9265 RUDKIEWICZ Théo

Un automate cellulaire : le tas de sable abélien fini, ses configurations et leur poids

Les automates cellulaires ont des propriétés fascinantes : de quelques règles simples émergent des comportements complexes et variés. J'ai trouvé intéressant d'en implémenter un, pour observer ses comportements et les analyser. L'automate du tas de sable abélien possède de plus des propriétés algébriques étonnantes.
Le sable stocké dans les océans est déplacé pour former des dunes, des îles. Il est essentiel de comprendre comment ces édifices réagissent aux perturbations extérieures. Plus particulièrement, il s'agit de comprendre comment de petits éboulements se répètent entrecoupés plus rarement d'événements de plus grande envergure.

Positionnement thématique (ETAPE 1)

INFORMATIQUE (Informatique pratique), MATHEMATIQUES (Algèbre), INFORMATIQUE (Informatique Théorique).

Mots-clés (ETAPE 1)

Mots-Clés (en français)	**Mots-Clés** (en anglais)
Groupe	*Group*
Tas de sable abélien	*Abelian Sandpile*
Chaînes de Markov	*Markov Chains*
Automate cellulaire	*State Cellular Automata*
Graphe	*Graph*

Bibliographie commentée

Les automates cellulaires ont été développés par Von Neuman dans les années 1940. Un automate est régi par quelques règles locales simples qui créent des comportements complexes à plus grande échelle. Un automate peut ainsi représenter un phénomène physique : une fois les règles microscopiques décrites, on peut en observer les effets macroscopiques.

Le déplacement d'amas de sable peut s'étudier avec un automate cellulaire [1]. J'ai choisi le modèle du tas de sable abélien. Cet automate créé en 1980 par Bak, Tang et Wisenfeld [2] est constitué d'une grille quadratique sur laquelle des grains de sable sont placés sur les cases de la grille et s'éboulent sur les quatre cases adjacentes dès que leur nombre dépasse 4 sur une case. On peut alors définir un processus markovien par l'ajout successif de grains placés aléatoirement suivi d'une stabilisation par éboulement. On distingue alors les configurations transitoires apparaissant un nombre fini de fois et celles récurrentes apparaissant un nombre infini de fois. Une question qui se pose alors est la probabilité d'apparition d'une configuration récurrente. On démontre que toutes les configurations récurrentes sont équiprobables [3]. La propriété fondamentale du modèle est l'apparition spontanée de configurations dites critiques. A partir d'une telle configuration critique, l'ajout d'un grain entraîne des grandes ou de petites avalanches qui peuvent se propager à tout le milieu. Par ailleurs, on observe une loi puissance pour la distribution des amplitudes des avalanches. La loi puissance se retrouve aussi pour la magnitude des séismes et d'autres phénomènes naturels, ce qui contrinue à l'intéret du modlèe. Cependant, le coefficient de cette loi pour le tas de sable reste inconnu [4].

Ce modèle est ensuite généralisé à n'importe quel graphe [3]. En munissant l'ensemble des configurations récurrentes d'une loi qui combine l'addition sommet à sommet du nombre de grains suivie de la stabilisation, on obtient un groupe abélien, d'où le nom du modèle [3]. En considérant une configuration comme un vecteur de Z^n, on peut dire que Z^n quotienté par le sous-groupe engendré par les opérateurs d'éboulement est un groupe dont les représentants canoniques sont les configurations récurrentes. Dahr [3] fournit de plus un algorithme appelé algorithme thermique permettant de donner la configuration équivalente à une configuration donnée. De cet algorithme dérive également un critère, appelé critère de Dahr, permettant de discriminer les configurations récurrentes. De plus, on obtient facilement l'élément neutre du groupe car celui-ci équivaut à la configuration nulle. Enfin, on peut aussi chercher l'ordre (le cardinal) du groupe. Pour cela, Dahr établit une bijection entre les arbres couvrants et les configurations récurrentes. Grâce au théorème de Kirchhoff sur les graphes, l'ordre s'en déduit.

Enfin, pour le graphe rectangulaire dans Z^2, on peut voir apparaître des auto-similarités. Par exemple, la forme du neutre est étudiée dans la thèse de Dartois [4]. Le résultat de l'éboulement d'un grand nombre de grains (n) depuis une unique case forme un cercle de rayon racine de n [5]. Cependant, il n'existe pas pour le moment d'explications à l'apparition d'auto-similarités.

Finalement, il existe une recherche active autour du modèle du tas de sable abélien [6]. D'une part, nombre de propriétés géométriques sur la grille Z^2 sont non démontrées. D'autre part des extensions du modèle sont proposées comme le modèle de flèche hauteur [4] ou le tas de sable divisible [7].

Problématique retenue

Comment utiliser le nombre de grains présents sur une configuration comme critère rapide pour déterminer si celle-ci est récurrente ou transitoire ? Quelle est la distribution du nombre de grains des configurations ?

Objectifs du TIPE

1 – Déterminer si le nombre de grains maximal (M) d'une configuration transitoire est inférieur au nombre de grains minimal (m) pour une configuration récurrente ;
2 – Approcher ces valeurs (M et m) sur le graphe de la grille Z^2 avec des simulations numériques ;
3 – Déterminer ces valeurs (M et m) exactement pour certaines formes de graphe ;
4 – Étudier la distribution du nombre de grains dans le processus markovien.

Références bibliographiques (ETAPE 1)

[1] Dearing, Richmond, Plater, Wolf, Prandle & Coulthard : Modelling approaches for coastal simulation based on cellular automata: The need and potential. : *2006, Phil.Trans. R. Soc., 364, pp 1051-1071.*

[2] Bak, Tang & Wiesenfeld : Self-Organized Criticality: An Explanation of 1/f Noise : *1987, Phys Rev Lett;.59(4): pp 381-384.*

[3] Dahr Deepak : Self-Organized Critical State of Sandpile Automaton Models : *1990, Phys. Rev. Lett. 64, 1613*

[4] Dartois Arnaud : Au dela du tas de sable, un nouveau modèle combinatoire: Le modèle flèche-hauteur : *2004, Informatique [cs]. Ecole Polytechnique X, pastel-00001113, version 1*

[5] Dominique Rossin, Yvan Le Borgne : On the Identity of the Sandpile Group. : *2002, Discrete Mathematics, Elsevier, 256, 3, pp.775-790, hal-00016377, version 1*

[6] Derycke Henri : Combinatoire dans des stabilisations du modèle du tas de sable sur la grille Z2 : *2018, Thèse présentée à l'Université de Bordeaux Ecole doctorale de mathématiques et d'informatique*

[7] Levine Lionel , Peres Yuval : Strong Spherical Asymptotics for Rotor-RouterAggregation and the Divisible Sandpile : *2008, University of California, Berkeley and Microsoft Research, Potential Analysis 30, no. 1 (Jan. 2009), arXiv:0704.0688v5*