Hoofdstuk 1

Stelsels lineaire vergelijkingen

1.1 Inleiding

Op het eind van de 18e eeuw had men het vermoeden dat er tussen Mars en Jupiter een tot dan toe onbekende planeet moest zijn. Op 1 januari 1801 vond de Siciliaanse astronoom Giuseppe Piazzi (1746-1826) deze "planeet" die hij *Ceres* noemde ter ere van de beschermheilige van Sicilië. Het grote publiek was erg geïnteresseerd in deze ontdekking. In die tijd was het aantal planeten in ons zonnestelsel nog steeds onderwerp van debatten van filosofen en kerkleiders (de planeten Neptunus en Pluto werden pas in 1846 resp. 1930 ontdekt). Zeer recentelijk (in de zomer van 2006) haalde de discussie over het aantal planeten ook weer een groot publiek, toen tijdens een conferentie van astronomen Pluto zijn status als planeet kwijt raakte en vanaf nu officieel een *dwergplaneet* is. Aanleiding hiervoor was de vondst van het hemelsobject *Eris* (voormalig 2003 UB_{313} en inofficieel *Xena*) in het jaar 2005. Eris beweegt op een baan buiten de baan van Pluto rond de zon en heeft zelfs een grotere diameter dan Pluto. Men kwam uiteindelijk overeen, objecten zo als Pluto en Eris nu dwergplaneten te noemen, en ook Ceres die tot nog toe een astroïde of planetoïde heette, valt met zijn diameter van 950 km in deze categorie.

Piazzi kon de baan van Ceres 40 dagen volgen, maar toen raakte men Ceres kwijt omdat Piazzi ziek werd. Gauss[1], die toen 24 was, kon echter op grond van een paar waarnemingen de baan van Ceres berekenen. Zijn berekeningen waren zó precies dat de Duitse astronoom Wilhelm Olbers (1758-1840) de astroïde op 31 december 1801 terug vond!

Om de baan van Ceres te berekenen gebruikte Gauss de eerste wet van Kepler[2] die zegt dat iedere planeet zich in een ellipsvormige baan rond de zon beweegt met de zon in één der brandpunten. De algemene vergelijking van een ellips wordt gegeven door de formule

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

d.w.z. de punten (x, y) die aan deze vergelijking voldoen, liggen op de ellips en omgekeerd.

Door het invullen van 6 waarnemingen d.w.z. 6 punten (x_i, y_i) vind je dan 6 (lineaire) vergelijkingen in de onbekenden a, b, c, d, e en f. Om dit stelsel vergelijkingen op te lossen ontwikkelde Gauss een systematische methode die nu Gauss-eliminatie genoemd wordt. Deze is het onderwerp van de volgende paragraaf (zie ook opgave 1.2.7, waar zal blijken dat zelfs 5 waarnemingen voldoende zijn!).

[1] Carl Friedrich Gauss, 1777-1855, Duitse wiskundige

[2] Johannes Kepler, 1571-1636, Duitse wiskundige en astronoom

1.2 Gauss-eliminatie

Een rechte lijn in het xy-vlak kan worden voorgesteld door een vergelijking van de vorm $a_1x + a_2y = b$, waarbij a_1, a_2 en b reële getallen zijn en a_1 en a_2 niet beide nul. Een vergelijking van deze vorm heet een *lineaire vergelijking* in de variabelen x en y. De term *lineair* geeft hierbij aan dat in de vergelijking geen producten van de variabelen zo als x^2, y^3 of xy voorkomen. De ellips vergelijking uit de inleiding is dus niet lineair in x en y, maar wel in de onbekenden a, b, c, d, e, f.

Definitie 1.2.1

i) Een *lineaire vergelijking* in n variabelen $x_1, \ldots, x_n$ is een vergelijking van de vorm

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$$

waarbij $a_1, \ldots, a_n, b$ reële getallen zijn. De variabelen $x_1, \ldots, x_n$ noemen we ook wel *onbekenden*.

ii) Een eindig aantal lineaire vergelijkingen in de variabelen $x_1, \ldots, x_n$ heet een *stelsel* (of systeem) *lineaire vergelijkingen* in de variabelen $x_1, \ldots, x_n$.

iii) Een n-tal getallen $(s_1, \ldots, s_n)$ heet een *oplossing* van het stelsel als $x_1 = s_1, \ldots, x_n = s_n$ een oplossing is van iedere vergelijking van dit stelsel.

Voorbeeld 1.2.2

i) Het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 &= -4 \end{aligned}$$

heeft $(1, 2, -1)$ als oplossing omdat deze waarden aan beide vergelijkingen voldoet. Daarentegen is $(1, 8, 1)$ géén oplossing omdat deze waarde alleen aan de eerste vergelijking voldoet.

ii) De vergelijking $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ (die een cirkel van straal 1 beschrijft) is geen lineaire vergelijking.

