Hoofdstuk 3

Determinanten

3.1 Inleiding

In deze paragraaf bekijken we het stelsel $Ax = b$ waarbij A een $n \times n$ matrix is. We zagen in voorgaande dat, als A inverteerbaar is er precies één oplossing van dit stelsel bestaat. Men heeft eeuwen geprobeerd oplossingsformules voor zulke stelsels te vinden. Deze werden uiteindelijk gevonden in de 18-de eeuw en zijn beschreven door de regel van Cramer[1]. Het blijkt dat iedere x_i een breuk is met een gemeenschappelijke noemer die een ingewikkelde uitdrukking is in de matrix elementen van A. Deze gemeenschappelijke noemer kreeg de naam "determinant van de matrix A". De determinant is een van de meest wonderlijke objecten, of zoals Jean Dieudonné (1906-1992) het noemt de "Deus ex machina", van de lineaire algebra. Hij duikt overal op de meest onverwachte plaatsen op en is een onmisbaar gereedschap geworden in de meeste wetenschappen.

Om een idee te krijgen hoe de oplossingsformules van de x_i's eruit zien gaan we eerst wat eenvoudige gevallen bekijken:

$n = 1$**:**

$$ax = b$$

Dan is $x = \frac{b}{a}$ de oplossingsformule, als $a \neq 0$.

$n = 2$**:**

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

We maken een herleiding tot het geval "$n = 1$" door x_2 te elimineren: vermenigvuldig de eerste vergelijking met a_{22} en de tweede met a_{12} en trek het resultaat van de eerste af. Je vindt dan

$$(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2.$$

Dus $\qquad x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}$, als de noemer niet nul is.

Net zo volgt $\quad x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}$, als de noemer niet nul is.

[1]Gabriel Cramer, 1704-1752, Switserse wiskundige

Voor $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ definiëren we dan: de *determinant* van A als

$$\det A := a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}$$

m.a.w. $\det A$ is de gemeenschappelijke noemer van de breuken in de oplossingsformules voor x_1 en x_2.

Kijkend naar de oplossingsformule voor x_1 zien we dat ook de teller van deze formule een determinant is nl.

$$\det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix},$$

d.w.z. de determinant van de matrix ontstaan uit A door de eerste kolom van A te vervangen door de rechterzijde van het stelsel vergelijkingen, dus door de kolom $\binom{b_1}{b_2}$.

Net zo zien we dat de teller van de oplossingsformule voor x_2 precies gelijk is aan

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix},$$

m.a.w. de determinant van de matrix ontstaan uit A door de tweede kolom van A te vervangen door $\binom{b_1}{b_2}$.

Keer nu even terug naar het geval $n = 1$. Dan zie je dat als je $\det(a) = a$ definieert, dan is de oplossingsformule voor x:

$$x = \frac{\det(b)}{\det(a)}$$

m.a.w. ook hier is de teller ontstaan door de eerste (en tevens enige) kolom van de matrix (a) te vervangen door de kolom (b) en dan de determinant “te nemen”. Samengevat: we vinden dezelfde structuur als bij $n = 2$!

De vraag is nu: zou deze structuur ook voor $n = 3$ (en hoger) gelden?

We kijken naar het geval $n = 3$, m.a.w. we bekijken het stelsel

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned}$$

We willen proberen een herleiding tot het geval $n = 2$ te maken, m.a.w. we gaan x_3 elimineren.

Vermenigvuldig daartoe de eerste vergelijking met a_{23} en de tweede met a_{13} en trek dan de tweede van de eerste verkregen vergelijking af. Dit geeft

$$(a_{23}a_{11} - a_{13}a_{21})x_1 + (a_{23}a_{12} - a_{13}a_{22})x_2 = a_{23}b_1 - a_{13}b_2.$$

Noem de nieuwe coëfficiënten van x_1 en x_2 resp. a'_{11} en a'_{12} en het nieuwe rechterlid b'_1, d.w.z.

$$a'_{11} = a_{23}a_{11} - a_{13}a_{21}, \quad a'_{12} = a_{23}a_{12} - a_{13}a_{22}, \quad b'_1 = a_{23}b_1 - a_{13}b_2.$$

Net zo, vermenigvuldig de eerste vergelijking met a_{33}, de derde met a_{13} en trek dan de derde van de eerste af. Dit geeft

$$(a_{33}a_{11} - a_{13}a_{31})x_1 + (a_{33}a_{12} - a_{13}a_{32})x_2 = a_{33}b_1 - a_{13}b_3.$$

Noem de nieuwe coëfficiënten van x_1 en x_2 resp. a'_{21} en a'_{22} en het nieuwe rechterlid b'_2, d.w.z.

$$a'_{21} = a_{33}a_{11} - a_{13}a_{31}, \quad a'_{22} = a_{33}a_{12} - a_{13}a_{32}, \quad b'_2 = a_{33}b_1 - a_{13}b_3.$$

We vinden dan het volgende stelsel vergelijkingen in twee onbekenden:

$$\begin{aligned} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 &= b'_1 \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 &= b'_2 \end{aligned}$$

Aannemende dat $a'_{11}a'_{22} - a'_{12}a'_{21} \neq 0$ vinden we dan volgens de oplossingsformules voor het geval $n = 2$:

$$x_1 = \frac{b'_1a'_{22} - b'_2a'_{12}}{a'_{11}a'_{22} - a'_{21}a'_{12}} \quad \text{en} \quad x_2 = \frac{b'_2a'_{11} - b'_1a'_{21}}{a'_{11}a'_{22} - a'_{21}a'_{12}}.$$

Uitschrijven van de teller en noemer van x_1 geeft:

$$\begin{aligned} b'_1a'_{22}-b'_2a'_{12} &= a_{13}(b_1a_{22}a_{23}+b_3a_{23}a_{12}+b_2a_{13}b_{32}-b_1a_{23}a_{32}-b_2a_{12}a_{33}-b_3a_{22}a_{13}) \\ a'_{11}a'_{22}-a'_{12}a'_{21} &= a_{13}(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{31}a_{23}a_{12}+a_{21}a_{13}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{31}a_{22}a_{13}) \end{aligned} \tag{3.1}$$

