

LMECA1210 - Description et Analyse des Mécanismes

Application du mécanisme bielle-manivelle dans les moteurs

1 Objectifs

Les bielles et le vilebrequin sont des pièces centrales d'un moteur. La bielle est le lien mécanique indispensable entre le vilebrequin en mouvement rotatif et le piston en mouvement alternatif. La bielle est connectée par la tête au vilebrequin et par le pied au piston. Sa forme générale est imposée par sa fonctionnalité et par sa position dans le moteur, au sein du cylindre. Le pied de bielle est lié au piston par un axe. Le diamètre de l'axe dépend des efforts mécaniques de **cisaillement** qu'il doit supporter. Il détermine l'alésage du pied de bielle. La tête de bielle est connectée par un maneton au vilebrequin. De nouveau les efforts de cisaillement dictent le diamètre du maneton et donc l'alésage de la tête de bielle. Comme les efforts sont plus importants au niveau du maneton, son diamètre est plus important. Cela explique en partie la dissymétrie entre la tête et le pied de bielle, comme illustré à la Figure 1. Par ailleurs, les efforts de compression peuvent mener au **flambage** de la bielle ce qui justifie la forme de son corps.

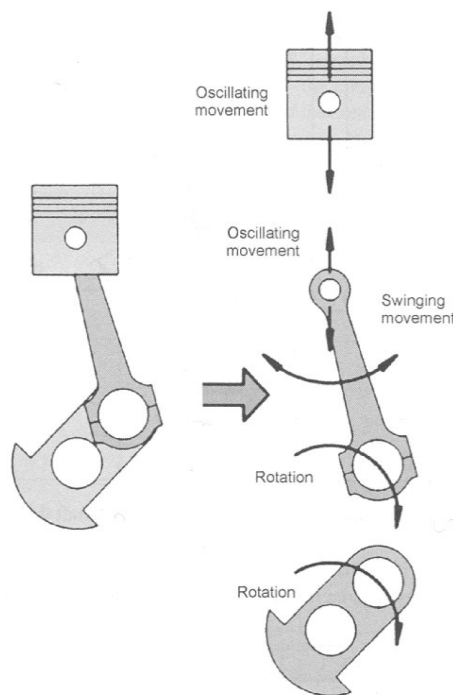


FIGURE 1 – Système bielle manivelle et mouvements des différentes composants (source : SAE IC engine Handbook).

Le vilebrequin comporte autant de manetons que de cylindres pour un moteur en ligne. Ce nombre de manetons est divisé par deux pour un moteur en V. Le mouvement des pistons est déphasé de manière à limiter les efforts dans le vilebrequin

(symétrie du vilebrequin) et à produire un couple aussi uniforme que possible. Sur un moteur 4 temps 4 cylindres, chaque piston transmet un couple positif sur le vilebrequin pendant 1 temps moteur, celui de la détente. Cette détente s'étend sur 180 degrés de vilebrequin. Comme un cycle complet dure 720 degrés, l'idéal est donc d'avoir un piston qui commence une détente tous les 180 degrés. Pour y parvenir, les manetons sont décalés de 180 degrés et le vilebrequin est "plan". Vous observerez cela tant lors du démontage/montage d'un moteur que lors du dessin des pièces. Pour les moteurs deux temps, chaque piston induit un couple positif sur le vilebrequin pendant 1 temps moteur soit 180 degrés mais sur 360 degrés que dure le cycle. Cela permet une densité de puissance double en théorie par rapport aux moteurs 4 temps.

Les efforts sur les bielles et donc sur le vilebrequin sont de deux natures. D'une part, la pression du gaz dans le cylindre exerce une force sur le piston qui est transmise, via la bielle, au vilebrequin, créant ainsi le couple moteur. Comme la pression varie de manière importante au cours d'un cycle, son étude détaillée est nécessaire pour déterminer l'évolution du couple en fonction de l'angle de vilebrequin. Une valeur moyenne de la pression n'est pas satisfaisante. D'autre part, les pistons et les bielles subissent des accélérations, parfois importantes car elles sont fonctions du carré de la vitesse de rotation du moteur. Ces accélérations induisent des efforts d'inertie sur les liens mécaniques entre les pièces et sur les pièces elles-mêmes, dont le vilebrequin qui subit un couple d'inertie.

