Complément - Equations différentielles ordinaires

Kévin Le Balc'h

Octobre 2018

1 Théorèmes généraux

1.1 Un lemme extrêmement utile

Théorème 1.1 (**Lemme de Gronwall**). *[4, Chapitre X, Section I]*
Soit $\varphi \in C([a,b];\mathbb{R}^+)$ et $c \in [a,b]$. On suppose qu'il existe des constantes positives A, B telles que

$$\varphi(t) \leq A + B\left|\int_c^t \varphi(s)ds\right|,\ \forall t \in [a,b].$$

Alors,

$$\varphi(t) \leq Ae^{B|t-c|},\ \forall t \in [a,b].$$

Cadre : I est un intervalle de $\mathbb{R}$, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue. On s'intéresse à l'équation différentielle :

$$x'(t) = f(t, x(t)). \tag{EDO}$$

1.2 Quelques définitions

Voici quelques définitions nécessaires à la théorie (voir [4, Chapitre X, Section I]).

1. Une **solution** de (EDO) est un couple (x, J) où J est un intervalle contenu dans I et x une fonction C^1 de J dans Ω qui vérifie (EDO).
2. Pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, résoudre le **problème de Cauchy** consiste à trouver une solution (x, J) de (EDO) telle que $t_0 \in J$ et $x(t_0) = x_0$.
3. Une **solution globale** de (EDO) est une solution (x, J) de (EDO) avec $J = I$.
4. Soient (x_1, J_1) et (x_2, J_2) deux solutions de (EDO). On dit que (x_2, J_2) **prolonge** (x_1, J_1) si $J_1 \subset J_2$ et $x_1(t) = x_2(t)$ pour tout $t \in J_1$.
5. Une solution (x, J) de (EDO) est dite **maximale** si elle n'admet aucun prolongement (strict).
6. La fonction $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ est **localement Lipschitzienne** par rapport à la seconde variable si pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, il existe un voisinage $V = V_{t_0,x_0}$ et $C > 0$ tels que

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq C|x_1 - x_2|,\ \forall (t, x_i) \in V,\ i = 1, 2.$$

1.3 Théorèmes d'existence

Théorème 1.2 (**Théorème de Cauchy-Lipchitz**). *[4, Chapitre X, Section III]*
*On suppose que f est continue sur $I \times \Omega$ et **localement Lipschitzienne** par rapport à la seconde variable. Alors pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, il existe une **unique solution maximale** (x, J) où $J =]T_*, T^*[$ au problème de Cauchy*

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0.$$

Théorème 1.3 (**Théorème de Cauchy-Péano**). *[4, Chapitre X, Section III]*
*On suppose que f est continue sur $I \times \Omega$. Alors pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, il existe une **solution maximale** (x, J) où $J =]T_*, T^*[$ au problème de Cauchy*

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0.$$

1.4 Critère de prolongement

Théorème 1.4 (Théorème des bouts). *[4, Chapitre X, Section III]*
On suppose que f est continue sur $]a,b[\times\mathbb{R}^n$. Soit (x,J) une solution maximale de (EDO), *où $J =]T_*,T^*[$. Alors on a les deux alternatives suivantes*

$$T^* = b \qquad OU \qquad T^* < b \text{ et } \lim_{t\to T^*} |x(t)| = +\infty,$$

et

$$T_* = a \qquad OU \qquad T_* > a \text{ et } \lim_{t\to T_*} |x(t)| = +\infty.$$

1.5 Dépendance par rapport aux conditions initiales

Théorème 1.5 (Théorème du flot). *[1, Section 5.5]*
On suppose que f est de classe C^2 sur $I\times\Omega$. Alors pour tout $(t_0,x_0)\in I\times\Omega$, il existe un voisinage $W\times V = [t_0-\tau, t_0+\tau]\times B_f(x_0,R)\subset I\times\Omega$ et une unique application $\Phi_{t_0}\in C^1(W\times V;\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_{t_0}}{\partial t}(t,x) = f(t,\Phi_{t_0}(t,x)) & (t,x)\in W\times V, \\ \Phi_{t_0}(t_0,x) = x & x\in V. \end{cases}$$

*L'application Φ_{t_0} est appelé **flot** local de l'équation* (EDO).

