Adaptive Finite Elemente für Lineare Elastizität

Theo Koppenhöfer

Geboren am 9. November 2000 in Heidelberg

10. Juni 2022

Bachelorarbeit Mathematik

Betreuer: Prof. Dr. Joscha Gedicke

Zweitgutachter: Prof. Dr. X Y

Institut für Numerische Simulation

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Inhaltsverzeichnis

Zunächst beginnen wir mit einer Liste an Bezeichnungen. Zur Notation: Im folgenden werden bei Summen der Übersichtlichkeit halber die Grenzen weggelassen. Die Menge der Indizes, über die sich die Summe erstreckt wird als maximal angenommen.

1 Einleitung

Verzerrung, Geometrische Betrachtungen

Da der Körper sich im Kräftegleichgewicht befindet, verschwindet auch das gesamte Drehmoment in einem geeigneten Gebiet $\omega \subseteq \Omega$ für $d = 3$ und es folgt wieder mit dem Satz von Gauss

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\omega (x \times f)_i \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\omega} (x \times \sigma n)_i \,\mathrm{d}x \\
&= \int_\omega (x \times f)_i \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\omega} \sum_{k,j,l} \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l \,\mathrm{d}x \\
\\
&= \int_\omega (x \times f)_i \,\mathrm{d}x + \int_\omega \sum_{j,k,l} \partial_l \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l \,\mathrm{d}x \\
&= \int_\omega (x \times f)_i \,\mathrm{d}x + \int_\omega \sum_{j,k,l} (\epsilon_{ijk} x_j \partial_l \sigma_{kl} + \epsilon_{ijk} \delta_{lj} \sigma_{kl}) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_\omega (x \times f)_i \,\mathrm{d}x + \int_\omega (x \times \operatorname{Div} \sigma)_i \,\mathrm{d}x + \int_\omega \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \sigma_{kj} \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Satz von Gauss

$$= \int_\omega \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \sigma_{kj} \,\mathrm{d}x$$

Hierbei bezeichnet ϵ_{ijk} den ϵ-Tensor, der dadurch definiert ist, dass er in ijk total antisymmetrisch ist und mit $\epsilon_{123} = 1$ normiert ist. Da dies für alle $\omega \subseteq \Omega$ regulär genug gilt, folgt

$$0 = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \sigma_{kj}$$

Also

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{j,k} \epsilon_{1jk} \sigma_{kj} = \sigma_{32} - \sigma_{23} \\
0 &= \sum_{j,k} \epsilon_{2jk} \sigma_{kj} = \sigma_{13} - \sigma_{31} \\
0 &= \sum_{j,k} \epsilon_{3jk} \sigma_{kj} = \sigma_{21} - \sigma_{12}
\end{aligned}$$

und damit $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, also ist σ symmetrisch.

TODO: Verzerrungsdichte (strain density) Nansons Formel:

$$Mu \times Mv = (\det M) M^{-T}(u \times v)$$

Stress

TODO: Konsistente Notation, int f auf andere Seite der Gleichung.

TODO: Man kann auch gleitende Randbedingungen haben, mit M und Γ_N und Γ_D nicht notwendigerweise disjunkt.

TODO: muss nicht noch eine Annahme in i getroffen werden?

Für ein Cauchy-Material (Cauchy elastic material, check name) gilt das materialabhängige Gesetz

$$t_{ij}(x) = \sigma(x, \partial v)$$

(this makes notationally absolutely no sense)

Materialgesetze

TODO: Wie folgen die Symmetriebeziehungen genau?

St. Venant-Kirchhoff-Material

TODO: (es folgt in Lip eine argumentation mit Energie und minimum, woraus folgt, dass K¿0 und mu¿0). Es gilt in der physik $K \geq 0$ und $\mu \geq 0$, woraus folgt

Beziehungsweise erhalten wir die DGL (nach [1])

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)(\nabla \operatorname{Div} u)^\top + \mu \Delta u &= f \\ M \cdot u &= w \text{ auf } \Gamma_D \\ \sigma(u) \cdot n &= g \end{aligned}$$

Energiebetrachtungen

TODO: Einheitliche Notation $\sigma : \varepsilon$ oder $\varepsilon : \sigma$

TODO: Energiebetrachtungsproof

Wir betrachten die Arbeit, die durch eine kleine Änderung der Verschiebung $u \to u + \delta u$ ($\|\delta u\|$ klein) von den internen Kräften verrichtet wird. Gemäß der Formel Arbeit = Kraft·Weg erhält man für die Energie-/Arbeitsdichte w

$$\delta w = f \cdot \delta v = \sum_{i,j} \partial_i \sigma_{ij} \delta v_j$$

und nach Integration und Anwendung von Gauss

$$
\begin{aligned}
\int_\omega w \,\mathrm{d}x &= \int_\omega \sum_{i,j} \partial_i \sigma_{ij} \delta u_j \,\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\int_{\partial\omega} \sum_{i,j} \sigma_{ij} \delta u_j n_i \,\mathrm{d}x}_{\to 0, \text{für } \omega \text{ groß genug}} - \int_\omega \sum_{i,j} \sigma_{ij} \partial_i \delta u_j \,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2} \int_\omega \sum_{i,j} \sigma_{ij} \left(\partial_i \delta u_j + \partial_j \delta u_i\right) \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2} \int_\omega \sum_{i,j} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Dies motiviert

$$\delta w = -\frac{1}{2} \sum_{ij} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}$$

zu setzen. Nach ([8], S.12), haben wir $\partial_{\varepsilon_{ij}} w = \sigma_{ij}$ und deshalb $w = \frac{1}{2} \sum_{ij} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$ (Argumentation gilt auch für nichtlinearen Fall).