Ons doel in deze paragraaf is een methode te beschrijven (de reeds eerder genoemde Gauss-eliminatie) om bij een willekeurig stelsel van $m \geq 1$ lineaire vergelijkingen in $n \geq 1$ variabelen alle oplossingen te vinden. M.a.w. we zullen de volgende stelsels bekijken

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

waarbij de a_{ij} en de b_j reële getallen zijn.

Vraag: Hoe vind je een systematische methode om zulke stelsels lineaire vergelijkingen op te lossen?

Antwoord: Bestudeer eerst eenvoudige getallen en leer ervan!

Het eenvoudigste geval is natuurlijk $n = 1$ en $m = 1$ m.a.w. de vergelijking $ax = b$. Hieraan zien we al iets: als $a \neq 0$ heeft de vergelijking precies één oplossing, namelijk $x = b/a$.

Echter als $a = 0$ zijn er 2 gevallen, namelijk als $b = 0$ in welk geval iedere $x \in \mathbb{R}$ een oplossing is en het geval $b \neq 0$ in welk geval er geen enkele oplossing $x \in \mathbb{R}$ bestaat!

Hoe dan ook, het geval $n = 1$, $m = 1$ begrijpen we volkomen.

Een volgend geval is $m = 1$ en $n = 2$: $a_1x_1 + a_2x_2 = b$, waarbij we $a_1 \neq 0$ aannemen (wat gebeurt er als $a_1 = 0$?). Kies dan x_2 willekeurig in $\mathbb{R}$, zeg $x_2 = t$. Dan volgt $a_1x_1 = b - a_2t$ en dus $x_1 = \frac{b-a_2t}{a_1}$. Dus is de algemene oplossing (s_1, s_2) van $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ van de vorm

$$(s_1, s_2) = \left(\frac{b - a_2t}{a_1}, t\right) = \left(\frac{b}{a_1}, 0\right) + t\left(\frac{-a_2}{a_1}, 1\right)$$

met $t \in \mathbb{R}$ willekeurig. De vrije variabele t heet een *parameter*.

Opgave 1.2.3 Zij $n \geq 2$, $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$ en $a_1 \neq 0$. Vind alle oplossingen van

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b.$$

Het volgende geval wat we willen onderzoeken is $n = 2$ en $m = 2$. Bijvoorbeeld

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 2x + 5y &= 11 \end{aligned}$$

Het *cruciale* idee is nu de $2x$ *term uit de tweede vergelijking te elimineren* door -2 keer de eerste vergelijking bij de tweede vergelijking op te tellen! Het resultaat is dat we het volgende nieuwe stelsel vinden

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 3y &= 3 \end{aligned}$$

Zoals men eenvoudig nagaat is iedere oplossing van het eerste stelsel een oplossing van het nieuwe stelsel en omgekeerd. We kunnen dus net zo goed het nieuwe stelsel proberen op te lossen. Echter dit stelsel is *eenvoudiger*! Immers de laatste vergelijking geeft meteen $y = 1$ en dit invullend in de eerste vergelijking geeft $x = 3$.

Dit voorbeeld laat zien dat we het geval $n = 2$, $m = 2$ aankunnen! Maar ook het geval $m = 2$, $n \geq 2$ d.w.z. 2 vergelijkingen met 2 of meer variabelen is nu te doen, zoals we aan de hand van het volgende voorbeeld laten zien.

Voorbeeld 1.2.4 Zoek alle oplossingen van het stelsel

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

Oplossing. Om de $3x$-term in de tweede vergelijking kwijt te raken tellen we -3 keer de eerste vergelijking bij de tweede op. Dit levert het volgende stelsel vergelijkingen op

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$$

Kies nu in de tweede vergelijking voor z een willekeurige waarde, zeg $z = t \in \mathbb{R}$. Dan volgt $3y = -27 + 11t$ m.a.w. $y = -9 + \frac{11}{3}t$. Deze waarden van y en z invullend in de eerste vergelijking geeft

$$x + (-9 + \frac{11}{3}t) + 2t = 9 \text{ m.a.w. } x = 18 - \frac{17}{3}t.$$

Dus de algemene oplossing is: $(s_1, s_2, s_3) = (18 - \frac{17}{3}t, -9 + \frac{11}{3}t, t)$ met $t \in \mathbb{R}$ willekeurig. Door voor $t = 3$ te kiezen vinden we de "mooie" oplossing $(1, 2, 3)$.

Het zal de lezer nu misschien zijn duidelijk geworden hoe het verder gaat. Voor alle duidelijkheid nog een voorbeeld met $n = 3$ en $m = 3$.

