Etude Mécanique Pour Le Dimentionement Géométrique De *Posidonie*

Théo Prats Rioufol, Février 2025.

Résumé*—Ce documment présente la mise en équation de la mécanique appliqué au projet *Posidonie*. A partir de ces équation et des contrainte du cahier des charges, un modèle de connaissance de *Posidonie* est proposé. Par l'étude de l'état stationaire et par l'emploie d'un algorithme d'optimisation, une méthode est proposé pour trouver les paramètre géométrique optimaux de *Posidonie

***Index Terms*—Modélisation, Bateau Autonome, Optimisation, CDF, MMC, FEM.**

I. Paramétrage

A. Paramétrage géométrique

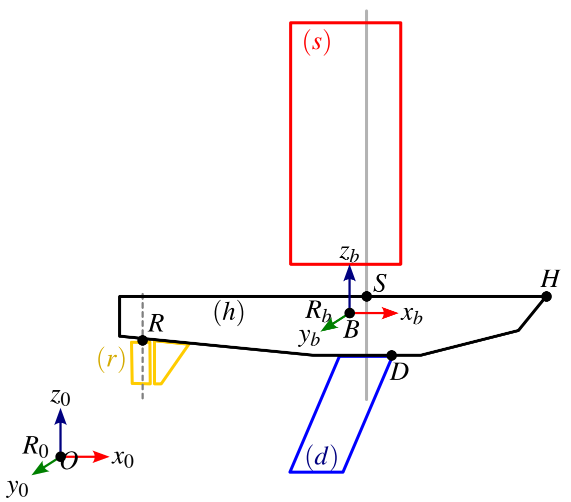

Figure 1. Schéma simplifié de l'ensemble de Posidonie. On distingue 4 ensembles mécaniques : *drift* (d), *hull* (h), *sail* (s) et *rudder* (r). Le référentiel attaché au bateau R_b est situé au point B, où le plan (B, z_b, x_b) est un plan de symétrie. On nottera que x_b est orienté dans le sens de la marche.

Pour commencer l'étude, la figure I-A présente les 4 ensembles principaux considéré pour segmenter la partie mécanique de *Posidonie*. Ces quatres éléments sont :

— La coque *hull*, notée (h). Le référentiel local du bateau (x_b, y_b, z_b) est attaché en B, point de rotation du bateau. Le bateau est orienté dans le sens des x_b croissants et le plan (B, z_b, x_b) définit un plan de symétrie longitudinal.

— La voile *sail*, notée (s). L'origine du référentiel local de la voile R_s se sittue en S, au niveau du pied de mat. Le centre de poussée des forces aérodynamique exercé sur la voile est positioné sur l'axe du mat (pas de moment sur le mat selon z_b).

— La dérive *drift*, notée (d). L'origine D du repère local de la dérive R_d, est sittué à l'extrème avant de cet ensemble.

— Le système safran, *rudder*, (safran et protège safran), noté (r). L'origine du repère local R, au niveau de l'axe de rotation de cet organe, est choisit pour s'aligner avec les forces hydrodynamique du safran (pas de moment selon z_b)

Par la suite on notera $G_i, i \in \{h, s, d, r\}$ la coordonné du centre de gravité de l'ensemble i, $i \in \{H, S, D, R\}$ l'origine de son repère local et $B_i, i \in \{h, s, d, r\}$ la coordonné du centre de carène de l'ensemble i. La base des repères des 4 sous ensemble est identique à B_b (les repère locaux sont exclusivement des translations).

Chaque ensemble possède son propre dimmentionement géométrique. La figure I-A présente le dimmentionement des ensembles s, d et r.

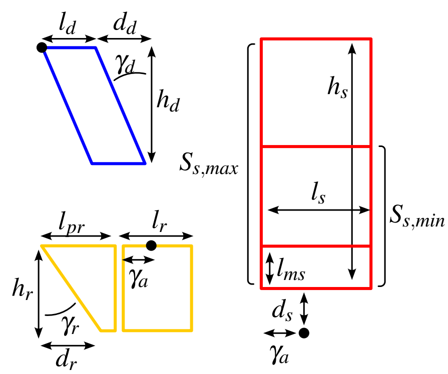

Figure 2. Dimentionement particulier de 3 sous ensemble.

On notera que la voile est ammovible et sa surface appartient à l'intervalle $[S_{s,min}, S_{s,max}]$. On note $\lambda \in [0, 1]$ le facteur qui quantifie le déploiement de la voile : $S = \lambda(S_{s,max} - S_{s,min}) + S_{s,min}$.

B. Paramétrage cinématique

Pour étudier la cinématique du bateau, le système de paramétrage angulaire doit être explicité. Ainsi pour transiter de la base terrestre B_0 à la base attaché au bateau B_b, les rotations suivante doivent être effectuées succesivement :

1) Rotation ψ d'axe $z_0 = z_1$ (Lacet) : $B_0 \rightarrow B_1$
2) Rotation θ d'axe $x_1 = x_2$ (Roulie) : $B_1 \rightarrow B_2$
3) Rotation ϕ d'axe $z_2 = z_b$ (Tanguage) : $B_2 \rightarrow B_b$

Toute les rotation sont effectué autour du point de rotation B du bateau, qui est confondu avec le point d'origine du repère R_b du bateau (qui relie l'origine du repère terrestre R_0 à l'avant du bateau).

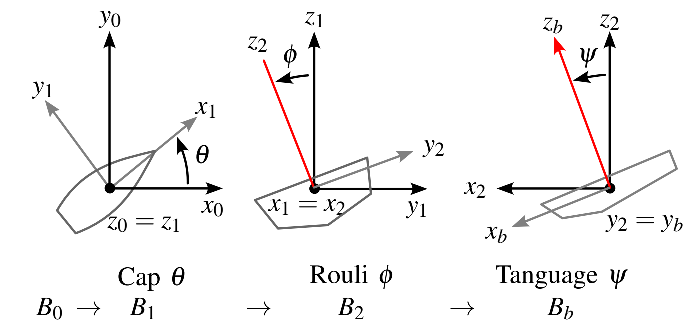

FIGURE 3. Changement du référentiel terrestre au référentiel du bateau en 3 rotations.