(Das folgdende ist etwas komisch) Es gibt 2 unabhängige Scalare 2. Ordnung, die aus ε hervorgehen, nämlich $\sum_i \varepsilon_{ii}^2$ und $\sum_{ij} \varepsilon_{ij}^2$ Nun Taylorn wir w in 0 bis zur 2. Ordnung und erhalten

$$w = w_0 + \frac{1}{2} \lambda \sum_i \varepsilon_{ii}^2 + \mu \sum_{ij} \varepsilon_{ij}^2$$

wobei die Terme erster Ordnung verschwinden, da $0 = \sigma_{ij}|_{u=0} = \partial_{\varepsilon_{ij}} w|_{\varepsilon=0}$ Bei pure shear ([8], S.10) ist $\mathrm{Tr}(\varepsilon) = 0$ und bei hydrostatic compression $\varepsilon_{ij} = c\delta_{ij}$. Jede Deformation lässt sich durch

$$\varepsilon_{ij} = (\varepsilon_{ij} - \frac{1}{d} \delta_{ij} \,\mathrm{Tr}(\varepsilon)) + \frac{1}{3} \delta_{ij} \,\mathrm{Tr}(\varepsilon)$$

in pure shear und hydrostatic compression zerlegen. Einsetzen in w liefert

$$w = \sum_{i,j,k} \mu(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij})^2 + \frac{1}{2} K \varepsilon_{kk}^2$$

Außerdem erhält man

$$\sigma_{ij} = K \,\mathrm{Tr}(\varepsilon) \delta_{ij} + 2\mu(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{d} \,\mathrm{Tr}(\varepsilon) \delta_{ij})$$

Sowie für die Volumenänderung $dK \,\mathrm{Tr}(\varepsilon) = \mathrm{Tr}(\sigma)$. In [8], S.13 wird die Bedeutung von ν und E diskutiert.

Außerdem definieren wir (stored energy function)

$$w(\varepsilon) := \frac{1}{2}\varepsilon\colon C\varepsilon := \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}$$

und nehmen an, dass $b \in V^*$ gegeben ist, dass uns die Arbeit liefert, welche von einer Verschiebung $v \in V$ auf unser Objekt ausgeübt wird. Damit können wir die potentielle Energie einer Verschiebung $v \in V$ definieren

$$W(v) = \int_\Omega w(\varepsilon(v))\,\mathrm{d}x - b(v)$$

2 Existenz (und Eindeutigkeit?)

Lax-Milgram lemma

Grundlegende Bezeichnungen

TODO: Definiere eine Domain

Wir definieren $H^k(k \in \mathbb{Z})$

Gegeben sei ein Banachraum V. Wir definieren den Dualraum als $V^* := C(V, \mathbb{R})$.

TODO: definiere mehr dualitätsgedöns

Kornsche Ungleichungen

Lemma von J.L. Lions

Lemma von J.L. Lions

Wir definieren den Raum

$$X(\Omega) := \{v \in H^{-1}(\Omega), \text{so dass für alle } i\colon \partial_i v \in H^{-1}(\Omega)\}$$

Dies ist ein Hilbert Raum mit der Norm

$$\|v\|_X := \Big(\sum_{|\alpha|\leq 1} \|\partial^\alpha v\|^2_{-1,\Omega}\Big)^{1/2}$$

Lemma 1 (Eine erste Charakterisierung der Ableitung in H^{-1})**.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Lipschitz-Gebiet (welche Vorraussetzungen genau). Dann gilt*

$$L^2(\Omega) \subseteq X(\Omega)$$

Beweis. Sei $v \in L^2(\Omega)$. Wir definieren $\partial_i v \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle \partial_i v, \varphi\rangle = -\langle f, \partial_i\varphi\rangle_{0,\Omega}$$

für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Weiter sehen wir

$$|\langle v, \partial_i\varphi\rangle_{0,\Omega}| \leq \|v\|_{0,\Omega}\|\nabla\varphi\|_{0,\Omega} \leq \|v\|_{0,\Omega}\|\varphi\|_{1,\Omega}$$

also $\|\partial_i v\|_{-1,\Omega} \leq \|v\|$, womit Hahn Banach eine Erweiterung von $\partial_i v$ liefert (genauer). □

Proposition 2 (Dichtheit von $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ in $X(\Omega)$)**.** *Es ist $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ dicht in $X(\Omega)$ für den Halbraum $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_{>0}$.*

Beweis. Wir setzen

$$Y(\Omega) = \{v \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \mid \partial_d v \in H^{-1}(\mathbb{R}_{>0}; L^2(\mathbb{R}^{d-1}))\}$$

nun Behaupten wir, dass $Y(\Omega)$ in $X(\Omega)$ dicht ist. Sei dazu $\eta_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d-1})$ eine Standart Dirac-Schar. Sei $v \in X(\Omega)$. Setze $v_j := v * \eta_j$ mit $*$ die Konvolution (sollte irgendwo definiert werden). Dann gilt $v_j \to v$ in $X(\Omega)$ (da die Norm auf X stärker ist, als auf $L^2(\Omega)$) und $v_j \in Y(\Omega)$.

Wir zeigen nun, dass $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ (why overline) dicht in $X(\Omega)$ ist. Da $Y(\Omega)$ dicht in $X(\Omega)$ ist, reicht es zu zeigen, dass $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ dicht in $Y(\Omega)$ ist. Angenommen nicht. Dann gibt es $u \in Y(\Omega) \setminus \overline{\mathcal{D}}(\Omega)$. Da $\overline{\mathcal{D}}(\Omega)$ abgeschlossen (bzgl. $\|\cdot\|_{H^{-1}(\mathbb{R}_{>0}; L^2(\mathbb{R}^{d-1}))}$) ist und $(Y(\Omega), \|\cdot\|_{-1,\Omega})$ ein normierter Raum, liefert Hahn Banach (Conti cor. 4.22) ein $F \in Y(\Omega)^* \setminus \{0\}$, so dass $F|_{\overline{\mathcal{D}(\Omega)}} = \{0\}$. Folglich ist F von der Form (Begründung?)

