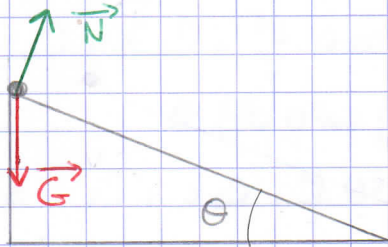


VERHOYE
VictorQuestion 1 :• Liste des forces en présence :→ Force normale \vec{N} : réaction du plan incliné.→ Poids \vec{G} : poids du mobile.• Equation différentielle vérifiée par la position de la boule :On a : • $\theta = \arctan\left(\frac{h}{\ell}\right)$. Nous écrirons donc θ au lieu de $\arctan\left(\frac{h}{\ell}\right)$ dans la suite.

• $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$.

Donc, en projetant la force \vec{N} sur les axes x_1 et x_2 , on obtient :

$$\begin{cases} \|\vec{N}\| \cdot \sin \theta = m \cdot a_1 \\ \|\vec{N}\| \cdot \cos \theta - m \cdot g = m \cdot a_2 \end{cases}$$

où (a_1, a_2) sont les composantes du vecteur accélération et $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Or, vu que le vecteur accélération est la dérivée seconde du vecteur position, on trouve :

$$m \cdot \partial_t^2 x(t) = (\|\vec{N}\| \sin \theta, \|\vec{N}\| \cos \theta - mg) (*)$$

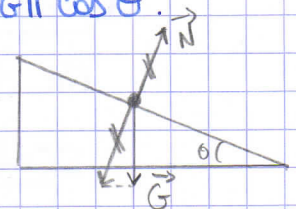
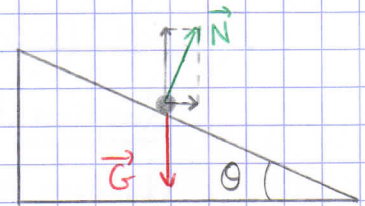
De plus, vu la situation, on doit avoir : $\|\vec{N}\| = \overbrace{\|\vec{G}\| \cos \theta}^{= m \cdot g}$.

Donc, (*) devient :

$$m \cdot \partial_t^2 x(t) = (m \cdot g \cdot \sin \theta \cos \theta, m g \cos^2 \theta - m g)$$

$$\Leftrightarrow \partial_t^2 x(t) = (g \cdot \sin \theta \cos \theta, g \cdot \underbrace{(\cos^2 \theta - 1)}_{= -\sin^2 \theta})$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\partial_t^2 x(t) = g \sin \theta \cdot (\cos \theta, -\sin \theta)}$$



Question 2 :

On veut résoudre l'équation différentielle $\partial_t^2 x(t) = g \sin \theta \cdot (\cos \theta, -\sin \theta)$.

Soit $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } x_1(t) &= \int \int g \sin \theta \cos \theta \, dt \, dt \\ &= \int (g \sin \theta \cos \theta \cdot t + C_1) \, dt \quad \text{où } C_1 \in \mathbb{R} \\ &= g \sin \theta \cos \theta \cdot \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2 \quad \text{où } C_2 \in \mathbb{R}. \\ x_2(t) &= -\int \left(\int g \sin^2 \theta \, dt \right) dt \\ &= -g \sin^2 \theta \cdot \frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4 \quad \text{où } C_3, C_4 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Si le mobile est lâché du haut de la pente avec une vitesse nulle, cherchons le temps en secondes dont le mobile a besoin pour arriver en bas de la pente si $h = 3 \text{ m}$ et $l = 11 \text{ m}$.

$$\text{On a donc : } x_1(t) = g \sin \theta \cos \theta \cdot \frac{t^2}{2} + C_1 \cdot t + C_2. \quad \text{on part de } (0,3)$$

$$\rightarrow 11 = 9,81 \cdot \sin(\arctan(\frac{3}{11})) \cdot \cos(\arctan(\frac{3}{11})) \cdot \frac{t^2}{2} + 0 \cdot t + 0$$

2 vitesse initiale nulle

$$\rightarrow t = \sqrt{\frac{22}{g \sin \theta \cos \theta}} = 2,97 \text{ s.}$$

Question 3 : Voir le code dans trajectoire.

Question 4 :

L'idée est de résoudre l'EDO de la question 1 grâce à la méthode solution du fichier trajectoire.

On regarde ensuite si $s(S(t))$ se rapproche de $(11, 0)$ lorsque t se rapproche de $2,97$.

Question 5 :

On cherche à trouver le moment où un mobile passe par p_1 .

Idee : On prend une borne sur le temps.

Ensuite, on applique la bisection : on coupe en le milieu l'intervalle de temps, on regarde si on est après ou avant le point p_1 et on va à gauche ou à droite dans l'intervalle en fonction. Si on est suffisamment proche, on s'arrête.

Vu qu'on sait que le mobile part de $s(0)$ avec une vitesse nulle, on a : $s(s(t)) = s(0)$, d'où $S(t) = 0$.

La vitesse est nulle, donc $\partial_t(s(S(t))) = \underbrace{\partial_t s(S(t))}_{\neq 0 \text{ car } \partial_s s(s) = (1, \dots) \neq (0, 0)} \cdot \partial_t(S(t)) = 0$
 $\Rightarrow \partial_t(S(t)) = 0$.

Donc, le couple $(\partial_t S(t), S(t)) = (0, 0)$ au temps initial.

Question 6 : Voir le graphe en fin de document.

Question 7 :

Nous utilisons bien sûr le module `scipy` de Python.

L'idée est de chercher un coefficient de frottement qui ne permettra pas au mobile de dépasser p_2 , puis d'utiliser `broutq` pour se rapprocher du coefficient maximal qui permet de passer la bosse.

