

# Low Volatility Strategy

Walid Boudounit & Théo Domingues

20 juin 2025

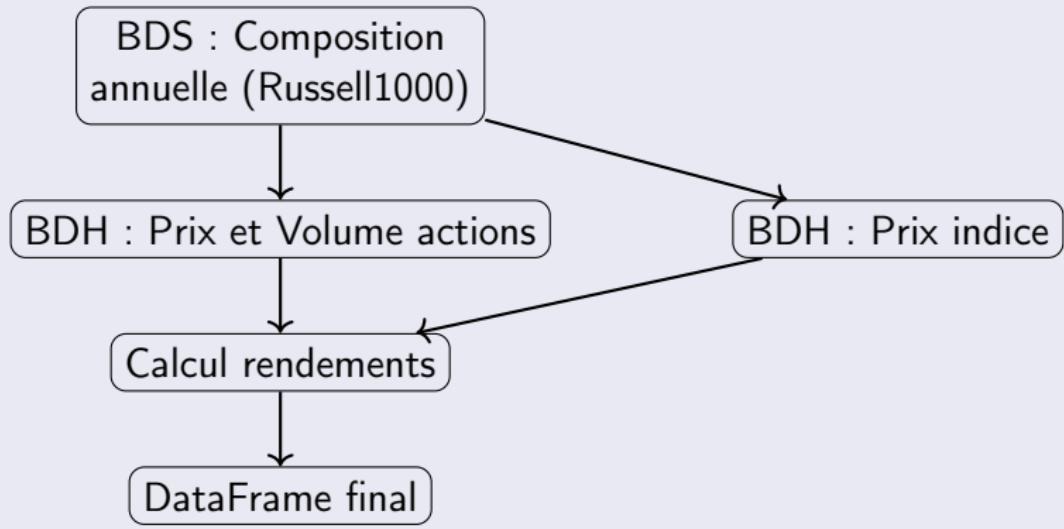
# Motivation : papier de référence

- **Comparaison de méthodes** : le papier évalue des optimisations min-variance, avec des pondérations  $1/\sigma$  et  $1/\beta$  sur actions US, développées et émergentes. Toutes abaissent la volatilité de 25 à 50 % vs cap-weighted et améliorent le Sharpe, sans différence statistiquement significative entre elles.
- **Sources du sur-rendement** : l'essentiel provient des primes *Value*, *BAB (Betting-Against-Beta)* et *Duration*, tandis que le bêta moyen tombe autour de 0,7, diversifiant ainsi le risque de marché.
- **Limites pratiques** : forte concentration sectorielle/pays, titres peu liquides. Les auteurs recommandent des contraintes et filtres supplémentaires.

## Récupération des prix

- BDH Bloomberg (PX\_LAST, PX\_VOLUME)
- Historique journalier : prix & volumes
- Calcul des rendements ( $\Delta P/P$ )

## Pipeline de données



Trois approches principales pour estimer le bêta :

- **Realized Beta**

- Rolling covariance/variance sur fenêtre fixe
- $\beta_t = \frac{\text{Cov}(R^s, R^m)}{\text{Var}(R^m)}$

- **Shrinkage Beta**

- Combinaison bayésienne de  $\beta^{\text{short}}$  (court terme) et  $\beta^{\text{long}}$  (long terme)

- **DCC Beta**

- Volatilités conditionnelles via GARCH
- Corrélation dynamique  $R_t$  par DCC

# Beta Réalisé (Realized Beta)

Calculé sur une fenêtre mobile de taille  $w$  (ex. 90 jours)

$$\beta_t^{\text{real}} = \frac{\text{Cov}(R_{t-w+1:t}^{\text{stock}}, R_{t-w+1:t}^{\text{mkt}})}{\text{Var}(R_{t-w+1:t}^{\text{mkt}})}$$

- $\text{Cov} = \frac{1}{w} \sum_{i=0}^{w-1} (r_{t-i}^s - \bar{r}^s)(r_{t-i}^m - \bar{r}^m)$
- $\text{Var} = \frac{1}{w} \sum_{i=0}^{w-1} (r_{t-i}^m - \bar{r}^m)^2$
- Implémentation vectorisée pour optimiser l'efficacité

# Beta Shrinkage – Régressions Short et Long

## 1) Estimation $\beta_t^{\text{short}}$ sur $w_s$ jours (ex . 90 jours)

$$r_{t-i}^s = \alpha_t^{(s)} + \beta_t^{\text{short}} r_{t-i}^m + \varepsilon_{t-i}^{(s)}, \quad i = 0, \dots, w_s - 1$$

- Estimation OLS :  $\beta_t^{\text{short}} = \frac{\sum(r^m - \bar{r}^m)(r^s - \bar{r}^s)}{\sum(r^m - \bar{r}^m)^2}$ .
- Variance de l'estimateur :  $V_t = \frac{\sum(\varepsilon_{t-i}^{(s)})^2}{(w_s - 2) \sum(r^m - \bar{r}^m)^2}$ .

## 2) Estimation $\beta_t^{\text{long}}$ sur $w_\ell$ jours

$$r_{t-j}^s = \alpha_t^{(\ell)} + \beta_t^{\text{long}} r_{t-j}^m + \varepsilon_{t-j}^{(\ell)}, \quad j = 0, \dots, w_\ell - 1$$

- Même formule OLS que ci-dessus mais avec  $w_\ell$  (ex. 252).
- Aucun calcul de variance pour  $\beta_t^{\text{long}}$  car il sert de prior fixe.

# Beta Shrinkage – Combinaison Bayésienne

## Poids adaptatifs

$$w_t^{\text{data}} = \frac{\tau_t^2}{\tau_t^2 + V_t}, \quad w_t^{\text{prior}} = \frac{V_t}{\tau_t^2 + V_t}, \quad \tau_t^2 = \text{Var}(\beta_{t-\tau+1:t}^{\text{short}})$$

## Beta shrinké final

$$\beta_t^{\text{shr}} = w_t^{\text{data}} \beta_t^{\text{short}} + w_t^{\text{prior}} \beta_t^{\text{long}}$$

- $\tau_t^2$  : variance empirique de  $\{\beta_{t-\tau+1}^{\text{short}}, \dots, \beta_t^{\text{short}}\}$
- Si  $\tau_t^2 \gg V_t$ , alors  $w_t^{\text{data}} \rightarrow 1$ .
- Si  $V_t \gg \tau_t^2$ , alors  $w_t^{\text{prior}} \rightarrow 1$
- Résultat : équilibre entre réactivité court terme et stabilité long terme

# Beta Dynamique (DCC) – Étape 1 : GARCH

Pour chaque série  $\{r_t^i\}$ ,  $i \in \{s, m\}$  :

$$r_t^i = \mu^i + \varepsilon_t^i, \quad \varepsilon_t^i = \sigma_t^i z_t^i, \quad z_t^i \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

- On ajuste un GARCH(p,q) :

$$\sigma_t^{i2} = \omega + \sum_{k=1}^p \alpha_k \varepsilon_{t-k}^i {}^2 + \sum_{\ell=1}^q \beta_\ell \sigma_{t-\ell}^i {}^2$$

- Choix de  $(p, q)$  par minimisation de l'AIC.
- On récupère :

$$\sigma_t^s, \sigma_t^m \quad \text{et} \quad z_t^s = \varepsilon_t^s / \sigma_t^s, \quad z_t^m = \varepsilon_t^m / \sigma_t^m.$$

# Beta Dynamique (DCC) – Étapes 2 & 3

## 2) Mise à jour de la matrice de covariance des innovations

$$Q_t = \underbrace{(1 - a - b) \bar{Q}}_{\text{Ancrage longue terme (lissage)}} + \underbrace{a z_t z_t^\top}_{\text{Co-mouvement instantané } (z_t^s, z_t^m)} + \underbrace{b Q_{t-1}}_{\text{Mémoire (effet inertie)}}$$

où  $\bar{Q} = \text{Cov}([z^s, z^m])$ .

