

Adaptive Finite Elemente für Lineare Elastizität

Theo Koppenhöfer

25. Mai 2022

Es wird spannender...

Outline

Einführendes Beispiel

Formulierungen des kontinuierlichen Problems

Existenz und Eindeutigkeit des kontinuierlichen Problems

Das diskrete Problem

A Posteriori Fehlerschätzer

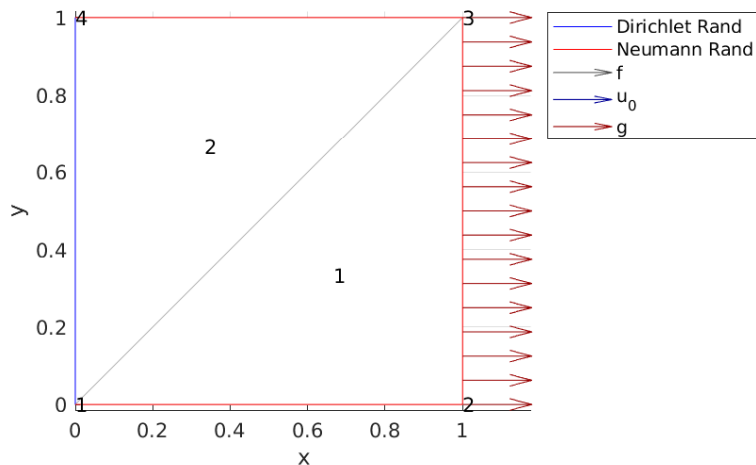
A Priori Abschätzung

Numerische Experimente

Zusammenfassung

Quellen

Ein einführendes Beispiel



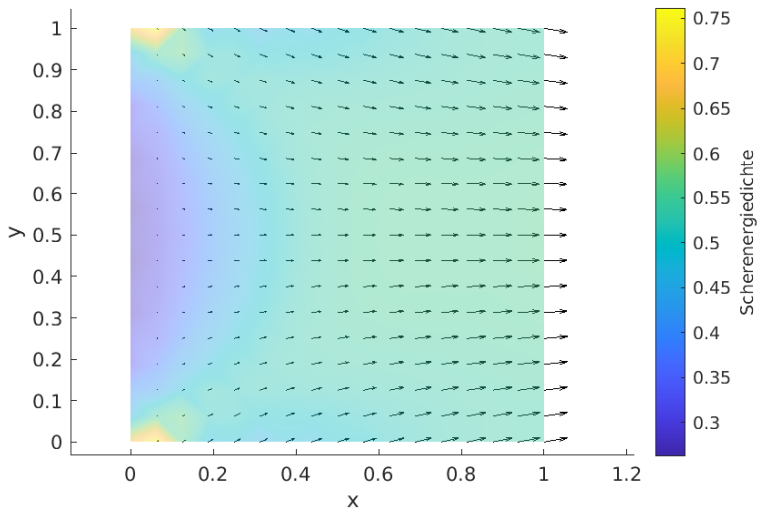


Abbildung: Numerische Lösung auf dem Gebiet

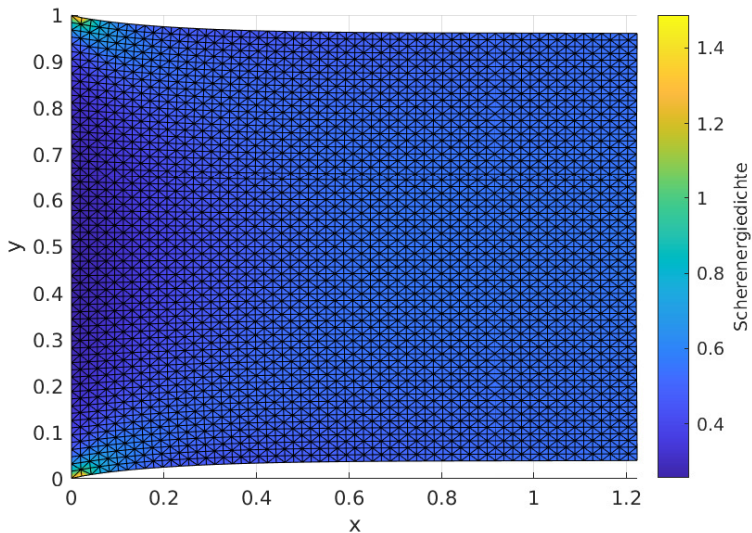


Abbildung: Lösung mit uniformer Triangulierung

Fragen, die man sich stellen kann

- ▶ Wie kann ich den Fehler der berechneten Lösung abschätzen, ohne die genaue Lösung zu kennen? → Fehlerschätzer
- ▶ Wie kann ich das die Kenntnis über diesen Fehler gewinnbringend verwenden? → adaptive Gitterverfeinerung

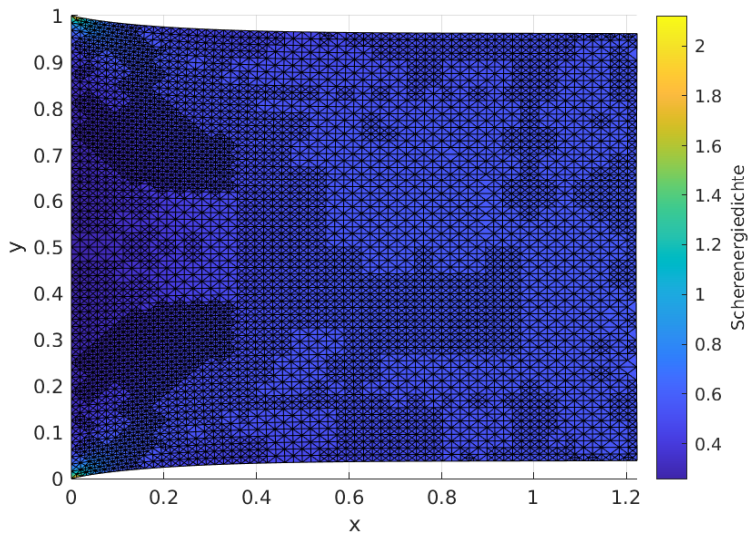


Abbildung: Lösung mit adaptiven Methoden

Formulierung des Problems

Wir nehmen an, der Körper nimmt in Referenzkonfiguration (Lagrange-Koordinaten) das Gebiet $\overline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^d$ ein. Wir bezeichnen

- ▶ Deformation: Eine Abbildung $\chi: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit $\det \nabla \chi > 0$
- ▶ Verschiebung: Eine Abbildung u , gegeben durch $\chi = \text{Id} + u$

Die Menge an zulässigen Verschiebungen bezeichnen wir mit V (wir verwenden für eine generische Verschiebung den Buchstaben v).

