



Rapport de stage

30 mai 2021 – 9 juillet 2021

Théo Rudkiewicz

Sous la direction de :

Yvan Le Borgne

école _____
normale _____
supérieure _____
paris – saclay _____

LaBRI

Avant-propos

Organisation du rapport Mon rapport est découpé en 3 parties. Dans la première partie je présente le modèle sur lequel j'ai travaillé et qui pré-existait à mon stage. J'ai mis en rouge les résultats cruciaux pour la suite et en bleu les exemples. Dans les deuxième et troisième parties, je présente des résultats nouveaux qui, sauf mention du contraire, ont été obtenus durant mon stage. Le rapport fait moins de 10 pages en réduisant la police, les marges et la taille des figures mais je ne l'ai pas fait pour préserver le confort de lecture.

Contexte du stage J'ai effectué mon stage de Licence 3 du 31 mai au 9 juillet 2020 au LaBri (Université de Bordeaux) dans l'équipe Combinatoire et Interaction du département CombAlgo, sous la direction d'Yvan Le Borgne. Pendant mon TIPE, j'ai découvert le modèle du tas de sable abélien. A la fin de mon TIPE j'ai observé le tas de sable sur un maillage triangulaire et j'ai fait des conjectures que je souhaitais démontrer. Je me suis donc adressé à Yvan Le Borgne qui avait démontré cette même propriété dans le cas du maillage carré. Je remercie l'équipe d'avoir permis de faire le stage en présentiel. J'ai ainsi pu assister à plusieurs groupes de travail de l'équipe et à la présentation de travaux d'autres équipes.

Remerciements Je tiens à remercier, mon maître de stage, Yvan Le Borgne qui m'a consacré beaucoup de temps. Je voulais aussi remercier Nicolas Bonichon qui s'est rendu disponible pour m'expliquer ses travaux sur les triangulations que je n'ai malheureusement pas eu le temps d'utiliser. Enfin, je remercie tous les membres du LaBRI qui sont venus présenter leur travaux à tous les stagiaires alors présents.

Table des matières

Avant-propos	2
Résumé	5
1 Le modèle du tas de sable abélien	7
1.1 Petit historique	7
1.1.1 Un modèle physique	7
1.1.2 Un modèle mathématique	7
1.2 Présentation formelle	8
1.2.1 Forme et configurations	8
1.2.2 Eboulement	8
1.2.3 Processus markovien	9
1.2.4 Le groupe du tas de sable	9
2 Existence d'un motif régulier dans l'élément neutre sur maillage carré et triangulaire	11
2.1 Introduction	11
2.1.1 Le cas à maillage carré	11
2.1.2 Le cas à maillage triangulaire	12
2.1.3 Plan de la démonstration	12
2.2 Formation du motif périodique	13
2.2.1 Graphe ligne du maillage carré	13
2.2.2 Construction du motif	14
2.2.3 L'odomètre	14
2.2.4 Le cas triangulaire vertical	15
2.3 Preuve du caractère récurrent	15
2.4 Reconstruction du rectangle	16
2.4.1 La configuration concaténée est récurrente	16
2.4.2 Nombre d'éboulements restants	16
2.4.3 La configuration est l'élément neutre	17
2.5 Borne sur la propagation des grains restants	17
3 Existence d'un motif régulier dans l'élément neutre sur maillage triangulaire périodique	19
3.1 Introduction	19
3.2 Instabilités sur un graphe colonne	19
3.2.1 Contexte	19
3.2.2 Essais de recherche automatique et contre-exemples	20
3.2.3 Simulation locale	20
3.3 Existence d'un motif et odomètre	21
3.3.1 Existence	21

3.3.2	Odomètre	21
3.3.3	Périodicité des colonnes	22
3.4	Borne sur les propagations venant des côtés	22
Conclusion		23
4	Annexe	26
4.1	Odomètres	26
4.1.1	Cas carré	26
4.1.2	Cas triangle	26
4.2	Réurrence du motif carré	27
4.3	Réurrence du motif triangulaire	27
4.4	Borne sur la propagation	28
4.4.1	Le cas carré	28
4.4.2	Le cas triangulaire	29
4.4.3	Le graphe triangulaire	29
4.4.4	Borne	29
4.5	Exemple de triangulations et d'odomètres associés	31
4.5.1	Triangle alterné	31

Résumé

Le contexte général Mon travail porte sur le modèle du tas de sable abélien qui a été créé par des physiciens [Bak et al., 1987] puis étudié par les informaticiens et les mathématiciens. C’est un modèle de diffusion totalement discret (espace, temps et quantités) et avec de nombreuses structures permettant des analyses poussées.

Le tas de sable abélien modélise les empilements de grains de sable avec un automate cellulaire sur un graphe. Chaque sommet, qui contient un certain nombre de grains, peut s’écrouler en envoyant un de ses grains à chacun de ses voisins. Le nombre de grains par sommet définit une configuration. On peut définir une opération qui donne une structure de groupe abélien à l’ensemble des configurations pour un graphe donné. [Dhar, 1990]

Beaucoup de questions sont ouvertes, notamment concernant la forme de l’élément neutre de ce groupe sur un graphe en grille carrée 2D. L’élément neutre est une préoccupation naturelle dans une structure de groupe, il a de plus (via l’algorithme thermique) une définition algorithmique simple. Empiriquement le résultat de l’algorithme fait apparaître des régularités fractales (stable au changement d’échelle) qu’on peut espérer expliquer.

Le problème étudié Je me suis intéressé au tas de sable sur des pavages autres que carrés. La recherche sur des formes non carrées est encore limitée : seuls quelques articles parlent du tas de sable sur des pavages triangulaires et hexagonaux dont un très récent [Fersula et al., 2020].

Si, sur un pavage triangulaire régulier d’un rectangle allongé, on calcule informatiquement l’élément neutre, alors on y observe un bande régulière en son milieu. L’existence d’une telle bande régulière sur l’élément neutre d’un maillage carré est prouvée [Rossin and Le Borgne, 2002].

Mon but est donc de généraliser cette preuve au cas d’un maillage triangulaire puis à d’autres formes plus générales. Dans l’élément neutre, lors du passage à l’échelle, souvent les détails locaux du maillage ne comptent pas pour les observables globales, et c’est l’occasion de le vérifier ici (avec l’observation de la bande centrale comme observable globale).

La contribution proposée J’ai empiriquement constaté l’existence du motif régulier sur plusieurs réseaux triangulaires. J’ai alors, en parallèle, étudié la preuve déjà existante du cas carré et construit celle du cas triangulaire régulier. Même si la structure générale est restée la même, j’ai dû élaborer de nouvelles méthodes pour plusieurs points de la démonstration.

J’ai alors pu généraliser une partie de la preuve à un ensemble beaucoup plus large de pavages.

Les arguments en faveur de sa validité Les comportements décrits ont tous été observés avec de nombreuses simulations. De plus, les résultats que j’avance sont pour la plupart démontrés.

Le bilan et les perspectives Toutes les étapes des preuves des cas réguliers sauf une seule, se généralisent à d'autres triangulations. L'étape qui bloque est la détermination automatique du motif régulier. Il serait donc intéressant de mieux comprendre les conditions qui mènent à la formation de ce motif, notamment comprendre quels motifs périodiques permettent la propagation des grains.

Il reste de nombreuses propriétés à démontrer. Par exemple, dans le cas du maillage carré ou triangulaire, on peut pour des contours de maillage presque carrés le même motif régulier mais seulement sur un carré central. L'existence de ce carré reste encore à démontrer. Il est également envisageable d'étudier le problème pour des maillages de plus haute dimension.

Chapitre 1

Le modèle du tas de sable abélien

1.1 Petit historique

1.1.1 Un modèle physique

En 1987, Bak, Tang et Wiesenfeld [Bak et al., 1987] inventent un automate cellulaire modélisant un tas de sable. Un tas de sable est une grille ayant sur chaque case un certain nombre de grains. L'automate est muni d'une règle d'éboulement qui permet à une case ayant plus de 4 grains d'en envoyer un à chaque case adjacente (dont éventuellement le vide autour de la grille).

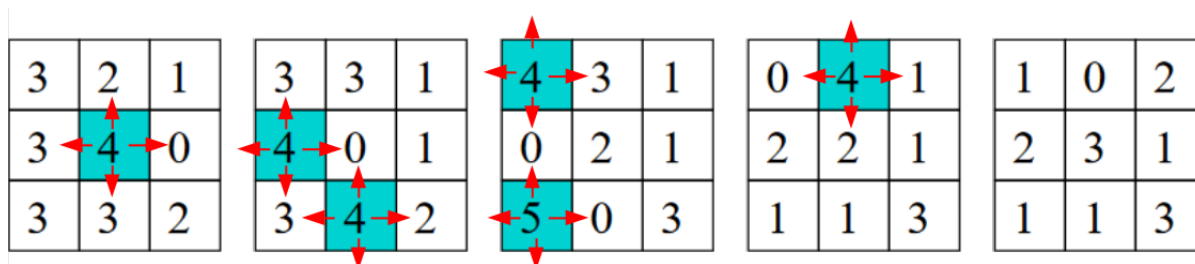


FIGURE 1.1 – Exemple d'éboulement sur une grille 3x3 (la case en bleu s'éboule entre le tas à gauche et son successeur à droite) avec en rouge le déplacement des grains

Ils introduisent un processus markovien consistant à ajouter aléatoirement un grain puis à stabiliser en éboulant les sommets instables. La propriété intéressante du modèle est la distribution du nombre d'éboulements nécessaire à la stabilisation. Cette distribution suit une loi de puissance que l'on retrouve dans de nombreux phénomènes physiques comme la magnitude des tremblements de terre.

1.1.2 Un modèle mathématique

Le modèle est alors généralisé à des graphes quelconques. Une case devient un sommet, une case adjacente est un voisin et le vide devient un sommet distingué appelé puits. On définit les configurations récurrentes comme l'ensemble des configurations qui apparaissent une infinité de fois durant le processus markovien.