II. CAHIER DES CHARGES

A partir du cahier des charges fonctionnels, on peut déduire le sous cahier des charges concernant le dimentionnement mécanique de posidonie. Ces exigenres sont détaillé dans la Tab. II

Exigence	Niveau
$\forall(A,B) \in \mathbf{R}^2$, en mer plate, sous un vent réel de vitesse w_c la vitesse moyenne pour aller de A vers B est : $\bar{v} \geq v_c$.	$w_c = 10nds$ $v_c = 4nds$
Avec la surface de la voile égale à S_{min}, sous un vent w_{max}, la gite θ et le tangage ϕ doivent être inférieur à leur limites respectives : θ_{max}, ϕ_{max}	$w_{max} = 60nds$ $\theta_{max} = 30deg$ $\phi_{max} = 10deg$
Pour une voilure de surface S, Une rafale de $+\Delta_w$ provoque une gite et un tangage inférieur à $\theta_{max} + \Delta_\theta, \phi_{max} + \Delta_\phi$ respectivement	
Le mat est suffisament avancé pour permettre l'instalation de panneaux solaires La gite du bateau tend à le faire loffer (CE et CLR)	
Le bateau ne doit pas s'eméler dans un filet de pêche	

TABLE I
CAHIER DES CHARGES MÉCANIQUE

III. MÉCANIQUE

On souhaite obtenir une équation de la dynamique du bateau. D'une part, elle nous permettera de vérifier qu'un ensemble de paramètre géométrique convient pour le cahier des charges (en évaluant à l'équilibre), et d'autre part, cette équation nous permettera de simuler le bateau et de déterminer une loi de commande initiale.

Dans un premier temps, nous somme intéréssé à la dynamique du bateau dans son ensemble, les efforts de liaison ne sont pas important à ce stade. Toutefois, ils seront pertinent lors de l'analyse structurelle. Par exemple, les inters efforts s/h sont cruciaux pour le dimentionnement du mat et du pieds de mat.

> Ainsi, **on isole l'ensemble** $\Omega = \{h, s, d, r\}$
> On se place dans le **référentiel terrestre** $R_0 = (0, u_x, u_y, u_z)$

Pour passer du référentiel R_0 galliléen, à celui du bateau R_b, il faut :

- Appliquer une translation par le vecteur OB.
- Appliquer les rotations sucessive de centre B : $R(B_0 \rightarrow B_1) = R_\theta, R(B_1 \rightarrow B_2) = R_\phi, R(B_2 \rightarrow B_b) = R_\psi$

On en déduit donc la relation :

$$x|_{R_b} = R_\psi R_\phi R_\theta (\underbrace{x|_{R_0} - OB}_{x \text{ est amené en } B})$$

Où OB la position du bateau dans le repère R_0. Par la suite, on pose $R = R_\psi R_\phi R_\theta, t = -R \times OB$. On notera que R est la matrice de passage de la base B_0 vers la base B_b. On en déduit :

$$x|_{R_b} = Rx|_{R_0} + t$$

$$x|_{R_0} = R^{-1}(x|_{R_b} - t)$$

Pour ce qui s'agit des vitesses, la relation de Varinion donne pour tout point A :

$$V(A \in \Omega/R_0) = V(B \in \Omega/R_0) + AB \wedge \omega_{R_b/R_0}$$

où ω_R est le vecteur vitesse de rotation associé à R, $V(x_b \in \Omega/R_0) = V_B$ la vitesse du point B par rapport au référentiel R_0, c'est à dire celle du bateau.

A. Bilan des forces

Le bilan des forces est effectué sur chaque sous ensemble pour permettre de déduire l'ensemble des forces s'exercant sur Posidonie (Ω).

1) Force exercées sur h:

- Force de pesanteur P_h appliquée en G_h (centre de gravité de h).
- Poussée d'archimède Π_h appliquée en B_h (centre de carène de h).
- Force de hydrodynamique Fh_h appliquée en $x_{Hyd,h}$.
- Force de aérodynamique Fa_h appliquée en $x_{aero,h}$.
- Force de liaison.

2) Force exercées sur d:

- Force de pesanteur P_d appliquée en G_d.
- Poussée d'archimède Π_d appliquée en B_d.
- Force de hydrodynamique Fh_h appliquée en $x_{Hyd,h}$.
- Force de liaison.

3) Force exercées sur s:

- Force de pesanteur P_s appliquée en G_s.
- Force de aérodynamique Fa_s appliquée en $x_{aero,s}$.
- Force de liaison.

4) Force exercées sur r:

- Force de pesanteur P_r appliquée en G_r.
- Poussée d'archimède Π_r appliquée en B_r.
- Force de hydrodynamique Fh_r appliquée en $x_{Hyd,r}$.
- Force de liaison (notamment due à la motorisation de direction !).

B. Détail des forces

Cette section présente le détails des expressions de chacune des forces identifiées précédemment. Les paramètre cinématique essentiels vont être mis en valeurs et la relation avec le dimentionement géométrique va être explicitée.

1) Force exercées sur h: **Force de gravité et de flottaison**

La coque ayant une forme complexe, la position du centre de gravité et de carène sont obtenu numériquement (voir figure III-B1). Notons toutefois que le centre de carène B_h dépend de l'orientation spatiale du bateau et de la masse de celui-ci $B_h = B_h(\phi,\psi,m_b)$ où $m_b = m_h + m_d + m_b + m_s$ est la masse totale du bateau. On remarquera que le paramètre θ n'intervient pas dans l'expression de $BB(R)$ and la base B_b, due à la symétrie de révolution du plan d'eau selon l'axe z_b. $B_h, V(R)$ sont obtenus par calcul de l'intersection entre le bateau et le plan d'eau pour un ensemble de configuration $C = [-\phi_{max},\phi_{max}] \times [-\psi_{max},\psi_{max}] \times [-m_{max},m_{max}]$, puis les résultats sont linéarisés pour n'importe quel vecteur $x = (\phi,\psi,m_b)$.

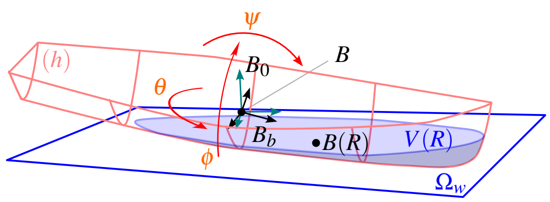

FIGURE 4. Calcul du centre de carène pour une rotation R. $V(R) = \Omega \cap \Omega_w$ représente le volume d'eau déplacé par la coque, où Ω_w est le demi volume $z < 0$ de l'eau.