L'objectif de cette partie de l'enseignement est d'appliquer une démarche simplifiée afin de déterminer approximativement les forces qui s'exercent sur le piston, les bielles et le vilebrequin et de déduire l'évolution du couple en fonction de l'angle de vilebrequin pour un moteur donné. La démarche sera particularisée au moteur (vilebrequin, bielle, piston) dont vous aurez mesuré une pièce dans une autre partie du cours. Afin de vous guider dans votre démarche, les développements théoriques nécessaires pour mener à bien le projet sont résumés ci-dessous. Dans une première section, le calcul de la pression dans le cylindre est exposé, y compris la modélisation très simplifiée de la phase de combustion. La cinématique du système bielle-manivelle est ensuite décrite sans démonstration. Puis, la dynamique du système bielle-manivelle est exposée. Finalement, le travail à réaliser est décrit avec plus de détails que dans cette introduction.

2 L'évolution de la pression dans le cylindre

L'approche thermodynamique simple basée sur quelques transformations cycliques, par exemple le cycle de Beau de Rochas abordé dans le cadre du cours LEPL1302, est pertinente pour une analyse théorique des moteurs à combustion interne. Elle aboutit à la mise en évidence des caractéristiques fondamentales du moteur, comme son taux de compression, $\tau = V_{\max}/V_{\min}$, rapport entre le volume maximal et le volume minimal occupé par le fluide parcourant le cycle. Cependant, cette approche ne permet pas de représenter avec un réalisme suffisant l'évolution détaillée, au cours d'un cycle, des variables thermodynamiques du fluide au sein du cylindre. Par exemple, la pression et la température à l'issue de la phase de combustion isochore sont surestimées dans le modèle de Beau de Rochas. Le fait même que la combustion soit considérée comme isochore est théoriquement simple mais ne reflète par l'étendue réelle de cette phase. Or dans le cadre de l'étude du couple du vilebrequin, il est nécessaire de représenter,

avec une précision suffisante, l'évolution de la pression dans le cylindre.

2.1 Evolution des variables d'état au cours d'un cycle

La construction d'un modèle répondant à l'exigence brièvement formulée ci-dessus part de l'expression différentielle de la conservation de l'énergie issue du premier principe,

$$dU = dQ - pdV . \quad (1)$$

En effet, le gaz évolue dans un volume fermé (limité par le piston mobile, les parois du cylindre et la culasse) où la masse est constante. Il n'y a pas d'autre forme d'énergie impliquée que celles indiquées ci-dessus sachant que la combustion reste représentée par un apport de chaleur au gaz parcourant le cycle comme exposé ci-après. Egalement, le travail reste exprimé sous sa forme réversible. Cette expression différentielle prend plus de sens pour un moteur quand elle est divisée par la différentielle de l'angle de vilebrequin, $d\theta$, variable indépendante du problème. Cette grandeur est préférée à une différentielle du temps car tous les phénomènes sont cadencés par l'angle de vilebrequin dont notamment l'ouverture et la fermeture des soupapes et le démarrage de la phase de combustion. L'expression différentielle devient alors une équation différentielle ordinaire

$$\frac{dU}{d\theta} = \frac{dQ}{d\theta} - p \frac{dV}{d\theta} , \quad (2)$$

ou encore,

$$mc_v \frac{dT}{d\theta} = \frac{dQ}{d\theta} - p \frac{dV}{d\theta} . \quad (3)$$