In de formule van x_1 vallen de beide factoren a_{13} tegen elkaar weg. De noemer van de overblijvende formule voor x_1 noemen we dan, na analogie met de gevallen $n = 1$ en $n = 2$, de determinant van de coëfficiënten matrix A m.a.w.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} := a_{11}a_{22}a_{33}+a_{31}a_{13}a_{12}+a_{21}a_{13}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{31}a_{22}a_{13}.$$

De vraag is nu: geldt dezelfde soort oplossingsformule als bij $n = 2$ (en $n = 1$) m.a.w. is de teller van de formule $x_1 = \frac{T}{\det A}$ te schrijven als de determinant van de matrix ontstaan uit A door de eerste kolom van A te vervangen door de rechterzijde $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ van het stelsel vergelijkingen. Kijkend naar de formules 3.1 zien we dat de teller T inderdaad uit $\det A$ is ontstaan door a_{11} te vervangen door b_1, a_{21} door b_2 en a_{31} door b_3, m.a.w. het antwoord op onze vraag is Ja!

Eenzelfde rekenpartij levert inderdaad dat

$$x_i = \frac{\det A_i(b)}{\det A}$$

waarbij $A_i(b)$ de matrix is ontstaan uit A door de i-de kolom van A te vervangen door de rechterzijde $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, voor $i = 1, 2, 3$.

Voor het geval $n = 3$ hebben we dus ook oplossingsformules!

Hoe gaan we nu verder? Bekijk daartoe opnieuw de teller T van de formule voor x_1, d.w.z.

$$\begin{aligned} T = \det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= b_1a_{22}a_{33}+b_3a_{23}a_{12}+b_2a_{13}a_{32} - b_1a_{23}a_{32}-b_2a_{12}a_{33}-b_3a_{22}a_{13} \\ &= b_1(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}) + b_2(a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33}) + b_3(a_{23}a_{12}-a_{22}a_{13}). \end{aligned}$$

Bekijk de uitdrukkingen die achter b_1 resp. b_2 resp. b_3 staan:

b_1 : $a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} =$ de determinant van de 2×2 matrix ontstaan uit A de eerste rij en eerste kolom van A te schrappen.

b_2 : $a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} =$ $-$ de determinant van de 2×2 matrix ontstaan uit A door de tweede rij en eerste kolom van A te schrappen.

b_3 : $a_{23}a_{12} - a_{22}a_{13} =$ de determinant van de 2×2 matrix ontstaan uit A door de derde rij en de eerste kolom van A te schrappen.

Samengevat zien we

$$\det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} b_i \det A_{(i1)}$$

waarbij $A_{(i1)}$ de 2×2 matrix is ontstaan uit A door de i-de rij en eerste kolom van A te schrappen. Als we nu voor b_i invullen a_{i1} m.a.w. vervang b_1 door a_{11}, b_2 door a_{21} en b_3 door a_{31}, dan zien we

$$\det A = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{(i1)}. \tag{3.2}$$

We zien dus dat de determinant van de 3×3 matrix A hebben uitgedrukt m.b.v. de elementen uit de eerste kolom van A en de determinanten van zekere 2×2 matrices. Dit geeft ons een manier om de determinant van een $n \times n$ matrix inductief te definiëren.

3.2 Definitie en eigenschappen van de determinant

In deze paragraaf zullen we voor iedere $n \times n$ matrix de determinant ervan definiëren en verschillende eigenschappen ervan geven. Wiskundigen hebben zo'n twee eeuwen met determinanten geworsteld alvorens de theorie die nu behandeld gaat worden helemaal compleet was. Het zal de lezer dan ook niet verbazen dat sommige bewijzen nogal technisch zijn. Om de lijn van het verhaal niet uit het oog te verliezen zou de lezer het bewijs van stelling 3.2.5 even over kunnen slaan (maar bij de tweede doorgang natuurlijk wel lezen).

Definitie 3.2.1 We definiëren de determinant van een $n \times n$ matrix met inductie naar n:

i) Als $n = 1$ en $A := (a)$ definiëren we: $\det A := a$.

ii) Zij nu $n \geq 2$ en neem aan dat we voor $(n-1) \times (n-1)$ matrices de determinant ervan al gedefinieerd hebben.
Voor $1 \leq i, j \leq n$ zij $A_{(ij)}$ de matrix ontstaan uit A door de i-de rij en j-de kolom van A te schrappen. Dus $A_{(ij)}$ is een $(n-1) \times (n-1)$ matrix en dus is vanwege de inductieaanname $\det A_{(ij)}$ een welgedefinieerd reëel getal welke de *minor* van A op de plaats (i, j) heet.

iii) Definieer nu

$$\widetilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j} \det A_{(ij)}.$$

Dit element uit $\mathbb{R}$ heet de *cofactor* van A op de plaats (i, j).

iv) Naar aanleiding van formule 3.2 uit sectie 3.1 definiëren we nu de *determinant* $\det A$ van een $n \times n$ matrix A door

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}\widetilde{a}_{i1} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}A_{(i1)}$$

waarbij $\widetilde{a}_{i1}$ de cofactor van A op de plaats (i,j) is.

Opgave 3.2.2 Laat zien dat uit definitie 3.2.1 volgt dat $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$.

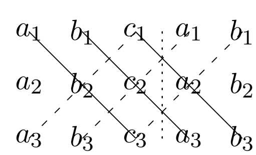
Voorbeeld 3.2.3 Zij $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$. Dan geldt:

$$\begin{aligned}
A_{(11)} &= \begin{pmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \text{ dus } \widetilde{a}_{11} = (-1)^{1+1}\det \begin{pmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix} = b_2c_3 - b_3c_2; \\
A_{(21)} &= \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \text{ dus } \widetilde{a}_{21} = (-1)^{2+1}\det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix} = b_1c_3 - b_3c_1; \\
A_{(31)} &= \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}, \text{ dus } \widetilde{a}_{31} = (-1)^{3+1}\det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} = b_1c_2 - b_2c_1.
\end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$\det A = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1).$$

Een mogelijke manier om het berekenen van de determinant van een 3×3 matrix makkelijk te onthouden is het volgende plaatje:



Schrijf de eerste twee kolommen nog eens rechts naast de matrix en teken dan de drie diagonalen (doorgetrokken lijnen) en de drie dwarsdiagonalen (stippellijnen). De determinant is dan de som van de producten op de drie diagonalen min de producten op de drie dwarsdiagonalen.

