Fonction d'une variable Réelle

BTS Services Informatiques aux Organisations

Théo HUET – 2025–2026

1 Introduction

Si les suites numériques sont définies sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, les fonctions d'une variable réelle s'étendent sur des intervalles de $\mathbb{R}$. En d'autre terme, une suite traite des données étape par étape (ex : inventaire quotidien), la fonction traite la variable de manière continue (ex : la vitesse d'une voiture) Ce passage du discret au continu permet de modéliser des grandeurs physiques évoluant de façon plus réaliste.

Les fonctions d'une variable réelle sont donc un outil fondamental pour modéliser des phénomènes continus issus des disciplines scientifiques, techniques ou économiques.

Elles permettent de décrire comment une grandeur varie en fonction d'une autre,

Exemples

- la tension en fonction du temps,
- la température en fonction de la position,
- la fonction d'onde d'une particule quantique en fonction de la position
- le coût en fonction de la quantité produite.

1.1 Notion de fonction

Définition

On appelle **fonction d'une variable réelle** toute relation qui, à chaque nombre réel x appartenant à un ensemble donné, associe un unique nombre réel noté $f(x)$.
Le nombre x est appelé la **variable** et $f(x)$ est appelé l'**image** de x.

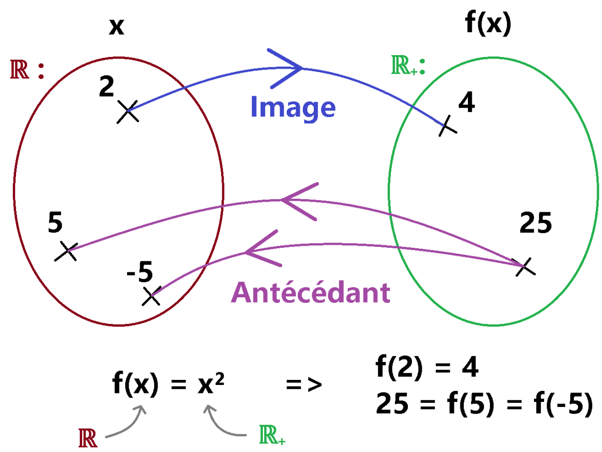


FIGURE 1 – Représentation de l'antécédant et de l'image pour $f(x) = x^2$
Ici 2 est l'image de 4 et 25 a deux antécédant : 5 et -5.
La fonction f va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ car x^2 est positif pour tout x dans $\mathbb{R}$.

1.2 Représentations d'une fonction

Une fonction peut être représentée de plusieurs manières :
- par une expression algébrique,
- par un tableau de valeurs,
- par un tableau de variation,
- par une courbe représentative dans un repère.

Définition

La courbe représentative d'une fonction f est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x\,;\,f(x))$, où x appartient à l'ensemble de définition de f.

L'étude graphique d'une fonction permet notamment :
- de conjecturer des limites,
- d'observer les variations,
- de repérer des extrema,
- d'interpréter des phénomènes concrets.

Exemples

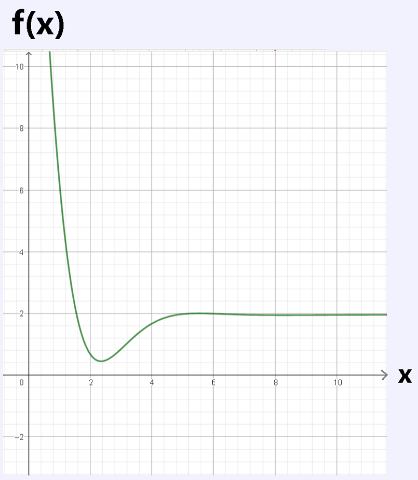


Figure 2 – Courbe représentative d'une fonction f

Etude graphique :

- **Limites :** Le comportement graphique suggère que : $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2$.
- **Variations :** La courbe est décroissante, puis croissante.
- **Extremums locaux :** On conjecture un minimum local en $x \approx 2,4$ (ce minimum est surement global).
- **Bornes :** La fonction ne semble pas admettre de maximum global sur son ensemble de définition $\mathbb{R}_+$.