## 3) Normalisation en corrélation $R_t$ et bêta

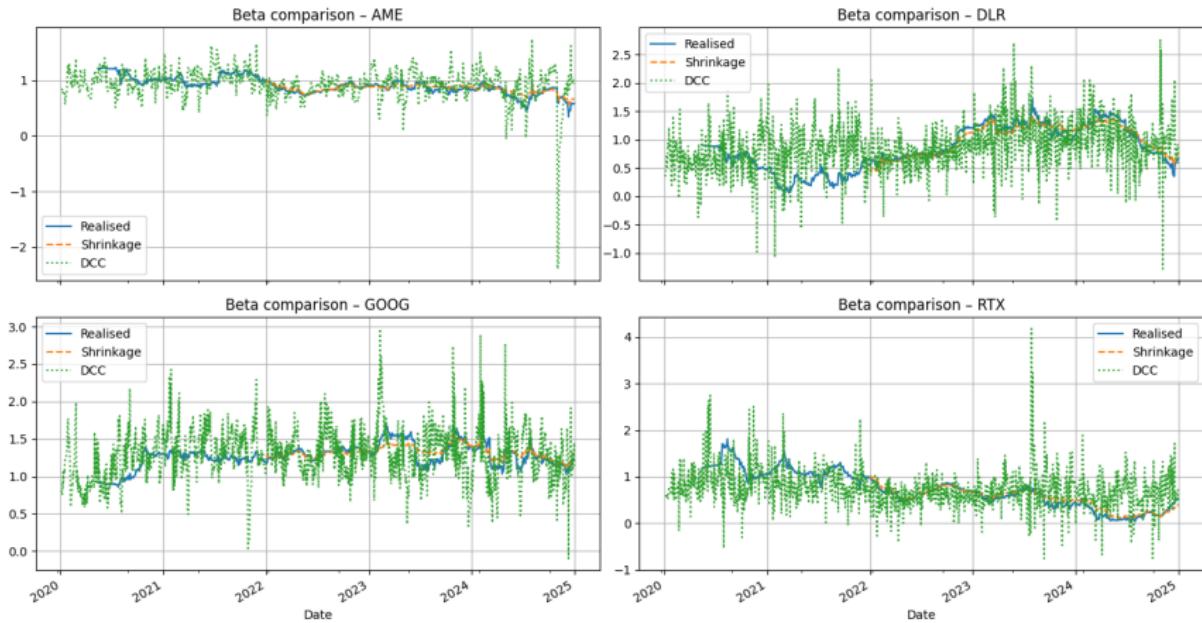
$$R_t = D_t^{-\frac{1}{2}} Q_t D_t^{-\frac{1}{2}}, \quad D_t = \text{diag}(Q_t),$$

$$\text{Cov}_t = R_t^{s,m} \sigma_t^s \sigma_t^m, \quad \beta_t^{\text{dcc}} = \frac{\text{Cov}_t}{(\sigma_t^m)^2}.$$

- Le terme  $z_t^s z_t^m$  capture précisément le co-mouvement instantané des innovations.

# Démonstration des estimations de $\beta$

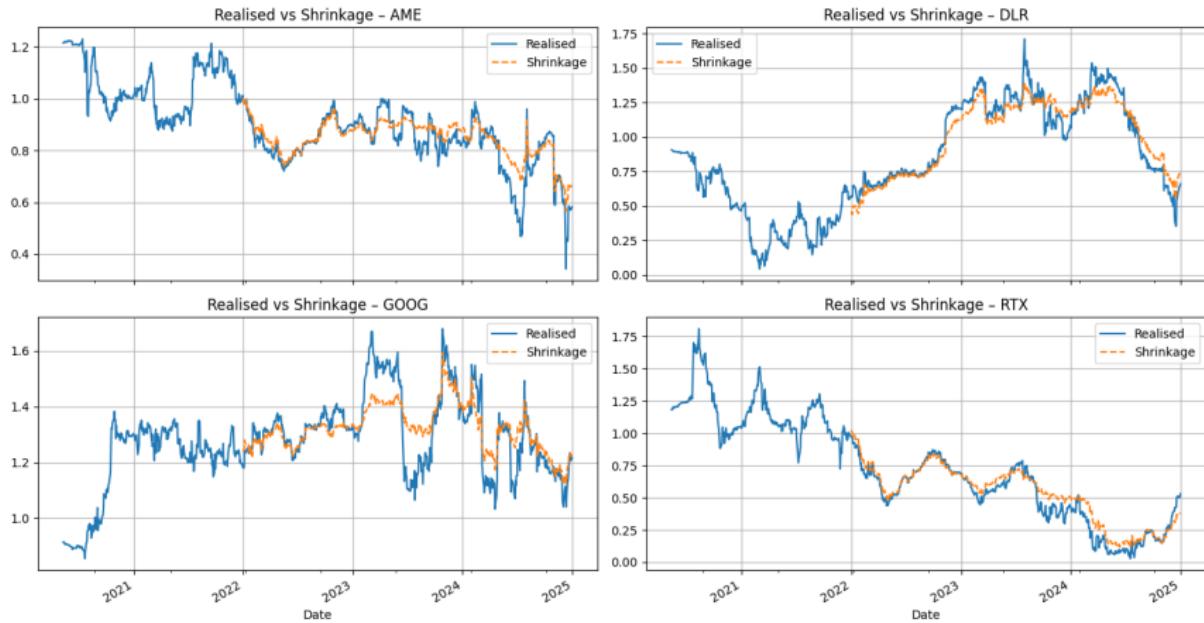
Realised vs Shrinkage vs DCC betas



**Observation :** la série  $\beta_t^{\text{dcc}}$  est trop bruitée pour être interprétable.

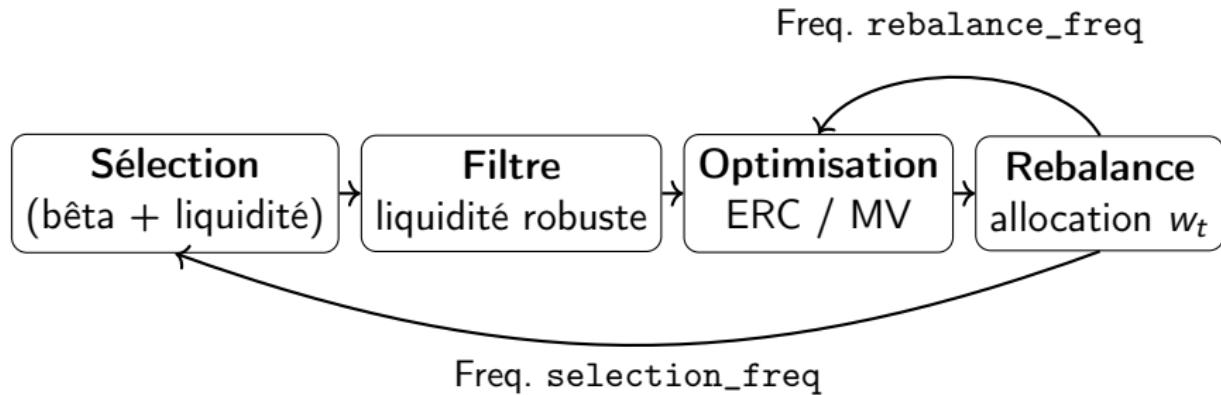
# Démonstration des estimations de $\beta$

Realised beta vs Shrinkage beta (no DCC)



**Observation :** la série  $\beta_t^{\text{Shrinkage}}$  est moins bruitée que  $\beta_t^{\text{Realized}}$ .

# Back-test : cycle complet



- **Sélection** : quantiles de bêta + seuil de liquidité.
- **Filtre** : z-scores robustes (médiane/MAD).
- **Optimisation** : Equal-Risk-Contribution (ERC) ou Sharpe (MV).
- **Rebalance** : nouveaux poids, puis drift quotidien jusqu'au prochain cycle.

# Sélection des actifs – Filtre de liquidité robuste

## Filtre transverse de liquidité (à date $t$ )

$$\text{raw}_j = \ln \left( 1 + \underbrace{\frac{1}{w} \sum_{i=t-w+1}^t P_i^j}_{\text{prix moyen sur } w \text{ jours}} \times \underbrace{\frac{1}{w} \sum_{i=t-w+1}^t V_i^j}_{\text{volume moyen sur } w \text{ jours}} \right)$$

$$\text{med} = \text{median}(\{\text{raw}_j\}_{j \in \mathcal{U}}), \quad \text{MAD} = \text{median}(|\text{raw}_j - \text{med}|)$$

$$z_j = \frac{\text{raw}_j - \text{med}}{\text{MAD}}$$

- **Étape 1** : on conserve les actifs  $j$  tels que  $z_j > +1,96$ .
- **Étape 2** : sur l'univers résiduel, on recalcule  $z_j = \frac{\text{raw}_j - \text{median}}{\text{MAD}}$  et on exclut ceux avec  $z_j < -1,96$ .
- Résultat : univers  $\mathcal{U}_t$  ne contenant que les titres véritablement liquides.



# Pourquoi commencer sans log ? Distribution brute

Intuition initiale : volume × prix brut

- On calcule d'abord :  
 $X_j = P_j^{\text{moyenne}} \times V_j^{\text{moyenne}}$ .
- Seuils « mean  $\pm 1.96\cdot\text{std}$  » pour z-score gaussien.
- *Problème* : la distribution est fortement étirée par quelques valeurs extrêmes.