Waarschuwing: Dit schema voor 3×3 matrices geldt niet voor grotere matrices.

Lemma 3.2.4 Zij I_n de $n \times n$ eenheidsmatrix. Dan geldt $\det I_n = 1$.

Bewijs. Dit zien we rechtstreeks met volledige inductie in. Voor $n = 1$ is dit juist de definitie van de determinant. Zij nu $n \geq 2$ en neem aan dat al bewezen is dat $\det I_{n-1} = 1$. Er geldt $\det I_n = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}\widetilde{a}_{i1} = a_{11}\widetilde{a}_{i1} = 1.(-1)^2 \det I_{n-1} = 1$. □

We leiden nu een aantal eigenschappen af waaraan determinanten voldoen. Om deze eigenschappen te kunnen beschrijven voeren we eerst wat handige notaties in.

Notatie: De rijen van een $n \times n$ matrix A noteren we als $a_1, \dots, a_n$ en i.p.v. $\det A$ schrijven we soms $d(A)$ of $d(a_1, \dots, a_n)$. Verder als $1 \leq i \leq n$ en b is een willekeurige rij van lengte n, dan noteren we de matrix die ontstaat uit A door de i-de rij van A te vervangen door b als $A_i[b]$.

Stelling 3.2.5 Zij A een $n \times n$ matrix, laten b en c rijen van lengte n zijn en noteer met $D_i(a)$, P_{ij} en $E_{ij}(c)$ de elementaire matrices zo als in sectie 2.4 gedefinieerd. Dan geldt:

D1. $\det(A_i[b+c]) = \det(A_i[b]) + \det(A_i[c])$.

D2. $\det D_i(a)A = a \det A$ voor iedere a in $\mathbb{R}$, m.a.w. de determinant van een matrix wordt met a vermenigvuldigd, als een rij met a vermenigvuldigd wordt.

D3. $\det A = 0$ als A twee gelijke rijen bevat.

D4. $\det P_{ij}A = -\det A$, voor alle $i \neq j$, m.a.w. de determinant van een matrix verandert van teken als je twee rijen ervan verwisselt.

D5. $\det E_{ij}(c)A = \det A$, voor alle $i \neq j$ en alle c in $\mathbb{R}$, m.a.w. de determinant van een matrix verandert niet als je bij de i-de rij c keer de j-de rij optelt.

Bewijs. We bewijzen alle eigenschappen met inductie naar n. Als $n = 1$ zijn de beweringen D1 en D2 duidelijk en ook voor $n = 2$ gaat men (door expliciet uitschrijven van de determinant) eenvoudig na dat D1 t/m D5 waar zijn. Zij nu $n > 2$ en neem aan dat we de beweringen D1 t/m D5 voor $n - 1$ bewezen hebben.

D1. Schrijf $B := A_i[b]$, $C := A_i[c]$ en $D := A_i[b+c]$. We moeten dan bewijzen dat $\det D = \det B + \det C$. Bekijk

$$\det D = d_{i1}\widetilde{d}_{i1} + \sum_{h=1,\, h\neq i}^{n} d_{h1}\widetilde{d}_{h1}. \tag{3.3}$$

Merk nu op dat als $h \neq i$ de matrix $D_{(h1)}$ aan de inductieaanname voldoet (ga na!). Hieruit volgt dat $\det D_{(h1)} = \det B_{(h1)} + \det C_{(h1)}$. Door met $(-1)^{h+1}$ te vermenigvuldigingen vinden we

$$\widetilde{d}_{h1} = \widetilde{b}_{h1} + \widetilde{c}_{h1} \text{ als } h \neq i. \tag{3.4}$$

Verder zien we dat als $h \neq i$ dan

$$d_{h1} = b_{h1} = c_{h1} (= a_{h1}) \tag{3.5}$$

want A, B, C en D verschillen alleen maar in de i-de rij. Uit 3.4 en 3.5 volgt dus

$$\sum_{h=1,\, h\neq i}^{n} d_{h1}\widetilde{d}_{h1} = \sum_{h=1,\, h\neq i}^{n} d_{h1}(\widetilde{b}_{h1} + \widetilde{c}_{h1}) = \sum_{h=1,\, h\neq i} b_{h1}\widetilde{b}_{h1} + \sum_{h=1,\, h\neq i}^{n} c_{h1}\widetilde{c}_{h1}. \tag{3.6}$$

Aan de andere kant geldt voor $h = i$ dat $d_{i1} = b_{i1} + c_{i1}$ en $\widetilde{d}_{i1} = \widetilde{b}_{i1} = \widetilde{c}_{i1} (= \widetilde{a}_{i1})$ en dus

$$d_{i1}\widetilde{d}_{i1} = (b_{i1} + c_{i1})\widetilde{d}_{i1} = b_{i1}\widetilde{b}_{i1} + c_{i1}\widetilde{c}_{i1}. \tag{3.7}$$

Uit 3.3, 3.6 en 3.7 volgt D1.

D2. Deze eigenschap wordt als oefening aan de lezer overgelaten.

