Steife Anfangswertprobleme - Stabilität

Theo Koppenhöfer

10. Juni 2020

"Wer sichere Schritte tun will,

muss sie langsam tun."

J.W. von Goethe

Outline

Beispiel (Das Testproblem)

Wir betrachten für $\lambda < 0$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ x(0) = x_0 = 1 \end{cases}$$

mit Phasenfluss

$$\Phi^t = \exp(t\lambda)$$

und expliziter Lösung

$$x(t) = \Phi^t x_0 = \exp(t\lambda) x_0$$

Beispiel (Testproblem und explizites Euler-Verfahren)

Das explizite Euler-Verfahren hat den diskreten Phasenfluss

$$\Psi^{\tau}_{\text{expl. Euler}} = 1 + \tau\lambda$$

und liefert die explizite Lösung für den k-ten Gitterpunkt bei einer konstanten Gitterschrittweite τ

$$\begin{aligned} x_k &= \Psi^{\tau}_{\text{expl. Euler}}\, x_{k-1} = \left[\Psi^{\tau}_{\text{expl. Euler}}\right]^2 x_{k-2} = \dots \\ &= \left[\Psi^{\tau}_{\text{expl. Euler}}\right]^k x_0 = (1 + \tau\lambda)^k x_0 \end{aligned}$$

Das Testproblem führt beim expliziten Euler-Verfahren mit $\lambda < 0$ und einer zu großen Schrittweite τ zu bemerkenswerten Verhalten.

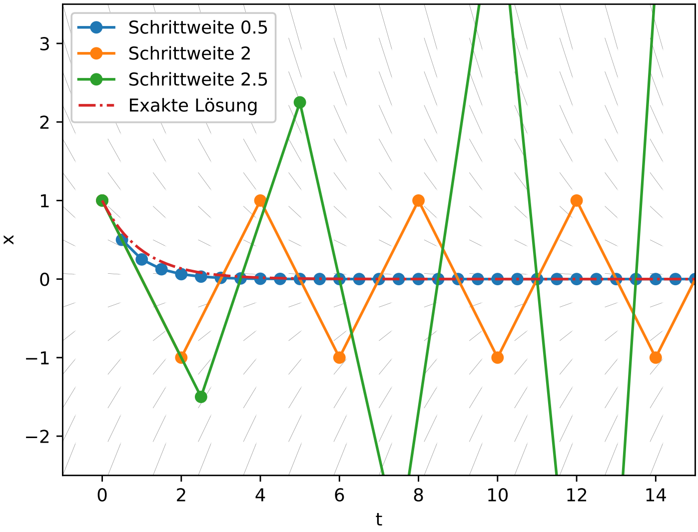

Abbildung: Expliziter Euler angwandt auf $x' = -x$ mit $x(0) = 1$

Das Problem ist asymptotisch stabil, die Lösung des expliziten Euler-Verfahrens für zu großes τ dagegen nicht. Für $\lambda \ll 0$ muss man $\tau \ll 1$ wählen, um dieses Verhalten zu unterbinden. Probleme mit diesem Verhalten nennen wir steif.

Beispiel (Testproblem und implizites Euler-Verfahren)

Wir definieren den diskreten Phasenfluss des impliziten Euler-Verfahrens durch

$$\Psi^{\tau}_{\text{impl. Euler}} := \frac{1}{1-\tau\lambda}$$

Damit erhalten wir die explizite Lösung

$$x_k = \left[\Psi^{\tau}_{\text{impl. Euler}}\right]^k x_0 = \frac{1}{(1-\tau\lambda)^k} x_0$$

Die Lösung des impliziten Euler-Verfahres für das Testproblem ist für alle $\tau > 0$ und alle $\lambda < 0$ asymptotisch stabil.