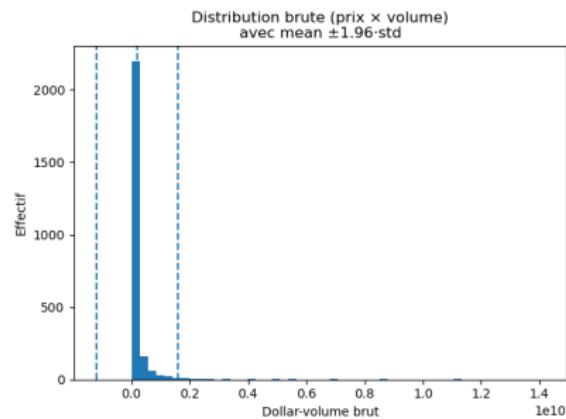


Figure – \*

Distribution de  $P \times V$  brut avec  
mean  $\pm 1.96\cdot\text{std}$

# Log1p + median/MAD : distribution robuste

Transformée et z-score robuste

- On passe à :  $X'_j = \ln(1 + X_j)$ .
- On remplace mean/std par median/MAD pour le z-score :

$$z_j = \frac{X'_j - \text{median}(X')}{\text{MAD}(X')}.$$

- Avantages :
  - queue droite compressée (mega-caps n'écrasent plus le filtre)
  - médiane/MAD peu sensibles aux outliers
  - z-scores négatifs mieux séparés

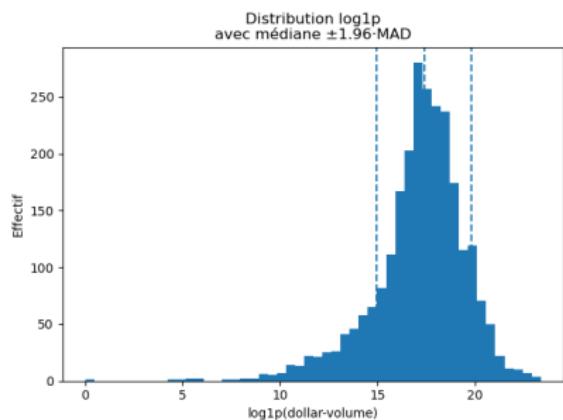


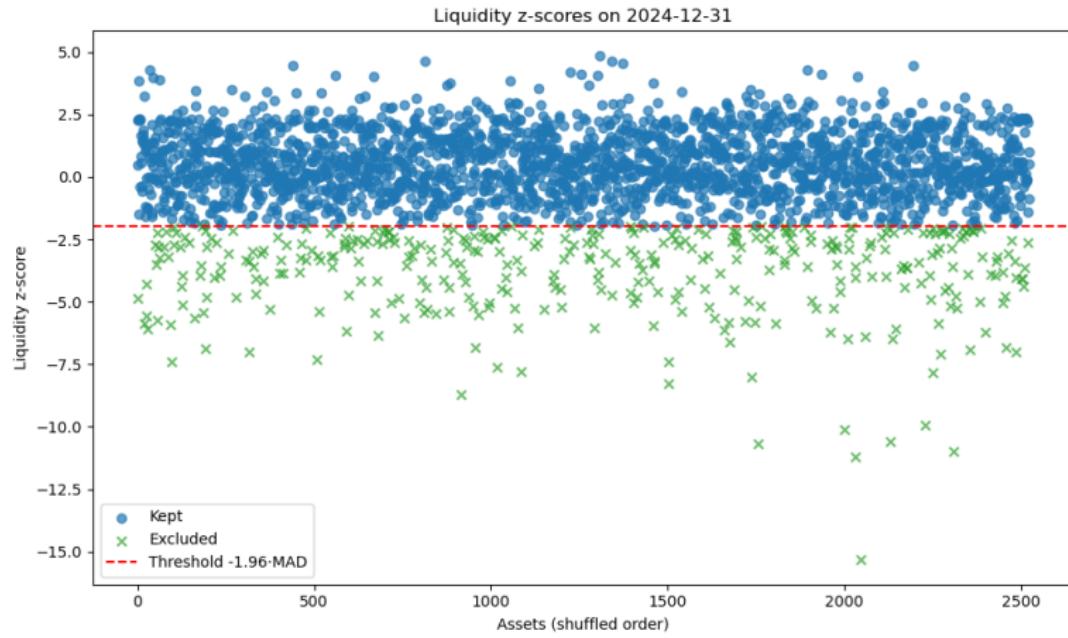
Figure – \*

Distribution de  $\ln(1 + P \times V)$  avec  
median  $\pm 1.96 \cdot \text{MAD}$

# Résultat sur les scores des actifs

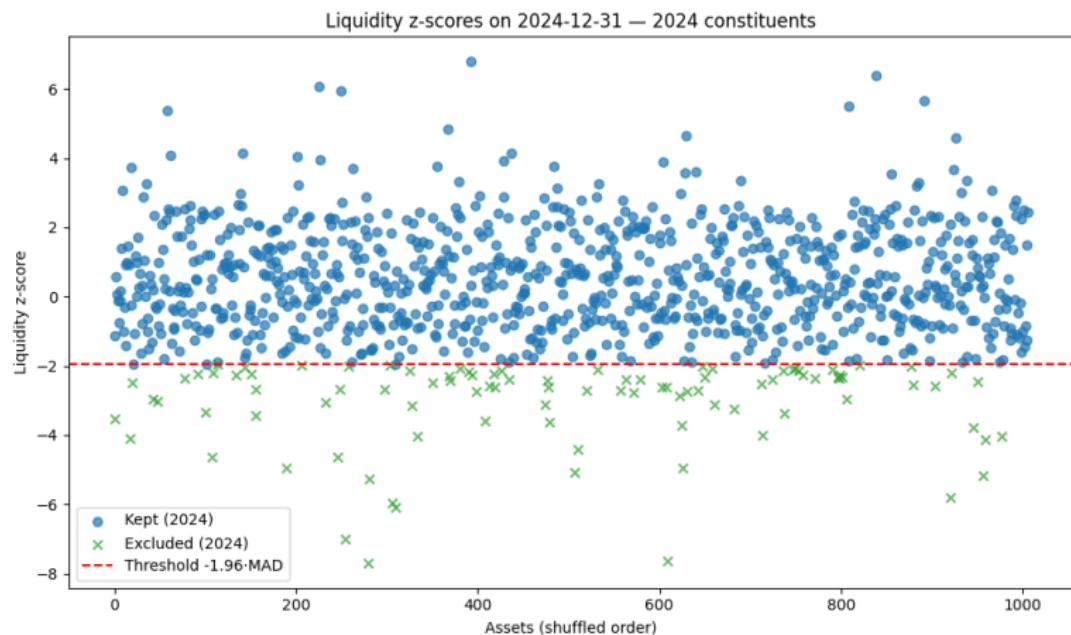
Sur tout les actifs existants depuis 2020

- Chaque point représente un actif classé par son z-score robuste.
- Seuil  $z = -1.96$  (ligne rouge) : en dessous, on exclut.



# Résultat sur les scores des actifs

Sur les composantes du Russel 1000 en 2024



# Sélection Long & Short

À chaque date de sélection  $t$  :

$$\beta_j^{\text{avg}} = \frac{1}{w_\beta} \sum_{i=t-w_\beta+1}^t \beta_i^j, \quad \mathcal{U}_t = \{\text{titres restants après filtre de liquidité}\}$$

où  $w_\beta$  = nombre de jours entre deux dates de sélection

## Poche Long

- Calculer le quantile  $\alpha$  de  $\{\beta_j^{\text{avg}} : j \in \mathcal{U}_t\}$ .
- Sélectionner les titres  $j$  tels que  $\beta_j^{\text{avg}} \leq \text{Quantile}(\alpha)$ .
- Ajuster  $\alpha$  si nécessaire pour garantir  $\geq N_{\min}$  titres.

## Poche Short (si $\text{short\_allocation} \neq 0$ )

- Calculer le quantile  $1 - \alpha$ .
- Sélectionner les titres  $j$  tels que  $\beta_j^{\text{avg}} \geq \text{Quantile}(1 - \alpha)$ .
- Même ajustement de  $\alpha$  pour obtenir  $\geq N_{\min}$  titres.

# Optimisation – Mean/Variance (Sharpe)

Problème : maximiser Sharpe ratio

$$\max_w \frac{\mathbb{E}[r_p]}{\text{Std}[r_p]} = \max_w \frac{\mu^\top w}{\sqrt{w^\top \Sigma w}}$$

Contraintes

- $\sum_i w_i = 1$  + short\_allocation pour le long,  
 $\sum_i w_i = -$  short\_allocation pour le short.
- $0 \leq w_i \leq 1$  (long) et  $-1 \leq w_i \leq 0$  (short).

