Introduction à l'**Analyse Numérique**

TP n°1

Noms :
Section :

- L'architecture, l'élégance et la performance du code sont de première importance. Vous devez être capable de justifier tous les choix faits dans votre code.
- N'employez pas des spécificités propres à un système d'exploitation ou à un compilateur. Votre code doit être compilable et exécutable sur MacOS, Unix, et Win32 avec des outils libres (voir le site du cours).
- Les interfaces demandées sont du type « ligne de commande ».

Question 1. Programmez les quatre méthodes de recherche de racines d'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ qu'on a vues (à savoir : bissection, fausse position, sécante, Newton) ainsi que la méthode du point fixe. Chaque méthode sera représentée par une classe/méthode/fonction qui acceptera (au moins) les arguments suivants lors de son instanciation/appel :

- la fonction f (et sa dérivée pour la méthode de Newton) ;
- le ou les points nécessaires au démarrage de la méthode ;
- un critère d'arrêt (plusieurs doivent être prédéfinis tels le nombre d'itérations ou la précision souhaitée mais il faut aussi permettre à l'utilisateur d'utiliser son propre critère).

La recherche de la racine doit se terminer lorsque le critère d'arrêt est satisfait. L'utilisateur doit avoir accès à la dernière estimation[1] de la racine et éventuellement des informations additionnelles qui lui permettent de juger de la pertinence de celle-ci. La gestion des erreurs sera faite grâce aux exceptions.

Question 2. On considère la fonction

$$f_\alpha :]0, 3\pi[\to \mathbb{R} : x \mapsto x - \alpha \sin x,$$

où $\alpha > 0$ est un paramètre réel.

(a) Représentez sur un même dessin (fait par ordinateur) les graphes de f_α pour $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ et $\alpha = 3$.

(b) Discutez,[2] en fonction de $\alpha \in]0, +\infty[$, du nombre de solutions de l'équation $f_\alpha(x) = 0$. Prouvez *rigoureusement* toutes vos affirmations. (Rappelons que le simple fait de « voir », s'il aide à la résolution, n'est cependant pas une justification !). La qualité de votre rédaction est importante.

(c) Écrivez une routine qui, étant donné $\alpha > 0$, retourne l'ensemble des solutions de $f_\alpha(x) = 0$ (éventuellement vide). Expliquez[3] votre choix d'algorithme, justifiez sa convergence quel que soit $\alpha \in]0, +\infty[$, et motivez votre choix de la structure de données pour l'ensemble des solutions.

[1] L'utilisation la plus fréquente de ces méthodes aura pour but de calculer une estimation de la racine. Il est donc important que la récupération de cette valeur soit la plus aisée possible.

[2] Cette question doit être vue comme une préparation à l'examen.

[3] Ces questions doivent vous aider à écrire un code correct, fonctionnant dans toutes les situations.

Noms :
Section :

(d) Écrivez un programme[4] `q2` qui prend α comme seul argument sur la ligne de commande et écrit (sur la sortie standard) l'ensemble des solutions avec une précision relative de 10^{-6}. Les solutions doivent être énumérées sur des lignes différentes et consécutives. Par exemple `q2 10` doit retourner :

```
2.85234189
7.06817436
8.42320393
```

Question 3. (Examen d'août 2012) Nous considérons la famille de fonctions suivantes

$$f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x + \arctan(x) + \lambda(x^3 - x)$$

où $\lambda \geq 0$ est un paramètre réel. Nous sommes intéressés par déterminer la fonction inverse de f_λ. Pour rappel, on dit qu'une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *inversible* si, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe une et une seule valeur $x \in \mathbb{R}$ telle que $g(x) = y$. Nous disons dans ce cas que x est l'image inverse de y et nous notons $g^{-1}(y) := x$. La fonction $g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est appelée la *fonction inverse* de g.

(a) Montrez[5] que si une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable et satisfait

- $\partial g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
- $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$;
- $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$;

alors g est inversible. Justifiez en détails votre réponse en énonçant les résultats que vous utilisez.

(b) Lorsque g est dérivable, la réciproque du point précédent est-elle vérifiée ? Si oui, donnez une preuve. Si non, donnez un contre-exemple.

(c) Prouvez que f_0 est inversible. Donnez explicitement ou approchez numériquement (avec une précision relative d'au moins 10^{-6}) les valeurs de $f_0^{-1}(0)$, $f_0^{-1}(1)$ et $f_0^{-1}(-1)$. Les réponses doivent être écrites ci-dessous.

$f_0^{-1}(0)$	
$f_0^{-1}(1)$	
$f_0^{-1}(-1)$	

(d) Montrez rigoureusement qu'il existe $L_0 > 0$ tel que, pour tout $\lambda \in [0, L_0]$, f_λ est inversible. Donnez une valeur explicite pour L_0.

L_0	

[4] L'extension du programme n'a pas d'importance mais celui-ci — ou un lien symbolique — doit se trouver à la racine de votre projet.

[5] Les questions (a)–(g) doivent être considérées comme des préparations à l'examen et comme l'analyse mathématique préliminaire à la réalisation d'un programme fonctionnant pour toutes les valeurs de λ.

Noms :
Section :

(e) Posons $L_0^* := \sup\{L > 0 \mid f_\lambda$ est inversible quel que soit $\lambda \in [0, L]\}$. Déterminez (explicitement ou numériquement) la valeur de L_0^*. Expliquez votre démarche et justifiez en les étapes.

L_0^*	

(f) Montrez qu'il existe $L_1 > 0$ tel que, pout tout $\lambda \in [L_1, +\infty[$, f_λ n'est *pas* inversible. Donnez une valeur explicite pour L_1.

L_1	

(g) Posons $L_1^* := \inf\{L > 0 \mid f_\lambda$ n'est *pas* inversible quel que soit $\lambda \in [L, +\infty[\}$. Déterminez (explicitement ou numériquement) la valeur de L_1^*. Expliquez votre démarche et justifiez en les étapes.

L_1^*	

(h) Écrivez une routine (informatique) qui, étant donné des valeurs pour $\lambda \in [0, +\infty[$ et $y \in \mathbb{R}$ *retourne* l'ensemble[6] des valeurs

$$f_\lambda^{-1}(\{y\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid f_\lambda(x) = y\}.$$

Expliquez votre démarche. Dites quelle structure de donnée vous choisissez pour représenter l'ensemble $f_\lambda^{-1}(\{y\})$.

(i) Écrivez un programme[7] `q3` qui prend λ comme seul argument sur la ligne de commande et écrit (sur la sortie standard) l'ensemble des solutions avec une précision absolue de 10^{-6}. Les éléments de $f_\lambda^{-1}(\{y\})$ doivent être énumérés sur des lignes différentes et consécutives.

[6] Notez que, si g est inversible, alors $g^{-1}(\{y\}) = \{g^{-1}(y)\}$.

[7] L'extension du programme n'a pas d'importance mais celui-ci — ou un lien symbolique — doit se trouver à la racine de votre projet.