

DAIX

Rapport du TP n° 1 :

Théo.

Introduction à l'analyse numérique :

VERHOYE

Victor.

• But du TP :

Ecrire un programme qui prend un argument a (un réel positif) en ligne de commande et qui retourne toutes les intersections entre la courbe $\gamma : \begin{cases} [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (t \cdot \sin(t) ; t + \sin^2(t)) \end{cases}$ et le graphe de la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto a \cdot |\sqrt[3]{x}| \end{cases}$

• Idee / raisonnement : (sup. $a \neq 0$, sinon voir "Cas $a = 0$ ")

Afin de trouver ces intersections, nous allons simplifier le problème en nous ramenant à la recherche de racines d'une fonction.

Pour avoir un point d'intersection, il faut que :

$$(x ; a \cdot |\sqrt[3]{x}|) = (t \cdot \sin(t) ; t + \sin^2(t))$$

$$\Leftrightarrow x = t \cdot \sin(t) \quad \text{et} \quad a \cdot |\sqrt[3]{x}| = t + \sin^2(t).$$

$$\Leftrightarrow a \cdot |t \cdot \sin(t)|^{2/3} = t + \sin^2(t) \quad \text{et} \quad x = t \cdot \sin(t).$$

\Rightarrow On se ramène à chercher les racines de la fonction

$$R(t) := t + \sin^2(t) - a \cdot |t \cdot \sin(t)|^{2/3}.$$

Pour trouver ces racines, nous utilisons la bisection (fonction "brentq" du module Scipy de Python).

Pour la suite du raisonnement, calculons $R'(t)$:

• si $\sin(t) \geq 0$:

$$R'(t) = 1 + 2 \sin(t) \cdot \cos(t) - \frac{a}{3} \cdot \frac{t \cdot \cos(t) + \sin(t)}{(t \cdot \sin(t))^{2/3}}$$

• si $\sin(t) < 0$:

$$R'(t) = 1 + 2 \sin(t) \cdot \cos(t) + \frac{a}{3} \cdot \frac{t \cdot \cos(t) + \sin(t)}{(t \cdot \sin(t))^{2/3}}$$

En regroupant les deux expressions, on arrive à :

$$R'_a(t) = 1 + 2 \sin(t) \cdot \cos(t) - \operatorname{sign}(\sin, \text{borne-inf}, \text{borne-sup}) \cdot \frac{t \cdot \cos(t) + \sin(t)}{(t \cdot \sin(t))^{2/3}}$$

si $\text{sign}(\dots)$ renvoie le signe de $\sin\left(\frac{b_{\text{inf}} + b_{\text{sup}}}{2}\right)$
 et $b_{\text{sup}} > b \geq b_{\text{inf}}$.

Afin d'écrire les sauts de division par 3, mais alors
 plutôt travailler avec la fonction suivante :

$$Q'_2(t) = (t \cdot \sin(t))^{2/3} + 2 \cdot \sin(t) \cdot \cos(t) \cdot (t \cdot \sin(t))^{1/3} \\
= \frac{2}{3} \cdot \text{sign}(\sin, b_{\text{inf}}, b_{\text{sup}}) \cdot (t \cdot \cos(t) + \sin(t))$$

Pour appliquer la méthode bisection sur Q , il nous faut
 une image positive et une image négative.

1) Ma $\forall k \in \mathbb{N}_0$, $Q(k \cdot \pi) > 0$:

$$Q(k \cdot \pi) = k \cdot \pi + \sin^2(k \cdot \pi) = a \cdot |k \cdot \pi \cdot \sin(k \cdot \pi)|^{1/3} \\
= k \cdot \pi > 0.$$

2) $Q'_2(k \cdot \pi) = -\frac{2}{3} \cdot \text{sign}(\sin, \pi \cdot k, (k+1) \cdot \pi) \cdot k \cdot \pi \cdot \cos(k \cdot \pi)$

si $k \times 2 = 0$: $Q'_2(k \cdot \pi) = -\frac{2}{3} \cdot 1 \cdot k \cdot \pi \cdot 1 < 0$

si $k \times 2 = 1$: $Q'_2(k \cdot \pi) = -\frac{2}{3} \cdot (-1) \cdot k \cdot \pi \cdot (-1) < 0$

