Hoofdstuk 4

Eigenwaarden en eigenvectoren

4.1 Inleiding

Tot nu toe zijn al onze vectoren en matrices reëel geweest d.w.z. de theorie voor stelsels lineaire vergelijkingen en de theorie der matrices en determinanten zijn behandeld voor de reële getallen. Echter het zal de lezer geen enkele moeite kosten om overal waar "reëel getal", $\mathbb{R}$ of $\mathbb{R}^n$ staat, dit te vervangen door "complex getal", $\mathbb{C}$ of $\mathbb{C}^n$; alle stellingen en bewijzen gaan gewoon door.

Bij het nu volgende onderwerp, eigenwaarden en eigenvectoren, is het van belang over de complexe getallen te kunnen beschikken, ook al start je met een matrix bestaande uit reële (of zelfs gehele) getallen. Je kunt het vergelijken met zoiets als de vergelijking $x^2 + 1 = 0$; deze heeft reële coëfficiënten maar geen reële nulpunten, echter wel complexe, namelijk i en $-i$.

Het kunnen vinden van nulpunten in de complexe getallen lukt altijd: dit is de zgn. *Hoofdstelling van de Algebra* die door Gauss in 1799 bewezen werd. Het precieze resultaat is:

Stelling 4.1.1 (Hoofdstelling van de Algebra)
Laten $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ willekeurige complexe getallen zijn. Dan bestaan er complexe getallen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ zodanig dat

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n),$$

m.a.w. de vergelijking $x^n + a_{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ heeft precies n complexe nulpunten, namelijk $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (de λ_i's hoeven niet allen verschillend te zijn).

In dit hoofdstuk zal A steeds een complexe $n \times n$ matrix aanduiden en alle berekeningen gaan over $\mathbb{C}$ i.p.v. over $\mathbb{R}$ zoals tot nu toe. I.h.b. zal de determinant $\det A$ een complex getal zijn.

4.2 Definitie van eigenwaarden en eigenvectoren

In sectie 3.2 zagen we hoe we aan iedere $n \times n$ matrix een getal, $\det A$, toegevoegd hebben. We zullen nu een verfijning hiervan geven: aan iedere $n \times n$ matrix A voegen we n complexe getallen toe, de zgn. eigenwaarden van A. Het getal $\det A$ zal blijken, op een minteken na, het product van alle eigenwaarden te zijn. De eigenwaarden en eigenvectoren (zie 4.2.1 hieronder) blijken een fundamentele rol te spelen in allerlei problemen zowel binnen als buiten de wiskunde. We zullen hier niet de hele theorie behandelen (we verwijzen daarvoor naar de colleges LA3 en LA4) maar wel een voor de praktijk zeer belangrijk geval, namelijk wanneer alle eigenwaarden verschillend zijn. Als illustratie van het gebruik van eigenwaarden en eigenvectoren geven we een aantal toepassingen.

Definitie 4.2.1 Zij A een $n \times n$ matrix. Een getal c heet een *eigenwaarde* van A als er een niet-nul vector x in $\mathbb{C}^n$ bestaat met $Ax = cx$. De vector x heet dan een *eigenvector* van A bij de eigenwaarde c.

Voorbeeld 4.2.2 Zij $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, het magisch vierkant uit hoofdstuk 1 welke 15 als magische som heeft.
Men rekent dan eenvoudig na dat 15 een eigenwaarde van A is met als eigenvector $e := (1\ 1\ 1)^t$ m.a.w. $Ae = 15e$.

In stelling 4.2.4 zullen we aangeven hoe we alle eigenwaarden van een matrix kunnen bepalen. Voor het bewijs hiervan hebben we de uitspraak van stelling 2.4.6 nodig die we nu in een equivalente formulering gaan bewijzen.

Stelling 4.2.3 Zij A een $n \times n$ matrix. Als A niet inverteerbaar is, dan bestaat er een $x \neq 0$ met $Ax = 0$.
Omgekeerd, als zo'n $x \neq 0$ met $Ax = 0$ niet bestaat, moet A dus inverteerbaar zijn.