Deepak Dhar montre alors que les configurations récurrentes forment un groupe abélien [Dhar, 1990]. Il y a plusieurs bijections entre les configurations récurrentes et les arbres couvrants du graphe [Cori and Le Borgne, 2003]. Enfin, les configurations récurrentes apparaissent avec probabilité égale dans l'unique distribution stationnaire du processus markovien.

1.2 Présentation formelle

1.2.1 Forme et configurations

La forme d'un tas de sable est donnée par un multi-graphe (donc avec un nombre arbitraire d'arête) connexe $G = (S, A)$. Un sommet est distingué et appelé puits. (Il est souvent numéroté 0.) Dans toute cette partie je prendrai l'exemple du prisme (voir figure 1.2).

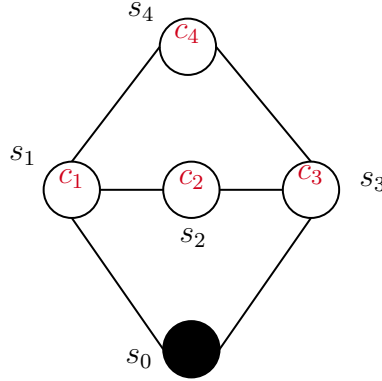


FIGURE 1.2 – Graphe du prisme avec les sommets s_0, s_1, s_2, s_3, s_4 . En rouge le nombre de grain par sommet, en noir le puits. Ainsi la configuration présentée est $(c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4)$

Une configuration est la donnée du nombre de grains pour chaque sommet autre que le puits. Ainsi on peut voir une configuration comme un élément de \mathbb{Z}^n . Ainsi $(1 \ 0 \ 2 \ -1)$ a 1 grain sur le sommet 1, 0 sur le 2, 2 grains sur le 3 et -1 grains sur le sommet 4.

1.2.2 Eboulement

L'éboulement d'un sommet est l'opération qui définit la dynamique du tas de sable. Lors de l'éboulement d'un sommet i , chaque arête sortant du sommet i envoie un grain à l'autre sommet auquel elle est reliée.

Exemple : $(4 \ 0 \ 0 \ 0)$ devient, après éboulement de 1, la configuration $(1 \ 1 \ 0 \ 1)$.

On dit que l'éboulement d'un sommet i est légal si après l'éboulement le sommet i a un nombre positif de grains ; c'est à dire si i avait suffisamment de grains (plus que son degré sortant). Le puits n'ayant pas de grains son éboulement n'est jamais légal. Une configuration (ou un sommet) est stable si aucun éboulement n'est légal.

Une configuration est positive si sur chaque sommet (sauf le puits), il y a un nombre positif de grains. La stabilisation d'une configuration consiste à exécuter un éboulement légal tant que cela est possible. Avec ce processus, à partir d'une configuration positive u , on peut atteindre une unique configuration stable notée \hat{u} . (P 1.2 [Dartois, 2004]) Cela signifie que ce processus se termine (P 1.3 [Dartois, 2004]) (grâce au puits) et qu'en pratique on choisit l'ordre dans lequel on effectue les éboulements sans que cela modifie la configuration stable atteinte.

Exemple de stabilisation. On part d'une configuration instable avec 4 grains sur le sommet 2 et 1 sur le sommet 1 et 3. On note chaque éboulement par une flèche (\mapsto^i) avec le numéro du sommet (i) qui s'éboule.

$$(1 \ 4 \ 1 \ 0) \mapsto^2 (2 \ 2 \ 2 \ 0) \mapsto^2 (3 \ 0 \ 3 \ 0) \mapsto^1 (0 \ 1 \ 3 \ 1) \mapsto^3 (0 \ 2 \ 0 \ 2) \mapsto^2 (1 \ 0 \ 1 \ 2) \mapsto^4 (2 \ 0 \ 2 \ 0)$$

Un autre exemple est donné par la figure 1.1.

Enfin, on définit l'addition de deux configurations comme l'addition du groupe $(\mathbb{Z}^n, +)$ suivie de la stabilisation. On la note \oplus et on a $u \oplus v := \widehat{u + v}$.

Par ailleurs, on note β la configuration où on a éboulé (de façon illégale) le puits sur la configuration nulle.

Exemple : $\beta := (1\ 0\ 1\ 0)$ et on a $(0\ 0\ 0\ 0) \mapsto^0 \beta$

1.2.3 Processus markovien

On définit un processus markovien à partir de la configuration 0 comme suit :

- On choisit aléatoirement (de façon uniforme) un sommet et on y ajoute un grain. Puis, on stabilise.
- On recommence.

Il y a un nombre fini de configurations stables et positives, or la suite des configurations est dans cet ensemble. Par conséquent, il existe un ensemble fini de configurations qui apparaissent une infinité de fois. Les configurations qui apparaissent une infinité de fois sont dites récurrentes. On note $\mathcal{R}ec$ l'ensemble des configurations récurrentes pour un graphe donné.

Les 12 configurations récurrentes sur le prisme :

$$(2\ 1\ 2\ 1), (2\ 1\ 2\ 0), (1\ 1\ 2\ 0), (2\ 0\ 1\ 1), (0\ 1\ 2\ 1), (2\ 1\ 0\ 1), \\ (1\ 0\ 2\ 1), (2\ 0\ 2\ 0), (2, 1\ 1\ 0), (1\ 1\ 2\ 1), (2\ 0\ 2\ 1), (2\ 1\ 1\ 1)$$

Remarque, **ajouter des grains à une configuration récurrente puis stabiliser donne une configuration récurrente.**

Théorème 1.2.1 (Critère de Dahr (1.6 [Dartois, 2004]) ou 1.2.3 [Derycke, 2018]). *u est récurrente si et seulement si après l'éboulement du puits et stabilisation on retrouve u . Autrement dit :*

$$u \in \mathcal{R}ec \iff u \oplus \beta = u$$

De plus, dans le cas d'une configuration récurrente, lors de la stabilisation après l'ajout de β chaque sommet (autre que le puits) s'éboule exactement une fois.

1.2.4 Le groupe du tas de sable

Le modèle du tas de sable doit son nom au fait que l'on peut munir les configuration d'une structure de groupe abélien. On peut présenter ce groupe de deux façons, tout d'abord :

Théorème 1.2.2 ((2.2) [Dartois, 2004]). *$(\mathcal{R}ec, \oplus)$ est un groupe abélien.*

D'autre part, on peut munir les configurations d'une relation d'équivalence.¹ Deux configuration sont équivalentes si on peut passer de l'une à l'autre par une suite d'éboulements pas forcément légaux.

Ainsi l'ensemble des configurations quotienté par cette relation d'équivalence est également un groupe abélien. De plus, les configurations récurrentes forment un ensemble de représentants canoniques de ce groupe quotient.

1. La symétrie de la relation vient du fait qu'ébouler tous les sommets ne change pas la configuration. Ainsi, ébouler tous les sommets sauf un, est l'anti-éboulement de ce sommet.

Pour chaque classe d'équivalence, il existe une unique configuration récurrente. Dans toute la suite, on s'intéresse à l'élément neutre du groupe et surtout à son unique représentant canonique. Sauf mention du contraire l'élément neutre renverra toujours à l'unique configuration récurrente.

Exemple : L'élément neutre est $(2\ 0\ 2\ 0)$.

Pour calculer l'élément neutre, on dispose d'un algorithme général appelé algorithme thermique.

Algorithm 1 Algorithme thermique

Ensure: u est l'élément neutre

```

1:  $u \leftarrow 0$ 
2: while  $u \neq u \oplus \beta$  do
3:    $u \leftarrow u \oplus \beta$ 

```

Autrement dit l'élément neutre est l'unique configuration u telle que $u \in \mathcal{Rec}$ et $\exists k \in \mathbb{N}, u = \widehat{k\beta}$. C'est aussi le point fixe obtenu à partir de la configuration nulle en itérant un éboulement forcé du puits suivi d'une stabilisation.

Chapitre 2

Existence d'un motif régulier dans l'élément neutre sur maillage carré et triangulaire

2.1 Introduction

2.1.1 Le cas à maillage carré

De nombreux travaux ont étudié la forme de l'élément neutre sur le graphe grille (représentée en figure 2.1). Par exemple, on peut caractériser précisément la bande centrale sur une grille dont les bords sont un rectangle suffisamment allongé [Rossin and Le Borgne, 2002, Rossin, 2000]. Il existe une relation entre les éléments neutres sur différentes tailles de grille [Dartois, 2004]. La complexité du calcul de cet élément neutre [Rossin, 2000] a également été étudiée. Par ailleurs, des résultats récents expliquent la similarité entre les différentes tailles d'éléments neutres avec des méthodes d'analyse et d'étude d'équations différentielles [Dhar et al., 2009, Pegden and Smart, 2013, Levine et al., 2014, Pegden and Smart, 2020]

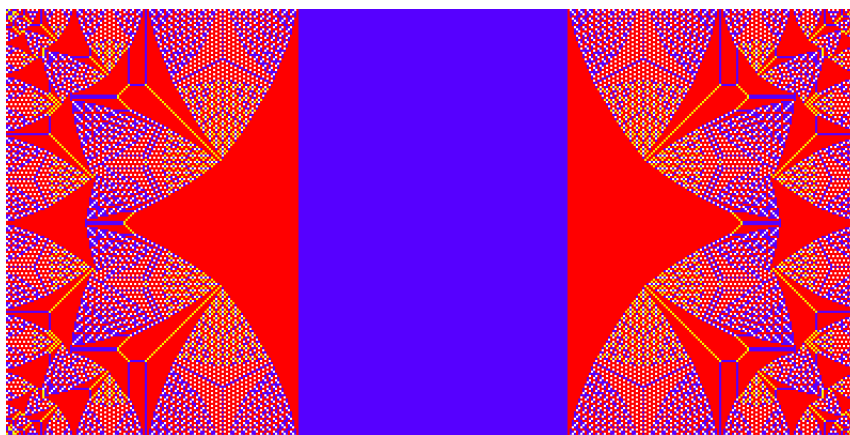


FIGURE 2.1 – Élément neutre sur une grille de 400x200 (maillage carré). Chaque couleur représente un nombre de grains différent. On voit en bleu la bande 2-uniforme.