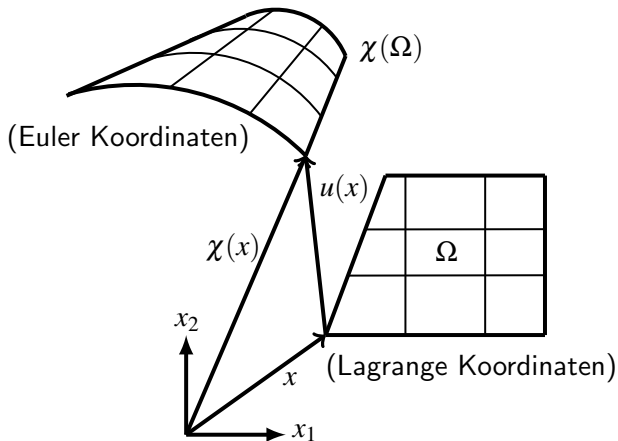


Abbildung: Eine Deformation in 2D

Vorraussetzung des Models: Der statische deformierte Körper (Euler-Koordinaten) nimmt den Raum Ω ein und befindet sich im Kräftegleichgewicht. Wir definieren

- ▶ Volumenkräfte: Eine Abbildung $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$
- ▶ Oberflächenkräfte: Eine Abbildung $\sigma: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ (Cauchyscher Spannungstensor). σ_{ij} bezeichnet die Kraft auf die Fläche j in Richtung i wirkt. Kraft, die auf Oberfläche in Richtung n wirkt ist

$$\sigma n = \sum_j \sigma_{ij} n_j e_i$$

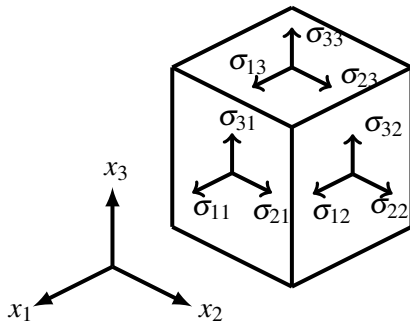


Abbildung: Eine mögliche Visualisierung des Spannungstensors in 3D

Randbedingungen

Wir bezeichnen $\Gamma := \partial\Omega$ als den Rand des Gebietes, $\Gamma_D \subseteq \Gamma$ als den Dirichlet- und $\Gamma_N \subseteq \Gamma$ als den Neumann-Rand. Damit erhalten wir Randbedingungen an die Lösung u des Problems

$$\begin{aligned}\sigma n &= g && \text{auf } \Gamma_N \\ u &= w && \text{auf } \Gamma_D\end{aligned}$$

Die Dirichlet-Randbedingung lässt sich verallgemeinern zu gleitenden Randbedingungen

$$Mu = w \quad \text{auf } \Gamma$$

mit $M: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$. Es ist nun nicht zwingend $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$. Falls $w = 0$ bezeichnen wir das Problem als homogen.

Erste Formulierung des Problems

Das Kräftegleichgewicht liefert die Formulierung: Finde eine Deformation u , so dass

Volumenkräfte,
die auf ω wirken

$$\int_{\omega} f \, dx + \int_{\partial\omega}$$

Oberflächenkräfte, die über die Oberfläche $\partial\omega$ auf ω wirken

$$\sigma n \, ds = 0$$

für alle $\omega \subseteq \Omega$

$$\sigma n = g$$

auf Γ_N

$$Mu = w$$

auf Γ

wobei σ von u abhängt und f, g als von u unabhängig angenommen werden (tote Lasten).

Der Satz von Gauss liefert

$$-\operatorname{Div} \sigma := -\sum_j \partial_j \sigma_{ij} e_i = f$$

Jetzt haben wir die differenzielle Formulierung

$$\begin{array}{ll} -\operatorname{Div} \sigma = f & \text{auf } \Omega \\ \sigma n = g & \text{auf } \Gamma_N \\ Mu = w & \text{auf } \Gamma \end{array}$$

Materialgesetze

Wir definieren den linearisierten Verzerrungstensor

$$\varepsilon := \frac{1}{2} \left(\nabla u + \nabla u^\top \right)$$

Für ein linear-elastisches Material ist

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l} C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

mit Hooke-Tensor $C: \Omega \rightarrow \otimes_{i=1}^4 \mathbb{R}^d$.

Für St. Venant-Kirchhoff-Materialen gilt

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

mit Lamé-Koeffizienten λ und μ (Schubmodul). Es folgt

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \lambda \operatorname{Tr}(\varepsilon) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

Basierend auf λ , μ kann man weitere Materialparameter K (Kompressionsmodul), E (Elastizitätsmodul) und ν (Querkontraktion) definieren.

Ein wenig Funktionalanalysis I

$L^2(\Omega)$ bezeichnet die Menge aller Funktionen $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, deren Quadrat Lebesgue-integrierbar ist. Wir definieren $H^k(\Omega)$ für $k \in \mathbb{N}$ als die Menge aller $v \in L^2(\Omega)$, so dass für alle Multiindizes α mit $|\alpha| \leq k$ die schwache Ableitung $\partial^\alpha v \in L^2(\Omega)$. Es wird durch

$$\langle u, v \rangle_{0, \Omega} = \int_{\Omega} uv \, dx$$

Ein Skalarprodukt auf $L^2(\Omega)$ definiert. Durch

$$\langle u, v \rangle_{k, \Omega} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v \rangle_{0, \Omega}$$

wird ein Skalarprodukt auf $H^k(\Omega)$ definiert. Dieses induziert die Norm $\|\cdot\|_{k, \Omega}$, wodurch $H^k(\Omega)$ zu einem Hilbertraum wird.

Ein wenig Funktionalanalysis II

Die Menge $H^k(\Omega; \mathbb{R}^d)$ ist definiert als die Menge aller $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, so dass für alle Komponenten gilt $v_i \in H^k(\Omega)$. Dies wird durch das Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{k, \Omega} := \sum_i \langle u_i, v_i \rangle_{k, \Omega}$$

zu einem Hilbertraum. Wir setzen hier und im Folgenden $V := H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ als die Menge der möglichen Verschiebungen. Außerdem definieren wir

$$V^0 := \{v \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d) : Mv = 0 \text{ auf } \Gamma\}$$

Dies ist auch ein Hilbert-Raum.

Variationelle Formulierung

Wir definieren

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(u) : \boldsymbol{\varepsilon}(v) \, dx := \int_{\Omega} \sum_{i,j} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) \, dx$$

sowie

$$\ell(v) := \langle f, v \rangle_{0,\Omega} + \langle g, v \rangle_{0,\Gamma_N}$$

Man kann aus der differenziellen Formulierungen eine variationelle Formulierung (virtuelle Arbeit) herleiten: Finde $u \in V$, so dass

$$\begin{array}{ll} a(u, v) = \ell(v) & \text{für alle } v \in V^0 \\ Mu = w & \text{auf } \Gamma \end{array}$$

Energiebetrachtung

Wir erhalten für die potenzielle Energie des Zustandes v

$$W(v) := \frac{1}{2}a(v, v) - \ell(v)$$

Man kann eine Formulierung als Optimierungsproblem herleiten:
Finde $u \in V$, so dass

$$\begin{array}{ll} u \text{ minimiert} & W = \frac{1}{2}a(\cdot, \cdot) - \ell \\ \text{unter der Nebenbedingung} & Mu|_{\Gamma} = w \end{array}$$

Existenz und Eindeutigkeit des homogenen Problems

Das folgende Resultat findet sich in [7]

Satz (Lax-Milgram-Lemma)

Seien V ein Banach-Raum, $\ell \in V^$ und $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige symmetrische elliptische bilineare Form. Dann hat das Problem $u \in V$ zu finden, so dass*

$$a(u, v) = \ell(v)$$

für alle $v \in V$ eine eindeutige Lösung. Dieses ist dann auch eindeutige Lösung des Problems $u \in V$ zu finden, so dass u das Funktional

$$W(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \ell(v)$$

minimiert.

Existenz und Eindeutigkeit des inhomogenen Problems

Folgerung

Existiert ein $u_\Gamma \in V$, so dass $Mu_\Gamma = w$ auf Γ und erfüllen a und ℓ die Voraussetzung des Lax-Milgram-Lemmas, dann besitzt unser Problem eine Eindeutige Lösung.

Beweis.