$$F(v) = \int_0^\infty \langle f_1, v \rangle_{0,\mathbb{R}^{d-1}} + \langle f_2, \partial_d v \rangle_{0,\mathbb{R}^{d-1}} \,\mathrm{d}x$$

für $f_1, f_2 \in H_0^1(\mathbb{R}_{>0}; L^2(\mathbb{R}^{d-1}))$. Nun gilt für alle $v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, dass

$$\begin{aligned} 0 &= F(v) \\ &= \int_0^\infty \langle f_1, v \rangle_{0,\mathbb{R}^{d-1}} + \langle f_2, \partial_d v \rangle_{0,\mathbb{R}^{d-1}} \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} \langle \tilde{f}_1, v \rangle_{0,\mathbb{R}^{d-1}} + \langle \tilde{f}_2, \partial_d v \rangle_{0,\mathbb{R}^{d-1}} \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} \langle \tilde{f}_1, v \rangle_{0,\mathbb{R}^{d-1}} - \langle \partial_d \tilde{f}_2, v \rangle_{0,\mathbb{R}^{d-1}} \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Also folgt (aus Dichtheit und Norm-Argumenten), dass

$$\tilde{f}_1 - \partial_d \tilde{f}_2 = 0$$

Folglich ist $\partial_d \tilde{f}_2 \in H^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^{d-1}))$, also $f_2 \in H_0^2(\mathbb{R}_{>0}; L^2(\mathbb{R}^{d-1})$. Aber dann folgt für alle $y \in Y(\Omega)$ (Warum?), dass

$$\int_{\mathbb{R}_{>0}} \langle f_2, \partial_d v \rangle \,\mathrm{d}x_d = -\int_{\mathbb{R}_{>0}} \langle \partial_d f_2, v \rangle \,\mathrm{d}x_d$$

und folglich $F = 0$ ein Widerspruch. □

Lemma 3 (Lemma von J.L. Lions)**.** *Statement und Beweis aus [6] Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Gebiet mit regulärem Rand und $v \colon \Omega \to \mathbb{R}$, so dass $v \in H^{-1}(\Omega)$ und $\partial_i v \in H^{-1}(\Omega)$ für alle i, dann folgt $v \in L^2(\Omega)$.*

Beweis. Wir behaupten, dass $X(\Omega) = L^2(\Omega)$ und zeigen dies in mehreren Schritten

1. Die Behauptung stimmt für $\Omega = \mathbb{R}^d$. Dazu bezeichne $\mathcal{F}$ die Fourier-transformation. Dann folgt

$$(1+|\xi|^2)^{-1/2}\mathcal{F}(v) \in L^2(\mathbb{R}^d), \qquad (1+|\xi|^2)^{-1/2}\xi_i\mathcal{F}(v) \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

   und deshalb weiter

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^{-1}(1+\sum_i \xi_i^2)|\mathcal{F}(v)|^2 \,\mathrm{d}\xi$$

   also ist $v \in L^2(\mathbb{R}^d) = L^2(\Omega)$

2. Die Behauptung stimmt für einen Halbraum $\Omega = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_{>0}$. Wir definieren $P\colon \mathcal{D}(\Omega) \subseteq X(\Omega) \to$
   $cD(\Omega) \subseteq X(\mathbb{R}^d)$ Wir setzen (anderer Buchstabe?) für $v \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$Pv(x) = \begin{cases} v(x) & \text{, falls } x_d > 0 \\ a_1 v(x', -x_d) + a_2 v(x', -2x_d) & \text{, sonst} \end{cases}$$

   wobei $a_1 + a_2 = 1$ und $a_1 + a_2/2 = -1$ (Warum?). Wir behaupten nun, dass P auf $\mathcal{D}(\Omega)$ (why is Ω closed?) stetig ist bezüglich $\|\cdot\|_X$. Falls dies war ist, so erhalten wir eine Erweiterung (wie genau) von P auf Ω. Wegen der Dichte von $\mathcal{D}(\Omega)$ nach der Proposition oben (wie genau) folgt $P|_\Omega(v) = v$ für $v \in X(\Omega)$. Dann folgt für $v \in X(\Omega)$, dass $Pv \in X(\mathbb{R}^d)$ und mit dem vorhergehenden, dass $Pv \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Deshalb folgt, dass

$$v = P|_\Omega(v) \in L^2(\Omega)$$

   Es verbleibt die Stetigkeit von P bezüglich $\|\cdot\|_X$ / der Topologien zu zeigen. Dazu reicht es, die Stetigkeit von P bezüglich der Topologie $H^{-1}(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ auf $\mathcal{D}(\Omega)$ und die Stetigkeit von $\partial_i P$ bezüglich der Topologie $H^{-1}(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ auf $\mathcal{D}(\Omega)$ zu zeigen. Es gilt für $i \in \{1, \dots, d-1\}$

$$\begin{aligned} \partial_i Pv(x) &= \begin{cases} \partial_i v & \text{, falls } x_d > 0 \\ a_1 \partial_i v(x', -x_d) + a_2 \partial_i v(x', -2x_d) & \text{, falls } x_d < 0 \end{cases} \\ &= P(\partial_i v(x)) \end{aligned}$$

   sowie

$$\begin{aligned} \partial_d Pv(x) &= \begin{cases} \partial_d v & \text{, falls } x_d > 0 \\ -a_1 \partial_d v(x', -x_d) - 2a_2 \partial_d v(x', -2x_3) & \text{, falls } x_3 < 0 \end{cases} \\ &=: Q(\partial_d v(x)) \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt also, wenn wir die Stetigkeit von $P\colon \mathcal{D}(\Omega) \to X(\mathbb{R}^d)$ mit Topologien $\mathcal{D}(\Omega) \subseteq H^{-1}(\Omega)$ und $X(\mathbb{R}^d) \subseteq H^{-1}(\mathbb{R}^d)$ und $Q\colon \mathcal{D}(\Omega)\dots$ zeigen. Dazu berechnet man für $w \in H^1(\mathbb{R}^d)$

$$
\begin{aligned}
&\langle Pv, w\rangle_{0,\mathbb{R}^d} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}_{>0}} vw \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}_{<0}} a_1 v(x', -x_d)w(x) + a_2 v(x', -2x_d)w(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}_{>0}} vw \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}_{>0}} v(x', x_d)(-a_1)w(x', -x_d) - \frac{a_2}{2} v(x', x_d) w(x', -\frac{x_d}{2})\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}_{>0}} v(x)\left(w(x) + a_1 w(x', -x_d) + \frac{a_2}{2} w(x', -\frac{x_d}{2})\right)\mathrm{d}x \\
&= \langle v, P^\dagger w\rangle_{0,\Omega}
\end{aligned}
$$