On a donc :

$$P_h = -m_h g z, \Pi_h = V(R)\rho_w z$$

$$B_h(\phi,\psi,m_b)$$

où m_h est la masse de la coque, et $V(R) + V_r + V_d = \frac{m_b}{\rho_w}$ (Hypothèse **d'équilibre selon l'axe** z). Leurs moments en B sont égaux à :

$$M_B(P_h) = BG_h \wedge P_h, M_B(\Pi_h) = BB_h \wedge \Pi_h$$

Pour estimer la masse de la coque, on remarque qu'elle est la somme des masses suivantes :

— Masse des parois de la coque $m_{h,wall}$. On considère une masse surfacique $\rho_h \varepsilon_h$ où ε_h est l'épaisseur de la coque et ρ_h la masse volumique du matérieux utilisé (par exemple, $\rho_h = 1.19 g/cm^3$ pour le plexiglass). On a donc $m_{h,wall} = \rho_h \varepsilon_h$

— Masse des équipements $m_{h,equip}$: Panneaux solaire, moteur de barre, électronique, batterie...

— Masse des structures internes $m_{h,struct}$. On les estimes comme étant une coupe longitudinale (de section S_l) et n coupe transversale (de section S_L) : $m_{h,struct} = (S_l + nS_L)\varepsilon_h\rho_h$ avec $S_l \approx 0.8 \times l_h h_h$ et $S_L \approx 0.5 \times l_h L_h$ (la coque est de longeur l_h, de largeur L_h et de hauteur h_h).

Force hydrodynamique

Ici également, la complexité géométrique de la coque nous impose à utiliser les résultats d'un solveur numérique. On simulera donc la force hydrodynamique Fh_h exercée sur la coque grâce au logiciel `Aqwa` de `Ansy`. Cette force dépend de l'orientation du bateau dans le fluide (θ,ϕ,ψ), du vecteur vitesse du fluide par rapport au bateau $-V_B|B_b$ et du déplacement $V(R)$. Par la suite, on se place dans des conditions "*de croisière*", sous l'**hypothèse** :

$$\theta \approx d\theta, d\theta \in [-2\beta, 2\beta]$$

$$\phi \approx \phi_0 + d\phi, d\phi \in [-(\phi_{max} - \phi_0), \phi_{max} - \phi_0]$$

$$\psi \approx \psi_0 + d\psi, d\psi \in [-(\psi_{max} - \psi_0), \psi_{max} - \psi_0]$$

où ψ_0, ϕ_0 sont les angles du bateau quand il navigue au près (point de référence choisi). Ainsi, la formule de *Taylor-Young* nous donne :

$$\begin{aligned} Fh_h(R,V(R),V_b) =& Fh_h(R_0,V(R),V_b) \\ &+ \frac{\partial Fh_h}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial Fh_h}{\partial\phi}d\phi + \frac{\partial Fh_h}{\partial\psi}d\psi \end{aligned}$$

Avec R_0 la rotation associé aux angles $\theta = 0, \phi_0, \psi_0$. Plusieurs simulation sont réalisées pour différentes vitesses V_B, et on **négligera l'effet de** $dV(R)$. Les simulations seront faites pour un déplacement moyen du bateau $\overline{V(R)}$. Pour estimer les dérivées partielles, on utilisera la méthode des différences finies avec h égal à la moitiée du demie intervalle du paramètre considéré. Le moment autour du point B est estimé de la même manière :

$$\begin{aligned} M_B(Fh_h) =& M_B(Fh_h(R_0,V(R),V_b)) \\ &+ \frac{\partial M_B(Fh_h)}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial M_B(Fh_h)}{\partial\phi}d\phi + \frac{\partial M_B(Fh_h)}{\partial\psi}d\psi \end{aligned}$$

Force aérodynamique

La force aérodynamique Fa_h exercée sur la coque dépend de la surface émergée de la coque. Toutefois, on fait l'**hypothèse** que la variation de la forme du volume émergé Ve_h face à un vecteur vitesse de vent apparent w_a due au roulis et au tangague est négligable. Ainsi :

$$Fa_h = Fa_h(||w_a||, \theta)$$

Fa_h est obtenue par simulation numérique pour plusieurs points $w_a, \theta \in [0,10]knt \times [0,\pi]$, $Fa_h.y$ étant impair en θ et $Fa_h.h$ étant pair en θ.

2) Force exercées sur d: **Force de gravité**

Concernant la dérive, on suppose qu'elle est constitué d'une plaque (*plate*) trapézoidale d'un matériaux homogène, avec une quille (*keel*) (de masse suposée ponctuelle) fixée à son extrémitée. Ainsi :

$$x_{g,d} = \frac{x_{g,d,plate} m_{plate} + x_{g,keel} m_{keel}}{m_{plate} + m_{keel}}$$

Pour un trapèze, on a :

$$x_{g,d,plate} = \begin{bmatrix} -(d_d + l_d)/2 \\ 0 \\ -h_d/2 \end{bmatrix}_{B_d}, d_d = h_d tan(\sigma_d)$$

où B_d est le repère local de la dérive. La masse est estimé à l'aide de la masse volumique de la dérive ρ_d, et de son épaisseur ε_d :

$$m_{plate} = S_d \rho_d \varepsilon_d = l_d h_d \rho_d \varepsilon_d$$

Quant-à la quille, elle se trouve au centre du bout de la dérive en Q (voir figure III-B2) :

$$x_{g,d,keel} = \begin{bmatrix} -(2d_d + l_d)/2 \\ 0 \\ -h_d \end{bmatrix}_{B_d}, d_d = h_d tan(\sigma_d)$$

La force de gravité est donc :

$$P_d = -(m_{plate} + m_{keel}) g u_z$$

Force de flottaison

La quille, d'une masse m_{keel}, est réalisé dans un matériaux de masse volumique ρ_{keel}. Ainsi, le volume de la quille est $V_{keel} = m_{keel}/\rho_{keel}$. Le volume de la plaque de la dérive est déduit par analyse géométrique : $V_{plate} = S_d \varepsilon_d$, d'ou la force d'archimède totale :

$$\Pi_d = (V_{plate} + V_{keel}) \rho_w g u_z$$

Le centre de carrène se déduit avec le barycentre des centres de gravité (qui sont aussi centre de carène des ensembles *plate* et *keel*) par les volumes :

$$x_{b,d} = \frac{x_{g,d,plate} V_{plate} + x_{g,keel} V_{keel}}{V_{plate} + V_{keel}}$$