Es ist $u \in V$ genau dann eine Lösung von

$$\begin{array}{ll} a(u, v) = \ell(v) & \text{für alle } v \in V^0 \\ Mu = w & \text{auf } \Gamma \end{array}$$

wenn $u - u_\Gamma \in V^0$ eine Lösung ist von

$$a(u - u_\Gamma, v) = \ell(v) - a(u_\Gamma, v) \quad \text{für alle } v \in V^0$$



Es ist recht einfach zu zeigen, dass

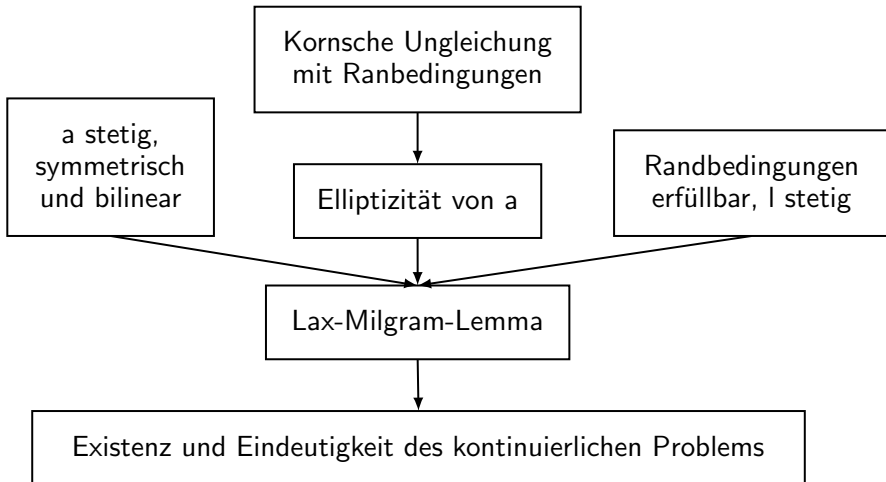
- ▶ a ist bilinear und symmetrisch
- ▶ (Stetigkeit) es gibt ein $c_A > 0$, so dass für alle $v_1, v_2 \in V$

$$a(v_1, v_2) \leq c_A \|v_1\| \|v_2\|$$

Es ist nicht sehr einfach zu zeigen, dass

- ▶ (Elliptizität) es gibt ein $c_a > 0$, so dass für alle $v \in V$

$$a(v, v) \geq c_a \|v\|^2$$



Kornsche Ungleichungen

Wir definieren für $v \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ die Norm

$$\|v\|_{K,\Omega}^2 := |v|_{0,\Omega}^2 + |\varepsilon(v)|_{0,\Omega}^2$$

Da $\varepsilon: H^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \rightarrow H^0(\Omega; \mathbb{R}^d)$ linear ist, folgt 1-Homogenität und die Dreiecksungleichung. Wir zeigen die Positivdefinitheit zunächst auf dem Ganzraum.

Lemma (Kornsche Ungleichung ohne Randbedingungen auf dem Ganzraum)

Sei $\Omega = \mathbb{R}^d$ mit $v \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$. Dann gilt

$$\|v\|_{1,\Omega} \leq \sqrt{2} \|v\|_{K,\Omega}$$

Beweis.

Siehe [4]



Intermezzo: Lipschitz Mengen

Wir bezeichnen eine beschränkte Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ als Lipschitz, falls es für jedes $x \in \partial\Omega$ ein $r > 0$, eine Lipschitz-stetige Funktion $\psi: \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ und eine affine Isometrie $A: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ gibt, so dass

$$B_r(x) \cap \Omega = B_r(x) \cap A \operatorname{epi}(\psi)$$

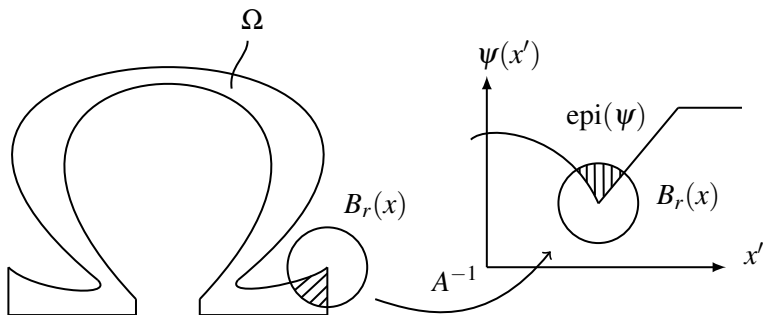


Abbildung: Visualisierung eines Lipschitz-Gebiets

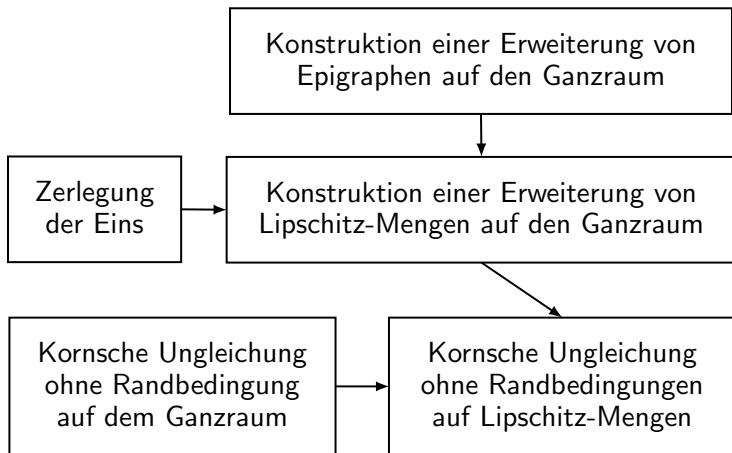
Lemma (Kornsche Ungleichung ohne Randbedingungen auf Lipschitz-Mengen)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ Lipschitz, dann gibt es ein $c_K > 0$, so dass für alle $v \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ gilt

$$\|v\|_{1,\Omega} \leq c_K \|v\|_{K,\Omega}$$

Beweis.

Siehe [15, 7] für Details



Wir bezeichnen eine offene zusammenhängende Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ als Gebiet. Ein Gebiet mit Lipschitz-Rand bezeichnen wir als Lipschitz-Gebiet.

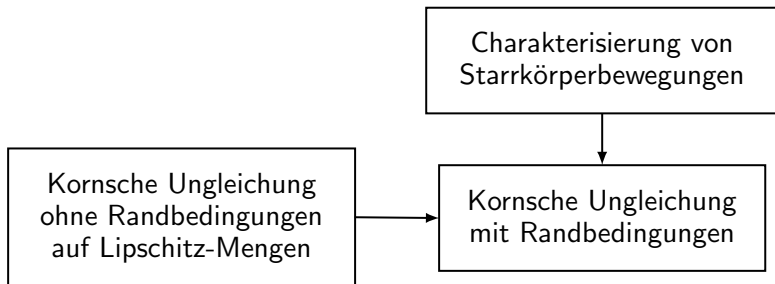
Satz (Kornsche Ungleichung mit Randbedingungen)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Lipschitz-Gebiet. Sei $\Gamma_D \subseteq \partial\Omega$ mit positivem Flächenmaß. Dann gibt es $c_K > 0$, so dass für alle $v \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ gilt

$$\|v\|_{1,\Omega} \leq c_K |\mathcal{E}(v)|_{0,\Omega}$$

Beweis.

