Activités et Exercices : Suites numériques

BTS Services Informatiques aux Organisations

Théo HUET – 2025–2026

1 Génération d'une suite

1.1 Activité 1.1 : Suite fonctionnelle

1. Qu'est-ce qu'une suite numérique ?
2. À l'aide d'une calculatrice, représenter graphiquement les termes des suites suivantes :
   (a) $u_n = n^2 - n + 1$
   (b) $v_n = \frac{1}{n}$
   (c) $w_n = \sqrt{n + \pi}$
   (d) $x_n = \sin(2n) + \cos(2n)$
   (e) $y_n = e^n$
   (f) $z_n = \ln(n)$
3. À l'aide de la calculatrice ou de l'ordinateur, calculer les 10 premiers termes de chaque suite pour compléter le tableau de valeurs suivante :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n										
v_n										
w_n										
x_n										
y_n										
z_n										

4. Au regard de vos résultats, conjecturer la limite de chaque suite.

1.2 Activité 1.2 : Suites récurrentes

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 1 \\ u_0 = 1 \end{cases}$

1. Représenter graphiquement les termes de la suite (u_n).
2. Donner les 10 premiers termes de la suite.
3. Conjecturer la limite de cette suite.

1.3 Activité 1.3 : Suite de Fibonacci

On considère la suite de termes : $1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; \dots$

1. Continuer cette suite en donnant les 5 termes suivants.
2. Formaliser une expression algébrique de cette suite.
3. Programmer un algorithme permettant de renvoyer le(s) terme(s) jusqu'au rang n.
4. Donner le terme de rang 15 (u_{15}). Que constatez-vous ?
5. Optimiser cet algorithme en utilisant une fonction récursive.

2 Suites arithmétiques et géométriques

2.1 Suites arithmétiques

Activité 2.1 : On souhaite acheter un Smartphone à 800 €. On possède 140 € d'économie et on peut économiser 50 € par mois.

1. Programmer un algorithme permettant de déterminer dans combien de mois l'achat sera possible.
2. Formaliser le problème mathématiquement (en prenant n le numéro du mois et u_n la somme totale économisée).

Exercice 1 : Monsieur Dupont désire creuser un puits de 12 mètres de profondeur. Le devis est le suivant :

— Forfait prise en charge, visite sur le terrain : 40 € TTC.

— Prix forfaitaire du mètre foré : 150 € TTC.

On note p_n le prix en euros pour un forage de n mètres ($n \in \mathbb{N}^*$).

1. Calculer p_1.
2. Déterminer la nature de la suite (p_n) et en déduire l'expression de p_n en fonction de n.
3. Déterminer le prix total à payer pour le forage du puit.

Exercice 2 : Exprimer u_n en fonction de n sachant que la suite u est arithmétique de raison r :

1. $u_0 = 4$ et $r = -2$
2. $u_5 = 5$ et $r = 2$
3. $u_1 = -3$ et $r = 4$
4. $u_0 = 0$ et $r = -1$

Exercice 3 : Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ? Si oui, donner leur raison.

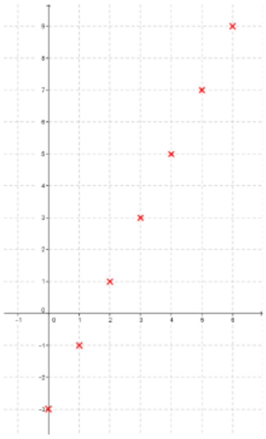
1. $u_n = n + 3$
2. $u_n = 5n + 4$
3. $u_n = n^2 + 2$
4. $u_n = \frac{n+1}{n}$
5. $u_n = -3n + 7$
6. $u_n = u_{n-1} + 3$ avec $u_1 = 4$
7. $u_{n+1} = u_n + 2n - 2$ avec $u_1 = 2$

Exercice 4 : La suite (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -2$ et de raison $r = 1/2$.

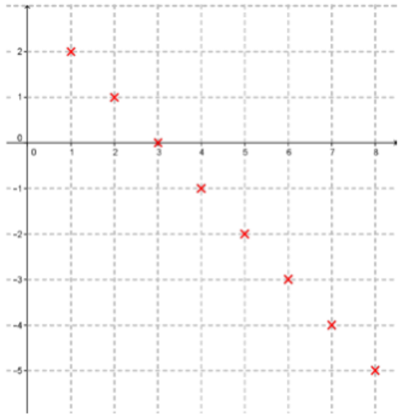
1. Représenter graphiquement les dix premiers termes de cette suite.
2. Sur quelle courbe sont situés ces points ?