*De plus, en notant $\Psi := D_x\Phi_{t_0}$ la différentielle de Φ_{t_0} par rapport à x, on a que Ψ est solution de l'équation différentielle **linéaire***

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(t,x) = D_x f(t,\Phi_{t_0}(t,x)).\Psi(t,x),\ \ \Psi(t_0,x) = Id.$$

2 Systèmes différentiels linéaires

Cadre : I est un intervalle de $\mathbb{R}$. $A\in C(I;\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $b\in C(I;\mathbb{R}^n)$. On s'intéresse à l'équation différentielle :

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t). \tag{A,b-Syst}$$

2.1 Existence et unicité globale

Théorème 2.1. *[1, Chapitre 6]*
Pour tout $(t_0,x_0)\in I\times\mathbb{R}^n$, il existe une unique solution globale du problème de Cauchy : $x'(t) = A(t)x(t)+b(t)$, $x(t_0)=x_0$.

2.2 Résolvante et formules utiles

Définition 2.2. [1, Chapitre 6]
On appelle résolvante de l'équation différentielle homogène

$$x'(t) = A(t)x(t),$$

associée à (A,b-Syst), l'application $R : I\times I\to\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(t,t_0)\in I\times I$, $R(t,t_0)$ soit la valeur à l'instant t de la solution du problème de Cauchy (matriciel)

$$M'(t) = A(t)M(t), \quad M(t_0) = I_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}.$$

Proposition 2.3. *[1, Chapitre 6]*
Soient $t_0,t_1,t_2,t,s\in I$. La résolvante vérifie les propriétés suivantes :

- $R(t_0,t_0) = I_n$,
- $R(t_2,t_1)R(t_1,t_0) = R(t_2,t_0)$,
- $R(t_1,t_0)\in GL_n(\mathbb{R})$ *avec* $R(t_1,t_0)^{-1} = R(t_0,t_1)$
- $\frac{\partial R}{\partial t}(t,s) = A(t)R(t,s)$, $\frac{\partial R}{\partial s}(t,s) = -R(t,s)A(s)$,

— $\exists C > 0,\ \forall s \leq t,\ |R(t,s)| \leq Ce^{\int_s^t |A(\tau)|d\tau}$.
— $\det(R(t,s)) = \exp\left(\int_s^t tr(A(\tau))d\tau\right)$ *(Formule de Liouville).*

Proposition 2.4 (Formule de Duhamel)**.** *[1, Chapitre 6]*
Soit $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. La solution du problème de Cauchy $x'(t) = A(t)x(t)+b(t)$, $x(t_0) = x_0$ est donnée par la formule de Duhamel

$$x(t) = R(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^t R(t,s)b(s)ds.$$

3 Equations différentielles autonomes et comportement qualitatif

Cadre : $t_0 \in \mathbb{R}$, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe C^1. On s'intéresse à l'équation différentielle autonome :

$$x'(t) = f(x(t)),\ x(t_0) = x_0. \tag{Aut}$$

3.1 Stabilité

Définition 3.1. [4, Chapitre X, Section IV]
On dit que $x_0 \in \Omega$ est un **point d'équilibre** du système si $f(x_0) = 0$. Ce point d'équilibre est dit
— **stable** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\overline{x} \in B(x_0, \delta)$, la solution de $x'(t) = f(x(t)),\ x(t_0) = \overline{x}$ est définie pour tout $t \geq t_0$ et $x(t) \in B(x_0, \varepsilon)$ pour tout $t \geq t_0$.
— **instable** s'il n'est pas stable.
— **asymptotiquement stable** s'il est stable et s'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $\overline{x} \in B(x_0, \eta)$, la solution de $x'(t) = f(x(t)),\ x(t_0) = \overline{x}$ est définie pour tout $t \geq t_0$ et $\lim_{t\to+\infty} x(t) = x_0$.

Théorème 3.2 (Cas des systèmes linéaires)**.** *[1, Chapitre 8]*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le point 0 est un point d'équilibre stable du système autonome $x' = Ax$ ssi les deux propriétés suivantes sont vérifiées
— $Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}\ ;\ Re(\lambda) \leq 0\}$.
— $\forall \lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$ *tel que* $Re(\lambda) = 0$, *on a* $\dim(Ker(A - \lambda I_n)) = m_\lambda$ *où* m_λ *est la multiplicité de la valeur propre* λ *dans le polynôme caractéristique de* A.
Le point 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable du système autonome $x' = Ax$ ssi
— $Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}\ ;\ Re(\lambda) < 0\}$.

Théorème 3.3 (Cas nonlinéaire - Théorème de Lyapunov)**.** *[1, Chapitre 8]*
Soit x_0 un point d'équilibre de $x'(t) = f(x(t))$.

