_1, H_2, Δ et Δ_θ sont définies par :

$$\begin{aligned} H_1 &= (r - r_-)^2 + a^2 \cos^2(\theta) \\ H_2 &= r\,(r - r_-) + a^2 \cos^2(\theta) \\ \Delta &= (r - r_-)(r - r_+) + a^2 \\ \Delta_\theta &= (r - r_-)(r - r_+) + a^2 \cos^2(\theta) \end{aligned} \tag{60}$$

Les exposants β_i ne dépendent que du paramètre α.

Le critère **(I)** permet de fixer la valeur des β_i :

$$\begin{aligned} \beta_1 = \beta_3 = \beta_5 = \beta_7 &= \frac{\alpha^2 - 1}{1 + \alpha^2} = -\beta \\ \beta_2 = \beta_4 = \beta_6 = \beta_8 &= \frac{2}{1 + \alpha^2} = 1 + \beta \end{aligned} \tag{61}$$

La métrique s'écrit donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = &-\frac{\Delta_\theta H_1^\beta}{H_2^{1+\beta}}\left(\mathrm{d}t + \frac{\sqrt{r_+\left(r_+ - r_-\right)}}{\Delta_\theta}\left(r - r_-\right) a \sin^2\left(\theta\right) \mathrm{d}\varphi\right)^2 \\ &+ \frac{H_2^{1+\beta}}{H_1^\beta}\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{\Delta} + \mathrm{d}\theta^2 + \frac{\Delta}{\Delta_\theta}\sin^2\left(\theta\right)\mathrm{d}\varphi^2\right)\end{aligned} \tag{62}$$

Par sa construction, cette solution vérifie le critère **(I)**.

En faisant tendre Q vers zéro, on a $H_1 = H_2 = H$ avec H défini en (46). Le champ électromagnétique s'annule et $\mathrm{e}^{-2\alpha\phi} = 1$. La métrique devient exactement la métrique de Kerr (45). Le critère **(II)** est donc vérifié.

Lorsque $\alpha = \sqrt{3}$, $\beta = -1/2$, on retrouve la solution de Kaluza-Klein (51)-(52)-(53) après le changement de variable $r \longrightarrow r + r_-$. Le critère **(III)** est donc aussi vérifié.

Prenons $\alpha = 0$ dans la solution (62)-(58)-(59) :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = &-\frac{\Delta_\theta H_1}{H_2^2}\left(\mathrm{d}t + \frac{\sqrt{r_+\left(r_+ - r_-\right)}}{\Delta_\theta}\left(r - r_-\right) a \sin^2\left(\theta\right) \mathrm{d}\varphi\right)^2 \\ &+ \frac{H_2^2}{H_1}\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{\Delta} + \mathrm{d}\theta^2 + \frac{\Delta}{\Delta_\theta}\sin^2\left(\theta\right)\mathrm{d}\varphi^2\right)\end{aligned} \tag{63}$$

La métrique (63) ne correspond pas à la métrique de Kerr-Newman, comme on l'attendait. Mais il est possible qu'un changement de coordonnées redonne la métrique de Kerr-Newman.

4.3.2 Vérification de la solution

L'équation de Maxwell peut se réécrire :

$$\nabla_\nu\left(\mathrm{e}^{-2\alpha\phi}F^{\mu\nu}\right) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \partial_\nu\left(\sqrt{-g}\,\mathrm{e}^{-2\alpha\phi}F^{\mu\nu}\right) = 0 \tag{64}$$

Pour la solution statique (29), le champ électromagnétique est le même en RI qu'en RG (solution de Reissner-Nordström). Cela est dû au fait que dans l'équation (64) le champ scalaire compense exactement les termes dépendants de α dans le déterminant g.