D3. Laat $1 \leq i < j \leq n$ en neem aan dat $a_j = a_i$. Zij $h \neq i$ en $h \neq j$. Volgens de inductieaanname is $\det A_{(h1)} = 0$, want $A_{(h1)}$ bevat twee gelijke rijen. Dus $\widetilde{a}_{(h1)} = 0$ en dus $\det A = a_{i1}\widetilde{a}_{i1} + a_{j1}\widetilde{a}_{j1} = a_{i1}(\widetilde{a}_{i1} + \widetilde{a}_{j1})$ want $a_{i1} = a_{j1}$. We moeten dus bewijzen dat geldt

$$\widetilde{a}_{i1} + \widetilde{a}_{j1} = 0. \tag{3.8}$$

Voor $1 \leq p \leq n$ definiëren we nu a'_p als de rij van lengte $n-1$ ontstaan uit a_p door het eerste element weg te laten. Dan geldt $\widetilde{a}_{i1} + \widetilde{a}_{j1} = (-1)^{i+1} d_1 + (-1)^{j+1} d_2$ waarbij

$$d_1 := d(a'_1, \ldots, a'_{i-1}, a'_{i+1}, \ldots, a'_{j-1}, a'_i, a'_{j+1}, \ldots, a'_n) \quad \text{en}$$
$$d_2 := d(a'_1, \ldots, a'_{i-1}, a'_i, a'_{i+1}, \ldots, a'_{j-1}, a'_{j+1}, \ldots, a'_n).$$

Merk op dat de matrix met de rijen als in d_2 ontstaan is uit de matrix met rijen als in d_1 door $(j-1)-i$ verwisselingen uit te voeren, namelijk a'_i gaat van de $(j-1)$-ste plaats naar de i-de plaats en iedere verwisseling geeft volgens de inductieaanname voor D4 een minteken. Dus $d_2 = (-1)^{j-1-i} d_1$ en dus $\widetilde{a}_{i1} + \widetilde{a}_{j1} = (-1)^{i+1} d_1 + (-1)^{j+1}(-1)^{j-1-i} d_1 = 0$, waarmee 3.8 bewezen is en dus D3.

D4. Eerst een notatie: als b en c willekeurige rijen zijn van lengte n en $i \neq j$ dan schrijven we $d[b, c]$ i.p.v. $d(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots a_{j-1}, c, a_{j+1}, \ldots, a_n)$. Volgens D3 geldt dan $d[b+c, b+c] = 0$. Pas dan D1 tweemaal toe. Dit levert

$$\begin{aligned} 0 = d[b+c, b+c] &= d[b, b+c] + d[c, b+c] \\ &= d[b, b] + d[b, c] + d[c, b] + d[c, c] \\ &= d[b, c] + d[c, b] \text{ (vanwege D3).} \end{aligned}$$

en hieruit volgt D4.

D5. Dit kunnen we zonder inductie rechtstreeks uit de reeds bewezen eigenschappen afleiden. Volgens 2.4.12 geldt $E_{ij}(c)A = A_i[a_i + ca_j]$. Dus met D1, D2 en D3 volgt

$$\begin{aligned} \det E_{ij}(c)A &= \det(A_i[a_i]) + \det(A_i[ca_j]) = \det A + c \det(A_i[a_j]) \\ &= \det A + c.0 = \det A. \end{aligned}$$

□

Opgave 3.2.6 Leid uit D2, D4 en D5 de volgende eigenschappen af:

i) $\det E_{ij}(a) = 1$, $\det P_{ij} = -1$ en $\det D_i(a) = a$.

ii) $\det EB = \det E \det B$ voor iedere $n \times n$ matrix B en iedere elementaire matrix E.

iii) Leid uit ii) af met inductie naar s dat

$$\det E_1 \ldots E_s B = \det E_1 \ldots \det E_s . \det B = \det(E_1 \ldots E_s). \det B$$

voor ieder stel elementaire matrices $E_1, \ldots, E_s$.

De eigenschappen D2, D4 en D5 beschrijven hoe een determinant zich gedraagt onder vegen. Het uitrekenen van een determinant gaat in de praktijk vaak als volgt: men "veegt" m.b.v. de Gauss eliminatie methode een matrix op *bovendriehoeks vorm* d.w.z. $a_{ij} = 0$ voor alle $i > j$ en gebruikt dan het volgende resultaat

Stelling 3.2.7 Zij $A = (a_{ij})$ een bovendriehoeks matrix. Dan geldt $\det A = a_{11}.a_{22} \ldots a_{nn}$ m.a.w. $\det A$ is het product der diagonaal elementen (een zelfde resultaat geldt voor een *onderdriehoeks matrix* d.w.z. $a_{ij} = 0$ voor alle $i < j$).

Bewijs. Met inductie naar n. Juist voor $n = 1$. Laat nu $n \geq 2$ en neem aan dat de stelling al bewezen is voor iedere $(n-1) \times (n-1)$ bovendriehoeks matrix. Omdat A een bovendriehoeks matrix is geldt $a_{21} = a_{31} = \ldots = a_{n1} = 0$. Dus is volgens definitie 3.2.1

$\det A = a_{11}\widetilde{a}_{11} = a_{11}(-1)^{1+1}\det A_{(11)}$.
Maar $A_{(11))}$ is een bovendriehoeks matrix met op de diagonaal de elementen $a_{22}, \ldots, a_{nn}$. Dus geldt volgens de inductieaanname dat $\det A_{(11)} = a_{22} \ldots a_{nn}$ en dus $\det A = a_{11}\det A_{(11)} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$. □

Voorbeeld 3.2.8 Zij $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Bereken $\det A$.

Oplossing. Door tweemaal D5 te gebruiken vinden we $\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Dus $\det A = -2$ vanwege 3.2.7.

Een voor theoretische doeleinden belangrijke stelling maar ook een van de motivaties om naar zoiets als de determinant te kijken is:

Stelling 3.2.9 Zij A een $n \times n$ matrix. Dan geldt A is inverteerbaar d.e.s.d.a. $\det A \neq 0$.

