

陀螺運動的角動量初等分析

An Elementary Analysis of Angular Momentum of Gyro Motion

柳銘哲 Ming-Tse Liu

元培醫事科技大學通識中心 助理教授

Assistant Professor, General Education Center, Yuanpei University of Medical Technology

摘 要

我們從剛體轉動力學的知識出發，利用尤拉角的方法去連結固定座標系和隨物轉動座標系之間座標的關係，隨後利用在固定座標系觀察下某物理量的時變率等於在旋轉座標系下該物理量的時變率加上旋轉角速度與該物理量的外積得到一組聯立的微分方程式，最後利用這組微分方程式研究在均勻重力場作用下一個一端點被固定住的對稱陀螺的旋轉運動。我們用 matlab 數值模擬了一些一般化情形，討論了起始條件對陀螺的進動與章動的影響。此外，在章動效應很小情況下，我們從基本的力學原理出發，解釋了進動的產生所導致豎直方向看似角動量不守恆的問題。這樣的討論對大學物理剛體部分教學提供一定的參考價值以及對尤拉角這個概念有更深一層的認識。

關鍵詞：陀螺儀、進動、章動、定軸轉動、尤拉角

ABSTRACT

We start with the knowledge of rotational dynamics of rigid body, and use the method of Eulerian angle to connect the coordinate relationship between the fixed coordinate system and the rotating coordinate system which moving with the object. Then making use the fact that the time-varying rate of a certain physical quantity in a fixed coordinate system equals to the time-varying rate of that physical quantity in the rotating coordinate system plus the outer product of the rotational angular velocity and that physical quantity to obtain a set of simultaneous differential equations. Finally, this set of differential equations is used to study the rotational motion of a symmetric gyro whose one end is fixed under the action of a uniform gravity field. We numerically simulated some general situations with Matlab and discussed the influence of initial conditions on the precession and nutation of the gyro. In addition, on the premise of the nutation effect being small, starting with the basic mechanics principle, we explains the problem that the vertical direction seems to be non-conservation of angular momentum caused by the precession. This kind of discussion provides a certain reference value for the teaching of the rigid body part of university physics and a deeper understanding of the concept of Eulerian angle.

Keywords : Gyroscope, Precession, Nutation, Fixed axis rotation, the Eulerian angles.

壹、前言

角動量這個物理量、這個概念在物理上非常重要，有很多科技應用都是利用角動量守恆原理。例如直升機的飛行（吳世永、周鳴宇、王坤與羅家忠，2012）、還有現在非常流行的四軸無人飛行器（姜楠與楊紹瓊，2019），它也可以解釋為什麼自行車騎得越快，越不容易倒？迎新晚會上為什麼火球舞的火球旋轉速度會不一樣。最令人印象深刻的，莫過於飛行器上的陀螺儀（廖耀發與余守憲，2004）。微觀世界的量子力學裡還有「角動量量子化」呢（羅凌霄，2008）。

在大學的普通物理教學中，借助於定性的演示實驗，可以幫助學生理解和掌握角動量為何物？角動量守恆又在說些甚麼？傳統的方法是使用可以在水平面自由轉動的轉椅並配以 2 個啞鈴和 1 個較為笨重的自行車車輪，由 2 人配合操作，才得以完成¹。在教學現場，很多老師挖空心思也要設計一個既簡單又有趣的實驗，讓學生很容易去體驗角動量守恆的奧秘。例如：鄭青岳（1985）將沙裝入漏斗，而漏斗被懸掛起來可自由繞垂直軸轉動。開始時稍使漏斗轉動。當沙從漏斗下口漏出時，可以看到漏斗越轉越快。這就說明了角動量守恆原理。馮法軍（1995）用一根棍子，垂直置放，底邊與地面接觸，上端繫上一個球擺。一開始懸線與鉛直棍子有一個角度，令球擺做圓錐動。但擺線繞繞過棍子時，越繞越短，擺球一面繞棍轉動，一面螺旋下降，且越轉越快，擺線繞在棒上呈螺旋形。這也用來說明角速度會隨半徑縮短越來越快。其他有關演示角動量守恆的例子可參考卞怡婧、路婧與朱廣天（2019），羅新凱（1985），劉奎、張巍、孫陽丹與胡安正（2011），王佑坤（2011），李海寶（2005）。

最令人印象深刻的，莫過於飛行器上的陀螺儀（廖耀發等，2004）。1852 年，法國科學家傅科(Jean Bernard Léon Foucault)製作了一套能顯示地球轉動的儀器，命名為陀螺儀。1914 年陀螺儀開始作為慣性基準構成飛機的方向穩定裝置。20 世紀 20 年代起，陀螺儀廣泛應用於船舶、飛機的自動控制、導航系統。50 年代之後，隨著靜電懸浮、撓性支撐技術的出現，陀螺儀的構造得到很大改善，精度大為提高。1975 年，雷射陀螺儀研製成功，它可靠性高，不受重力加速度的影響，在飛機的慣性導航中得到廣泛應用。