En rotation, on observe le même phénomène. L'équation de Maxwell peut se réécrire :

$$\partial_\nu\left(\frac{H_2^2}{H_1}\sin\left(\theta\right)F^{\mu\nu}\right) = 0 \tag{65}$$

Or, dans la solution de Kerr-Newman, le champ électromagnétique est solution de l'équation :

$$\partial_\nu\left(H_1 \sin\left(\theta\right) {F_{KN}}^{\mu\nu}\right) = 0 \tag{66}$$

On trouve donc un champ électromagnétique, solution de (65) en posant :

$$F^{\mu\nu} = \frac{H_1^2}{H_2^2}{F_{KN}}^{\mu\nu} \tag{67}$$

Il reste maintenant à vérifier si ce champ électromagnétique est cohérent avec celui engendré par (58). Pour cela, il faut faire descendre les indices de (67) grâce à la métrique (62). Les calculs [19] montre que cette solution est cohérente avec la partie temporelle du quadri-vecteur (58).

Cependant, lorsqu'on fait descendre les indices de (67), il apparaît des termes facteurs de $\left(H_2/H_1\right)^{2\beta}$. Ces termes pourraient venir d'un terme en $\left(H_2/H_1\right)^{2\beta+1}$ qu'on rajouterait dans la partie spatiale du potentiel (58). Même après l'ajout de ce terme, la solution valide toujours les critères. Il suffit de prendre $a = 0$ ou $v = 0$ pour annuler la partie spatiale du quadri-potentiel. De plus, lorsque $\alpha = \sqrt{3}$, $\beta = -1/2$ et ce terme n'apparaît pas dans la solution de Kaluza-Klein, ce qui est conforme avec (52).

Conclusion

La théorie de la Relativité Intriquée donne, dans le cas du trou noir chargé, des résultats proches de la Relativité Générale. Dans l'univers, les trous noirs sont très peu chargés car statistiquement ils attirent autant de particules chargées positivement que négativement. Ainsi, la métrique de Schwarzschild est une très bonne approximation pour un trou noir réel en RI.

Bien qu'elle n'est pas encore totalement vérifiée, la solution du trou noir chargé en rotation développée dans ce rapport vérifie aussi ce résultat. Pour un trou noir très peu chargé, la métrique de Kerr est une très bonne approximation d'un trou noir réel en RI.

Bien que plus complexe, les solutions en Relativité Intriquée sont très proches de celles en Relativité Genrale. La RG a été grandement testée dans des régions de l'univers très contraintes par les observations (le système solaire, par exemple). Pour prétendre être une théorie allant au-delà de la RG, il faut donc que la RI soit éprouvée dans ces situations-là.

Calendrier

fin mars - mi-avril : Découverte de la théorie de la Relativité Intriquée et de la solution de trou noir chargé statique

— Découverte de la théorie de la Relativité Intriquée et des concepts l'entourant (Transformation conforme, théories alternatives de la Relativité Générale, etc.)
— Prise en main du logiciel de calcul formel, SageMath. L'extension SageManifolds, qui permet de faire des calculs sur une variété courbe, a été utilisée pour tous les calculs durant le stage.
— Vérification de la solution de trou noir chargé statique en gravitation EMd.
— Etude de la solution et de ses propriétés. Etude du tenseur de Weyl, de la transformation conforme, de la solution chargée magnétiquement.

mi-avril - mi-mai : Le trou noir chargé en rotation avec l'algorithme de Newman-Janis et trou noir en rotation lente

— Lecture de l'article [16] : Utilisation de l'algorithme de Newman-Janis sur la solution statique en gravitation EMd.
— Recherche de la transformation du champ électromagnétique et du champ scalaire qui permettrait de résoudre les équations de la gravitation EMd. Aucun résultat satisfaisant n'a été trouvé.
— [18] propose une solution de trou noir chargé en rotation lente. C'est une solution perturbative. Seuls les termes en a sont gardés et on enlève tous les termes en a^2. J'ai tenté de vérifier la solution mais aucun calcul sur SageManifolds n'aboutissait. Cela est peut-être dû au fait que la solution est perturbative. Le calcul doit alors faire intervenir tous les ordres, au lieu de ne garder que les termes linéaires en a.

juin : La théorie Kaluza-Klein et le trou noir chargé en rotation en gravitation EMd

— Familiarisation avec la théorie de Kaluza-Klein. Etude en cinq dimensions et de la compactification en quatre dimensions. Etude du lien avec la gravitation EMd.
— Elaboration de la métrique pour la solution en gravitation EMd.