Par continuité de $Q'_2(t)$ sur $[k \cdot \pi, (k+1) \cdot \pi]$, il existe $\pi > 0$

tg $\forall x \in]k \cdot \pi, k \cdot \pi + \pi[$, $Q'_2(x) < 0$

Soit $x \in]k \cdot \pi, k \cdot \pi + \pi[$, on a $(\sin(x) \cdot x)^{2/3} = ((x \cdot \sin(x))^{1/3})^2$

$\Rightarrow \exists \pi > 0$, $\forall x \in]k \cdot \pi, k \cdot \pi + \pi[$, $\frac{Q'_2(x)}{(x \cdot \sin(x))^{1/3}} < 0$

$$Q_2, \frac{Q'_2(x)}{(x \cdot \sin(x))^{1/3}} = Q'_1(x).$$

$\Rightarrow \exists \pi > 0$, $\forall x \in]k \cdot \pi, k \cdot \pi + \pi[$, $Q'_1(x) < 0$

$\Rightarrow \exists \pi > 0$, $Q'_1(t)$ est négative sur $]k \cdot \pi, k \cdot \pi + \pi[$.
 (absolument)

$\Rightarrow \exists \pi > 0$, $Q(t)$ est décroissante sur $]k \cdot \pi, k \cdot \pi + \pi[$.
 (absolument) (x)

De plus, vu que Q est continue sur $[k \cdot \pi, (k+1) \cdot \pi]$

(qui est un intervalle compact), Q atteint ses bornes (par

le T.B.A) : $\exists x_{\min} \in [k \cdot \pi, (k+1) \cdot \pi]$, $\forall x \in [k \cdot \pi, (k+1) \cdot \pi]$

$$Q(x_{\min}) \leq Q(x). \quad (xx)$$

Donc, par (x) et (xx) et vu que $Q(k \cdot \pi) < Q((k+1) \cdot \pi)$,

on a que $x_{\min} \neq k \cdot \pi$ et $x_{\min} \neq (k+1) \cdot \pi$.

Par continuité, on peut en conclure qu'on a un minimum local (notons le ℓ^*) dans chaque intervalle $]k\pi, (k+1)\pi[$.

- L'idée de notre programme est d'appliquer la bisection dans les intervalles $]k\pi, \ell^*[$ et $]\ell^*, (k+1)\pi[$ tant que l'image de ℓ^* par Q est strictement négative.

Remarques : On a au plus deux racines par intervalle $]k\pi, (k+1)\pi[$ car Q est strictement décroissante entre $k\pi$ et ℓ^* et strictement croissante entre ℓ^* et $(k+1)\pi$.

On a que $Q(0) = 0$, 0 est donc racine de Q .

Dans le cas où $Q(\ell^*) = 0$, on a que ℓ^* est une racine.

A chaque fois que l'on obtient une racine (notons la \tilde{r}), on ajoute le couple $(\tilde{r}, \sin(\tilde{r}); \tilde{r} + \sin^2(\tilde{r}))$ à la liste des itérations. Par la première remarque, le couple $(0, 0)$ est toujours présent, il est donc ajouté en début de programme.

- Afin que notre algorithme s'arrête, nous devons vérifier que la condition de la boucle devient fausse, c-à-d :

$$\exists \tilde{r} \geq 0, \forall k \geq \tilde{r}, Q(k) \geq 0.$$

Pretons $\tilde{r} = \sqrt{a^3}$

On a : $|k \cdot \sin(k)|^{1/3} \leq k^{1/3}$ car $k \geq 0$ et $|\sin(k)| \leq 1$

$k + \sin^2(k) \geq k$ car $\sin^2(k) \geq 0$.

$$\Rightarrow Q(k) \geq k - a \cdot k^{1/3} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad k \geq a \cdot k^{1/3}$$

$$\Leftrightarrow k^2 \geq a^3$$

$$\Leftrightarrow k \geq \sqrt{a^3}$$

$\left. \begin{array}{l} x^2 \geq \text{un } n \\ \text{et } x \geq 0 \end{array} \right\} x \geq \sqrt{n}$
 $\left. \begin{array}{l} \sqrt{x} \geq \text{un } n \end{array} \right\} x \geq n^2$

k vrai.

- De plus, on peut mg. si un minimum local de Q dans un intervalle $]k\pi, (k+1)\pi[$ est positif, alors $\forall k \geq \tilde{k}, k \in \mathbb{N}$.

Le minimum local entre $k\pi$ et $\pi(k+1)$ est lui aussi positif.

Ce qui conclut donc notre argument car nous sommes alors certains qu'il n'y aura plus de racine à trouver.

