Adaptive Finite Elemente für Lineare Elastizität

Theo Koppenhöfer

4. August 2022

Inhaltsverzeichnis

Ein einführendes Beispiel

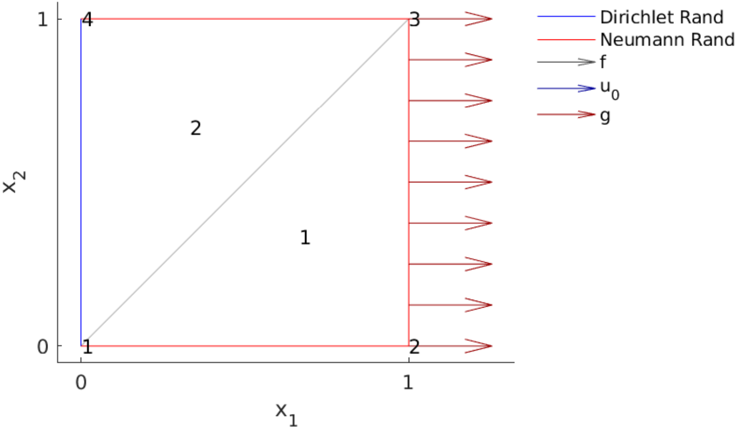


Abb.: Anfangskonfiguration

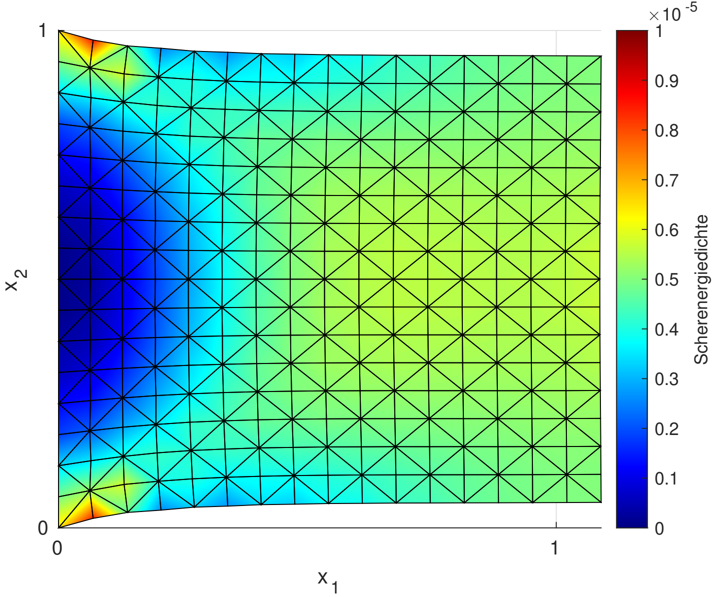


Abb.: Numerische Lösung auf dem Gebiet.

Fragen, die man sich stellen kann

- Wie kann ich den Fehler der berechneten Lösung abschätzen, ohne die genaue Lösung zu kennen? $\rightarrow$ Fehlerschätzer
- Wie kann ich die Kenntnis über diesen Fehler gewinnbringend verwenden? $\rightarrow$ adaptive Gitterverfeinerung

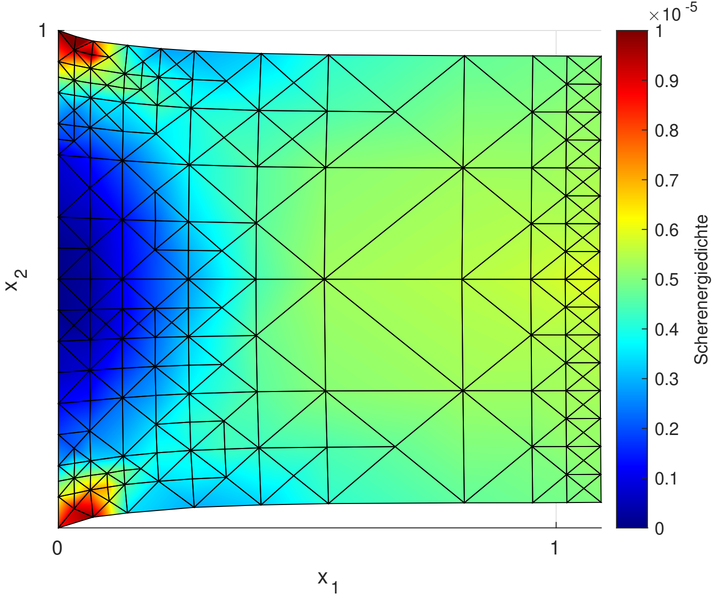


Abb.: Lösung mit adaptiven Methoden

Formulierung des kontinuierlichen Problems

Wir nehmen an, der Körper nimmt in Referenzkonfiguration das Gebiet $\overline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^d$ ein. Wir bezeichnen

- Deformation: Eine Abbildung $\chi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ mit $\det \nabla \chi > 0$
- Verschiebung: Eine Abbildung u, gegeben durch $\chi = \mathrm{Id} + u$

Die Menge an zulässigen Verschiebungen bezeichnen wir mit V.

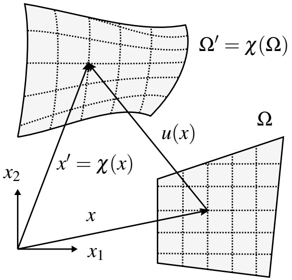


Abb.: Eine Deformation in 2D

Vorraussetzung des Models: Der deformierte Körper nimmt den Raum Ω ein und befindet sich im Kräftegleichgewicht. Man definiert

- Volumenkräfte: Eine Abbildung $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$.
- Oberflächenkräfte: Eine Abbildung $\sigma\colon \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$ (Cauchyscher Spannungstensor). σ_{ij} bezeichnet die Kraft auf die Fläche j in Richtung i wirkt. Kraft, die auf Oberfläche in Richtung n wirkt ist

$$\sigma n = \sum_j \sigma_{ij} n_j e_i \,.$$

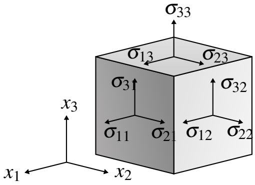


Abb.: Darstellung eines Spannungstensors in 3D.