1. *On suppose que*
$$Sp_{\mathbb{C}}(J_f(x_0)) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}\ ;\ Re(\lambda) < 0\},$$
où $J_f(x_0)$ est la matrice jacobienne de f au point x_0. Alors x_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable.
2. *On suppose qu'il existe $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(J_f(x_0))$ tel que $Re(\lambda) > 0$. Alors x_0 est un point d'équilibre instable.*

3.2 Portraits de phase

Voir figure à la fin, [1, Section 6.3.1] et [4, Chapitre X, Section IV].

On considère le système différentiel $x' = Ax$, où $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Le but de cette sous section est de décrire l'allure des courbes décrites par les solutions dans le plan $\mathbb{R}^2$.

On distingue trois cas pour commencer :

1. Les valeurs propres λ et μ de A sont réelles et A est diagonalisable. Alors à conjugaison près,
$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}.$$

2. La matrice A admet une seule valeur propre réelle et A n'est pas diagonalisable. Alors à conjugaison près,
$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$
3. Les valeurs propres $\lambda = \alpha + i\beta$ et μ sont complexes conjuguées. Alors à conjugaison près,
$$e^{tA} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}.$$

Le cas 1. donne lieu aux cas suivants :
- **Point selle** si $\det(A) \leq 0$.
- **Noeud impropre** si $(\mathrm{tr}(A))^2 > 4\det(A) > 0$: noeuf attractif si les valeurs propres sont négatives ou noeuf répulsif si les valeurs propres sont positives.
- **Noeud propre** si $A = \lambda I_n$: attractif si $\lambda < 0$, répulsif si $\lambda > 0$.

Le cas 2. donne lieu aux cas suivants :
- **Noeuf exceptionnel** si $(\mathrm{tr}(A))^2 = 4\det(A) > 0$, A a une seule valeur propre réelle λ : attractif si $\lambda < 0$, répulsif si $\lambda > 0$.

Le cas 3. donne lieu aux cas suivants :
- **Foyer** si $4\det(A) > (\mathrm{tr}(A))^2 > 0$: attractif si $\mathrm{tr}(A) < 0$, répulsif si $\mathrm{tr}(A) > 0$.
- **Centre** si $4\det(A) > (\mathrm{tr}(A))^2 = 0$.

4 Quelques exercices

Les exercices sont tirés de [1], [2], [3], [4] et [5]. Certains peuvent faire office de développement (par exemple l'exercice 12).

Exercice 1. Soit $f \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ telle que
$$|f(x) - \cos(x)| \leq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$
On se donne $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et on s'intéresse au problème de Cauchy :
$$x'(t) = f(x(t)), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{1}$$
1. Montrer que (1) admet une unique solution globale.
2. Montrer que dans chaque intervalle $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, il existe un point α_k où f s'annule.
3. Montrer que si $x_0 \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}[$, la solution de (1) vérifie
$$x(t) \in]\alpha_k, \alpha_{k+1}[, \ \forall t \in \mathbb{R} \qquad \text{OU} \qquad x(t) = \text{constante}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$
En déduire que la solution est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (Contre-exemple au théorème de Cauchy-Péano en dimension infinie)**.** Soit c_0 l'espace des suites réelles tendant vers 0 muni de la norme $\|x\|_\infty = \sup_{n\in N} |x_n|$.
1. Pourquoi c_0 est un espace de Banach ?
2. Montrer que
$$f : x = (x_n) \in \mathbb{N} \mapsto y = f(x) \ ; \ y_n = \sqrt{|x_n|} + \frac{1}{n+1}, \ n \in \mathbb{N},$$
est une application continue de c_0 dans c_0.
3. On considère le problème de Cauchy
$$x'(t) = f(x(t)), \qquad x(0) = 0. \tag{2}$$
Supposons que $x \in C^1(]-a,a[; c_0)$ soit une solution de (2). Montrer qu'alors
$$x_n(t) > 0 \text{ et } \frac{x_n'(t)}{\sqrt{x_n(t)}} > 1,$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in]0,a[$.

4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, a[$, $x_n(t) \geq t^2/4$ et conclure.