Bewijs. Als A niet inverteerbaar is, is ook A^t niet inverteerbaar. We brengen nu A^t d.m.v. elementaire transformaties op bovendriehoeksvorm: $E_s \dots E_1 A^t = D$ met $D_{ij} = 0$ voor $i > j$. Omdat A^t niet inverteerbaar is, zijn niet alle $D_{ii} \neq 0$, want anders zou $\det A^t \neq 0$ zijn. Zij nu k de grootste index met $D_{kk} = 0$, dan is $D_{jj} \neq 0$ voor $j > k$. Door nu voor $j = k+1, \dots, n$ het passende veelvoud van de j-de rij bij de k-de op te tellen, kunnen we stapsgewijs de hele k-de rij op 0 brengen. Met de bijhorende elementaire matrices $E'_{k+1}, \dots, E'_n$ geldt dus dat

$$\underbrace{E'_n \dots E'_{k+1} E_s \dots E_1}_{E} A^t = EA^t = \begin{pmatrix} d_{11} & * & \dots & & & * \\ 0 & d_{22} & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \\ & & & 0 & \dots & 0 \\ & & & & d_{k+1,k+1} & * \\ & & & & \ddots & \\ 0 & \dots & & & & d_{nn} \end{pmatrix}$$

Omdat EA^t in de k-de rij een 0-rij heeft, heeft $(EA^t)^t = AE^t$ in de k-de kolom een 0-kolom. Met e_k noteren we de kolom met 1 in de k-de plaats en 0 elders, dan is $A(E^t e_k) = 0$, maar $E^t e_k \neq 0$ omdat E^t een inverteerbare matrix is. $\square$

Stelling 4.2.4 Zij A een $n \times n$ matrix en c een complex getal. Dan is c een eigenwaarde van A d.e.s.d.a. $\det(cI_n - A) = 0$.

Bewijs. Er geldt dat c een eigenwaarde van A is d.e.s.d.a. er een $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$ bestaat met $Ax = cx$ d.e.s.d.a. er $x \in C^n$, $x \neq 0$ bestaat met $(cI_n - A)x = 0$. Uit 2.4.5 en 4.2.3 zien we dat dit het geval is d.e.s.d.a. $cI_n - A$ niet inverteerbaar is m.a.w. d.e.s.d.a. $\det(cI_n - A) = 0$, volgens 3.2.9. $\square$

Voorbeeld 4.2.5 Zij $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Bepaal de eigenwaarden van A en bij iedere eigenwaarde al zijn eigenvectoren.

Oplossing. Volgens 4.2.4 is c een eigenwaarde van A d.e.s.d.a. $\det(cI_2 - A) = 0$ d.e.s.d.a. $\det \begin{pmatrix} c-1 & -1 \\ 2 & c-4 \end{pmatrix} = 0$ d.e.s.d.a. $(c-1)(c-4) + 2 = 0$ d.e.s.d.a. $c^2 - 5c + 6 = 0$ d.e.s.d.a. $c = 2$ of $c = 3$. M.a.w. $c = 2$ en $c = 3$ zijn alle eigenwaarden van A.

Om de eigenvectoren bij $c = 2$ te vinden, moeten we dus alle $x = \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{C}^2$ bepalen met $Ax = 2x$ m.a.w. met

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2x_1 \quad \text{ofwel:} & -x_1 + x_2 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 &= 2x_2 & -2x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

We zien dus dat alle oplossingen van de vorm $\binom{x_1}{x_1}$ zijn met $x_1 \in \mathbb{C}$. Dus iedere eigenvector van A bij de eigenwaarde $c = 2$ is van de vorm $x_1\binom{1}{1}$ met $x_1 \neq 0$.
Net zo vinden we dat alle eigenvectoren bij de eigenwaarde $c = 3$ van de vorm $x_1\binom{1}{2}$ met $x_1 \neq 0$ zijn.

Een cruciale stelling waardoor eigenwaarden en eigenvectoren zowel binnen als buiten de wiskunde gebruikt worden is de volgende:

Stelling 4.2.6 Zij A een $n \times n$ matrix. Neem aan dat de n eigenwaarden $c_1, \ldots, c_n$ van A allen verschillend zijn. Laat $v_1, \ldots, v_n$ een stel corresponderende eigenvectoren zijn d.w.z. $Av_i = cv_i$ voor iedere i. Zij T de $n \times n$ matrix waarvan voor iedere i de i-de kolom gelijk is aan v_i. Dan geldt:
1) T is een inverteerbare matrix.
2) $T^{-1}AT = D$, waarbij D de diagonaalmatrix is met $D_{ii} = c_i$ voor alle i, m.a.w. de eigenwaarden van A staan op de diagonaal van D.

Het bewijs van deze stelling is gebaseerd op het volgende lemma.

Lemma 4.2.7 Laat $p \geq 1$ en $v_1, \ldots, v_p$ eigenvectoren zijn bij verschillende eigenwaarden $c_1, \ldots, c_p$ van A. Als $x_1v_1 + \cdots + x_pv_p = 0$ voor zekere $x_i \in \mathbb{C}$, dan is $x_1 = \ldots = x_p = 0$.