Randbedingungen

Wir bezeichnen $\Gamma := \partial\Omega$ als den Rand des Gebietes, $\Gamma_D \subseteq \Gamma$ als den Dirichlet- und $\Gamma_N \subseteq \Gamma$ als den Neumann-Rand. Damit erhalten wir Randbedingungen an die Lösung u des Problems

$$\begin{aligned} \sigma n &= g && \text{auf } \Gamma_N\,, \\ u &= w && \text{auf } \Gamma_D\,. \end{aligned}$$

mit $w\colon \Gamma_N \to \mathbb{R}^d$. Die Dirichlet-Randbedingung lässt sich verallgemeinern zu gleitenden Randbedingungen

$$Mu = w \qquad \text{auf } \Gamma$$

mit $M\colon \Gamma \to \mathbb{R}^{d\times d}$.

Formulierung als Kräftegleichgewicht

Das Kräftegleichgewicht liefert die Formulierung: Finde eine Deformation u, so dass

Oberflächenkräfte, die über die Oberfläche $\partial\omega$ auf ω wirken

Volumenkräfte, die auf ω wirken

$$
\begin{aligned}
-\int_{\partial\omega} \sigma n \, \mathrm{d}s = \int_{\omega} f \, \mathrm{d}x \qquad & \text{für alle } \omega \subseteq \Omega \text{ regulär genug}, \\
\sigma n = g \qquad & \text{auf } \Gamma_N, \\
Mu = w \qquad & \text{auf } \Gamma,
\end{aligned}
$$

wobei σ von u abhängt und f, g als von u unabhängig angenommen werden (tote Lasten).

Differenzielle Formulierung

Der Satz von Gauss liefert

$$-\operatorname{Div}\sigma := -\sum_j \partial_j \sigma_{ij} e_i = f$$

Jetzt haben wir die differenzielle Formulierung

$$\begin{aligned} -\operatorname{Div}\sigma &= f && \text{auf } \Omega\,, \\ \sigma n &= g && \text{auf } \Gamma_N\,, \\ Mu &= w && \text{auf } \Gamma\,. \end{aligned}$$

Materialgesetze

Das Ziel ist es einen Ausdruck für σ in Abhängigkeit von u zu erhalten. Wir definieren den linearisierten Verzerrungstensor

$$\varepsilon := \frac{1}{2}\left(\nabla u + \nabla u^\top\right).$$

Für ein linear-elastisches Material ist

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l} C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

mit Hooke-Tensor $C\colon \Omega \to \bigotimes_{i=1}^{4} \mathbb{R}^d$.

Für St. Venant-Kirchhoff-Materialen gilt

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

mit Lamé-Koeffizienten λ und μ. Es folgt

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l} C_{ijkl}\varepsilon_{kl} = \lambda\,\mathrm{Tr}(\varepsilon)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}\,.$$

Variationelle Formulierung

Wir setzen nun $V := H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$ als die Menge der möglichen Verschiebungen. Außerdem definieren wir

$$V^0 := \{v \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^d) \colon Mv = 0 \text{ auf } \Gamma\}\,.$$

Wir definieren

$$a(u,v) := \int_\Omega \sigma(u) : \varepsilon(v)\,\mathrm{d}x := \int_\Omega \sum_{i,j} \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)\,\mathrm{d}x$$

sowie

$$\ell(v) := \langle f, v\rangle_{0,\Omega} + \langle g, v\rangle_{0,\Gamma_N} = \int_\Omega f \cdot v\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_N} g \cdot v\,\mathrm{d}s\,.$$

Man kann aus der differenziellen Formulierungen eine variationelle Formulierung (virtuelle Arbeit) herleiten: Finde $u \in V$, so dass

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \ell(v) && \text{für alle } v \in V^0, \\ Mu &= w && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Energiebetrachtung

Wir erhalten für die potenzielle Energie des Zustandes v

$$W(v) \coloneqq \frac{1}{2} a(v,v) - \ell(v) \,.$$

Man kann eine Formulierung als Optimierungsproblem herleiten:
Finde $u \in V$, so dass

$$\begin{aligned} u \text{ minimiert} \quad & W = \frac{1}{2} a(\cdot,\cdot) - \ell \,, \\ \text{unter der Nebenbedingung} \quad & Mu\big|_{\Gamma} = w\big|_{\Gamma} \,. \end{aligned}$$

Existenz und Eindeutigkeit des kontinuierlichen Problems

Das folgende Resultat findet sich in [4, S.288].

Satz (Lax-Milgram Lemma)

Seien V^0 ein Banach-Raum, $\ell\colon V^0 \to \mathbb{R}$ eine stetige lineare Form und $a\colon V^0 \times V^0 \to \mathbb{R}$ eine stetige symmetrische elliptische bilineare Form. Dann hat das Problem $u \in V^0$ zu finden, so dass

$$a(u,v) = \ell(v)$$

für alle $v \in V^0$, eine eindeutige Lösung. Dieses ist dann auch eindeutige Lösung des Problems $u \in V^0$ zu finden, so dass u das Funktional

$$W = \frac{1}{2}a(\cdot,\cdot) - \ell$$

minimiert.

Existenz und Eindeutigkeit des inhomogenen Problems

Folgerung

Existiert $u_\Gamma \in V$, so dass $Mu_\Gamma = w$ und erfüllen a und ℓ die Vorraussetzung des Lax-Milgram-Lemmas auf V^0, dann besitzt unser Problem eine Eindeutige Lösung.

Beweis.

Es ist $u \in V$ genau dann eine Lösung von

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \ell(v) && \text{für alle } v \in V^0, \\ Mu &= w && \text{auf } \Gamma, \end{aligned}$$

wenn $u - u_\Gamma \in V^0$ eine Lösung ist von

$$a(u-u_\Gamma, v) = \ell(v) - a(u_\Gamma, v) \qquad \text{für alle } v \in V^0.$$

$\square$

Es ist recht einfach zu zeigen, dass

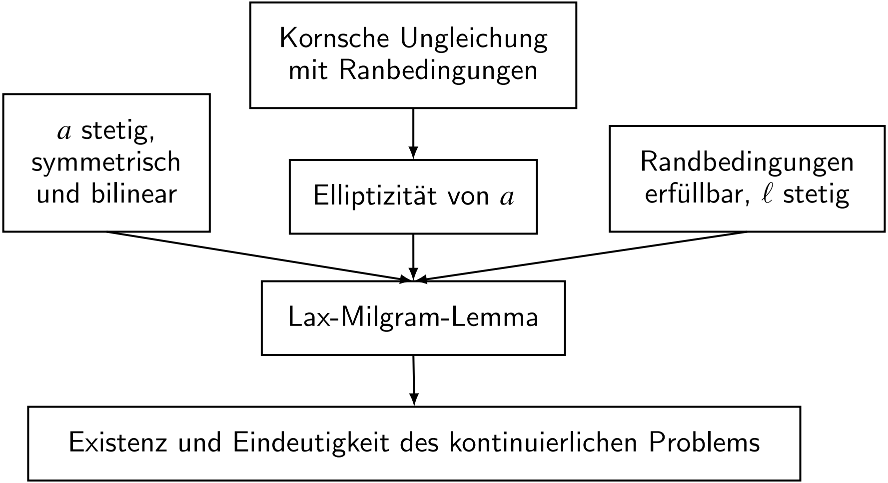
- a ist bilinear und symmetrisch.
- Stetigkeit: Es gibt ein $c_A > 0$, so dass für alle $v_1, v_2 \in V$

