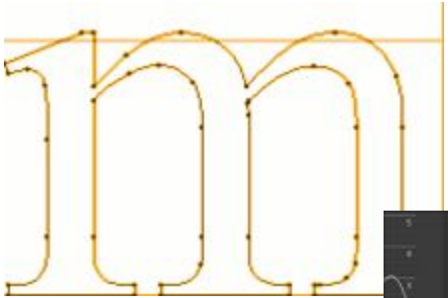
ISART DIGITAL

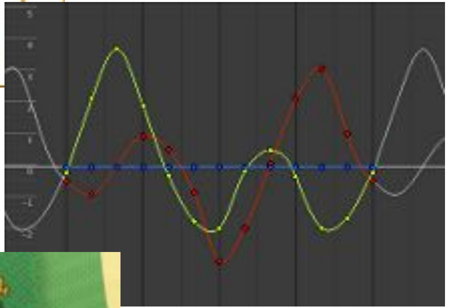
PARIS

Mathématiques

Splines

Splines





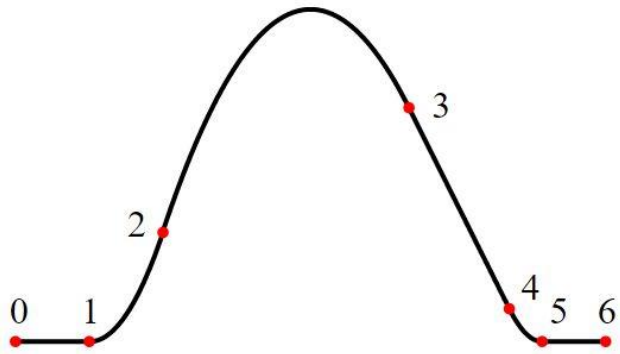
Définition générale :

- Une spline est une fonction mathématique dont le résultat est une courbe
- En programmation graphique, il s’agit d’une courbe qui va relier, ou qui est définie, par deux ou plusieurs points
- Les splines sont utilisées dans de nombreux domaines pour tracer des formes complexes
- Dans les jeux vidéos, elles ont de multiples applications
  - la modélisation 2D ou 3D (courbes et surfaces)
  - courbes d’animation
  - trajectoires de déplacement
  - ...

Splines

Définition mathématique :

- Une spline est une fonction **définie par morceaux** par des **polynômes**, généralement notée ***S*(t)**
- La valeur de la fonction est un point de la courbe qui dépend
  - d’un paramètre **t** qui varie sur un **intervalle défini**
  - de **points de contrôle**



Splines

Interpolation VS approximation :

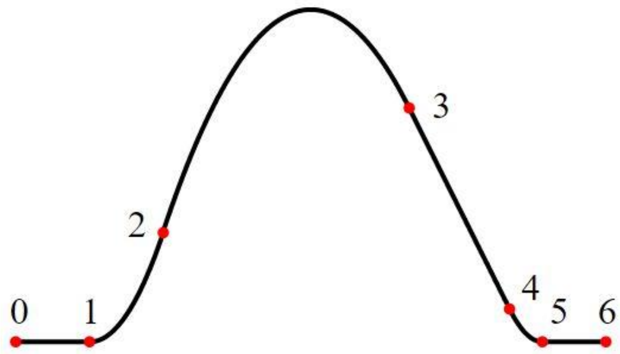
- Dans le tracé d’une spline, il y a deux manières d’utiliser les points de contrôle
  - par **interpolation**
    - la courbe passera par chacun des points
  - par **approximation**
    - la courbe passera à proximité de chacun des points (influence)

Splines

Intervalles :

- Une courbe spline est une fonction polynomiale définie sur un intervalle **[*a*, *b*]** divisé en sous intervalles $[t_{i-1}, t_i]$ tels que :
  $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k = b$

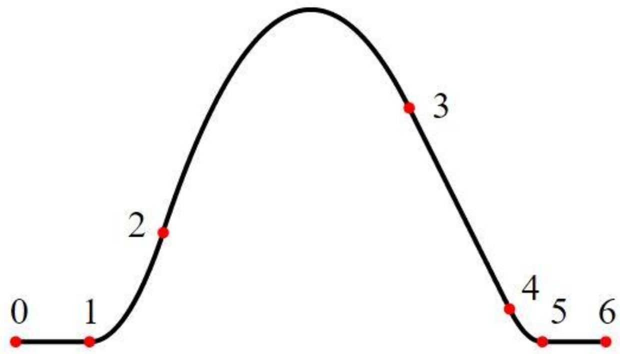
- On la note donc $S : [a, b] \rightarrow R^3$



Splines

Intervalles :

- Pour chaque sous intervalle $[t_{i-1}, t_i]$ on définit un polynôme
  $P_i : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow R^3$
- Cela donne pour une spline à **k** intervalles :
  $S(t) = P_1(t), t_0 \leq t \leq t_1$
  $S(t) = P_2(t), t_1 \leq t \leq t_2$
  …
  $S(t) = P_k(t), t_{k-1} \leq t \leq t_k$



Splines

Degré :