Références

[1] A. Einstein. Prinzipielles zur allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, 360(4) :241–244, January 1918. Traduction anglaise : `https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol7-trans/49`.

[2] Albert Einstein. Kritisches zu einer von Hrn. de Sitter gegebenen Lösung der Gravitationsgleichungen. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin*, pages 270–272, January 1918. Traduction anglaise : `https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol7-trans/52`.

[3] Olivier Minazzoli. Quantum of action in entangled relativity, February 2023. arXiv :2206.03824 [gr-qc, physics :quant-ph].

[4] Hendrik Ludwig, Olivier Minazzoli, and Salvatore Capozziello. Merging matter and geometry in the same Lagrangian. *Physics Letters B*, 751 :576–578, December 2015.

[5] Olivier Minazzoli. Rethinking the link between matter and geometry. *Physical Review D*, 98(12) :124020, December 2018.

[6] Denis Arruga and Olivier Minazzoli. Analytical external spherical solutions in entangled relativity. *The European Physical Journal C*, 81(11) :1027, November 2021.

[7] J.M. Overduin and P.S. Wesson. Kaluza-Klein gravity. *Physics Reports*, 283(5-6) :303–378, April 1997.

[8] Christoph F.E. Holzhey and Frank Wilczek. Black holes as elementary particles. *Nuclear Physics B*, 380(3) :447–477, August 1992.

[9] Olivier Minazzoli and Edison Santos. Charged black hole and radiating solutions in entangled relativity. *The European Physical Journal C*, 81(7) :640, July 2021.

[10] `https://github.com/TheoAbrial/Stage_relativite_intriquee/blob/3a1ddd6ec9d43349f26eaf3b4127aeff0a0c3db7/Trou_Noir_Statique_EMd.ipynb`.

[11] Olivier Minazzoli. Black-holes and neutron stars in entangled relativity, March 2022. Number : arXiv :2203.11122 arXiv :2203.11122 [gr-qc].

[12] `https://github.com/TheoAbrial/Stage_relativite_intriquee/blob/716194ced75ea75d748d4a0685481954d49a33be/Trou_Noir_Statique_RI.ipynb`.

[13] S. P. Drake P. Szekeres. An explanation of the Newman-Janis Algorithm. *General Relativity and Gravitation*, 32(3) :445–457, March 2000. arXiv :gr-qc/9807001.

[14] Mustapha Azreg-Aïnou. Generating rotating regular black hole solutions without complexification. *Physical Review D*, 90(6) :064041, September 2014. arXiv :1405.2569 [gr-qc, physics :hep-th, physics :math-ph].

[15] Haroldo C. D. Lima Junior, Luís C. B. Crispino, Pedro V. P. Cunha, and Carlos A. R. Herdeiro. Spinning black holes with a separable Hamilton–Jacobi equation from a modified Newman–Janis algorithm. *The European Physical Journal C*, 80(11) :1036, November 2020.

[16] Javier Badía and Ernesto F. Eiroa. Shadows of rotating Einstein-Maxwell-dilaton black holes surrounded by plasma, October 2022. Number : arXiv :2210.03081 arXiv :2210.03081 [gr-qc].

[17] Gary T. Horowitz and Toby Wiseman. General black holes in Kaluza-Klein theory, August 2011. arXiv :1107.5563 [gr-qc, physics :hep-th].

[18] James H. Horne and Gary T. Horowitz. Rotating Dilaton Black Holes. *Physical Review D*, 46(4) :1340–1346, August 1992. arXiv :hep-th/9203083.

[19] `https://github.com/TheoAbrial/Stage_relativite_intriquee/blob/0cb431f5db29e080a7e985188ee7d14bd3e08e0b/Trou_Noir_Rotation_EMd.ipynb`.