$$a(v_1, v_2) \leq c_A \|v_1\| \|v_2\| .$$

Es ist nicht sehr einfach zu zeigen, dass

- Elliptizität: Es gibt ein $c_a > 0$, so dass für alle $v \in V$

$$a(v, v) \geq c_a \|v\|^2 .$$


Kornsche Ungleichung mit Ranbedingungen
a stetig, symmetrisch und bilinear
Elliptizität von a
Randbedingungen erfüllbar, ℓ stetig
Lax-Milgram-Lemma
Existenz und Eindeutigkeit des kontinuierlichen Problems

Kornsche Ungleichungen

Man definiert für $v \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$ die Norm

$$\|v\|_{K,\Omega}^2 := \|v\|_{0,\Omega}^2 + \|\varepsilon(v)\|_{0,\Omega}^2 .$$

Da $\varepsilon\colon H^1(\Omega;\mathbb{R}^d) \to H^0(\Omega;\mathbb{R}^d)$ linear ist, folgt 1-Homogenität und die Dreiecksungleichung. Die Positivdefinitheit auf dem Ganzraum folgt aus folgendem Resultat in [2, S.292]:

Lemma (Kornsche Ungleichung ohne Randbedingungen auf dem Ganzraum)

Sei $\Omega = \mathbb{R}^d$ mit $v \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

$$|v|_{1,\Omega} \leq \sqrt{2}\|\varepsilon(v)\|_{0,\Omega} .$$

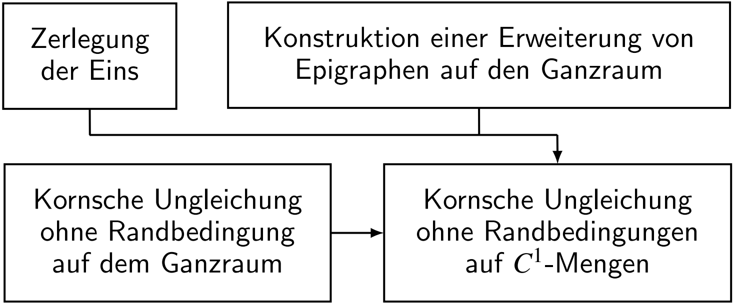
Lemma (Kornsche Ungleichung ohne Randbedingungen auf C^1-Mengen)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ eine C^1-Menge, dann gibt es ein $c_{K1} > 0$, so dass für alle $v \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\|v\|_{1,\Omega} \leq c_{K1} \|v\|_{K,\Omega} .$$

Beweis.

Siehe [7] für Details.



$\square$

Wir bezeichnen eine offene zusammenhängende Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ als Gebiet. Ein Gebiet mit C^1-Rand bezeichnen wir als C^1-Gebiet.

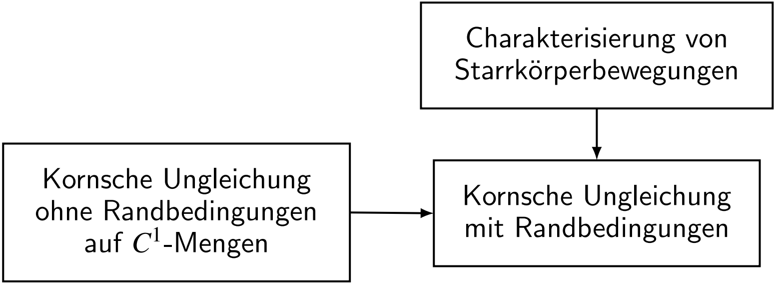
Satz (Kornsche Ungleichung mit Randbedingungen)

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ein C^1-Gebiet und $S \subseteq \Gamma$ mit positivem Flächenmaß. Dann gibt es $c_{K2} > 0$, so dass für alle $v \in H_S^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$ gilt

$$\|v\|_{1,\Omega} \leq c_{K2} \|\varepsilon(v)\|_{0,\Omega}\,.$$

Beweis.

Siehe [4, S.294f.] und [2, S.293] für Details.



□

Triangulierungen

Für eine reguläre Triangulierung $\mathscr{T}$ von Ω definieren wir

- $\mathscr{E}$ ist die Menge der Kanten
- $\mathscr{E}_\Gamma = \mathscr{E}_D \cup \mathscr{E}_N$ ist die Menge der Rand-Kanten
- $\mathscr{K} = \{x^i\}_{i=1}^n$ ist die Menge der Knoten
- $\mathscr{K}_\Gamma = \mathscr{K}_D \cup \mathscr{K}_N = \{x^{i_j}\}_{j=1}^l$ ist die Menge der Rand-Knoten

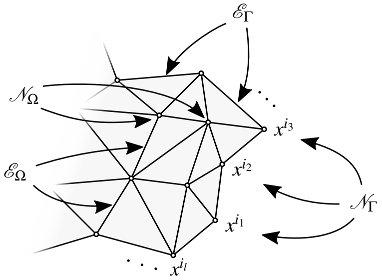


Abb.: Beispiel einer Triangulierung

Nodale Basis

Bezeichne φ_i die nodale Basis in einer Dimension. Wir definieren die d-dimensionale nodale Basis

$$\left[\phi_1 \cdots \phi_{dn}\right] = \left[\varphi_1 e_1 \cdots \varphi_1 e_d \quad \cdots \quad \varphi_n e_1 \cdots \varphi_n e_d\right]$$

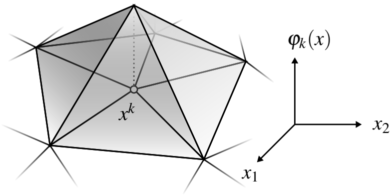


Abb.: Ein Element einer nodalen Basis in 2D

Diskrete Formulierung

Wir diskretisieren

$$
\begin{aligned}
V &= H^1(\Omega;\mathbb{R}^d) && \longrightarrow V_h := \mathrm{Span}\{\phi_i\}_i \subseteq V\\
V^0 &= \{v \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)\colon Mv = 0 \text{ auf } \Gamma\} && \longrightarrow V_h^0 := V_h \cap V^0
\end{aligned}
$$

und erhalten die diskrete Formulierung: Finde $u_h \in V_h$, so dass

$$
\begin{aligned}
a(u_h, v_h) &= \ell(v_h) && \text{für alle } v_h \in V_h^0,\\
Mu_h &= w && \text{auf } \Gamma.
\end{aligned}
$$

A priori Fehlerabschätzung

Man definiert den Fehler

$$e := u - u_h$$

Proposition (A priori Fehler)

Seien $\mathscr{T}$ eine uniforme Triangulierung, $u \in H^2(\Omega;\mathbb{R}^2)$. Dann gibt ein $c > 0$, welches vom Regularitätsparameter und Ω abhängt, so dass

$$\|e\|_{1,\Omega} \leq c \frac{c_A}{c_a} h |u|_{2,\Omega} .$$

Hierbei ist $h := \max_{T \in \mathscr{T}} h_T$.