貳、理論

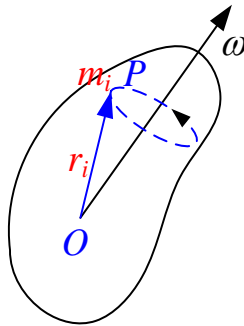
相較起來，要描述一個剛體(rigid body)的轉動(rotation)比要描述一個質點(particle)的移動(translation)來得複雜且抽象一點。首先，我們必須學習用角度(angle)來當變數而不是質點的直角座標位置(position under rectangular

¹ 科技大觀園，周祥順教授製作 https://youtu.be/uv_z7b9kmSY 擷取時間 2021/2/26

coordinates)來當變數，而角度（向量）的方向是由右手螺旋定則(Right-hand spiral rule)來決定的；我們必須用角速度、角動量和力矩來替代熟悉的速度、動量和力，這些對大學部低年級同學來說有點陌生且具挑戰性，我們試圖在這篇文章中集中精力說明在均勻重力場下陀螺的定點轉動，並用數值方法得出其在不同狀況下之解，最後回應 1965 年諾貝爾物理學獎得主費因曼(Richard Philips Feynman)的呼籲：「對一個問題如果不能分析每個過程的受力狀況，那麼我們就沒有真正理解它。」所以我們會就其某一特殊情況下，用普通物理學的知識得出其近似解，並從而得知進動(precession)和章動(nutation)的起源。雖然之前也有人做過此類問題，例如 2018 年，邵懷華和卓玉霖在物理與工程發表的一篇「陀螺進動中的“角動量不守恒”問題」論文（以下簡稱邵文）裡就處理過此問題，但我們稍微用了不同的方法並得到較為清晰的有關方向的輪廓。

什麼叫做理解了陀螺的轉動，就是能夠清楚地說出陀螺的角速度隨時間變化的關係。為了得到此關係，我們必須有一個類似牛頓第二運動定律的運動方程式，它是一個系統中某一個與轉動有關的物理量隨時間變化與外在影響因子之間的關係式。這個與系統轉動有關的物理量就是角動量（它又跟我們最後要解的角速度有關）；而這個外在的影響因子就是力矩。因此，我們首先要知道如何描述一個剛體的總角動量。

一、旋轉剛體的角動量



圖一 一個固定點 O （不一定是質心），在某一瞬間剛體繞通過 O 的某一軸有一個角速度 ω 。

假設剛體上有一個固定點 O （不一定是質心），在某一瞬間剛體繞通過 O 的某一軸有一個角速度 ω ，則依照普通物理得知，剛體上任一點 i 有速度 $\mathbf{v}_i = \omega \times \mathbf{r}_i$ ，如圖一所示。因為每個質點角動量 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ ，並對所有質點求和，可得剛體總角動量

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times (\omega \times \mathbf{r}_i) \quad (1)$$

我們任意選擇一座標原點位於 O 的固定的直角座標系統 (a fixed rectangular coordinate system) $Oxyz$ (x 、 y 、 z 分別為互相垂直的三個座標軸)，經過一番整理後得

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $I_{xx} = \sum m_i(y_i^2 + z_i^2)$ ， $I_{yy} = \sum m_i(z_i^2 + x_i^2)$ ， $I_{zz} = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2)$ ，我們稱它們為慣性矩(moments of inertia)。至於 $I_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i = I_{yx}$ ， $I_{yz} = -\sum_i m_i y_i z_i = I_{zy}$ ， $I_{zx} = -\sum_i m_i z_i x_i = I_{xz}$ ，我們稱它們為慣性積(products of inertia)。

二、慣性主軸 (principal axes of inertia)

由於角動量 (L) 和角速度 (ω) 的關係是由張量 I (即 I_{xx} ， I_{xy} ， I_{xz} ... 等九個分量) 聯繫， L 和 ω 沒有共線(co-linear)，也就是說即使 $\omega = (\omega_x, 0, 0)$ ，這時的 $L_y \neq 0$ 、 $L_z \neq 0$ 。我們希望找到一個特殊的角速度方向，而它對應的角動量方向剛好和它相同 (即共線)。1750 年 Euler 發現這是可以辦到的，而且符合這個期望的角速度方向有三個解 (暫且不考慮特例)。即 $L_1 = I_1 \omega_1$ 、 $L_2 = I_2 \omega_2$ 、 $L_3 = I_3 \omega_3$ ，其中 I_1 ， I_2 ， I_3 皆是純量 (事實上，因為 $I_{xy} = I_{yx}$ 、 $I_{yz} = I_{zy}$ 、 $I_{zx} = I_{xz}$ ，在數學上可以證明，這些純量都是實數)。於是我們希望建立一個新的直角座標系原點仍然在 O 點，它被固定在旋轉的物體上隨物體旋轉(fixed in the body)，由數學理論知，在這套座標下，慣性積都會於 0。這時針對通過 O 點的任意軸所做的轉動，其角動量都可寫成 $L = I \cdot \omega = I_1 \omega_1 \hat{i} + I_2 \omega_2 \hat{j} + I_3 \omega_3 \hat{k}$ ，寫成張量型式即為

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

此時新的座標軸稱為慣性主軸(principal axes of inertia)，或直接簡稱為該剛體的主軸(principal axes)。在這套座標下，雖然仍無法更改 L 和 ω 沒有共線的事實，但其表達式相對簡單 (且只有針對主軸所做的旋轉， L 和 ω 才會在同一方向)。此外，這裡留下了一個缺憾，那就是這個座標系隨物體旋轉，而我們觀察者卻位於靜止不動的慣性座標系，如何描述剛體的動力學行為呢？

