DAIX
Théo.
VERHOYE
Victor.

Rapport du TP n° 1 :

Introduction à l'analyse numérique :

- **But du TP :**

Ecrire un programme qui prend un argument a (un réel positif) en ligne de commande et qui retourne toutes les intersections entre la courbe $\gamma : \left\{ \begin{array}{l} [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto (t.\sin(t) \,;\, t + \sin^2(t)) \end{array} \right.$ et le graphe de la fonction $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto a.|\sqrt[3]{x}| \end{array} \right.$

- **Idée / raisonnement :** (sup. $a \neq 0$, sinon voir "Cas $a = 0$")

· Afin de trouver ces intersections, nous allons simplifier le problème en nous ramenant à la recherche de racines d'une fonction.

Pour avoir un point d'intersection, il faut que :

$$(x \,;\, a.|\sqrt[3]{x}|) = (t.\sin(t) \,;\, t + \sin^2(t))$$

$$\Leftrightarrow \quad x = t.\sin(t) \quad \text{et} \quad a.|\sqrt[3]{x}| = t + \sin^2(t).$$

$$\Leftrightarrow \quad a.|t.\sin(t)|^{1/3} = t + \sin^2(t) \quad \text{et} \quad x = t.\sin(t).$$

$\Rightarrow$ On se ramène à chercher les racines de la fonction

$$R(t) := t + \sin^2(t) - a.|t.\sin(t)|^{1/3}.$$

Pour trouver ces racines, nous utilisons la bisection (fonction "brentq" du module Scipy de Python).

· Pour la suite du raisonnement, calculons $R'(t)$:

- si $\sin(t) \geq 0$:

$$R'(t) = 1 + 2\sin(t).\cos(t) - \frac{a}{3}.\frac{t.\cos(t) + \sin(t)}{(t.\sin(t))^{2/3}}$$

- si $\sin(t) < 0$:

$$R'(t) = 1 + 2\sin(t).\cos(t) + \frac{a}{3}.\frac{t.\cos(t) + \sin(t)}{(t.\sin(t))^{2/3}}$$

En regroupant les deux expressions, on arrive à :

$$R_1'(t) = 1 + 2\sin(t).\cos(t) - \text{sign}(\sin, \text{borne\_inf}, \text{borne\_sup}).\left(\frac{t.\cos(t) + \sin(t)}{(t.\sin(t))^{2/3}}\right)$$

où sign (...) retourne le signe de $\sin\left(\frac{b\_inf + b\_sup}{2}\right)$

et borne_sup > t ≥ borne_inf.

Afin d'éviter les soucis de division par zéro, nous allons plutôt travailler avec la fonction suivante :

$$Q_2'(t) = (t.\sin(t))^{2/3} + 2.\sin(t).\cos(t).(t.\sin(t))^{2/3}$$
$$- \frac{2}{3}.\text{sign}(\sin, \text{borne\_inf}, \text{borne\_sup}).(t.\cos(t) + \sin(t))$$

· Pour appliquer la méthode brent-q sur Q, il nous faut une image positive et une image négative.

1) Mq $\forall k \in \mathbb{N}_0$, $Q(k.\pi) > 0$:

$$Q(k.\pi) = k.\pi + \sin^2(k.\pi) - 2.|k.\pi.\sin(k.\pi)|^{1/3}$$
$$= k.\pi > 0.$$

2) $Q_2'(k.\pi) = -\frac{2}{3}.\text{sign}(\sin, \pi.k, (k+1).\pi).k.\pi.\cos(k.\pi)$

· si $k \% 2 = 0$: $Q_2'(k.\pi) = -\frac{2}{3}.1.k.\pi.1 < 0$

· si $k \% 2 = 1$: $Q_2'(k.\pi) = -\frac{2}{3}.(-1).k.\pi.(-1) < 0$

Par continuité de $Q_2'(t)$ sur $[k.\pi, (k+1).\pi]$, il existe $r > 0$ tq $\forall x > k.\pi$, $|x - k.\pi| < r$, $Q_2'(x) < 0$

Soit $x \in]k.\pi, k.\pi + r[$, on a $(\sin(x).x)^{2/3} = ((x.\sin(x))^{1/3})^2 \geq 0$

$\Rightarrow \exists r > 0, \forall x \in]k.\pi, k.\pi + r[, \frac{Q_2'(x)}{(x.\sin(x))^{2/3}} < 0$

Or, $\frac{Q_2'(t)}{(t.\sin(t))^{2/3}} = Q_1'(t)$.