Dann ist

$$P^\dagger w(x', 0) = w(x', 0) + a_1 w(x', 0) + \frac{a_2}{2} w(x', 0) = 0$$

wenn wir $a_1 + a_2/2 = -1$ wählen und folglich $P^\dagger w \in H_0^1(\Omega)$. Wir sehen, dass die zu P transponierte Abbildung $P^\dagger\colon H^1(\mathbb{R}^d) \to H_0^1(\Omega)$ stetig ist. Analog schlussfolgern wir für Q.

3. Die Behauptung stimmt generell. Da Ω eine beschränkte Lipschitzberandete Menge ist, gibt es eine endliche Überdeckung U_i von Ω und ψ_i, sodass Ω auf U_i der strikte Hypograph (oder Epigraph) von ψ_i ist für $i \geq 1$ und $U_0 \Subset \Omega$. Ferner gibt es dann eine Zerlegung der Eins bezuüglich U_i, also $\theta_i \in \mathcal{D}(U_i)$ mit $0 \leq \theta_i$, so dass $1 = \sum_i \theta_i$ auf $\overline{\Omega}$. Indem wir θ_0 mit 0 auf $\mathbb{R}^d \setminus U_0$ erweitern, ist $\theta_0 v \in X(\mathbb{R}^d)$. (The rest of the argumentation requires C^1 boundary, but is very incomplete).

□

Kornsche Ungleichung ohne Randbedingungen

Lemma 4 (Globale Approximation, Conti Thrm. 7.6)**.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränkt mit Lipschitz-Rand und $p \in [1, \infty)$, $v \in W^{1,p}(\Omega)$. Dann gibt es eine Folge $v_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $v_i \to v$ in $W^{1,p}(\Omega)$*

Lemma 5 (Kettenregel, Conti Lemma 2.39 - reicht hier nicht aus)**.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $p \in [1, \infty)$, $v \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$*

Lemma 6 (Erweiterungen, Conti Thrm. 7.8)**.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränkt mit Lipschitz-Rand und $p \in [1, \infty)$. Dann existiert eine beschränkte, lineare Erweiterung $E\colon W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ mit $Ev|_\Omega = v$ und $\|\partial_i Ev + \partial_j Ew\|^2_{2,\mathbb{R}^d} \leq c\|\partial_i v + \partial_j w\|^2_{2,\Omega}$.*

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ ist. Seien θ_i und $B_i \coloneqq B_{r_i}$ wie in dem Lemma oben zur Partition der Eins. Setze $i > 0$ fest. Sei ψ, wie in (Conti, 7.1). Man sieht (genauer) mit geometrischen Überlegungen, dass

$$0 < (1 + M^2)^{-1/2}(\psi(x') - x_d) \leq \operatorname{dist}(x, \Omega) \leq \psi(x') - x_d$$

Da Ω Lipschitz ist, gibt es nach Stein (angeblich) ein $f \in C^\infty$, so dass

$$0 < 2(\psi(x') - x_d) \leq f(x) \leq c_i(\psi(x') - x_d)$$

und für Multiindizes α

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq c_\alpha f(x)^{1-\alpha}$$

Wir definieren $\Phi_t \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ für $t \in [1,2]$ durch

$$\Phi_t(x) := \begin{cases} x & \text{, falls } x_d \leq \psi(x') \\ (x', x_d + tf(x)) & \text{, sonst} \end{cases}$$

Sowie ein Gewicht $w \in c^0([1,2])$, so dass

$$\int_1^2 w(t)\,\mathrm{d}t = 1$$
$$\int_1^2 tw(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Nun definieren wir eine Erweiterung

$$\tilde{u}_j(x) := \begin{cases} \int_1^2 w(t)\,(u_j(\Phi_t(x)) + t(\partial_j f(x))u_d(\Phi_t(x)))\,\mathrm{d}t & \text{, falls } x \text{ im Epigraphen von } \psi \text{ ist.} \\ u(x) & \text{, sonst} \end{cases}$$

In Nitsche wird jetzt Stetigkeit gezeigt (nicht Lipschitz-Stetigkeit).

Wir wollen die Lipschitzstetigkeit von Φ zeigen. Seien dazu $x, y \in \mathbb{R}^d$. Falls beide auf im Epigraphen oder beide im Supergraphen von Ψ sind, sind wir fertig. Andernfalls nehmen wir $x_n < \psi(x')$ und $\psi(y') < y_n$ an. Sei z der zu x nächste Punkt auf der Strecke $[x,y]$ mit $z_n = \psi(z)$. Dann gehört z sowohl zum Epigraphen, als auch zum Supergraphen von ψ und wir erhalten

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq |\Phi(x) - \Phi(z)| + |\Phi(z) - \Phi(y)| \leq L|x-z| + L|z-y| = |x-y|$$

und die Lipschitzstetigkeit folgt. Da B_i beschränkt ist, (und noch etwas) folgt damit $\Phi \in W^{1,\infty}(B_i)$. Nun setzen wir

$$\tilde{v}(x) := \theta_i(x)v(\Phi(x))$$

Wir erhalten (warum genau?)