Exercice 5 : Les graphiques ci-dessous représentent des suites arithmétiques. Pour chacune, donner son premier terme, sa raison, l'expression de u_n en fonction de n et l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.

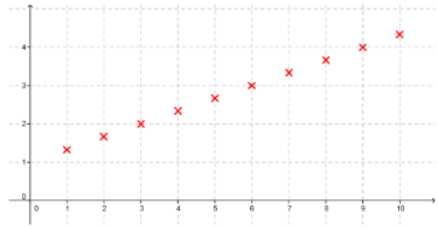
1.



2.



3.



Exercice 6 : Un coureur de fond décide d'augmenter chaque semaine sa distance d'entraînement de 1 500 m. Il commence à $d_0 = 10\,000$ m.

1. Exprimer d_{n+1} en fonction de d_n. Que peut-on en déduire pour la suite (d_n) ?
2. En déduire d_n en fonction de n.
3. Au bout de combien de semaines aura-t-il atteint ou dépassé les 42,195 km d'un marathon ?

2.2 Suites géométriques

Activité 2.2 : On possède 40 000 €. On les place sur un compte à 4% d'intérêt par an. Dans combien de temps pourra-t-on se payer un appartement d'une valeur de 100 000 € ?

Exercice 1 : La suite (u_n) est géométrique de raison q. Exprimer u_n en fonction de n et calculer u_{30}.

1. $u_1 = 1$ et $q = 2$
2. $u_5 = 2$ et $q = -1$
3. $u_{40} = 1024$ et $q = -2$
4. $u_{15} = 1$ et $q = 3$
5. $u_7 = 1024$ et $q = \sqrt{2}$
6. $u_4 = 2$ et $q = 0.5$

Exercice 2 : La suite (v_n) est elle géométrique ? si oui donner sa raison.

1. $v_n = 2^{n+1}$
2. $v_n = n^2$
3. $v_n = 2 * 3^{n+1}$
4. $v_n = -4^{n+2}$
5. $v_n = 2^{2n}$
6. $v_n = (-1)^{n+2}$

Exercice 3 : En 2013, un article coûte 120 €. Il augmente chaque année de 5%. On note p_n le prix à l'année $2013 + n$.

1. Donner p_0. Calculer p_1 et p_2.
2. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n. Qu'en déduit-on sur la suite (p_n) ?
3. Exprimer p_n en fonction de n, puis calculer son prix en 2025.

Exercice 4 : Un capital de 7 000 € est bloqué pour 15 ans sur un compte rapportant un intérêt annuel de 4 %. Cet intérêt est versé sur le compte à la fin de chaque année. On appelle c_0 le capital de départ et pour $n \geq 1$, le montant figurant sur le compte au bout de la n-ième année.

1. Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n pour $n \geq 0$.
2. Quel sera le capital au bout de 5 ans ?
3. Faire afficher la liste des premier termes de la suite (c_n) et lire la nombre d'années nécessaire pour que le capital ait augmenté de 50 %.

Exercice 5 : L'accès internet chez les particuliers se fait majoritairement aujourd'hui en ADSL.

Cette liaison utilise les câbles téléphoniques pour relier le particulier au DSLAM (répartiteur du fournisseur d'accès choisi). La puissance du signal dépend de l'atténuation engendrée par les longueurs de câbles téléphoniques, la puissance du signal diminue de $29,2\,\%$ par tronçon de 100 m de câbles.

1. On appelle P_0 la puissance disponible au répartiteur (DSLAM).
   (a) Exprimer la puissance P_1 disponible après un tronçon de 100 m de câble en fonction de P_0.
   (b) Vérifier que la proportion de puissance disponible après 2 tronçons de câbles de 100 m est égale à $50,1\,\%$ (valeur arrondie à $0,1$ près).
   (c) Déterminer la valeur arrondie à $0,1$ près de la proportion de puissance disponible après 5 tronçons de câble de 100 m.
2. On note P_n la puissance à la sortie de n tronçons de câbles de 100 m, n étant un entier naturel.
   (a) Quelle est la nature de la suite (P_n) ? Justifier.
   (b) Pour tout entier naturel n, exprimer P_n en fonction de n et de P_0.
   (c) En déduire la proportion de puissance disponible après 15 tronçons de 100 m.
3. On admet que pour tout entier naturel n, la suite (P_n) est définie par :