三、動力學方程式(dynamic equation of motion)

針對慣性座標系觀察到的力學量的時變率與旋轉座標系觀察到同一力學量的時變率之間關係的處理，可以參考一般力學教科書或柳銘哲 (2018)，其結論是對任意的向量 Q ，我們有

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{dQ}{dt}\right)_{rotating} + \Omega \times Q \quad (4)$$

其中 Ω 是旋轉座標對固定座標的角速度。針對我們處理的問題： $\Omega = \omega$ 即旋轉座標系的角速度剛好是轉動物體的角速度； $Q = L$ ；由於 $\tau = (dL/dt)_{fixed}$ ，我們可得

$$\begin{aligned} \tau_1 &= I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 \\ \tau_2 &= I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1 \\ \tau_3 &= I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 \end{aligned} \quad (5)$$

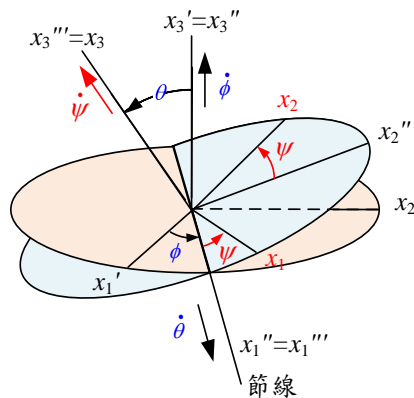
上式被稱為尤拉方程式(Euler equations)。

這樣的表達式乾淨許多，首先如果沒有主軸概念的幫忙，會有慣性積出現在方程式中，那樣處理起來就麻煩多了；其次，若沒有隨物旋轉的座標系幫忙，連慣性矩（一般說的轉動慣量）都會成為時間的函數。接下來尚存一個麻煩的問題：用旋轉座標下的單位向量 $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ 來表達其後的轉動不方便也不直觀，所以我們引入尤拉角。

四、尤拉角(The Eulerian Angles)

首先，讓我們先來釐清任意旋轉後的座標系與最初座標系之間的座標關係。

假設有一個固定的座標系 x'_1, x'_2, x'_3 ，透過尤拉角 ϕ, θ, ψ 連續的三次轉動，來到另一個座標系統 x_1, x_2, x_3 。第一次轉動如圖二所示，以 x'_3 為轉軸，依右手定則轉動一個 ϕ 角，得到新的座標系 x''_1, x''_2, x''_3 ；接下來，第二次轉動，以 x''_1 為轉軸，依右手定則轉動一個 θ 角，得到新的座標系 x'''_1, x'''_2, x'''_3 ；最後，第三次轉動以 x'''_3 為轉軸，依右手定則轉動一個 ψ 角，得到新的座標系 x_1, x_2, x_3 ，此時兩座標系統之間的單位向量和座標之間的關係為



圖二 先後分別以 x'_3 、 x''_1 、 x'''_3 為轉軸，依右手定則轉動一個 ϕ 、 θ 、 ψ 角，得到新的座標系 x_1, x_2, x_3 。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \quad (6)$$

其中 $\lambda_{11} = \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi$, $\lambda_{21} = -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi$, $\lambda_{31} = \sin \theta \sin \phi$, $\lambda_{12} = \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi$, $\lambda_{22} = -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi$, $\lambda_{32} = -\sin \theta \cos \phi$, $\lambda_{13} = \sin \psi \sin \theta$, $\lambda_{23} = \cos \psi \sin \theta$, $\lambda_{33} = \cos \theta$ 。

再來，

$$\omega = \omega_1 \hat{i} + \omega_2 \hat{j} + \omega_3 \hat{k} = \dot{\phi} \hat{k}'' + \dot{\theta} \hat{i}''' + \dot{\psi} \hat{k} \quad (7)$$

而 $\hat{k}'' = \sin \theta \hat{j}''' + \cos \theta \hat{k}'''$, $\hat{j}''' = \sin \psi \hat{i} + \cos \psi \hat{j}$, $\hat{k}''' = \hat{k}$, $\hat{i}''' = \cos \psi \hat{i} - \sin \psi \hat{j}$,

經過整理後

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_3 &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{aligned} \quad (8)$$

參、數值模擬

一、對稱陀螺一端點固定在均勻重力場下的運動

考慮在均勻重力場作用下一個一端點被固定住的對稱陀螺的旋轉運動。我們將固定點選為固定座標和隨物運動座標的原點，簡化了的陀螺和其歐拉角如圖三所示。 x'_3 （固定）軸對應到垂直方向，我們選擇 x_3 （隨物運動）軸是陀螺的對稱軸。從固定點到質量中心的距離是 h ，陀螺的質量是 M 。