$$\varepsilon_{jk} = \int_1^2 w(t)\,\big(\varepsilon_{jk}(u \circ \Phi_t) + t(\partial_j f)\varepsilon_{kd}(u \circ \Phi_t) + t(\partial_k f)\varepsilon_{jd}(u \circ \Phi_t) + t^2(\partial_j f)(\partial_k f)\varepsilon_{dd}(u \circ \Phi_t) + t(\partial_j\partial_k f)u_d \circ$$

Wegen Taylor gilt

$$u_d \circ \Phi_t = u_d \circ \Phi_1 + f \int_1^t (\partial_d u) \circ \Phi_s\,\mathrm{d}s$$

Dies führt dann zu (warum?)

$$
\begin{aligned}
\int_1^2 tw(t)u_d \circ \Phi_t \,\mathrm{d}t &= \int_1^2 tw(t) \left(u_d \circ \Phi_1 + f \int_1^t (\partial_d u) \circ \Phi_s \,\mathrm{d}s \right) \,\mathrm{d}t \\
&= \int_1^2 tw(t)u_d \circ \Phi_1 + f \int_1^2 tw(t) \int_1^t (\partial_d u) \circ \Phi_s \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}t \\
&= f \int_1^2 tw(t) \int_1^t (\partial_d u) \circ \Phi_s \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}t \\
&= f \int_1^2 \varepsilon_{dd}(u \circ \Phi_s) \int_s^2 tw(t) \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

Sei x' fest. Nun wählen wir eine Transformation, so dass $\psi(x') = 0$ (Wo wird das verwendet?). Wir erhalten

$$
\int_1^2 |\varepsilon_{jk}(u(\Phi_t(x)))| \,\mathrm{d}t = \int_1^2 |\varepsilon_{jk}(u(x_d + tf(x_d)))| \,\mathrm{d}t \quad = \int_{x_d+f(x_d)}^{x_d+2f(x_d)} f^{-1}(x_d) |\varepsilon_{jk}(u(s))| \,\mathrm{d}s
$$

und weiter

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(x_d) &\leq \frac{1}{2} |x_d|^{-1} \\
x_d + f(x_d) &\geq |x_d| \\
x_d + 2f(x_d) &\leq 2c_i |x_d|
\end{aligned}
$$

Wir erhalten mit $c = 2c_i$, dass

$$
2 \int_1^2 |\varepsilon_{jk}(u(\Phi_t(x)))| \,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{|x_d|} \int_{|x_d|}^{c|x_d|} |\varepsilon_{jk}(u(s))| \,\mathrm{d}s
$$

und weiter mit der Schwarzschen Ungleichung

$$
4 \int_1^2 |\varepsilon_{jk}(u(\Phi_t(x)))|^2 \,\mathrm{d}t \leq \frac{2}{3} c^{3/2} |x_d|^{-1/2} \int_{|x_d|}^{c|x_d|} s^{-1/2} |\varepsilon_{jk}(u(s))|^2 \,\mathrm{d}s
$$

Es folgt

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\psi(x')} \int_1^2 |\varepsilon_{jk}(u(\Phi_t(x)))|^2 \,\mathrm{d}t &\leq c \int_{-\infty}^{\psi(x')} s^{-1/2} |\varepsilon_{jk}(u(s))|^2 \int_{c^{-1}s}^{s} t^{-1/2} \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}s \\
&\leq c \int_{\psi(x')}^{\infty} |\varepsilon_{jk}(u(s))|^2 \,\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

Nach der Kettenregel (zitieren) folgt $\tilde{v} \in W^{1,p}(B_i)$ mit (genauer)

$$
\nabla \tilde{v} = (\nabla v \circ \Phi) \nabla \Phi
$$

Folglich ist

$$|\nabla \tilde{v}|(x) \leq |\nabla \Phi|_{0,\infty,B_i} |\nabla v(\Phi(x))| \leq c_i |\nabla v|(\Phi(x))$$

Wir mit dem Transformationssatz (Frage: Was passiert mit dem θ_i?, Recap Transformationssatz)

$$\begin{aligned}
\int_{B_i} |\nabla \tilde{v}|^p + |\tilde{v}|^p \,\mathrm{d}x &\leq \int_{B_i} c_i |\nabla v(\Phi(x))|^p + |v(\Phi(x))|^p \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{B_i \cap \Omega} (c_i |\nabla v(x)|^p + |v(x)|^p) \,|\det(\nabla \Phi(x))| \,\mathrm{d}x \\
&\leq C_i \int_{B_i \cap \Omega} |\nabla v|^p + |v|^p \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

dies alles gilt analog für ein $w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Wir berechnen nun konkret für $x_d \leq \psi(x')$ oder $l > d$

$$\partial_j \Phi_l(x) = \partial_j x_l = \delta_{jl}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
|\partial_j \tilde{v}(x) + \partial_k \tilde{w}(x)| &= |\sum_l \partial_l v(\Phi(x)) \partial_j \Phi_l(x) + \sum_l \partial_l w(\Phi(x)) \partial_k \Phi_l(x)| \\
&= |(\partial_j v)(\Phi(x)) + (\partial_k w)(\Phi(x))|
\end{aligned}$$

Falls dagegen $x_d > \psi(x')$, so folgt

$$\partial_j \Phi_d(x) = \partial_j (2\psi(x') - x_d)$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
&|\partial_j \tilde{v}(x) + \partial_k \tilde{w}(x)| \\
&= |\sum_l \partial_l v(\Phi(x)) \partial_j \Phi_l(x) + \sum_l \partial_l w(\Phi(x)) \partial_k \Phi_l(x)| \\
&= |(\partial_j v)(\Phi(x)) + (\partial_d v)(\Phi(x)) \partial_j (2\psi(x') - x_d) + (\partial_k w)(\Phi(x)) + (\partial_d w)(\Phi(x)) \partial_k (2\psi(x') - x_d)| \\
&\leq |(\partial_j v)(\Phi(x)) + (\partial_k w)(\Phi(x))| + |(\partial_d v)(\Phi(x)) \partial_j (2\psi(x') - x_d) + (\partial_d w)(\Phi(x)) \partial_k (2\psi(x') - x_d)| \\
&\leq |(\partial_j v)(\Phi(x)) + (\partial_k w)(\Phi(x))| + (2|\psi|_{W^{1,\infty}(\Omega)} + 1)|(\partial_d v)(\Phi(x)) + (\partial_d w)(\Phi(x))|
\end{aligned}$$