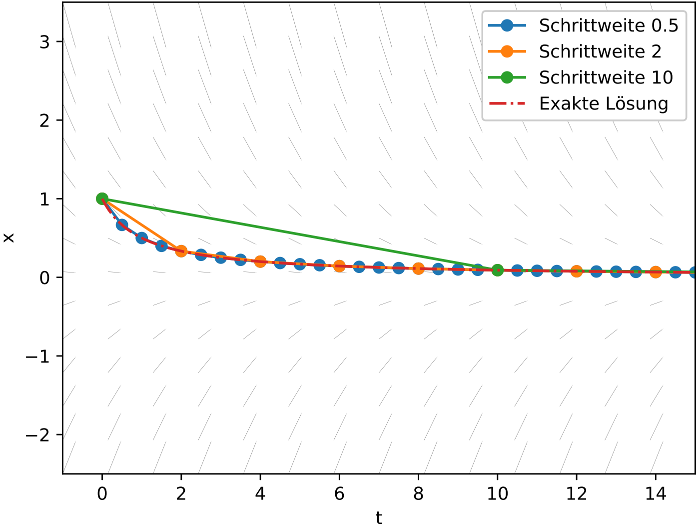

Abbildung: Impliziter Euler angewandt auf $x' = -x$ mit $x(0) = 1$

Warum?

(II) Allgemeines

Es sei das lineare autonome Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

mit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gegeben. Mit dem Phasenfluss

$$\Phi^t = \exp(tA)$$

erhält man die exakte Lösung

$$\mathbf{x}(t) = \Phi^t \mathbf{x}_0$$

Wir betrachten einen diskreten Phasenfluss der Form

$$\Psi^\tau = R(\tau A) = P(\tau A)(Q(\tau A))^{-1} = \frac{P(\tau A)}{Q(\tau A)}$$

mit P, Q Polynome.

Damit das Verfahren Konsistenzordnung p hat, muss gelten

$$R(\tau A) = \Psi^\tau = \Phi^\tau + \mathcal{O}(\tau^{p+1}) = \exp(\tau A) + \mathcal{O}(\tau^{p+1})$$

also für $z \in \mathbb{C}$, $z \to 0$

$$R(z) = \exp(z) + \mathcal{O}(z^{p+1})$$

Beispiel

Beim expliziten Euler ist

$$R_{\text{expl. Euler}}(z) = 1 + z = \exp(z) + \mathcal{O}(z^2)$$

und beim impliziten Euler

$$R_{\text{impl. Euler}}(z) = \frac{1}{1-z} = 1 + z + \mathcal{O}(z^2) = \exp(z) + \mathcal{O}(z^2)$$

Bei den Runge-Kutter-Verfahren ist $R = P$, also $Q = 1$.

Wir wollen wissen, wann die Rekursion

$$\mathbf{x}_k = \Psi^\tau \mathbf{x}_{k-1} = [\Psi^\tau]^2 \mathbf{x}_{k-2} = \cdots = [\Psi^\tau]^k \mathbf{x}_0 \qquad (1)$$

stabil ist. Dazu haben wir folgenden

Satz (1. Eigenwertkriterium)

Die Rekursion (1) ist genau dann stabil, wenn

1. $\rho(\Psi^\tau) \leq 1$ *und*
2. *Aus* $\lambda \in \sigma(\Psi^\tau)$ *mit* $|\lambda| = 1$ *folgt, dass dazugehörige Jordan-Blöcke die Größe* $\mu = 1$ *haben.*

Beweis.

Wir haben für eine geeignete Koordinatentransformation U

$$\begin{aligned}
[\Psi^\tau]^k &= \left[UU^{-1}\Psi^\tau UU^{-1}\right]^k = U\left[U^{-1}\Psi^\tau U\right]^k U^{-1} \\
&= U\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_m \end{pmatrix}^k U^{-1} = U\begin{pmatrix} J_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & J_m^k \end{pmatrix} U^{-1}
\end{aligned}$$

Beweis.

Wir haben für $k \geq \mu_i$

$$J_i^k = \left[\begin{pmatrix} \lambda_i & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}}_{=:N_i} \right]^k = [\lambda_i I + N_i]^k$$

$$= \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \lambda_i^{k-l} N_i^l = \lambda_i^k \underbrace{\sum_{l=0}^{\mu_i} \binom{k}{l} \lambda_i^{-l} N_i^l}_{=:P_i(k)} = \lambda_i^k P_i(k)$$

wobei wir verwendet haben, dass

- $(A+B)^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} A^{k-l} B^l$ für kommutierende Matrizen A, B
- $N_i^l = 0$ für $l \geq \mu_i$

Beweis.