Beweis.

Folgt aus Céa's Lemma in [2, S.53] und einem Interpolationsresultat aus [2, S.75]. □

Ein residualer Fehlerschätzer

Wir definieren

- die flächenbezogenen Residuen $R_T := f + \mathrm{Div}\,\sigma(u_h)$
- die kantenbezogenen Sprünge

$$R_E := \begin{cases} [\![\sigma(u_h)n_E]\!] & \text{, falls } E \in \mathscr{E} \setminus \mathscr{E}_\Gamma \\ g - \sigma(u_h)n_E & \text{, falls } E \in \mathscr{E}_N \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

- einen lokalen Fehlerschätzer

$$\eta_{R,T}^2 := h_T^2 \|R_T\|_{0,T}^2 + \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathscr{E}_\Omega \cap \partial T} h_E \|R_E\|_{0,E}^2 + \sum_{E \in \mathscr{E}_\Gamma \cap \partial T} h_E \|R_E\|_{0,E}^2$$

- einen globalen Fehlerschätzer

$$\eta_R^2 := \sum_{T \in \mathscr{T}} \eta_{R,T}^2 = \sum_{T \in \mathscr{T}} h_T^2 \|R_T\|_{0,T}^2 + \sum_{E \in \mathscr{E}} h_E \|R_E\|_{0,E}^2$$

Proposition

Für alle Testfunktionen $v \in V^0$ gilt

$$a(e,v) = \sum_{T \in \mathscr{T}} \langle R_T, v \rangle_{0,T} + \sum_{E \in \mathscr{E}} \langle R_E, v \rangle_{0,E}$$

Beweis.

Wesentliche Idee ist, Satz von Gauß, auf jedem Dreieck seperat anzuwenden. □

Satz (Obere Schranke des Fehlers, Zuverlässigkeit)

Seien $d = 2$, $\mathscr{T}$ eine uniforme Triangulierung von Ω und sei a elliptisch. Dann gibt es ein $c > 0$, welches von c_a und dem Regularitätsparameter abhängt, so dass

$$\|e\|_{1,\Omega} \leq c\eta_R \,.$$

Beweis.

Folgt der Idee aus [2, Kapitel III.§8]. Verwendet die vorhergehende Proposition und eine Interpolation vom Clément-Typ. □

Satz (Untere Schranke des Fehlers, lokale Effizienz)

Seien $d = 2$, $\mathscr{T}$ eine uniforme Triangulierung von Ω und a stetig. Dann gibt es ein $c > 0$, welches von c_A und vom Regularitätsparameter abhängt, so dass

$$\eta_{R,T}^2 \leq c\Big(\sum_{T' \in \omega_T} \|e\|_{0,T'}^2 + \sum_{T' \in \omega_T} h_{T'}^2 \|f_h - f\|_{0,T'}^2 + \sum_{E \in \mathscr{E}_N \cap \partial T} h_E \|g_h - g\|_{0,E}^2 \Big)$$

für alle $f_h \in \mathscr{L}^0(\mathscr{T}; \mathbb{R}^d)$ und $g_h \in \mathscr{L}^0(\mathscr{E}_N; \mathbb{R}^d)$.

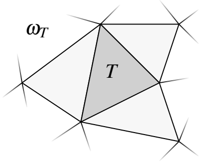


Abb.: Die Umgebung ω_T von T.

Beweis.

Recht technisch. Analog zu [2, S.173f.]. □

Numerische Experimente

Das folgende Benchmark stammt aus [3, Abschnitt 3.1].

Benchmark: Quadratisches Gebiet

Wir haben das Gebiet $\Omega = [0,1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ mit reinem Dirichlet-Rand $\Gamma_D = \partial\Omega$, Parameter $\mu = 10^7$, uniforme Verfeinerung und Funktionen

$$u(x) = \pi \begin{bmatrix} \cos(\pi x_2)\sin^2(\pi x_1)\sin(\pi x_2) \\ -\cos(\pi x_1)\sin(\pi x_1)\sin^2(\pi x_2) \end{bmatrix}$$

$$f(x) = 2\mu\pi^3 \begin{bmatrix} -\cos(\pi x_2)\sin(\pi x_1)(2\cos(2\pi x_1)-1) \\ \cos(\pi x_1)\sin(\pi x_1)(2\cos(2\pi x_2)-1) \end{bmatrix}$$

