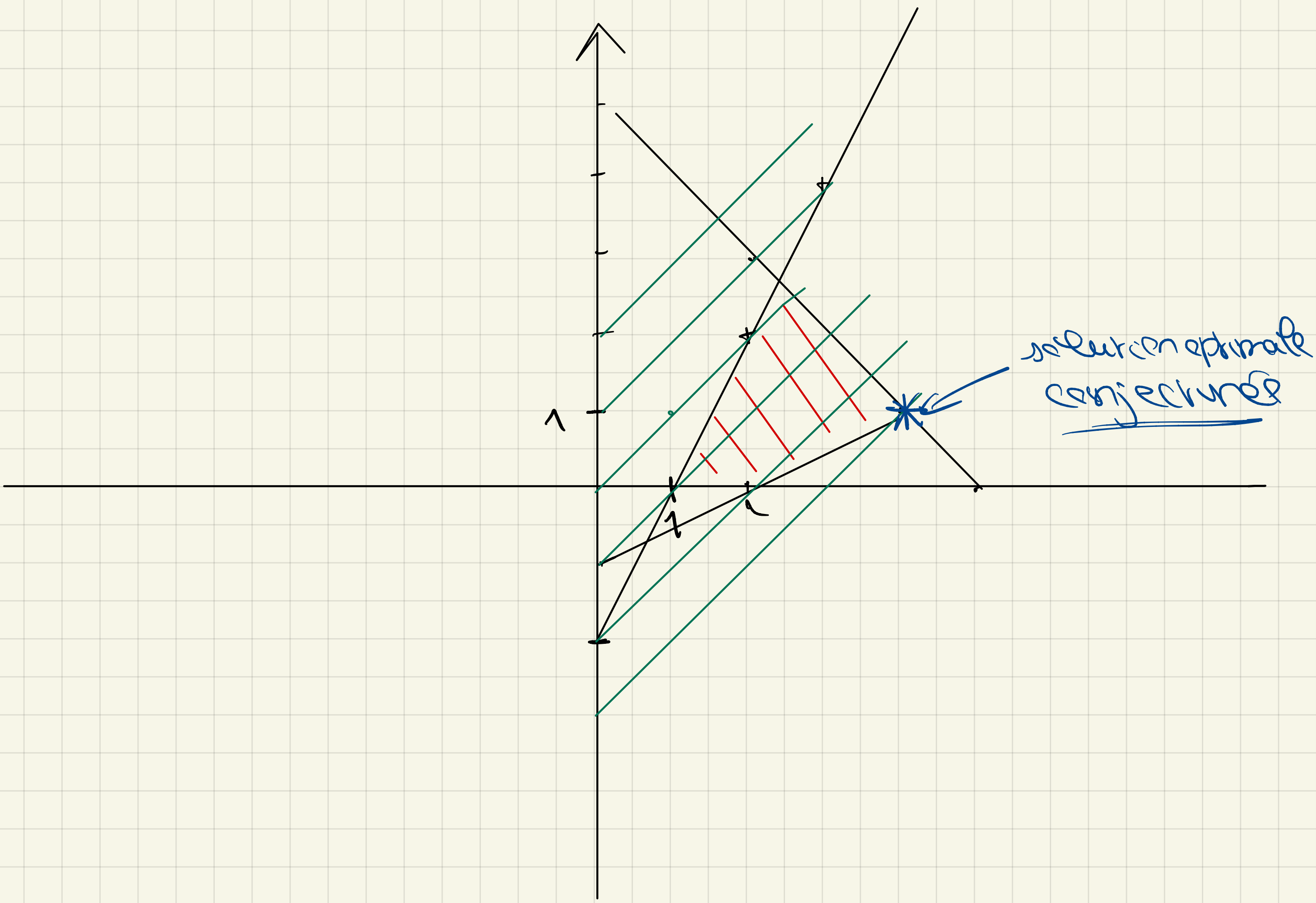
Exercice 6 du TD 3

On cherche à minimiser $f(x,y) = -x+y$ sous les contraintes
$$\begin{cases} 2x - y \geq 2 \\ x - 2y \leq 2 \\ x + y \leq 5 \\ x, y \geq 0. \end{cases}$$

a) Ens. admissible



b) voir graphique avant pour le tracé des lignes de niveau $f(x,y) = c$ avec $c = -1, 0, 1$.

c) On veut montrer que le problème sous contraintes d'inégalité est équivalent au problème sous contraintes d'égalité ;

Minimiser $f(x, y, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = 5 - 2x - \varepsilon_3$ sous contraintes
$$\begin{cases} -2x + y + \varepsilon_1 = -2 \\ x - 2y + \varepsilon_2 = 2 \\ x + y + \varepsilon_3 = 5 \\ x, y, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \geq 0. \end{cases}$$

On a : $(P_{ci}) \Longleftrightarrow$

Minimiser $F(x, y, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -x + y$ avec :
$$\begin{cases} y - 2x + \quad {}_1 = -2 \\ x - 2y + \quad {}_2 = 2 \\ x + y + \quad {}_3 = 5 \end{cases}$$

$$\text{Min } F(\qquad) = 5 - 2x - \alpha_3$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -2x + y + \varepsilon_1 = -2 \\ x - 2y + \varepsilon_2 = 2 \\ x + y + \varepsilon_3 = 5. \end{cases}$$

Si on ajoute : $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$

$$\begin{cases} -2x + y + \varepsilon_1 = -2 \\ 3x + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 = 12 \\ x + y + \varepsilon_3 = 5 \end{cases}$$

et on minimise $5 - 2x - \varepsilon_3$.

donc on doit prendre x et ε_3 les plus grands possibles.

La dernière ligne nous dit $0 \leq x \leq 5$

$0 \leq \varepsilon_3 \leq 5$.

donc il faut prendre x le plus grand possible. La deuxième ligne nous donne $x = 4$ est la plus grande valeur possible.

d'où $x = 4$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$, $y = 1$,

$$\underbrace{-2 \cdot 4 + 1}_{-7} + \underbrace{\varepsilon_1}_{5} = -2.$$

et on trouve $\min F = -3$.

$$\min F$$
$$\shortparallel$$
$$\min f \text{ atteint en } (x,y) = (4,1)$$
$$\shortparallel$$
$$-3.$$