Siehe [7] für Details



Triangulierungen

Für eine reguläre Triangulierung \mathcal{T} von Ω definieren wir

- ▶ \mathcal{E} ist die Menge der Kanten
- ▶ $\mathcal{E}_\Gamma = \mathcal{E}_D \cup \mathcal{E}_N$ ist die Menge der Rand-Kanten
- ▶ $\mathcal{K} = \{x^i\}_{i=1}^n$ ist die Menge der Knoten
- ▶ $\mathcal{K}_\Gamma = \mathcal{K}_D \cup \mathcal{K}_N = \{x^{ij}\}_{j=1}^l$ ist die Menge der Rand-Knoten

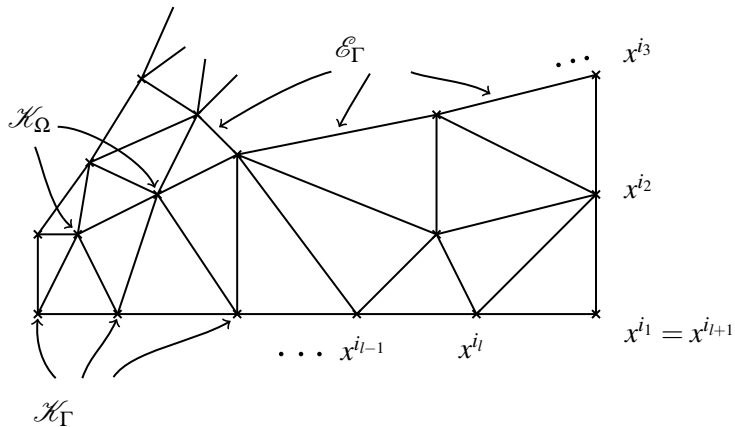


Abbildung: Beispiel einer Triangulierung

Nodale Basis

Bezeichne φ_i die nodale Basis in einer Dimension. Wir definieren die d -dimensionale nodale Basis

$$[\phi_1 \cdots \phi_{dn}] = [\varphi_1 e_1 \cdots \varphi_1 e_d \quad \cdots \quad \varphi_n e_1 \cdots \varphi_n e_d]$$

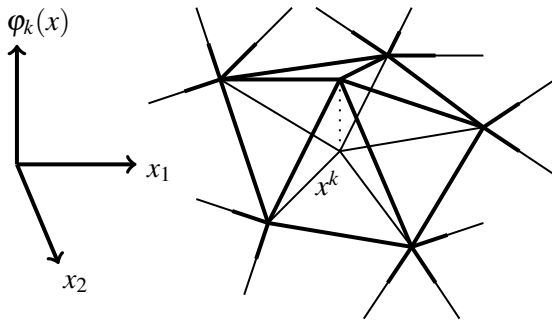


Abbildung: Ein Element einer nodalen Basis in 2D

Diskrete Formulierung

Wir wollen das diskrete Problem auf eine für den Computer verdauliche Form bringen. Wir diskretisieren

$$\begin{aligned} V &= H^1(\Omega; \mathbb{R}^d) && \longrightarrow V_h := \text{Span}\{\phi_i\}_i \subseteq V \\ V^0 &= \{v \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d) : Mv = 0 \text{ auf } \Gamma\} && \longrightarrow V_h^0 := V_h \cap V^0 \end{aligned}$$

Wir schreiben nun

$$\begin{aligned} u_h &= \sum_i \hat{u}_i \phi_i \\ v_h &= \sum_i \hat{v}_i \phi_i \end{aligned}$$

Wir diskretisieren a

$$\begin{aligned} a(u_h, v_h) &= a\left(\sum_i \hat{u}_i \phi_i, \sum_j \hat{v}_j \phi_j\right) \\ &= \sum_{i,j} \underbrace{a(\phi_i, \phi_j)}_{=: A_{ij}} \hat{u}_i \hat{v}_j \\ &= \sum_{i,j} A_{ij} \hat{u}_i \hat{v}_j \\ &= \hat{v}^\top A \hat{u} \end{aligned}$$

mit der Steifheitsmatrix

$$A_{ij} = a(\phi_i, \phi_j)$$

Weiter approximieren wir

$$\begin{aligned}\ell(\phi_j) &= \langle f, \phi_j \rangle_{0,\Omega} + \langle g, \phi_j \rangle_{0,\Gamma_N} \\ &\approx \sum_{T \in \mathcal{T}} |T| f(x_T) \phi_i(x_T) + \sum_{E \in \mathcal{E}_N} |E| g(x_E) \phi_i(x_E) \\ &=: \hat{\ell}_j\end{aligned}$$

mit Seitenmittelpunkten x_T und Kantenmittelpunkten x_E und Load-Vektor $\hat{\ell}$ Damit diskretisieren wir

$$\ell(v_h) = \ell\left(\sum_j \hat{v}_j \phi_j\right) = \sum_j \hat{v}_j \ell(\phi_j) \approx \sum_j \hat{v}_j \hat{\ell}_j = \hat{\mathbf{v}}^\top \hat{\ell}$$

Wir diskretisieren nun die Dirichletbedingung

$$Mu = w \quad \text{auf } \Gamma$$

zu

$$B\hat{u} = \hat{w}$$

wobei $B \in \mathbb{R}^{dl \times dn}$ und $\hat{w} = [w(x^{i_1}) \quad \dots \quad w(x^{i_l})]^\top \in \mathbb{R}^{dl}$.

Diskrete Formulierung als Optimierungsproblem

Unser diskretisiertes Problem lautet also: Finde $\hat{u} \in V_h$, so dass

$$\begin{array}{ll} \hat{u} \text{ minimiert} & \hat{W}(\hat{v}) := \frac{1}{2} \hat{v}^\top A \hat{v} - \hat{\ell}^\top \hat{v} \\ \text{unter der Nebenbedingung} & B\hat{u} = \hat{w} \end{array}$$

Proposition (Quadratische Programme mit Gleichheitsrestriktionen)

1. Für A positiv definit ist \hat{u} genau dann Lösung von

$$\begin{aligned} \hat{u} \text{ minimiert} \quad & \hat{W}(\hat{v}) := \frac{1}{2} \hat{v}^\top A \hat{v} - \hat{\ell}^\top \hat{v} \\ \text{unter der Nebenbedingung} \quad & B\hat{u} = \hat{w} \end{aligned} \quad (1)$$

wenn das Paar (\hat{u}, \hat{p}) KKT-Punkt von (1) ist.

2. Das Paar (\hat{u}, \hat{p}) ist genau dann KKT-Punkt von (1) wenn es folgendes Gleichungssystem löst:

$$\begin{bmatrix} A & B^\top \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\ell} \\ \hat{w} \end{bmatrix} \quad (2)$$

3. Sind A positiv definit und die Zeilen von B linear unabhängig (d.h. B ist surjektiv), dann besitzt (2) genau eine Lösung.

Beweis (durch gekonntes Zitieren).

1. Siehe Korollar 2.47, S.59 in [10]
2. Siehe Satz 5.1, S.198 in [10]
3. Siehe Satz 19 in [11]



Diskrete Formulierung mit Lagrange-Multiplikatoren

Unser diskretes Problem lautet also: Finde $(\hat{u}, \hat{p}) \in \mathbb{R}^{nd} \times \mathbb{R}^{ld}$, so dass

$$\begin{bmatrix} A & B^\top \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\ell} \\ \hat{w} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Dieses System wird vom im Programm aufgestellt und gelöst.

Residuale Fehlerschätzer

Gegeben sei die Lösung u des Problems und u_h des diskretisierten Problems. Wir definieren

- ▶ die flächenbezogenen Residuen $R_T := f + \operatorname{Div} \sigma(u_h)$
- ▶ die kantenbezogenen Sprünge

$$R_E = \begin{cases} [[\sigma(u_h) \cdot n]] & , \text{ falls } E \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_\Gamma \\ 0 & , \text{ falls } E \in \mathcal{E}_D \\ g - \sigma(u_h) & , \text{ falls } E \in \mathcal{E}_N \end{cases}$$

- ▶ einen lokalen Fehlerschätzer

$$\eta_{R,T}^2 := h_T^2 \|R_T\|_{0,T}^2 + \frac{1}{2} \sum_{E \in \partial T} h_E \|R_E\|_{0,E}^2$$

- ▶ einen globalen Fehlerschätzer

$$\eta_R^2 := \sum_{T \in \mathcal{T}} h_T^2 \|R_T\|_{0,T}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}} h_E \|R_E\|_{0,E}^2$$

Wir betrachten im folgenden nur den homogenen Fall $w = 0$.

Proposition

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ Lipschitz und $v \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$. Dann gilt

$$a(e, v) = \sum_{T \in \mathcal{T}} \langle R_T, v \rangle_{0,T} + \sum_{E \in \mathcal{E}} \langle R_E, v \rangle_{0,E}$$

Beweis.