Si l'étude graphique n'est pas claire et que tous les mots ne sont pas définis, c'est normal, nous utiliserons cet exemple tout au long de ce chapitre, il sera référé par "(voir figure 2)".

2 Généralités sur les fonctions

2.1 Ensemble de définition

Lorsqu'une fonction est définie par une expression mathématique, celle-ci n'a pas toujours un sens pour toutes les valeurs de la variable. Il est donc nécessaire de préciser pour quelles valeurs la fonction est définie.

Définition

On appelle **ensemble de définition** d'une fonction f l'ensemble des valeurs réelles x pour lesquelles l'expression $f(x)$ a un sens.
Cet ensemble est noté D_f.

L'ensemble de définition dépend du contexte du problème étudié et de la nature de l'expression mathématique de la fonction.

Méthode

Pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction :
- on exclut les valeurs qui annulent un dénominateur ;
- on impose que le nombre sous une racine carrée soit positif ou nul ;
- on impose que l'argument d'un logarithme soit strictement positif.

Exemples

Cas usuels
- **Fonctions polynômes** Une fonction polynôme est définie pour tout réel x.

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \quad \Rightarrow \quad D_f = \mathbb{R}$$

- **Fonctions rationnelles simples** Une fonction rationnelle n'est pas définie lorsque le dénominateur est nul.

$$f(x) = \frac{1}{x-2} \quad \Rightarrow \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

- **Fonction racine carrée** Le nombre sous la racine doit être positif ou nul.

$$f(x) = \sqrt{x-1} \quad \Rightarrow \quad D_f = [1\,;+\infty[$$

- **Fonction logarithme** Le logarithme est défini uniquement pour les réels strictement positifs.

$$f(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad D_f =]0\,;+\infty[= \mathbb{R}_+^*$$

Graphiquement, l'ensemble de définition d'une fonction correspond aux valeurs de x pour lesquelles la courbe représentative existe.
Une absence de courbe signifie que la fonction n'est pas définie pour ces valeurs.

Exemples

Prenons l'exemple de la figure 2. La courbe commence à partir de $x = 0$, on suppose donc que la fonction n'est pas définis avant, donc $D_f = \mathbb{R}_+$

2.2 Variations d'une fonction

2.2.1 Extrémums sur un intervalle

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
- f admet un **Maximum** sur I si on a M réel tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$.
- f admet un **minimum** sur I si on a m réel tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \geq m$.

Les extrémums se lisent généralement sur la courbe représentative de la fonction.

Méthode

Sur une courbe, un sommet correspond souvent à un maximum ou à un minimum. La valeur de l'extrémum est l'ordonnée du point correspondant (voir figure 2). On pourra également, après avoir définis le terme, utilisé la dérivée.

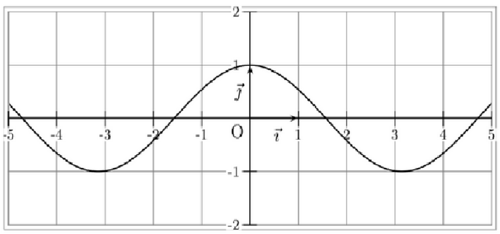
2.2.2 Sens de variation (monotonie)

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Et pour tout a et b deux réel de I
tel que $a < b$:
- f est **croissante** sur I si $f(a) < f(b)$.
- f est **décroissante** sur I si $f(a) > f(b)$.
- f est **constante** sur I si $f(a) = f(b)$.

Les variations d'une fonction peuvent être résumées dans un **tableau de variations**, qui indique :
- les intervalles de croissance ou de décroissance,
- les valeurs prises par la fonction aux points remarquables.

Chaque changement de variation a lieu en un extrémum local.



x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
signe de f'(x)		-	0	+	0	-	0	+	
variation de f	$+\infty$	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗	$+\infty$

FIGURE 3 – Exemple de tableau de variation

Méthode

On construit le tableau de variation à l'aide du signe de la dérivée de f.
Une fonction dont la courbe monte de gauche à droite est croissante. Si la courbe descend, la fonction est décroissante (voir figure 2 et 3).