Bewijs. Met inductie naar p. Omdat $v_1 \neq 0$ (want een eigenvector is niet nul) is het geval $p = 1$ duidelijk. Laat nu $p \geq 2$. Door de relatie van links met A te vermenigvuldigen en te gebruiken dat $Av_i = c_iv_i$ voor iedere i volgt
(*) $x_1c_1v_1 + \cdots + x_pc_pv_p = 0$.
Door aan de andere kant $x_1v_1 + \cdots + x_pv_p = 0$ met c_p te vermenigvuldigen volgt
(**) $x_1c_pv_1 + \cdots + x_pc_pv_p = 0$.
Uit (*) en (**) volgt dan $x_1(c_1 - c_p)v_1 + \cdots + x_{p-1}(c_{p-1} - c_p)v_{p-1} = 0$. Uit de inductieaanname volgt dan dat $x_i(c_i - c_p) = 0$ voor alle $1 \leq i \leq p-1$. Omdat $c_i - c_p \neq 0$ voor alle $1 \leq i \leq p-1$ volgt dat $x_1 = \ldots = x_{p-1} = 0$. Dit invullend in de oorspronkelijke relatie, gebruikend dat $v_p \neq 0$, levert dat ook $x_p = 0$. $\square$

Bewijs van stelling 4.2.6
1) Om te bewijzen dat T inverteerbaar is, is het volgens stelling 4.2.3 voldoende te laten zien dat $Tx = 0$ alleen maar kan voor $x = 0$. Neem dus aan dat $Tx = 0$ m.a.w. (zie sectie 2.2 in hoofdstuk 2)

$$x_1v_1 + \cdots + x_nv_n = 0.$$

Dan volgt uit 4.2.7 dat $x_1 = \ldots = x_n = 0$, dus $x = 0$.
2) $AT = A(v_1, \ldots, v_n) = (Av_1, \ldots, Av_n) = (c_1v_1, \ldots, c_nv_n) = TD$. Dus $T^{-1}AT = D$. $\square$

Definitie 4.2.8 Een matrix A heet *diagonaliseerbaar* als er een inverteerbare $n \times n$ matrix T bestaat en een diagonaalmatrix D zodanig dat $T^{-1}AT = D$.

Voorgaande stelling zegt dus dat iedere $n \times n$ matrix die n verschillende complexe eigenwaarden heeft diagonaliseerbaar is. Voordat we wat toepassingen van deze stelling bekijken, geven we eerst een eenvoudig, maar nuttig lemma

Lemma 4.2.9 i) Voor een diagonaalmatrix $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ is $D^m = \begin{pmatrix} d_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^m \end{pmatrix}$ voor alle $m \geq 1$.

ii) Zij D een willekeurige $n \times n$ matrix en T een inverteerbare $n \times n$ matrix. Dan is $(TDT^{-1})^m = TD^mT^{-1}$ voor alle $m \geq 1$.

Bewijs. Met inductie naar m. De details worden aan de lezer overgelaten (merk op dat $(TAT^{-1})(TBT^{-1}) = TA(T^{-1}T)BT^{-1} = TABT^{-1}$). $\square$

4.3 Toepassingen

a) Dynamische systemen

We laten nu zien hoe eigenwaarden en eigenvectoren een rol spelen bij de bestudering van zgn. dynamische systemen. Grofweg gesproken is een dynamisch systeem een "systeem" dat op ieder moment in een bepaalde toestand verkeert, maar dat met de tijd verandert. Zo heb je chemische systemen, economische systemen enz. Deze kunnen allen als dynamische systemen gezien worden.

Men onderscheidt continue en discrete dynamische systemen; in het laatste geval vindt de verandering meer stapsgewijs plaats bijvoorbeeld iedere dag, of iedere week enz. Dit alles klinkt nogal vaag! Het volgende voorbeeld uit de biologie zal het hopelijk allemaal wat duidelijker maken.