Also erhalten wir insgesamt mit dem Transformationssatz

$$\int_{B_i} |\partial_j \tilde{v}(x) + \partial_k \tilde{w}(x)|^p \,\mathrm{d}x \leq \int_{B_i} |\partial_j v(x) + \partial_k w(x)|^p + c_i \,\mathrm{d}x$$

Indem wir über i summieren (ausführen) erhalten wir einen beschränkten Erweiterungsoperator $\tilde{E} \colon W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\tilde{\Omega})$, wobei $\tilde{\Omega} := \bigcup_i B_i$, so dass die behaupteten

Eigenschaften erfüllt sind. Nun wählen wir eine Abschneidefunktion $\tilde{\theta} \in C_c^\infty(\Omega; [0,1])$ mit $\theta = 1$ auf Ω und setzen

$$(Ev)(x) \coloneqq \tilde{\theta}(x)(\tilde{E}v)(x)$$

Dann ist $Ev \in W_0^{1,p}(\tilde{\Omega} \subseteq W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ und nach der Produktregel

$$\nabla(Ev) = \tilde{\theta}\nabla(\tilde{E}v) + (\tilde{E}v) \otimes \nabla\tilde{\theta}$$

also folgt

$$\|\nabla Eu\|_p \leq \|\nabla\tilde{E}v\|_p + \|\tilde{E}v\|_p\|\nabla\tilde{\theta}\|_\infty$$

womit die Behauptung folgt (wirklich?). $\square$

Wir setzen

$$K(\Omega;\mathbb{R}^d) \coloneqq \{v \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^d) \colon \varepsilon(v) \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^d) \text{ im distributionellen Sinne}\}$$

Dabei verstehen wir unter $\varepsilon_{ij}(v) \in L^2(\Omega)$ im distributionellen Sinne, dass für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle \varepsilon_{ij}(v), \varphi\rangle_{0,\Omega} = -\frac{1}{2}\left(\langle v_i, \partial_j\varphi\rangle_{0,\Omega} + \langle v_j, \partial_i\varphi\rangle_{0,\Omega}\right)$$

Wir definieren nun für $v \in K(\Omega;\mathbb{R}^d)$ die Norm

$$\|v\|_K \coloneqq \left(|v|^2_{0,\Omega} + |\varepsilon(v)|^2_{0,\Omega}\right)^{1/2}$$

$K(\Omega;\mathbb{R}^d)$ wird versehen mit der Norm $\|\cdot\|_K$ zu einem Hilbert Raum. Wir behaupten, dass

Proposition 7. *Es gilt für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, zusammenhängend und mit C^1 Rand, dass*

$$K(\Omega;\mathbb{R}^d) = H^1(\Omega,\mathbb{R}^d)$$

Beweis. Es folgt aus $v \in K(\Omega;\mathbb{R}^d)$, dass $\varepsilon_{ij}(v) \in L^2(\Omega)$ und folglich $\partial_k\varepsilon_{ij}(v) \in H^{-1}(\Omega)$. Nun erhält man

$$\partial_j\partial_k v_i = \partial_j\varepsilon_{ik}(v) + \partial_k\varepsilon_{ij}(v) - \partial_i\varepsilon_{jk}(v) \in H^{-1}(\Omega)$$

Es folgt dann mit Lemma 3 (Lemma von Lions), dass folglich $\partial_k v_i \in L^2(\Omega)$, also ist $v \in H^1(\Omega,\mathbb{R}^d)$ und es folgt $K(\Omega;\mathbb{R}^d) \subseteq H^1(\Omega,\mathbb{R}^d)$. □

Wir zitieren nun ein Korollar aus Werner (Funktionalanalysis, 2011) einen Korollar vom Satz der offenen Abbildungen (Banach-Steinhaus)

Proposition 8 (Korollar IV.3.5, Werner)**.** *Sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf dem Vektorraum V, die beide V zu einem Banachraum machen und gibt es ein $c > 0$, so dass für alle $v \in V$*

$$\|v\|_1 \leq c\|v\|_2$$

So sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent.

Da sowohl $\|\cdot\|_K$, als auch $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ $K(\Omega;\mathbb{R}^d) = H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$ zu einem Banachraum machen und gilt

$$\|v\|_K = \left(|v|^2_{0,\Omega} + |\varepsilon(v)|^2_{0,\Omega}\right)^{1/2} \leq |v|_{0,\Omega} + \frac{1}{2}\left(|\nabla v|_{0,\Omega} + |\nabla v^\top|_{0,\Omega}\right) = \|v\|_{1,\Omega}$$

folgt aus der vorausgehenden Proposition, dass $\|\cdot\|_K$ und $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ äquivalent sind, also insbesondere

Lemma 9 (Kornsche Ungleichung ohne Randbedingungen)**.** *(nach [5] bewiesen für d=3) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Gebiet, dann gibt es ein $c_K > 0$, so dass für alle $v \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$ gilt*

$$\|v\|_{1,\Omega} \leq c_K\|v\|_K$$

Ferner ist $|\varepsilon(\cdot)|_{0,\Omega}$ convex und Gateaux-differenzierbar, also schwach lower semicontinuous (nach [7])

Eine Charakterisierung von Starrkörperbewegungen

TODO: auf $d \leq 3$ ausweiten

Kornsche Ungleichung mit Randbedingungen

3 Implementierung

Diskretisiertes Problem

Das diskrete Problem lautet dann: Finde $u_h \in \mathcal{S}_h$, so dass

$$\begin{aligned} a(v_h, u_h) &= b(v_h) && \text{, für alle } v_h \in \mathcal{S}_h \text{ mit } v_h = 0 \text{ auf } \Gamma_D \\ u_h &= w_h && \text{, auf } \Gamma_D \end{aligned}$$