3 Limites de fonctions

3.1 Approche intuitive des limites

Pour une suite (u_n), la limite ne s'étudie que lorsque $n \to +\infty$, pour l'étude d'une fonction $f(x)$ on peut analyser son comportement en tout point, en effet on peut regarder la limite :

— **Aux bornes de l'infini :** en $+\infty$ et en $-\infty$.

— **En un point réel** a **:** On peut observer comment se comporte $f(x)$ lorsque x se rapproche de a.

Dans $\mathbb{R}$, on peut s'approcher infiniment proche de $a \in \mathbb{R}$ sans jamais l'atteindre, exactement comme une suite s'approcherait de sa limite à l'infini.

Définition

On dit que la fonction f admet une **limite** ℓ lorsque x se rapproche d'une valeur a (ou lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$) si les valeurs de $f(x)$ se rapprochent de ℓ.
on la note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

avec a et $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

La lecture graphique est souvent le premier outil pour conjecturer une limite.

Méthode

Graphiquement, la limite d'une fonction correspond à la valeur vers laquelle se rapprochent les ordonnées des points de la courbe $f(x)$ lorsque x se rapproche de $a \in \mathbb{R}$ ou devient très grand $\{-\infty, +\infty\}$.

Exemples

Prenons l'exemple de la figure 2.
La courbe se rapproche d'une droite horizontale d'équation $y = 2$ lorsque x devient très grand, on conjecture que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

3.2 Limites à droite et à gauche

Définition

Lorsqu'une fonction possède une valeur interdite $a \in \mathbb{R}$, son comportement peut différer selon que l'on s'en approche par des valeurs inférieures ($x < a$) ou par des valeurs supérieures ($x > a$).

— **Limite à gauche :** On note $\lim_{x \to a^-} f(x)$.

— **Limite à droite :** On note $\lim_{x \to a^+} f(x)$.

Exemples

La fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ La valeur $x = 0$ est une valeur interdite. Observons le comportement de la fonction de part et d'autre de zéro :

1. $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
2. $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

3.3 Théorèmes généraux sur les limites

Les règles suivantes permettent de calculer certaines limites, à condition que les limites considérées existent.

Théorème

Soient f et g deux fonctions admettant des limites finies lorsque x tend vers une valeur donnée.

— **Limite d'une somme :**

$$\lim(f+g) = \lim f + \lim g$$

— **Limite d'un produit :**

$$\lim(f \times g) = (\lim f) \times (\lim g)$$

— **Limite d'un inverse :**

$$\lim\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{1}{\lim f} \quad \text{si } \lim f \neq 0$$

Formes indéterminées

Définition

On parle de **forme indéterminée** lorsque l'application directe des règles de calcul ne permet pas de conclure sur la valeur de la limite.
Les expressions suivantes sont des formes indéterminées :

$$\infty - \infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 0 \times \infty$$

Dans ces cas, on ne peut pas conclure directement sur la limite.

Exemples

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - x)$$

Ici, $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} -x = -\infty$.
L'addition des deux est indéterminée.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+3}{x^2-1}$$

Le numérateur tend vers $+\infty$ et le dénominateur tend vers $+\infty$.

$$\lim_{x \to 0^+} (x \cdot \ln(x))$$

Ici, x tend vers 0 tandis que $\ln(x)$ tend vers $-\infty$. Le produit est une forme indéterminée.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$$

En remplaçant x par 2, on obtient $\frac{0}{0}$, ce qui ne permet pas de connaître la limite sans calcul supplémentaire.

3.4 Limites usuelles à l'infini

Fonctions polynômes

Propriété

Pour une fonction **polynôme**, le comportement à l'**infini** est dominé par le terme de plus haut degré.

Exemple

Pour la fonction :

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 1$$

le terme dominant est $3x^2$, donc :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Fonctions rationnelles simples

Propriété

Pour une fonction rationnelle, on compare les degrés du numérateur et du dénominateur.

- Si le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur, la limite est 0.
- Si les degrés sont égaux, la limite est le quotient des coefficients des termes dominants.

Exemple

$$f(x) = \frac{2x+1}{x} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

3.5 Limites de fonctions composées

Lorsqu'une fonction est la "composée" de deux fonctions (une fonction u à l'intérieur d'une fonction usuelle), on détermine la limite par étapes, en regardant vers quoi "tend" l'intérieur.