Bewijs. i) Als A inverteerbaar is bestaan er volgens 2.4.11 elementaire matrices $E_1, \ldots, E_s$ zodanig dat $A = E_1E_2\ldots E_s$. Dan volgt uit opgave 3.2.6 iii), met $B = I_n$, dat $\det A = \det E_1 \ldots \det E_s$ en dus $\det A \neq 0$ vanwege 3.2.6 i).
ii) Neem nu aan dat A niet inverteerbaar is. We gebruiken inductie over n. Voor $n = 1$ is $A = (0)$ (anders zou A wel inverteerbaar zijn), dus is $\det A = 0$. Zij nu $n \geq 2$ en neem aan de bewering is voor $n-1$ bewezen. Als de eerste kolom van A de nulkolom is, dan volgt meteen uit definitie 3.2.1 dat $\det A = 0$. Neem dus aan dat de eerste kolom van A niet de nulkolom is. Zoals aangetoond in het bewijs van 2.4.11 kunnen we dan elementaire matrices $E_1, \ldots, E_s$ vinden zodat $B := E_1 \ldots E_sA$ als eerste kolom $(1\ 0\ldots 0)^t$ heeft en een rechtsonder matrix B_{n-1}. Uit definitie 3.2.1 volgt dan dat $\det B = \det B_{n-1}$.
Merk op dat B niet inverteerbaar is (want als B inverteerbaar is dan is ook $A = E_s^{-1}\ldots E_1^{-1}B$ inverteerbaar, volgens lemma 2.4.10 herhaald toegepast, maar A is niet inverteerbaar). Maar dan volgt uit opgave 3.2.10 hieronder dat B_{n-1} ook niet inverteerbaar is. Dan volgt uit de inductieaanname dat $\det B_{n-1} = 0$ en dus dat $\det B = 0$. Maar dan volgt uit 3.2.6 dat $\det A = 0$, immers $A = E_s^{-1}\ldots E_1^{-1}B$ en ieder E_i^{-1} is weer een elementaire matrix. □

Opgave 3.2.10 Zij B een $n \times n$ matrix met als eerste kolom $(1\ 0\ldots 0)^t$ en een rechtsonder $(n-1)\times(n-1)$ matrix B_{n-1}, dus van de vorm

$$B = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Bewijs dat als B_{n-1} inverteerbaar is, B het ook is. (Aanw.: vermenigvuldig B met $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B_{n-1}^{-1} \end{pmatrix}$ en gebruik 2.4.10.)

De volgende stelling geeft een cruciale eigenschap van de determinant aan.

Stelling 3.2.11 Zij A en B $n \times n$ matrices. Dan geldt

$$\det AB = \det A \cdot \det B.$$

Bewijs. i) Als A inverteerbaar is bestaan er volgens 2.4.11 elementaire matrices $E_1, \dots, E_s$ met $A = E_1 \dots E_s$. Uit opgave 3.2.6 iii) volgt dan $\det AB = \det A \cdot \det B$.
ii) Als A niet inverteerbaar is, is AB het ook niet (immers als AB inverteerbaar dan volgt uit 2.4.6 dat B inverteerbaar is (ga na!), maar dan is B^{-1} inverteerbaar en dus is met 2.4.10 $A = (AB)B^{-1}$ ook inverteerbaar, tegenspraak). Dan is volgens 3.2.9 $\det A = 0$ en $\det AB = 0$. Dus $\det AB = 0 = 0. \det B = \det A \cdot \det B$. □

Stelling 3.2.12 Zij A een $n \times n$ matrix. Dan geldt $\det A^t = \det A$.

Bewijs. i) Voor elementaire matrices volgt de stelling uit 3.2.6 i).
Met inductie naar s volgt dan, gebruik makend van 3.2.11, dat $\det A = \det A^t$ als A een product van s elementaire matrices is. M.a.w. vanwege 2.4.11 geldt de stelling als A inverteerbaar is.
ii) Als A niet inverteerbaar is is A^t het ook niet (immers als $A^tC = CA^t = I_n$ voor een zekere $n \times n$ matrix C, dan volgt uit 2.2.17 dat $C^tA = AC^t = I_n$ m.a.w. A is inverteerbaar, een tegenspraak). Dus met 3.2.9 $\det A = 0 = \det A^t$. □

Kijkend naar definitie 3.2.1 zien we dat de eerste kolom van A een speciale rol speelt. Dit is maar schijn, immers zo'n zelfde formule geldt ook voor iedere kolom. Precieser

Stelling 3.2.13 Voor iedere $n \times n$ matrix geldt
i) $\sum_{i=1}^n a_{ij}\widetilde{a}_{ij} = \det A$, voor alle $1 \le j \le n$.
ii) $\sum_{i=1}^n a_{ih}\widetilde{a}_{ij} = 0$, voor alle $1 \le j, h \le n$ met $j \ne h$.

Bewijs. i) Bekijk de matrix A' ontstaan uit A door de j-de kolom te schrappen en hem vervolgens helemaal naar links te brengen zodat hij de eerste kolom van A' wordt.
Hiervoor zijn $j-1$ verwisselingen nodig (van plaats j naar plaats 1). Uit 3.2.12 en D4 volgt dan $\det A' = (-1)^{j-1} \det A$. Merk nu op dat $a'_{i1} = a_{ij}$ en $\widetilde{a}'_{i1} = (-1)^{i+1} \det A_{(ij)}$. Dus

$$\det A' = \sum_{i=1}^n a'_{i1}\widetilde{a}'_{i1} = \sum_{i=1}^n a_{ij}(-1)^{i+1} \det A_{(ij)}$$

waaruit volgt dat

$$\det A = (-1)^{j-1} \sum_{i=1}^n a_{ij}(-1)^{i+1} \det A_{(ij)} = \sum_{i=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{(ij)} = \sum_{i=1}^n a_{ij}\widetilde{a}_{ij}.$$

ii) Zij A' de matrix ontstaan uit A door de j-de kolom te vervangen door de h-de kolom van A. Dan is A' een matrix met twee gelijke kolommen en dus volgens D3 en 3.2.12 geldt $\det A' = 0$. Pas nu de formule uit i) toe op A' i.p.v. A en merk op dat $a'_{ij} = a_{ih}$ en $\widetilde{a}'_{ij} = \widetilde{a}_{ij}$. Hieruit volgt dan meteen de gevraagde formule in ii). □

Opmerking 3.2.14 Formule i) uit 3.2.13 heet de *Laplace*[2] *ontwikkeling van* $\det A$ volgens de j-de kolom. Ook kunnen we de determinant van een matrix uitrekenen via zijn *Laplace ontwikkeling volgens de i-de rij*: dat zien we in de volgende opgave.

[2]Pierre-Simon Laplace, 1749-1827, Franse wiskundige

Opgave 3.2.15 Zij A een $n \times n$ matrix en $1 \leq i, h \leq n$ met $i \neq h$. Bewijs dat geldt

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\widetilde{a}_{ij} \quad \text{en} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{hj}\widetilde{a}_{ij} = 0.$$

(Aanw.: gebruik 3.2.12 en 3.2.13.)

