Suites numériques

BTS Services Informatiques aux Organisations

Théo HUET – 2025–2026

1 Génération d'une suite

1.1 Introduction et/ou Rappels

Définition

Une **suite numérique**, noté u_n, est une liste de nombres que l'on obtient en suivant une règle précise à partir d'un premier terme noté u_0.
Chaque nombre de la liste est appelé un **terme** de la suite.
On note généralement les termes d'une suite :

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \dots$$

où l'indice indique la **position** du terme dans la suite, noté souvent n.

Une suite permet par exemple de décrire :
— l'évolution d'une quantité au cours du temps,
— une augmentation ou une diminution régulière,
— une valeur qui est multipliée ou ajoutée plusieurs fois.

Exemple concret

Un compte bancaire contient 1 000 € au départ. Chaque mois, on ajoute 50 €.
Les montants successifs forment une suite :

$$1000,\ 1050,\ 1100,\ 1150,\ \dots$$

Il existe plusieurs **manières de générer une suite** :
— en donnant directement la valeur du terme en fonction de son rang,
— ou en expliquant comment passer d'un terme au suivant.

Autre exemple

On part de 2 $(= u_0)$, puis on multiplie chaque nombre par 3 pour obtenir le suivant :

$$2,\ 6,\ 18,\ 54,\ \dots$$

Chaque terme est obtenu à partir du précédent.
ou nous pouvons partir du premier terme pour trouver le n-ième terme, comme illustré ici pour le troisième terme $(n = 3)$:

$$54 = 2 * 3^3 = u_0 3^n$$

1.2 Suites croissantes et décroissantes

Lorsqu'on étudie une suite, on cherche souvent à savoir comment elle **évolue** lorsque le rang augmente.

On distingue principalement trois comportements :
- une suite **croissante** : les termes augmentent,
- une suite **décroissante** : les termes diminuent,
- une suite **constante** : les termes restent identiques.

Exemple de suite croissante

$$0,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20,\ \ldots$$

Chaque terme est plus grand que le précédent : la suite est croissante.

Exemple de suite décroissante

$$80,\ 78,\ 76,\ 74,\ \ldots$$

Chaque terme est plus petit que le précédent : la suite est décroissante.

1.3 Représentation graphique d'une suite

On peut représenter une suite numériquement par un **graphique**. Pour cela, on place :
- le rang n sur l'axe horizontal,
- la valeur du terme u_n sur l'axe vertical.

Chaque terme est représenté par un **point** et non par une courbe continue (voir figure 1).

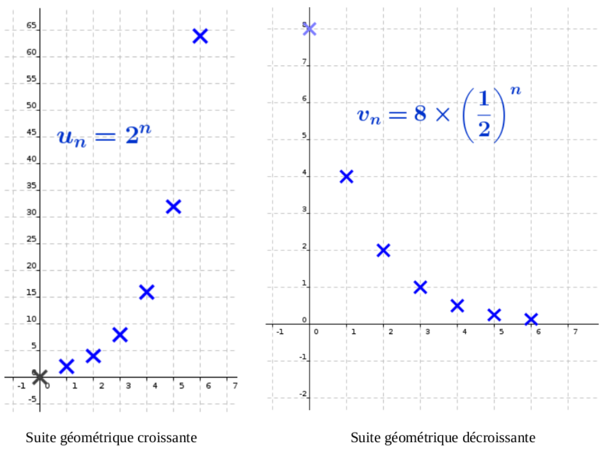

FIGURE 1 – Graphique de la suite u_n et v_n

Le graphique permet de visualiser rapidement :
- si la suite est croissante ou décroissante,
- si les termes augmentent rapidement ou lentement,
- le comportement global de la suite.

Activité

Les activités I-a, I-b et I-c sont à effectuer (voir polycopié d'activités)

2 Suites arithmétiques et géométriques

2.1 Suites arithmétiques

Activité

L'activité II-a-i est à effectuer (voir polycopié d'activités).

Cours

Définition

Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que la suite (u_n) est **arithmétique** si chaque terme est obtenu en ajoutant toujours la même quantité au terme précédent.
Mathématiquement, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

où :
- r est la **raison** de la suite arithmétique,
- u_0 est le **premier terme** de la suite.

Remarque : Dans une suite arithmétique, on ajoute toujours la même valeur r d'un terme au suivant.

Exemple

On part de 10 et on ajoute 3 à chaque étape :

$$10,\ 13,\ 16,\ 19,\ 22,\ \ldots$$

Cette suite est arithmétique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison $r = 3$.

Propriété

Pour tout entier naturel n, le terme général d'une suite arithmétique est donné par :

$$u_n = u_0 + nr$$

Remarque : Pour obtenir u_n, on ajoute n fois la raison r au premier terme u_0.

Exercices

Montrez que cette propriété est vraie pour $n = 5$.
Indice : Partir de la définition d'une suite arithmétique pour trouver u_1 à partir de u_0, puis u_2 à partir de u_0 et u_1, et ainsi de suite jusqu'à u_5.

2.1.1 Croissance et décroissance d'une suite arithmétique

Le sens de variation d'une suite arithmétique dépend uniquement de la valeur de sa raison r.
— si $r > 0$, la suite est **croissante**,
— si $r < 0$, la suite est **décroissante**,
— si $r = 0$, la suite est **constante**.

