

Adaptive Finite Elemente für Lineare Elastizität

Theo Koppenhöfer

7. April 2022

Es wird spannend...

Outline

Einleitung

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Das diskrete Problem

A Posteriori Fehlerschätzer

Quellen

Wir nehmen an, der Körper nimmt in Referenzkonfiguration (Lagrange-Koordinaten) das Gebiet $\overline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^d$ ein. Wir definieren

- ▶ Deformation: Eine Abbildung $\chi: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit $\det \chi > 0$
- ▶ Verschiebung: Eine Abbildung u , gegeben durch $\chi = \text{Id} + u$

Die Menge an zulässigen Verschiebungen bezeichnen wir mit V (wir verwenden für eine generische Verschiebung den Buchstaben v).

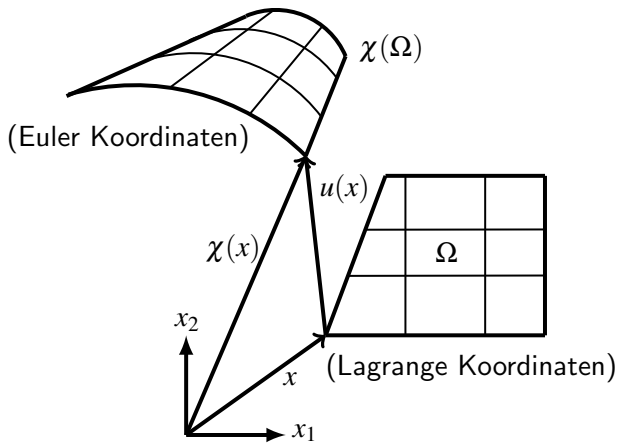


Abbildung: Eine Deformation in 2D

Man berechnet für die Länge eines kleines deformierten Wegstückes bei x

$$\begin{aligned} & \|\chi(x+z) - \chi(x)\|^2 + o(\|z\|^2) \\ &= \|\nabla \chi(x)z\|^2 \\ &= \|\nabla(\text{Id} + u(x))z\|^2 \\ &= \|z + \nabla u(x)z\|^2 \\ &= \|z\|^2 + z^\top (\nabla u(x) + \nabla u(x)^\top)z + z^\top \nabla u(x)^\top \nabla u(x)z \\ &= \|z\|^2 + 2z^\top E z \end{aligned}$$

mit Euler-Lagrange Verzerrungstensor E gegeben durch

$$2E := \nabla u(x) + \nabla u(x)^\top + \nabla u(x)^\top \nabla u(x)$$

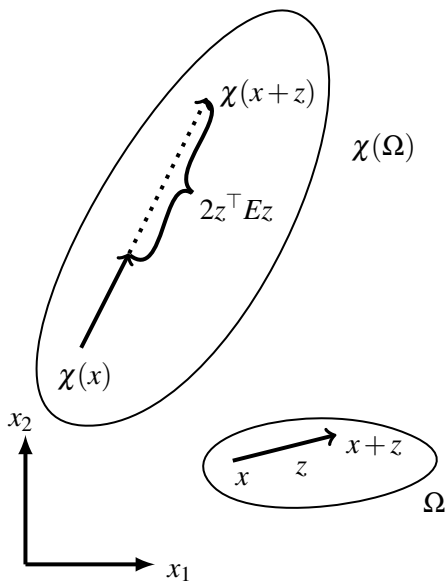


Abbildung: Eine Anschauliche Darstellung

Für kleine Verzerrungen, wie wir sie im Folgenden annehmen, ist der letzte Term vernachlässigbar und wir haben

$$E \approx \frac{1}{2} \left(\nabla u + \nabla u^\top \right) =: \varepsilon$$

mit ε dem linearisierten Verzerrungstensor.

Vorraussetzung des Models: Der statische deformierte Körper (Euler-Koordinaten) nimmt den Raum Ω ein und befindet sich im Kräftegleichgewicht. Wir definieren

- ▶ Volumenkräfte: Eine Abbildung $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$
- ▶ Oberflächenkräfte: Eine Abbildung $\sigma: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ (Cauchyscher Spannungstensor). σ_{ij} bezeichnet die Kraft auf die Fläche j in Richtung i wirkt. Kraft, die auf Oberfläche in Richtung n wirkt ist

$$\sigma n = \sum_j \sigma_{ij} n_j e_i$$

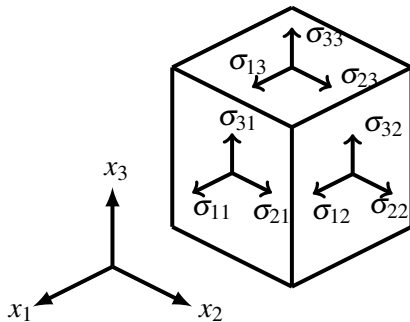


Abbildung: Eine mögliche Visualisierung des Spannungstensors in 3D

Erste Formulierung des Problems

Wir bezeichnen $\Gamma := \partial\Omega$ als den Rand des Gebietes mit $\Gamma_D \subseteq \Gamma$ als den Dirichlet- und $\Gamma_N := \Gamma \setminus \Gamma_D$ als den Neumann-Rand. Die Gleichgewichtsbeziehung liefert die Formulierung: Finde eine Deformation u , so dass