Wesentliche Idee ist, Satz von Gauss, auf jedem Dreieck separat anzuwenden. □

Satz (Zuverlässigkeit / untere Schranke des residualen Schätzers)

Sei \mathcal{T} eine quasiuniforme Triangulierung von Ω . Dann gibt es ein $c > 0$, so dass für den Fehler $e := u - u_h$ gilt

$$\|e\|_{1,\Omega} \leq c\eta_R$$

Beweis.

Analog zu [4, 3]. Verwendet vorhergehende Proposition und Interpolation vom Clément-Typ. □

Satz (Effizienz / obere Schranke des residualen Schätzers)

Sei \mathcal{T} eine quasiuniforme Triangulierung von Ω . Dann gibt es ein $c > 0$, so dass

$$\eta_{R,T}^2 \leq c \left(\|e\|_{1,\omega_T}^2 + \sum_{T' \subseteq \omega_T} h_{T'}^2 \|f - P_h f\|_{0,T'}^2 \right)$$

Beweis.

Recht technisch. Analog zu [4, 3]



Fehlerschätzung durch Mittelung, nach [1]

Wir setzen im Folgenden $\tilde{\sigma}_h = \sigma(\tilde{\varepsilon}_h)$ und $\sigma_h = \sigma(\varepsilon_h)$. Man definiert eine stetige Approximation $\tilde{\sigma}_h$ an σ_h , indem man an den Knoten den Wert von $\tilde{\sigma}_h$ auf das Mittel von σ_h der angrenzenden $T \in \mathcal{T}$ setzt und dieses dann linear interpoliert. Dies liefert dann den Fehlerschätzer

$$\eta_{M,T} := \|\tilde{\sigma}_h - \sigma_h\|_{0,T}$$

A Priori Abschätzung

Proposition (A Priori Fehler)

Seien \mathcal{T} eine quasiuniforme Triangulierung mit Regularitätsparameter κ , $u \in H^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$ Lösung des homogenen Problems und u_h Lösung des diskreten homogenen Problems. Dann gibt es eine von der Triangulierung unabhängige Konstante $c > 0$, so dass

$$|\sigma - \sigma_h| \leq ch_{\mathcal{T}} |u|_{2,\Omega}$$

Hierbei ist $h_{\mathcal{T}} := \max_{T \in \mathcal{T}} h_T$.

Beweis.

Folgt aus C  a's Lemma und einem Interpolationsresultat aus [12].



Numerische Experimente

Das folgende Benchmark ist aus [5]

Benchmark: Quadratisches Gebiet

Wir haben das Gebiet $\Omega = [0, 1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ mit reinem Dirichlet-Rand $\Gamma_D = \partial\Omega$, Parameter $\mu = 1$, uniforme Triangulierung und Funktionen

$$u(x/\pi) = \pi \begin{bmatrix} \cos(x_2) \sin^2(x_1) \sin(x_2) \\ -\cos(x_1) \sin(x_1) \sin^2(x_2) \end{bmatrix}$$

$$f(x/\pi) = 2\mu\pi^3 \begin{bmatrix} -\cos(x_2) \sin(x_1)(2\cos(2x_1) - 1) \\ \cos(x_1) \sin(x_1)(2\cos(2x_2) - 1) \end{bmatrix}$$