Exemples

— $u_n = 5 + 2n$: la raison est positive, la suite est croissante.
— $u_n = 20 - 4n$: la raison est négative, la suite est décroissante.
— $u_n = 7$: la raison est nulle, la suite est constante.

2.2 Somme des termes d'une suite arithmétique

On peut calculer la somme des premiers termes d'une suite arithmétique.

Propriété

La somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) est donnée par :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{(n + 1)(u_0 + u_n)}{2}$$

Exemple

On considère la suite arithmétique définie par :

$$u_0 = 10 \quad \text{et} \quad r = 5$$

On a :

$$u_4 = 10 + 4 \times 5 = 30$$

La somme des 5 premiers termes est donc :

$$S_4 = \frac{5(10 + 30)}{2} = 100$$

Exercices

Les exercices 1 à 6 (Section II-a-ii) sont à effectuer (voir polycopié d'activités).

2.3 Suites géométriques

Activité

L'activité II-b-i est à effectuer (voir polycopié d'activités).

Définition

Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que la suite (u_n) est **géométrique** si chaque terme est obtenu en multipliant le terme précédent par une même quantité.
Mathématiquement, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = q\,u_n$$

où :
- q est la **raison** de la suite géométrique,
- u_0 est le **premier terme** de la suite.

Remarque : Dans une suite géométrique, on multiplie toujours par la même valeur q pour passer d'un terme au suivant.

Exemple

On part de 2 et on multiplie chaque terme par 3 :

$$2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162,\ \ldots$$

Cette suite est géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 3$.

Propriété

Pour tout entier naturel n, le terme général d'une suite géométrique est donné par :

$$u_n = u_0\,q^n$$

Remarque : Pour obtenir u_n, on multiplie n fois le terme initial u_0 par la raison q.

Exercices

Montrez que cette propriété est vraie pour $n = 5$.
Indice : Partir de la définition d'une suite géometrique pour trouver u_1 à partir de u_0, puis u_2 à partir de u_0 et u_1, et ainsi de suite jusqu'à u_5.

2.3.1 Croissance et décroissance d'une suite géométrique

Le sens de variation d'une suite géométrique dépend de la valeur de la raison q et du signe du premier terme.

— si $u_0 > 0$ et $q > 1$, la suite est **croissante**,
— si $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$, la suite est **décroissante**,
— si $q = 1$, la suite est **constante**,
— si $q < 0$, la suite **change de signe** et n'est pas monotone (elle peut être croissante puis décroissante et changer comme cela indéfiniment).

Exemples

— $u_n = 2 \times 3^n$: $q > 1$, la suite est croissante.
— $u_n = 100 \times 0{,}5^n$: $0 < q < 1$, la suite est décroissante.
— $u_n = 5$: $q = 1$, la suite est constante.

2.4 Somme des termes d'une suite géométrique

On peut calculer la somme des premiers termes d'une suite géométrique lorsque la raison est différente de 1.

Propriété

Si $q \neq 1$, la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique (u_n) est donnée par :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exemple

On considère la suite géométrique définie par :

$$u_0 = 100 \quad \text{et} \quad q = 0{,}5$$

On calcule :

$$u_4 = 100 \times 0{,}5^4 = 6{,}25$$

La somme des 5 premiers termes est :

$$S_4 = 100 \times \frac{1 - 0{,}5^5}{1 - 0{,}5} = 193{,}75$$

Exercices

Les exercices 1 à 5 (Section II-b-ii) sont à effectuer (voir polycopié d'activités).

Activité

Toute les activités et exercice de la partie III sont à effectuer (voir polycopié d'activités).

3 Limite d'une suite

Lorsque l'on étudie une suite, on cherche souvent à savoir ce que deviennent ses termes lorsque le rang n devient très grand.

On dit alors que l'on étudie la **limite de la suite**.

3.1 Approche intuitive de la notion de limite

De manière simple, étudier la limite d'une suite consiste à répondre à la question :

"Vers quelle valeur semblent se rapprocher les termes de la suite lorsque n devient grand ?"

Dans la pratique, on utilise souvent :
— un tableau de valeurs,
— une calculatrice,
— ou un logiciel informatique.

Cela permet de **conjecturer** (faire une hypothèse) sur la limite de la suite.

Exemple expérimental

On considère la suite définie par :

$$u_n = \frac{1}{n}$$

En calculant quelques termes :

$$u_1 = 1, \quad u_{10} = 0{,}1, \quad u_{100} = 0{,}01, \quad u_{1000} = 0{,}001$$

Les termes deviennent de plus en plus petits et se rapprochent de 0. On conjecture que la limite de la suite est 0.

3.2 Définition de la limite

Définition

On dit qu'une suite (u_n) admet pour **limite** un nombre réel ℓ lorsque les termes u_n se rapprochent de plus en plus de ℓ lorsque n devient grand.

On note alors :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$$

Ressources et Références :

— Polycopié d'activités : `https://github.com/TheoHUETQC/Cours-BTS-Mathematiques-approfondies/Suite_numeriques/Activite_Suites_numeriques.pdf`
— Références : `https://math-baudon.fr/cours-ressources/BTS-SE.html`