- Le degré de la spline est défini comme celui du polynôme $\mathbf{P_i}$ de plus haut degré

- Si tous les polynômes ont le **même degré**, on dit que la spline est **uniforme**

- Le nombre de points de contrôle est déterminé par le degré :
  nb points = degré + 1

Splines

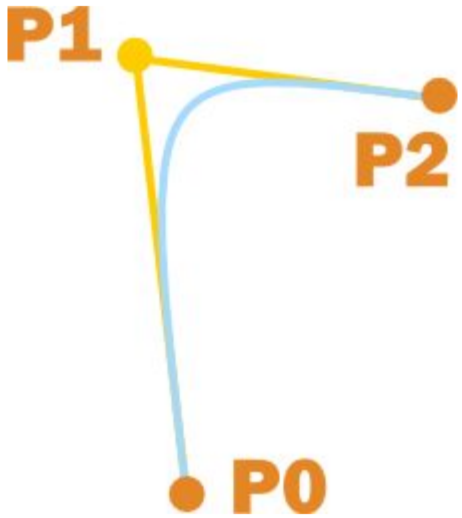
Degré :

- **Degré 1**
  - fonction la plus simple, qui trace un **segment**
  - ce sont des segments qui relient les points $\mathbf{P_i(t_i)}$
  - Les points de la courbe sont définis par le polynôme de degré 1
  - Exemple :
    - soit $\mathbf{0 \leq t \leq 1}$
    - $\mathbf{[x, y, z] = (1 - t)\, P_0 + t\, P_1}$
    - $\mathbf{P_0}$ et $\mathbf{P_1}$ sont les points de contrôle
    - pour t = 0, la fonction vaut $\mathbf{P_0}$
    - pour t = 1, la fonction vaut $\mathbf{P_1}$

Splines

Degré :

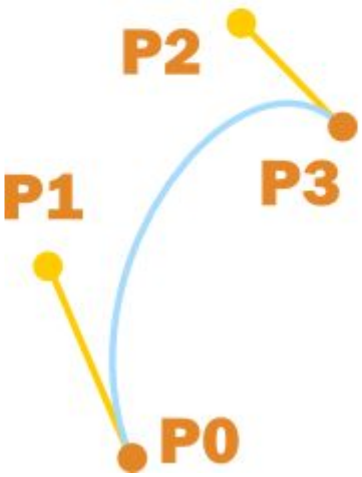
- **Degré 2**
  - la fonction trace une **courbe quadratique**
  - l'équation est un polynôme du second degré
  - $\mathbf{P_0}$, $\mathbf{P_1}$ et $\mathbf{P_2}$ sont les points de contrôle



Splines

Degré :

- **Degré 3**
    - la fonction trace une **courbe cubique**
    - la fonction est un polynôme de degré 3
    - $\mathbf{P_0}$, $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$ et $\mathbf{P_3}$ sont les points de contrôle



