DAix Théo

VERHOYE Victor

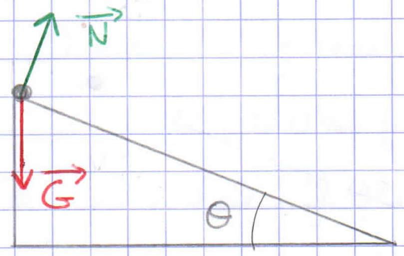
TP n°3 d'Analyse numérique

Question 1 :

- **Liste des forces en présence :**

→ Force normale $\vec{N}$: réaction du plan incliné.

→ Poids $\vec{G}$: poids du mobile.

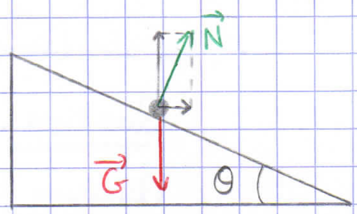


- **Equation différentielle vérifiée par la position de la boule :**

On a : • $\theta = \arctan\left(\frac{h}{\ell}\right)$. Nous écrirons donc θ au lieu de $\arctan\left(\frac{h}{\ell}\right)$ dans la suite.

• $\sum \vec{F} = m.\vec{a}$.

Donc, en projetant la force $\vec{N}$ sur les axes x_1 et x_2, on obtient :



$$\begin{cases} \|N\| . \sin\theta = m.a_1 \\ \|N\| . \cos\theta - m.g = m.a_2 \end{cases}$$

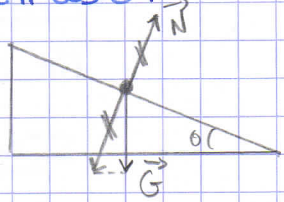
où (a_1, a_2) sont les composantes du vecteur accélération et $g = 9{,}81 \text{ m/s}^2$.

Or, vu que le vecteur accélération est la dérivée seconde du vecteur position, on trouve :

$$m.\partial_t^2 x(t) = \left(\|N\| \sin\theta \,,\, \|N\| \cos\theta - mg\right) \ (*)$$

De plus, vu la situation, on doit avoir : $\|N\| = \overbrace{\|G\|}^{=m.g} \cos\theta$.

Donc, $(*)$ devient :



$$m.\partial_t^2 x(t) = \left(m.g.\sin\theta\cos\theta \,,\, mg\cos^2\theta - mg\right)$$

$$\Leftrightarrow \partial_t^2 x(t) = \left(g.\sin\theta\cos\theta \,,\, g.\underbrace{(\cos^2\theta - 1)}_{=-\sin^2\theta}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\partial^2 x(t) = g\sin\theta.\left(\cos\theta, -\sin\theta\right)}$$

Question 2 :

On veut résoudre l'équation différentielle $\partial_t^2 x(t) = g \sin\theta . (\cos\theta, -\sin\theta)$.

Soit $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$.

On a : $\cdot\, x_1(t) = \int\left(\int g \sin\theta \cos\theta \, dt\right) dt$

$= \int (g \sin\theta \cos\theta t + C_1)\, dt$ où $C_1 \in \mathbb{R}$

$= g \sin\theta \cos\theta . \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$ où $C_2 \in \mathbb{R}$.

$\cdot\, x_2(t) = -\int\left(\int g \sin^2\theta \, dt\right) dt$

$= - g \sin^2\theta \frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4$ où $C_3, C_4 \in \mathbb{R}$.

Si le mobile est lâché du haut de la pente avec une vitesse nulle, cherchons le temps en secondes dont le mobile a besoin pour arriver en bas de la pente si $h = 3$ m et $l = 11$ m.

On a donc : $x_1(t) = g \sin\theta \cos\theta . \frac{t^2}{2} + C_1 . t + C_2$.

on part de $(0,3)$

$\rightarrow 11 = 9,81 . \sin(\arctan(\frac{3}{11})) . \cos(\arctan(\frac{3}{11})) \frac{t^2}{2} + \underbrace{0}_{\text{vitesse initiale nulle}} . t + \overbrace{0}$

$\rightarrow \boxed{t = \sqrt{\frac{22}{g \sin\theta \cos\theta}} = 2,97 \text{ s.}}$

Question 3 : Voir le code dans trajectoire.

Question 4 :

L'idée est de résoudre l'EDO de la question 1 grâce à la méthode solution du fichier Trajectoire.