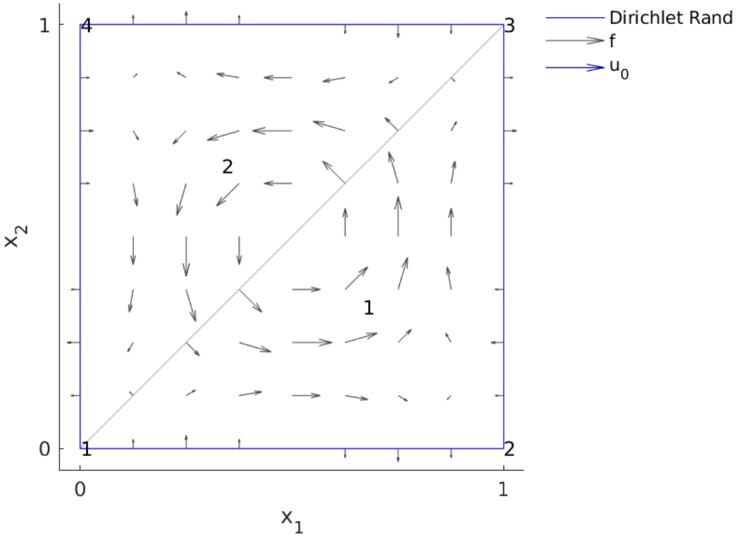


Abb.: Anfangskonfiguration

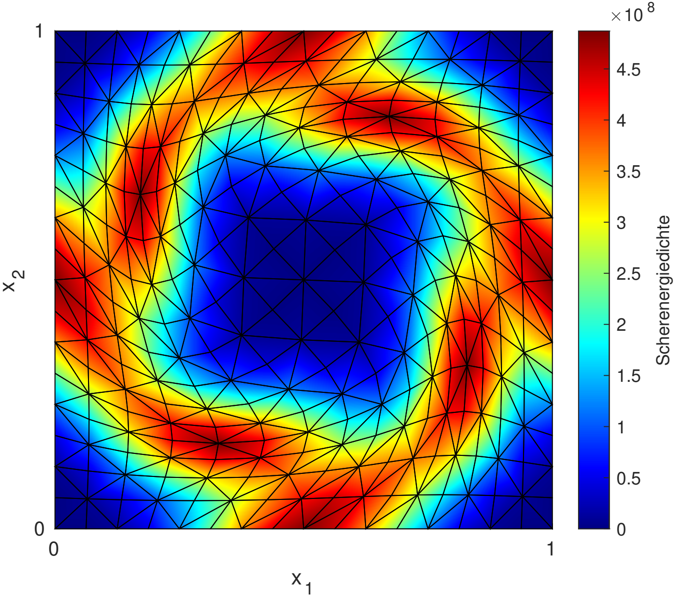


Abb.: Mögliche Deformation des Gebiets.

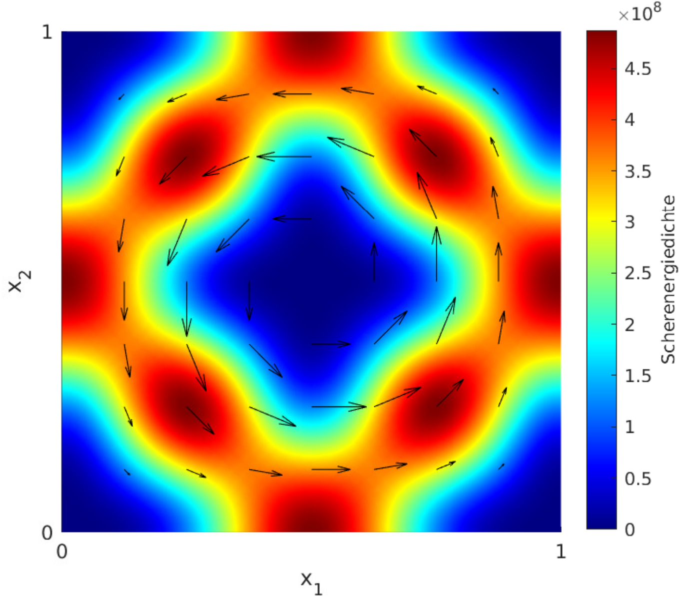
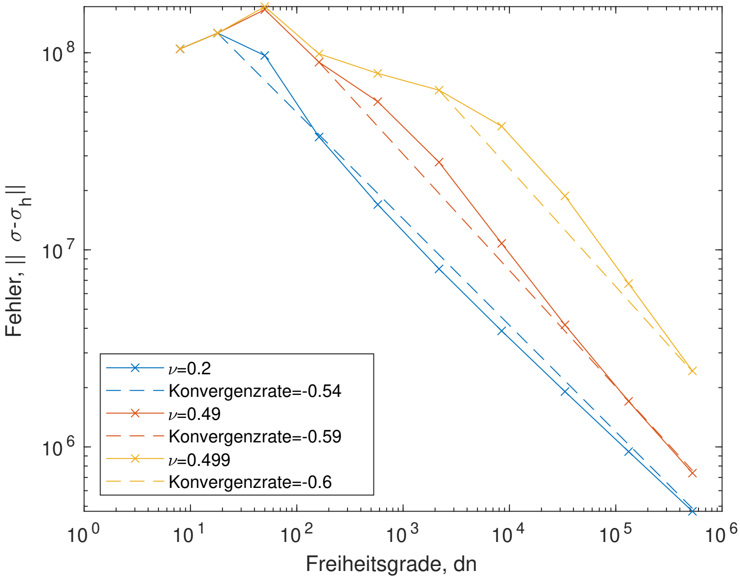
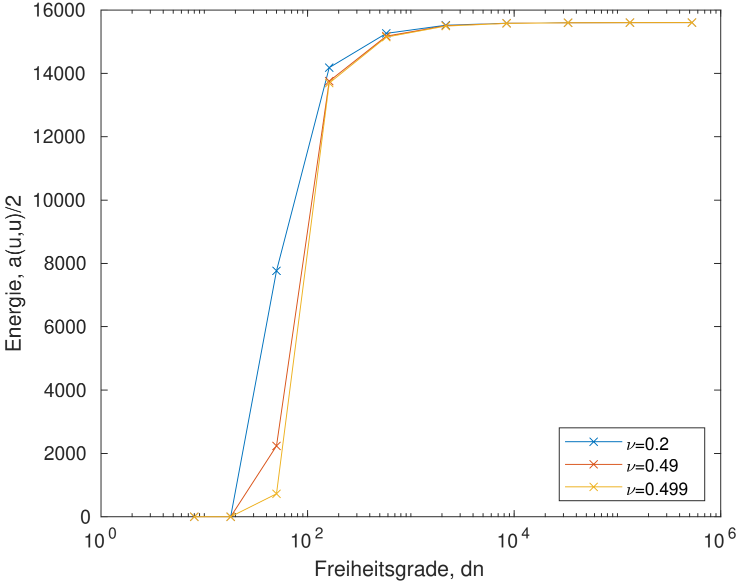


Abb.: Lösung auf dem Gebiet.