Force hydrodynamique

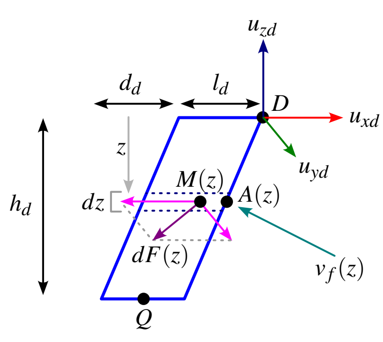

FIGURE 5. Paramétrage des forces hydrodynamique appliquées à la dérive

On suppose que la quille est constitué d'un profil *NACA*. On fait l'hypothèse forte de **négliger les effets de bord** ($h_d >> l_d$). Ainsi la force hydrodynamique totale Fh_d de l'action du fluide sur la dérive est obtenue par intégration selon u_{zb} de la force élémentaire linéique hydrodynamique $dF(z)$ exercé sur la tranche dz de la dérive à l'altitude z :

$$Fh_d = \int_{-h_d}^{0} dF(z).dz$$

La force élémentaire $dF(z)$ est exercée en $M(z)$. On en déduit l'expression du moment de Fh_b au point B :

$$M_B(Fh_d) = \int_{-h_d}^{0} (BM(z) \wedge dF(z) + M_{M(z)}(dF(z)))dz$$

où $M_{M(z)}(dF(z))$ est le moment de $dF(z)$ calculé au point $M(z)$. Le vecteur $BM(z)$ est donné par :

$$BM(z) = BD + DA(z) + B(z)M(z) = BD + zu - \xi l_d u_{xd}$$

$$u = \begin{bmatrix} \frac{d_d}{h_d} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{B_b}$$

où ξ est la position longitudinale relative du centre de poussé. Notons que le vecteur de vitesse du fluide, opposé à celui du bateau, peu varier selon l'altitude z. Par exemple, un mouvement de rouli accélère la vitesse du fluide au bout de la dérive par rapport à sa base.

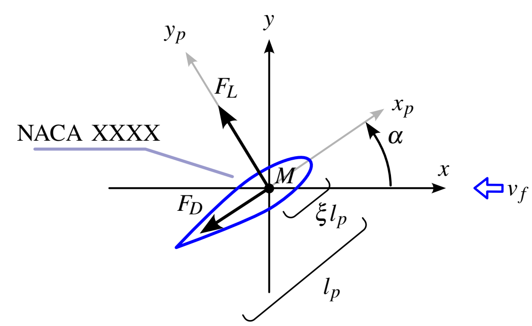

FIGURE 6. Simulation de mécanique des fluides pour obtenir la résultante hydrodynamique d'un profil NACA, pour différent angles d'incidence α

Pour calculer $dF(z)$, on utilise une simulation de mécanique des fluides pour un profil p dans un repère R_p gallileén (de base B_p) centré sur le centre de poussé de ce profil M. La figure III-B2 détaille le paramétrage de cette simulation. On fait l'hypothèse que les forces hydrodynamiques s'écrivent de la manière suivante :

$$F = f_D u_{xp} + f_L u_{yp} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} C_D(\alpha) \\ C_L(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}_{B_p} \rho S v_f^2$$

où ρ est la masse volumique du fluide, v_f sa vitesse et S la surface longitudinale du profil. Le coeficients C_D et C_L qui varient avec l'angle d'incidence α, sont obtenue en simulant le profil pour des valeurs de références ρ_0, v_0, S_0, l_0, pour un **nombre de Reynold similaire** à celui de la dérive dans un cas typique (vitesse de croisière par exemple). On a donc, pour un profil de largeur l, la force linéique qui s'exprime par :

$$dF(z) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} C_D(\alpha(z)) \\ C_L(\alpha(z)) \\ 0 \end{bmatrix}_{B_p} \rho l v_f(z)^2$$

En supposant ρ constant par rapport à z (eau supposée incompressible).

Déterminons à présent la valeur de l'angle d'incidence $\alpha(z)$ à l'altitude z. On note la vitesse du fluide par rapport à la section d'altitude z : $V(f/p,z)$. Comme le fluide est immobile dans R_0 (hypothèse d'abscence de courant marins), on en déduit :

$$V(f/p,z) = \underbrace{V(f \in R_0,z)}_{=0} + V(R_0/p,z)$$

$$V(f/p,z) = -V(p/R_0,z) = -V(A(z) \in R/R_0)$$

En applicant la formule de Varinion en B, on obtient :

$$-V(f/p,z) = V(B \in R/R_0) + A(z)B \wedge \Omega_{R/R_0}$$

$$-V(f/p,z) = \underbrace{V_B}_{\text{vitesse bateau}} + \Omega_{R/R_0} \wedge (BD + zu)$$

On remarquera que pout un bateau à l'équilibre (Ω_{R/R_0}), la vitesse du fluide par rapport à la dérive est égale à l'opposée de celle du bateau ! L'angle d'incidence se calcule par sa définition :

$$cos(\alpha(z)) = \frac{< v(f/p,z)|u_{xp} >}{||v(f/p,z)||}$$

$$sin(\alpha(z)) = \frac{< v(f/p,z) \wedge u_{xp}|u_{zp} >}{||v(f/p,z)||}$$

où $< .|. >$ est le produit scalaire, et $v(f/p,z)$ le vecteur vitesse du fluide par rapport à la section élémentaire à l'altitude z. Notons qu'en D, on a $\alpha(x_D.z_b) = \beta$ où β est l'angle de dérive (voir figure III-B4).

Force de liaison

Pour cette étude, nous ne cherchons pas à les calculer.