Volumenkräfte,
die auf ω wirken


$$\int_{\omega} f \, dx$$

Oberflächenkräfte, die über die Oberfläche $\partial\omega$ auf ω wirken


$$+ \int_{\partial\omega} \sigma n \, ds = 0$$

, für alle $\omega \subseteq \Omega$

$$u = w \quad , \text{ auf } \Gamma_D$$

$$\sigma n = g \quad , \text{ auf } \Gamma_N$$

wobei σ von u abhängt und f, g als von u unabhängig angenommen werden (tote Lasten).

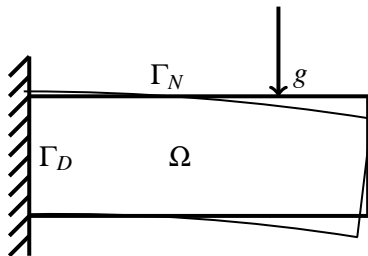


Abbildung: Beispiel für mögliche Nebenbedingungen

Der Satz von Gauss liefert die Gleichgewichtsbeziehung in differenzieller Form

$$-\operatorname{Div} \sigma := -\sum_j \partial_j \sigma_{ij} e_i = f$$

Jetzt haben wir die Formulierung

$$\begin{aligned} -\operatorname{Div} \sigma &= f && , \text{ auf } \Omega \\ u &= w && , \text{ auf } \Gamma_D \\ \sigma n &= g && , \text{ auf } \Gamma_N \end{aligned}$$

Die Impulserhaltung liefert

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Materialgesetze

Für ein linear-elastisches Material ist

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l} C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

mit Hooke-Tensor $C: \Omega \rightarrow \otimes_{i=1}^4 \mathbb{R}^d$

Für St. Venant-Kirchhoff-Materialen gilt

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

mit Lamé-Koeffizienten λ und μ (Schubmodul). Es folgt

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \lambda \operatorname{Tr}(\varepsilon) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

Basierend auf λ , μ kann man weitere Materialparameter K (Kompressionsmodul), E (Elastizitätsmodul) und ν (Querkontraktion) definieren.

Für St. Venant-Kirchhoff-Materialien ergibt sich die Lamé-Differenzialgleichung

$$\begin{aligned} -\lambda \nabla \operatorname{Div} u - 2\mu \operatorname{Div} \varepsilon(u) &= f && \text{, auf } \Omega \\ u &= w && \text{, auf } \Gamma_D \\ \sigma n &= g && \text{, auf } \Gamma_N \end{aligned}$$

Variationsmethode, Energiebetrachtungen

Wir definieren

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(u) : \boldsymbol{\varepsilon}(v) \, dx := \int_{\Omega} \sum_{i,j} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) \, dx$$

sowie

$$b(v) := \int_{\Omega} f \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_N} g \cdot v \, dx$$

Dann lautet die potenzielle Energie

$$W(v) := \frac{1}{2} a(v, v) - b(v)$$

Daraus erhält man eine neue Formulierung des Problems Finde $u \in V$, so dass

$$\begin{aligned} a(u, v) &= b(v) && \text{, für alle } v \in V \text{ mit } v = 0 \text{ auf } \Gamma_D \\ u &= w && \text{, auf } \Gamma_D \end{aligned}$$

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Unter welchen Voraussetzungen ist a eine stetige symmetrische bilineare Form? D.h.

1. a ist bilinear und symmetrisch
2. (Stetigkeit) es gibt ein $\alpha_1 > 0$, so dass für alle $v_1, v_2 \in V$

$$a(v_1, v_2) \leq \alpha_1 \|v_1\| \|v_2\|$$

3. (Elliptizität) es gibt ein $\alpha_2 > 0$, so dass für alle $v \in V$

$$a(v, v) \geq \alpha_2 \|v\|^2$$

Satz (Lax-Milgram Lemma, nach [5])

Sei V ein Banach-Raum. Sei $b \in V^$ und $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige symmetrische elliptische bilineare Form ist.*

Dann hat das Problem $u \in V$ zu finden, so dass

$$a(u, v) = b(v)$$

für alle $v \in V$ eine eindeutige Lösung. Dieses ist dann auch eindeutige Lösung des Problems $u \in V$ zu finden, so dass u das Funktional

$$W(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - b(v)$$

minimiert.