Exercice 3 (Problème de Nicoletti)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, f_1, ..., f_n des fonctions continues bornées de $[a, b]\times\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in [a, b]$, $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$. A l'aide du théorème de point fixe de Schauder, montrer qu'il existe n applications $x_1, \ldots, x_n \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \forall t \in [a, b],\ x_i'(t) = f_i(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)),\ \text{ et } x_i(t_i) = u_i.$$

Exercice 4. On considère l'équation différentielle

$$x'(t) = (1 + \cos(t))x(t) - x^3(t). \tag{3}$$

1. Si (x, J) est une solution de (3) telle qu'il existe $\tau \in J$ pour lequel $x(\tau) = 0$ alors que peut-on dire de x ?
2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^{+,*}$. Montrer que le problème de Cauchy

   $$x'(t) = (1 + \cos(t))x(t) - x^3(t),\ x(0) = x_0,$$

   possède une unique solution maximale (x, J). Montrer ensuite qu'il existe $C > 0$ tel que

   $$0 < x(t) \leq x_0 \exp(Ct),\ \forall t \in J,\ t \geq 0.$$

3. Montrer que les solutions maximales associées à des données initiales positives de (3) sont globales sur $\mathbb{R}^+$.
4. On note Φ_0 le flot de (3) en $t = 0$ et $p(x) = \Phi_0(2\pi, x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. Calculer $p(0)$ et $p'(0)$.

Exercice 5 (Lemme d'Osgood)**.** On se donne $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^+)$.

1. En supposant que f ne s'annule pas et que

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{f(s)} < +\infty,$$

   montrer que la solution maximale du problème de Cauchy $x'(t) = f(x(t))$, $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$ est définie sur $]t_0 - T_*, t_0 + T^*[$, où

   $$T_* = t_0 - \int_{-\infty}^{x_0} \frac{ds}{f(s)} \quad \text{et} \quad T_* = t_0 + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{ds}{f(s)}.$$

2. En supposant que f s'annule en unique point ζ_0, montrer que l'intervalle de définition de la solution maximale de $x'(t) = f(x(t))$, $x(t_0) = x_0$ n'est pas majoré si $x_0 < \zeta_0$ et n'est pas minoré si $x_0 > \zeta_0$.

Exercice 6 (Lemme d'Osgood-suite)**.** On se donne $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. On suppose qu'il existe $F \in C^1(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^{+,*})$ telle que pour tout $a \in \mathbb{R}^+$,

$$\int_a^{+\infty} \frac{ds}{F(s)} = +\infty,$$

et $|f(t, x)| \leq F(|x|)$ pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Le but de l'exercice est de montrer que toute solution maximale de $x'(t) = f(t, x(t))$ est globale. On raisonne par l'absurde et on se donne une solution maximale $x \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$ tel que $\sup(J) < +\infty$.

1. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que pour tout $t \geq A$, $|x(t)| \geq 1$.
2. Soit $r : t \mapsto |x(t)|$ définie pour $t \in [A, \sup(J)[$. Montrer que

   $$\forall t \in [A, \sup(J)[,\ r'(t) \leq F(r(t)).$$

3. En déduire que x est globale.

Exercice 7 (Résolution explicite)**.** Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $x'(t) + x(t) = \sin(t)$,
2. $\sqrt{1+t^2}x' = tx + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$,
3. $x'' + 2x' + x = te^t$.

Exercice 8 (Résolution explicite - suite)**.** Résoudre le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{ll} x' = 5x - 6y, & x(0) = 1, \\ y' = 3x - 4y, & y(0) = 0. \end{array} \right.$$

Exercice 9 (Un peu de perturbation linéaire)**.** Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in C(\mathbb{R}^+; \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, $f \in C(\mathbb{R}^+; R^n)$. On suppose que $t \mapsto e^{tA}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$, et que

$$\int_0^{+\infty} |B(s)| ds < +\infty, \qquad \int_0^{+\infty} |f(s)| ds < +\infty.$$

1. Démontrer que toutes les solutions (maximales) du système $x' = (A+B(t))x+f(t)$ sont bornées.
2. Démontrer que toutes les solutions (maximales) du système $x' = B(t)x$ ont une limite finie en $+\infty$.
3. On suppose maintenant que e^{tA} est bornée pour $t \in \mathbb{R}$. Montrer que pour toute solution maximale de $x' = (A + B(t))x$, l'application $y : t \mapsto e^{-tA}x(t)$ a une limite finie en $+\infty$.
4. *Application* : Soit $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^{+\infty} |q(s)| ds < +\infty$ et x une solution de $x''+(1+q(t))x(t) = 0$. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\lim_{t\to+\infty} x(t)-\alpha\cos(t)-\beta\sin(t) = 0$.