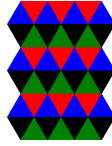


FIGURE 2.2 – 6 lignes et 7 colonnes du réseau triangulaire (les couleurs sont uniquement là pour distinguer les faces) Chaque face est un sommet du réseau, les arêtes relient toutes les faces adjacentes

2.1.2 Le cas à maillage triangulaire

Si on remplace le maillage carré par un maillage triangulaire, on aura un nouveau groupe du tas de sable. On définit le réseau avec la figure 2.2.

Si on compare visuellement l'élément neutre sur la grille (figure 2.3) et l'élément neutre sur le maillage triangulaire (figure 2.3) la ressemblance est nettement visible. Ainsi on peut espérer démontrer une partie des propriétés du cas du maillage carré dans le cas du maillage triangulaire.

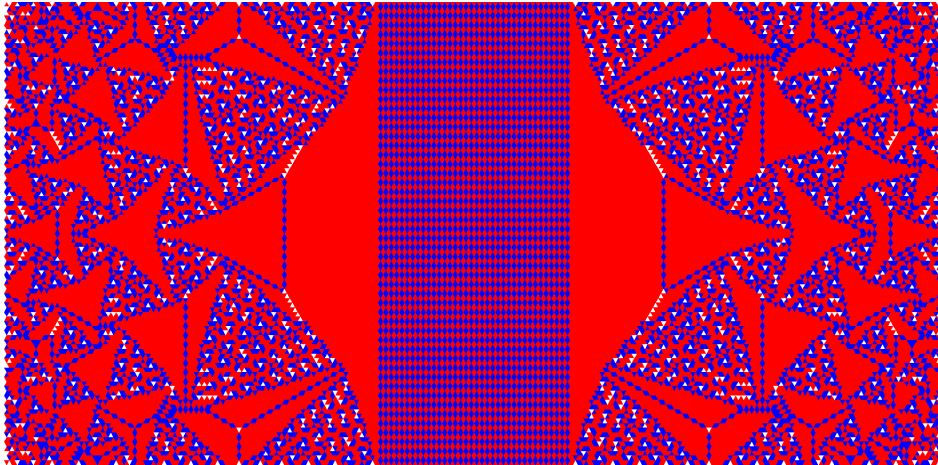


FIGURE 2.3 – Élément neutre sur une grille de 351x100 (maillage triangulaire). On voit au milieu le motif périodique (rouge 2 grains et bleu 1 grain)

Par exemple, on constate empiriquement la présence d'un motif régulier dans l'élément neutre sur une triangulation d'un rectangle suffisamment allongé. Cette bande existe également dans le cas du maillage carré et son existence est démontrée [Rossin and Le Borgne, 2002]. La démonstration de ce résultat dans le cas triangle a été l'objet du premier tiers de mon stage.

2.1.3 Plan de la démonstration

Premièrement pour avoir un motif propre, il faut avoir des symétries sur les conditions de bord. Ainsi le nombre de lignes doit être pair. Dans le cas contraire, on a une irrégularité au centre du motif périodique (voir figure 2.4).

L'idée générale de la preuve est la même que celle du cas du maillage carré (former le motif puis montrer qu'il est préservé) de [Rossin, 2000] mais les étapes sont différentes. La méthode utilisée dans [Rossin and Le Borgne, 2002] ne semble quant à elle pas facilement généralisable. Ainsi j'ai redémontré le cas du maillage carré en utilisant les mêmes méthodes qui me servent ensuite à démontrer le cas du maillage triangulaire.

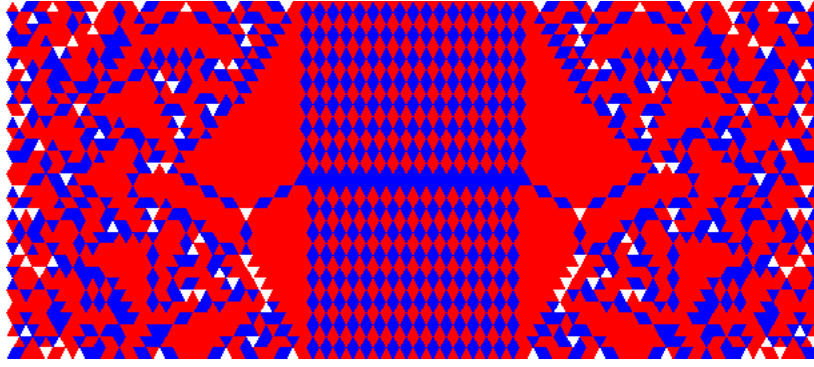


FIGURE 2.4 – Élément neutre sur une grille de 121x31 (maillage triangulaire). On voit au milieu le motif périodique avec irrégularité



FIGURE 2.5 – Schéma du calcul de l'élément neutre

On rappelle que : **l'élément neutre est l'unique configuration u telle que $u \in \text{Rec}$ et $\exists k \in \mathbb{N}, u = \widehat{k\beta}$.**

Ce calcul peut être représenté par le schéma suivant (figure 2.5).

- Au centre en gris, le rectangle initialement vide.
- Autour en rouge et bleu les grains qui doivent être ajoutés. C'est à dire $k\beta$.

Par convention, dans toute la suite, le côté le plus long sera horizontal et le plus court vertical.

Dans un premier temps, on va utiliser les grains en rouge pour former le motif périodique que l'on observe dans la bande centrale. Pour cela on travaillera avec des lignes au comportement uniforme sur toute la longueur. Puis, il restera à montrer que les grains restants en bleu ne viennent pas jusqu'au milieu du rectangle et que par conséquent, il reste une bande sur laquelle le motif périodique apparaît. Pour cela on travaillera avec des colonnes au comportement uniforme sur toute la hauteur. On peut effectuer les opérations dans cet ordre car l'opération d'éboulement est commutative.

2.2 Formation du motif périodique

2.2.1 Graphe ligne du maillage carré

On va se placer sur une grille infiniment large pour éviter les effets de bords et ainsi former le motif régulier sur toute la grille. Ainsi on pourra considérer tous les sommets d'une ligne comme équivalents. On va ainsi travailler sur un graphe linéaire représentant une colonne.

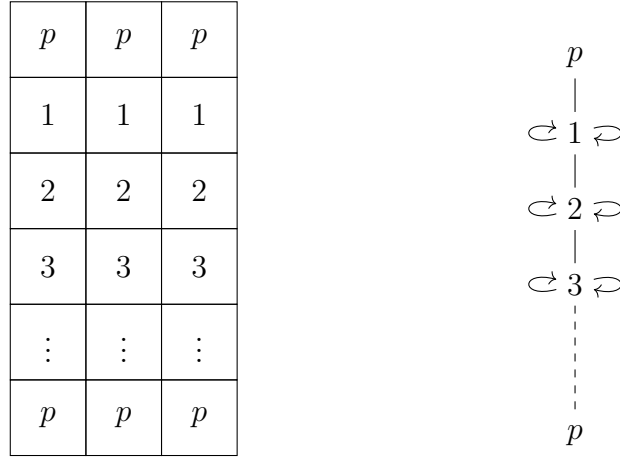


FIGURE 2.6 – A gauche la grille 2D, à droite le graphe linéaire correspondant à une colonne

De plus, on va modifier les règles d'instabilité sur le graphe représentant une colonne par rapport à la règle d'instabilité classique du tas de sable. (Un sommet est instable si il a plus de grains que d'arêtes sortantes.) En effet, dans le cas 2D, des grains peuvent venir du côté et provoquer l'éboulement. C'est le cas **lorsqu'une ligne entière est constituée de 3, un grain introduit sur un bout de la ligne va se propager et provoquer l'effondrement de toute la ligne.** Or on a beaucoup de grains à introduire sur les côtés verticaux (grains en bleu), on peut donc en utiliser une partie pour provoquer ces effondrements.

Par conséquent, dans **le cas carré on considèrera une case du graphe colonne à 3 grains comme instable.** De plus, si elle s'effondre durant le calcul de l'élément neutre, on note que sur cette ligne on a déjà utilisé un grain de chaque côté (un pour provoquer l'effondrement et un pour corriger l'irrégularité au bord).

Les propriétés algébrique du tas de sable sont conservées si on modifie la règle d'instabilité de façon raisonnable [Caracciolo et al., 2012].

2.2.2 Construction du motif

Dans le cas de la grille carré, une solution simple déjà connue [Le Borgne, 2002] pour obtenir le motif 2-uniforme consiste à décrire l'état de la colonne après chaque ajout de grains, puis à faire la démonstration par récurrence. En effet, dans ce cas précis cela se fait très facilement, cependant cette technique se généralise mal à d'autres cas.

2.2.3 L'odomètre

On va donc utiliser un odomètre comme recette pour former le motif périodique tout en restant équivalent à l'élément neutre. L'odomètre est une fonction qui à chaque sommet associe son nombre d'éboulements. Ici on prendra le nombre d'éboulements nécessaires pour obtenir l'élément neutre par éboulements successifs du puits. Ainsi l'odomètre est défini à une constante additive près car, comme l'élément neutre est récurrent, ébouler tous les sommets le laisse inchanger.

Le motif final étant périodique, **on attend un odomètre polynomial de degré 2 en fonction du numéro du sommet.** En effet, si on note $o(k)$ le nombre d'éboulements du sommet numéro k et $n(k)$ son nombre de grain final, on a :

$$n(k) = o(k-1) - 2o(k) + o(k+1) = (o(k-1) - o(k)) - (o(k) - o(k+1)) = (\Delta o)(k)$$

On a donc le laplacien discret qui ne dépend pas de k .

On conjecture alors l'odomètre puis on vérifie qu'il convient (voir annexe 4.1.1).

2.2.4 Le cas triangulaire vertical

De même que pour le cas carré on va travailler sur une colonne. Dans notre cas le motif régulier que l'on doit obtenir est de période 4. De plus, il dépend de la congruence modulo 8. On choisit donc l'hypothèse de confort que la hauteur du rectangle est un multiple de 8.