因為是一個對稱陀螺，所以我們可以令 $I_1 = I_2 = I_{12}$ 。固定點對力矩沒有貢獻，唯一對力矩有貢獻的外力來自重力，它造成的力矩為

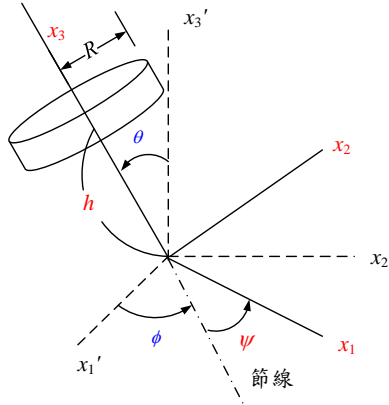
$$\tau = h \hat{k} \times (-Mg) \hat{k}' = Mgh \sin \theta (\cos \psi \hat{i} - \sin \psi \hat{j}) \quad (9)$$

將上式帶入(5)式，可得

$$\begin{aligned} Mgh \sin \theta \cos \psi &= I_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3 (I_3 - I_{12}) \\ -Mgh \sin \theta \sin \psi &= I_2 \dot{\omega}_2 + \omega_3 \omega_1 (I_{12} - I_3) \\ 0 &= I_3 \dot{\omega}_3 \end{aligned} \quad (10)$$

由上式立刻得知 ω_3 為常數，可以令其為 $\omega_{30} = \dot{\phi}_0 \cos \theta_0 + \dot{\psi}_0$
將(8)式及其導數帶入(10)式，經整理後可得

$$\begin{aligned}
\ddot{\phi} &= \frac{-I_{12}\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta + I_{12}\dot{\theta}\dot{\psi} - (I_{12} - I_3)\omega_{30}\dot{\theta}}{I_{12}\sin\theta} \\
\ddot{\theta} &= \frac{-I_{12}\dot{\phi}\dot{\psi}\sin\theta + (I_{12} - I_3)\omega_{30}\dot{\phi}\sin\theta + Mgh\sin\theta}{I_{12}} \\
\ddot{\psi} &= \frac{I_{12}\dot{\phi}\dot{\theta} - I_{12}\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta + (I_{12} - I_3)\omega_{30}\dot{\theta}\cos\theta}{I_{12}\sin\theta}
\end{aligned} \quad (11)$$



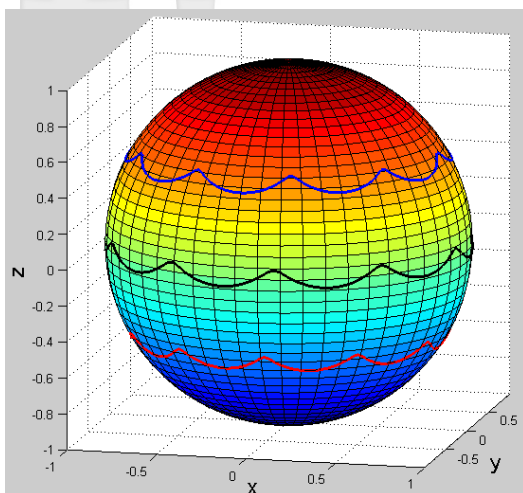
圖三 簡化了的陀螺和其歐拉角。 x'_3 （固定）軸對應到垂直方向，我們選擇 x_3 （隨物運動）軸是陀螺的對稱軸。

另外，由於 $\boldsymbol{\tau} \perp \hat{\mathbf{k}}'$ ，所以 $\mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{k}}'$ 也必須是常數，可以令這常數為 $L_\phi = \dot{\phi}(I_{12}\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta) + I_3\dot{\psi}\cos\theta$

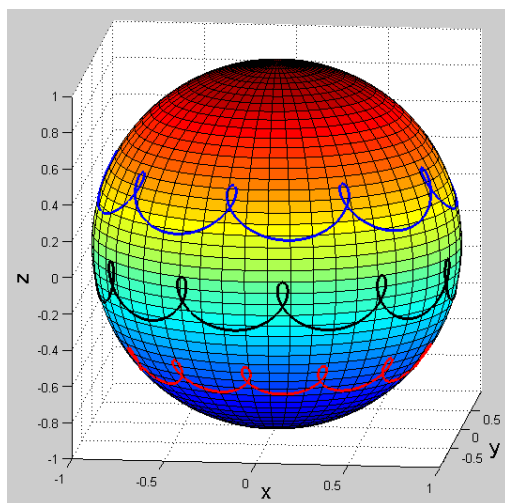
有了(11)式之後，只要給予起始條件： $\phi_0, \theta_0, \psi_0; \dot{\phi}_0, \dot{\theta}_0, \dot{\psi}_0$ ，我們就可以作如下的分析：