Cette dernière relation permet de lier la pression et la température dans le cylindre sachant que le volume est une fonction connue de l'angle de vilebrequin (système bielle-manivelle exposé ci-après). Cependant, la masse apparaît encore de manière explicite. Pour supprimer ce paramètre de l'expression (la masse est implicitement déterminée lors du choix des valeurs initiales pour la pression et la température), il suffit de la diviser membre à membre par la relation du gaz parfait ($pV = mR^*T$). On en déduit l'expression suivante :

$$\frac{1}{(\gamma - 1)} \frac{1}{T} \frac{dT}{d\theta} = \frac{1}{pV} \frac{dQ}{d\theta} - \frac{1}{V} \frac{dV}{d\theta} , \quad (4)$$

où, pour rappel, $\gamma = c_p/c_v$ (on sait également que $R^* = c_p - c_v$). Dans l'expression ci-avant, la pression et la température restent deux variables dépendantes. Afin d'éliminer une des deux, on utilise à nouveau l'équation d'état mais sous sa forme différentielle et également divisée par $d\theta$,

$$\frac{d(pV)}{d\theta} = mR^* \frac{dT}{d\theta} . \quad (5)$$

En la divisant membre à membre par $pV = mR^*T$, on obtient une seconde relation différentielle entre p , V et T ,

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{d\theta} + \frac{1}{p} \frac{dp}{d\theta} = \frac{1}{T} \frac{dT}{d\theta} . \quad (6)$$

Le terme de la dérivée de la température étant similaire dans les deux expressions (4) et (6), il peut être éliminé, ne laissant comme inconnue que la pression. A noter que le terme lié à l'échange de chaleur, faisant intervenir dQ , n'est pas une inconnue. Il dépend de la combustion (voir la section suivante) et des pertes thermiques aux parois que nous négligeons ici¹. L'expression fondamentale pour étudier l'évolution des variables thermodynamiques d'un moteur est

$$\frac{1}{(\gamma - 1)} \left(\frac{1}{V} \frac{dV}{d\theta} + \frac{1}{p} \frac{dp}{d\theta} \right) = \frac{1}{pV} \frac{dQ}{d\theta} - \frac{1}{V} \frac{dV}{d\theta} , \quad (7)$$

ou, après simplification,

$$\frac{dp}{d\theta} = -\gamma \frac{p}{V} \frac{dV}{d\theta} + (\gamma - 1) \frac{1}{V} \frac{dQ}{d\theta} . \quad (8)$$

Si le terme d'apport de chaleur est nul, on retrouve bien l'expression différentielle de la loi isentropique : $pV^\gamma = \text{cste}$.

2.2 L'apport de chaleur

L'apport de chaleur, $dQ/d\theta$, est l'énergie thermique amenée lors de la combustion (pertes thermiques négligées). Afin de refléter au mieux le phénomène de combustion, l'apport de chaleur est étalé dans le temps sur une durée équivalente à celle de la combustion réellement observée sur un moteur à allumage par étincelle (moteur essence) ou à allumage spontané (moteur Diesel). En supposant que la combustion débute à un angle de vilebrequin fixé, θ_d et que sa durée vaut $\Delta\theta_{comb}$, l'expression de l'apport de chaleur s'écrit

$$Q = Q_{tot} \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\pi \left(\frac{\theta - \theta_d}{\Delta\theta_{comb}} \right) \right) \right] , \quad (9)$$

où l'énergie totale, Q_{tot} dépend des détails de la combustion. Il s'agit d'un paramètre à fixer a priori. La forme en cosinus de l'apport de chaleur correspond mieux à la réalité que, par exemple, une progression linéaire. La justification dépasse cependant le cadre de ce cours. Les valeurs des paramètres mis en avant dans ces développements seront fournies dans la dernière section de ce document.

3 Le mécanisme bielle-manivelle

Ce mécanisme est étudié dans la partie théorique du cours. La relation mathématique liant la position du pied de bielle et donc du piston à l'angle de la manivelle (le vilebrequin dans le cas d'un moteur) y sera dérivée. Elle prend la forme

$$z_p = R \left[1 - \cos \theta + \beta - \sqrt{\beta^2 - \sin^2 \theta} \right] , \quad (10)$$

où R est la longueur de manivelle qui vaut la moitié de la course du piston dans le cylindre. La variable z_p est définie par rapport à l'axe z_1 de la figure 2. Le paramètre

1. En réalité, ce terme n'est pas négligeable lorsqu'on veut déterminer le rendement d'un moteur mais l'approche adoptée ici est prudente pour le dimensionnement car elle surévaluera la pression dans le moteur.