Voorbeeld 1.2.5 Zoek alle oplossingen van het stelsel

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + y + z &= 8 \end{aligned}$$

Oplossing. Om de $2x$-term uit de tweede vergelijking weg te werken, tellen we -2 keer de eerste vergelijking bij de tweede op. Dit levert

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3x + y + z &= 8 \end{aligned}$$

Om de $3x$-term uit de derde vergelijking weg te werken tellen we -3 keer de eerste vergelijking bij de derde op en vinden

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ -2y - 5z &= -19 \end{aligned}$$

De laatste twee vergelijkingen zijn nu 2 vergelijkingen in 2 onbekenden. Die kunnen we dus oplossen! Daarvoor tellen we de tweede vergelijking op bij de derde en vinden

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ -12z &= -36 \end{aligned}$$

Nu kunnen we weer van onder naar boven oplossen en vinden $z = 3$, $y = 2$ (uit $2y - 21 = -17$) en tenslotte $x = 1$ (uit $x + 2 + 6 = 9$).

Opmerking 1.2.6 Soms is het handig vergelijkingen te verwisselen of een vergelijking met een constante $\neq 0$ te vermenigvuldigen. Bekijk bijvoorbeeld het volgende stelsel

$$\begin{aligned} 2y - 8z &= 8 \\ x - 2y + z &= 0 \\ -4x + 5y + 9z &= 0 \end{aligned}$$

Verwissel eerst de eerste vergelijking met de tweede met als doel de x-term in de eerste vergelijking te krijgen waarmee je dan vervolgens de $-4x$ term uit de derde vergelijking kunt wegwerken. Daarna kun je de tweede vergelijking met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigen zodat deze $y - 4z = 4$ wordt. Met deze vergelijking kun je dan de $5y$-term uit de laatste vergelijking wegwerken. Ga dit zelf na en los het stelsel op!

Samengevat: In bovenstaande Gauss-eliminatie methode hebben we 3 typen bewerkingen gebruikt, nl.
1) Tel bij een vergelijking een veelvoud van een andere vergelijking op.
2) Vermenigvuldig een vergelijking met een constante $\neq 0$.
3) Verwissel twee vergelijkingen.

Opgave 1.2.7 Bepaal de ellips die gaat door de volgende 5 punten: $(2, -1)$, $(2, -5)$, $(5, -3)$, $(-1, -3)$ en $(1, \frac{4}{3}\sqrt{2} - 3)$.

Opgave 1.2.8 Vertaal het volgende puzzeltje in een stelsel lineaire vergelijkingen en vind de oplossing.
- Vandaag is Annie twee jaar jonger dan Ben en Cees samen.
- Over vijf jaar is Annie twee keer zo oud als Ben.
- Twee jaar geleden was Ben half zo oud als Cees.

Hoe oud zijn Annie, Ben en Cees?

1.3 Toepassingen

Heel veel problemen in allerlei takken van wetenschap zijn te herleiden tot het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen. We zullen in deze paragraaf een aantal voorbeelden bekijken.

a) Grafieken door voorgeschreven punten

Stel je hebt twee verschillende reële getallen c_1 en c_2 en twee reële getallen d_1 en d_2. Dan is het bekend dat er precies één rechte van de vorm $y = a_0 + a_1x$ door de punten (c_1, d_1) en (c_2, d_2) gaat. Iets minder bekend is het feit dat er door drie punten $(c_1, d_1), (c_2, d_2), (c_3, d_3)$ met c_1, c_2, c_3 allen verschillend precies één parabool van de vorm $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ gaat. Deze resultaten vormen slechts een speciaal geval van de navolgende stelling die we verderop zullen bewijzen.

Stelling 1.3.1 Voor n verschillende reële getallen $c_1, \ldots, c_n$ en n willekeurige reële getallen $d_1, \ldots, d_n$ is er precies een veelterm $a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ van graad $\leq n-1$ met $a_1, \ldots, a_{n-1}$ in $\mathbb{R}$ zodat de grafiek $y = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ door de punten $(c_1, d_1), \ldots, (c_n, d_n)$ gaat.

Het vinden van deze kromme kunnen we m.b.v. Gauss-eliminatie doen. We laten dit aan de hand van een voorbeeld zien.

Voorbeeld 1.3.2 Bepaal een veelterm $a_0 + a_1x + a_2x^2$ van graad 2 zodanig dat de grafiek $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ door de punten $(1, 6)$, $(2, 3)$ en $(3, 2)$ gaat.