Exercice 10. Soit $A \in C(\mathbb{R}; \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et R la résolvante associée. On suppose que que $\int_{-\infty}^{+\infty} |A(\tau)| d\tau < +\infty$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall (t, s) \in \mathbb{R}^2, \ \det(R(t, s)) \geq \delta.$$

Exercice 11 (Théorème de Floquet-Lyapunov)**.** Montrer les deux points suivants.

1. Soit $A \in C(\mathbb{R}; \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ T-périodique. Montrer qu'il existe une application T-périodique $Q : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{C})$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que x est solution de $x'(t) = A(t)x(t)$ ssi $t \mapsto v(t) := Q(t)x(t)$ est solution de $v' = Mv$.
2. Soit $A \in C(\mathbb{R}; \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ T-périodique. Montrer qu'il existe une application $2T$-périodique $Q : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{R})$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que x est solution de $x'(t) = A(t)x(t)$ ssi $t \mapsto v(t) := Q(t)x(t)$ est solution de $v' = Mv$.

Exercice 12 (Condition de Kalman)**.** [5, Section 2.2.1]
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. On considère le système contrôlé

$$x' = Ax + Bu, \tag{4}$$

où x désigne *l'état* du système et u désigne le *contrôle* du système. Autrement dit, on se permet d'agir sur l'état du système x à travers la commande u.

Définition 4.1. Soit $T > 0$. On dit que le système est contrôlable au temps T si pour toute donnée initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$, toute donnée finale $x_f \in \mathbb{R}^n$, on peut trouver $u \in C([0, T]; \mathbb{R}^m)$ telle que la solution (globale) sur $[0, T]$ du problème de Cauchy

$$x' = Ax + Bu, \ x(0) = x_0,$$

vérifie $x(T) = x_f$.

Le but de l'exercice est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 4.2. *Le système* (4) *est contrôlable en temps* T *(quelconque) ssi la matrice de Kalman*

$$K := (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$$

est de rang n.

1. Montrer que la contrôlabilité au temps T équivaut à la surjectivité de l'application linéaire

$$\Phi : u \in C([0,T]; \mathbb{R}^m) \mapsto \int_0^T e^{(T-s)A} Bu(s) ds \in \mathbb{R}^n.$$

2. Montrer, en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, que si $\text{rang}(K) < n$, alors, il existe un vecteur ligne $\psi \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ tel pour tout entier k, on ait

$$\psi A^k B = 0.$$

En déduire que si $\text{rang}(K) < n$, l'application Φ n'est pas surjective.

3. Montrer que si Φ n'est pas surjective, on peut trouver $\psi \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ tel que

$$\int_0^T |B^{\text{tr}} e^{(T-t)A^{\text{tr}}} \psi^{\text{tr}}|^2 dt = 0.$$

En déduire que

$$\psi B = \psi AB = \dots = \psi A^{n-1} B = 0.$$

Conclure.

4. Pour les couples de matrices suivants, trouver pour lesquels (4) est contrôlable :

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13. Soient $k > 0$ et le système

$$\begin{cases} x' = v, \\ v' = -kv - \sin(x). \end{cases}$$

Démontrer que l'équilibre $(0,0)$ est asympotiquement stable.

Exercice 14 (Système de Lotka-Volterra)**.** On considdère le système

$$\begin{cases} n' = n(a - bp), \\ p' = p(cn - d), \end{cases} \tag{L-V}$$

où a, b, c, d sont des paramètres strictement positifs.

1. Déterminer l'ensemble des points critiques du système (L-V).
2. Montrer que les axes sont invariants par le système (L-V) et que le quart de plan $Q := \{(n,p)\ ;\ n, p > 0\}$ est invariant également.
3. Représenter l'orientation du champ de vecteurs associé à (L-V) dans quatre zones caractéristiques de Q et montrer que pour tout $(n_0, p_0) \in Q$, le flot associé $(n(t), p(t))$ rencontre successivement les quatre zones en question.
4. Déterminer une intégrale première à variable séparées, c'est à dire déterminer $E(n,p) = G(n) + H(p)$, constante le long des trajectoires $(n(t), p(t))$.
5. En déduire que toutes les solutions pour lesquelles $(n_0, p_0) \in Q$ sont périodiques.