β est le rapport entre la longueur de la bielle et la longueur de la manivelle, $\beta = L/R$ (voir figure 2). Ce rapport est souvent proche de $3 \dots 3.5$ dans les moteurs automobiles actuels. L'angle de vilebrequin, θ , est nul lorsque le piston occupe sa position la plus haute dans le moteur, le point mort haut (PMH). Il vaut 180° lorsque le piston occupe le point mort bas (PMB). Le piston se déplace donc entre $z_p = 0$ au PMH et $z_p = 2R$ au PMB. Le volume occupé par le gaz est le produit de la grandeur z_p et de la section

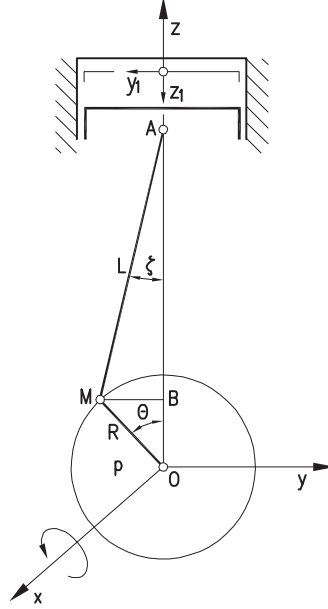


FIGURE 2 – Piston, bielle et manivelle.

du piston ($\pi D^2/4$) auquel il faut ajouter le volume qu'occupe le gaz au PMH, appelé le volume mort, $V_m = V_{min}$. Ce volume dépend du taux de compression et de la cylindrée du moteur. La cylindrée², V_c , est le volume balayé par le piston lors d'une course complète. On en déduit les expressions suivantes :

$$V_c = V_{max} - V_{min} = \frac{\pi D^2}{4} 2R \quad V_{max} = \frac{\tau}{\tau - 1} V_c \quad V_{min} = \frac{1}{\tau - 1} V_c, \quad (11)$$

où l'on a également pris en compte la définition du taux de compression, $\tau = V_{max}/V_{min}$. Sur bases des ces expressions, le volume total occupé par le fluide s'écrit

$$V = \frac{V_c}{2} \left[1 - \cos \theta + \beta - \sqrt{\beta^2 - \sin^2 \theta} \right] + \frac{1}{\tau - 1} V_c. \quad (12)$$

4 Analyse des forces

Comme exposé ci-dessus, deux composantes doivent être prises en compte, les forces liées à la pression et les forces d'inertie. Les premières sont aisément déterminées à partir de l'évolution de la pression dans le cylindre. Les secondes dépendent de l'accélération des masses en mouvement.

2. La différence entre le volume maximal et minimal multiplié par le nombre de cylindre est ce qui est communément appelée la cylindrée du moteur en langage courant.

4.1 Forces de pression

Les calculs développés ci-dessus permettent de représenter adéquatement la phase de compression, la combustion et la phase de détente du cycle moteur. Dans les moteurs 4 temps, un cycle se déroule sur deux tours de vilebrequin comme évoqué ci-avant. Il est donc nécessaire de représenter les phases d'admission et d'échappement. Nous considérerons que celles-ci se font à pression constante proche de l'atmosphère pour un moteur dit atmosphérique (c'est-à-dire sans turbocompresseur) ou supérieure à celle de l'atmosphère dans le cas d'un moteur avec un turbocompresseur, ce qui est le cas de la plupart des moteurs actuels. Dans ce dernier cas la pression d'admission et d'échappement se situe entre 2 et 3 bars. En supposant que le cycle débute par la phase d'admission d'air (de $\theta = -2\pi$ à $\theta = -\pi$) pour se terminer par la phase d'échappement (de $\theta = \pi$ à $\theta = 2\pi$), en passant par la compression (de $\theta = -\pi$ à $\theta = 0$) et la détente (de $\theta = 0$ à $\theta = \pi$), on obtient une évolution de pression semblable à celle présentée à la figure 3.