De resultaten uit 3.2.13 en 3.2.15 kunnen we als volgt samenvatten: bij een $n \times n$ matrix A definiëren we een nieuwe matrix, de zgn. *geadjungeerde matrix van* A, genoteerd $adj A$ als volgt:

$$(adj A)_{ij} := \widetilde{a}_{ji} \quad \text{(let op volgorde } i \text{ en } j!)$$

De relaties uit 3.2.12 en 3.2.13 geven dan onmiddellijk

Stelling 3.2.16 $A \cdot adj A = adj A \cdot A = \det A \cdot I_n$.

Gevolg 3.2.17 Als A inverteerbaar is dan geldt

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} adj A.$$

De formule uit 3.2.17 wordt nauwelijks toegepast om de inverse matrix A^{-1} echt te berekenen, hiervoor is het algoritme aan het eind van hoofdstuk 2 veel geschikter. Maar ze is voor bepaalde uitspraken over A^{-1} wel handig. Bijvoorbeeld ziet men rechtstreeks dat voor een matrix A met alleen maar gehele getallen als elementen a_{ij} de inverse A^{-1} uit breuken bestaat die hoogstens $\det A$ als noemer hebben.

3.3 Toepassingen

In deze paragraaf behandelen we een aantal toepassingen van de theorie der determinanten.

a) De regel van Cramer

Stelling 3.3.1 (Regel van Cramer) Zij A een $n \times n$ matrix en $b \in \mathbb{R}^n$. Dan geldt:

$$\text{als } Ax = b, \text{ dan } \det A \cdot x_i = \det A_i(b) \text{ voor alle } i.$$

Bewijs. Laten $A_1, \ldots, A_n$ de kolommen van A aanduiden. Dan zijn $a_1 := A_1^t, \ldots, a_n := A_n^t$ de rijen van $\mathcal{A} := A^t$. Uit $Ax = b$ volgt dan $b = x_1A_1 + \cdots + x_nA_n$ en dus $b^t = x_1a_1 + \cdots + x_na_n$. Volgens 3.2.12 geldt dan

$$\det A_i(b) = \det \mathcal{A}_i[b^t] = \det \mathcal{A}_i[x_1a_1 + \cdots + x_na_n].$$

Volgens D1 en D2 is deze laatste determinant gelijk aan

$$x_1 \det \mathcal{A}_i[a_1] + \cdots + x_i \det \mathcal{A}_i[a_i] + \cdots + x_n \det \mathcal{A}_i[a_n].$$

Omdat volgens D3 $\det \mathcal{A}_i[a_j] = 0$ als $j \neq i$ vinden we

$$\det A_i(b) = x_i \det \mathcal{A}_i[a_i] = x_i \det \mathcal{A} = x_i \det A.$$

□

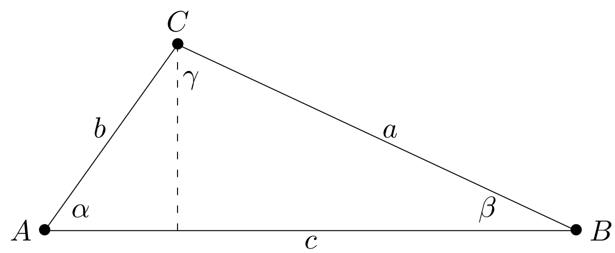
Merk op dat voor het geval $\det A \neq 0$, dus voor een inverteerbare matrix A de regel van Cramer juist de algemene versie van de oplossingsformule voor stelsels lineaire vergelijkingen is, die we in sectie 3.1 voor de gevallen $n = 1, 2, 3$ hadden gevonden. De aanvullende uitspraak voor niet inverteerbare A is dat het stelsel alleen maar oplosbaar kan zijn als voor iedere kolom i geldt dat $\det A_i(b) = 0$.

Als toepassing van de regel van Cramer geven we een bewijs van de cosinusregel uit de vlakke meetkunde.

Voorbeeld 3.3.2 (Cosinusregel) Gegeven een driehoek ABC met hoeken α, β en γ. De zijden tegenover de hoeken A, B en C hebben lengte respectievelijk a, b en c. Leidt de cosinusregel af, d.w.z. bewijs dat geldt

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Oplossing.



Figuur 3.1: Illustratie voor de cosinusregel

Men ziet onmiddellijk uit de tekening in Figuur 3.1 dat $b\cos\alpha + a\cos\beta = c$ en analoog geldt dat $c\cos\beta + b\cos\gamma = a$ en $c\cos\alpha + a\cos\gamma = b$. We vatten deze uitspraken op als een stelsel van drie lineaire vergelijkingen in de onbekenden $\cos\alpha$, $\cos\beta$ en $\cos\gamma$ d.w.z.

$$\begin{pmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

met de regel van Cramer volgt dan $2abc\cos\alpha = ab^2 + ac^2 - a^3$ waaruit $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ volgt.

b) De Vandermonde determinant

We zullen nu de determinant van een heel speciale matrix, de zgn. Vandermonde[3] matrix, uitrekenen. Deze matrix blijkt in veel problemen op te duiken. We zullen hem o.a. gebruiken om stelling 1.3.1 uit hoofdstuk 1 te bewijzen.

Beschouw $n \geq 2$ reële getallen $a_1, \ldots, a_n$. De *Vandermonde* matrix $V(a_1, \ldots, a_n)$ is de $n \times n$ matrix met als i-de rij $(a_1^{i-1}, \ldots, a_n^{i-1})$, waarbij we met a^0 altijd 1 bedoelen.