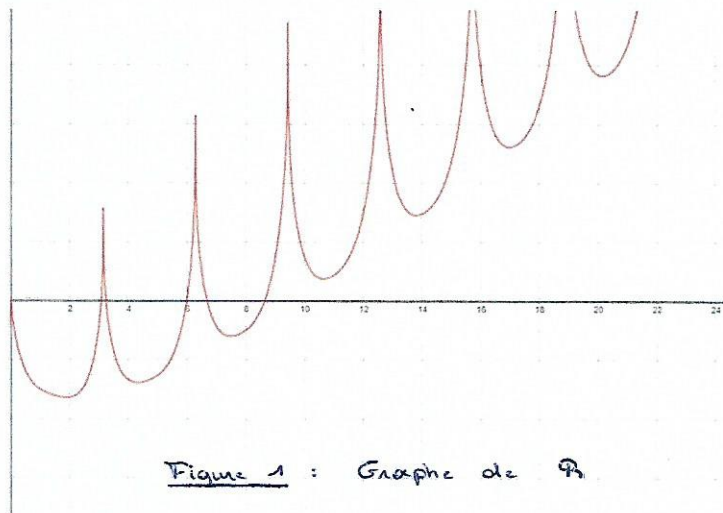
(voir graphes à la page suivante).

• Cas où $a = 0$:

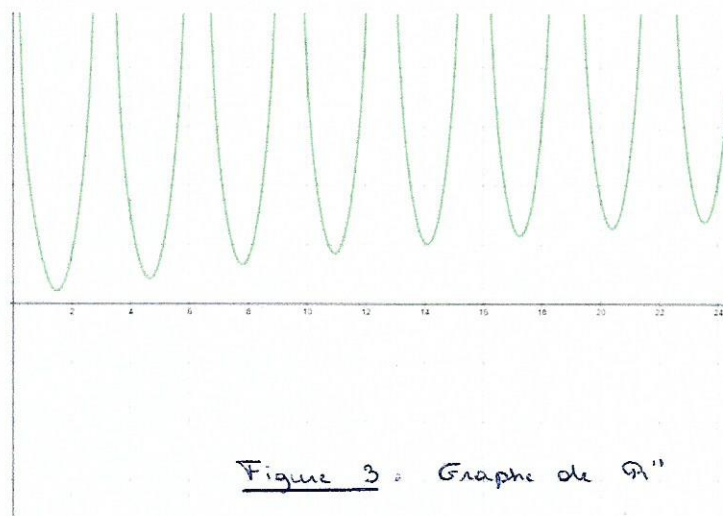
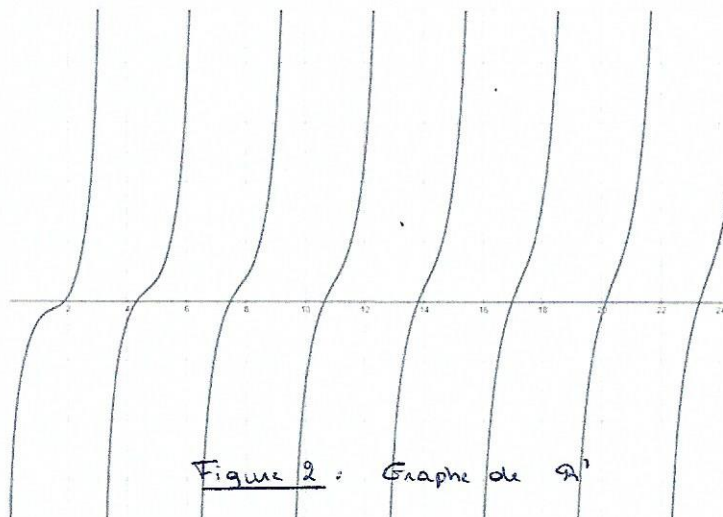
Si $a = 0$, $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Notre algorithme ne retournera donc que le couple $(0, 0)$

(il n'y a donc que la seule intersection).



→ On remarque que si un minimum local est positif, les suivants le sont également



• On a :

$Q'' > 0$ sur tout intervalle $]k\pi, (k+1)\pi[$

• Q' a une racine par intervalle $]k\pi, (k+1)\pi[$

⇒ Q' ↗ sur tout intervalle $]k\pi, (k+1)\pi[$

} ⇒ Q ↗ puis ↘ sur tout intervalle $]k\pi, (k+1)\pi[$.