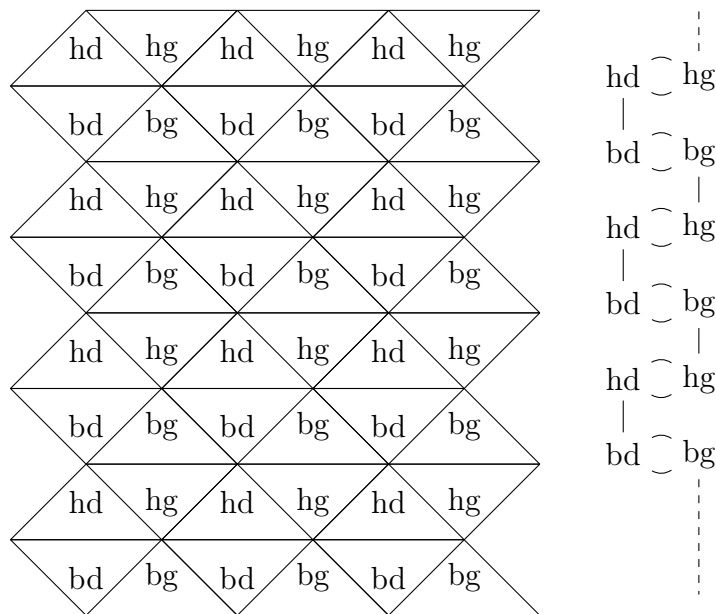


FIGURE 2.7 – À gauche la grille 2D, à droite le graphe linéaire correspondant à une colonne. La nomenclature des sommets correspond à : h : haut, b : bas, d : droite, g : gauche

De même que pour le cas carré, on modifie les règles d'éboulement. Cette fois la propagation latérale d'un grain s'effectue si une ligne est remplie de 2. Ainsi si hg et hd sont à 2 on considère qu'ils sont tous les deux instables (de même si bg et bd sont à 2). Il y a d'autres configurations qui permettent la propagation mais il n'est pas nécessaire de les prendre en compte pour avoir le comportement voulu.

Une fois le graphe construit et les instabilités particulières déterminées, on obtient comme dans le cas carré les odomètres. À noter que contrairement au cas carré, tous les sommets sur la colonne ne sont pas similaires mais on a tout de même un comportement périodique permettant de regrouper les sommets en 8 familles. On distingue alors 8 odomètres (un par famille de sommets) qui donnent chacun le nombre d'éboulements pour un sommet sur huit. Les odomètres et leur preuves sont en annexe 4.1.2.

2.3 Preuve du caractère récurrent

On sait maintenant que l'on peut former le motif périodique en restant équivalent à l'élément neutre sur une colonne. Il reste donc à vérifier que cette configuration est récurrente. On montre alors par récurrence (preuves en annexe 4.2) que le critère de Dhar (voir théorème 1.2.1) est respecté.

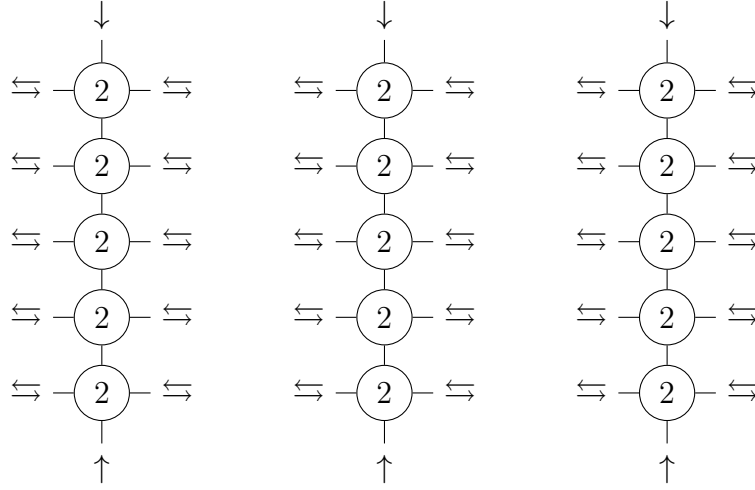


FIGURE 2.8 – Critère de Dhar sur trois colonnes élément neutre. Chaque flèche symbolise le déplacement d'un grain. les sommets sont représentés par des cercles où figurent le nombre de grains.

2.4 Reconstruction du rectangle

2.4.1 La configuration concaténée est récurrente

On veut maintenant recoller les graphes linéaires pour obtenir la grille 2D. Avec le graphe linéaire que l'on a choisi, deux colonnes recollées gardent leur comportement en tant que colonne seule. La seule différence a lieu lorsqu'on recolle une colonne avec le puits.

Si on concatène des n -uplets de colonnes où chaque colonne a la configuration neutre on obtient une configuration 2D avec le motif voulu. Cette configuration est récurrente. En effet, on peut le montrer avec le critère de Dhar (1.2.1).

Sur chaque colonne, on a déjà montré que l'ajout d'un grain à chaque extrémité donne la même configuration après éboulement de chacun des sommets. Donc quand on repasse au graphe rectangle (2D), l'éboulement d'un sommet signifie qu'il reçoit un grain de chacun de ses voisins et en envoie un à chacun de ses voisins. Ces déplacements de grains sont représentés sur 3 colonnes sur la figure 2.8. Par conséquent, on peut accoler les colonnes entre elles et avoir un comportement cohérent. Comme on le constate sur la figure 2.8, pour chaque grain sortant on a un grain entrant correspondant.

Il reste cependant le cas des colonnes de bord qui ont le puits pour voisin. Dans ce cas, c'est β qui fournit les grains et le puits absorbe les grains.

Pour conclure, on a montré que la concaténation des colonnes élément neutre donne une configuration récurrente. Ainsi toute configuration obtenue en ajoutant des grains à cette configuration sera récurrente.

2.4.2 Nombre d'éboulements restants

On veut calculer combien de grains n'ont pas été éboulés sur la largeur lors de la formation du motif. Il y a alors deux choses à considérer. Premièrement, le puits doit s'ébouler autant de fois sur tous les côtés. Il y a alors un nombre $b = o(-1)$ de grains à propager de chaque côté. Deuxièmement, on a considéré que des grains venaient de chaque côté comme si il y avait une autre colonne à la place du puits. On a donc déjà consommé ces grains. Ce nombre de grains est donné par l'odomètre. Ainsi à la case k , il

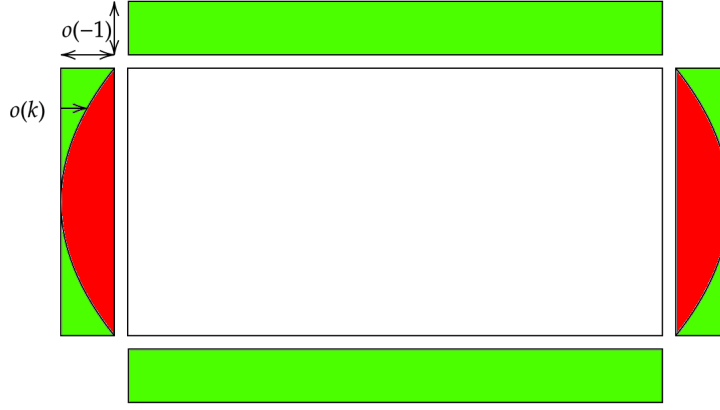


FIGURE 2.9 – En vert ce qui a été éboulé, en rouge ce qui reste à ébouler Au milieu on a la concaténation des colonnes élément neutre

faut encore ajouter $b - o(k)$ grains à ébouler (voir figure 2.9). Ce nombre est positif. En effet, l'odomètre est une parabole qui atteint son minimum entre les bords.

2.4.3 La configuration est l'élément neutre

On sait déjà qu'en éboulant les grains restants on aura **une configuration équivalente à l'élément neutre** car on l'a obtenu par une suite d'éboulements donc sans changer de classe d'équivalence.

De plus, à partir de la configuration périodique qui est récurrente, on n'a fait qu'ajouter des grains. Par conséquent la configuration est toujours **récurrente**. Ainsi en conclusion, on aura après stabilisation des grains restants, l'élément neutre. **Pour rappel l'élément neutre est l'unique configuration récurrente dans sa classe d'équivalence.**

2.5 Borne sur la propagation des grains restants

On connaît maintenant le nombre de grains à propager sur la largeur. On va donc montrer qu'il reste une bande centrale que les grains n'atteignent jamais. Pour cela, on borne la distance que les grains peuvent parcourir.

Comme précédemment, on va étudier la propagation en se ramenant à une seule dimension. On va prouver l'existence de la bande centrale dans une configuration qui est l'identité augmentée de quelques grains qui ne déclenchent pas d'éboulements sur la bande. En effet, quitte à rajouter des grains par le côté qui ne peuvent qu'augmenter la zone de propagation, on pourra supposer un comportement uniforme sur chaque colonne. On utilise de nouveau le graphe à une dimension. Cependant, il n'y a maintenant plus de propagations orthogonales de grains, par conséquent, on **n'utilise pas les règles d'instabilités spéciales**. On démontre cette borne en décrivant l'état de la configuration après chaque ajout de grain.