Oplossing. Omdat $x = 1$, $y = 6$ op de kromme ligt vinden we dat $a_0 + a_1 + a_2 = 6$. Net zo vinden we door substitutie van $x = 2$ en $y = 3$ dat $a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 3$ en tenslotte

$a_0+3a_1+9a_2=2$ omdat $(3,2)$ op de kromme ligt. We moeten dus a_0, a_1, a_2 oplossen uit het stelsel

$$\begin{aligned} a_0+a_1+a_2&=6\\ a_0+2a_1+4a_2&=3\\ a_0+3a_1+9a_2&=2 \end{aligned}$$

Door de eerste van de tweede en de eerste van de derde vergelijking af te trekken vinden we

$$\begin{aligned} a_0+a_1+a_2&=6\\ a_1+3a_2&=-3\\ 2a_1+8a_2&=-4 \end{aligned} \qquad \text{ofwel} \qquad \begin{aligned} a_0+a_1+a_2&=6\\ a_1+3a_2&=-3\\ a_1+4a_2&=-2 \end{aligned}$$

Door nu nog de tweede van de derde vergelijking af te trekken vinden we

$$\begin{aligned} a_0+a_1+a_2&=6\\ a_1+3a_2&=-3\\ a_2&=1 \end{aligned}$$

Dus $a_2=1$, $a_1=-3-3=-6$ en $a_0=6-1-(-6)=11$. De gezochte kromme is dus $y=11-6x+x^2$.

Opmerking 1.3.3 (De Lagrange[3] interpolatie polynomen.)
Het unieke polynoom uit stelling 1.3.1 kan ook als volgt gevonden worden: bekijk $p_i(x)=(x-c_1)\dots\widehat{(x-c_i)}\dots(x-c_n)$, $1\le i\le n$, waarbij $\widehat{\quad}$ betekent dat de factor $x-c_i$ moet worden weggelaten. Dan geldt dat $p_i(c_j)=0$ als $j\ne i$ en $p_i(c_i)=(c_i-c_1)\dots\widehat{(c_i-c_i)}\dots(c_i-c_n)$ welke $\ne 0$ is omdat $c_i\ne c_j$ als $j\ne i$. Voor iedere $1\le i\le n$ definiëren we dat

$$L_i(x):=\frac{1}{p_i(c_i)}p_i(x).$$

Dan voldoet het polynoom

$$P_{c,d}(x):=d_1L_1(x)+\dots+d_nL_n(x)$$

aan $P_{c,d}(c_i)=d_i$ voor iedere i (ga na!).
Het polynoom $P_{c,d}(x)$ heet een *Lagrange interpolatie polynoom*.

Tot slot van deze subparagraaf nog een toepassing die valt in de categorie “recreational mathematics”.

Gegeven een rijtje zoals $1,2,3,4,5,\dots$

Vraag: Maak het rijtje af en nog beter, geef een formule $f(n)$ die de n-de term van het rijtje beschrijft.

Bovenstaand rijtje is natuurlijk “duidelijk”, de volgende term is 6 en de formule is $f(n)=n$. Maar is dat ook zo? Antwoord: natuurlijk niet! Immers, volgens Opmerking 1.3.3 is het makkelijk een polynoom P te maken met graad ≤ 5 zodanig dat $P(1)=1$, $P(2)=2$, $P(3)=3$, $P(4)=4$, $P(5)=5$ maar $P(6)=321$! namelijk neem in Opmerking 1.3.3

[3]Joseph Louis Lagrange, 1736-1813, Franse wiskundige

$(c_1, d_1) = (1, 1), (c_2, d_2) = (2, 2), \ldots, (c_5, d_5) = (5, 5)$ en $(c_6, d_6) = (6, 321)$. Dan is $P := P_{c,d}$ zo'n polynoom!

Nu zul je misschien denken, ja maar bij een beetje "natuurlijk" probleem gebeurt zoiets niet. M.a.w. als je de regelmaat al na een paar termen ziet dan zal het wel zo doorgaan. Als je dat denkt bekijk dan de volgende vraag.

Vraag 1.3.4 Stel je hebt $n \geq 2$ verschillende punten op een cirkel. Als je alle n punten met elkaar verbindt via rechte lijnen (de zgn. koorden), in hoeveel stukken wordt de binnenkant van de cirkel dan maximaal verdeeld? Noem dit aantal $a(n)$.

Het is eenvoudig in te zien dat $a(2) = 2$, $a(3) = 4$ en $a(4) = 8$. Het lijkt dus duidelijk wat de regelmaat is, $a(5)$ zal 16 zijn. En inderdaad dat klopt! Nu zijn we helemaal zeker, een bewijs is "eigenlijk al niet meer nodig!" Maar dan ... $a(6) = 31$!! De verwachte formule $a(n) = 2^{n-1}$ klopt dus niet. Maar welke dan wel?

Het verrassende resultaat is dat $a(n)$ gegeven wordt door het unieke polynoom met graad ≤ 4 dat door de 5 punten $(2, 2), (3, 4), (4, 8), (5, 16)$ en $(6, 31)$ gaat.