$$P_n = P_0 \times 0,708^n$$

   (a) Quelle est la limite de la suite P_n.
   (b) Justifier qu'il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier n supérieur à N, on ait : $0,708^n \leq 10^{-7}$.
   En utilisant un outil informatique, déterminer le plus grand entier n tel que $0,708^n \geq 10^{-7}$.
   (c) (Facultatif) Retrouver la réponse par un calcul algébrique (ou un logiciel de calcul formel).
   (d) La limite d'éligibilité au service ADSL est telle que :

$$\frac{P_S}{P_E} = 1 \times 10^{-7}$$

   où P_S désigne la puissance du signal chez le particulier et P_E la puissance fournie par le DSLAM.
   Déterminer la distance théorique maximale de câblage entre le particulier et le DSLAM qui permette le fonctionnement de l'ADSL chez le particulier. (On donnera la valeur arrondie au mètre près.)

3 Somme des termes d'une suite

3.1 Activité 3.1 :

On laisse tomber une balle de 1 mètre. À chaque rebond, elle remonte aux $3/4$ de la hauteur précédente.

1. Calculer la hauteur atteinte au $2^{\text{ème}}$, $10^{\text{ème}}$ et $1000^{\text{ème}}$ rebond.
2. On appelle S_n la distance totale parcourue par la balle. Quelle est la distance parcourue dans chaque cas ?
3. À quel rebond la hauteur atteinte est-elle inférieure à 10^{-12} mètre ?

3.2 Somme d'une suite arithmétique

Activité 3.2 : Calculer la somme de tous les entiers naturels de 0 à 50.

Exercice : On empile des tuyaux. Soit n le nombre de lignes de tuyaux et (u_n) le nombre total de tuyaux (sur l'image $n = 4$) .

1. Quel est le nombre total de tuyaux pour une hauteur de 3 lignes ? 4 lignes ?
2. Déterminer pour tout entier naturel n l'expression du nombre total de tuyaux u_n.

3.3 Somme d'une suite géométrique

Activité 3.3 : On souhaite parcourir la distance Montpellier-Marseille en parcourant chaque jour la moitié de la distance restante. Dans combien de jours arriverons-nous à destination ?

4 Limite d'une suite

Activité 4 : A l'aide de vos connaissances ou de l'ordinateur ou de la calculatrice, si elle existe, conjecturer la limite des suites suivantes :

— $u_n = 10^n$
— $v_n = -\frac{1}{10^n}$
— $w_n = \ln(n^2 - n)$
— $x_n = e^{-n^2+n}$
— $y_n = \cos(n)$
— $z_n = -n^2 + n - 4$

5 TP sur ordinateur : Étude de la limite d'une suite géométrique

Objectif : Utiliser un programme Python pour étudier le comportement d'une suite géométrique, conjecturer sa limite et déterminer des seuils.

On considère la suite géométrique (u_n) définie par :

$$u_0 = 400 \quad \text{et} \quad q = 0{,}8$$

Partie A : Calcul des termes à l'aide de Python

On souhaite calculer les premiers termes de la suite à l'aide d'un programme.

1. Compléter le programme Python ci-dessous afin de calculer les termes de la suite.

```
u = 400
q = 0.8

for n in range(0, 21):
    print(n, u)
    u = ...
```

2. Exécuter le programme et observer les valeurs obtenues.

Partie B : Conjecture de la limite

3. Les valeurs de u_n semblent-elles se rapprocher d'un nombre ?
4. Conjecturer la limite de la suite (u_n).

Partie C : Recherche d'un seuil pour $u_n \leq a$

On fixe $a = 50$.

5. Modifier le programme afin de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \leq 50$.

```
u = 400
q = 0.8
n = 0

while u > 50:
    u = ...
    n = n + 1

print("A_partir_du_rang", n, "on_a_Un<=50")
```

Partie D : Recherche d'un seuil pour $|u_n| \leq 10^{-p}$

On choisit $p = 2$.

6. Adapter le programme pour déterminer le plus petit rang n tel que :

$$|u_n| \leq 10^{-2}$$

7. Indiquer le rang obtenu.

Conclusion

8. Compléter la phrase suivante :

   À l'aide d'un programme Python, on peut conjecturer que la limite de la suite est . . . .