10^8
10^7
10^6
Fehler, || σ-σ_h||
10^0 10^1 10^2 10^3 10^4 10^5 10^6
Freiheitsgrade, dn
ν=0.2
Konvergenzrate=-0.54
ν=0.49
Konvergenzrate=-0.59
ν=0.499
Konvergenzrate=-0.6

Abb.: Fehler



16000
14000
12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
Energie, a(u,u)/2
10^0
10^2
10^4
10^6
Freiheitsgrade, dn
ν=0.2
ν=0.49
ν=0.499

Abb.: Energie

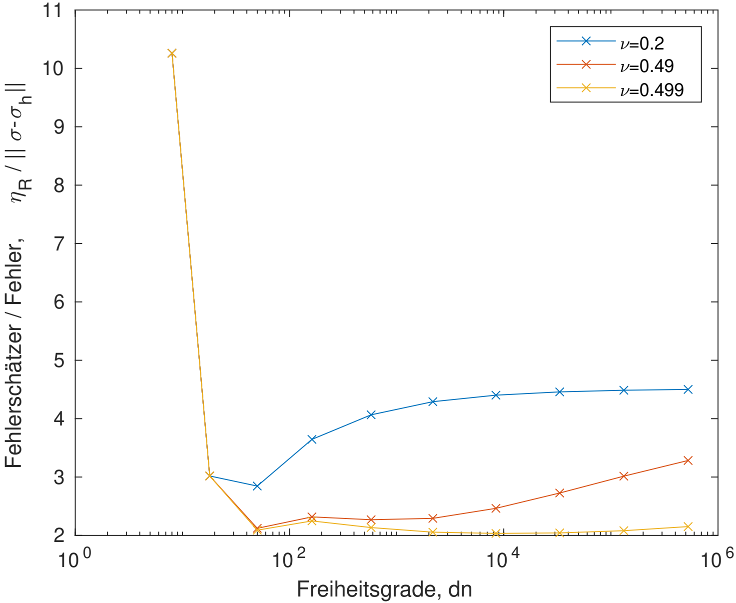


Abb.: Effizienz

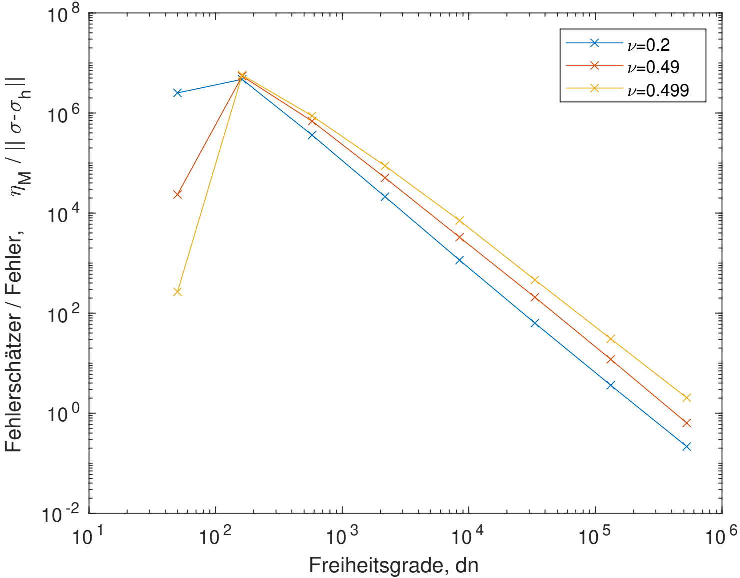


Abb.: Ineffizienz

Das Folgende Benchmark stammt aus [3, Abschnitt 3.4] und [1, S.255f.].

Benchmark: L-förmiges Gebiet

Wir verwenden ein L-förmiges Gebiet und Parameter $\mu = 10^7$, $\nu = 0.3$ und $\zeta = 0.7$. In Polarkoordinaten ist

$$\begin{aligned} u_r(r,\varphi) &= \frac{r^\alpha}{2\mu}\big(-(\alpha+1)\cos((\alpha+1)\varphi) \\ &\qquad + (C_2-\alpha-1)C_1\cos((\alpha-1)\varphi)\big) \\ u_\varphi(r,\varphi) &= \frac{r^\alpha}{2\mu}\big((\alpha+1)\sin((\alpha+1)\varphi) \\ &\qquad + (C_2+\alpha-1)C_1\sin((\alpha-1)\varphi)\big) \end{aligned}$$

mit speziellen Konstanten C_1, C_2 und α gegeben. Außerdem haben wir $f = 0$ und $g = 0$.

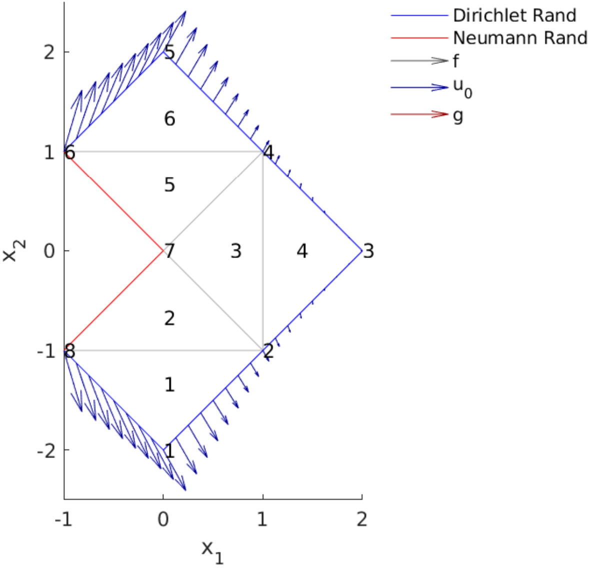


Abb.: Anfangskonfiguration

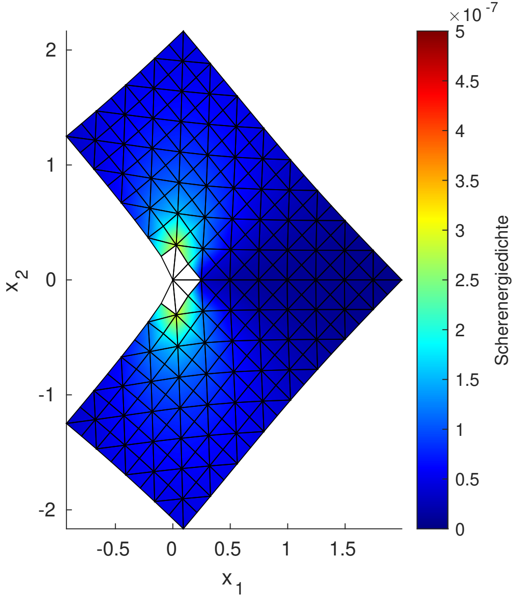


Abb.: Mögliche Deformation des Gebiets.

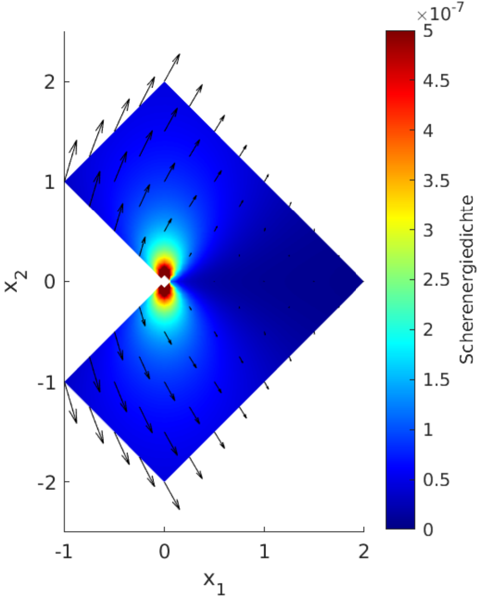


Abb.: Lösung auf dem Gebiet.