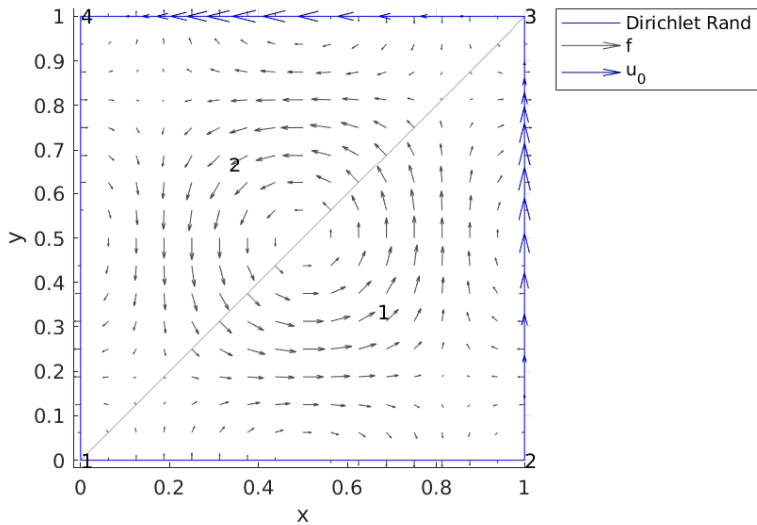


Abbildung: Anfangskonfiguration

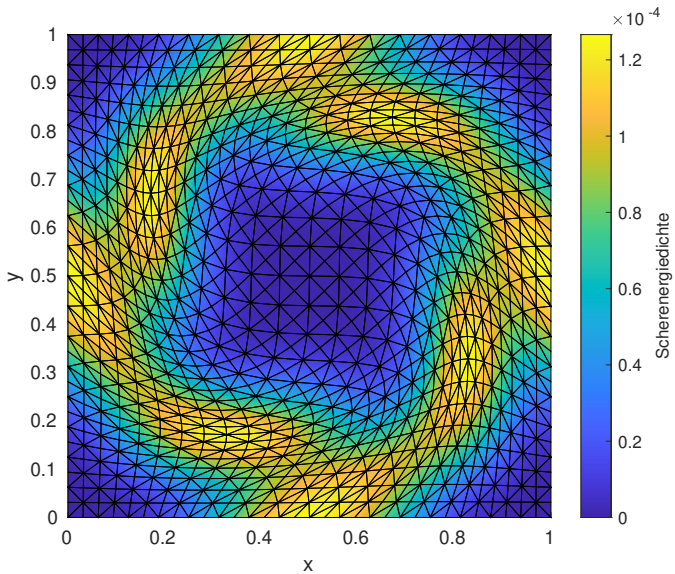


Abbildung: Mögliche Deformation des Gebiets

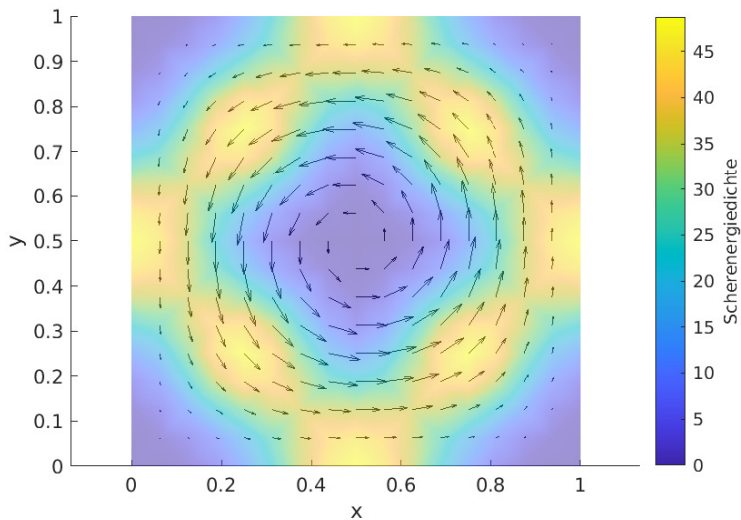


Abbildung: Lösung auf dem Gebiet

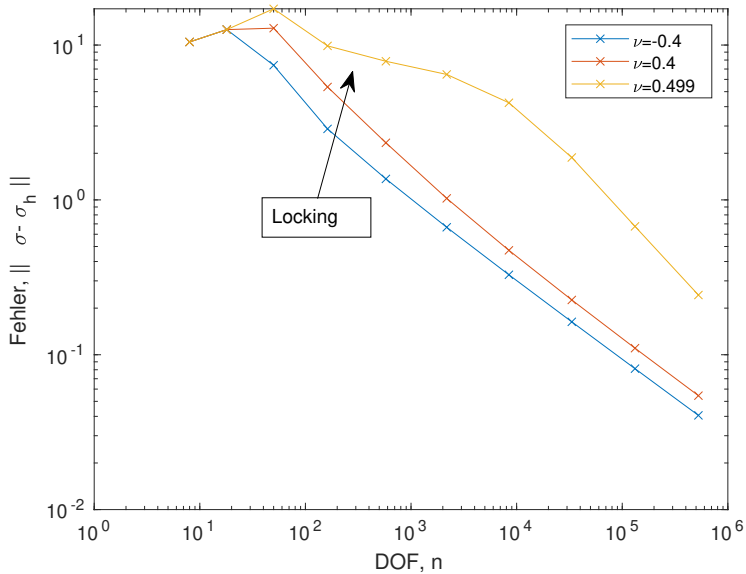


Abbildung: Fehler

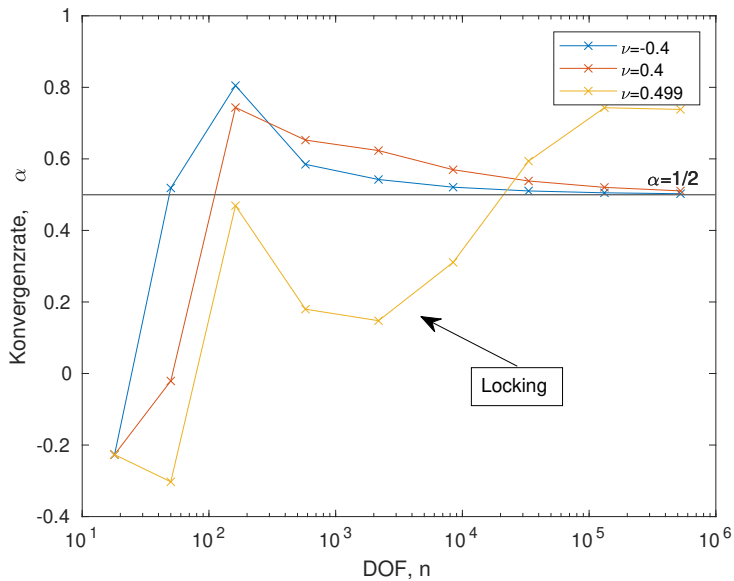


Abbildung: Konvergenzrate

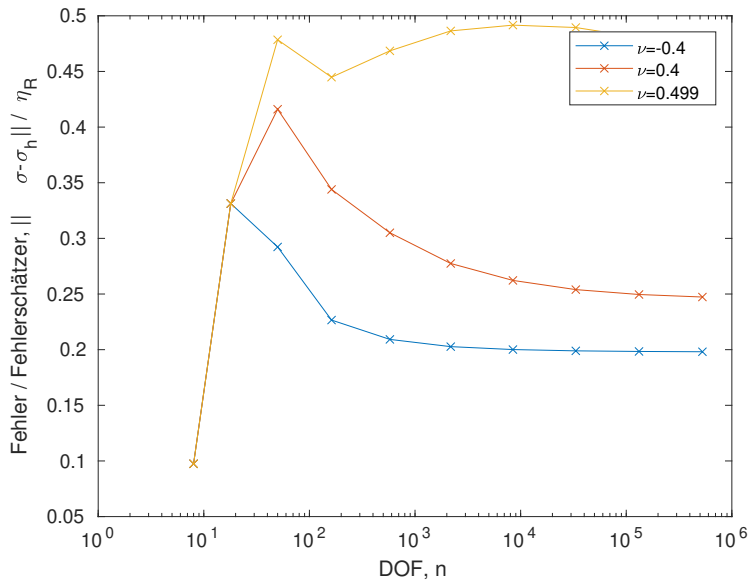


Abbildung: Zuverlässigkeit

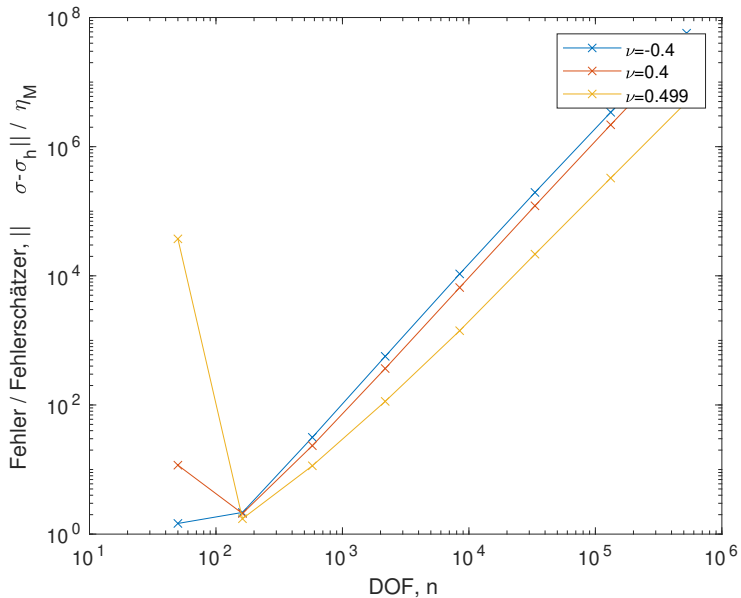


Abbildung: Auf eine andere Art zuverlässig?

Das Folgende Benchmark ist aus [5, 1]

Benchmark: L-förmiges Gebiet

Wir verwenden ein L-förmiges gebiet mit reinem Dirichlet-Rand und Parameten $E = 10^6$, $\nu = 0.3$ und $\delta = 0.7$. u ist In Polarkoordinaten gegeben durch

$$\begin{aligned} u_r(r, \phi) &= \frac{r^\alpha}{2\mu} \left(-(\alpha + 1) \cos((\alpha + 1)\phi) \right. \\ &\quad \left. + (C_2 - \alpha - 1)C_1 \cos((\alpha - 1)\phi) \right) \\ u_r(r, \phi) &= \frac{r^\alpha}{2\mu} \left((\alpha + 1) \sin((\alpha + 1)\phi) \right. \\ &\quad \left. + (C_2 + \alpha - 1)C_1 \sin((\alpha - 1)\phi) \right) \end{aligned}$$