Théorème

Soit L réel ou $\pm\infty$. Si $\lim_{x \to a} u(x) = L$ et $\lim_{X \to L} f(X) = \ell$, alors : $\lim_{x \to a} f(u(x)) = \ell$

Exemples

- **Inverse :** $\dfrac{1}{u(x)}$
  Si $\lim_{x \to a} u(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{u(x)} = 0$.
- **Puissance :** $u(x)^n$
  Si $\lim_{x \to a} u(x) = L$, alors $\lim_{x \to a} u(x)^n = L^n$ (attention au signe si $L = \pm\infty$).
- **Logarithme :** $\ln(u(x))$
  Si $\lim_{x \to a} u(x) = 0^+$, alors $\lim_{x \to a} \ln(u(x)) = -\infty$.
- **Exponentielle :** $e^{u(x)}$
  Si $\lim_{x \to a} u(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \to a} e^{u(x)} = 0$.

4 Comportement asymptotique

4.1 Asymptotes horizontales

Définition

On dit que la droite d'équation $y = \ell$ est une **asymptote horizontale** à la courbe de la fonction f si :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$$

Interprétation graphique

Propriété

Graphiquement, une asymptote horizontale est une droite que la courbe se rapproche de plus en plus sans nécessairement la couper lorsque x devient très grand (ou très petit).

Exemples

Si l'on regarde la fonction de la figure 2, elle vérifie :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

alors la droite $y = 2$ est une asymptote horizontale à la courbe de f lorsque $x \to +\infty$.

Le lien entre asymptote horizontale et limite à l'infini est direct : une limite finie à l'infini correspond à une asymptote horizontale.

4.2 Asymptotes verticales

Définition

On dit que la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe de la fonction f si :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Lecture graphique

Propriété

Graphiquement, une asymptote verticale est une droite que la courbe se rapproche sans jamais l'atteindre lorsque x se rapproche d'une valeur donnée.

Exemples

Si l'on regarde la fonction de la figure 2, elle vérifie :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

alors la droite $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe de f lorsque $x \to +\infty$.

Les asymptotes verticales apparaissent fréquemment pour les fonctions rationnelles lorsque le dénominateur s'annule.

Exemple

Pour la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

la droite $x = 2$ est une asymptote verticale car :

$$\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad -\infty$$

5 Nombre dérivé et dérivation

5.1 Nombre dérivé en un point

Définition

Soit f une fonction définie en a. Le **nombre dérivé** de f en a, noté $f'(a)$, représente la variation de $f(x)$ au voisinage du point a.
on le définis mathématiquement comme :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Interprétation géométrique

Propriété

Le nombre dérivé $f'(a)$ est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe représentative de f au point d'abscisse a (voir figure 4).

Méthode

Dans la pratique, le nombre dérivé peut être :
- approché graphiquement à l'aide de la tangente,
- calculé ou estimé à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel.

Graphiquement si la tangente en un point est :
- montante, alors $f'(a) > 0$,
- descendante, alors $f'(a) < 0$,
- horizontale, alors $f'(a) = 0$.

Propriété

Le signe de la dérivée d'une fonction permet de déterminer le sens de variation de f :
- si $f'(x) > 0$, alors f est croissante,
- si $f'(x) < 0$, alors f est décroissante,
- si $f'(x) = 0$, alors f admet un extremum.

Exemples

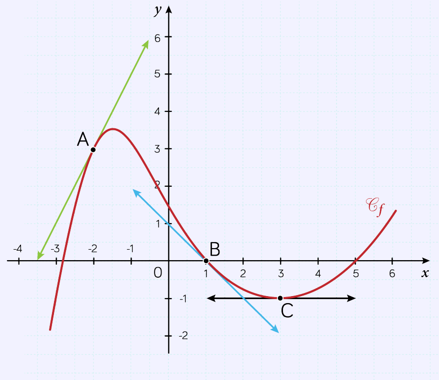


FIGURE 4 – Interprétation graphique de la dérivée

- Au point A la tangente monte alors $f'(x_A) > 0$ donc la fonction est croissante en x_A
- Au point B la tangente descend alors $f'(x_B) < 0$ donc la fonction est décroissante en x_A
- Au point C la tangente est horizontale alors $f'(x_C) = 0$ donc la fonction est constante en x_A

5.2 Fonctions dérivées de référence

Dans la réalité, on n'utilise pas la formule presente dans la définition, en effet, on dispose d'un certain nombre de dérivées usuelles, utilisées pour étudier les variations des fonctions.