Le théorème démontré dans ce travail est le suivant :

Théorème 2.5.1. *Pour un maillage triangulaire de L lignes et N colonnes, où L est multiple de 8, et $N \geq \frac{3}{2}L + 4$: l'élément neutre a en son centre un bande présentant un motif périodique. Cette bande est de largeur **au moins** $N - (\frac{3}{2}L + 4)$.*

On présente ici les résultats sur les figures 2.10 et 2.11. Les démonstrations sont en annexe 4.4,

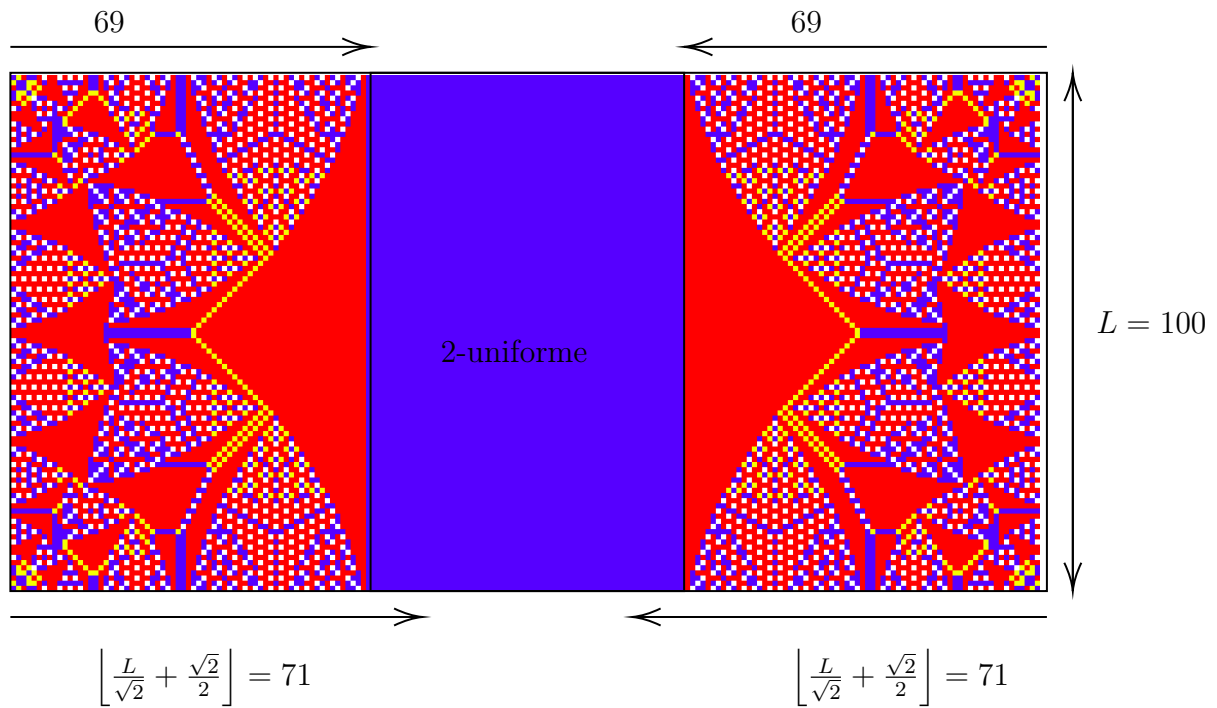


FIGURE 2.10 – Élément neutre sur le maillage carré 200x100 avec les bornes empiriques et calculées

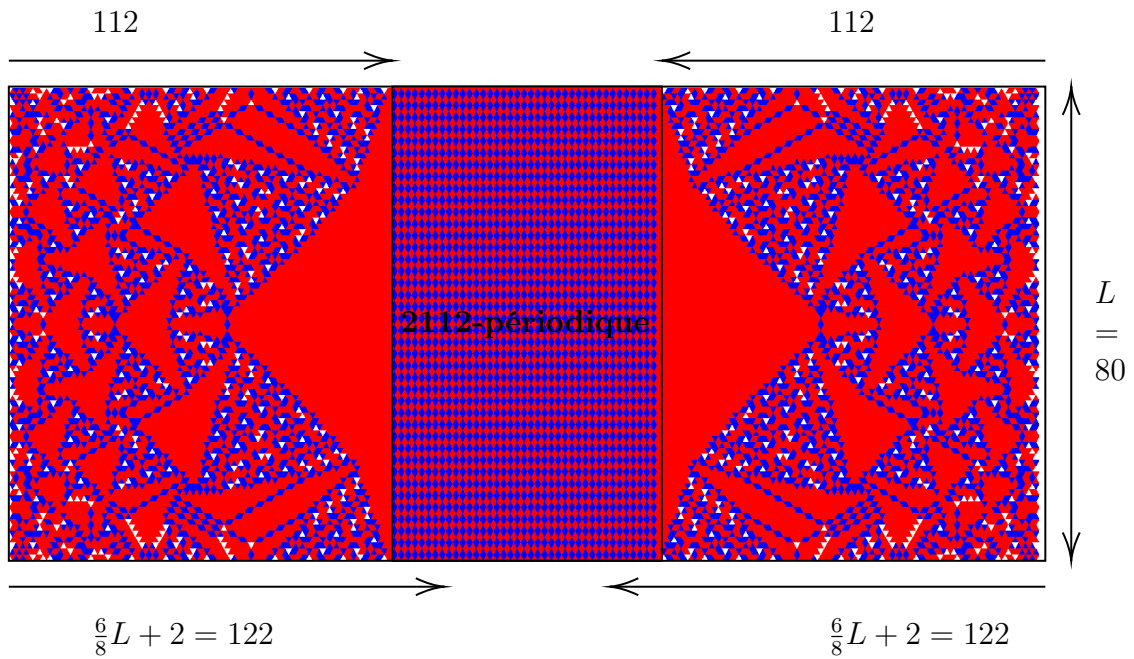


FIGURE 2.11 – Élément neutre sur le maillage triangulaire 301x80 avec les bornes empiriques et calculées.

Chapitre 3

Existence d'un motif régulier dans l'élément neutre sur maillage triangulaire périodique

3.1 Introduction

Lorsqu'on voit la similitude entre les preuves des cas du maillage carré et celui du maillage triangulaire, il est naturel de vouloir généraliser à d'autres formes de maillage. Cependant si certains points se généralisent sans problème, d'autres posent encore des difficultés.

Dans la suite je me suis restreint à certaines triangulations d'une grille comme illustrée sur la figure 3.1. Le graphe du tas de sable est le graphe dual de cette triangulation.

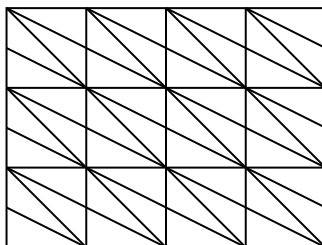


FIGURE 3.1 – Exemple de triangulation d'une grille

Avec ce formalisme, le découpage en lignes et colonnes est très simple à faire.

J'ai décrit cette triangulation en indiquant pour chaque triangle d'une case carrée (ici pavée par 4 triangles, mais ceci se généralise à un nombre quelconque de triangles qui paveraient la case) à quels triangles ils sont reliés. Pour cela, j'indique le changement relatif de case et le numéro du triangle dans la case. Ainsi il est facile de décrire et de simuler un tas de sable abélien sur ces triangulations, que j'appellerai triangles pavants dans la suite.

3.2 Instabilités sur un graphe colonne

3.2.1 Contexte

La première étape pour les cas déjà traités est de construire le graphe représentant une colonne, en supposant qu'on aura le même comportement sur toutes les colonnes. Cette

étape ne présente aucune difficulté dans le cas des triangles pavants.

Cependant, la deuxième étape, où l'on doit déterminer si une cellule ou un ensemble de cellules est instable, se révèle beaucoup plus délicate. Évidemment s'il y a plus de grains que de voisins, la cellule sera obligatoirement instable. Il s'agit ici de déterminer les instabilités lorsqu'une ligne entière est représentée sur un seul noeud d'une seule colonne. En effet, pour qu'un ensemble de cellules soit instable, il faut qu'un grain puisse déclencher son instabilité. Ce grain doit arriver en se propageant perpendiculairement à la direction du graphe colonne. (cf figure 3.2).

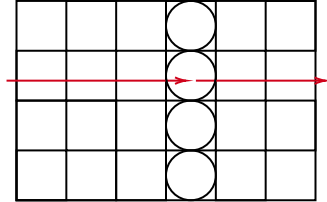


FIGURE 3.2 – En rouge le trajet du grain provoquant l'instabilité sur la colonne soulignée par les cercles

En outre, si on choisit une grille suffisamment large, les grains qui se propagent diagonalement n'atteignent pas le centre. On peut donc se limiter aux grains qui se propagent horizontalement.

De plus, en pratique, il n'est pas nécessaire de détecter toutes les propagations possibles, seulement celles intervenant dans la formation de l'élément neutre. Cependant il est difficile de prévoir à l'avance quelles instabilités seront nécessaires.

3.2.2 Essais de recherche automatique et contre-exemples

Connexité

Sur la triangulation traitée en première partie, il y avait propagation simplement lorsqu'une composante connexe de cellules avec 2 grains existait d'un bord à l'autre. C'est bien évidemment une condition suffisante car chaque sommet à 2 grains sera rendu instable par son prédécesseur. Ainsi toute la ligne s'effondrera.

Malheureusement cette solution ne fonctionne pas. En effet, il est possible que de deux chemins de propagation se rejoignent sur un triangle ne contenant qu'un seul grain. Ce triangle est alors rendu instable et permet donc la propagation alors qu'il coupe la composante connexe en deux (voir figure 3.3)

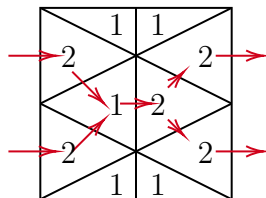


FIGURE 3.3 – Propagation sur composante non connexe

3.2.3 Simulation locale

Une solution envisageable pour résoudre ce problème est de simuler la propagation sur une cellule. Pour une configuration d'une case, on teste les différents apports de grains

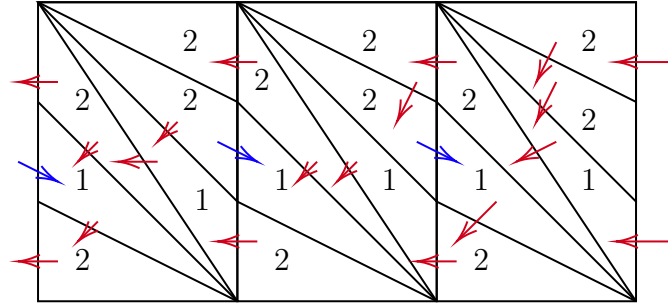


FIGURE 3.4 – Exemple de propagation avec rétro-propagation nécessaire (flèche en bleu)

possibles. Par exemple, si on a 3 triangles en contact avec la case de gauche on peut récupérer un grain sur un des triangles ou sur deux ou sur tous. On regarde alors ce qui sort sur la case à droite. Si on a un point fixe, cela signifie qu'on aura propagation.

Toutefois contrairement au cas précédent des composantes connexes à 2 grains, il faut obligatoirement tester les deux sens de propagation.