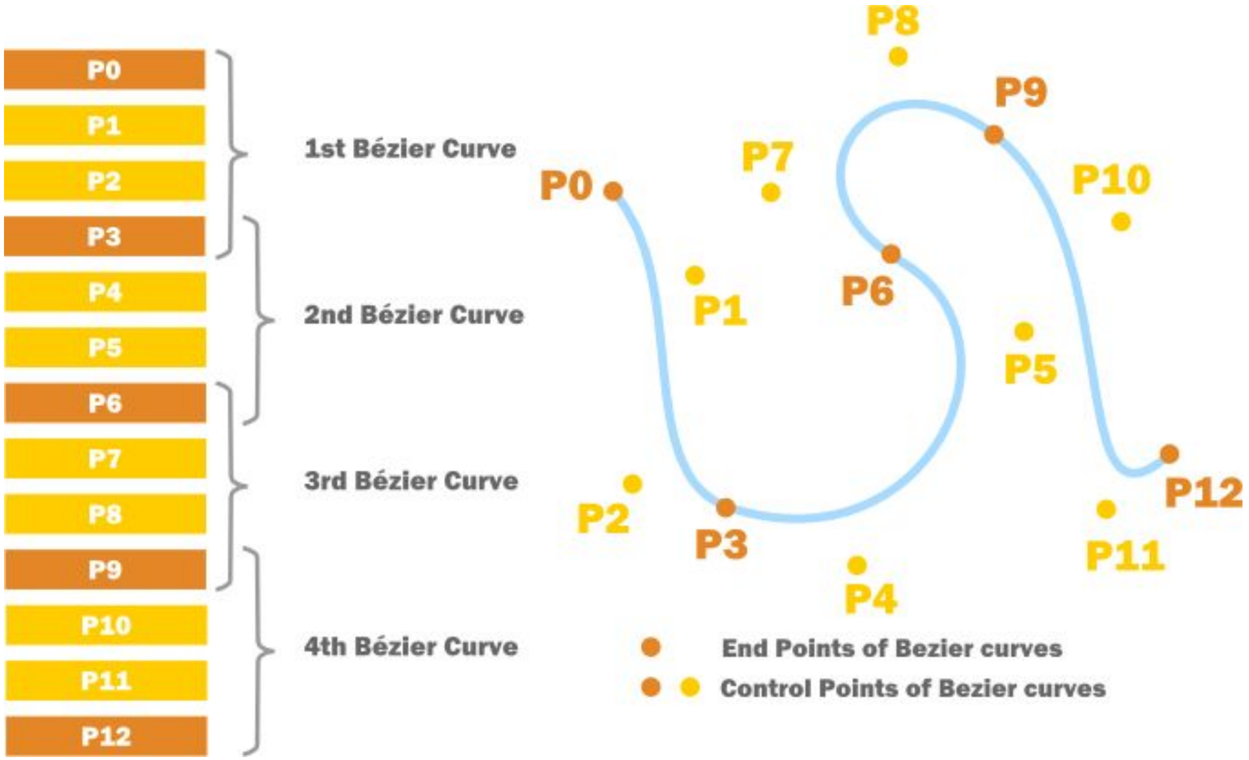
Splines

Degré :

- **Degré > 3**
  - Comment augmenter la complexité de la courbe et le nombre de points de contrôle ?
    - on peut augmenter le degré
      - on perd beaucoup en contrôle global
      - calculs (et implémentation) complexes
    - ⇒ on utilisera le plus souvent des splines (cubiques) mises bout-à-bout
  - mais attention à la **continuité** aux points de jonction !

Splines

Ex : Spline Path



Splines

Continuité :

- La dérivabilité d'un polynôme étant infinie, la dérivabilité d'une spline dépendra de la continuité au niveau des jointures des différents polynômes

- Si pour tout **i, $0 < i < k$** et pour tout **j, $0 \leq j \leq n$** on vérifie
  $\mathbf{P_i^{(j)}(t_i) = P_{i+1}^{(j)}(t_i)}$

  Alors la spline est de **continuité n**, notée $\boldsymbol{C_n}$

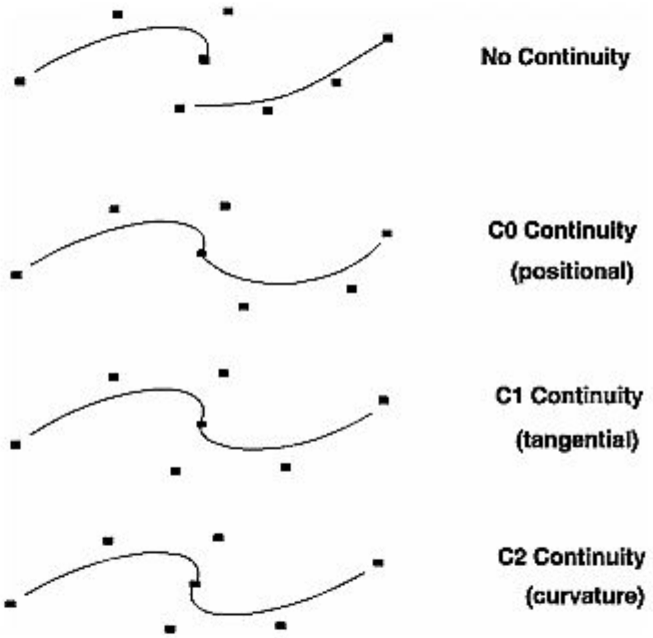
Splines

Continuité :

- La continuité $\mathbf{C_n}$ définit le type de jonction entre chaque intervalle
    - $\boldsymbol{C_0}$ est la continuité minimum : les polynômes successifs passent bien par les points de jonction
→ **points reliés entre eux**
    - $\boldsymbol{C_1}$ indique une continuité des tangentes : les polynômes successifs ont des dérivées premières égales aux points de jonction
→ **pas de points anguleux**
    - $\boldsymbol{C_2}$ indique une continuité de la courbure : les polynômes successifs ont des dérivées secondes égales aux points de jonction
→ **pas de rupture de courbure**

Splines

Continuité :



Splines

Polynômes :

- Pour chaque segment, on veut faire correspondre à une valeur de t un point 3D {x, y, z}
- on va donc poser les polynômes pour x(t), y(t) et z(t) qui vont définir la courbe. Ils seront définis par des coefficients $\mathbf{a_i}$ $\mathbf{b_i}$ **et** $\mathbf{c_i}$
- Pour une courbe de degré **d** quelconque, on aura les polynômes :
  - $x(t) = a_d t^d + a_{d-1} t^{d-1} + \ldots + a_1 t + a_0$
  - $y(t) = b_d t^d + b_{d-1} t^{d-1} + \ldots + b_1 t + b_0$
  - $z(t) = c_d t^d + c_{d-1} t^{d-1} + \ldots + c_1 t + c_0$

Splines

Polynômes :

- Ex : pour une courbe **cubique** (degré 3), on aura donc
  - $x(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$
  - $y(t) = b_3t^3 + b_2t^2 + b_1t + b_0$
  - $z(t) = c_3t^3 + c_2t^2 + c_1t + c_0$

Splines

Polynômes et écriture matricielle :