$\Rightarrow \exists r > 0, \forall x \in]k.\pi, k.\pi + r[, Q_1'(x) < 0$

$\Rightarrow \exists r > 0$, $Q_1'(t)$ est négative sur $]k\pi, k.\pi + r[$. (strictement)

$\Rightarrow \exists r > 0$, $Q(t)$ est décroissante sur $]k.\pi, k.\pi + r[$ (strictement) (*)

De plus, vu que Q est continue sur $[k.\pi, (k+1)\pi]$ (qui est un intervalle compact), Q atteint ses bornes (par le T.B.A) : $\exists x_{min} \in [k.\pi, (k+1).\pi]$, $\forall x \in [k.\pi, (k+1)\pi]$ $Q(x_{min}) \leq Q(x)$. (**)

Donc, par (*) et (**) et vu que $Q(k.\pi) < Q((k+1).\pi)$, on a que $x_{min} \neq k.\pi$ et $x_{min} \neq (k+1).\pi$.

Par continuité, on peut en conclure qu'on a un minimum local (notons le t^*) dans chaque intervalle $]k.\pi, (k+1).\pi[$.

· L'idée de notre programme est d'appliquer la bisection dans les intervalles $]k.\pi, t^*[$ et $]t^*, (k+1)\pi[$ tant que l'image de t^* par R est **strictement** négative.

<u>Remarques</u> : · On a au plus deux racines par intervalle $]k.\pi, (k+1).\pi[$ car R est strictement décroissante entre $k.\pi$ et t^* et strictement croissante entre t^* et $(k+1).\pi$.

· On a que $R(0) = 0$, 0 est donc racine de R.

Dans le cas où $R(t^*) = 0$, on a que t^* est une racine.
A chaque fois que l'on obtient une racine (notons la $\tilde{r}$), on ajoute le couple $(\tilde{r}.\sin(\tilde{r})\ ;\ \tilde{r} + \sin^2(\tilde{r}))$ à la liste des intersections. Par la **première** remarque, le couple $(0, 0)$ est toujours présent, il est donc ajouté en début de programme.

· Afin que notre algorithme s'arrête, nous devons vérifier que la condition de la boucle devient fausse, càd :

$\exists\, \tilde{t} \geq 0,\ \forall t \geq \tilde{t},\ R(t) \geq 0.$

Prenons $\tilde{t} = \sqrt{a^3}$

On a : · $|t.\sin(t)|^{1/3} \leq t^{1/3}$ car $t \geq 0$ et $|\sin(t)| \leq 1$

· $t + \sin^2(t) \geq t$ car $\sin^2(t) \geq 0$.

$\Rightarrow R(t) \geq t - a.t^{1/3} \geq 0 \iff t \geq a\,t^{1/3}$ $\Big\}$ $x^3 \nearrow$ sur $\mathbb{R}$ et $t \geq 0$

$\iff t^2 \geq a^3$ $\Big\}$ $\sqrt{x} \nearrow$ sur $\mathbb{R}^+$

$\iff t \geq \sqrt{a^3}$

$\hookrightarrow$ vrai.

· De plus, on peut mq si un minimum local de R dans un intervalle $]\tilde{k}\pi, (\tilde{k}+1)\pi[$ est positif, alors $\forall k > \tilde{k}$, $k \in \mathbb{N}$,

le minimum local entre $k.\pi$ et $(k+1)\pi$ est strictement positif.
Ce qui conclut donc notre argument car nous sommes alors certains qu'il n'y aura plus de racine à trouver.

(voir graphes à la page suivante).

- Cas où $a = 0$:

Si $a = 0$, $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Notre algorithme ne retournera donc que le couple $(0,0)$ (il s'agira donc de la seule intersection).