Cependant encore une fois cette solution ne suffit pas. En effet, la propagation n'est pas forcément "croissante". On peut observer que dans certains cas l'arrivée dans la cellule simulée provoque l'arrivée de grains dans la cellule précédente. Ce déplacement dans le sens contraire à celui testé permet alors la propagation qui sans cela est impossible (voir figure 3.4).

Ayant passé presque deux semaines à chercher des moyens automatiques de détection des conditions d'instabilité je n'ai pas abouti. Il était donc difficile de conjecturer un motif et son odomètre.

3.3 Existence d'un motif et odomètre

3.3.1 Existence

Rien ne garantit a priori l'existence d'un motif périodique sur les colonnes. Il y a même de nombreux cas où cela est impossible.

Par exemple dans le cas du pavage triangulaire si on prend un nombre impair de lignes, il n'y a pas de symétrie du pavage. Dans ce cas, deux motifs périodiques apparaissent et au milieu une jonction entre les deux. Il n'est alors pas possible de trouver un unique odomètre à coefficients entiers pour toute la colonne car cela impliquerait un motif périodique.

Ainsi on peut se restreindre aux triangulations qui possèdent des symétries sur les colonnes (axiale ou centrale).

3.3.2 Odomètre

Dans les cas de la première partie (triangle et carré), j'ai conjecturé l'odomètre en utilisant le calcul effectif de l'élément neutre sur différentes tailles de colonne. Cependant, comme expliqué précédemment, je ne dispose pas des conditions d'instabilité sur les triangles pavants, ce qui rend la simulation sur une colonne impossible.

On peut utiliser une autre méthode qui se révèle en réalité particulièrement efficace mais qui **nécessite de connaître le motif dont on veut l'odomètre**.

En effet, pour chaque cellule une équation relie son odomètre à celui de ses voisins et à son nombre final de grains. On peut également ajouter la même équation mais pour

la somme des triangles qui composent une case. Enfin, il faut ajouter le fait que le puits s'écroule le même nombre de fois à chaque extrémité de la colonne.

De plus on sait que l'on attend un polynôme de degré 2 (où la variable est le numéro du triangle dans la colonne).

On peut alors poser le système avec comme inconnues les coefficients des polynômes. On a alors un odomètre pour la configuration voulue. Premièrement, il faut alors choisir le terme constant d'un des odomètres de façon à ce que le nombre d'écroulements soit toujours positif. Deuxièmement, il faut vérifier que le nombre d'écroulements indiqué est bien un entier. Ce qui se fait facilement dans les cas que j'ai traité car les coefficients sont entiers.

En effet, si on cherche un odomètre pour une configuration qui n'est pas équivalente à l'élément neutre, on peut obtenir un odomètre qui n'est pas entier.

Pour conclure, cette méthode est très efficace. En effet, il suffit de résoudre un système puis de vérifier que les coefficients sont entiers. Cependant, on ne peut traiter que des motifs périodiques que l'on connaît à l'avance. Pour cela la seule méthode connue est de conjecturer à partir de simulation sur une grille 2D. Quelques exemples d'odomètres ainsi obtenu sont disponibles en annexe 4.5.

3.3.3 Périodicité des colonnes

Même si on ne peut garantir à l'avance un motif périodique sur les colonnes centrales, on peut garantir que sur chaque colonne on aura le même motif. En effet, on pourra quand même construire les colonnes élément neutre. Ainsi on obtient une configuration avec la répétition d'une même colonne. Cependant, il reste encore à borner la propagation des grains venant des côtés verticaux.

3.4 Borne sur les propagations venant des côtés

Pour résumé, jusqu'ici on a pu montrer qu'on peut former des colonnes similaires avec des grains restants à propager horizontalement. De plus, si un motif périodique existe et est connu, on peut en connaître l'odomètre et donc prouver son existence.

Il reste donc à montrer que les grains devant se propager horizontalement ne viennent pas perturber les motifs formés au milieu. Dans le cas des maillages triangulaire et carré, j'ai donné une borne précise.

Cependant, ici on peut donner un argument plus général nous permettant d'affirmer que pour une taille horizontale suffisamment grande, le motif au milieu n'est pas perturbé.

Proposition 3.4.1. *Sur le motif formé par les colonnes élément neutre, la propagation horizontale des grains est bornée.*

Esquisse de preuve. Par l'absurde : Supposons qu'un grain se propage de façon non bornée. Alors il va provoquer un écroulement dans toutes les colonnes. Or les configurations de colonnes permettant cela sont considérées instables lorsqu'on calcule l'élément neutre sur une colonne. Il y a donc contradiction. ■

Cette preuve ne fonctionne que si on a bien détecté les instabilités possibles lors des calculs sur une colonne.

Conclusion

Résultats J’ai observé l’élément neutre sur un maillage triangulaire régulier et remarqué des similitudes avec celui du maillage carré. J’ai pu prouver l’existence d’une bande présentant un motif périodique quand on découpe le maillage par un rectangle suffisamment allongé.

J’ai alors proposé un plan de preuve pour démontrer l’existence de cette bande pour d’autres maillages triangulaires.

Perspectives Il y a de nombreux axes qui méritent d’être explorés :

- Dans le plan de preuve, l’étape qui bloque est la détermination automatique du motif régulier. Il serait donc intéressant de mieux comprendre les conditions qui mènent à la formation de ce motif, notamment comprendre quels motifs périodiques permettent la propagation des grains.

Si on parvient à compléter la preuve, on pourra alors énumérer systématiquement toutes les triangulations possibles grâce aux bijections qui sont déjà connues. [Bonichon et al., 2020]

- La similitude en l’élément neutre sur maillage carré et triangulaire ne se limite pas à cette bande centrale. par conséquence, il est envisageable de généraliser d’autres propriétés déjà connues du maillage carré.
- Dans le cas de maillages carré ou triangulaire au contour approximativement carré, on n’observe plus le motif périodique sur une bande, mais seulement sur un rectangle au centre de l’élément neutre. L’existence de ce rectangle reste à démontrer dans le cas du maillage carré comme rectangulaire.

Bibliographie

- [Bak et al., 1987] Bak, P., Tang, C., and Wiesenfeld, K. (1987). Self-organized criticality : An explanation of the $1/f$ noise. *Physical Review Letters*.
- [Bonichon et al., 2020] Bonichon, N., Éric Fusy, and Lévêque, B. (2020). A bijection for essentially 3-connected toroidal maps.
- [Caracciolo et al., 2012] Caracciolo, S., Paoletti, G., and Sportiello, A. (2012). Multiple and inverse toppings in the abelian sandpile model. *The European Physical Journal Special Topics*, 212(1) :23–44.
- [Cori and Le Borgne, 2003] Cori, R. and Le Borgne, Y. (2003). The sandpile model and tutte polynomials. *Advances in Applied Mathematics - ADVAN APPL MATH*, 30 :44–52.
- [Dartois, 2004] Dartois, A. (2004). *Au dela du tas de sable, un nouveau modèle combinatoire : Le modèle flèche-hauteur*. PhD thesis, Ecole Polytechnique.
- [Derycke, 2018] Derycke, H. (2018). *Combinatoire dans des stabilisations du modèle du tas de sable sur la grille Z^2* . PhD thesis, Université de Bordeaux.
- [Dhar, 1990] Dhar, D. (1990). Self-organized critical state of sandpile automaton models. *Physical Review Letters*.
- [Dhar et al., 2009] Dhar, D., Sadhu, T., and Chandra, S. (2009). Pattern formation in growing sandpiles. *EPL (Europhysics Letters)*, 85(4) :48002.
- [Fersula et al., 2020] Fersula, J., Noûs, C., and Perrot, K. (2020). Sandpile toppling on penrose tilings : identity and isotropic dynamics.
- [Le Borgne, 2002] Le Borgne, Y. (2002). Quelques resultats sur le tas de sable en dimension 2 (dea, communication personnelle).
- [Levine et al., 2014] Levine, L., Pegden, W., and Smart, C. K. (2014). Apollonian structure in the abelian sandpile.
- [Pegden and Smart, 2013] Pegden, W. and Smart, C. K. (2013). Convergence of the abelian sandpile. *Duke Mathematical Journal*, 162(4).
- [Pegden and Smart, 2020] Pegden, W. and Smart, C. K. (2020). Stability of patterns in the abelian sandpile.
- [Rossin, 2000] Rossin, D. (2000). *Proprietes combinatoires de certaines familles d'automates cellulaires*. PhD thesis, Ecole Polytechnique.
- [Rossin and Le Borgne, 2002] Rossin, D. and Le Borgne, Y. (2002). On the identity of the sandpile group. *Discrete Mathematics, Elsevier*.

Table des figures

1.1	Exemple d'éboulement sur une grille 3x3	7
1.2	Graphe du prisme	8
2.1	Élément neutre sur une grille de 400x200 (maillage carré)	11
2.2	Réseau triangulaire	12
2.3	Élément neutre sur une grille de 351x100 (maillage triangulaire)	12
2.4	Élément neutre sur une grille de 121x31 (maillage triangulaire). On voit au milieu le motif périodique avec irrégularité	13
2.5	Schéma du calcul de l'élément neutre	13
2.6	A gauche la grille 2D, à droite le graphe linéaire correspondant à une colonne	14
2.7	A gauche la grille 2D, à droite le graphe linéaire correspondant à une colonne. La nomenclature des sommets correspond à : h : haut, b : bas, d : droite, g : gauche	15
2.8	Critère de Dhar sur trois colonnes élément neutre	16
2.9	En vert ce qui a été éboulé, en rouge ce qui reste à ébouler Au milieu on a la concaténation des colonnes élément neutre	17
2.10	Élément neutre sur le maillage carré 200x100 avec les bornes empiriques et calculées	18
2.11	Élément neutre sur le maillage triangulaire 301x80 avec les bornes empiriques et calculées.	18
3.1	Exemple de triangulation d'une grille	19
3.2	En rouge le trajet du grain provoquant l'instabilité sur la colonne soulignée par les cercles	20
3.3	Propagation sur composante non connexe	20
3.4	Exemple de propagation avec rétro-propagation nécessaire (flèche en bleu)	21
4.1	Graphe 1D d'une ligne du maillage triangulaire	30
4.2	Triangulations	31
4.3	Élément neutre sur la triangulation classique (ou longue 1) 16x80	31
4.4	Élément neutre sur la triangulation alternée 16x80	32
4.5	Élément neutre sur la triangulation longue 2 16x80	32
4.6	Élément neutre sur la triangulation longue 3 16x80	32

Chapitre 4

Annexe

4.1 Odomètres

4.1.1 Cas carré

On numérote les n sommets de 0 à $n-1$ (le puits est donc le -1 et le n). Les odomètres sont les suivants :

- Pour une ligne de $2h$ sommets : $o_p(k) = k^2 + (-2h + 1)k + h^2 - h$
- Pour une ligne de $2h + 1$ sommets : $o_i(k) = k^2 - 2hk + h^2$

On doit alors vérifier deux choses :

- Le puits doit s'écrouler un nombre de fois cohérent donc $o(-1) = o(n)$:

$$o_p(-1) - o_p(2h) = 0$$

$$o_i(-1) - o_i(2h + 1) = 0$$

- Il faut vérifier que le motif est bien 2-uniforme donc $o(k-1) - 2o(k) + o(k+1) = 2$

$$-2o_p(k) + o_p(k-1) + o_p(k+1) = 2$$

$$-2o_i(k) + o_i(k-1) + o_i(k+1) = 2$$

Retour au rapport 2.2.3.