- Les coefficients des polynômes qui définissent la spline peuvent s’écrire sous forme matricielle
- Ex : écriture matricielle d’une spline cubique
    - on peut écrire sous la forme **S(t) = T.C**
        - avec T = [t^3, t^2, t, 1]
        - et la matrice des coefficients C = $\begin{bmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_0 & b_0 & c_0 \end{bmatrix}$
        - si on effectue la multiplication matricielle T.C, on retrouve bien les expressions de x, y et z précédentes

Splines

Polynômes et écriture matricielle :

- On peut décomposer la matrice des coefficients C de la façon suivante :
  - **C = M.G**
  - **M** est une matrice 4x4 **constante**, dont les valeurs dépendent des types de courbe (hermitienne, Bézier, B-Spline…)
  - **G** est une matrice 4x3, appelée **matrice géométrique**.
    - Elle dépend des points de contrôle
    - Elle établit les contraintes géométriques de la courbe
  - Au final, on pourra écrire **S(t) = T.M.G**

Splines

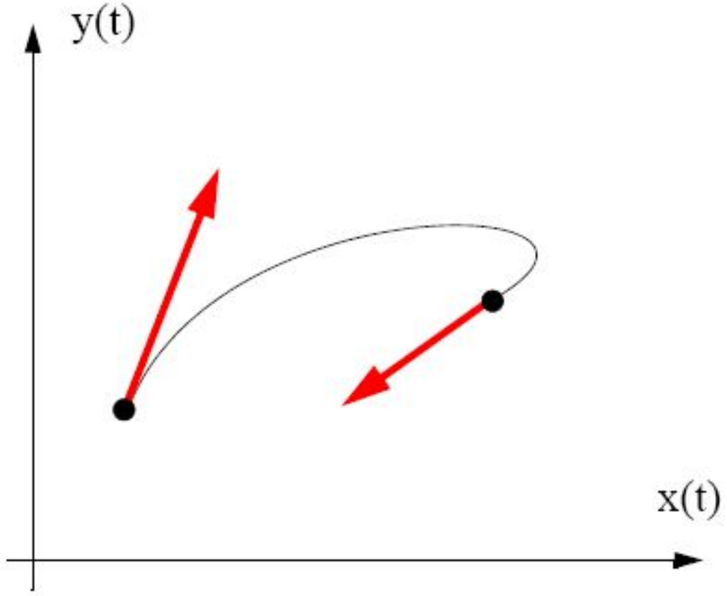
Les différents type de courbes :

- Courbes hermitiennes
- Courbes de Bézier
- Courbes de Catmull-Rom
- B-Splines
- NURBS
- ...

Splines

Les courbes hermitiennes

- Courbe **cubique**
- Interpole deux points avec ses tangentes
- définie par
    - deux **points** de contrôle P_1 et P_2
    - les **dérivées** aux points de contrôle R_1 et R_2
- $S : [0, 1] \rightarrow R^3$
    - $S(0) = P_1$ et $S(1) = P_2$
    - $S'(0) = R_1$ et $S'(1) = R_2$



Splines

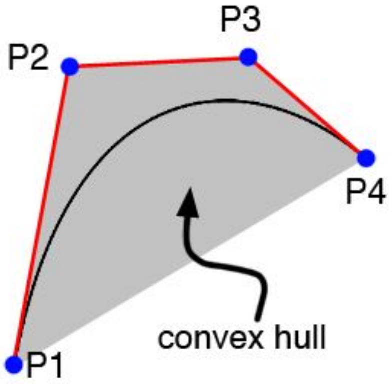
Les courbes hermitiennes

- Soit P_1 (x_1, y_1, z_1) et P_2 (x_2, y_2, z_2)
- Soit R_1 (x'_1, y'_1, z'_1) et R_2 (x'_2, y'_2, z'_2)
- Sous **forme matricielle**, on aura $\mathbf{S_H(t) = T \, . \, M_H \, . \, G_H}$
- avec $T = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix}$ $M_H = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $G_H = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x'_1 & y'_1 & z'_1 \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}$
- Soit $S_H(t) = (2t^3 - 3t^2 + 1)P_1 + (-2t^3 + 3t^2)P_2 + (t^3 - 2t^2 + t)R_1 + (t^3 - t^2)R_2$

Splines

Les courbes de Bézier

- Découvertes par **Pierre Bézier** (ingénieur Renault)
  - Utilisées à l'origine dans le design de carrosserie de voiture
- Elles sont définies par des **points de contrôle**
- Le nombre de points de contrôle dépend du degré de la courbe (degré + 1)
- Le 1er point représente le **point de départ** de la spline
- le dernier point représente **le point d'arrivée**
- Les points intermédiaire vont **influencer** la forme de la courbe