3) Force exercées sur s: **Force de pesanteur**

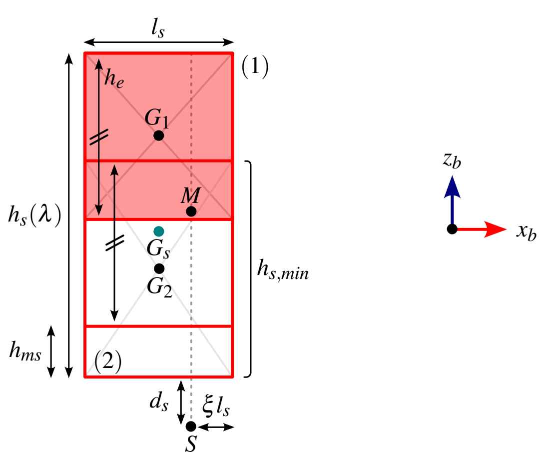

FIGURE 7. Paramétrage géométrique de l'ensemble (s). Le panneau semi transparent (1) coulise verticalement par rapport au reste de la voile (2)

La figure III-B4 précise le dimentionement géométrique de la voile coulissante (s). Un panneau (en rouge semi transparent) de hauteur h_e coulisse selon z_b, par un paramètre $\lambda \in [0,1]$. Pour $\lambda = 0$, la hauteur de la voile $h_s(\lambda)$ est égale à $h_{s,min} = h_e + h_{ms}$, tandis que $\lambda = 1$ donne $h_s = h_{ms} + 2h_e$. Déterminons à présent la position du centre de gravité.

En faisant l'hypothèse que la voile est de masse volumique uniforme ρ_s, la postion du centre de gravité G_1, G_1 des deux partie de la voile est confondu avec le centre géométrique. On a alors :

$$G_2 = S + \begin{bmatrix} (\xi - \frac{1}{2})l_s \\ 0 \\ d_s + \frac{h_e + h_{ms}}{2} \end{bmatrix}_{B_b}$$

$$G_1 = S + \begin{bmatrix} (\xi - \frac{1}{2})l_s \\ 0 \\ d_s + (\lambda + \frac{1}{2})h_e \end{bmatrix}_{B_b}$$

Les masses des deux panneaux s'obtiennent par leur surface respective, et masse surfacique ρ_s :

$$m_1 = h_e l_s \rho_s, m_2 = (h_e + h_{ms}) l_s \rho_s, m_2$$

G_s est finalement obtenue par la relation du baricentre, et la force de pesanteur P_s avec la somme des masses de (1) et (2) :

$$G_s = \frac{G_1 m_1 + G_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$P_s = -(m_1 + m_2) g z$$

Force aérodynamique

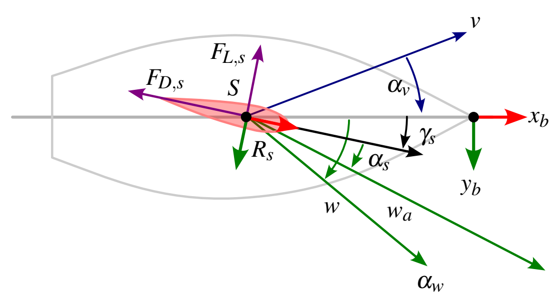

FIGURE 8. Détail des angles intervenant dans l'écoulement de l'air par rapport à *Posidonie*, et détail de la surface de contrôle.

On considère que le vent apparent créé par la rotation du bateau est de même ordre de grandeur que la variation du vent réel par des rafales. Ainsi, on considère que le **vecteur vitesse du vent est uniforme le long de la voile**. La force aérodynamique Fa_s exercé sur la voile, illustrée dans la figure III-B3 est donnée par la relation suivante :

$$Fa_s = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} C_D(\alpha_s) \\ C_L(\alpha_s) \\ 0 \end{bmatrix}_{B_s} \rho h_s(\lambda) l_s V(f/s)^2$$

car la voile est rectangulaire. B_s est la base attaché à la voile, obtenue par une rotation d'axe z_b de la base B_b par un angle γ_s. La matrice de passage $P(B_s \rightarrow B_b)$ est notée R_{γ_s}. α_s est l'angle d'incidence du vent apparent par rapport à la voile. La vitesse du vent par rapport à la voile (vent *apparent*) est noté $V(f/s)$. Elle est égale à :

$$-V(f/s) = \underbrace{-V(f \in R_0)}_{\text{Vent réel}} + \underbrace{V(s/R_0)}_{\text{vitesse du bateau}}$$

$$-V(f/s) = -w + V_B$$

On en déduit l'angle d'incidence du vent sur la voile, α_s représenté dans la figure III-B3 :

$$\alpha_s = ang(V(f/s), x_s) = ang(V(f/s)|_{B_b}, R_{\gamma_s} x_s)$$

Calculons à présent la position du centre d'effort M de Fa_s. Par symétrie, M se situe au milieux de la voile selon z_b, et à ξl_s du coté droit. Ainsi :

$$M = S + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_s + \frac{h_s(\lambda)}{2} \end{bmatrix}_{B_b}$$

On obtient ainsi l'expression du moment de Fa_s en B :

$$M_B(Fa_s) = BM \wedge Fa_s$$

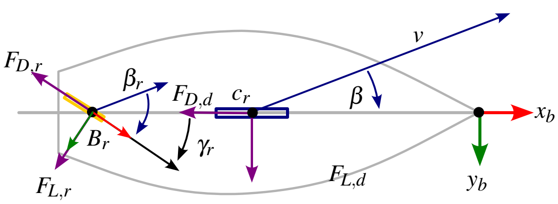

FIGURE 9. Détail des angles intervenant dans l'écoulement de l'eau salée par rapport à *Posidonie*, et détail de la surface de contrôle.