On regarde ensuite si $\gamma(S(t))$ se rapproche de $(11, 0)$ lorsque t se rapproche de $2,97$.

Question 5 :

On cherche à trouver le moment où un mobile passe par p_1.

Idée : On prend une borne sur le temps.

Ensuite, on applique la bissection : on coupe en le milieu l'intervalle de temps, on regarde si on est après ou avant le point p_1 et on va à gauche ou à droite dans l'intervalle en fonction. Si on est suffisamment proche, on s'arrête.

Vu qu'on sait que le mobile part de $\gamma(0)$ avec une vitesse nulle,

on a : $\gamma(S(t)) = \gamma(0)$, d'où $S(t) = 0$.

La vitesse est nulle, donc $\partial_t(\gamma(S(t)) = \underbrace{\partial_s\gamma(S(t))}_{\neq 0 \text{ car } \partial_s\gamma(s) = (1,\dots) \neq (0,0)} . \partial_t(S(t)) = 0$

$\Rightarrow \partial_t(S(t)) = 0$.

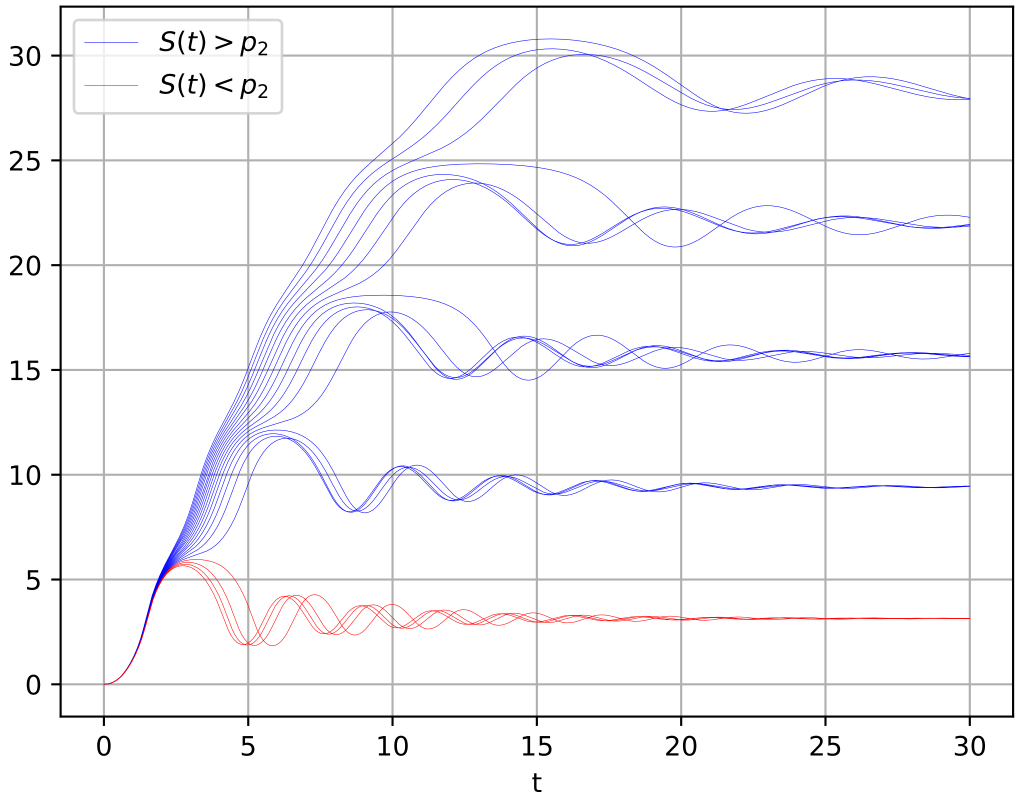
Donc, le couple $(\partial_t S(t), S(t)) = (0,0)$ au temps initial.

Question 6 : Voir le graphe en fin de document.

Question 7 :

Nous utilisons brentq du module scipy de Python.

L'idée est de cherche un coefficient de frottement qui ne permettra pas au mobile de dépasser p_2, puis d'utiliser brentq pour se rapprocher du coefficient maximal qui permet de passer la bosse.


$S(t) > p_2$
$S(t) < p_2$
30
25
20
15
10
5
0
0
5
10
15
20
25
30
t