De gevlekte uil

We bekijken een model dat de populatie dynamica (d.w.z. de verandering van de populatie met de tijd) beschrijft van de gevlekte uil in de bossen rond Willow Creek in California. De populatie in het k-de jaar wordt beschreven door een vector $p_k := (j_k, h_k, v_k)$ in $\mathbb{R}^3$, welke de *toestandsvector* heet. Hierbij duiden j_k, h_k resp. v_k aan het aantal jonge vrouwtjes (in eerste levensjaar), het aantal halfvolwassen vrouwtjes (in tweede levensjaar) en het aantal volwassen vrouwtjes in het k-de jaar. Jaarlijkse metingen hebben geleid tot de volgende informatie: het aantal jonge vrouwtjes in het $(k+1)$-de jaar is 33% van het aantal volwassen vrouwtjes in het k-de jaar d.w.z. $j_{k+1} = 0.33v_k$. Ook overleefden 18% van de jonge vrouwtjes om het volgende jaar halfvolwassen vrouwtjes te worden d.w.z. $h_{k+1} = 0.18j_k$. Tenslotte overleefde 71% van de halfvolwassen vrouwtjes en 94% van de volwassen vrouwtjes het volgend jaar om volwassen vrouwtjes te worden resp. blijven m.a.w.

$$v_{k+1} = 0.71h_k + 0.94v_k.$$

De cruciale vraag die de onderzoekers zich stelden was: zal de gevlekte uil overleven?

Bovenstaande informatie kan geschreven worden in de vorm van een zgn. discreet lineair dynamisch systeem d.w.z. $p_{k+1} = Ap_k$, waarbij

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ 0.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad p_k = \begin{pmatrix} j_k \\ h_k \\ v_k \end{pmatrix}.$$

De vraag is dus: wat gebeurt er met p_k als $k \to \infty$.

Merk op dat $p_{k+1} = Ap_k = A^2_{p_{k-1}} = \ldots = A^k p_1$. De vraag die we dus moeten onderzoeken is: wat gebeurt er met A^k als $k \to \infty$? Daartoe berekenen we de eigenwaarden van A: deze zijn (afgerond op vier decimalen) $c_1 = 0.9836$, $c_2 = -0.0218 + 0.2059i$ en $c_3 = -0,0218 - 0,2059i$. Omdat ze allen verschillend zijn, bestaat er volgens stelling 4.2.6 een inverteerbare complexe matrix T met $T^{-1}AT = D$, waarbij D de diagonaalmatrix is met c_1, c_2, c_3 op de diagonaal. Dus $A = TDT^{-1}$ en dus met 4.2.7 $A^k = TD^kT^{-1}$ voor alle $k \geq 1$. Omdat $|c_i| < 1$ voor iedere i gaat $|c_i^k| \to 0$ als $k \to \infty$ en dus $D^k \to 0$ als $k \to \infty$. We zien dus dat

$$v_{k+1} = A^k v_1 = TD^kT^{-1}v_1 \to 0 \text{ als } l \to \infty$$

m.a.w. de gevlekte uil sterft uit!

De Fibonacci rij

De Fibonacci rij is de volgende rij getallen

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

De rij wordt beschreven door de regels

$$a_0 = 1, a_1 = 1 \text{ en } a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{ voor alle } n \geq 0.$$

Vraag: Kun je een formule geven voor a_n?

Omdat een term uit de rij bepaald is door de twee voorafgaande termen kunnen we dit probleem als volgt opvatten als een (discreet) dynamisch systeem:

Definieer $v_n := \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$ als de toestandsvector van het systeem. Dan geldt

$$v_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} + a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

m.a.w.

$$v_{n+1} = Av_n, \text{ waarbij } A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Net zoals in het vorige voorbeeld krijgen we dan $v_n = A^n v_0$, waarbij $v_0 = \binom{1}{1}$. De eigenwaarden van A zijn

$$c_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \text{ (de \textit{gulden snede})} \quad \text{en} \quad c_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}).$$

De bijbehorende eigenvectoren zijn

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dus als we nemen $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, dan geldt volgens stelling 4.2.6 dat

$$T^{-1}AT = D, \text{ waarbij } D = \begin{pmatrix} c_1 & \\ & c_2 \end{pmatrix}.$$

Dan volgt uit 4.2.9 dat $A^n = T \begin{pmatrix} c_1^n & \\ & c_2^n \end{pmatrix} T^{-1}$ en dus

$$v_n = A^n v_0 = T \begin{pmatrix} c_1^n & \\ & c_2^n \end{pmatrix} T^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De waarden voor T, c_1 en c_2 invullend geeft dan dat a_n, welke de tweede component van v_n is, gelijk is aan

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) \text{ voor alle } n \geq 0!$$

b) Stochastische matrices

Bij veel dynamische systemen heeft de matrix A de eigenschap dat alle elementen van A niet-negatief zijn en dat in iedere kolom de som der elementen gelijk is aan 1. In dit geval noemt men A vaak een *stochastische matrix*: de rijen en kolommen van A worden geïdentificeerd met toestanden en het element A_{ij} geeft de kans aan waarmee het systeem van toestand j naar toestand i over gaat (let op de volgorde). Omdat het systeem vanuit toestand j ergens naartoe moet, geldt $\sum_{i=1}^{n} A_{ij} = 1$, dus de som over de j-de kolom is 1. In dit geval laat zich aantonen dat 1 altijd een eigenwaarde is en dat alle eigenwaarden absolute waarde ≤ 1 hebben.