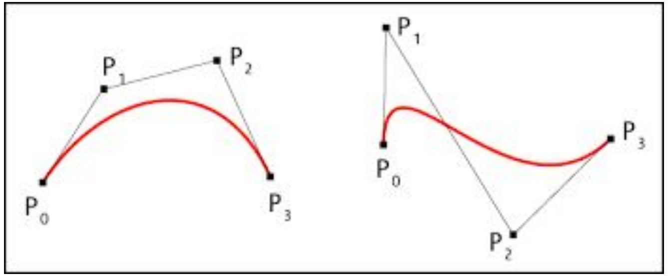
Splines

Les courbes de Bézier

- La définition de la courbe utilise les **polynômes de Bernstein**
- La courbe de Bézier associée à n + 1 points P_0, …, P_n de R^3 est la courbe paramétrée
  S(t) : [0, 1] → R^3 donnée par $P(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i,$
- B_i^n est le polynôme de Bernstein $B_i^n : t \mapsto C_i^n \ t^i \ (1-t)^{n-i}$
- C_i^n est le coefficient binomial
  - $C_i^n = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$

Courbes de Bézier cubiques

- Elle **approxime** une ligne polygonale de 4 points de contrôle
- Type de courbe de Bézier le plus courant
- Courbe hermitienne particulière avec $R_1 = 3(P_1 - P_0)$ et $R_2 = 3(P_3 - P_2)$
- **Forme matricielle** : $S_B(T) = T \cdot M_B \cdot G_B$
  - $T = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix}$
  - $M_B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad G_B = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$

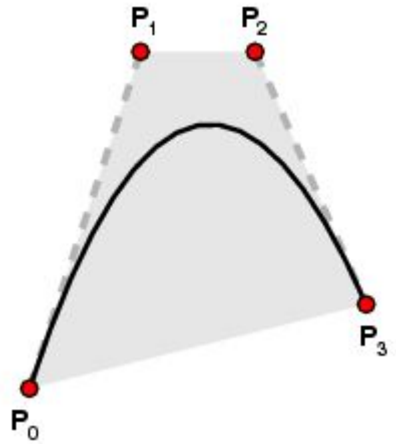


- **Forme polynomiale**
  - $S_B(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3P_3$

Splines

Courbes de Bézier cubiques

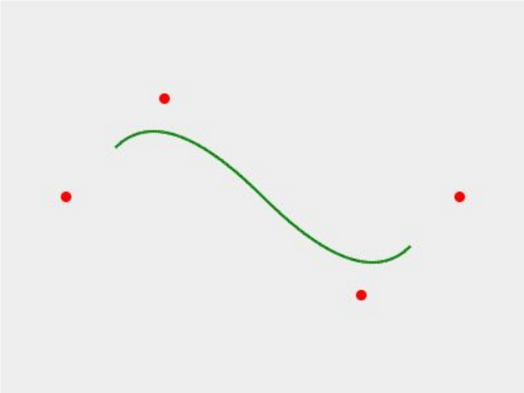
- **Propriétés, avantages et inconvénients**
  - **Invariance affine** (translation, scale ou rotation)
    - transformer les points de contrôle revient à transformer un point de la courbe
  - **Enveloppe convexe** définie par les points de contrôle
    - la courbe est contenue à l'intérieur
  - Problème du **contrôle global**
    - déplacer un point de contrôle influence toute la courbe
  - Problème du **degré élevé**
    - courbe complexe coûteuse
    - Solution : mettre des courbes cubiques bout-à-bout
    - mais problème de **continuité !**



Splines

Les B-Splines

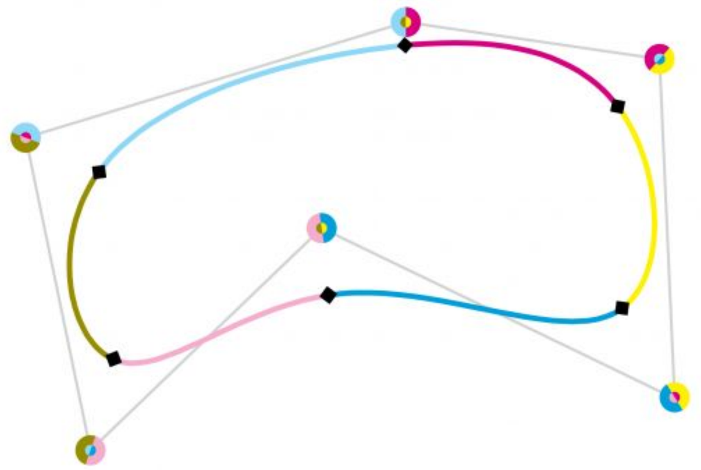
- Combinaison linéaire de polynômes de Bernstein (comme Bézier)
- Courbe d'**approximation** à partir de point de contrôle
- Courbe **polynomiale par morceaux** (courbes de degré fixé)
- Bezier est un cas particulier de B-Spline
- Il y a deux types de B-Spline
  - **uniformes**
  - **non-uniformes**



Splines

Les B-Splines cubiques uniformes

- Spline de **degré 3** : c'est le degré le plus répandu
- Chaque segment est contrôlé par **4 points de contrôle**
- En décalant les 4 points utilisés, on peut mettre bout-à-bout les segments et obtenir une spline complexe, modifiable **localement**
- Les paramètres t_i sont répartis **uniformément** sur les points de contrôle
  - $\mathbf{t_i = t_{i-1} + 1}$