Stelling 3.3.3 Voor de Vandermonde matrix $V(a_1, \ldots, a_n)$ geldt

$$\det V(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j).$$

[3]Alexandre-Théophile Vandermonde, 1735-1796, Franse wiskundige

Bewijs. Met inductie naar n: om het schrijfwerk te beperken doen we de redenering voor $n = 4$, maar het zal duidelijk zijn dat deze redenering algemeen werkt. Zij dus

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{pmatrix}.$$

Trek a_1 keer de derde rij van de vierde af, vervolgens a_1 keer de tweede van de derde en vervolgens a_1 keer de eerste van de tweede. Omdat volgens D5 daardoor de determinant niet verandert vinden we

$$\det V = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & a_4 - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & a_4^2 - a_1 a_4 \\ 0 & a_2^3 - a_1 a_2^2 & a_3^3 - a_1 a_3^2 & a_4^3 - a_1 a_4^2 \end{pmatrix}.$$

Uit definitie 3.2.1 volgt dan

$$\det V = \det \begin{pmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & a_4 - a_1 \\ a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & a_4^2 - a_1 a_4 \\ a_2^3 - a_1 a_2^2 & a_3^3 - a_1 a_3^2 & a_4^3 - a_1 a_4^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & a_4 - a_1 \\ a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & a_4(a_4 - a_1) \\ a_2^2(a_2 - a_1) & a_3^2(a_3 - a_1) & a_4^2(a_4 - a_1) \end{pmatrix}.$$

Nu bevat de eerste kolom een factor $a_2 - a_1$, de tweede kolom een factor $a_3 - a_1$ en de derde kolom een factor $a_4 - a_1$. Vanwege D2 en 3.2.12 volgt dan

$$\det V = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \end{pmatrix}.$$

De matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \end{pmatrix}$ is een 3×3 Vandermonde matrix en dus is zijn determinant vanwege de inductieaanname gelijk aan $(a_3 - a_2)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)$. Totaal zien we dan dat

$$\det V = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3).$$

□

Bewijs van stelling 1.3.1 We moeten laten zien dat er precies één kromme van de vorm $y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$ bestaat die door de punten $(c_1, d_1), \ldots, (c_n, d_n)$ gaat. Een punt (c_i, d_i) ligt op de kromme $y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$ d.e.s.d.a.

$$a_0 + a_1 c_i + \cdots + a_{n-1} c_i^{n-1} = d_i. \tag{3.9}$$

We moeten dus $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ zo bepalen dat ze voor ieder i aan de vergelijking 3.9 voldoen m.a.w. we moeten $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ oplossen uit

$$\begin{pmatrix} 1 & c_1 & \ldots & c_1^{n-1} \\ 1 & c_2 & \ldots & c_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c_n & \ldots & c_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

Omdat gegeven is dat alle c_i verschillend zijn is volgens 3.2.3 $\det C^t \neq 0$, waarbij C de matrix in het linkerlid is. Dus ook $\det C \neq 0$. Maar dan is C vanwege 3.2.9 inverteerbaar en dus bestaat er volgens 2.4.4 precies een oplossing die aan $C(a_0, \ldots, a_{n-1})^t = (d_1, \ldots, d_n)^t$ voldoet. □

Opgave 3.3.4 Laten $c_1, \ldots, c_n$ verschillende reële getallen zijn.
Bewijs dat de functies $e^{c_1 x}, \ldots, e^{c_n x}$ lineair onafhankelijk zijn d.w.z. laat zien dat geldt: als $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ reële getallen zijn zodanig dat $\lambda_1 e^{c_1 x} + \cdots + \lambda_n e^{c_n x} = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, dan is $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.
(Aanw.: vul $x = 0, 1, \ldots, n-1$ in de relatie in.)

c) Kortste paden in een graaf

We hadden in 2.3.4 beloofd dat er een slimme methode bestaat om voor een graaf met adjacency matrix A de lengte van het kortste pad tussen twee punten P_i en P_j te bepalen zonder de machten A, A^2, enz. te hoeven berekenen. Deze methode is een toepassing van de geadjungeerde matrix.

We weten al dat de lengte d van het kortste pad van P_i en P_j het kleinste getal d is zo dat het element $(A^d)_{ij} \neq 0$ is. In een eerste stap passen we een trucje toe dat in heel verschillende situaties (met name in de discrete wiskunde) erg nuttig blijkt, we vermenigvuldigen de adjacency matrix A met een variabel t. Nu kijken we naar de matrix

$$M := I_n + (tA) + (tA)^2 + (tA^3) + \ldots = I_n + tA + t^2A^2 + t^3A^3 + \ldots$$

waarbij we de som oneindig door laten gaan. Ieder element van de matrix M is dus een *machtreeks* in t. We maken ons hier geen zorgen over convergentie, we identificeren een machtreeks $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ gewoon met de rij $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$.

Omdat voor $k < d$ het element $(A^k)_{ij} = 0$ is, weten we dat M_{ij} een machtreeks is die een term $a_d t^d$ als term van laagste graad heeft.

Nu is een machtreeks van de vorm $1 + x + x^2 + \ldots$ een *meetkundige reeks* en er geldt

$$1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}.$$

Als we deze formule voor $x = tA$ toepassen, zien we dat

$$M = (I_n - tA)^{-1}$$

Dat $I_n - tA$ een inverteerbare matrix is volgt uit het feit dat $\det(I_n - tA)$ een veelterm $p(t)$ is met $p(0) = 1$, want $\det(I_n - 0.A) = \det I_n = 1$. Er geldt dus i.h.b. dat

$$\det(I_n - tA) = p(t) = 1 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_n t^n.$$

Nu passen we 3.2.16 op $I_n - tA$ toe, dit geeft

$$\det(I_n - tA) \cdot M = p(t) \cdot (I_n - tA)^{-1} = adj(I_n - tA)$$

Omdat we alleen maar in de laagste graad van het element M_{ij} geïnteresseerd zijn, kunnen we de vermenigvuldiging met $p(t)$ negeren, want die verandert de graad niet. We bereiken zo het volgende resultaat:

Stelling 3.3.5 De lengte d van het kortste pad van P_i naar P_j is de graad van de laagste term in $adj(I_n - tA)_{ij}$, d.w.z. de graad van de laagste term in $\det(I_n - tA)_{(ji)}$ (let op de volgorde van de indices).

Voorbeeld 3.3.6 Bepaal de lengte van het kortste pad van P_1 naar P_3 in de graaf met adjacency matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (de graaf uit Figuur 2.2).