4) Force exercées sur r: **Force de flottaison et de pesanteur**

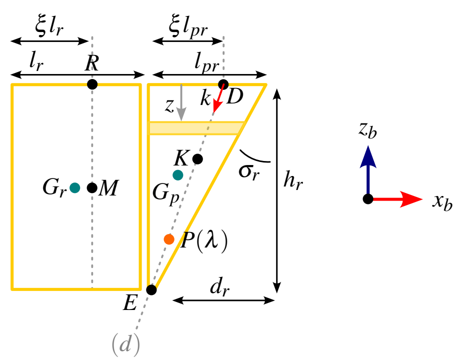

FIGURE 10. Paramétrage géométrique de l'ensemble (r) : protège safran (gauche) et safran (droite)

La figure III-B4 précise le dimentionement géométrique du safran et du protège safran. On suppose que le safran et le protège safran sont réalisé dans un matériaux de masse volumique ρ_r homogène. Ainsi, la position du centre de gravité, de flottaison, et géométrique sont confondu. On a donc :

$$G_{rud} = B_{rud} = R + \begin{bmatrix} (\frac{1}{2} - \xi) l_r \\ 0 \\ -\frac{h_r}{2} \end{bmatrix}_{B_b}$$

$$G_p = B_p = R + \begin{bmatrix} (1 - \xi) l_r + \frac{l_{pr}}{3} \\ 0 \\ -\frac{h_r}{3} \end{bmatrix}_{B_b}$$

Les masses sont calculé à partir du volume de ces deux éléments d'épaisseur ε_r :

$$V_{pr} = \frac{l_{pr} h_r}{2} \varepsilon_r, m_{pr} = V_{pr} \rho_r$$

$$V_{rud} = l_r h_r \varepsilon_r, m_{rud} = V_{rud} \rho_r$$

Puis en faisant le barycentre des forces de pesanteur, on obtient le centre de gravité de (r) :

$$G_r = B_r = \frac{G_{rud} m_{rud} + G_{pr} m_{pr}}{m_{rud} + m_{pr}}$$

Avec la force de flottaison Π_r et de pesanteur P_r associées :

$$P_r = -(m_{rud} + m_{pr}) g z_0, \Pi_r = (V_{rud} + V_{pr}) \rho_w g z_0$$

Force hydrodynamique - Safran

Commençons par calculer la force hydrodynamique appliqué sur la partie mobile de l'ensemble r. La figure III-B4 détaille le paramétrage du safran. On suppose que le safran est de forme rectangulaire de taille $l_r \times h_r$. De plus, le safran étant de hauteur bien inférieur à celle de la dérive, on suppose que le **vecteur vitesse du fluide est constant le long du safran**. Ainsi, l'expression de la force hydrodynamique s'écrit :

$$Fh_r = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} C_D(\alpha_r) \\ C_L(\alpha_r) \\ 0 \end{bmatrix}_{B_r} \rho h_r l_r V(f/r)^2$$

$$Fh_r|_{B_b} = \frac{1}{2} R_{\gamma_r} \begin{bmatrix} C_D(\alpha_r) \\ C_L(\alpha_r) \\ 0 \end{bmatrix}_{B_r} \rho h_r l_r V(f/r)^2$$

où B_r est la base attaché au safran et $V(f/r)$ le vecteur vitesse du fluide par rapport au safran. On note $P(B_r \rightarrow B_b) = R_{\gamma_r}$ la matrice de changement de base de B_r vers B_b issue de la rotation d'angle γ_r autour de z_b. L'angle d'incidence α_r du fluide pour une commande γ_r est égal à :

$$cos(\alpha) = \frac{< v(f/r) | u_{xr} >}{||v(f/r)||} = \frac{< v(f/r) | R_{\gamma_r}^{-1} u_{xb} >}{||v(f/r)||}$$

$$sin(\alpha) = \frac{< v(f/r) \wedge R_{\gamma_r}^{-1} u_{xb} | u_{zb} >}{||v(f/r)||}$$

Concernant le vecteur vitesse, on le déduit par l'expression suivante :

$$-v(f/r) = v(R \in R/R_0) = V_B + \Omega_{R/R_0} \wedge BR$$

Finallement, le moment de la force hydrodynamique appliqué au safran en B, s'exprime par :

$$M_B(Fh_r) = BM \wedge Fh_r + M_M(Fh_r)$$

où $M = R - \frac{h_r}{2} z_b$ est le point d'application de Fh_r sur le safran, et $M_M(Fh_r) \approx 0$ est le moment en ce point (supposé nul car M est sittué au centre de poussé du safran).

Force hydrodynamique - Protège safran

L'angle d'incidence α_r pour le protège safran est le même que celui du safran pour une commande nulle $\gamma_r = 0$. La force hydrodynamique Rh_p exercé sur le protège safran (p) s'obtient par intégration sur la direction $-z_b$, de la force élémentaire hydrodynamique sur une section de longeur $l(z) = \frac{zl_{pr}}{h_r}$:

$$Fh_p = \int_0^{h_r} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} C_D(\alpha_r) \\ C_L(\alpha_r) \\ 0 \end{bmatrix}_{B_b} \rho l(z) V(f/r)^2 dz$$

$$Fh_p = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} C_D(\alpha_r) \\ C_L(\alpha_r) \\ 0 \end{bmatrix}_{B_b} \rho V(f/r)^2 (\int_0^{h_r} \frac{zl_{pr}}{h_r} dz)$$

$$Fh_p = \frac{l_{pr}h_r}{4} \begin{bmatrix} C_D(\alpha_r) \\ C_L(\alpha_r) \\ 0 \end{bmatrix}_{B_b} \rho V(f/r)^2$$

Par raisonement géométrique, Fh_p étant linéaire avec la largeur de la section auquel elle est appliqué on en déduit que le point d'appication K de Fh_p se situe sur la droite (d) de coefficient directeur k (droite qui joint tout les centre aérodynamique des section d'altitude z). On sait que K est sittué au niveau du barycentre des forces. On repère un point $P(\lambda)$ de (d) par la coordonée curviligne λ qui mesure la distance entre un point $P(\lambda)$ de (d) et l'origine D de (d). Par linéarité : $||dF(P(\lambda))|| = \frac{\lambda_E - \lambda}{\lambda_E} ||dF(D)||$ car $||dF(P(\lambda_E))|| = 0$ (section de largeur nulle).

$$\int_0^{\lambda_K} \frac{\lambda_E - \lambda}{\lambda_E} ||dF(D)|| d\lambda \underbrace{=}_{\text{barycentre}} \int_{\lambda_K}^{\lambda_E} \frac{\lambda_E - \lambda}{\lambda_E} ||dF(D)|| d\lambda$$

$$\int_0^{\lambda_K} (\lambda_E - \lambda) d\lambda = \int_{\lambda_K}^{\lambda_E} (\lambda_E - \lambda) d\lambda$$

$$\int_0^{\lambda_K} 2\lambda d\lambda = \int_{\lambda_K}^{\lambda_E} 2\lambda d\lambda$$

$$\lambda_K^2 = \lambda_E^2 - \lambda_K^2 \implies \lambda_K = \frac{\lambda_E}{\sqrt{2}}$$