Onder zekere voorwaarden (waaraan meestal voldaan is) geldt zelfs dat er op schalingen na een unieke eigenvector met eigenwaarde 1 bestaat en dat alle andere eigenwaarden van absolute waarde < 1 zijn. De precieze resultaten staan bekend als *stellingen van Perron*[1] *en Frobenius*[2] over niet-negatieve matrices.

[1]Oskar Perron, 1880-1975, Duitse wiskundige
[2]Georg Frobenius, 1849-1917, Duitse wiskundige

Als we voor zo'n systeem een basis uit eigenvectoren zo kiezen dat de eerste basisvector de eigenvector $v = (v_1\ v_2\ \dots\ v_n)^t$ met eigenwaarde 1 is, volgt dat D^m voor grote m naar de matrix D_∞ gaat waarbij het $(1,1)$-element 1 is en alle andere elementen 0 zijn. Maar dan gaat A^m naar

$$A_\infty = T \cdot D_\infty \cdot T^{-1} = T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot T^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} v_1 & 0 & \dots & 0 \\ v_2 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ v_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} s_1 v_1 & s_2 v_1 & \dots & s_n v_1 \\ s_1 v_2 & s_2 v_2 & \dots & s_n v_2 \\ & & \ddots & \\ s_1 v_n & s_2 v_n & \dots & s_n v_n \end{pmatrix}$$

waarbij $(s_1, \dots, s_n)$ de elementen in de eerste rij van T^{-1} zijn.

Men gaat echter eenvoudig na, dat voor een stochastische matrix A ook de machten A^2, A^3 enz. stochastische matrices zijn, want dit zijn de kansen op overgangen in 2, 3 enz. stappen. I.h.b. is dus ook de limiet A_∞ een stochastische matrix. Dit betekent dat alle kolommen van A_∞ som 1 moeten hebben en dus geldt

$$s_1 = s_2 = \dots = s_n = (\sum_{i=1}^{n} v_i)^{-1}.$$

Als we dus de eigenvector v al zo normeren dat $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ is, dan geldt $s_1 = s_2 = \dots = s_n = 1$ en we vinden

$$A_\infty = \begin{pmatrix} v_1 & v_1 & \dots & v_1 \\ v_2 & v_2 & \dots & v_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_n & v_n & \dots & v_n \end{pmatrix}$$

dus is A_∞ een matrix waarin alle kolommen gelijk zijn.

Bij een dynamisch systeem met zo'n stochastische matrix A zal dus iedere begintoestand $(b_1\ b_2\ \dots\ b_n)^t$ uiteindelijk naar dezelfde evenwichtstoestand streven (tot op een schaling na), namelijk

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_1 & \dots & v_1 \\ v_2 & v_2 & \dots & v_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_n & v_n & \dots & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = n(\sum_{i=1}^{n} b_i) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Verspreiding van de Euro munten

Begin 2002 zijn de Euro munten geïntroduceerd en toen vroeg men zich af, hoe de verspreiding van de munten uit de verschillende landen gemodelleerd zou kunnen worden. Er waren inderdaad wiskundige onderzoeksgroepen bezig, die regelmatig *Euro scouts* bericht lieten geven hoeveel van de verschillende munten ze op een gegeven moment in hun portemonnee hadden om zo de verdere verspreiding te kunnen voorspellen.

In een vereenvoudigd model kunnen we *Euroland* splitsen in Nederland, België, Luxemburg en de rest. Om het proces van de verspreiding van de munten te beschrijven, moeten we alleen maar afschatten, hoeveel munten in een jaar vanuit een land naar een ander land gaan en hoeveel er in het land blijven.

We beschouwen de verspreiding van de munten nu als een systeem, waarbij de mogelijke toestanden de landen zijn, waar een munt zich bevindt. Als volgorde van de toestanden (en dus van de rijen en kolommen van de matrix A) leggen we vast: `NL`, `B`, `L`, rest. Voor de kansen van de overgangen schatten we nu (enigszins willekeurig) de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.03 & 0.006 \\ 0.05 & 0.8 & 0.02 & 0.003 \\ 0.05 & 0.05 & 0.9 & 0.001 \\ 0.2 & 0.05 & 0.05 & 0.99 \end{pmatrix}$$

De eerste kolom geeft bijvoorbeeld aan dat 70% van de munten uit Nederland in Nederland blijven, 5% naar België gaan, 5% naar Luxemburg en de resterende 20% naar andere landen. Andersom komen 10% van de Belgische munten naar Nederland (element a_{12}), 3% van de munten uit Luxemburg en 0.6% van de munten uit andere landen. Merk op dat we ter vereenvoudiging aannemen dat geen munten verdwijnen, hierdoor wordt de kolomsom inderdaad 1.