（一）抖動的分類

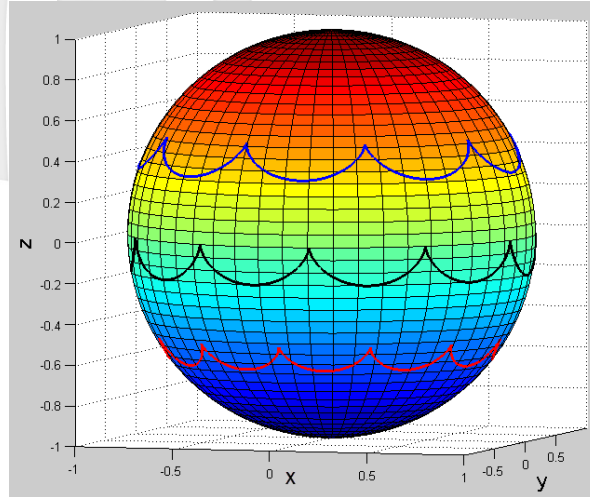
傳統上， ϕ 方向的運動稱為進動(cession)； θ 方向的運動稱為章動(nutation)。我們暫時稱其合成的運動叫做抖動。抖動大概可分為三類：第一類是它進動的方向維持固定。我們試舉一例，如圖四所示。假設 $\phi_0 = \pi, \psi_0 = 0; \dot{\phi}_0 = 1, \dot{\theta}_0 = 0.5, \dot{\psi}_0 = 10, h = 0.5R(I_{12} = I_3), g = 9.8\text{m/s}^2$ ，而 θ_0 分別等於 $\pi/3, \pi/2, 2\pi/3$ 。注意：因為只有牽涉一個物體，所以與質量無關；又只牽涉定點轉動，所以與簡化了的陀螺的圓盤狀主體的半徑無關。其中 $I_3 = MR^2/2, I_{12} = MR^2/4 + Mh^2$ 。



圖四 自轉軸在單位球上的投影，起始條件為 $\phi_0 = \pi, \psi_0 = 0; \dot{\phi}_0 = 1, \dot{\theta}_0 = 0.5, \dot{\psi}_0 = 10, h = 0.5R(I_{12} = I_3)$ 。



圖五 自轉軸在單位球上的投影，起始條件為 $\phi_0 = \pi, \psi_0 = 0; \dot{\phi}_0 = -0.5, \dot{\theta}_0 = 0, \dot{\psi}_0 = 10, h = 0.5R(I_{12} = I_3)$ 。



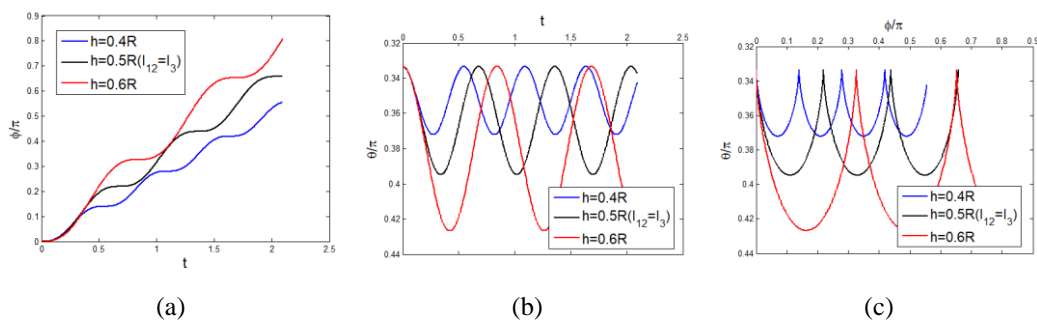
圖六 自轉軸在單位球上的投影，起始條件為 $\phi_0 = \pi, \psi_0 = 0; \dot{\phi}_0 = 0, \dot{\theta}_0 = 0, \dot{\psi}_0 = 10, h = 0.5R(I_{12} = I_3)$ 。

第二類是它進動的方向有「倒退」(regression)的現象。如圖五所示。在這裡我們假設 $\phi_0 = \pi, \psi_0 = 0; \dot{\phi}_0 = -0.5, \dot{\theta}_0 = 0, \dot{\psi}_0 = 10, h = 0.5R(I_{12} = I_3), g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ，而 θ_0 分別等於 $\pi/3, \pi/2, 2\pi/3$ 。

第三類是它在章動是極值時，進動速度恰巧為零，之後繼續朝同一方向行進。在這裡我們假設 $\phi_0 = \pi, \psi_0 = 0; \dot{\phi}_0 = 0, \dot{\theta}_0 = 0, \dot{\psi}_0 = 10, h = 0.5R(I_{12} = I_3), g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ，而 θ_0 分別等於 $\pi/3, \pi/2, 2\pi/3$ ，如圖六所示。

(二) 轉動慣量對抖動的影響

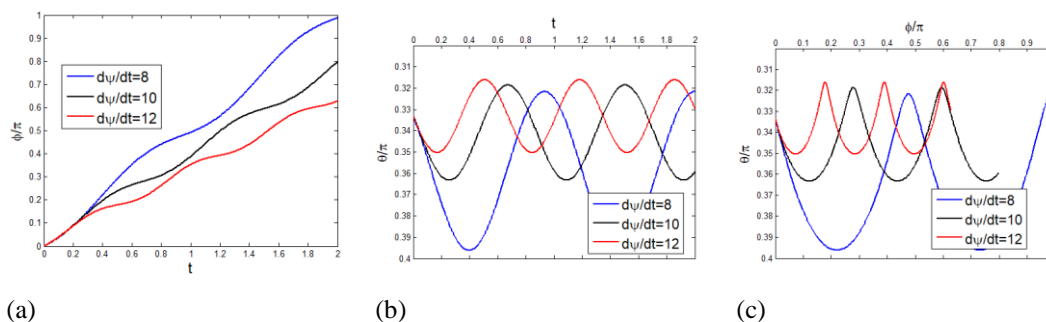
如圖七所示。我們假設 $\phi_0 = 0, \theta_0 = \pi/3, \psi_0 = 0; \dot{\phi}_0 = 0, \dot{\theta}_0 = 0, \dot{\psi}_0 = 10, g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ，而 h 分別等於 $0.4R, 0.5R (I_{12} = I_3), 0.6R$ 。以 I_3 當標準， I_{12} 愈小(h 愈短，重心愈低)，抖動的愈輕微，進動的愈慢，章動的周期愈短； I_{12} 愈大(h 愈長，重心愈高)，抖動的愈嚴重，進動的愈快，章動的周期愈長。