Die Rekursion ist genau dann stabil, wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $k \in \mathbb{R}$

$$M \geq \|[\Psi^\tau]^k \mathbf{x}_0\| = \|U \begin{pmatrix} J_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & J_m^k \end{pmatrix} U^{-1} \mathbf{x}_0\|$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn es für alle $1 \leq i \leq m$ $M_i \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$M_i \geq \sup_k \|J_i^k \mathbf{y}_0\| = \sup_k |\lambda_i^k| \|P_i(k)\mathbf{y}_0\|$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$

1. $|\lambda_i| \leq 1$ und
2. Falls $|\lambda_i| = 1$, ist $\|P_i(k)\mathbf{y}_0\|$ für alle $k \in \mathbb{N}$ beschränkt

Beweis.
Der Beweis ist beendet, wenn wir zeigen können, dass $\|P_i(k)\mathbf{y}_0\|$ für alle $k \in \mathbb{N}$ genau dann beschränkt ist, wenn $\mu_i = 1$. Sei zunächst $\mu_i > 1$, dann folgt

$$\|P_i(k)\mathbf{e}_2\| = \|\sum_{l=0}^{\mu_i} \binom{k}{l} \lambda_i^{-l} N_i^l \mathbf{e}_2\| = \|I\mathbf{e}_2 + \binom{k}{1} \lambda_i^{-1} N_i^1 \mathbf{e}_2 + 0\|$$
$$= \|\mathbf{e}_2 + k\mathbf{e}_1\|_1 \geq k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$$

Ist dagegen $\mu_i = 1$, so folgt

$$\|P_i(k)\mathbf{y}_0\| = \|\sum_{l=0}^{\mu_i} \binom{k}{l} \lambda_i^{-l} N_i^l \mathbf{y}_0\| = \|\mathbf{y}_0\|$$

$\square$

(III) Stabilitätsgebiete

Die Notwendigkeit von

$$1 \geq \rho(\Psi^\tau) = \rho(R(\tau A)) = \max_{\tau\lambda \in \sigma(\tau A)} |R(\tau\lambda)|$$

für eine stabile Rekursion motiviert folgende

Definition

Wir bezeichnen die Menge

$$\mathscr{S} := \{z \in \mathbb{C} \colon |R(z)| \leq 1\} \subseteq \mathbb{C}$$

als absolutes Stabilitätsgebiet.

Beispiel (Stabilitätsgebiet implizites Euler-Verfahren)

Es gilt

$$\begin{aligned}\mathscr{S} &= \{z \in \mathbb{C}\colon |R_{\text{impl. Euler}}(z)| \leq 1\} \\ &= \{z \in \mathbb{C}\colon \frac{1}{|1-z|} \leq 1\} \\ &= \{z \in \mathbb{C}\colon 1 \leq |1-z|\} \\ &= \mathbb{C} \setminus B_1(1)\end{aligned}$$

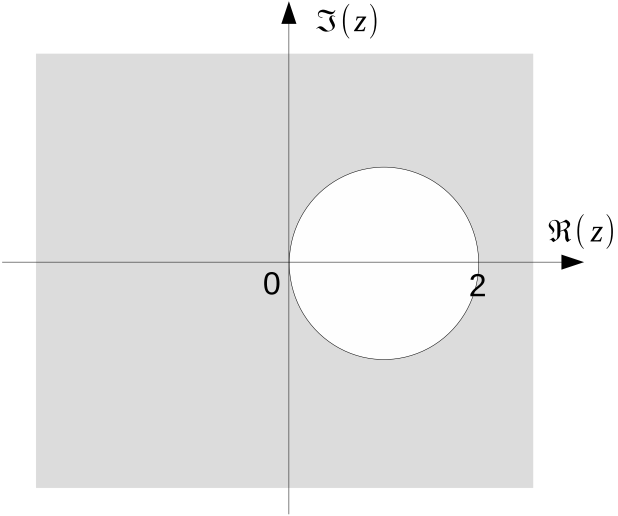

Abbildung: Stabilitätsgebiet des impliziten Euler-Verfahrens

Proposition

Das Stabilitätsgebiet eines konsistenten Einschrittverfahrens Ψ^τ liegt lokal links vom Nullpunkt. Insbesondere ist $0 \in \partial\mathscr{S}$.