Als we nu willen weten waar de Nederlandse munten na k jaren terecht zijn gekomen, hoeven we alleen maar de vector $A^k e_1$ te bepalen (met $e_1 = (1\ 0\ 0\ 0)^t$), net zo $A^k e_2$ voor de Belgische munten enz. De kolommen van A^k geven dus de verdeling van de verschillende soorten munten na k jaar aan, de rijen de mix van munten in één land.

Voor de eigenwaarden van A vinden we nu (bij benadering)

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0.92, \quad c_3 = 0.81, \quad c_4 = 0.66$$

We zijn dus precies in de situatie van de stelling over stochastische matrices. De eigenvector voor de eigenwaarde $c_1 = 1$ die als som van zijn componenten 1 heeft is (op drie decimalen afgerond) $(0.030\ 0.025\ 0.037\ 0.908)^t$, en hieruit volgt dat

$$A^k \to \begin{pmatrix} 0.030 & 0.030 & 0.030 & 0.030 \\ 0.025 & 0.025 & 0.025 & 0.025 \\ 0.037 & 0.037 & 0.037 & 0.037 \\ 0.908 & 0.908 & 0.908 & 0.908 \end{pmatrix}$$

De Euro munten streven dus naar een evenwichtstoestand waarbij in ieder land dezelfde relatieve hoeveelheid munten uit ieder land terecht komen, maar in Nederland zijn uiteindelijk 3.0% van alle munten, in België 2.5%, in Luxemburg 3.7% en in de rest van de landen zitten 90.8% van de munten.

c) Het idee achter Google

Het probleem bij een zoekmachine voor het internet is niet zo zeer, om überhaupt documenten te vinden, die bij een zoekaanvraag (een *query*) passen, maar om de passende documenten in een volgorde te brengen zo dat de meest interessante documenten bovenaan staan.

Voor documenten die alle woorden uit een query bevatten, werden bij de vroege zoekmachines onder meer de volgende criteria voor de rangschikking gebruikt:

- Een korter document staat hoger in de lijst, want hoe langer een document hoe eerder kunnen de gezochte woorden er toevallig in voorkomen.
- Hoe dichter de woorden uit de query bij elkaar staan, hoe hoger staat het document in de lijst.
- Als de gezochte woorden meerdere keren voorkomen, wordt het document hoger geplaatst.

Met het snel toenemende aantal beschikbare documenten in het internet werden deze technieken steeds minder bevredigend, vaak moest men de interessante links diep in de lijst van resultaten zoeken.

Het succes van GOOGLE berust juist op een nieuwe manier van rangschikking die ertoe leidt dat in veel gevallen de meest interessante documenten ook op de eerste plaatsen in de lijst van gevonden documenten staan. Het idee van *Sergey Brin* en *Lawrence Page* was, de documenten volgens hun *relevantie* te rangschikken, waarbij ze relevantie als volgt beschrijven:

De relevantie van een document is evenredig met de som van de relevanties der documenten die erop verwijzen.

Dit lijkt in eerste instantie op een circulaire redenering, want om de relevantie van een document te bepalen, moeten we de relevanties van de documenten die erop verwijzen al kennen: Als bijvoorbeeld de documenten 2, 4 en 8 op document 1 verwijzen, de documenten 3, 5, 7 en 11 op 2 en de documenten 1, 4, 9 en 16 op 3, dan krijgen we een stelsel lineaire vergelijkingen als het volgende (waarbij we met r_i de relevantie van document i noteren en k de evenredigheidsfactor is):

$$\begin{aligned} r_1 &= k(r_2 + r_4 + r_8) \\ r_2 &= k(r_3 + r_5 + r_7 + r_{11} + r_{13}) \\ r_3 &= k(r_1 + r_4 + r_9 + r_{16}) \end{aligned}$$

Om bijvoorbeeld r_3 te berekenen, moeten we r_1 al kennen, maar hiervoor hebben we r_2 nodig die wederom van r_3 afhangt.