ANNEXES

Transformation conforme

Dans cette partie, on va étudier comment se transforment les différents tenseurs lors d'une transformation conforme de la forme :

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow g^*_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$$

Le tenseur de Ricci

Le tenseur de Ricci s'exprime à partir des symbôles de Christoffel :

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma_{\mu,\nu} + \Gamma_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\alpha\nu}$$

où $\Gamma_\mu = \Gamma^\alpha_{\mu\alpha}$ et les symboles de Christoffel sont reliés à la métrique par la relation $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}\right)$.

La transformation des symboles de Christoffel lors de la transformation conforme est la suivante :

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^{*\alpha}_{\mu\nu} - \delta^\alpha_\mu f_\nu - \delta^\alpha_\nu f_\mu + g^*_{\mu\nu} f^{*\alpha}$$

où l'on a défini $f = \ln(\Omega)$, $f_\mu = \partial_\mu f$ et $f^{*\mu} = g^{*\mu\nu} f_\nu$.

Finalement, après quelques manipulations, on obtient la transformation du tenseur de Ricci :

$$R_{\mu\nu} = R^*_{\mu\nu} + 2\partial_\mu\partial_\nu f + g^*_{\mu\nu}\Box^* f + 2 f_\mu f_\nu - 2 g^*_{\mu\nu} f_\alpha f^{*\alpha} - 2\Gamma^{*\alpha}_{\mu\nu} f_\alpha$$

En prenant la trace de cette équation, on trouve la transformation de la courbure scalaire :

$$R = \Omega^2\left(R^* + \Delta R\right)$$

avec $\Delta R = 6\left(\Box^* f - f_\mu f^{*\mu}\right)$.

Invariance conforme de l'action de l'électromagnétisme

L'action de l'électromagnétisme est invariante conforme :

$$\begin{aligned}
S_{EM} &= -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g}\, g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \\
&= -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\, \Omega^{-4}\sqrt{-g^*}\,\Omega^2 g^{*\alpha\mu}\Omega^2 g^{*\beta\nu} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \\
&= -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g^*}\, g^{*\alpha\mu} g^{*\beta\nu} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

L'action en RI

L'action est alors changée sous l'action de la transformation conforme. On se place dans le cas du trou noir chargé, pour lequel l'action du champ électromagnétique est invariante conforme.

$$\begin{aligned}
S &= \int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g}\left(\frac{\varphi^2 R}{2\tilde{\kappa}} + \varphi \mathcal{L}_m\right) \\
&= \int \mathrm{d}^4x\, \Omega^{-4}\sqrt{-g^*}\left(\frac{\varphi^2\Omega^2}{2\tilde{\kappa}}\left(R^* + \Delta R\right) + \varphi\Omega^4 \mathcal{L}^*_m\right) \\
&= \int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g^*}\left(\frac{\varphi^2\Omega^{-2}}{2\tilde{\kappa}}\left(R^* + \Delta R\right) + \varphi \mathcal{L}^*_m\right)
\end{aligned}$$

On va alors choisir $\Omega = \varphi$. L'action s'écrit alors (après simplification du terme en d'Alembertien car c'est la divergence d'un quadri-vecteur) :

$$
\begin{aligned}
S &= \int \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g^*} \left(\frac{R^*}{2\tilde{\kappa}} - \frac{3}{\tilde{\kappa}\varphi^2} g^{*\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + \varphi \mathcal{L}_m^* \right) \\
&= \int \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g^*} \left(\frac{R^*}{2\tilde{\kappa}} - \frac{12\alpha^2}{\tilde{\kappa}} g^{*\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \mathrm{e}^{-2\alpha\phi} \mathcal{L}_m^* \right)
\end{aligned}
$$

où on a posé $\varphi = \mathrm{e}^{-2\alpha\phi}$.

Dérivation de l'action de la théorie Kaluza-Klein

Dans ce paragraphe, tout indice grec $(\mu, \nu, \lambda, \dots)$ prend les valeurs $\{0, 1, 2, 3\}$ et tout indice latin $(a, b, c, \dots)$ prend les valeurs $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. De plus, les grandeurs calculées à partir de la métrique en cinq dimensions seront notées avec un tilde.