圖七 假設 $\phi_0 = 0, \theta_0 = \pi/3, \psi_0 = 0; \dot{\phi}_0 = 0, \dot{\theta}_0 = 0, \dot{\psi}_0 = 10, g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ，而 h 分別等於 $0.4R, 0.5R (I_{12} = I_3), 0.6R$ 。

(三) 初自旋角速度對抖動的影響

如圖八所示。我們假設 $\phi_0 = 0, \theta_0 = \pi/3, \psi_0 = 0; \dot{\phi}_0 = 1, \dot{\theta}_0 = 0.5, h = 0.6R, g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ，而 $\dot{\psi}_0$ 分別等於 8, 10, 12。 $\dot{\psi}_0$ 愈小（啟動自旋愈慢），抖動的愈嚴重，進動的愈快，章動的周期愈長； $\dot{\psi}_0$ 愈大（啟動自旋愈快），抖動的愈輕微，進動的愈慢，章動的周期愈短。



圖八 假設 $\phi_0 = 0, \theta_0 = \pi/3, \psi_0 = 0; \dot{\phi}_0 = 1, \dot{\theta}_0 = 0.5, h = 0.6R, g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ，而 $\dot{\psi}_0$ 分別等於 8, 10, 12。

二、 陀螺水平自旋的力學分析

2018 年，邵懷華和卓玉霖在物理與工程發表的一篇「陀螺進動中的“角動量不守恒”問題」論文裡，（以及之前相關討論如高炳坤，2004 和其後如伊厚會與姚延立，2016），說道：「然而理想情況下，水平釋放後陀螺在豎直方向關於支撐點 O 所受的力矩為零，那麼進動產生的向上的角動量豈不造成豎直方向角動量不守恒？著名物理學家理查德·費恩曼曾說過，對一個問題如果不能分析每個過程的受力，那麼我們就沒有真正理解它。」截至目前為止，我們都是只用角動量和力矩解決此類問題，對於固定點施力於系統或質心的效應隻字未提（因為此力造成的力矩為零）。該篇作者已經用力的觀點重新審視這問題，只是該篇論文的力圖不甚清晰，加上 \mathbf{F}'_x （依紹文所言為慣性力）和 \mathbf{F}_x 有點語焉不詳，或許不才駑鈍，無法領受其義，今在此用另一力圖及較系統化的令變數正負號含義，重新推導一次，或許能令提供讀者較快速理解該篇論文。

我們處理一回轉效應，其演示簡化模型示意圖如圖九所示，小圓盤代表一個被簡化了的陀螺，它的旋轉軸被固定在 O 點， \mathbf{L} 為自轉角動量（一開始為水平方向）， R 為回轉半徑，為了討論方便，假設陀螺質量為 m ，質心在懸空端 P 點。我們選擇一個如圖九所示的 $Oxyz$ 座標系，並做力的分析。進動和章動的角速度分別是 $\omega_p \hat{j} = \omega_y \hat{j} = \Delta\phi/\Delta t \hat{j}$ 和 $\omega_n \hat{i} = \omega_x \hat{i} = \Delta\theta/\Delta t \hat{i}$ ，這樣系統性的令變數有個好處，由算出來的正負號來告訴我們正確的受力和旋轉方向。由於作用於質心的重力將造成 $-\hat{i}$ 方向的力矩，使得原來的自旋角動量 \mathbf{L} 獲得 ΔL_x （在 $-\hat{i}$ 方向），但這連帶會令整個陀螺獲得一個額外的角動量變化 ΔL_y （在 $-\hat{j}$ 方向），但 \hat{j} 方向應該角動量守恒的，唯一的辦法是讓原來的自旋角動量 \mathbf{L} 向下掉下 $\Delta\alpha$ 角度來抵銷 \hat{j} 方向角動量變化。假設 \mathbf{F}_x 來完成 \mathbf{L} 向下掉的任務； $-\mathbf{F}_x$ 來完成整個陀螺額外獲得進動（或稱旋進）。

$$\begin{cases} \tau \Delta t = (\mathbf{R} \times \mathbf{F}_x) \Delta t = \Delta \theta \hat{\mathbf{i}} \times \mathbf{L} = -L \Delta \theta \hat{\mathbf{j}} \\ \mathbf{R} \times -\mathbf{F}_x = +mR^2 \frac{d\omega_y}{dt} \hat{\mathbf{j}} \end{cases} \quad (12)$$