Uitrekenen (bijvoorbeeld met Gauss-eliminatie of Opmerking 1.3.3) levert dat $a(n) = 1 + \frac{1}{2}n(n-1) + \frac{1}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3)$ $(4! = 1.2.3.4)$.
(Voor meer informatie zie: J. Glen, The Quest for the lost Region, Mathematics Teaching 43, pp. 23-25, 1968.)

b) Magische vierkanten (driehoeken, ...)

Bekijk het getallen vierkant

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Dit is een voorbeeld van een zgn. *magisch vierkant*. Het heet zo omdat het heel bijzondere eigenschappen heeft nl. de som van alle getallen in iedere rij = de som van alle getallen in iedere kolom = de som van alle getallen op ieder van de hoofddiagonalen = 15. Bovendien zijn de getallen in dit vierkant de opeenvolgende natuurlijke getallen beginnende met 1 tot het vierkant vol is.

Magische vierkanten werden voor het eerst ontdekt in 2200 voor Christus in China. Bovenstaand vierkant kreeg de naam Lo-Shu. Het eerste 4 bij 4 magische vierkant verscheen in 1100 in India:

$$\begin{pmatrix} 7 & 12 & 1 & 14 \\ 2 & 13 & 8 & 11 \\ 16 & 3 & 10 & 5 \\ 9 & 6 & 15 & 4 \end{pmatrix}$$

Dit vierkant is nog magischer omdat ook de "gebroken diagonalen" dezelfde som hebben zoals bijvoorbeeld $2 + 3 + 15 + 14 = 16 + 6 + 1 + 11 = 2 + 12 + 15 + 5$ enz.

Cornelius Agrippa (1486-1535) maakte magische vierkanten van orde $3, 4, 5, 6, 7, 8$ en 9. Als astroloog verbond hij ze met de (toen) bekende 7 planeten!

In de 17e eeuw begonnen verschillende Franse wiskundigen methodes te ontwikkelen om magische vierkanten te maken. Rond 1838 waren er al zo'n 880 verschillende 4 bij 4 magische vierkanten bekend (spiegelingen en draaiingen niet meegerekend). Inmiddels is er een gigantische literatuur over magische vierkanten en zijn er clubs die zich met magische vierkanten bezighouden; allen beweren 's wereld's meest magische magisch vierkant gemaakt te hebben (surf maar eens op het Web!).

I.p.v. te eisen dat de getallen in zo'n vierkant alleen de opvolgende natuurlijke getallen beginnende bij 1 zijn, zullen we *van nu af onderstellen* dat de getallen in het vierkant *willekeurige reële getallen zijn*.
De vraag die we zullen bekijken is: hoe vinden we al zulke 3 bij 3 magische vierkanten?

Voordat we ons met deze vraag gaan bezighouden bekijken we eerst een soortgelijk maar eenvoudiger probleem.

Magische driehoeken

Zij D de verzameling der driehoeken $\begin{matrix} & & a & & \\ & b & & f & \\ c & & d & & e \end{matrix}$ waarbij a, b, c, d, e en f reële getallen zijn. Zo'n driehoek heet magisch als de som van alle getallen op iedere zijde hetzelfde is.
Bijvoorbeeld de driehoek

$$\begin{matrix} & & 1 & & \\ & 2 & & 6 & \\ 3 & & 4 & & -1 \end{matrix}$$

is magisch want de som der getallen op iedere zijde is 6.

Vraag. Hoe zien alle magische driehoeken eruit?

Antwoord. De driehoek $\begin{matrix} & & a & & \\ & b & & f & \\ c & & d & & e \end{matrix}$ is magisch d.e.s.d.a. de variabelen a, b, c, d, e, f aan het volgende stelsel lineaire vergelijkingen voldoen

$$\begin{aligned} a + b + c &= c + d + e \\ a + b + c &= a + f + e \end{aligned}$$

m.a.w. d.e.s.d.a. $a + b = d + e$ en $b + c = f + e$ waaruit volgt dat $b = f + e - c$ en $a = d + e - (f + e - c) = d + c - f$.

M.a.w. alle magische driehoeken zijn van de vorm

$$\begin{matrix} & & d + c - f & & \\ & f + e - c & & f & \\ c & & d & & e \end{matrix}$$

De magische driehoek $\begin{matrix} & & 1 & & \\ & 2 & & 6 & \\ 3 & & 4 & & -1 \end{matrix}$ vinden we terug door $c = 3$, $d = 4$, $e = -1$ en $f = 6$ te nemen.