Implémentation `scipy.optimize.minimize` de  $-\frac{\mu^\top w}{\sqrt{w^\top \Sigma w}}$  sous contraintes linéaires.

# Optimisation – Equal Risk Contribution

## Contributions de risque

$$RC_i = w_i (\Sigma w)_i, \quad \text{relatif } r_i = \frac{RC_i}{\sum_j RC_j}$$

## Objectif ERC

$$\min_w \sum_i (r_i - \frac{1}{n})^2$$

## Contraintes

- $\sum_i w_i = 1 + \text{short\_allocation}$  (long) et  $\sum_i |w_i| = \text{short\_allocation}$  (short).
- $w_i \geq 0$  pour long, et  $w_i \leq 0$  pour short.

Implémentation `scipy.optimize.minimize` de  $\sum_i (r_i - 1/n)^2$  sous contraintes.

# Interface Utilisateur – Paramètres Clés

## Dates & Fréquences

- **Start / End Date** Période d'analyse/backtest
- **Selection Freq.** Fréquence de sélection des actifs
- **Rebalance Freq.** Fréquence de rééquilibrage du portefeuille

## Univers & API

- **Universe** : Russell1000
- **API Choice** : Bloomberg, Data Save
- **Beta Method** : Realized, Shrinkage

## Gestion du Portefeuille

- **Min. Stocks (%)** Taille minimale du portefeuille
- **Liquidity Threshold** Seuil z-score pour filtrer la liquidité
- **Beta Threshold** Quantile pour sélectionner long/short
- **Short Allocation** Poids total dédié au short
- **Coût de transaction** Simuler une gestion nette de frais
- **Market neutral** 100% Long - 100% Short
- **Optimisation** ERC ou Mean/Variance



# Analyse du back-test

2020–2024 • Beta Shrinkage • Seuil beta = 0.50 • Market Neutral • Optimisation ERC

## Rendements

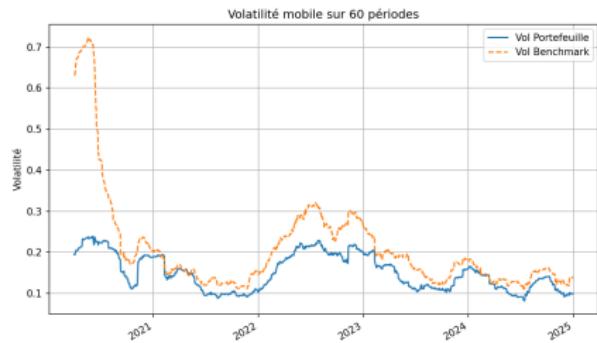
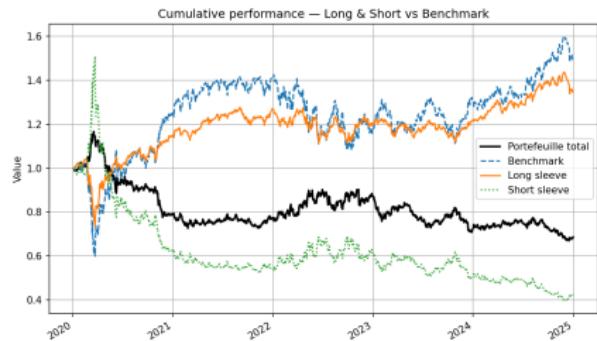
Indicateur	Portefeuille	Benchmark
Cumulative Return	-31.45%	49.35%
Annualized Return	-7.53%	8.68%
1Y Return	-4.29%	13.73%
3Y Return	-3.92%	1.78%
5Y Return	-7.27%	8.35%
Sharpe Ratio (ann.)	-0.43	0.46
Best Month	4.44	11.39
Worst Month	-6.33	-13.34
Win Rate (%)	48.56	53.09

## Indicateurs de Risque

Indicateur	Portefeuille	Benchmark
Volatilité (ann.)	15.56%	24.54%
1Y Volatility	11.19%	13.47%
3Y Volatility	15.12%	19.42%
5Y Volatility	15.27%	24.08%
Max Drawdown	-42.63%	-41.71%
VaR 95 % (Hist.)	24.17%	35.39%
VaR 95 % (Param.)	26.00%	39.64%
VaR 95 % (MC)	22.61%	22.36%
Skewness	-0.21	-0.55
Kurtosis	2.91	12.48

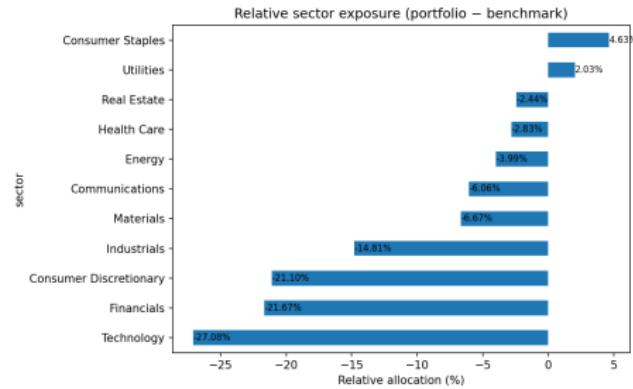
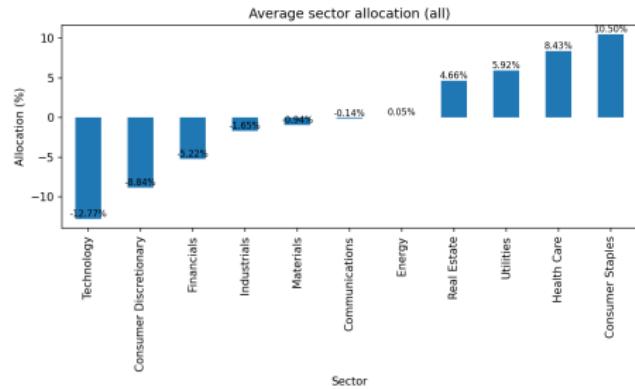
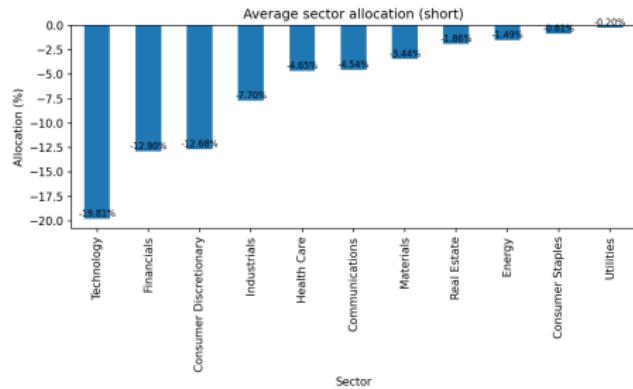
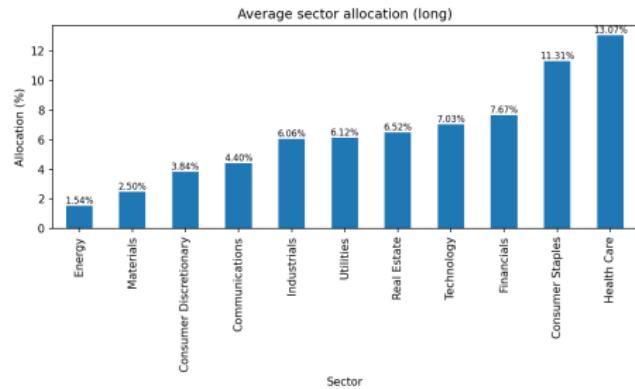
# Performance, bêta, volatilité, drawdown

2020–2024 • Beta Shrinkage • Seuil beta = 0.50 • Market Neutral • Optimisation ERC



# Exposition sectorielle

2020–2024 • Beta Shrinkage • Seuil beta = 0.50 • Market Neutral • Optimisation ERC



# Analyse du back-test

2005–2024 • Beta Shrinkage • Seuil beta = 0.50 • Market Neutral • Optimisation ERC