Fonctions usuelles

Type de fonction	**Fonction** $f(x)$	**Dérivée** $f'(x)$	**Condition**
Constante	k (réel)	0	$x \in \mathbb{R}$
Affine	$ax + b$	a	$x \in \mathbb{R}$
Puissance	x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{Z}$
Inverse	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$x \neq 0$
Racine carrée	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
Exponentielle	e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
Logarithme	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$

TABLE 1 – Tableau des dérivées usuelles

5.3 Opérations sur les dérivées

f	$u+v$	ku	$u \cdot v$	$\frac{1}{u}$	$\frac{u}{v}$	u^n
f'	$u'+v'$	ku'	$u'v+uv'$	$-\frac{u'}{u^2}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$nu'u^{n-1}$

Fonctions composées simples

Théorème

La dérivée de la fonction composée $f \circ u$ définie par $g(x) = f(u(x))$ est :

$$g'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$$

Dans le cadre du BTS, l'étude des fonctions composées se concentre sur trois formes usuelles. La règle générale est de ne pas oublier de multiplier par la dérivée de la fonction "intérieure" $u'(x)$.

Type	**Forme** $f(x)$	**Dérivée** $f'(x)$	**Exemple**
Puissance	$u(x)^n$	$n \cdot u'(x) \cdot u(x)^{n-1}$	$(x^2+1)^3 \to 3(2x)(x^2+1)^2$
Exponentielle	$e^{u(x)}$	$u'(x) \cdot e^{u(x)}$	$e^{5x+2} \to 5e^{5x+2}$
Logarithme	$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(x^2+3) \to \frac{2x}{x^2+3}$

Exemples

Si $f(x) = e^{2x}$, alors :

$$f'(x) = 2e^{2x}$$

Si $f(x) = \ln(4x)$, alors :

$$f'(x) = \frac{4}{4x} = \frac{1}{x}$$

6 Exploitation du tableau de variations

6.1 Applications

À partir d'un tableau de variations, on peut :
- déterminer un extremum,
- étudier le signe d'une fonction,
- déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.

7 Rappel des fonctions usuelles

Fonction	**Forme**	D_f	**Image**	**Limites importantes**	**Dérivée**
Affine	$ax+b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\lim_{x\to\pm\infty} = \pm\infty * sign(a)$ (si $a \neq 0$)	a
Carré	x^2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+$	$\lim_{x\to\pm\infty} = +\infty$	$2x$
Inverse	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$\lim_{x\to\pm\infty} = 0$ $\lim_{x\to 0^\pm} = \pm\infty$	$-\frac{1}{x^2}$
Racine	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+$	$\lim_{x\to+\infty} = +\infty$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
Exponentielle	e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\lim_{x\to-\infty} = 0$ $\lim_{x\to+\infty} = +\infty$	e^x
Logarithme	$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$	$\lim_{x\to 0^+} = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} = +\infty$	$\frac{1}{x}$

Table 2 – Rappel des Propriétés des fonctions usuelles

Logarithme Népérien ($\ln$)	**Exponentielle** ($\exp$)
$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$	$e^{a+b} = e^a \times e^b$
$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$	$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
$\ln(a^n) = n\ln(a)$	$(e^a)^n = e^{n\times a}$
$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$	$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
$\ln(1) = 0 \quad ; \quad \ln(e) = 1$	$e^0 = 1 \quad ; \quad e^1 = e$

Table 3 – Rappel des propriétés de l'exponentiel et du Logarithme

Ressources et Références :

— Polycopié d'activités : `https://github.com/TheoHUETQC/Cours-BTS-Mathematiques-approfondies/Fonction_d_une_variable_reelle/Activite_Fonction_d_une_variable_reelle.pdf`
— Références : `https://math-baudon.fr/cours-ressources/BTS-SE.html`