Magische vierkanten

Laten we nu terug keren naar de 3 bij 3 magische vierkanten. Laten $x_1, x_2, \ldots, x_9$ reële getallen zijn. Dan is een vierkant

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$$

magisch d.e.s.d.a.

$$\begin{array}{llll} x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_5 + x_6 & \text{én} & x_4 + x_5 + x_6 = x_7 + x_8 + x_9 & \text{én} \\ x_7 + x_8 + x_9 = x_1 + x_4 + x_7 & \text{én} & x_1 + x_4 + x_7 = x_2 + x_5 + x_8 & \text{én} \\ x_2 + x_5 + x_8 = x_3 + x_6 + x_9 & \text{én} & x_3 + x_6 + x_9 = x_1 + x_5 + x_9 & \text{én} \\ x_1 + x_5 + x_9 = x_3 + x_5 + x_7. & & & \end{array}$$

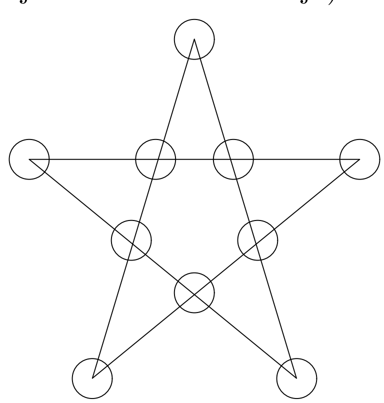
We krijgen dus een stelsel van 7 lineaire vergelijkingen in 9 onbekenden. M.b.v. Gauss-eliminatie is het dan mogelijk alle oplossingen te vinden. Na wat meer rekenwerk als in voorgaand voorbeeld blijkt dan dat alle 3 bij 3 magische vierkanten van de volgende vorm zijn

$$\begin{pmatrix} a-c & a+b+c & a-b \\ a-b+c & a & a+b-c \\ a+b & a-b-c & a+c \end{pmatrix}$$

Het beroemde magische vierkant Lo-Shu vinden we terug door $a = 5$, $b = 3$ en $c = 1$ te kiezen.

Natuurlijk is het met bovenstaande methode mogelijk ook alle 4 bij 4, 5 bij 5, ... magische vierkanten te vinden, alhoewel het rekenwerk wel zal toenemen. Ook kun je magische kubussen maken (de definitie ligt voor de hand). Tot slot:

Opgave 1.3.5 Bepaal alle magische pentagrammen (waarbij natuurlijk de som van de vier getallen op ieder van de rechte lijnen hetzelfde moet zijn):



Figuur 1.1: Schema voor een magisch pentagram

c) Het in evenwicht brengen van chemische vergelijkingen

In de meeste voorbeelden van scheikunde op school is het in evenwicht brengen van chemische vergelijkingen een eenvoudige zaak. Zoals bij de reactie

$$Na\,Cl + H_2SO_4 \to Na_2SO_4 + HCl$$

is het duidelijk dat de juiste reactie is

$$2NaCl + H_2SO_4 \to Na_2SO_4 + 2HCl.$$

Laten we daarom een iets minder eenvoudig voorbeeld nemen:

$$Ca + H_3PO_4 \to Ca_3P_2O_8 + H_2.$$

We zoeken dus naar coëfficiënten, x, y, z, w natuurlijke getallen zodat de vergelijking

$$xCa + yH_3PO_4 \to zCa_3P_2O_8 + wH_2$$

klopt. Door resp. de Ca, H, P en O atomen te vergelijken vinden we

$$x = 3z,\ 3y = 2w,\ y = 2z \text{ en } 4y = 8z.$$

Deze oplossen levert $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$ en $w = 3$ (dit is de kleinste oplossing in de natuurlijke getallen).

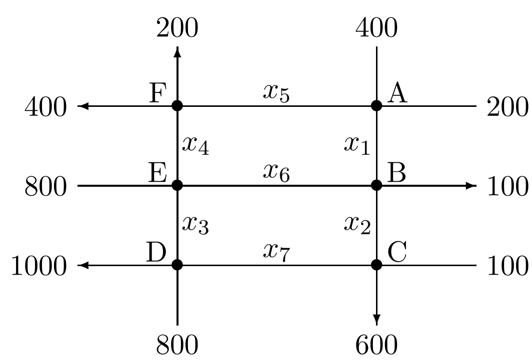
Opgave 1.3.6 Breng de volgende vergelijkingen in evenwicht.
i) $KMnO_4 + H_2SO_4 + KBr \to K_2SO_4 + Br_2 + MnSO_4 + H_2O$.
ii) $As_2S_3 + H_2O + HNO_3 \to NO + H_3AsO_4 + H_2SO_4$.

d) Netwerk analyse

Onderstaand schema geeft aan de verkeersstroom in het centrum van Jacksonville in Florida. De getallen 400 enz. geven aan het aantal voertuigen per uur dat passeert in de aangegeven richting (alle straten zijn éénrichtings verkeer) gedurende de spitsuren. De aantallen voertuigen die passeren in de overige straten zijn aangegeven met $x_1, x_2, \ldots, x_7$.