## Rendements

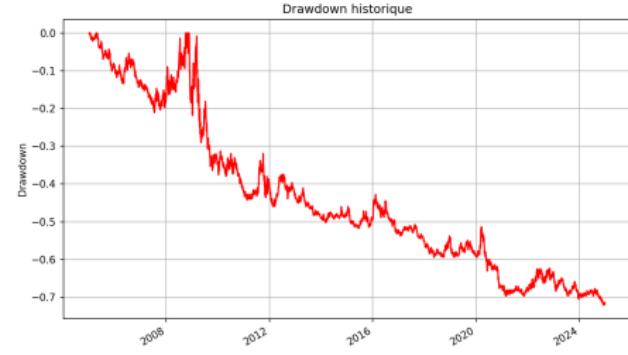
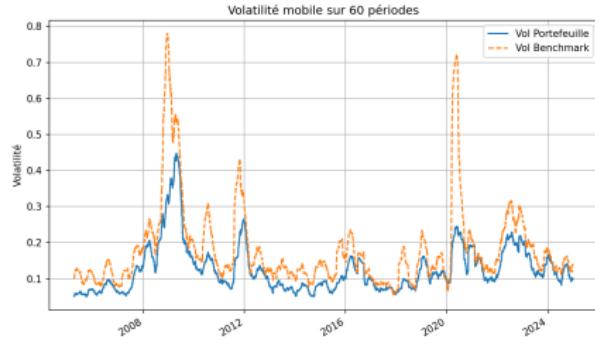
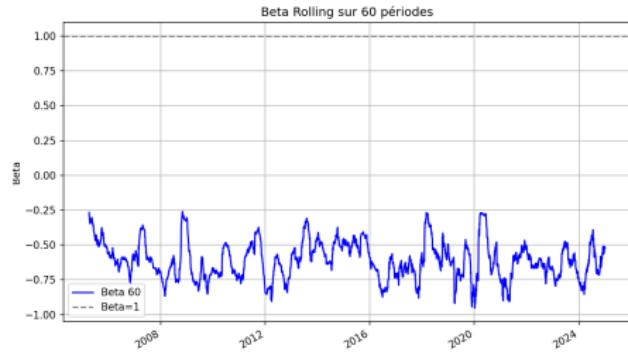
Indicateur	Portefeuille	Benchmark
Cumulative Return	-62.69%	368.99%
Annualized Return	-4.97%	8.31%
1Y Return	-4.29%	13.73%
3Y Return	-3.92%	1.78%
5Y Return	-7.11%	8.29%
Sharpe Ratio (ann.)	-0.29	0.48
Best Month	6.41	11.55
Worst Month	-7.45	-13.34
Win Rate (%)	47.97	53.91

## Indicateurs de Risque

Indicateur	Portefeuille	Benchmark
Volatilité (ann.)	14.16%	21.55%
1Y Volatility	11.19%	13.47%
3Y Volatility	15.12%	19.42%
5Y Volatility	15.34%	24.09%
Max Drawdown	-72.10%	-60.85%
VaR 95 % (Hist.)	21.04%	31.12%
VaR 95 % (Param.)	23.55%	34.79%
VaR 95 % (MC)	22.67%	22.57%
Skewness	-0.03	-0.25
Kurtosis	6.06	11.58

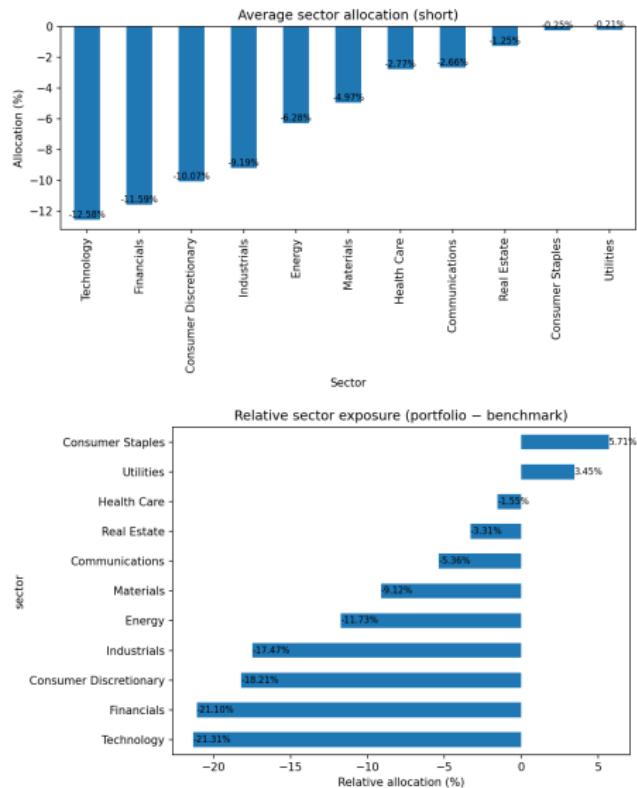
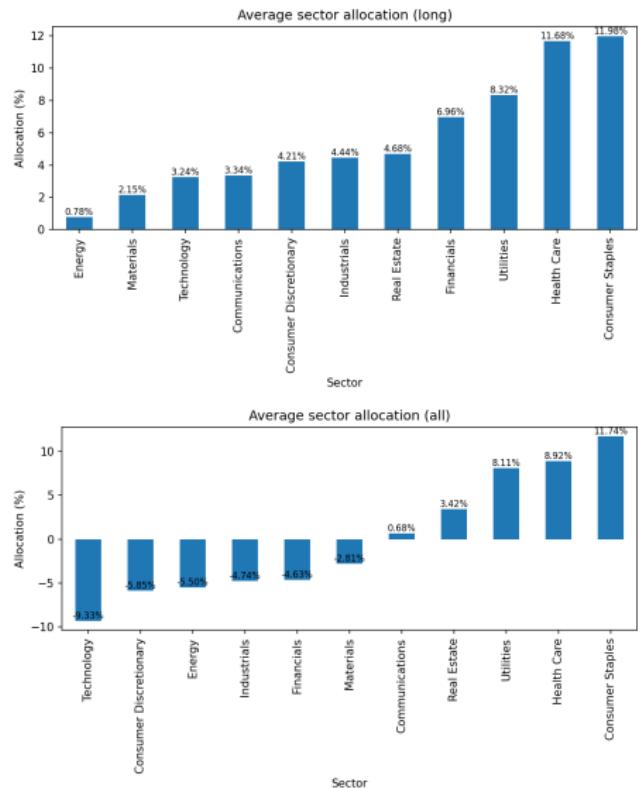
# Performance, bêta, volatilité, drawdown

2005–2024 • Beta Shrinkage • Seuil beta = 0.50 • Market Neutral • Optimisation ERC



# Exposition sectorielle

2005–2024 • Beta Shrinkage • Seuil beta = 0.50 • Market Neutral • Optimisation ERC



# Analyse du back-test

2005–2024 • Beta Shrinkage • Seuil beta = 0.50 • Short =0 • Optimisation ERC

## Rendements

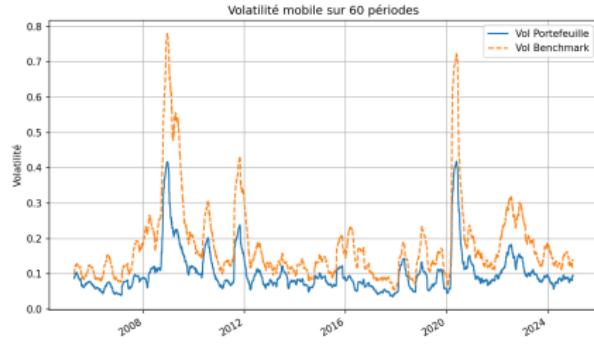
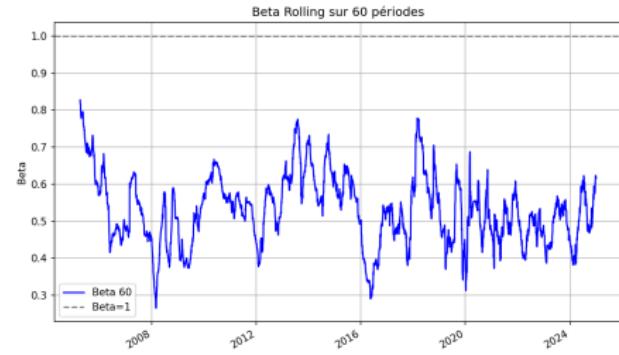
Indicateur	Portefeuille	Benchmark
Cumulative Return	206.89%	368.99%
Annualized Return	5.97%	8.31%
1Y Return	11.36%	13.73%
3Y Return	2.18%	1.78%
5Y Return	6.57%	8.29%
Sharpe Ratio (ann.)	0.55	0.48
Best Month	7.93	11.55
Worst Month	-7.63	-13.34
Win Rate (%)	55.07	53.91

## Indicateurs de Risque

Indicateur	Portefeuille	Benchmark
Volatilité (ann.)	11.82%	21.55%
1Y Volatility	8.17%	13.47%
3Y Volatility	10.64%	19.42%
5Y Volatility	13.63%	24.09%
Max Drawdown	-39.08%	-60.85%
VaR 95 % (Hist.)	17.25%	31.12%
VaR 95 % (Param.)	19.03%	34.79%
VaR 95 % (MC)	9.38%	22.57%
Skewness	-0.45	-0.25
Kurtosis	12.15	11.58