En rajoutant une cinquième dimension, on rajoute cinq composantes indépendantes sur la métrique. La composante diagonale est un champ scalaire, les quatre autres forment un quadri-vecteur. On peut donc écrire la métrique de la façon suivante :

$$
\tilde{g}_{ab} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & A_\mu \\ A_\nu & \phi \end{pmatrix}
$$

où $g_{\mu\nu}$ est une métrique à quatre dimensions, A_μ un quadri-vecteur et ϕ un champ scalaire.

Dans la théorie de Kaluza-Klein, l'espace-temps est vide en cinq dimensions. La matière émerge de la géométrie de l'espace-temps lorsqu'on revient à quatre dimensions. L'action est donc donnée par l'équivalent de l'action dans le vide de la RG, mais en cinq dimensions :

$$
S = \int \mathrm{d}^4 x \mathrm{d} y \sqrt{-\tilde{g}}\, \tilde{R}
$$

Et les équations de champs sont données simplement par l'équation :

$$
\tilde{R}_{ab} = 0
$$

Les équations de champs sont simplifiées et redonnent les équations de la gravitation EMd lorsque la métrique est de la forme :

$$
\tilde{g}_{ab} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \phi^2 A_\mu A_\nu & A_\mu \phi^2 \\ A_\nu \phi^2 & \phi^2 \end{pmatrix}
$$

avec $g_{\mu\nu}$ la métrique classique en quatre dimensions, A_μ le potentiel électromagnétique et ϕ un champ scalaire.

L'inverse de la métrique est :

$$
\tilde{g}^{ab} = \begin{pmatrix} g^{\mu\nu} & -A^\mu \\ -A^\nu & A_\alpha A^\alpha + \frac{1}{\phi^2} \end{pmatrix}
$$

En appliquant la condition de compactification (25), on calcule les symboles de Christoffel :

$$\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \phi\partial^{\lambda}\phi A_{\mu}A_{\nu} + \frac{1}{2}g^{\lambda\kappa}\left(A_{\kappa,\mu}A_{\nu} + A_{\kappa,\nu}A_{\mu}\right)$$

$$\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{4\nu} = -\phi A_{\nu}\partial^{\lambda}\phi + \frac{1}{2}\phi^2 g^{\lambda\kappa}F_{\kappa\nu}$$

$$\tilde{\Gamma}^{4}_{\mu\nu} = -A_{\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\phi^2 A^{\kappa}\left(A_{\nu}F_{\kappa\mu} + A_{\mu}F_{\kappa\nu}\right) + \phi A^{\kappa}A_{\mu}A_{\nu}\phi_{,\kappa} + \frac{1}{\phi}\left(\phi_{,\mu}A_{\nu} + \phi_{,\nu}A_{\mu}\right) + \frac{1}{2}\left(A_{\nu,\mu} + A_{\mu,\nu}\right)$$

$$\tilde{\Gamma}^{4}_{\mu4} = -\frac{1}{2}\phi^2 A^{\kappa}F_{\kappa\mu} + \phi\phi_{,\kappa}A^{\kappa}A_{\mu} + \frac{\phi_{,\mu}}{\phi}$$

$$\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{44} = -\phi\partial^{\lambda}\phi$$

$$\tilde{\Gamma}^{4}_{44} = \phi A^{\lambda}\phi_{,\lambda}$$

Grâce aux expressions ci-dessus, on peut calculer la courbure scalaire pour en déduire l'action et le tenseur de Ricci pour en déduire les équations de champ.

$$\tilde{R_{ab}} = \tilde{\Gamma}^{c}_{ab,c} - \tilde{\Gamma}_{a,b} + \tilde{\Gamma}_{c}\tilde{\Gamma}^{c}_{ab} - \tilde{\Gamma}^{c}_{db}\tilde{\Gamma}^{d}_{ac}$$

$$\tilde{R} = \tilde{g}^{ab}\tilde{R}_{ab}$$

L'action s'écrit, en omettant un terme de surface et l'intégration sur la coordonée y qui est par hypothèse cylindrique :

$$S = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\phi\left(R - \frac{\phi^2}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 3\frac{\partial_{\mu}\phi\,\partial^{\mu}\phi}{\phi^2}\right)$$