Maar met behulp van een geschikte matrix kunnen we uit deze vicieuze cirkel ontsnappen door het probleem naar een vraag over eigenwaarden te vertalen. Als de zoekmachine over N documenten in het internet kan zoeken, maken we een $N \times N$ matrix A, waarbij

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{als document } j \text{ naar document } i \text{ verwijst;} \\ 0 & \text{als document } j \text{ niet naar document } i \text{ verwijst.} \end{cases}$$

Voor de vector $r = (r_1\ r_2\ \ldots\ r_N)^t$ der relevanties geldt dan

$$r = k \cdot Ar \text{ d.w.z. } r \text{ is een eigenwaarde van } A.$$

De matrix A is een matrix waarin alle elementen ≥ 0 zijn, dit noemt men een *niet-negatieve* matrix. Voor dit soort matrices laat zich aantonen, dat een eigenvector voor de grootste eigenwaarde alleen maar positieve getallen bevat (of negatieve, maar dan kunnen we met -1 vermenigvuldigen). De eigenvectoren voor de andere eigenwaarden hebben zowel positieve als negatieve elementen.

Men definieert nu de relevantie van het i-de document als het element r_i in de eigenvector r van A voor de grootste eigenwaarde. Omdat we achteraf alleen maar relevanties gaan vergelijken, speelt een schaling van r met een positieve factor geen rol.

We merken nog op dat er slimme numerieke methoden bestaan om voor gigantisch grote matrices die *dun bezet* zijn (d.w.z. waarvoor in iedere rij en kolom slechts een paar elementen ongelijk aan 0 zijn) eigenwaarden en eigenvectoren te bepalen.

Een 'eerlijke' tabel voor de eredivisie

Het idee om met behulp van de componenten van een eigenvector een rangschikking te bepalen, laat zich ook op andere vraagstukken toepassen. Als voorbeeld kijken we hier naar het bepalen van een tabel voor de eredivisie.

We nemen aan dat de verschillende teams verschillende speelsterktes $r_1, r_2, \ldots, r_{18}$ hebben. De grondgedachte is nu dat het moeilijker (en dus waardevoller) is om tegen een sterke ploeg te winnen dan tegen een zwakke club. Daarom is een overwinning van het i-de team niet altijd 3 punten waard, maar $3r_i$ punten en een gelijkspel r_i punten (de gewone punten worden dus met de speelsterkte vermenigvuldigd). De analoge uitspraak met het principe achter GOOGLE is nu:

De sterkte van een team is evenredig met het aantal behaalde punten, telkens gewogen met de sterkte van het team waar de punten tegen gewonnen zijn.

We noteren nu in de matrix A met het element a_{ij} het aantal punten dat team i tegen team j heeft gewonnen. Voor de vector $r = (r_1\ r_2\ \ldots\ r_{18})^t$ van speelsterktes geldt dan net als boven dat $r = k \cdot Ar$.

Ook in dit geval is A een niet-negatieve matrix, dus heeft de eigenvector voor de grootste eigenwaarde slechts positieve componenten. Als we de eigenvector zo normeren, dat de som der componenten juist het aantal punten is dat van alle teams samen in de gewone tabel behaald werd, kunnen we onze alternatief bepaalde tabel goed met de gewone tabel vergelijken. Dit doen we voor het seizoen 2006/2007. De matrix A ziet er als volgt uit, waarbij de teams in de volgorde van de afsluitende gewone tabel zijn aangegeven:

$$A = \begin{pmatrix}
0 & 3 & 3 & 3 & 4 & 3 & 4 & 6 & 4 & 3 & 4 & 6 & 4 & 6 & 6 & 4 & 6 & 6 \\
3 & 0 & 2 & 4 & 3 & 3 & 6 & 6 & 6 & 4 & 6 & 3 & 3 & 6 & 6 & 4 & 4 & 6 \\
3 & 2 & 0 & 1 & 6 & 4 & 1 & 4 & 6 & 4 & 6 & 6 & 6 & 4 & 6 & 3 & 6 & 4 \\
3 & 1 & 4 & 0 & 6 & 1 & 3 & 4 & 4 & 6 & 4 & 4 & 3 & 1 & 4 & 6 & 6 & 6 \\
1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 4 & 1 & 6 & 4 & 4 & 4 & 3 & 6 & 3 & 6 & 4 \\
3 & 3 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 6 & 1 & 4 & 4 & 6 & 6 & 1 & 6 \\
1 & 0 & 4 & 3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 6 & 6 & 1 & 4 & 6 & 4 & 4 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 6 & 6 & 0 & 0 & 4 & 4 & 3 & 3 & 6 & 3 & 6 & 4 & 3 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 3 & 6 & 0 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 3 & 6 & 4 & 4 \\
3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 3 & 0 & 6 & 4 & 3 & 4 & 0 & 1 & 6 & 6 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 6 & 6 & 1 & 4 & 6 & 6 & 4 \\
0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 6 & 4 & 4 & 1 & 3 & 4 \\
1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 3 & 3 & 6 \\
0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 1 & 4 & 0 & 4 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 6 & 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 3 & 4 & 3 \\
1 & 1 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 3 & 3 & 3 & 0 & 1 & 4 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 4 & 1 & 4 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