mit speziellen Konstanten C_1 , C_2 und α . f ist gegeben durch $f = 0$

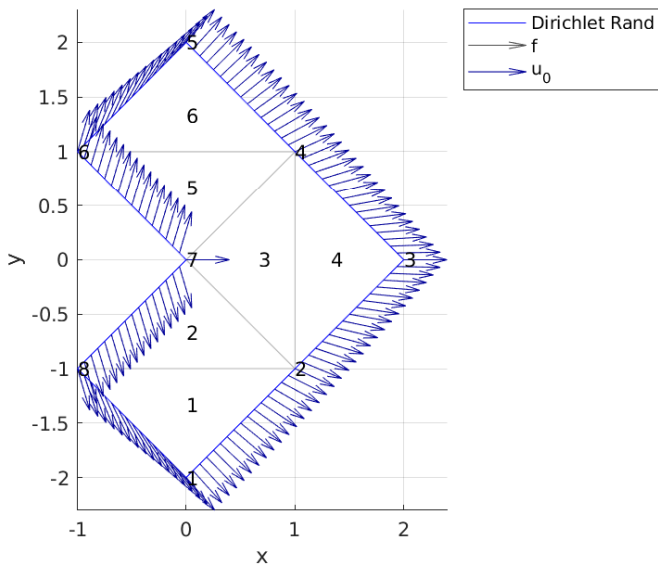


Abbildung: Anfangskonfiguration

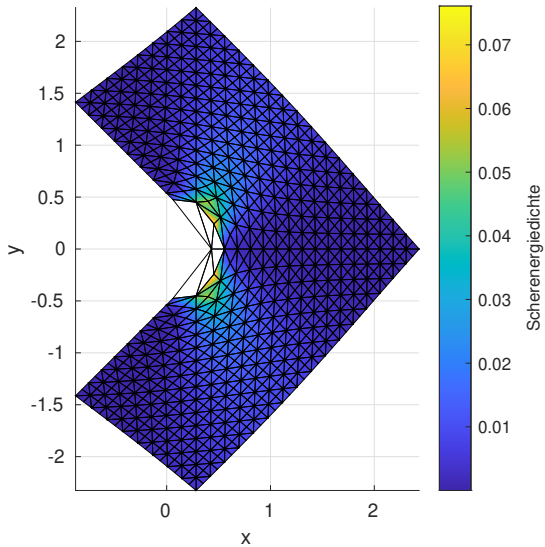


Abbildung: Mögliche Deformation des Gebiets

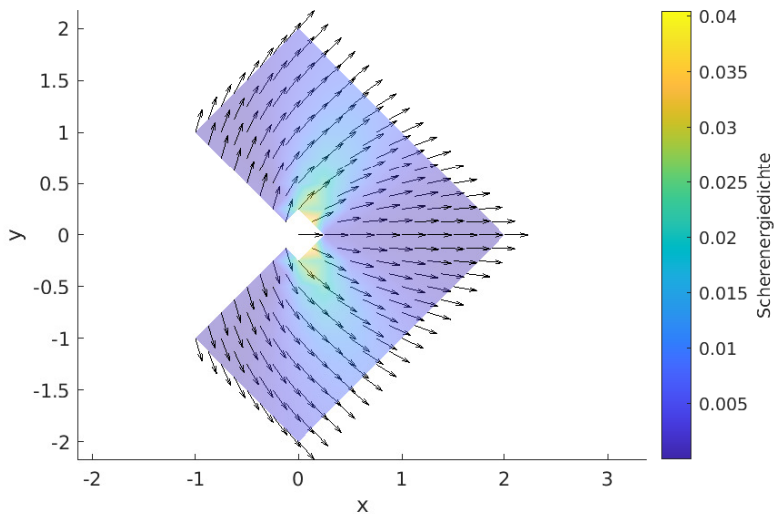


Abbildung: Lösung auf dem Gebiet

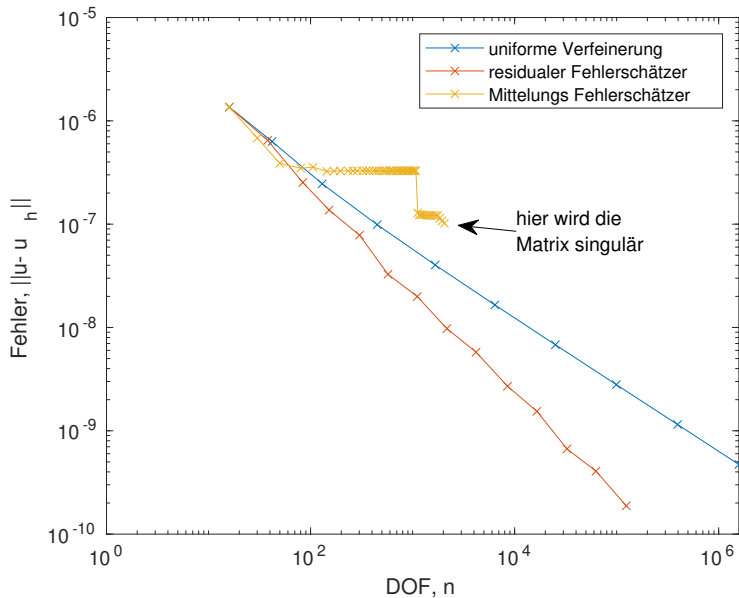


Abbildung: Fehler

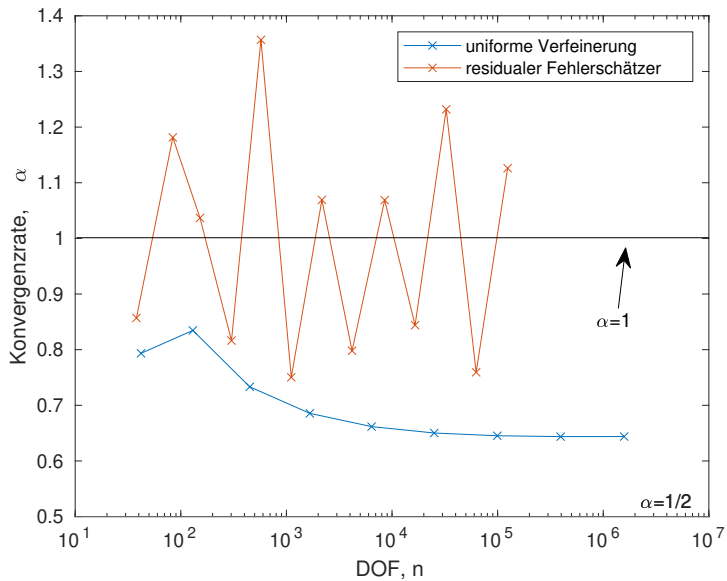
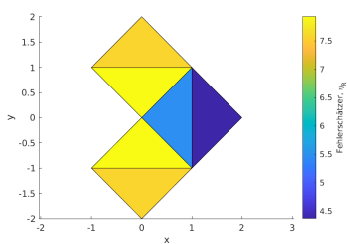
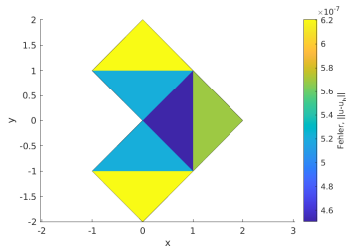