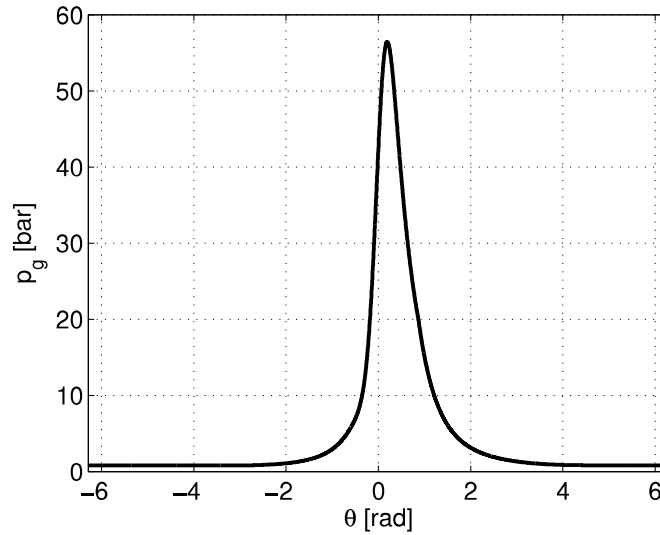


FIGURE 3 – Exemple d'évolution de la pression dans le cylindre d'un moteur au cours d'un cycle (4 temps).

La force de pression est la pression multipliée par la surface du piston,

$$F_p(\theta) = \frac{\pi D^2}{4} p(\theta) . \quad (13)$$

On constate que la force n'aura une amplitude importante que moins de la moitié de la durée d'un cycle complet (2 tours de vilebrequin). Cette force induit un couple variable sur le vilebrequin de moyenne non nulle.

4.2 Forces d'inertie

Les masses en accélération induisent des forces d'inertie sur les différents organes du moteur. Nous considérons que le moteur tourne à vitesse constante. La vitesse angulaire, $\omega = d\theta/dt$, est donc constante. Cette hypothèse permet de limiter l'étude

dynamique à la bielle et au piston. Ces deux organes accélèrent en permanence. L'accélération se fait uniquement dans l'axe du cylindre pour le piston. Elle est plus complexe pour la bielle qui subit des accélérations tant longitudinales que transversales (mouvement oscillant). Afin de simplifier la détermination de ces forces, nous supposons que le rapport β est très grand. Dans ce cas, le mouvement de bielle se fait uniquement dans l'axe du cylindre. La position du piston donné par l'équation (10) se simplifie :

$$z_p = R(1 - \cos \theta) . \quad (14)$$

On en déduit directement la vitesse et l'accélération du piston

$$\dot{z}_p = R\omega \sin(\theta) , \quad (15)$$

$$\ddot{z}_p = R\omega^2 \cos(\theta) . \quad (16)$$

Pour dériver ces expressions, l'hypothèse d'une vitesse de rotation constante a été utilisée. L'accélération est positive lorsqu'elle est dirigée vers le vilebrequin. Il est à noter que vu l'hypothèse d'une grande valeur de β , l'accélération de la bielle est identique à celle du piston. Les forces se dérivent simplement par l'intermédiaire de la relation,

$$F = m\ddot{z}_p . \quad (17)$$

Cette hypothèse de β élevé n'est à considérer que pour le calcul de la force d'inertie.

4.3 Bilan des forces

Sur base des expressions définies ci-dessus, les bilans des forces aux deux extrémités de la bielle s'écrivent de la manière suivante. Au pied de bielle (connexion avec le piston), la force dirigée vers le bas (compression de la bielle) vaut

$$F_{pied} = \frac{\pi D^2}{4} p(\theta) - m_{piston} R\omega^2 \cos(\theta) . \quad (18)$$

L'expression pour la tête de bielle (connexion avec le vilebrequin), positive pour une force également dirigée vers le bas, s'écrit

$$F_{tete} = -\frac{\pi D^2}{4} p(\theta) + (m_{piston} + m_{bielle}) R\omega^2 \cos(\theta) . \quad (19)$$

Le bilan des deux forces correspond logiquement à l'accélération de la bielle.