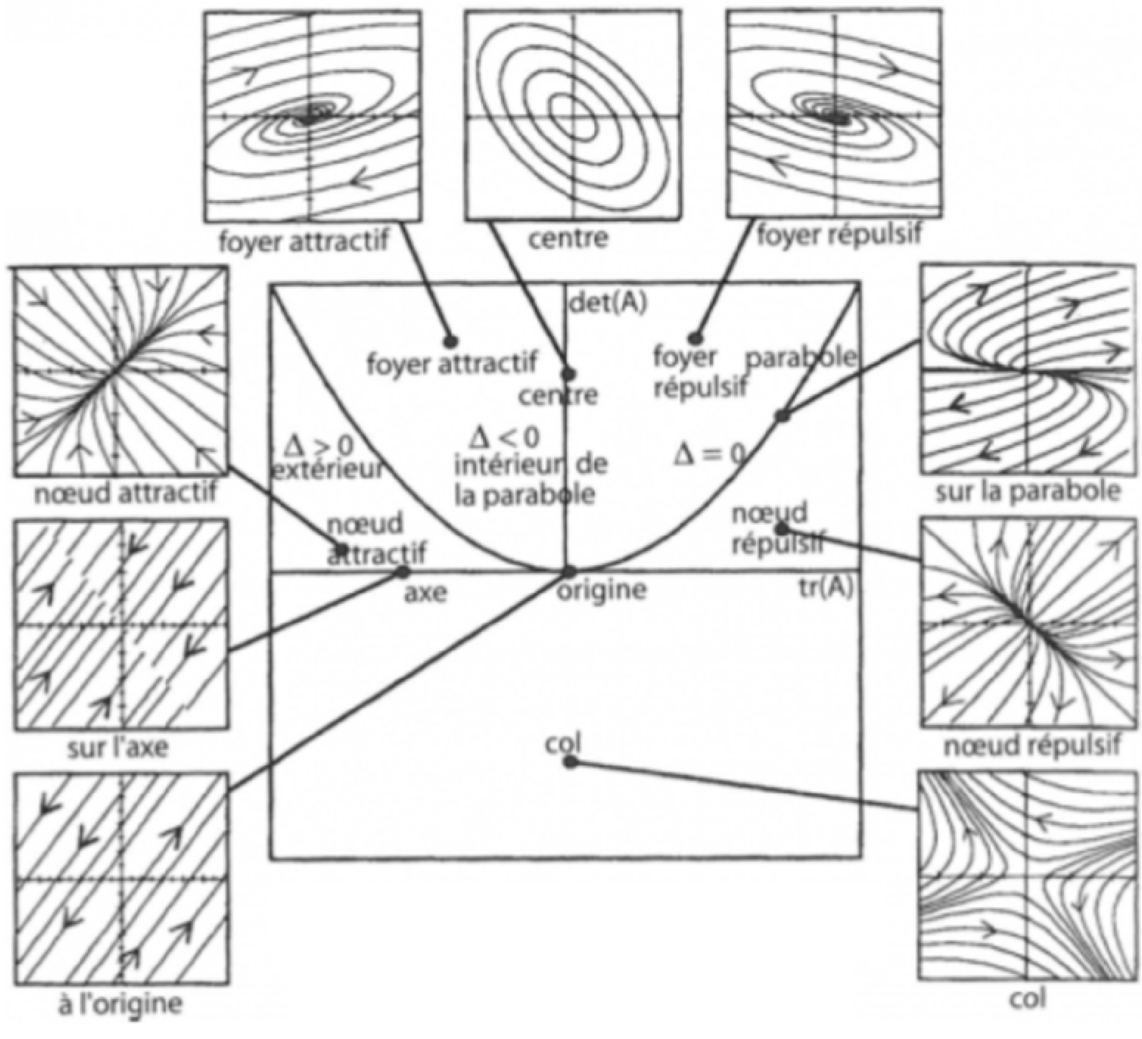
Exercice 15. Discuter la stabilité de l'origine et tracer, pour $j = 1, \ldots, 5$ les portraits de phase associés aux systèmes linéaires

$$\frac{dX}{dt} = A_j X$$

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 := \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_3 := \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad A_4 := \begin{pmatrix} -5 & -12 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A_5 := \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$



Références

[1] Sylvie Benzoni-Gavage. *Calcul différentiel et équations différentielles.* Dunod.

[2] Stéphane Gonnord and Nicolas Tosel. *Thèmes d'analyse pour l'Agrégation : Calcul différentiel.* Ellipses.

[3] Xavier Gourdon. *Les maths en tête : Analyse.* Ellipses.

[4] Hervé Queffélec and Claude Zuily. *Analyse pour l'agrégation.* Dunod.

[5] Emmanuel Trélat. *Contrôle optimal.* Mathématiques Concrètes. [Concrete Mathematics]. Vuibert, Paris, 2005. Théorie & applications. [Theory and applications].