前者代表 $\hat{\mathbf{j}}$ 方向角動量 \mathbf{L} 變化（下壓），後者代表 $-\hat{\mathbf{j}}$ 方向（上抬）角動量變化（互相抵銷）。整理後得（注意(12)式的正負號，因為轉動時，物理量的變化等於角度的變化與物理量的外積 $\Delta \mathbf{L} = \Delta \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{L}$ ）

$$RF_x = -L\omega_x = -mR^2 \frac{d\omega_y}{dt} \quad (13)$$

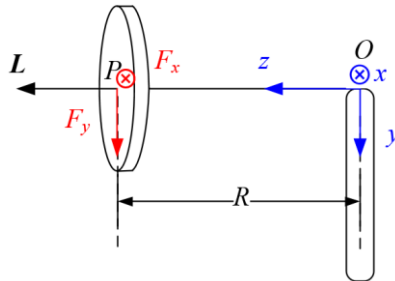
相似的，在 $\hat{\mathbf{i}}$ 方向的章動，必定影響當初 $m\mathbf{g}$ 造成的力矩（或角動量的變化）。假設 $m\mathbf{g} + \mathbf{F}_y$ 造成自旋角動量的變化 ΔL_x 在 $-\hat{\mathbf{i}}$ 方向，則 $-\mathbf{F}_y$ 會造成整個陀螺獲得一個額外的角動量變化在 $\hat{\mathbf{i}}$ 方向，

$$\begin{cases} (\mathbf{R} \times (m\mathbf{g} + \mathbf{F}_y)) \Delta t = \Delta \phi \hat{\mathbf{j}} \times \mathbf{L} = +L \Delta \phi \hat{\mathbf{i}} \\ \mathbf{R} \times -\mathbf{F}_y = mR^2 \frac{d\omega_x}{dt} \hat{\mathbf{i}} \end{cases} \quad (14)$$

整理後得

$$\begin{cases} (mg + F_y)R = -L\omega_y \\ RF_y = mR^2 \frac{d\omega_x}{dt} \end{cases} \quad (15)$$

$$\rightarrow mgR + mR^2 \frac{d\omega_x}{dt} = -L\omega_y \quad (16)$$



圖九 簡化的迴轉效應示意圖。

以上討論都是在章動較小的情況下所作的。合併兩式可得

$$\frac{d^2 \omega_x}{dt^2} = -\left(\frac{L}{mR^2}\right)^2 \omega_x$$

設起始條件是 $\omega_x = \omega_y = 0$ ，則

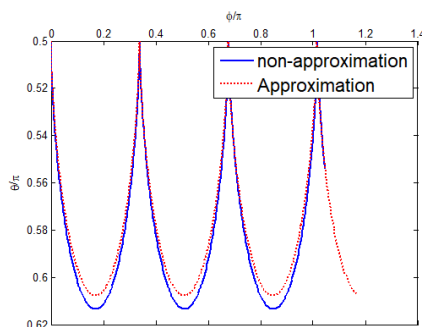
$$\begin{cases} \omega_x = -\frac{mgR}{L} \sin\left(\frac{L}{mR^2} t\right) \\ \omega_y = -\frac{mgR}{L} \left(1 - \cos\left(\frac{L}{mR^2} t\right)\right) \end{cases} \quad (17)$$

進而對兩個角速度分別求積分，可以得到進動角 ϕ 和章動角 θ 隨時間的變化關係，結合初始條件 $\theta(t=0) = \alpha(t=0) = 0$ ，可得

$$\begin{cases} \theta(t) = -\left(\frac{mR^2}{L}\right)^2 \frac{g}{R} \left[1 - \cos\left(\frac{L}{mR^2}t\right)\right] \\ \phi(t) = -\frac{mgR}{L} \left[t - \frac{mR^2}{L} \sin\left(\frac{L}{mR^2}t\right)\right] \end{cases} \quad (18)$$

這小節的討論所用的代號，大致上都和邵文一致，以方便讀者交互參照。尤其標出 x, y, z 的方向。這樣可以方便看出進動的方向是在 $-\hat{j}$ 的方向，章動活動的區域也都在水平面的下方。將它和第一節的討論融會起來可得圖十所示，其中假設 $\phi_0 = 0, \theta_0 = \pi/2, \psi_0 = 0; \dot{\phi}_0 = 0, \dot{\theta}_0 = 0, h = 1.2R, \dot{\psi}_0 = 20, g = 9.8$ 。其實這是經過挑選的，因為一般說來，周期和振幅在數值上是沒有那麼契合的。請特別注意：此時在 \hat{j} 方向的角動量是守恆的，因為在 \hat{j} 方向的角動量在任何時刻（ $-L\theta$ 的負號請參考(12)式）

$$-L\theta + mR^2\omega_y = 0 \quad (19)$$



圖十 假設 $\phi_0 = 0, \theta_0 = \pi/2, \psi_0 = 0; \dot{\phi}_0 = 0, \dot{\theta}_0 = 0, h = 1.2R, \dot{\psi}_0 = 20, g = 9.8$ 。