4.4 Flambage

Afin de calculer la section de la bielle, vous devrez considérer que votre bielle a une section en "I" comme montré sur la Figure 4

Utilisez la formule de Rankine qui lie la force critique de flambage aux dimensions et au matériau de la bielle :

$$\frac{1}{F_{crit}} = \frac{1}{F_{Euler}} + \frac{1}{A\sigma_C}$$

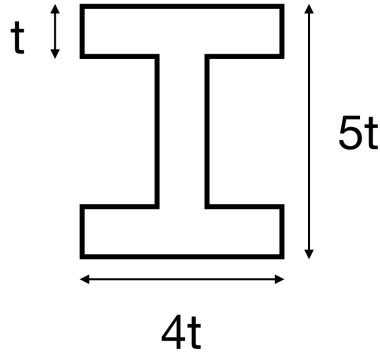


FIGURE 4 – Section transversale de la bielle

où F_{crit} est la force critique de flambage, σ_C est la résistance à la compression (donnée à 450 MPa), A est l'aire de la section de la bielle et F_{Euler} est la force calculée par la formule d'Euler

$$F_{\text{Euler}} = \frac{\pi^2 EI}{(KL_{\text{flamb}})^2}$$

où E est le module d'élasticité (donné à 200 GPa), I est le moment d'inertie, L_{flamb} est la longueur de flambage (ici la longueur de la bielle), K est le facteur de correction en fonction de l'attache des extrémités. Il y a deux directions de flambage possibles : dans le plan du mouvement de la bielle (axe x) et dans le plan perpendiculaire au mouvement (axe y). Comme les extrémités de la bielle peuvent effectuer une rotation dans le plan du mouvement, le facteur K vaut 1. Dans le plan perpendiculaire, le flambage ne sera pas du même type car les extrémités sont fixes, le facteur K vaut alors 0.5 (voir Figure 5).

Buckled shape of column shown by dashed line						
Theoretical K value	0.5	0.7	1.0	1.0	2.0	2.0
Recommended design value K	0.65	0.80	1.2	1.0	2.10	2.0
End condition key	 Rotation fixed and translation fixed Rotation free and translation fixed Rotation fixed and translation free Rotation free and translation free					

FIGURE 5 – Valeurs du facteur de correction K en fonction de l'attache des extrémités

Le moment d'inertie pour le profil en "I" donné ci-dessus est en fonction de l'axe :

$$I_{xx} = \frac{419}{12}t^4,$$
$$I_{yy} = \frac{131}{12}t^4.$$

Dans ce qui précède, vous devrez prêter attention aux unités afin d'obtenir une épaisseur de profil correcte.

5 Travail à réaliser

Votre travail doit reprendre les développements suivants :

1. Sur base de recherches personnelles (ou sur base des mesures réalisées au laboratoire sur votre pièce et les pièces associées), déterminez les grandeurs géométriques du moteur (D, R, L, V_c) et les masses en mouvement. Pour le taux de compression, τ , une recherche personnelle est nécessaire. Il dépend de la nature du carburant utilisé, essence ou diesel.
2. Calculez l'évolution de la pression dans le cylindre en intégrant numériquement la relation (8). L'énergie apportée par la combustion dépend de la nature du combustible. Pour un moteur à essence prenez $2800 \text{ kJ/kg}_{\text{gaz admis}}$. Pour un moteur diesel, prenez $1650 \text{ kJ/kg}_{\text{gaz admis}}$. Le gaz parcourant le cycle est supposé diatomique avec une valeur du coefficient isentropique, γ , de 1.3 pour tenir compte de l'effet de la température sur les chaleurs massiques.
3. Calculez ensuite les efforts sur la bielle en fonction de l'angle de vilebrequin.
4. Dimensionnez la section de la bielle (efforts de flambage).

5.1 Délivrables

Deadline : avant les vacances de Pâques.

Le code en Python qui répond aux points ci-dessus devra être soumis en ligne via INGINIOUS. Vous aurez 5 essais sur la plateforme. Nous vous conseillons de tester votre code comme il sera testé lors de votre soumission : une fourchette de valeur sera prise pour la vitesse de rotation, le taux de compression, et la combustion. Si votre code fonctionne, il doit donner une valeur cohérente dans l'ensemble des cas.

Plusieurs questions permettront par ailleurs de déterminer votre niveau de maîtrise. Le plagiat sera détecté par le logiciel *JPlag* et sera sanctionné par un 0/20 pour l'exercice.