Splines

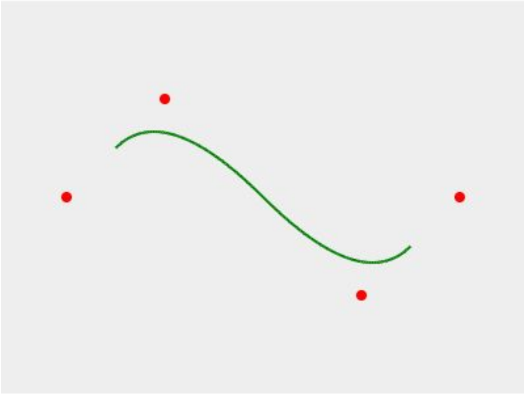
Les B-Splines cubiques uniformes

- Forme matricielle
  - $S_{BS}(T) = T \,.\, M_{BS} \,.\, G_{BS}$
  - $T = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix}$
  - $G_{BS} = \begin{bmatrix} P_{i-3} \\ P_{i-2} \\ P_{i-1} \\ P_i \end{bmatrix}$ $\qquad M_{BS} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
- Forme polynomiale
  - $\frac{1}{6}\left[(1-t)^3 P_{i-3} + (3t^3 - 6t^2 + 4)P_{i-2} + (-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1)P_{i-1} + t^3 P_i\right]$

Splines

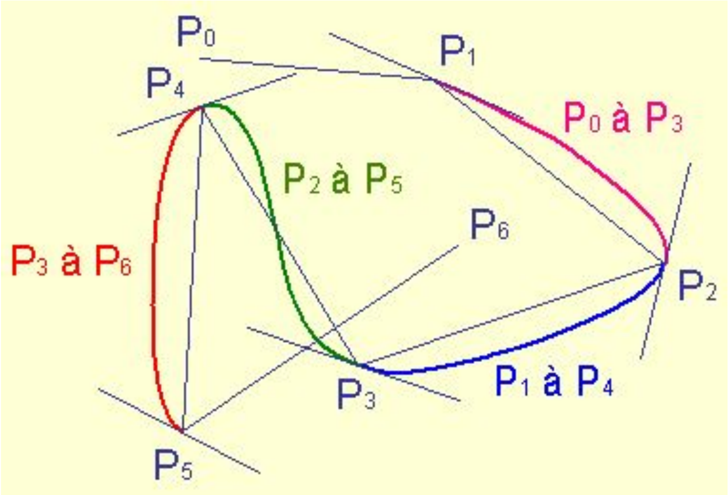
Les B-Splines

- **Propriétés, avantages et inconvénients**
  - **Invariance affine** (translation, scale ou rotation)
  - **Enveloppe convexe** définie par les points de contrôle
    - la spline est contenue à l'intérieur
  - **Contrôle local**
    - déplacer un point de contrôle ne modifie la spline que localement
  - **Continuité C2**
    - la courbure est conservée sur toute la spline
  - **Degré peu élevé**
    - mettre bout-à-bout des courbes cubiques est peu coûteux



Les Splines de Catmull-Rom

- Courbe d'**interpolation**
- Interpole les points $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_{m-1}}$ d'une séquence de points $\mathbf{P_0}$, $\mathbf{P_m}$



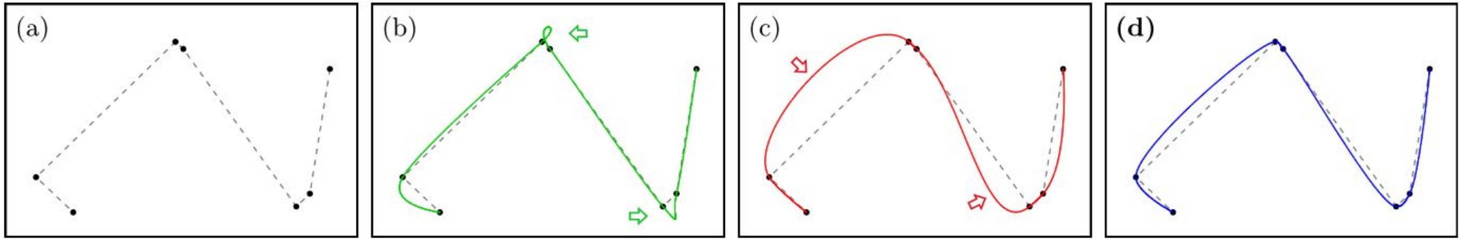
Splines

Les Splines de Catmull-Rom

- Forme matricielle
  - $S_{SCR}(T) = T \cdot M_{SCR} \cdot G_{SCR}$
  - $T = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix}$
  - $G_{SCR} = \begin{bmatrix} P_{i-3} \\ P_{i-2} \\ P_{i-1} \\ P_i \end{bmatrix}$ $\qquad M_{SCR} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Les Splines de Catmull-Rom