Ein paar Definitionen I

$L^2(\Omega)$ bezeichnet die Menge aller Funktionen, deren Quadrat Lebesgue-integrierbar ist. Wir definieren $H^k(\Omega)$ für $k \in \mathbb{N}$ als die Menge aller $v \in L^2(\Omega)$, so dass für alle Multiindizes α mit $|\alpha| \leq k$ die schwache Ableitung $\partial^\alpha v \in L^2(\Omega)$. Es wird durch

$$\langle u, v \rangle_{0,\Omega} = \int_{\Omega} uv \, dx$$

Ein Skalarprodukt auf $L^2(\Omega)$ definiert. Durch

$$\langle u, v \rangle_{k,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v \rangle_{0,\Omega}$$

wird ein Skalarprodukt auf $H^k(\Omega)$ definiert. Dieses induziert die Norm $\|\cdot\|_{k,\Omega}$, wodurch $H^k(\Omega)$ zu einem Banachraum wird.

Ein paar Definitionen II

Wir definieren durch

$$\|v\|_{-k,\Omega} := \sup_{v \in H_0^k(\Omega)} \frac{\langle u, v \rangle_{0,\Omega}}{\|v\|_{k,\Omega}}$$

eine Norm auf $L^2(\Omega)$. Die Vervollständigung von $L^2(\Omega)$ bezeichnen wir mit $H^{-k}(\Omega)$. Dies ist eine Charakterisierung des Dualraums von $H^k(\Omega)$.

Lemma (Lemma von J.L. Lions, nach [6])

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Gebiet mit regulärem Rand und $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $v \in H^{-1}(\Omega)$ und $\partial_i v \in H^{-1}(\Omega)$ für alle i , dann folgt $v \in L^2(\Omega)$.

Lemma (Kornsche Ungleichung ohne Randbedingungen)

(Kornsche Ungleichung ohne Randbedingungen, in [5] bewiesen nur für $d = 3$) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Gebiet mit C^1 Rand (Lipschitz reicht wohl auch) und beschränkt, dann gibt es ein $c > 0$, so dass für alle $v \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ gilt

$$\|v\|_{1,\Omega} \leq c \left(|v|_{0,\Omega}^2 + |\mathcal{E}(v)|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} =: c \|v\|_K$$

Lemma (Eine Charakterisierung von Starrkörperbewegungen)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und zusammenhängend, dann sind für $v \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ äquivalent

1. $\varepsilon(v) = 0$
2. Es gibt $a, b \in \mathbb{R}^3$, so dass $v(x) = a \times x + b$

Satz (Kornsche Ungleichung mit Randbedingungen)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ mit C^1 Rand und beschränkt. Sei $\Gamma_D \subseteq \partial\Omega$ mit positivem Flächenmaß. Dann gibt es $c > 0$, so dass für alle $v \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ mit $v = 0$ auf Γ_D

$$\|v\|_{1,\Omega} \leq c |\mathcal{E}(v)|_{0,\Omega}$$

Das diskrete Problem

Es sei \mathcal{T}_h eine reguläre Triangulierung von Ω . Bezeichne φ_i die nodale Basis in einer Dimension. Wir definieren die d -dimensionale nodale Basis

$$(\phi_1 \cdots \phi_{dn}) = (\varphi_1 e_1 \cdots \varphi_1 e_d \quad \cdots \quad \varphi_n e_1 \cdots \varphi_n e_d)$$

Weiter setzen wir $\mathcal{S}_h := \text{Span}\{\phi_i\}_i$.

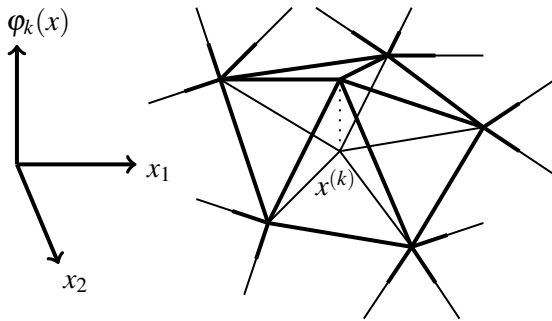


Abbildung: Ein Element einer nodalen Basis in 2D

Das diskrete Problem lautet dann: Finde $u_h \in \mathcal{S}_h$, so dass

$$\begin{aligned} a(v_h, u_h) &= b(v_h) && \text{, für alle } v_h \in \mathcal{S}_h \text{ mit } v_h = 0 \text{ auf } \Gamma_D \\ u_h &= w_h && \text{, auf } \Gamma_D \end{aligned}$$

Indem man $u_h = \sum_i \hat{u}_i \phi_i$ setzt gelangt man zu einer neuen Formulierung des diskreten Problems: Finde $\hat{u} \in \mathbb{R}^{nd}$, so dass

$$\hat{A}\hat{u} = \hat{b}$$

mit Steifheits-Matrix $\hat{A}_{ij} = a(\phi_j, \phi_i)$ und Load-Vektor $\hat{b}_i = b(\phi_i)$.