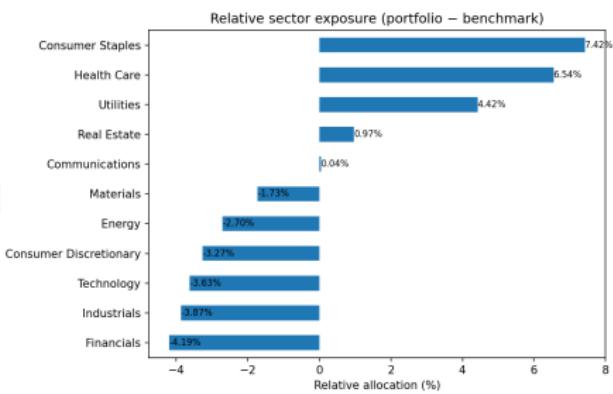
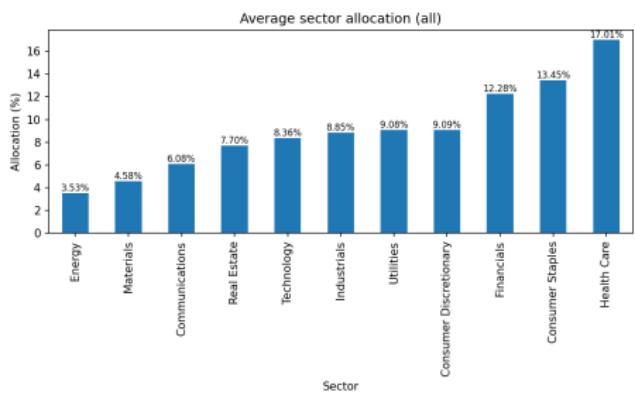
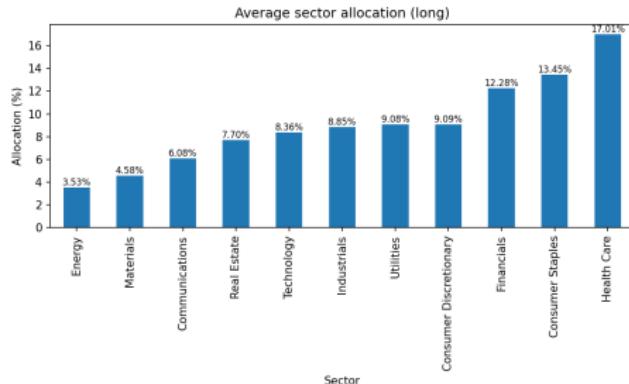
# Performance, bêta, volatilité, drawdown

2005–2024 • Beta Shrinkage • Seuil beta = 0.50 • Short =0 • Optimisation ERC



# Exposition sectorielle

2005–2024 • Beta Shrinkage • Seuil beta = 0.50 • Short =0 • Optimisation ERC



# Analyse du back-test

2005–2024 • Beta Shrinkage • Seuil Beta = 0.50 • Market Neutral • Optimisation MV

## Rendements

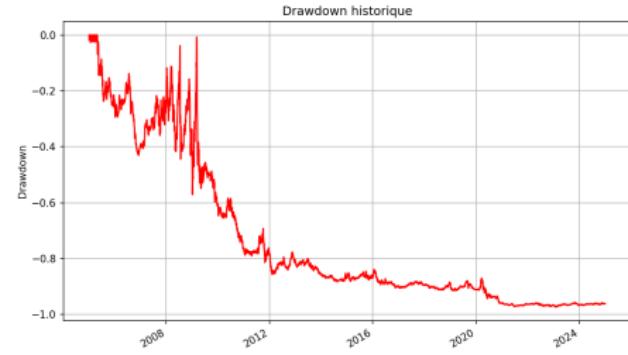
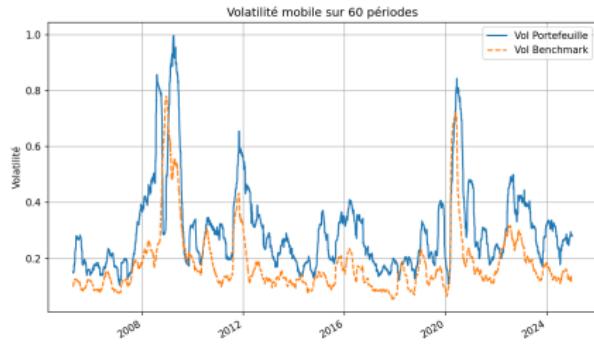
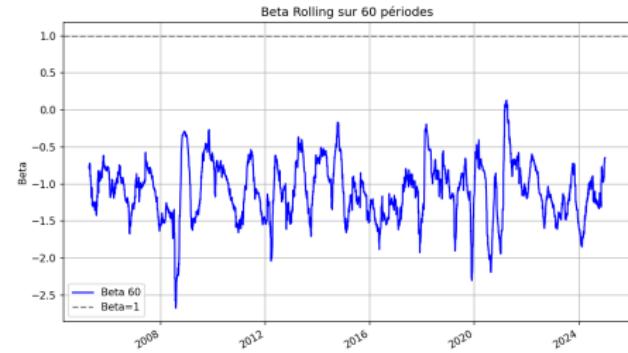
Indicateur	Portefeuille	Benchmark
Cumulative Return	-95.33%	368.99%
Annualized Return	-14.65%	8.31%
1Y Return	-16.63%	13.73%
3Y Return	-2.45%	1.78%
5Y Return	-15.64%	8.29%
Sharpe Ratio (ann.)	-0.3	0.48
Best Month	15.74	11.55
Worst Month	-17.4	-13.34
Win Rate (%)	50.57	53.91

## Indicateurs de Risque

Indicateur	Portefeuille	Benchmark
Volatilité (ann.)	33.84%	21.55%
1Y Volatility	26.62%	13.47%
3Y Volatility	31.45%	19.42%
5Y Volatility	36.28%	24.09%
Max Drawdown	-97.39%	-60.85%
VaR 95 % (Hist.)	50.58%	31.12%
VaR 95 % (Param.)	56.29%	34.79%
VaR 95 % (MC)	24.09%	22.57%
Skewness	-0.47	-0.25
Kurtosis	7.36	11.58

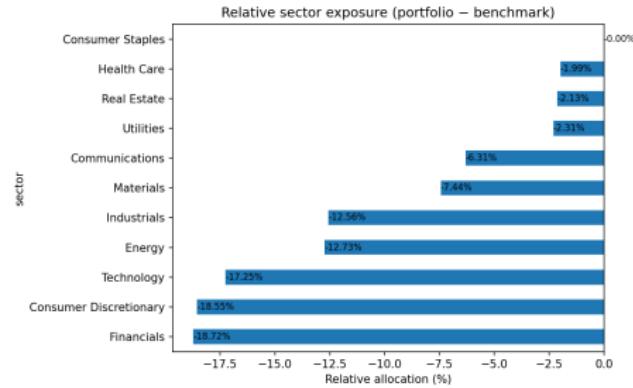
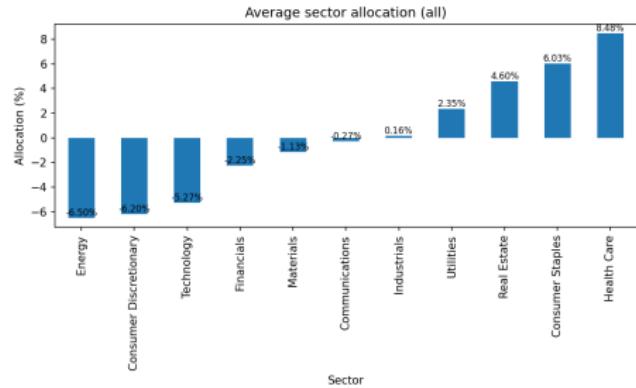
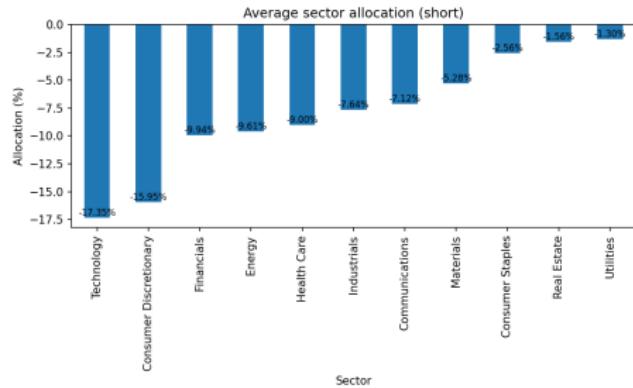
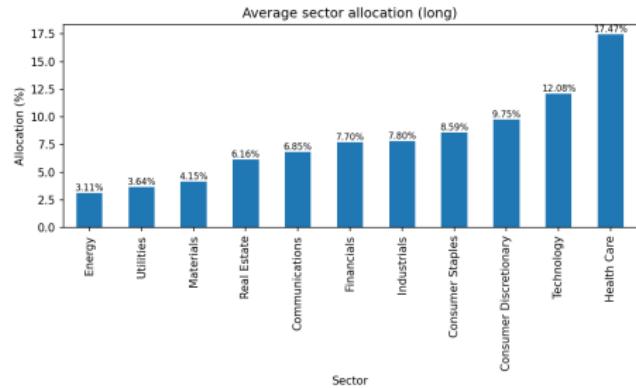
# Performance, bêta, volatilité, drawdown