Beweis.

Aus der Konsistenz folgt für $z \to 0$

$$R(z) = 1 + z + \mathcal{O}(z^2)$$

und deshalb

$$|R(z)| = \begin{cases} > 1 & \text{für } z \in \mathbb{R}, z > 0, |z| \text{ klein} \\ < 1 & \text{für } z \in \mathbb{R}, z < 0, |z| \text{ klein} \end{cases}$$

□

Beispiel (Stabilitätsgebiet explizites Euler-Verfahren)

Es gilt

$$\begin{aligned}\mathscr{S} &= \{z \in \mathbb{C} \colon |R_{\text{expl. Euler}}(z)| \leq 1\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} \colon |1+z| \leq 1\} \\ &= B_1(-1)\end{aligned}$$

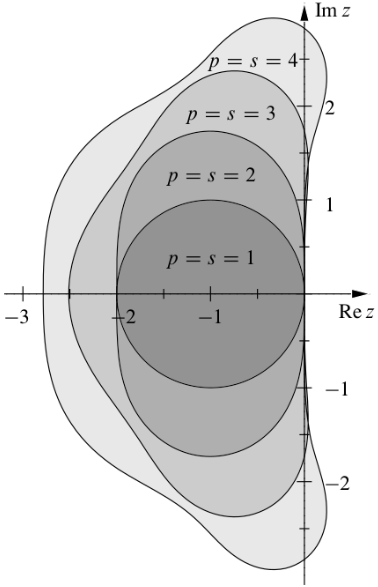

Abbildung: Stabilitätsgebiete für Runge-Kutter-Verfahren der Konvergenzordnung p

Proposition

Das Stabilitätsgebiet eines Runge-Kutter-Verfahrens ist beschränkt

Beweis.

Dies folgt aus $R(z) = P(z) \to \infty$ für $|z| \to \infty$. $\square$

Wir wollen für gegebenes A und R wissen, wie klein die Schrittweite sein muss, damit das Verfahren stabil ist.

Definition

Die charakteristische Schrittweite ist gegeben durch

$$\tau_c := \sup \left\{ \bar{\tau} > 0 \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{die Rekursion } x_{k+1} = \Psi^{\tau} x_k \\ \text{ist für } 0 < \tau \leq \bar{\tau} \text{ stabil} \end{array} \right\}$$

Satz (2. Eigenwertkriterium)

Die Rekursion

$$x_{k+1} = \Psi^{\tau} x_k$$

ist genau dann stabil, wenn

1. $\sigma(\tau A) \subseteq \mathscr{S}$
2. *Für einen Eigenwert* $\tau\lambda \in \sigma(\tau A) \cap \partial\mathscr{S}$ *mit Jordan-Block-Größe* μ *folgt* $R^{(j)}(\tau\lambda) = 0$ *für* $j \in \{1, \ldots, \mu - 1\}$

erfüllt sind

Beweis.

Den Beweis findet man in (Spijker, 1998; Thrm. 6.1.1). □

Bemerkung

Es gilt

$$\begin{aligned}\sigma(\tau A) \subseteq \mathscr{S} &\iff 1 \geq |R(\sigma(\tau A))| = |\sigma(R(\tau A))| \\ &\iff 1 \geq \rho(R(\tau A)) = \rho(\Psi^{\tau})\end{aligned}$$

Beispiel (Stabilitätskriterium expliziter Euler)

Für das explizite Euler-Verfahren haben wir als Bedingungen für Stabilität

1. $\sigma(\tau A) \subseteq \mathscr{S} = B_1(-1)$
2. Für einen Eigenwert $\tau\lambda \in \sigma(\tau A) \cap \partial\mathscr{S} = \sigma(\tau A) \cap \partial B_1(-1)$ mit Jordan-Block-Größe μ folgt $R^{(j)}_{\text{expl. Euler}}(\tau\lambda) = 0$ für $j \in \{1, \ldots, \mu - 1\}$

Da $R'_{\text{expl. Euler}}(z) = [1 + z]' = 1$, muss für die 2. Bedingung $\mu = 1$ gelten. Wir erhalten