- **Propriétés, avantages et inconvénients**
  - La tangente à la courbe en P_i est parallèle à la droite (P_{i-1}, P_{i+1})
  - On obtient une spline qui passe par chacun des points de contrôle $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_{m-1}}$
  - On a peu de contrôle sur l'allure de la courbe entre les points de contrôle
  - Dans certains cas, on peut obtenir des boucles ou des intersections non voulues, on pourra alors se pencher vers d'autres implémentations
    - Chordal Catmull-Rom
    - Centripetal Catmull-Rom



Splines

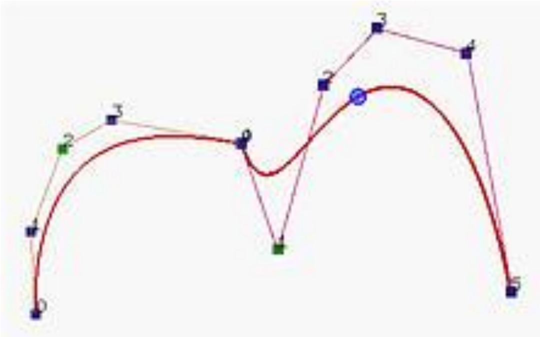
Les autres splines

- β Splines
  - Permet un contrôle local important à travers deux paramètres β_1 et β_2
- N.U.R.B.S.
  - Permet beaucoup de précision grâce à l’ajout d’un vecteur de knots
  - On va pouvoir modifier la répartition de l’interpolation (non uniforme)
  - Surtout utilisées en modélisation
- T Splines
  - Splines de modélisation dérivées des NURBS
  - Permet d’obtenir des résultats similaires en réduisant le nombre de points de contrôle

Splines

Jonction de splines

- Pour créer des chemins/formes complexes, on pourra mettre bout-à-bout des splines simples (cubiques)
- Pour obtenir un résultat “fluide” il faudra veiller à la continuité entre les différents segments

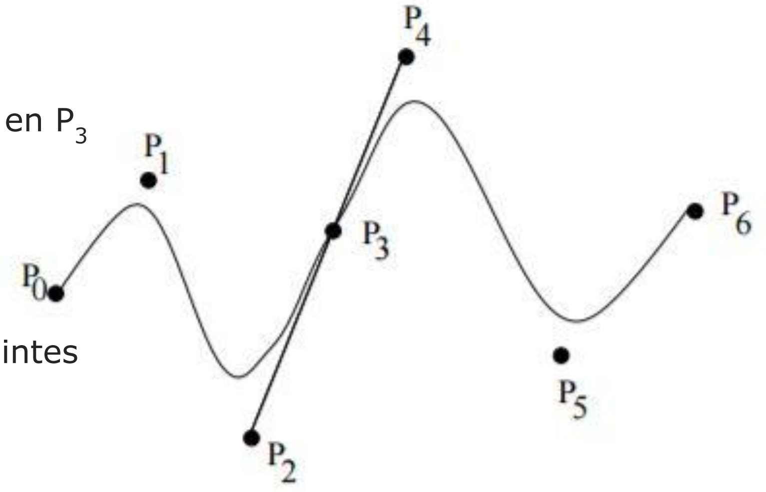


Splines

Jonction de splines - Bézier

- Une spline est définie par 2 courbes de Bézier reliées en P_3
- Pour assurer une continuité C_1 entre deux courbes de Bézier, il faut conserver la **dérivabilité** en P_3
  - on veut que P_2P_3 et P_3P_4 soient **colinéaires**
- Pour une continuité C_2 il faut conserver la **dérivée seconde** en P_3
  - on veut que $(P_2 , P_3) = (P_3 , P_4)$

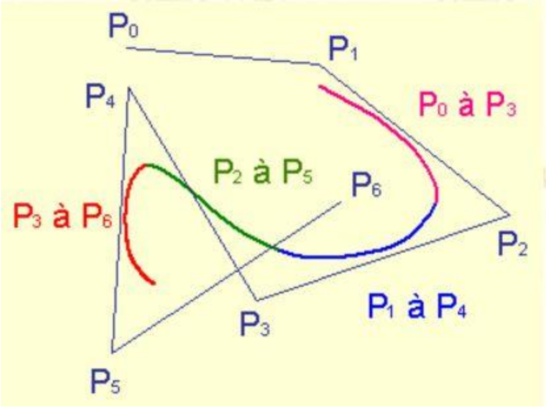
- ⇒ P_2 et P_4 ne sont donc pas indépendants !
  - Il faudra donc adapter votre outil pour avoir ces contraintes



Splines

Jonction de splines - B Splines cubiques

- Pour relier les segments définis par une liste de points
  - il suffit de calculer chaque portions avec 4 points consécutifs parmis les points
  - puis de décaler un point à chaque itération jusqu'à atteindre le dernier point
- La continuité est ici, par définition, automatique



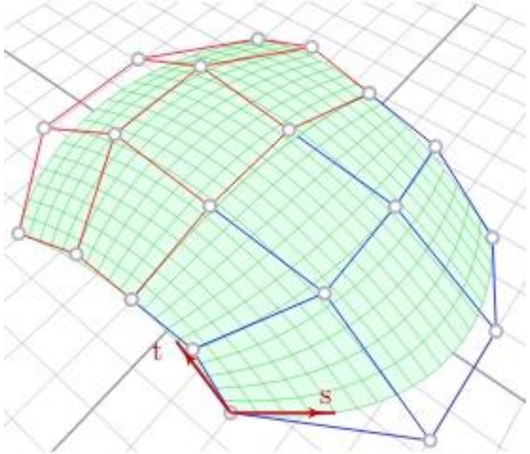
Jonction de splines - B Splines cubiques