2005–2024 • Beta Shrinkage • Seuil Beta = 0.50 • Market Neutral • Optimisation MV



# Exposition sectorielle

2005–2024 • Beta Shrinkage • Seuil Beta = 0.50 • Market Neutral • Optimisation MV



# Analyse du back-test

2005–2024 • Beta Shrinkage • Seuil Beta = 0.50 • Short = 0 • Optimisation mv

## Rendements

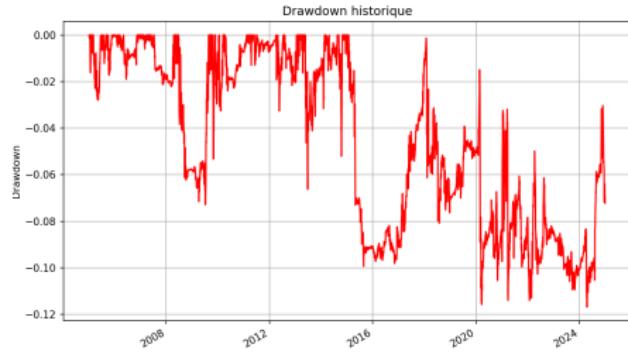
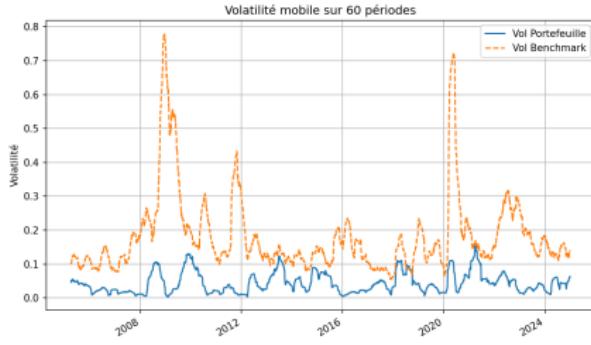
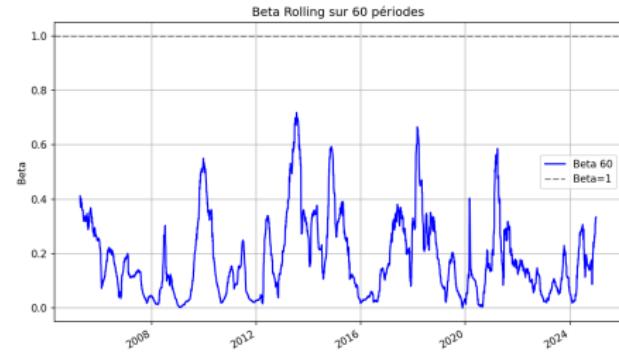
Indicateur	Portefeuille	Benchmark
Cumulative Return	56.82%	368.99%
Annualized Return	2.35%	8.31%
1Y Return	3.12%	13.73%
3Y Return	0.25%	1.78%
5Y Return	-0.47%	8.29%
Sharpe Ratio (ann.)	0.46	0.48
Best Month	2.35	11.55
Worst Month	-3.5	-13.34
Win Rate (%)	55.21	53.91

## Indicateurs de Risque

Indicateur	Portefeuille	Benchmark
Volatilité (ann.)	5.32%	21.55%
1Y Volatility	4.80%	13.47%
3Y Volatility	4.42%	19.42%
5Y Volatility	5.89%	24.09%
Max Drawdown	-11.69%	-60.85%
VaR 95 % (Hist.)	7.58%	31.12%
VaR 95 % (Param.)	8.60%	34.79%
VaR 95 % (MC)	8.82%	22.57%
Skewness	-1.12	-0.25
Kurtosis	13.96	11.58

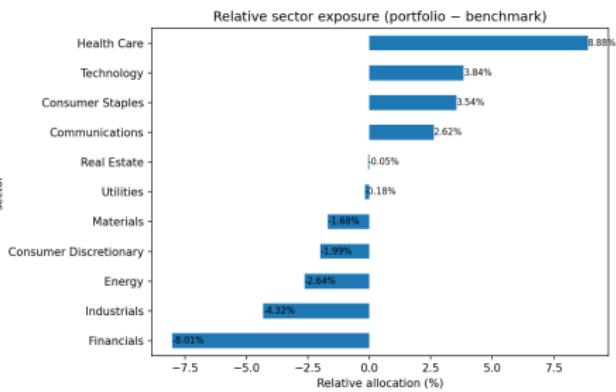
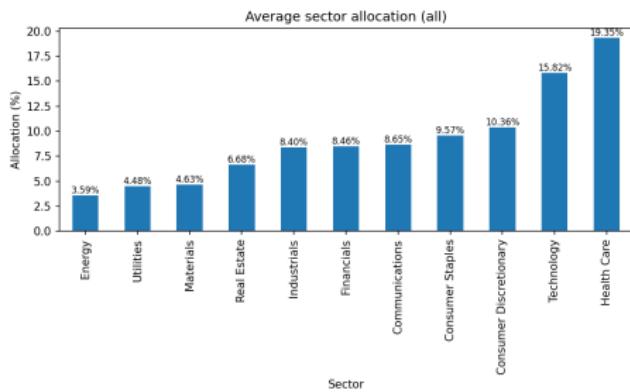
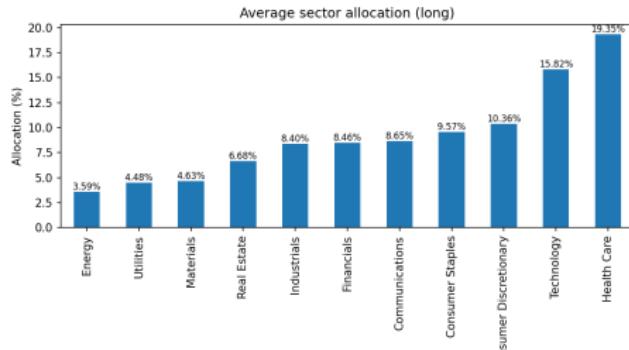
# Performance, bêta, volatilité, drawdown

2005–2024 • Beta Shrinkage • Seuil Beta = 0.50 • Short = 0 • Optimisation ERC



# Exposition sectorielle

2005–2024 • Beta Shrinkage • Seuil beta = 0.50 • Short = 0 • Optimisation ERC



# Analyse du back-test

2005–2024 • Beta Realized • Seuil Beta = 0.50 • Market Neutral • Optimisation ERC

## Rendements

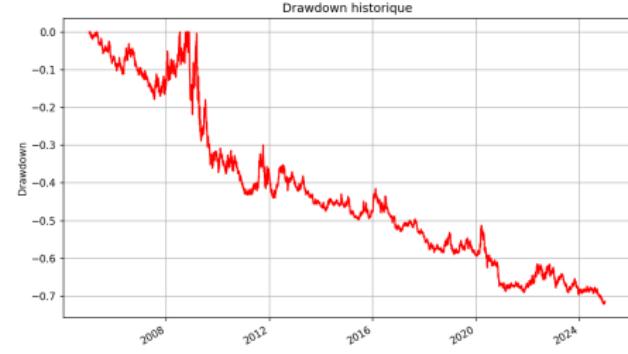
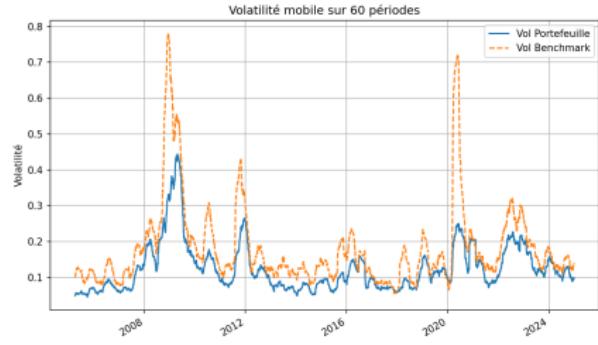
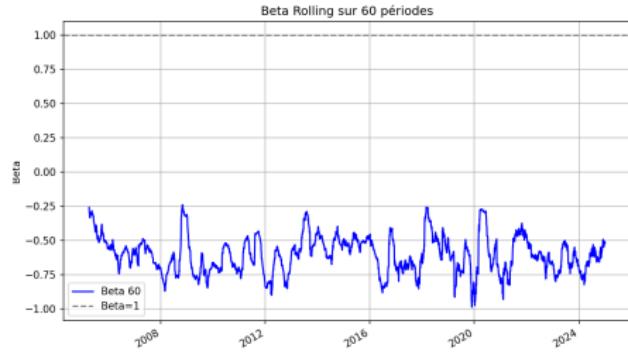
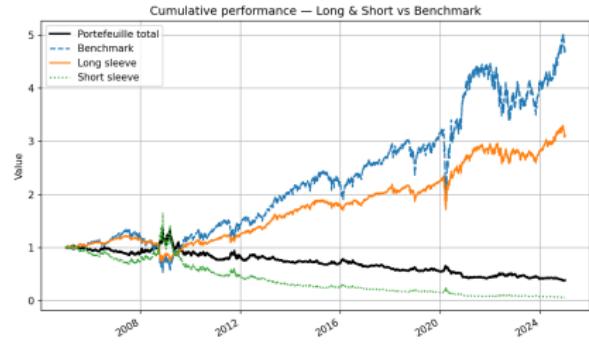
Indicateur	Portefeuille	Benchmark
Cumulative Return	-61.48%	368.99%
Annualized Return	-4.81%	8.31%
1Y Return	-6.88%	13.73%
3Y Return	-4.77%	1.78%
5Y Return	-7.04%	8.29%
Sharpe Ratio (ann.)	-0.28	0.48
Best Month	6.22	11.55
Worst Month	-7.38	-13.34
Win Rate (%)	48.4	53.91