Abbildung: Konvergenzrate

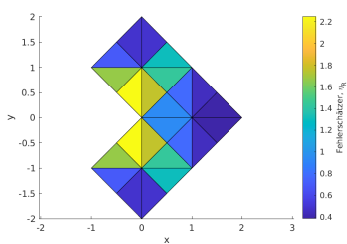


(a) Fehlerschätzer

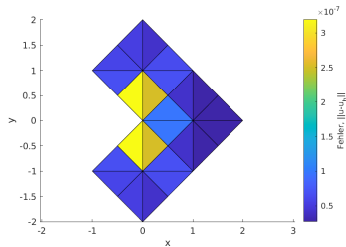


(b) Fehler

Abbildung: uniforme Triangulierung bei $DOF = 16$

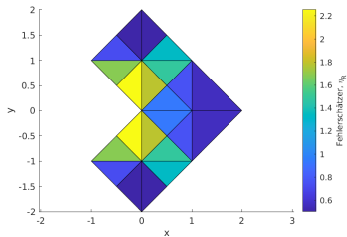


(a) Fehlerschätzer

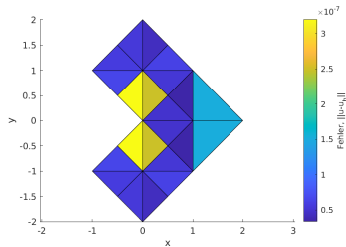


(b) Fehler

Abbildung: uniforme Triangulierung bei $DOF = 42$

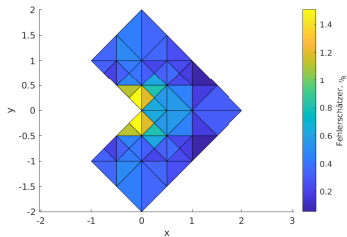


(a) Fehlerschätzer

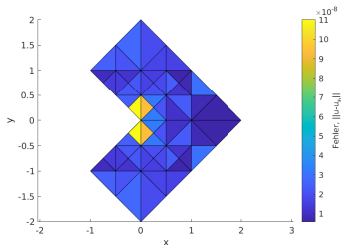


(b) Fehler

Abbildung: Triangulierung für den residualen Schätzer bei $DOF = 38$

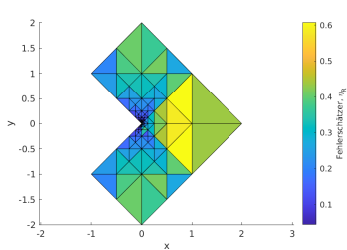


(a) Fehlerschätzer

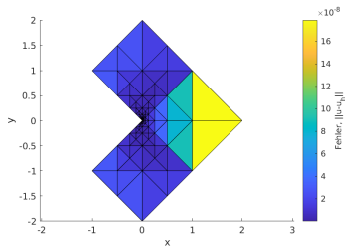


(b) Fehler

Abbildung: Triangulierung für den residualen Schätzer bei $DOF = 84$

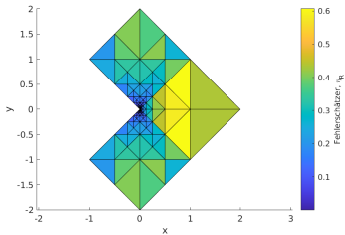


(a) Fehlerschätzer

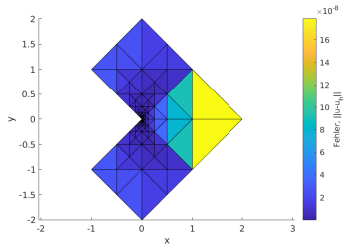


(b) Fehler

Abbildung: Triangulation für den Mittelungs Fehlerschätzer bei $DOF = 196$

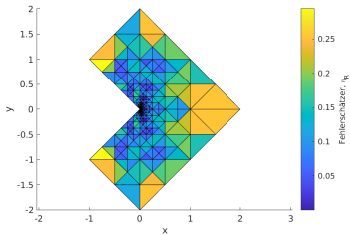


(a) Fehlerschätzer

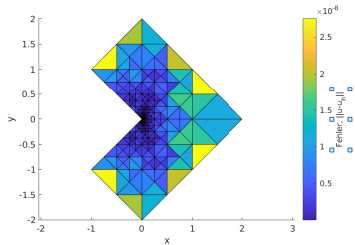


(b) Fehler

Abbildung: Triangulation für den Mittelungs Fehlerschätzer bei $DOF = 1018$



(a) Fehlerschätzer



(b) Fehler

Abbildung: Triangulation für den Mittelungs Fehlerschätzer bei $DOF = 1946$

Zusammenfassung I

Formulierungen des kontinuierlichen Problems: Finde $u \in V$, so dass

- Kräftegleichgewicht

$$\begin{aligned}\int_{\omega} f \, dx + \int_{\partial \omega} \sigma n \, ds &= 0 && \text{für alle } \omega \subseteq \Omega \\ \sigma n &= g && \text{auf } \Gamma_N \\ Mu &= w && \text{auf } \Gamma\end{aligned}$$

- Differenzielles Problem

$$\begin{aligned}-\operatorname{Div} \sigma &= f && \text{auf } \Omega \\ \sigma n &= g && \text{auf } \Gamma_N \\ Mu &= w && \text{auf } \Gamma\end{aligned}$$

- Variationelles Problem (virtuelle Arbeit)

$$\begin{aligned}a(u, v) &= \ell(v) && \text{für alle } v \in V^0 \\ Mu &= w && \text{auf } \Gamma\end{aligned}$$

Zusammenfassung II

- Optimierungsproblem (Energiefunktional)

$$\begin{array}{ll} u \text{ minimiert} & W = \frac{1}{2}a(\cdot, \cdot) - \ell \\ \text{unter der Nebenbedingung} & Mu|_{\Gamma} = w \end{array}$$

Formulierungen des diskreten Problems: Finde $u_h \in V_h$, so dass

- Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \hat{u} \text{ minimiert} & \hat{W}(\hat{v}) := \frac{1}{2}\hat{v}^{\top}A\hat{v} - \hat{\ell}^{\top}\hat{v} \\ \text{unter der Nebenbedingung} & B\hat{u} = \hat{w} \end{array}$$

- LGS mit Lagrange-Multiplikatoren

$$\begin{bmatrix} A & B^{\top} \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\ell} \\ \hat{w} \end{bmatrix}$$

Zusammenfassung III

- ▶ Man zeigt:
Kornsche Ungleichung ohne Randbedingungen auf dem
Ganzraum $\xrightarrow{\text{Erweiterungsoperator}}$ Kornsche Ungleichung ohne
Randbedingungen $\xrightarrow{\text{Starrkörperbewegungen}}$ Kornsche Ungleichung
mit Randbedingungen \rightarrow Positivdefinitheit von a
- ▶ Existenz und Eindeutigkeit
 - ▶ kontinuierliches Problem: Lax-Milgram-Lemma
 - ▶ diskretes Problem: Resultate aus der quadratischen Optimierung
- ▶ Der residuale Fehlerschätzer ist verlässlich (reliable) und effizient. Dies sieht man auch in numerischen Experimenten.
- ▶ Der residuale Fehlerschätzer wird verwendet, um das Gitter adaptiv zu verfeinern. Dies verbessert bei manchen Problemen die Konvergenz.

Danke für die Aufmerksamkeit.

Fragen?

Quellen I

- [1] Albery, J., C. Carstensen, S. A. Funken, and R. Klose.
"Matlab Implementation of the Finite Element Method in Elasticity." *Computing* 69, no. 3 (2002): 239-263.
- [2] Alt, Hans Wilhelm. Linear Functional Analysis: An Application-Oriented Introduction. *London: Springer London, 2016.*
- [3] Bangerth, Wolfgang, and Rolf Rannacher. Adaptive Finite Element Methods for Differential Equations. *Basel [u.a.]: Birkhäuser, 2003. S.130f.*
- [4] Braess, Dietrich. Finite Elemente: Theorie, Schnelle Löser Und Anwendungen in Der Elastizitätstheorie. 4., überarb. und erw. Aufl. *Berlin [u.a.]: Springer, 2007.*

Quellen II

- [5] Carstensen, C., M. Eigel, and J. Gedicke. "Computational Competition of Symmetric Mixed FEM in Linear Elasticity." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200.41 (2011): 2903-2915.
- [6] Ciarlet, Philippe G. *Studies in Mathematics and Its Applications. Mathematical Elasticity. 1, Three-dimensional Elasticity.* Amsterdam [u.a.]: North-Holland, 1988.
- [7] Ciarlet, Philippe G. *Studies in Mathematics and Its Applications. Mathematical Elasticity. 2, Theory of Plates.* Amsterdam [u.a.]: North-Holland, 1997.
- [8] Conti, S. "Einführung in die Funktionanalysis". *Vorlesungsnotizen. Universität Bonn, Wintersemester 2021/2022.*

Quellen III

- [9] *Lions, Jacques Louis, and Georges Duvaut. Inequalities in Mechanics and Physics. Berlin, Heidelberg: Springer, 1976.*
- [10] *Geiger, Carl. Theorie Und Numerik Restringerter Optimisierungsaufgaben. 1st ed. 2002. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2002.*
- [11] *Gedicke, J. "Einführung in die Numerische Mathematik". Vorlesungsnotizen. Universität Bonn, Sommersemester 2021.*
- [12] *Gedicke, J. "Wissenschaftliches Rechnen I". Vorlesungsnotizen. Universität Bonn, Wintersemester 2021/2022.*
- [13] *Kikuchi, Noboru, and John Tinsley Oden. Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods. Philadelphia: SIAM, 1988.*

Quellen IV

- [14] *Lifshitz, Evgenii Mikhailovich, and Lev Davidovich Landau. Course of Theoretical Physics. Pergamon, 1959.*
- [15] *Nitsche, J. A. On Korn's second inequality. RAIRO Anal. Numér. 15 (1981), no. 3, 237–248.*