Wir schreiben $u_h = \sum_i \hat{u}_i \phi_i$ und $v_h = \sum_j \hat{v}_j \phi_j$ und können die rechte Seite umschreiben zu

$$a(v_h, u_h) = a(\sum_j \hat{v}_j \phi_j, \sum_i \hat{u}_i \phi_i) = \sum_{i,j} \underbrace{a(\phi_j, \phi_i)}_{=:\hat{A}_{ji}} \hat{u}_i \hat{v}_j = \sum_{i,j} \hat{A}_{ji} \hat{u}_i \hat{v}_j = \hat{v}^\top \hat{A} \hat{u}$$

mit Steifheits-Matrix $\hat{A}_{ij} = a(\phi_j, \phi_i)$. und die linke Seite lautet

$$b(v_h) = b(\sum_j \hat{v}_j \phi_j) = \sum \underbrace{b(\phi_j)}_{=:\hat{b}_j} \hat{v}_j = \hat{v}^\top \hat{b}$$

mit Load-Vektor $\hat{b}_i = b(\phi_i)$. Sind $x^{(i_1)}, \dots, x^{(i_k)} \in \mathcal{K}_D$ die Dirichlet-Knoten, so erhalten wir für die Randbedingung

$$\hat{u}\big|_{\mathcal{K}_D} := \begin{bmatrix} u_{(d-1)i_1+1} \\ \vdots \\ u_{di_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_h(x^{(i_1)}) \\ \vdots \\ w_h(x^{(i_k)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_h(x^{(i_1)}) \\ \vdots \\ u_h(x^{(i_k)}) \end{bmatrix} =: \hat{w} \in \mathbb{R}^{kd}$$

Damit lautet unser neues Problem: Finde $\hat{u} = (\hat{u}_i)_i \in \mathbb{R}^{nd}$, so dass gilt

$$\begin{aligned} \hat{v}^\top \hat{A} \hat{u} &= \hat{v}^\top \hat{b} && \text{, für alle } \hat{v} = (\hat{v}_i)_i \in \mathbb{R}^{nd} \text{ mit } \hat{v}\big|_{\mathcal{K}_D} = 0 \\ \hat{u}\big|_{\mathcal{K}_D} &= \hat{w} \end{aligned}$$

Es genügt, ein $\hat{u} \in \mathbb{R}^{nd}$ zu finden (warum existiert so etwas? dies ist nicht klar), so dass

$$\begin{aligned} \hat{A}\hat{u} &= \hat{b} \\ \hat{u}\big|_{\mathcal{K}_D} &= \hat{w} \end{aligned}$$

Weil wir das Implementiert haben betrachten wir das allgemeinere System

$$\begin{aligned} \hat{A}\hat{u} &= \hat{b} \\ \hat{u}\big|_{\mathcal{K}_D} &= \hat{w} \end{aligned}$$

Wir lösen dies mit Lagrange-Multiplikatoren als System

$$\begin{bmatrix} \hat{A} & B^\top \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{w} \end{bmatrix}$$

Wir definieren die Lagrangefunktion $L\colon \mathbb{R}^{nd} \times \mathbb{R}^{ld} \to \mathbb{R}$

$$L(\hat{v}, \lambda) := W(\hat{v}) + \lambda^\top (B\hat{v} - \hat{w}) = \hat{v}^\top \hat{A}\hat{v} - \hat{b}^\top \hat{v} + \lambda^\top (B\hat{v} - \hat{w})$$

Wir rechnen

$$\begin{aligned} \nabla L(\hat{v}, \lambda) &= \begin{bmatrix} \nabla_{\hat{v}} L(\hat{v}, \lambda) \\ \nabla_\lambda L(\hat{v}, \lambda) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{A}\hat{v} - \hat{b} + B^\top \lambda \\ B\hat{v} - \hat{w} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{A}\hat{v} + B^\top \lambda \\ B\hat{v} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{w} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{A} & B^\top \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v} \\ \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{w} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nun ist $\nabla L = 0$ ist ein notwendiges Kriterium (Satz 2.36 Geiger, Kanzow) dafür, dass ein Minimum des Optimierungsproblems vorliegt. Also besitzt das System

$$\begin{bmatrix} \hat{A} & B^\top \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{w} \end{bmatrix}$$

eine Lösung. Weiterhin ist dies aufgrund der Konvexität ein hinreichendes Optimalitätskriterium (Satz 2.46, Geiger, Kanzow) und somit ist die Lösung des Systems eindeutig. Kürzer: Korollar 2.47 Geiger-Kanzow.

Das diskrete Problem lautet dann: Finde $u_h \in \mathcal{S}_h$, so dass $Mu_h = w_h$ auf Γ_D und für alle $v_h \in \mathcal{S}_h$ mit $Mv_h = 0$ auf Γ_D gilt

$$a(v_h, u_h) = b(v_h)$$

Implementierung des Hooke-Tensors

(in Braess:)

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & & & \\ \nu & 1-\nu & \nu & & & \\ \nu & \nu & 1-\nu & & & \\ & & & 1-2\nu & & \\ & & & & 1-2\nu & \\ & & & & & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix}$$

Berechnung der Steifheitsmatrix

TODO: Vereinheitlichung der Bezeichnungen φ_i und $\varphi_{x^{(i)}}$

Berechnung des Load-Vektors

Randbedingungen

4 A posteriori Fehlerschätzer

Residuale Schätzer

Wir folgen im folgenden im wesentlichen [3, 9]