## Indicateurs de Risque

Indicateur	Portefeuille	Benchmark
Volatilité (ann.)	14.08%	21.55%
1Y Volatility	11.03%	13.47%
3Y Volatility	14.92%	19.42%
5Y Volatility	15.23%	24.09%
Max Drawdown	-72.10%	-60.85%
VaR 95 % (Hist.)	20.98%	31.12%
VaR 95 % (Param.)	23.41%	34.79%
VaR 95 % (MC)	22.59%	22.57%
Skewness	-0.08	-0.25
Kurtosis	6.29	11.58

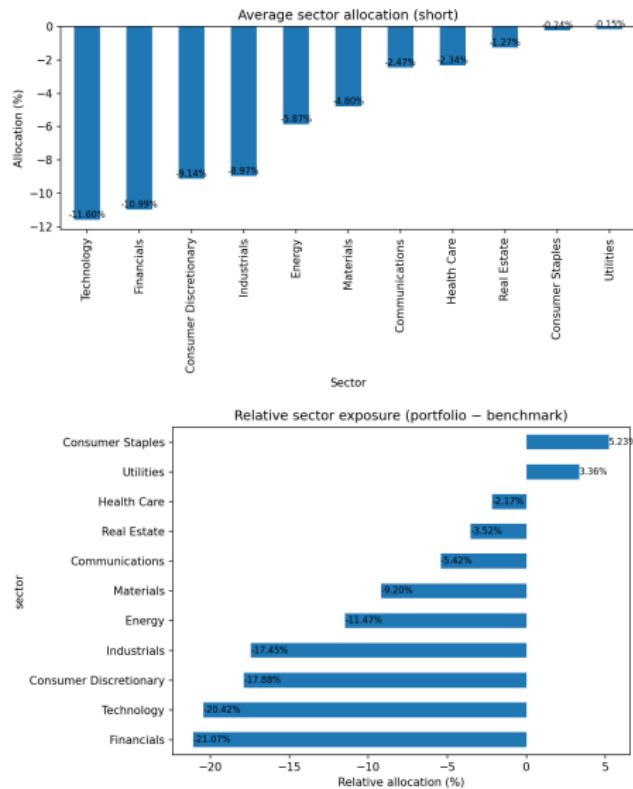
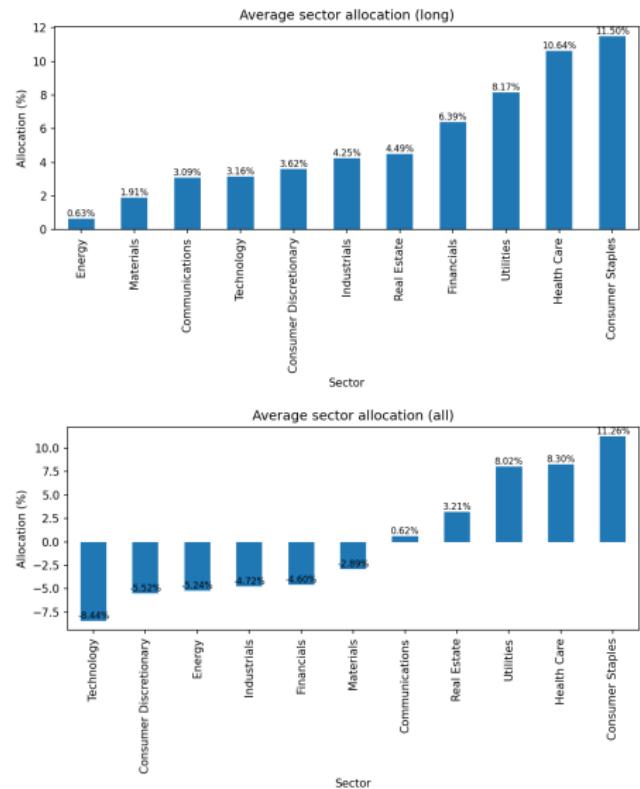
# Performance, bêta, volatilité, drawdown

2005–2024 • Beta Realized • Seuil Beta = 0.50 • Market Neutral • Optimisation ERC



# Exposition sectorielle

2005–2024 • Beta Realized • Seuil Beta = 0.50 • Market Neutral • Optimisation ERC



# Analyse du back-test

2005–2024 • Beta Realized • Seuil Beta = 0.50 • Market Neutral • Optimisation MV

## Rendements

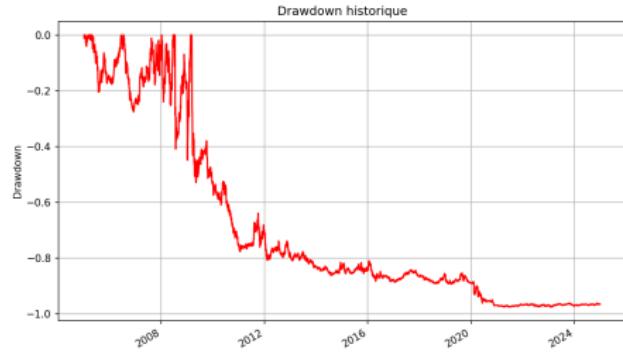
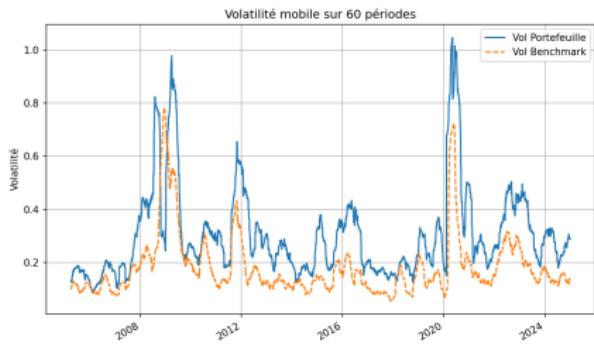
Indicateur	Portefeuille	Benchmark
Cumulative Return	-91.62%	368.99%
Annualized Return	-12.03%	8.31%
1Y Return	-18.17%	13.73%
3Y Return	-2.72%	1.78%
5Y Return	-20.64%	8.29%
Sharpe Ratio (ann.)	-0.19	0.48
Best Month	13.68	11.55
Worst Month	-32.33	-13.34
Win Rate (%)	50.94	53.91

## Indicateurs de Risque

Indicateur	Portefeuille	Benchmark
Volatilité (ann.)	34.63%	21.55%
1Y Volatility	26.13%	13.47%
3Y Volatility	33.14%	19.42%
5Y Volatility	41.89%	24.09%
Max Drawdown	-97.53%	-60.85%
VaR 95 % (Hist.)	49.80%	31.12%
VaR 95 % (Param.)	57.39%	34.79%
VaR 95 % (MC)	23.12%	22.57%
Skewness	-1.18	-0.25
Kurtosis	16.35	11.58

# Performance, bêta, volatilité, drawdown

2005–2024 • Beta Realized • Seuil Beta = 0.50 • Market Neutral • Optimisation MV



# Exposition sectorielle

2005–2024 • Beta Realized • Seuil Beta = 0.50 • Market Neutral • Optimisation MV