Par le paramétrage de (d), on transforme λ_K en coordonée cartésienne dans R_r :

$$K = P(\lambda_K) = D + \lambda_K k, \lambda_E k.z_b = h_r \implies \lambda_E = 1$$

Avec :

$$k = \begin{bmatrix} \xi l_{pr} \\ h_r \\ 0 \end{bmatrix}_{B_b}$$

D'où :

$$K = D + \frac{k}{\sqrt{2}}$$

On en déduit l'expression du moment en B :

$$M_B(Fh_p) = BK \wedge Fh_p$$

C. Calcul des matrices d'inerties

Dans la section précédente, l'ensemble des moments des forces exercées sur le système ont été calculées en B. On cherche à présent à obtenir la matrice d'inertie de Ω en B. Ci dessous, on rappelle le théorème de *Huygens* pour déplacer la matrice d'inertie $I_G^{\Omega_0}$ d'un système Ω_0 en son centre de gravité G vers un point O tel que $OG = x_G u_x + y_G u_y + z_G u_z$:

$$I_O^{\Omega_0} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}}_{I_G^{\Omega_0}}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} A + m(y_G^2 + z_G^2) & -(F + mx_G y_G) & -(E + mx_G z_G) \\ -(F + mx_G y_G) & B + m(x_G^2 + z_G^2) & -(D + my_G z_G) \\ -(E + mx_G z_G) & -(D + my_G z_G) & C + m(x_G^2 + y_G^2) \end{bmatrix}}_{\text{notée } mI(OG)}$$

Ainsi, on se contentera de calculer la matrice d'inertie des composants h, s, d, r à leur centre de gravité.

1) Matrice d'inertie de (s): On suppose que les deux ensembles coulissants de (s) Ω_1, Ω_2 (voir figure III-B3) sont de masse volumique homogène. Leur épaisseur est notée ε_s et on approxime le profil `NACA-XXXX` par un rectangle. On cherche donc l'expression de la matrice d'inertie d'un **parallépipède rectangle creux** noté Ω_P.

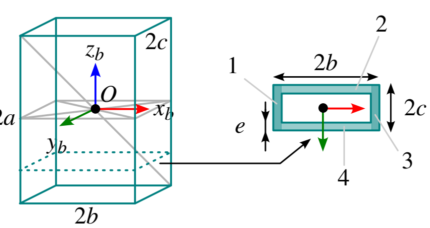

FIGURE 11. Paramétrage géométrique d'un paralélipède creux

Pour calculer la matrice d'inertie de Ω_P on somme 4 matrices d'inertie de chacun des côtés $1, 2, 3, 4$ de Ω_P. Chaque coté est modélisé par un parallélipède plein de centre de gravité G de matrice d'inertie :

$$I_G(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}) = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(\tilde{b}^2 + \tilde{c}^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(\tilde{a}^2 + \tilde{c}^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2) \end{bmatrix}_{B_b}$$

où $\tilde{a}$ est la dimention du parallélipède dans la direction x, $\tilde{b}$ dans la direction y et $\tilde{c}$ est associé à z. La masse m est égale à $a\tilde{b}c\rho$. Pour Ω_P :

$$OG_1 = -bu_x, m_1 = 4ace\rho$$
$$OG_2 = -cu_y, m_2 = 4abe\rho$$
$$OG_3 = bu_x, m_3 = m_1$$
$$OG_4 = cu_y, m_4 = m_2$$

$$
\begin{aligned}
I_O^{\Omega_P} &= I_O^1 + I_O^2 + I_O^3 + I_O^4 \\
&= 2\begin{bmatrix} m_2c^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_1b^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_1b^2+m_2c^2 \end{bmatrix} + \underbrace{2I_{G_1}^1(e,2c,2a) + 2I_{G_2}^2(2b,e,2a)}_{(1,3),(2,4) \text{ sont identiques par translation}} \\
&= \begin{bmatrix} 2m_2c^2 + \frac{2m_1}{3}(c^2+a^2) + \frac{m_2}{6}(e^2+4a^2) & 0 & 0 \\ 0 & 2m_1b^2 + \frac{m_1}{6}(e^2+4a^2) + \frac{2m_2}{3}(b^2+a^2) & 0 \\ 0 & 0 & 2m_1b^2 + 2m_2c^2 + \frac{m_1}{6}(e^2+4c^2) + \frac{m_2}{6}(4b^2+e^2) \end{bmatrix} \\
&= 4\rho \begin{bmatrix} 2abec^2 + \frac{2ace}{3}(c^2+a^2) + \frac{abe}{6}(e^2+4a^2) & 0 & 0 \\ 0 & 2aceb^2 + \frac{ace}{6}(e^2+4a^2) + \frac{2abe}{3}(b^2+a^2) & 0 \\ 0 & 0 & 2aceb^2 + 2abec^2 + \frac{ace}{6}(e^2+4c^2) + \frac{abe}{6}(4b^2+e \end{bmatrix} \\
&= 4\rho \begin{bmatrix} 2aebc^2 + \frac{ae}{6}(4c^3+4ca^2+be^2+4ba^2) & 0 & 0 \\ 0 & 2aecb^2 + \frac{ae}{6}(ce^2+4ca^2+4b^3+4ba^2) & 0 \\ 0 & 0 & ae(2cb^2+2bc^2) + \frac{ae}{6}(ce^2+4c^3+4b^3+be^2) \end{bmatrix} \\
&= \frac{2}{3}ae\rho \begin{bmatrix} 12bc^2+4c^3+4ba^2+4ca^2+be^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12cb^2+4b^3+4ca^2+4ba^2+ce^2 & 0 \\ 0 & 0 & 12cb^2+12bc^2+4c^3+4b^3+be^2+ce^2 \end{bmatrix} \\
&= I_O^{\Omega_P}(a,b,c,e)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Grâce à l'expression de $I_O^{\Omega_w}$, on en déduit l'expression de $I_B^{\Omega_1}$ et $I_B^{\Omega_2}$ et puis celle de $I_B^{\Omega_s}$:

$$
\begin{aligned}
I_B^{\Omega_s} &= I_B^{\Omega_1} + I_B^{\Omega_2} \\
&= I_{G_1}^{\Omega_P}\left(\frac{h_e}{2}, \frac{l_s}{2}, \frac{L_s}{2}, \varepsilon_s\right) \\
&+ I_{G_2}^{\Omega_P}\left(\frac{h_e+h_{ms}}{2}, \frac{l_s}{2}, \frac{L_s}{2}, \varepsilon_s\right) + m_1I(BG_1) + m_2I(BG_2)
\end{aligned}
$$

où L_s est la largeur de la voile.