De grootste eigenwaarde van A is (afgerond) 40.998 en als we de bijhorende eigenvector zo normeren dat de som der componenten hetzelfde is als de som der gewoon behaalde punten, namelijk 848, dan vinden we de volgende tabel (met de plaats in de gewone tabel tussen haakjes):

plaats	team	speelsterkte	punten
1. (2.)	Ajax Amsterdam	78.28	75
2. (1.)	PSV Eindhoven	76.90	75
3. (3.)	AZ Alkmaar	73.28	72
4. (4.)	FC Twente	67.91	66
5. (6.)	Roda JC Kerkrade	55.56	54
6. (7.)	Feyenoord Rotterdam	53.82	53
7. (5.)	sc Heerenveen	53.21	55
8. (8.)	FC Groningen	49.51	51
9. (9.)	FC Utrecht	47.37	48
10. (10.)	NEC Nijmegen	42.92	44
11. (12.)	Vitesse Arnhem	38.10	38
12. (11.)	NAC Breda	37.90	43
13. (13.)	Sparta Rotterdam	37.06	37
14. (14.)	Heracles Almelo	34.90	32
15. (16.)	Excelsior Rotterdam	30.57	30
16. (15.)	Willem II Tilburg	28.45	31
17. (17.)	RKC Waalwijk	25.25	27
18. (18.)	ADO Den Haag	17.03	17

Het valt op dat de m.b.v. speelsterkte berekende punten niet sterk van de daadwerkelijk behaalde punten afwijken, dit geeft aan dat de zwakkere ploegen inderdaad vooral tegen zwakke teams punten halen, terwijl de sterke teams ook van andere sterke teams winnen.

Historische opmerkingen

1. Het begrip *eigenwaarde* is niet afkomstig uit de matrixtheorie maar komt voor het eerst voor in werk van Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) tussen 1740 en 1750 waarin hij stelsels lineaire differentiaalvergelijkingen bestudeert (hij onderzocht de beweging van een snaar waaraan een aantal gewichten hingen). Om zo'n stelsel

$$\frac{d^2y_i}{dt^2} + \sum_{k=1}^{3} a_{ik}y_k = 0, \quad i = 1,2,3$$

te bestuderen vermenigvuldigde d'Alembert de i-de vergelijking met een (nog te bepalen) constante v_i, voor iedere i, en telde de vergelijkingen op. Dit geeft

$$\sum_{i=1}^{3} v_i \frac{d^2y_i}{dt^2} + \sum_{i,k=1}^{3} v_i a_{ik} y_k = 0.$$

Als de v_i's zo gekozen worden dat $\sum_{i=1}^{3} v_i a_{ki} + \lambda v_k = 0$ voor zekere λ, voor $k = 1,2,3$ m.a.w. de vector (v_1, v_2, v_3) is een eigenvector behorende bij de eigenwaarde $-\lambda$ voor de matrix $A = (a_{ki})$, dan voert de substitutie $u = v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3$ het stelsel over in de volgende vergelijking

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \lambda u = 0.$$

Deze vergelijking kan eenvoudig worden opgelost voor ieder voor de λ's die aan de derdegraads vergelijking $\det(\lambda I_3 - A) = 0$ voldoen. Bij ieder van de drie λ_i's vinden we zo een u_i en met deze drie u_i's kunnen dan y_1, y_2 en y_3 bepaald worden.

Eigenwaarden speelden ook een fundamentele rol in de quantummechanica rond 1925: de elektronen in een atoom kunnen niet alle mogelijke energietoestanden hebben, maar kunnen slechts bepaalde discrete waarden aannemen (de bekende "schillen" rond een proton). Deze discrete waarden bleken de eigenwaarden van een zekere matrix te zijn, de zgn. Hamiltoniaan (in de colleges *quantummechanica* wordt hierop uitvoerig ingegaan).

2. Het idee van Brin en Page om de documenten die aan een query voldoen met behulp van de relevanties te rangschikken die de componenten van een zekere eigenvector zijn, was al veel eerder door T.H. Wei (1952) en M.G. Kendall (1955) voorgesteld om rankings te bepalen. Brin en Page hebben dit idee echter voor het eerst op zoekmachines toegepast.