4.1.2 Cas triangle

Les odomètres sont les suivants :

$$phg1(k) = 36k^2 + (-36h + 6)k + 9h^2 - 3h \quad (4.1)$$

$$phg1(k) = 36k^2 + (-36h + 12)k + 9h^2 - 6h + 1 \quad (4.2)$$

$$pbd1(k) = 36k^2 + (-36h + 24)k + 9h^2 - 12h + 4 \quad (4.3)$$

$$pbg1(k) = 36k^2 + (-36h + 30)k + 9h^2 - 15h + 6 \quad (4.4)$$

$$phg2(k) = 36k^2 + (-36h + 42)k + 9h^2 - 21h + 12 \quad (4.5)$$

$$phg2(k) = 36k^2 + (-36h + 48)k + 9h^2 - 24h + 16 \quad (4.6)$$

$$pbd2(k) = 36k^2 + (-36h + 60)k + 9h^2 - 30h + 25 \quad (4.7)$$

$$pbg2(k) = 36k^2 + (-36h + 66)k + 9h^2 - 33h + 30 \quad (4.8)$$

On doit alors vérifier deux choses :

- Le puits doit s'écouler un nombre de fois cohérent donc $o(-1) = o(n)$, ici $o(-1) = pb g2(-1)$ et $o(n) = ph g1(h) : ph g1(h) - pb g2(-1) = 0$
- Il faut vérifier que le motif est bien 21122112. La vérification a été faite informatiquement, les calculs ne sont donc pas présentés.

Retour au rapport 2.2.4.

4.2 Récurrence du motif carré

A titre d'exemple voici la preuve dans le cas du maillage carré. Dans la suite pour faire des calculs sur une ligne, on notera P le puits et $>$ un grain sur une arête allant vers la droite (et $<$ vers la gauche). Ainsi dans ce formalisme notre configuration est $P2^n P$. On doit alors montrer que $P > 2^n < P$ se stabilise en $P2^n P$.

Lemme. $\forall k \in \mathbb{N}, > 2^{k+1} \rightarrow < 2^k 1 >$

Démonstration. On procède par récurrence sur k :

- $k = 0$

$$> 2 \rightarrow 3 \rightarrow < 1 >$$

- On suppose la propriété au rang k :

$$> 2^{k+1} \rightarrow 32^k \tag{4.9}$$

$$\rightarrow < 1 > 2^k \tag{4.10}$$

$$(HR) \quad \rightarrow < 1 < 2^k 1 > \tag{4.11}$$

$$\rightarrow < 22^k 1 > \tag{4.12}$$

$$\rightarrow < 2^{k+1} 1 > \tag{4.13}$$

Ce qui conclut. ■

On peut alors appliquer ce lemme :

$$P > 2^{k+1} < P \rightarrow P < 2^k 1 > < P \tag{4.14}$$

$$\rightarrow P2^k 2P \tag{4.15}$$

$$\rightarrow P2^{k+1} P \tag{4.16}$$

Ainsi sur ce graphe colonne (pour ces règles d'écoulement), l'élément neutre est la configuration 2-uniforme.

Retour au rapport 2.3.

4.3 Récurrence du motif triangulaire

On doit alors prouver que ce motif est récurrent. Dans la démonstration suivante les $|\cdot|$ indiquent la partie sur laquelle on effectue les opérations entre parenthèses.

$$|(P >)^1|(2112)^k(< P)^1 \quad (4.17)$$

$$\text{(transfer to right)} \rightarrow |(P)^1|(> 2112)^1(2112)^{k-1}(< P)^1 \quad (4.18)$$

$$\text{(collapse left)} \rightarrow (P)^1|(< 2111 >)^1|(2112)^{k-1}(< P)^1 \quad (4.19)$$

$$\text{(transfer to right)} \rightarrow (P)^1|(< 2111)^1|(> 2112)^1(2112)^{k-2}(< P)^1 \quad (4.20)$$

$$\text{(collapse left)} \rightarrow (P)^1(< 2111)^1|(< 2111 >)^1|(2112)^{k-2}(< P)^1 \quad (4.21)$$

$$\text{(par récurrence)} \rightarrow^* |(P)^1|(< 2111)^{k-1}(< 2111 >)^1(< P)^1 \quad (4.22)$$

$$\text{(transfer to right)} \rightarrow (P)^1(< 2111)^{k-1}|(< 2111)^1|(< > P)^1 \quad (4.23)$$

$$\text{(shift left)} \rightarrow (P)^1|(< 2111)^k|(< > P)^1 \quad (4.24)$$

$$\text{(transfer to left)} \rightarrow (P)^1(< 2111)^{k-1}(< 2111 <)^1|(> P)^1| \quad (4.25)$$

$$\text{(collapse right)} \rightarrow (P)^1(< 2111)^{k-1}|(< 2112)^1|(> P)^1 \quad (4.26)$$

$$\text{(par récurrence)} \rightarrow^* (P <)^1|(2112)^k|(> P)^1 \quad (4.27)$$

4.4 Borne sur la propagation

4.4.1 Le cas carré

On se place désormais sur une ligne du maillage carré.

Lemme. *On passe de $P3^{k-1}2^\infty$ à $P3^k2^\infty$ avec k ajouts de grains. On notera $P3^{k-1}2^\infty \rightarrow^k P3^k2^\infty$.*

Démonstration. On procède par récurrence sur k :

- $k = 0$

$$P2^\infty \rightarrow^1 32^\infty$$

- On suppose la propriété aux rangs $i \leq k$:

$$3^k2^\infty \rightarrow^1 43^{k-1}2^\infty \quad (4.28)$$

$$\text{(on transmet la retenue)} \rightarrow 3^{k-1}42^\infty \quad (4.29)$$

$$\rightarrow 3^{k-1}232^\infty \quad (4.30)$$

$$\text{(HR)} \rightarrow^k 3^k32^\infty \quad (4.31)$$

$$\rightarrow 3^{k+1}2^\infty \quad (4.32)$$

Ce qui conclut. ■

Proposition 4.4.1. *Pour perturber la k -ième colonne, il faut au moins $\frac{k(k-1)}{2} + 1$ grains.*

Démonstration. Pour affecter la k -ième colonne, il faut remplir de 3 les $k - 1$ premières. Pour cela on doit les remplir une par une. D'après le lemme précédent, il faut :

$$\sum_{i=1}^{k-1} i = \frac{k(k-1)}{2}$$

On peut alors ajouter un grain pour affecter la k -ième colonne. ■

Ainsi le nombre de colonnes affectées par n grains est donné par $\lfloor \frac{1}{2} \sqrt{8n-7} + \frac{1}{2} \rfloor$ ce qui se simplifie en $\lfloor \sqrt{2n} + \frac{1}{2} \rfloor$.

En conclusion la taille de la perturbation est majorée par $\lfloor \sqrt{2o(-1)} + \frac{1}{2} \rfloor$.

Le nombre de colonne perturbées pour une largeur n est donc :

- Si $n = 2h + 1$:

$$\left\lfloor \sqrt{2h^2 + 4h + 2} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{\frac{n^2}{2} + n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \right\rfloor \quad (4.33)$$

$$= \left\lfloor \sqrt{\left(\frac{n}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2} \right\rfloor \quad (4.34)$$

$$= \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rfloor \quad (4.35)$$

- Si $n = 2h$:

$$\left\lfloor \sqrt{2h^2 + 2h} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{\frac{n^2}{2} + n + \frac{1}{2}} \right\rfloor \leq \left\lfloor \sqrt{\frac{n^2}{2} + n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rfloor$$

4.4.2 Le cas triangulaire

On sait maintenant le nombre de grains à propager sur la largeur. Comme précédemment, on va étudier la propagation sur une ligne. Cependant, ici on ne travaille plus sur le graphe vertical (des colonnes) mais sur le graphe horizontal (des lignes). Encore une fois, il n'y a plus de propagations de grains orthogonales, par conséquent, on n'utilise pas les règles d'instabilité spéciales.

4.4.3 Le graphe triangulaire

Contrairement au cas carré, dans le cas triangle il faut distinguer le cas vertical et horizontal. Pour cela on utilise les graphes présentés en Figure 4.1.

Je ne vais pas traiter le cas du triangle horizontal mais ce cas sera ensuite utile pour borner la propagation des grains dans le cas triangulaire vertical.