On fait la transformation $\phi \longrightarrow \phi^{1/3}$:

$$S = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left(\phi^{1/3}R - \frac{\phi}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{3}\frac{\partial_{\mu}\phi\,\partial^{\mu}\phi}{\phi^2}\right)$$

On fait une transformation conforme sur la métrique en quatre dimensions $g_{\mu\nu} \longrightarrow g^*_{\mu\nu} = \phi^{1/3}g_{\mu\nu}$:

$$S = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g^*}\left(R^* - \frac{\phi}{4}F_{\mu\nu}F^{*\mu\nu} + \frac{1}{6}\frac{\partial_{\mu}\phi\,\partial^{*\mu}\phi}{\phi^2}\right)$$

On fait la transformation $\phi \longrightarrow \mathrm{e}^{-2\alpha\phi}$:

$$S = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g^*}\left(R^* - \frac{\mathrm{e}^{-2\alpha\phi}}{4}F_{\mu\nu}F^{*\mu\nu} + \frac{2\alpha^2}{3}\frac{\partial_{\mu}\phi\,\partial^{*\mu}\phi}{\phi^2}\right)$$

On retrouve bien l'action de la gravitation EMd avec $\alpha = \sqrt{3}$.

Formalisme Newman-Penrose

Le formalisme Newman-Penrose (NP) permet de réécrire les équations tensorielles de la RG comme des équations scalaires complexes.

Scalaires NP-Ricci : Le tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ possède dix composantes indépendantes. On forme alors neuf scalaires complexes $\Phi_{ij}, i, j \in \{0, 1, 2\}$ à partir du tenseur de Ricci et une tétrade nulle.

Ces scalaires vérifient : $\Phi_{ij} = \overline{\Phi}_{ji}$. Il y a donc six scalaires indépendants : trois réels et trois complexes. En rajoutant la courbure scalaire R, on retrouve bien les dix composantes réelles indépendantes du tenseur de Ricci.

Scalaires NP-Maxwell : De la même façon, on peut construire à partir du tenseur électromagnétique $F_{\mu\nu}$ trois scalaires complexes ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2. On retrouve bien le bon nombre de composantes indépendantes de F, six.

Equation d'Einstein : Dans le formalisme de Newman-Penrose, les équations d'Einstein avec un champ électromagnétique prennent une forme très simple : $\Phi_{ij} = 2\phi_i\overline{\phi}_j$.

Plus généralement, il est possible de construire quatre opérateurs de dérivation, qui correspondent à la dérivée covariante dans chacune des directions données par la tétrade nulle. Ainsi, il est possible de retranscrire n'importe quelle équation différentielle en plusieurs équations scalaires. On peut par exemple, reformuler les équations de Maxwell sous la forme de quatre équations scalaires complexes, ce qui redonne bien les huit équations de Maxwell réelles.

Algorithme de Newman-Janis

On prend pour exemple la métrique de Reissner-Nordström, qui après l'algorithme donne la métrique de Kerr-Newman. L'algorithme se déroule en cinq étapes :

Première étape : On écrit la métrique statique et à symétrie sphérique dans les coordonées d'Eddington-Finkelstein (u, r, θ, φ) :

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)} + r^2\mathrm{d}\Omega^2$$

On définit r^* tel que $\mathrm{d}r^* = g_{rr}\mathrm{d}r$ et $u = t - r^*$, la métrique devient :

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\mathrm{d}u^2 - 2\mathrm{d}u\mathrm{d}r + r^2\mathrm{d}\Omega^2$$

Deuxième étape : On forme une tétrade nulle.

$$\begin{aligned} l^\mu &= \delta_1^\mu \\ n^\mu &= \delta_0^\mu - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\delta_1^\mu \\ m^\mu &= \frac{1}{r\sqrt{2}}\left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\sin\theta}\delta_3^\mu\right) \end{aligned}$$

Troisième étape : On complexifie les coordonnées et la tétrade nulle. C'est cette étape qui peut paraître arbitraire.