1. $\sigma(\tau A) \subseteq B_1(-1)$
2. Für einen Eigenwert $\tau\lambda \in \sigma(\tau A) \cap \partial B_1(-1)$ folgt, dass dazugehörige Jordan-Blöcke die Größe $\mu = 1$ haben

Beispiel (Stabilitätskriterium expliziter Euler mit Testproblem)

Der explizite Euler mit dem Testproblem ist genau dann stabil, wenn

1. $\tau\lambda = \sigma(\tau\lambda) \subseteq B_1(-1)$. Da $\tau\lambda \in \mathbb{R}$ und $0 < \tau$, ist dies äquivalent zu $0 \leq \tau|\lambda| \leq 2$, also $\tau \leq \frac{2}{|\lambda|}$.
2. Für einen Eigenwert $\tau\lambda \in \sigma(\tau\lambda) \cap \partial B_1(-1)$ folgt, dass dazugehörige Jordan-Blöcke die Größe $\mu = 1$ haben. Dies ist für das Testproblem immer erfüllt.

Der explizite Euler mit dem Testproblem ist also genau dann stabil, wenn

$$\tau \leq \frac{2}{|\lambda|}$$

Damit ist $\tau_c = \frac{2}{|\lambda|}$ und kann für $\lambda \to -\infty$ beliebig klein werden, was die Steifheit des Problems erklärt.

(IV) Stabilitätsbegriffe: A-Stabilität

Definition

Wir bezeichnen ein Einzelschrittverfahren als A-stabil, falls für das Stabilitätsgebiet gilt

$$\mathbb{C}^- := \{z \in \mathbb{C} \colon \Re(z) \leq 0\} \subseteq \mathscr{S}$$

Bemerkung

$\mathbb{C}^-$ ist gerade das Stabilitätsgebiet der Exponentialfunktion. Die Stabilität wird also für A-stabile Verfahren unabhängig von dem Spektrum der Matrix A vererbt.

Beispiel

Das implizite Euler-Verfahren ist A-stabil. Nach der letzten Proposition sind Runge-Kutta-Verfahren nicht A-stabil.

A(α)-Stabilität

Interessieren uns die Eigenwerte auf der imaginären Achse nicht, so kann man sich auch mit A(α)-Stabilen-Verfahren begnügen, die folgendes Stabilitätsgebiet haben:

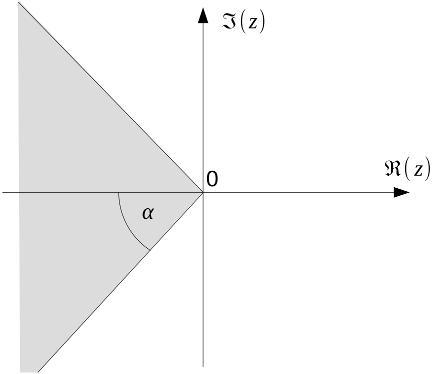

Abbildung: Stabilitätsgebiet eines A(α)-stabilen Verfahrens

Beispiel

Betrachten wir das Problem

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) = (1,0)^\top \end{cases}$$

mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

so liefern explizites und implizites Euler-Verfahren für jede Schrittweite unbefriedigende Lösungen

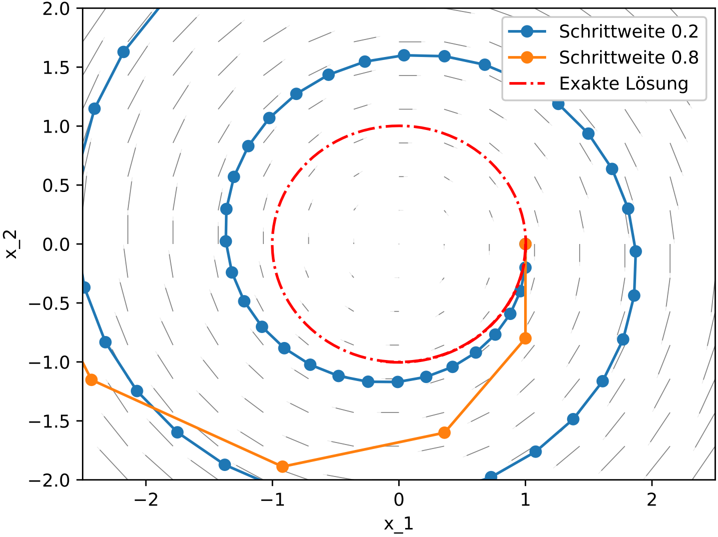

Abbildung: Expliziter Euler angewandt auf $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ mit $\mathbf{x}(0) = (1,0)^\top$