Oplossing. Volgens 3.3.5 moeten we de term van laagste graad in $\det(I_n - tA)_{(31)}$ bepalen, dus in de determinant van de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -t & 0 & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 & 0 & -t \\ 0 & -t & 1 & 0 & -t \\ 0 & 0 & -t & 1 & -t \\ 0 & -t & 0 & -t & 1 \end{pmatrix}_{(31)} = \begin{pmatrix} -t & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -t \\ 0 & -t & 1 & -t \\ -t & 0 & -t & 1 \end{pmatrix} =: B$$

Ontwikkeling volgens de eerste rij geeft

$$\det B = -t \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -t \\ -t & 1 & -t \\ 0 & -t & 1 \end{pmatrix} = -t \cdot (-t)^3 = t^4$$

De term van laagste graad is dus t^4 en het kortste pad van P_1 naar P_3 heeft dus lengte 4.

Historische opmerkingen

1. Het begrip *determinant* verscheen voor het eerst in 1683 in een manuscript van de Japanse wiskundige Seki Takakazu (1642-1708). Seki's manuscript bevat gedetailleerde berekeningen van determinanten van 2×2, 3×3 en 4×4 matrices. Zijn determinanten hadden een tegengesteld teken van de onze! Hij gebruikte de determinanten om zekere typen niet lineaire vergelijkingen op te lossen. Seki werkte het grootste deel van zijn leven als accountant voor twee leenheren in Kofu, ten westen van Tokio.
   In 1693 verscheen de determinant in een brief van Gottfried von Leibniz (1646-1716) aan de Markies van l'Hôpital (1661-1704). Hij bekeek het stelsel

   $$\begin{aligned} 10 + 11x + 12y &= 0 \\ 20 + 21x + 22y &= 0 \\ 30 + 31x + 32y &= 0 \end{aligned}$$

   en vond een criterium om te besluiten of dit stelsel een oplossing heeft nl.

   $$10.21.32 + 11.22.30 + 12.20.31 = 10.22.31 + 11.20.32 + 12.21.30$$

   m.a.w. de determinant van de coëfficiënten matrix moet nul zijn.
   De theorie der determinanten ontstond door werk van verschillende wiskundigen aan

het eind van de 18-de en het begin van de 19-de eeuw. Met name Gabriël Cramer (1704-1752), Etienne Bézout (1730-1783) in 1764 en Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796) in 1771 geven verschillende methoden om determinanten uit te rekenen.
Pierre-Simon Laplace (1749-1827) formuleerde en bewees de regel dat door verwisseling van twee naast elkaar gelegen kolommen de determinant met een minteken verandert en dat de determinant van een matrix met twee gelijke kolommen nul is.
Het meest volledige werk in die tijd was dat van Augustin Louis Cauchy (1789-1857) in 1812. In dit werk voerde hij de naam determinant en de dubbele index notatie in en bewees dat men de determinant kan uitrekenen door ontwikkeling via iedere rij en kolom.

2. De *regel van Cramer* verscheen voor het eerst in zijn algemeenheid in "Introduction to the Analysis of Algebraic Curves", 1750 van Gabriël Cramer. Hij was geïnteresseerd in het probleem om de vergelijking van een vlakke kromme van gegeven graad te vinden die gaat door een gegeven aantal punten. Bijvoorbeeld, de algemene tweede-graads kromme, wiens vergelijking gegeven wordt door

$$a + by + cx + dy^2 + exy + x^2 = 0$$

is bepaald door vijf punten. Om, gegeven vijf punten, a, b, c, d en e te bepalen, substitueerde Cramer de coördinaten van de punten in de vergelijking en vond vijf lineaire vergelijkingen in vijf onbekenden. Hij verwees dan naar de appendix van zijn werk, waarin hij de algemene regel als volgt beschreef:

> "Men vindt de waarde van iedere onbekende door n breuken te vormen die een gemeenschappelijke noemer hebben die uit net zoveel termen bestaat als er permutaties bestaan van n dingen".

Vervolgens beschreef hij precies hoe die termen en hun juiste teken te vinden zijn. Cramer beschreef echter niet waarom zijn regel werkte! Het bewijs voor de gevallen $n = 2$ en $n = 3$ verscheen in "A Treatise of Algebra" by Colin Maclaurin (1698-1746), en werd pas in 1748 na zijn dood gepubliceerd. Over het algemene geval werd door Maclaurin niets gezegd.

3. *Alexandre-Théophile Vandermonde* (1735-1796) werd in Parijs geboren als zoon van een dokter. Hij studeerde muziek en verkreeg zijn licenciaat in 1757. Zijn instrument was de viool. Hij volgde een carrière in de muziek totdat hij op 35-jarige leeftijd overstapte op Wiskunde. Een jaar later werd hij gekozen tot lid van de Akademie van Wetenschappen. In de volgende twee jaar leverde hij in vier artikelen een belangrijke bijdrage aan de Wiskunde. De jaren daarna publiceerde hij meerdere artikelen over wetenschap en muziek: hij werkte samen met Bézout en de scheikundige Lavoisier. Ook werkte hij samen met Monge over hoe je staal moet bereiden. In 1778 schreef hij twee artikelen over muziek. In z'n tweede artikel formuleerde hij het idee dat musici zich niets moesten aantrekken van alle (wiskundige) theoriën over muziek, maar alleen moesten afgaan op hun getrainde oren om muziek te beoordelen. Dit leidde er uiteindelijk toe dat de Akademie van Wetenschappen muziek verplaatste van het gebied der Wetenschappen naar het gebied der Kunsten. Het is opmerkelijk dat juist een groot wiskundige als Vandermonde tegen muziek als wiskundige kunst schreef, een positie die de muziek innam sinds de Grieken.
Vandermonde is het meest bekend vanwege de *Vandermonde determinant*. Het is zeker dat hij een zeer belangrijke bijdrage heeft geleverd aan de theorie der determinanten,

echter in zijn vier wiskundige artikelen komt deze determinant niet voor. Het is dus nogal vreemd dat deze determinant zijn naam draagt. Een aannemelijk vermoeden, afkomstig van Lebesgue, is dat iemand Vandermondes notatie verkeerd gelezen heeft en daardoor dacht dat de determinant in zijn werk voorkwam!