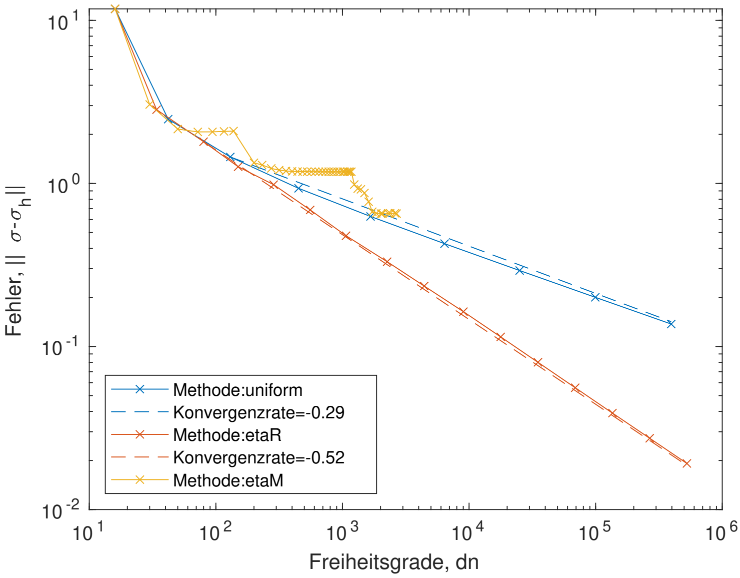

10^{1}
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
10^{5}
10^{6}
Fehler, || σ-σ_h||
Freiheitsgrade, dn
Methode:uniform
Konvergenzrate=-0.29
Methode:etaR
Konvergenzrate=-0.52
Methode:etaM

Abb.: Fehler

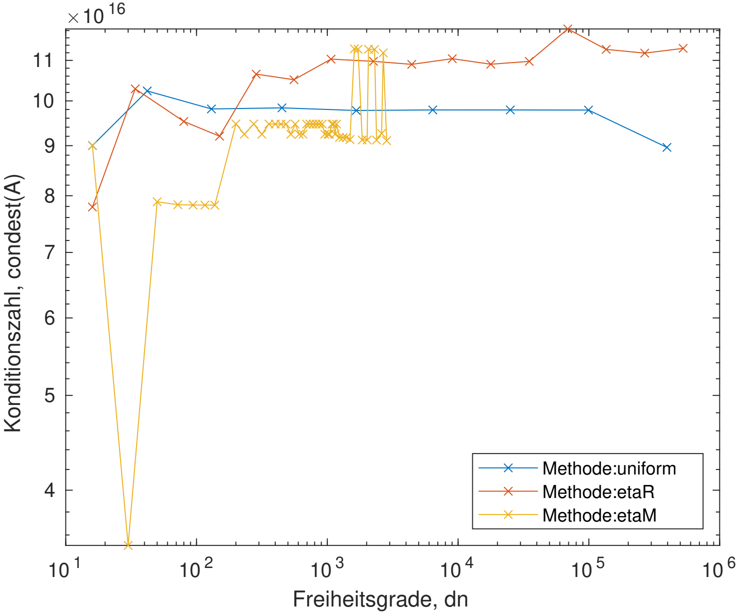


Abb.: Konditionszahl

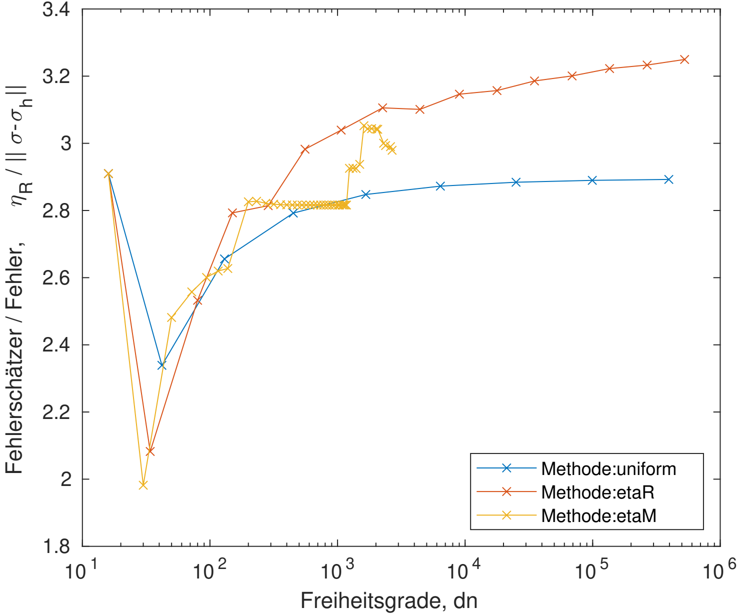


Abb.: Effizienz

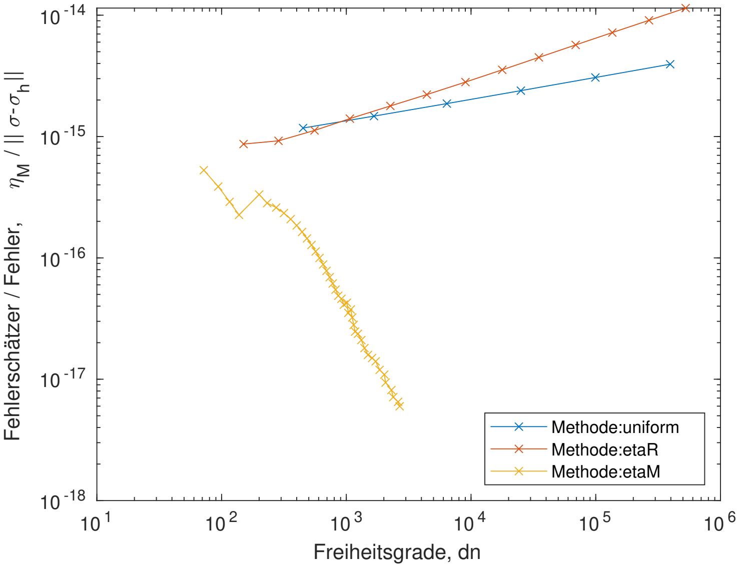
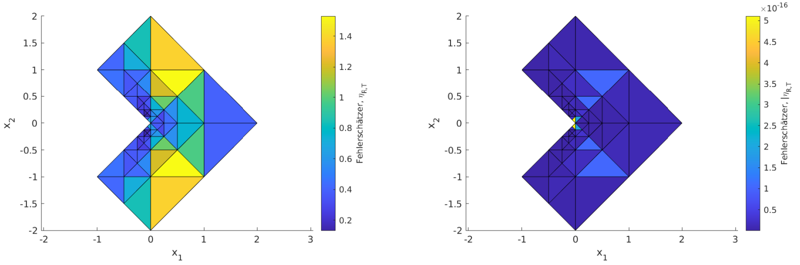


Abb.: Ineffizienz



(a) lokaler Fehlerschätzer $\eta_{R,T}$ (b) lokaler Fehlerschätzer $\eta_{M,T}$

Abb.: uniforme Triangulierung bei $d \cdot n = 94$.