Residuale Fehlerschätzer

Gegeben sei die Lösung u des Problems und u_h des diskretisierten Problems. Wir definieren

- ▶ die flächenbezogenen Residuen $R_T := f + \operatorname{Div} \sigma(u_h)$
- ▶ die kantenbezogenen Sprünge

$$R_E = \begin{cases} \llbracket \sigma(u_h) \cdot n \rrbracket & , \text{ falls } E \subseteq \bigcup_T \partial T \setminus \partial \Omega \\ 0 & , \text{ falls } E \subseteq \Gamma_D \\ g - \sigma(u_h) & , \text{ falls } E \subseteq \Gamma_N \end{cases}$$

- ▶ einen lokalen Fehlerschätzer

$$\eta_{R,T} := \left(h_T^2 \|R_T\|_{0,T}^2 + \frac{1}{2} \sum_{E \in \partial T} h_E \|R_E\|_{0,E}^2 \right)^{1/2}$$

- ▶ einen globalen Fehlerschätzer

$$\eta_R := \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|R_T\|_{0,T}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \|R_E\|_{0,E}^2 \right)^{1/2}$$

Satz (untere Schranke des residualen Schätzers, nach [3, 2])

Sei \mathcal{T}_h eine quasiuniforme Triangulierung von Ω . Dann gibt es ein $c > 0$, so dass für den Fehler $e := u - u_h$ gilt

$$\|e\|_{1,\Omega} \leq c\eta_R$$

Satz (obere Schranke des residualen Schätzers, nach [3, 2])

Sei \mathcal{T}_h eine quasiuniforme Triangulierung von Ω . Dann gibt es ein $c > 0$, so dass

$$\eta_{R,T} \leq c \left(\|e\|_{1,\omega_T}^2 + \sum_{T' \subseteq \omega_T} h_{T'}^2 \|f - P_h f\|_{0,T'}^2 \right)^{1/2}$$

Fehlerschätzung durch Mittelung, nach [1]

Wir setzen im Folgenden $\tilde{\sigma}_h = \sigma(\tilde{\varepsilon}_h)$ und $\sigma_h = \sigma(\varepsilon_h)$. Man definiert eine stetige Approximation $\tilde{\sigma}_h$ an σ_h , indem man an den Knoten den Wert von $\tilde{\sigma}_h$ auf das Mittel von σ_h der angrenzenden $T \in \mathcal{T}_h$ setzt und dieses dann linear interpoliert. Dies liefert dann die Fehlerschätzer

$$\eta_{M1,T} := \|\tilde{\sigma}_h - \sigma_h\|_{0,T}$$






oder alternativ

$$\eta_{M2,T} := \int_T (\tilde{\sigma}_h - \sigma_h) : (\tilde{\varepsilon}_h - \varepsilon_h) \, dx$$





Danke für die Aufmerksamkeit.

Fragen?

Quellen I

-  Albery, J., C. Carstensen, S. A. Funken, and R. Klose. "Matlab Implementation of the Finite Element Method in Elasticity." *Computing* 69, no. 3 (2002): 239-263.
-  Bangerth, Wolfgang, and Rolf Rannacher. Adaptive Finite Element Methods for Differential Equations. *Basel [u.a.]*: Birkhäuser, 2003. S.130f.
-  Braess, Dietrich. Finite Elemente: Theorie, Schnelle Löser Und Anwendungen in Der Elastizitätstheorie. 4., überarb. und erw. Aufl. *Berlin [u.a.]*: Springer, 2007.
-  Ciarlet, Philippe G. Studies in Mathematics and Its Applications. Mathematical Elasticity. 1, Three-dimensional Elasticity. *Amsterdam [u.a.]*: North-Holland, 1988.
-  Ciarlet, Philippe G. Studies in Mathematics and Its Applications. Mathematical Elasticity. 2, Theory of Plates. *Amsterdam [u.a.]*: North-Holland, 1997.

Quellen II

-  *Lions, Jacques Louis, and Georges Duvaut. Inequalities in Mechanics and Physics. Berlin, Heidelberg: Springer, 1976.*
-  *Kikuchi, Noboru, and John Tinsley Oden. Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods. Philadelphia: SIAM, 1988.*
-  *Lifshitz, Evgenii Mikhailovich, and Lev Davidovich Landau. Course of Theoretical Physics. Pergamon, 1959.*
-  *Neittaanmäki, Pekka, and Sergey R. Repin. Reliable Methods for Computer Simulation: Error Control and Posteriori Estimates. Oxford: Elsevier Science & Technology, 2004.*