- Pour modifier l’aspect d’une B Spline et obtenir plus de contrôle local, on pourra multiplier certains points de contrôle
- Exemple :
  - Si on veut que le départ de la courbe passe par le point de contrôle initial, on pourra insérer 3 fois le même point
  - Attention, cette pratique effectuée au milieu d’une courbe risque de faire perdre la continuité C_2 ou C_1

Splines

Les surfaces paramétriques ou patches

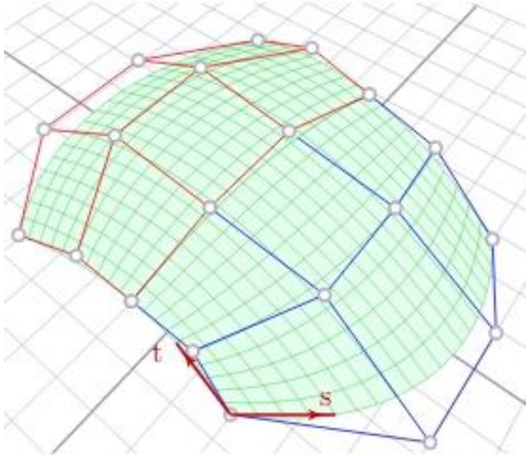
- On étend le principe de spline à une **surface**
- On utilisera cette-fois une **grille de points de contrôles**
- **Un paramètre supplémentaire** intervient dans la définition



Splines

Exemple : Bezier Patch

$$P(s,t) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} P_{ij} B_{i,n}(s) B_{j,m}(t)$$

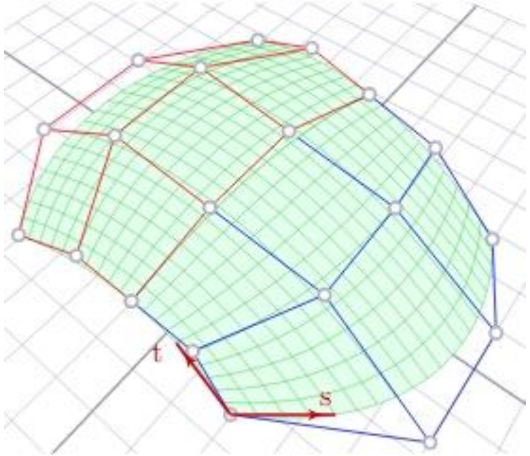


- On applique la formule de Bézier sur une dimension supplémentaire
- ***s*, *t* ∈ [0, 1]**
- (m+1)(n+1) points de contrôle P_{ij}
  - soit 16 points de contrôle dans le cas d'un patch Bézier cubique
- Le patch va interpoler les quatres points extrémités

Splines

Exemple : Bezier Patch

- **Ecriture matricielle**
- $$P(s,t) = \left(s^3, s^2, s, 1\right).M_B.P.M_B^t.\begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$



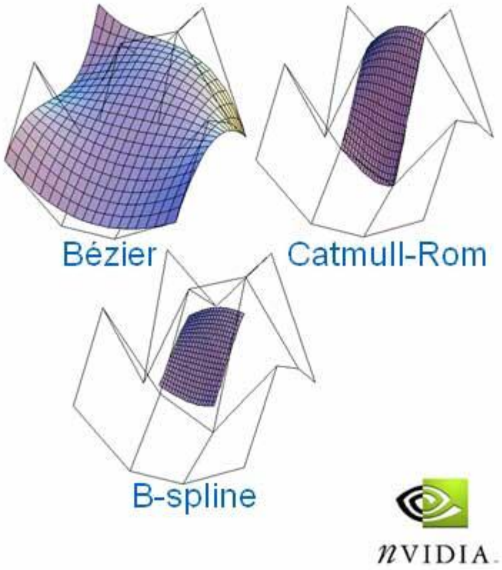
- avec $M_B = M_B^t = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et $P = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ P_4 & P_5 & P_6 & P_7 \\ P_8 & P_9 & P_{10} & P_{11} \\ P_{12} & P_{13} & P_{14} & P_{15} \end{pmatrix}$

Splines

Les surfaces paramétriques ou patches

- Le même raisonnement peut s'appliquer aux autres types de splines
- Exemples :
  - En remplaçant la matrice de Bézier par la matrice B-Spline, on obtient une surface B-Spline cubique uniforme
  - On peut effectuer une interpolation surfacique à l'aide de la matrice Catmull-Rom
- L'ensemble de définition des courbes s'applique aux surfaces
- On retrouve les mêmes problèmes de continuité que pour les courbes



ISART DIGITAL

www.isartdigital.com

60 bd Richard Lenoir 75011 Paris
+33 1 48 07 58 48