4.4.4 Borne

Lemme. *On passe de $P2^{k-1}1$ à $P3^k1$ avec k ajouts de grains.*

Démonstration. On procède par récurrence sur k :

- $k = 0$

$$P1 \rightarrow^1 2$$

- On suppose la propriété aux rangs $i \leq k$:

$$2^k 1 \rightarrow^1 32^{k-1} 1 \quad (4.36)$$

$$\text{(on transmet la retenue)} \rightarrow 2^{k-2} 131 \quad (4.37)$$

$$\rightarrow 2^{k-2} 212 \quad (4.38)$$

$$\rightarrow 2^{k-1} 12 \quad (4.39)$$

$$\text{(HR)} \rightarrow^k 2^k 2 \quad (4.40)$$

$$\rightarrow 2^{k+1} \quad (4.41)$$

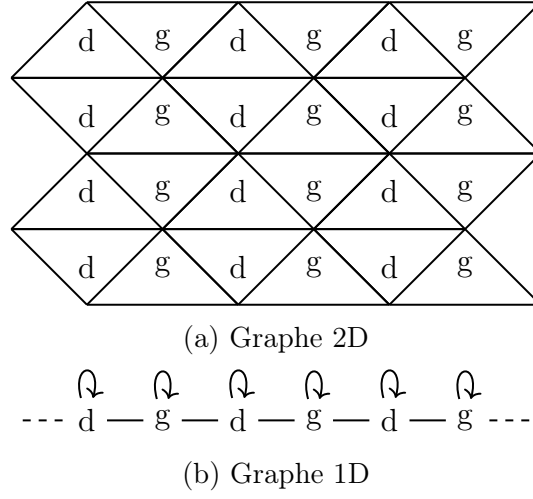


FIGURE 4.1 – Graphe 1D d’une ligne du maillage triangulaire

Ce qui conclut. ■

Proposition 4.4.2. *Pour perturber les $2k$ premières colonnes, il faut au moins $(k-1)^2+1$ grains et k^2 grains pour les remplir.*

Démonstration. On procède par récurrence sur k :

- $k = 0$

$$P(12)^\infty \rightarrow^1 22(12)^\infty$$

Il a donc fallu 1 grain pour affecter les deux premières colonnes et les remplir.

- On suppose la propriété aux rangs $i \leq k$: Pour affecter les $2k+2$ premières colonnes, il faut déjà remplir les $2k$ premières.

$$2^{2(k-1)}(12)^\infty = 2^{2(k-1)}12(12)^\infty \tag{4.42}$$

$$\text{(lemme précédent)} \quad \rightarrow^{2k-1} 2^{2k-1}2(12)^\infty \tag{4.43}$$

$$\rightarrow 2^k(12)^\infty \tag{4.44}$$

Ainsi pour remplir les colonnes $2k-1, 2k$ il a fallu $2k-1$ grains en plus, donc $(2(k-1))^2 + 2k - 1 = (2k)^2$. Il suffit alors d’un grain en plus pour perturber les $2k+2$ premières colonnes, soit $(2k)^2 + 1$ grains. ■

Ainsi le nombre de colonnes affectées par n grains est donné par $2 \lceil \sqrt{n} \rceil$.

En conclusion, la taille de la perturbation est majorée par $2 \lceil \sqrt{o(-1)} \rceil$.

Le nombre de colonne perturbées pour une largeur n est donc :

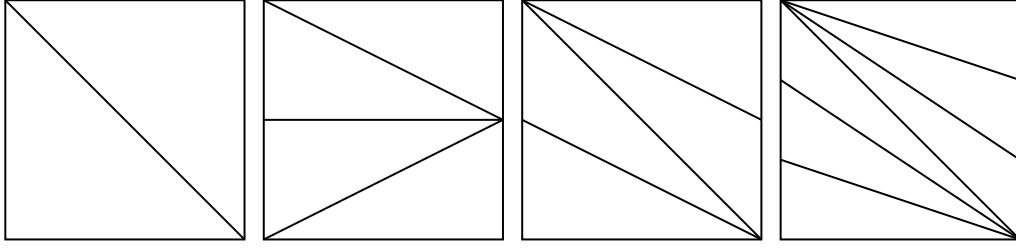


FIGURE 4.2 – De gauche à droite : triangulation classique, alternée, longue 1 et longue 2

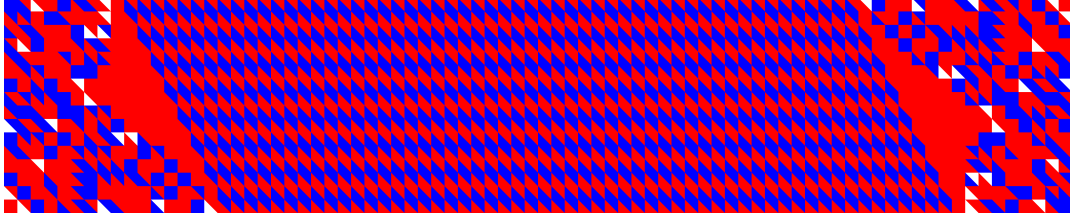


FIGURE 4.3 – Élément neutre sur la triangulation classique (ou longue 1) 16x80

- Si $n = 8h$:

$$2 \left\lceil \sqrt{9h^2 + 3h} \right\rceil \leq 2 \left\lceil \sqrt{9h^2 + 3h + \frac{1}{2^2}} \right\rceil \quad (4.45)$$

$$= 2 \left\lceil \sqrt{(3h + \frac{1}{2})^2} \right\rceil \quad (4.46)$$

$$= 2 \left\lceil 3h + \frac{1}{2} \right\rceil \quad (4.47)$$

$$= 6h + 2 \quad (4.48)$$

$$= \frac{6}{8}n + 2 \quad (4.49)$$

Il y a en réalité une égalité pour $h \in \llbracket 1, 10^6 \rrbracket$.

Retour au rapport 2.5.

4.5 Exemple de triangulations et d'odomètres associés

4.5.1 Triangle alterné

J'ai ainsi pu calculer les odomètres pour ces triangulations (voir figure 4.2). Dans la suite H est le nombre de répétitions du motif (pour un motif sur 2 cases, la hauteur en case est $2H$). K est le numéro du sommet dans la colonne.

Triangulation classique, odomètres pour 2 cases successives :

$$\begin{aligned} & 36K^2 + (-36H + 6)K + 9H^2 - 3H \\ & 36K^2 + (-36H + 12)K + 9H^2 - 6H + 1 \\ & 36K^2 + (-36H + 24)K + 9H^2 - 12H + 4 \end{aligned}$$

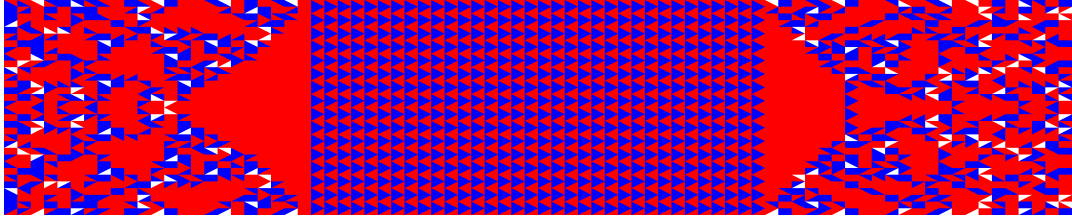


FIGURE 4.4 – Élément neutre sur la triangulation alternée 16x80

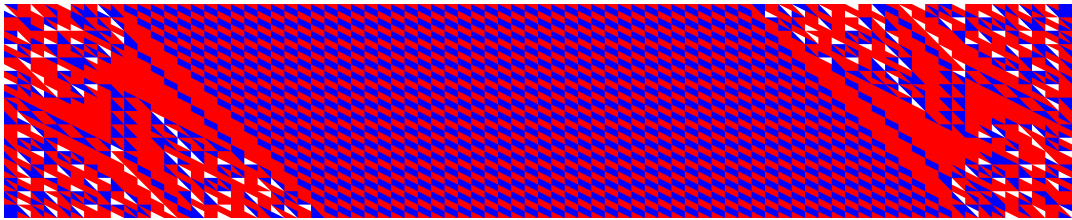


FIGURE 4.5 – Élément neutre sur la triangulation longue 2 16x80

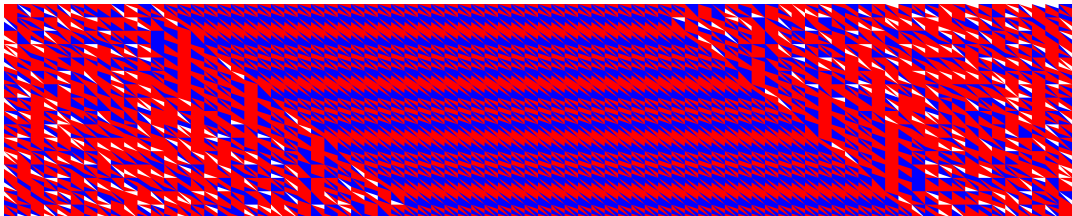


FIGURE 4.6 – Élément neutre sur la triangulation longue 3 16x80

$$\begin{aligned}
& 36K^2 + (-36H + 30)K + 9H^2 - 15H + 6 \\
& 36K^2 + (-36H + 42)K + 9H^2 - 21H + 12 \\
& 36K^2 + (-36H + 48)K + 9H^2 - 24H + 16 \\
& 36K^2 + (-36H + 60)K + 9H^2 - 30H + 25 \\
& 36K^2 + (-36H + 66)K + 9H^2 - 33H + 30
\end{aligned}$$

Pour la triangulation alternée, les colonnes sont les mêmes que celles du cas classique donc les odomètres sont également les mêmes.

Triangulation longue 1, odomètres pour 2 cases successives :

$$\begin{aligned}
& 24K^2 + (-24H + 6)K + 6H^2 - 3H \\
& 24K^2 + (-24H + 12)K + 6H^2 - 6H + 1 \\
& 24K^2 + (-24H + 12)K + 6H^2 - 6H + 1 \\
& 24K^2 + (-24H + 18)K + 6H^2 - 9H + 3 \\
& 24K^2 + (-24H + 30)K + 6H^2 - 15H + 9 \\
& 24K^2 + (-24H + 36)K + 6H^2 - 18H + 13 \\
& 24K^2 + (-24H + 36)K + 6H^2 - 18H + 13 \\
& 24K^2 + (-24H + 42)K + 6H^2 - 21H + 18
\end{aligned}$$

Pour la triangulation longue 2 le motif est sur 8 cases. Il y a donc en tout 64 odomètres (qui ne sont pas détaillés ici).

Retour au rapport 3.3.2.