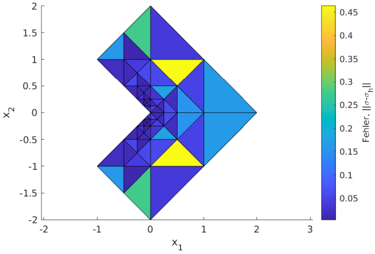


Abb.: lokaler Fehler $\|\sigma - \sigma_h\|$ bei $d \cdot n = 94$ Freiheitsgraden.

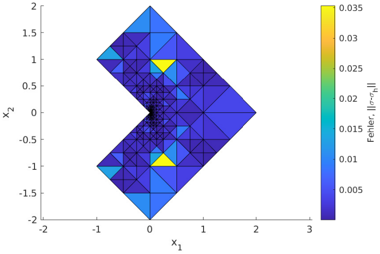
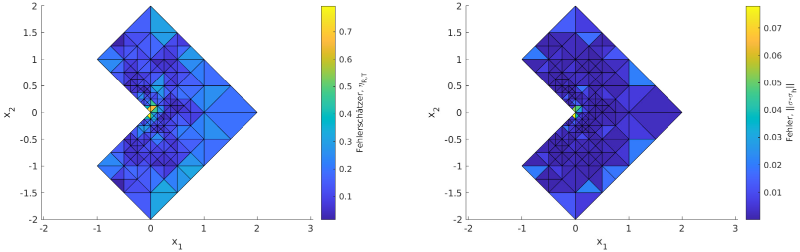


Abb.: lokaler Fehler $\|\sigma - \sigma_h\|$ bei $d \cdot n = 1610$ Freiheitsgraden.



(a) lokaler Fehlerschätzer $\eta_{R,T}$ (b) lokaler Fehler $\|\sigma - \sigma_h\|$

Abb.: Adaptive Gitterverfeinerung mit dem residualen Fehlerschätzer η_R und $d \cdot n = 286$ Freiheitsgraden.

Zusammenfassung I

- Kontinuierliches Problem: Finde $u \in V$, so dass
  - Kräftegleichgewicht

$$
\begin{aligned}
-\int_{\partial\omega} \sigma n \,\mathrm{d}s &= \int_{\omega} f \,\mathrm{d}x && \text{für alle } \omega \subseteq \Omega \text{ regulär genug}\,, \\
\sigma n &= g && \text{auf } \Gamma_N\,, \\
Mu &= w && \text{auf } \Gamma\,.
\end{aligned}
$$

  - Differenzielles Problem

$$
\begin{aligned}
-\operatorname{Div} \sigma &= f && \text{auf } \Omega\,, \\
\sigma n &= g && \text{auf } \Gamma_N\,, \\
Mu &= w && \text{auf } \Gamma\,.
\end{aligned}
$$

Zusammenfassung II

- Variationelles Problem (virtuelle Arbeit)

$$
\begin{aligned}
a(u,v) &= \ell(v) && \text{für alle } v \in V^0, \\
Mu &= w && \text{auf } \Gamma.
\end{aligned}
$$

- Optimierungsproblem (Energiefunktional)

$$
\begin{aligned}
u \text{ minimiert} \quad & W = \frac{1}{2}a(\cdot,\cdot) - \ell \\
\text{unter der Nebenbedingung} \quad & Mu\big|_\Gamma = w\big|_\Gamma
\end{aligned}
$$

- Diskretes Problem: Finde $u_h \in V_h$, so dass

$$
\begin{aligned}
a(u_h,v_h) &= \ell(v_h) && \text{für alle } v_h \in V_h^0, \\
Mu_h &= w && \text{auf } \Gamma.
\end{aligned}
$$

Zusammenfassung III

- Man zeigt:
  Kornsche Ungleichung ohne Randbedinungen auf dem Ganzraum $\xrightarrow{\text{Erweiterungsoperator}}$ Kornsche Ungleichung ohne Randbedingungen $\xrightarrow{\text{Starrkörperbewegungen}}$ Kornsche Ungleichung mit Randbedingungen $\to$ Positivdefinitheit von a
- Existenz und Eindeutigkeit folgt aus dem Lax-Milgram-Lemma
- Der residuale Fehlerschätzer ist zuverlässig und effizient. Dies sieht man auch in numerischen Experimenten.
- Der residuale Fehlerschätzer wird verwendet, um das Gitter adaptiv zu verfeinern. Dies verbessert bei manchen Problemen die Konvergenz.

Quellen I

[1] J. Alberty, C. Carstensen, S. A. Funken, and R. Klose. Matlab implementation of the finite element method in elasticity. *Computing*, 69(3):239–263, 2002.

[2] Dietrich Braess. *Finite Elemente. Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Eleastizitätstheorie*. Springer Verlag, Berlin, fourth edition, 2007.

[3] C. Carstensen, M. Eigel, and J. Gedicke. Computational competition of symmetric mixed FEM in linear elasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 200(41-44):2903–2915, 2011.

[4] Philippe G. Ciarlet. *Mathematical elasticity. Vol. I. Three-dimensional elasticity*, volume 20 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988.

Quellen II

[5] G. Duvaut and J.-L. Lions. *Inequalities in mechanics and physics*, volume 219 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften.* Translated from the French by C. W. John. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[6] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Theory of elasticity*. Course of Theoretical Physics, Vol. 7. Translated by J. B. Sykes and W. H. Reid. Pergamon Press, London-Paris-Frankfurt; Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1959.

[7] J. A. Nitsche. On Korn's second inequality. *RAIRO Anal. Numér.*, 15(3):237–248, 1981.

[8] Rüdiger Verfürth. *A posteriori error estimation techniques for finite element methods*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press, Oxford, 2013.

Danke für die Aufmerksamkeit.