Als regel veronderstellen we:

(∗) al het verkeer dat een kruispunt nadert, verlaat het ook weer.



Figuur 1.2: Verkeersstromen in Jacksonville

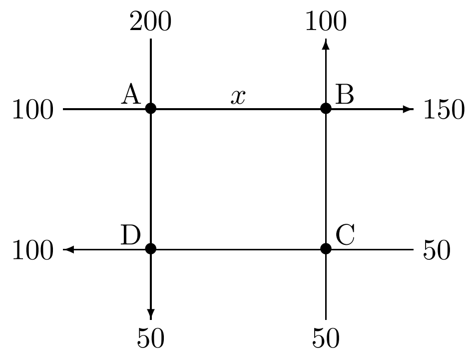
Stel nu dat we op het traject tussen C en D werkzaamheden aan de weg moeten verrichten en we willen dat de verkeersstroom op dit traject zo minimaal mogelijk is. Wat is de kleinst mogelijke verkeersstroom op het traject CD zodat er geen verkeersopstoppingen ontstaan en hoe kunnen we die gewenste toestand bereiken?

Oplossing. Bekijk wat uit $(*)$ volgt op het kruispunt A: binnenkomend verkeer $400 + 200$, weggaand verkeer $x_1 + x_5$ m.a.w. we krijgen de vergelijking $x_1 + x_5 = 600$. Bij B vinden we: binnenkomend $x_1 + x_6$, uitgaand $x_2 + 100$ m.a.w. we krijgen de vergelijking $x_1 + x_6 = x_2 + 100$. Zo doorgaand vinden we het volgende stelsel vergelijkingen:

$$x_1 + x_5 = 600, \quad x_1 - x_2 + x_6 = 100, \quad x_2 - x_7 = 500,$$
$$-x_3 + x_7 = 200, \quad -x_3 + x_4 + x_6 = 800, \quad x_4 + x_5 = 600.$$

M.b.v. Gauss eliminatie kunnen we dit stelsel oplossen en vinden dan:
$x_1 = -x_6 + x_7 + 600$, $x_2 = x_7 + 500$, $x_3 = x_7 - 200$, $x_4 = -x_6 + x_7 + 600$ en $x_5 = x_6 - x_7$. Omdat verkeersstromen ≥ 0 moeten zijn, zien we uit de derde vergelijking dat $x_7 \geq 200$ en dus is de stroom tussen C en D minimaal als $x_7 = 200$. In dat geval is $x_3 = 0$. Omgekeerd, als $x_3 = 0$ dan is $x_7 = 200$. M.a.w. als we het traject tussen E en D afsluiten dan is $x_3 = 0$ en dus $x_7 = 200$, de minimale verkeersstroom op het traject tussen C en D. De andere stromen zijn dan: $x_1 = -x_6 + 800$, $x_2 = 700$, $x_4 = -x_6 + 800$ en $x_5 = x_6 - 200$, waarbij $200 \leq x_6 \leq 800$.

Opgave 1.3.7 Alle straten in onderstaand schema zijn éénrichtings verkeer straten. Wat is de kleinst mogelijke verkeersstroom x op het traject tussen A en B?



Figuur 1.3: Verkeersstromen

Historische opmerkingen

1. Traditioneel was algebra de kunst van het oplossen van vergelijkingen of stelsels vergelijkingen. Het woord algebra komt van het Arabische woord al-jabr wat reparatie (van gebroken delen) betekent! De term werd voor het eerst in een wiskundige betekenis gebruikt door Mohammed al-khowarizmi (780-850) die in het "Huis van Wijsheid" in Baghdad werkte (en van wiens naam het woord *algoritme* is afgeleid).
   Lineaire algebra is de kunst van het oplossen van lineaire vergelijkingen of stelsels lineaire vergelijkingen.

2. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) werd geboren in een arme arbeiders klasse familie in Brunswick (Duitsland) en stierf in Göttingen als de beroemdste wiskundige van de wereld!
   Als kind was hij al uitzonderlijk: op een dag, hij was toen nog geen drie, was zijn vader bezig de lonen voor de arbeiders die onder zijn leiding werkten klaar te maken zat Gauss in een hoekje van de kamer. Na een lange berekening zei Gauss tegen z'n vader dat

er een fout in de berekening zat en gaf de juiste uitkomst, die hij uit z'n hoofd had uitgerekend. Tot grote verbazing van z'n ouders bleek zijn uitkomst juist te zijn!
Gauss leverde belangrijke bijdragen in o.a. getaltheorie, wiskundige astronomie, wiskundige geografie, statistiek, differentiaal meetkunde en magnetisme. In zijn dagboeken zijn nog heel veel ongepubliceerde resultaten te vinden. Hij wordt beschouwd als (een van) de grootste wiskundigen uit de moderne tijd.