肆、結論與討論

本文一開始從比較嚴謹的方法討論定點轉動的問題，這些方法或結論對大一學習普通物理學的學生來說應該覺得很新奇。首先，一般說來剛體角動量的方向並非角速度的方向，除非轉動軸剛好落在其主軸上。接下來，除非找到三個主軸當作座標軸，否則角動量和角速度的關係很複雜——它是一個張量方程式，每個角動量分量都和三個角速度分量有關。當找到主軸當作座標軸時，以任意方向當轉軸方向的轉動其每個角動量分量才都只和對應的角速度有關而和其他兩個角速度分量無關。一旦轉動啟動後，當初三個主軸方向也跑掉了，前述的好處就不再存在了，所以我們需要一個隨物轉動的座標系來描述角動量，於是有了(4)式的關係式。最後，在尤拉角的幫忙下，我們可以在固定座標系和隨物轉動座標系間做座標變換，換句話說，用 $(\phi, \theta, \psi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ 替換(5)式中的 $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ，這樣就得到 (ϕ, θ, ψ) 的二階聯立微分方程式。

對於進動和章動合併的抖動運動中，由於 $\theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max}$ ，我們以當 $\theta = \theta_{\max}$ 時將抖動做為三類： $\dot{\phi} > 0$ 如圖四； $\dot{\phi} < 0$ 如圖五； $\dot{\phi} = 0$ ，如圖六所示。

以 I_3 當標準， I_{12} 愈小 (h 愈短，重心愈低)，抖動的愈輕微，進動的愈慢，章動的周期愈短； I_{12} 愈大 (h 愈長，重心愈高)，抖動的愈嚴重，進動的愈快，章動的周期愈長，如圖七所示。

$\dot{\psi}_0$ 愈小 (啟動自旋愈慢)，抖動的愈嚴重，進動的愈快，章動的周期愈長； $\dot{\psi}_0$ 愈大 (啟動自旋愈快)，抖動的愈輕微，進動的愈慢，章動的周期愈短。如圖八所示。

g 值愈小 (如月球上)，抖動的愈輕微，進動的愈慢； g 值愈大 (如木星上)，抖動的愈嚴重，進動的愈快，至於章動的周期有點複雜值得再研究。

誠如著名物理學家理查德·費恩曼曾說過，對一個問題如果不能分析每個過程的受力，那麼我們就沒有真正理解它。」所以我們挑了一個較不複雜、章動不明顯的情形，就是 $\theta_0 = \pi/2$ ， $\ddot{\theta} \approx 0$ ， $\dot{\psi}_0$ 高速運轉時做基礎物理的討論。在滿足前述情形下，從(11)式可以看出： $\dot{\phi} \approx Mgh/I_3\dot{\psi}_0$ ，這和普通物理得到的結論相符合。雖然，我們從圖十看出它和(11)式計算的結合大致符合，但那不是一般狀況。透過基礎物理的討論，只是幫助我們釐清為什麼進動發生時，不免產生章動。因為重力造成的力矩讓陀螺產生 $-\hat{j}$ 方向的進動，為了 \hat{j} 方向的角動量守恆，勢必令轉動軸向下傾斜 (\hat{j} 方向)，於是章動形成 (而且章動的方向正確)。這種修正，事實上會影響最初角動量 L 的大小，但在做初階的考慮時，我們只計及角動量方向的變化，所以(17)及(18)式無法和(11)式在 $\dot{\psi}_0 \gg 1$ 的前提下做完美的接軌。只能說定性上正確。不過，它的確解釋了鉛直方向角動量守恆如(19)式。

參考文獻

- 卞怡婧、路婧、朱廣天，2019，關於剛體轉動的前概念研究，**物理與工程**，29(3)，29-33。
- 王佑坤，2011，自制角動量守恆演示儀，**物理實驗**，31(10)，33-35。
- 伊厚會、姚延立，2016，從陀螺儀進動與章動分析討論看大學物理剛體教學，**高師理科學刊**，36(10)，43-54。
- 吳世永、周鳴宇、王坤、羅家忠，2012，在大學物理力學教學中加強直升機示例作用，**科技創新導報**，28，175。
- 李海寶，2005，一種剛體角動量守恆演示儀的設計制作，**大學物理實驗**，18(3)，64-66。
- 邵懷華、卓玉霖，2018，陀螺進動中的「角動量不守恆」問題，**物理與工程**，28(6)，39-42。

- 姜楠、楊紹瓊，2019，輕于粉蝶瘦于蜂——漫話蜻蜓的流體力學奧秘，**力學與實踐**，41(4)，478-48。
- 柳銘哲，2018，拋體運動在科氏力下的修正，**加馬**，49，17-27。
- 高炳坤，2004，角速度突變三例，**大學物理**，23(10)，14-16。
- 馮法軍，1995，角動量守恒的簡單演示，**物理實驗**，15(2)，62-63。
- 廖耀發、余守憲，2004，陀螺與陀螺儀進動及章動的一種初等分析，**湖北工學院學報**，19(5)，43-46。
- 劉奎、張巍、孫陽丹、胡安正，2011，角動量守恒演示儀的設計與實踐，**物理通報**，2，47-48。
- 鄭青岳，1985，角動量守恒的一個演示實驗，**物理實驗**，5，202。
- 羅凌霄，2008，轉動能和角動量量子化現象的解釋性理論，**大理學院學報**，7(12)，59-64。
- 羅新凱，1985，一個演示角動量守恒的裝置，**大學物理**，11，29。