On étend les coordonnées au domaine complexe : $x^\rho \longrightarrow \tilde{x}^\rho = x^\rho + iy^\rho$ où les y^ρ sont des fonctions réelles des anciennes coordonées. Ce n'est pas un changement de coordonnées et d'ailleurs les fonctions y^ρ n'ont pas d'importance. La tétrade nulle n'est donc pas modifiée par ce procédé mais par le suivant.

Les vecteurs de la tétrade nulle deviennent des champs dépendant de $\tilde{x}^\rho$ et de son complexe conjugué. Cependant, cette transformation doit redonner l'ancienne tétrade lorsque $\tilde{x}^\rho = \overline{\tilde{x}^\rho}$.

La nouvelle tétrade est donc :

$$\tilde{l}^\mu = \delta_1^\mu$$
$$\tilde{n}^\mu = \delta_0^\mu - \frac{1}{2}\left(1 - M\left(\frac{1}{\tilde{r}} + \frac{1}{\bar{\tilde{r}}}\right) + \frac{Q^2}{\tilde{r}\bar{\tilde{r}}}\right)\delta_1^\mu$$
$$\tilde{m}^\mu = \frac{1}{\tilde{r}\sqrt{2}}\left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\sin\tilde{\theta}}\delta_3^\mu\right)$$

Quatrième étape : On effectue un changement de coordonées :

$$\tilde{u} = u - ia\cos(\theta)$$
$$\tilde{r} = r + ia\cos(\theta)$$
$$\tilde{\theta} = \theta$$
$$\tilde{\varphi} = \varphi$$

Cette fois-ci les composantes des vecteurs de la tétrade sont donc modifiées comme lors d'un changement de coordonées.

Avec la nouvelle tétrade, on peut calculer les composantes de la nouvelle métrique.

Cinquième étape : On repasse dans les coordonées de Boyer-Lindquist (t, r, θ, φ).

Le champ électromagnétique Pour ce qui est du champ électromagnétique, on effectue les mêmes étapes mais sur les scalaires NP-Maxwell : on les calcule grâce à l'ancienne tétrade, on les complexifie, on effectue le changement de coordonnées et on retrouve le champ électromagnétique avec la nouvelle tétrade.

Abstract

En couplant la matière et la géométrie dans le même lagrangien, la théorie de la relativité intriquée (RI) vérifie le principe de Mach sur la relativité de l'inertie. La théorie requiert donc un champ matériel pour être définie. Puisque le champ électromagnétique est le champ matériel le plus simple, on étudie le cas d'un trou noir chargé. Pour cette solution, la relativité intriquée et la gravitation Einstein-Maxwell-dilaton (EMd) donnent les mêmes résultats. Dans ce rapport, on montre les similitudes entre les solutions de la relativité générale (RG) et de la RI et en particulier, que la métrique de Schwarzschild est une bonne approximation d'un trou noir peu chargé en RI. Le cas des solutions en rotation déjà existantes est discuté. Une solution de trou noir chargé en rotation de la gravitation EMd est proposée et discutée.

By coupling matter and geometry in the same Lagrangian, the theory of entangled relativity (ER) verifies Mach's principle on the relativity of inertia. The theory therefore requires a material field to be defined. Since the electromagnetic field is the simplest and easiest material field, we study the case of a charged black hole. For this solution, entangled relativity and Einstein-Maxwell-dilaton (EMd) gravitation agree and give the same results. In this report, we show the similarities between general relativity (GR) and ER solutions and, in particular, that the Schwarzschild metric is a good approximation to a lightly charged black hole in ER. The case of existing rotational solutions is discussed. A solution for a rotational charged black hole in EMd gravitation theory is proposed and discussed.