3. Gauss-eliminatie. Deze methode voor het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen werd ruim twee duizend jaar geleden door de Chinezen gebruikt. In het achtste hoofdstuk van het Chinese werk "Boeken der negen hoofdstukken over de wiskunst" (Chin-chang Suan-Shu) rond 200 voor Christus kwam bijvoorbeeld het volgende probleem voor dat met "Gauss-eliminatie" werd opgelost:

   De opbrengst van een schoof minderwaardig graan, twee schoven gemiddeld graan en drie schoven superieur graan is 39 tou (een bronzen schaal in de Chou dynastie, 900-225 voor Christus). De opbrengst van een schoof minderwaardig graan, drie schoven gemiddeld graan en twee schoven superieur graan is 34 tou. De opbrengst van drie schoven minderwaardig graan, twee schoven gemiddeld graan en een schoof superieur graan is 26 tou. Wat is de opbrengst van een schoof minderwaardig, gemiddeld en superieur graan?

4. Joseph Louis Lagrange (1736-1813) was een Frans-Italiaans wiskundige en astronoom geboren te Turijn. Hij bracht het grootste deel van zijn carrière door in Berlijn en Parijs. Lagrange werd aangetrokken door wiskunde en astronomie na het lezen van een werk van de astronoom Halley (1656-1742). Deze berekende in 1682 de baan van de na hem genoemde komeet en voorspelde dat hij in 1758 weer zou langskomen. Toen Lagrange 16 was, begon hij zichzelf wiskunde te leren en toen hij 19 was, werd hij Professor aan de Koninklijke artillerieschool te Turijn. Het volgende jaar loste hij een aantal beroemde problemen op met nieuwe methoden die uiteindelijk leidden tot een nieuwe tak van wiskunde: de variatie rekening.
   Deze methode, en Lagrange's toepassing op de hemel mechanica waren zo indrukwekkend dat hij op 25-jarige leeftijd beschouwd werd als de grootste op dat moment levende wiskundige.
   Een van zijn belangrijkste werken is "Mécanique Analytique" waarin hij de gehele mechanica terugbracht tot een paar formules waaruit alles kon worden afgeleid.
   Napoleon (1769-1821) was een groot bewonderaar van Lagrange en overlaadde hem met onderscheidingen. Lagrange was een bescheiden man. Hij is met eer begraven in het beroemde Panthéon in Parijs.

Enkele vooruitblikken

1. In dit hoofdstuk hebben we gekeken naar stelsels lineaire vergelijkingen. Meer algemeen kan men kijken naar stelsels van de vorm

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

waarbij iedere $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ een veelterm in $x_1, \ldots, x_n$ met coëfficiënten in $\mathbb{R}$ (of $\mathbb{C}$) is d.w.z. een eindige som van termen van de vorm $c_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$ waarbij $c_{i_1,\ldots,i_n}$ een reëel (of complex) getal is en iedere $i_j \geq 0$. Dus bijvoorbeeld $7x_1^2x_2^2 + 3x_2^4 + x_1$ is een voorbeeld van een veelterm (niet lineair) in x_1 en x_2.

De studie van zulke stelsels vergelijkingen gebeurt in de *algebraïsche meetkunde*. Recentelijk (1964) is er door de Oostenrijkse wiskundige Bruno Buchberger (1942-) een uitbreiding van de Gauss-eliminatie methode gevonden naar stelsels veelterm vergelijkingen; de bijbehorende theorie heet *Gröbner basis theorie*. Het idee is dat je door middel van een soort veegproces (S-polynomen) het stelsel vergelijkingen vervangt door een "mooier" stelsel veelterm vergelijkingen, waaraan je bijvoorbeeld de oplossingen eenvoudig kunt aflezen. Meer hierover kun je te weten komen in colleges over *Computer algebra*.

2. De Lagrange interpolatie polynomen kunnen als volgt gegeneraliseerd worden naar meerdere variabelen. Laat $c_1, \ldots, c_n$ verschillende vectoren in $\mathbb{R}^m$ zijn en $d_1, \ldots, d_n$ gegeven reële getallen. Dan kun je bewijzen dat er een polynoom $P_{c,d}(x_1, \ldots, x_m)$ met coëfficiënten in $\mathbb{R}$ bestaat zodanig dat $P_{c,d}(c_i) = d_i$ voor iedere i. Dit resultaat is een speciaal geval van de zgn. Chinese reststelling, welke in het college *Ringen en Lichamen* behandeld wordt.