Im folgenden betrachten wir allgemeine lineare elliptische Probleme in einer Dimension Wir haben den Operator $\mathcal{A}$ einer gleichmäßig elliptischen Differenzialgleichung gegeben durch

$$\mathcal{A}v = \sum_{i,j} \partial_i (A_{ij} \partial_j v) = \operatorname{Div} A \nabla v$$

mit $A_{ij} = A_{ji}$. So dass

$$\lambda_{min} |\eta|^2 \leq A_{ij} \eta_i \eta_j \leq \lambda_{max} |\eta|^2$$

Wir definieren das Residuum

$$R(v) \coloneqq f + \operatorname{Div}(A \nabla v)$$

für $E \subseteq \Gamma_D$ ist

$$\begin{aligned}
\int_E ((\sigma(e) \cdot n_T) \cdot z \, \mathrm{d}s &= \int_E ((\sigma(\underbrace{u - u_h}_{=w-w=0}) \cdot z) \cdot z \, \mathrm{d}s \\
&= \int_E 0 \cdot z) \cdot z \, \mathrm{d}s \\
&= \int_E (R_E \cdot z) \, \mathrm{d}s \\
&= \langle R_E, z \rangle_{0,E}
\end{aligned}$$

für $E \subseteq \Gamma_N$ ist

$$\begin{aligned}
\langle \sigma(e) \cdot n_T, z \rangle_{0,E} &= \langle \sigma(u - u_h) \cdot n, z \rangle_{0,E} \\
&= \langle g - \sigma(u_h) \cdot n, z \rangle_{0,E} \\
&= \langle R_E, z \rangle_{0,E}
\end{aligned}$$

E kommt als Integrationsgebiet genau zweimal in der Summe vor und es gilt

$$\langle \sigma(e)|_{T_1} \cdot n_1, z \rangle_{0,E} + \langle \sigma(e)|_{T_2} \cdot n_2 \rangle_{0,E} =$$

Für den zweiten Term gilt

$$
\begin{aligned}
-\sum_T \int_T (\operatorname{Div} \sigma(e)) \cdot z \, \mathrm{d}x &= -\sum_T \langle \operatorname{Div} \sigma(e), z \rangle_{0,T} \\
&= -\sum_T \langle \operatorname{Div} \sigma(u - u_h), z \rangle_{0,T} \\
&= -\sum_T \langle \operatorname{Div} \sigma(u), z \rangle_{0,T} + \sum_T \langle \operatorname{Div} \sigma(u_h), z \rangle_{0,T} \\
&= \sum_T \langle f, z \rangle_{0,T} + \sum_T \langle \operatorname{Div} \sigma(u_h), z \rangle_{0,T} \\
&= \sum_T \langle f + \operatorname{Div} \sigma(u_h), z \rangle_{0,T} \\
&= \sum_T \langle R_T, z \rangle_{0,T}
\end{aligned}
$$

Obere Abschätzung des Fehlers

Obere Abschätzung des Schätzers

die Umgebung ω_T vom Dreieck T durch

$$\omega_T := \bigcup \{T' \in \mathcal{T} | T \text{ und } T' \text{ haben mindestens eine Kante gemeinsam } \}$$

Satz 10. *(nach [3] Sei $\mathcal{T}$ eine quasiuniforme Triangluierung mit Regularitätsparameter κ. Dann gibt es ein von Ω und κ abhängiges $c > 0$, so dass für alle $T \in \mathcal{T}$ gilt die obere Abschätzung*

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_{T,R}^2 \right)^{1/2}$$

und die untere Abschätzung

$$\eta_{T,R} \leq c \left(\|_{\|} u - u_{h}{}_{1,\omega_T}^2 + \sum_{T' \subseteq \omega_T} h_T^2 \|f - P_h f\|_{0,T}^2 \right)^{1/2}$$

Beweis. (Zur oberen Abschätzung) Es gilt für $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\langle \nabla (u - u_h), \nabla v \rangle_{0,\Omega} =$$

□

lokales Neumann-Problem

TODO: ist folgendes legitim (aus Braess): Man definiert σ_h an den Knotenpunkten als gewichtetes Mittel von ∂u_h an den angrenzenden Dreiecken und dann durch lineare Interpolation auf den Dreiecken. Dann liefert $|\sigma_h - \partial u_h|$ einen Fehlerschätzer (die Wahl von σ als Symbol) ist ein wenig unglücklich

18

Hierarchische Schätzer

Literatur

[1] Alberty, J., C. Carstensen, S. A. Funken, and R. Klose. "Matlab Implementation of the Finite Element Method in Elasticity." *Computing 69*, no. 3 (2002): 239-263.

[2] Bangerth, Wolfgang, and Rolf Rannacher. *Adaptive Finite Element Methods for Differential Equations.* Basel [u.a.]: Birkhäuser, 2003. S.130f.

[3] Braess, Dietrich. *Finite Elemente: Theorie, Schnelle Löser Und Anwendungen in Der Elastizitätstheorie.* 4., überarb. und erw. Aufl. Berlin [u.a.]: Springer, 2007.

[4] Ciarlet, Philippe G. *Studies in Mathematics and Its Applications. Mathematical Elasticity. 1, Three-dimensional Elasticity.* Amsterdam [u.a.]: North-Holland, 1988.

[5] Ciarlet, Philippe G. *Studies in Mathematics and Its Applications. Mathematical Elasticity. 2, Theory of Plates.* Amsterdam [u.a.]: North-Holland, 1997.

[6] Lions, Jacques Louis, and Georges Duvaut. *Inequalities in Mechanics and Physics.* Berlin, Heidelberg: Springer, 1976.

[7] Kikuchi, Noboru, and John Tinsley Oden. *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods.* Philadelphia: SIAM, 1988.

[8] Lifshitz, Evgenii Mikhailovich, and Lev Davidovich Landau. *Course of Theoretical Physics.* Pergamon, 1959.

[9] Neittaanmäki, Pekka, and Sergey R. Repin. *Reliable Methods for Computer Simulation: Error Control and Posteriori Estimates.* Oxford: Elsevier Science & Technology, 2004.