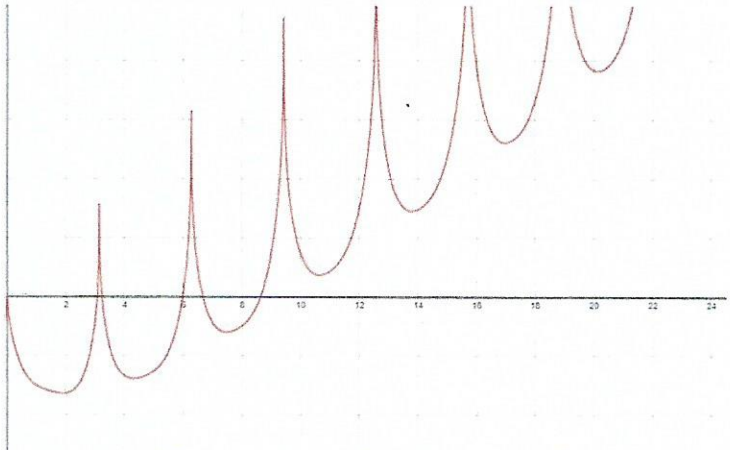

Figure 1 : Graphe de R

→ On remarque que si un minimum local est positif, les suivants sont strictement positifs.

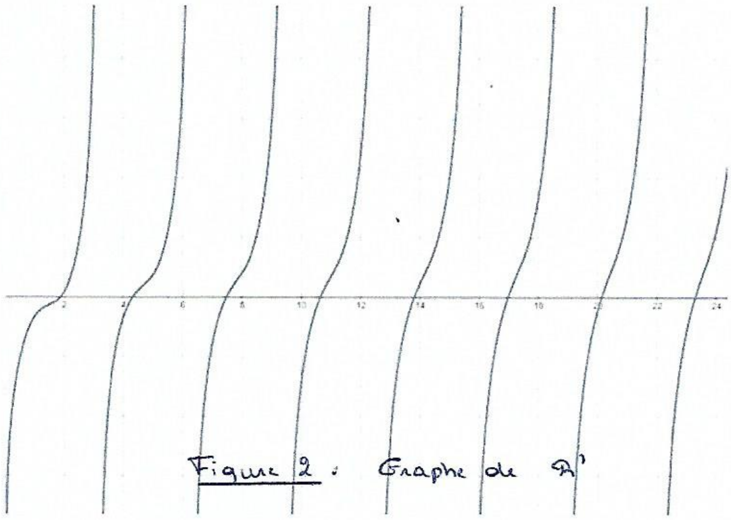

Figure 2 : Graphe de R'

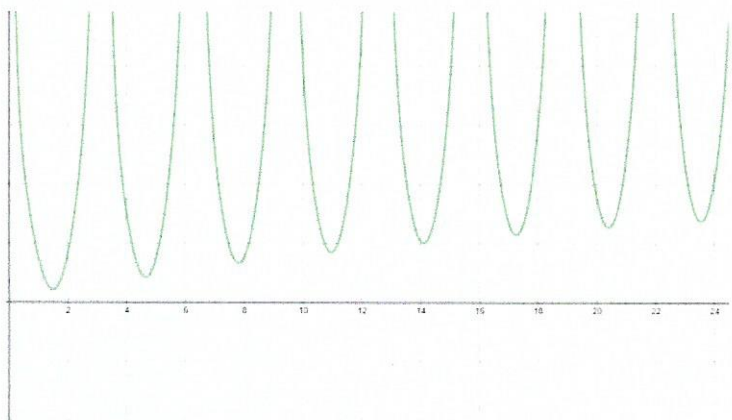

Figure 3 : Graphe de R''

• On a :

$R'' > 0$ sur tout intervalle $]k.\pi, (k+1)\pi[$ $\Rightarrow$ • $R' \nearrow$ sur tout intervalle $]k.\pi ; (k+1).\pi[$

• R' a une racine par intervalle $]k.\pi ; (k+1)\pi[$

$\Rightarrow$ $R \searrow$ puis $\nearrow$ sur tout intervalle $]k.\pi, (k+1)\pi[$.