2) Matrice d'inertie de (d): On considère que la dérive est composé d'une plaque *plane* et d'une quille *keel*. *plane* est un parallélogramme d'épaisseur ε_d de masse volumique homogène ρ_d. *keel* possède la matrice d'inertie I_G^{keel} en son centre de gravité.

Le plan (O,x,z) (O étant confondu avec le centre de gravité) est un plan de symétrie de *plane*. Par conséquent, $Ixy = Izy = 0$ $(F = D = 0)$. Calculons :

$$
x_m(z) = -b + z\xi, x_M(z) = b + z\xi, \xi = \frac{e}{2a}
$$

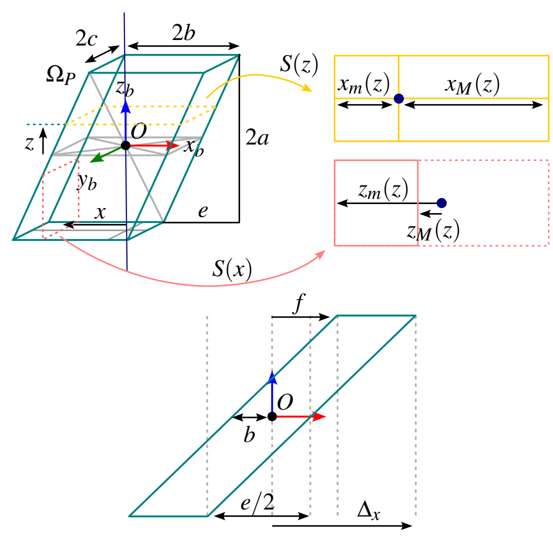

FIGURE 12. Paramétrage géométrique d'un paralélipède creux

$$
\begin{aligned}
I_y &= \int_{\Omega_P} (x^2+z^2) \underbrace{dm}_{=2dxdz\rho_d} \\
&= 2c\rho_d \int_{z=-a}^{a} \int_{x=x_m(z)}^{x_M(z)} (x^2+z^2)dxdz \\
&= 2c\rho_d \int_{z=-a}^{a} [\frac{x^3}{3} + xz^2]_{-b+z\xi}^{b+z\xi} dz \\
&= 2c\rho_d \int_{z=-a}^{a} [\frac{2}{3}b^3 + 2b(\xi^2+1)z^2]dz \\
&= c\rho_d \frac{4}{3}[b^3z + b(\xi^2+1)z^3]_{-a}^{a} \\
&= c\rho_d \frac{8}{3}(ab^3 + (\xi^2+1)ba^3) \\
&= m_P \frac{2}{3}(b^2 + (\xi^2+1)a^2)
\end{aligned}
$$

Où $m_P = abc\rho$ est la masse de Ω_P. On vérifie qu'avec $\xi = 0$ (parallépipède) on retrouve le moment d'inertie décrit précédemment. On calcul à présent I_x :

$$\Delta_x = e/2 + b, f = -b + e/2$$

$$\begin{aligned}
I_z &= \int_{\Omega_P} (y^2+z^2) \underbrace{dm}_{=2\rho_d dxdz} \\
&= 2\rho_d \int_{x=-\Delta_x}^{\Delta_x} \int_{y=-c}^{c} \int_{z=-z_m(x)}^{-z_M(x)} (y^2+z^2) dxdydz \\
&= 2\rho_d \int_{x=-\Delta_x}^{\Delta_x} \int_{z=-z_m(x)}^{-z_M(x)} \frac{2}{3}(c^3+3cz^2) dxdz
\end{aligned}$$

On suppose $f > 0$: $z_m(x) = -a$ pour $x \in [-\Delta_x, -f]$ et $z_m(x) = -a + (x+f)\xi$ pour $x \in [-f, \Delta_x]$. Par ailleurs, $z_M(x) = a + \xi(x-f)$ pour $x \in [-\Delta_x, f]$ et $z_M(x) = a$ pour $x \in [f, \Delta_x]$. Calculons J

$$\begin{aligned}
&\frac{I_z}{2c\rho_d} \\
&= \int_{x=-\Delta_x}^{-f} \int_{-a}^{a+\xi(x-f)} \frac{2}{3}(c^3+3cz^2) dxdz \\
&+ \int_{x=-f}^{f} \int_{-a+\xi(x+f)}^{a+\xi(x-f)} \frac{2}{3}(c^3+3cz^2) dxdz \\
&+ \int_{x=f}^{\Delta_x} \int_{-a+\xi(x+f)}^{a} \frac{2}{3}(c^3+3cz^2) dxdz \\
&= \frac{2}{3} \int_{u=-\xi(\Delta_x+f)}^{-2\xi f} \underbrace{(A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + A_3 u^3)}_{u=\xi(x-f)} du \\
&+ \frac{2}{3} \int_{x=-f}^{f} (B_0 + B_1 x^2) dx \\
&+ \frac{2}{3} \int_{u=2\xi f}^{\xi(\Delta_x+f)} \underbrace{(A_0 - A_1 u + A_2 u^2 - A_3 u^3)}_{u=\xi(x+f)} du \\
&= \frac{4}{3}[A_0(u_f - u_i) + \frac{A_1}{2}(u_f^2 - u_i^2)] + \frac{A_2}{3}(u_f^3 - u_i^3) + \frac{A_3}{4}(u_f^4 - u_i^4)] \\
&+ \frac{4}{3}[B_0 f + \frac{B_1}{3} f^3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_f &= \xi(\Delta_x + f) \\
u_i &= 2\xi f \\
A_0 &= 2(ac^3 + ca^3) \\
A_1 &= c^3 + 3ca^2 \\
A_2 &= 3ac \\
A_3 &= c \\
B_0 &= ac(2c^2 + 2a^2 - 3a\xi f + 6\xi^2 f^2) - 2c^3 f\xi - 2\xi^3 c f^3 \\
B_1 &= 6c(a\xi^2 - \xi^3 f)
\end{aligned}$$