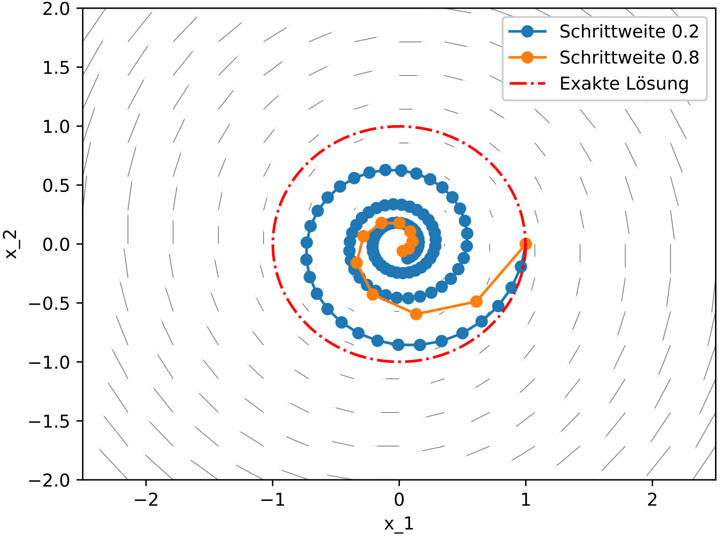

Abbildung: Impliziter Euler angewandt auf $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ mit $\mathbf{x}(0) = (1,0)^\top$

Beispiel

Das Problem liegt daran, dass $\sigma(A) = \{-i, i\}$, also nur rein imaginäre Eigenwerte vorkommen. Damit ist $\Phi^t = \exp(tA)$ eine Isometrie. Dieser Stabilitätsbegriff führt zu Verfahren, welche die Isometrie von Φ^t erhalten. Ein Beispiel ist

$$R(z) = \frac{1 + z/2}{1 - z/2}$$

Zusammenfassung

1. Das Stabilitätsgebiet $\mathscr{S} := \{z \in \mathbb{C} \colon R(z) \leq 1\}$
2. Hinreichende Kriterien für die Stabilität einer Rekursion sind
   2.1 1. Eigenwertkriterium: $\rho(\Phi^\tau) = \rho(R(\tau A)) < 1$
   2.2 2. Eigenwertkriterium: $\sigma(\tau A) \subseteq \mathscr{S} \setminus \partial\mathscr{S}$
3. Für $\rho(\Phi^\tau) = 1$ und $\sigma(\tau A) \cap \partial\mathscr{S} \neq \emptyset$ gibt es zusätzliche Bedingungen
4. Es gibt verschiedene Stabilitätsbegriffe
   4.1 A-Stabilität: $\mathbb{C}^- \subseteq \mathscr{S}$
   4.2 A(α)-Stabilität, Isometrie erhaltend

Danke für die Aufmerksamkeit.

Fragen?

Quellen I

- Deuflhard, P.; Bornemann, F. (2013). Numerische Mathematik 2, Gewöhnliche Differentialgleichungen. Retrieved from https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/9783110316360/html
- Hermann, M. (2017). Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen, Band 1: Anfangswertprobleme und lineare. Retrieved from https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/9783110498882/html.
- Lee, H.; Wong, J. (2020). Math 361S Lecture Notes Numerical solution of ODEs. Retrieved from https://services.math.duke.edu/~holee/math361-2020/lectures/Lec7-ODEs.pdf
- Spijker, M.N.(1998). Numerical Stability. Retrieved from fromhttps://www.math.leidenuniv.nl/~spijker/NumStab98.pdf

Quellen II

Mit Bildern von

- Stabilitätsregtionen der Runge-Kutta-Verfahren: Abb. 6.2 aus (Deuflhard; Bornemann, 2013)