Résumé du cours d'Algorithmique et Recherche Opérationelle
INFO-F310

Théo Verhelst

6 avril 2017

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Parmi les nombreux domaines compris dans l'algorithmique et la recherche opérationelle, dans ce cours seront abordés la *programmation mathématique* et les *méthodes combinatoires dans les graphes*.

Chapitre 2

Programmation mathématique

2.1 Définition de la programmation mathématique

La programmation mathématique est une modélisation de problèmes (qui peuvent provenir d'une large gamme de domaines) ainsi que leur résolution.

Définition. Un problème de programmation mathématique est défini par un tuple (z, G), où

$$z : E^n \to E : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$$

est appelée *fonction économique* (ou encore *fonction de coût*), et où

$$\star \in \{=, \geq, \leq\},\ G = \{(g_j(x_1, \ldots, x_n) \star b_j)\ \forall j \in [1, m]\}$$

sont appelées *contraintes.* $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les *variables* du problème.

Notation. On notera

$$g_j(x_1, \ldots, x_n) \begin{Bmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{Bmatrix} b_j \quad \forall j \in [1, m]$$

Définition. On classe les problèmes selon la nature de l'ensemble E :
- $E = \mathbb{R}$ correspond aux problèmes continus
- $E = \mathbb{Z}$ correspond aux problèmes entiers
- $E = \{1, 0\}$ correspond aux problèmes booléens

Ces classes peuvent être mixées, si toutes les variables ou contraintes ne sont pas définies dans le même ensemble.

Définition. Résoudre un problème de programmation mathématique consiste à trouver les valeurs $(x_1, \ldots, x_n)$ qui maximisent ou minimisent le plus possible d'une valeur donnée la fonction économique z, tout en satisfaisant toutes les contraintes g_j.

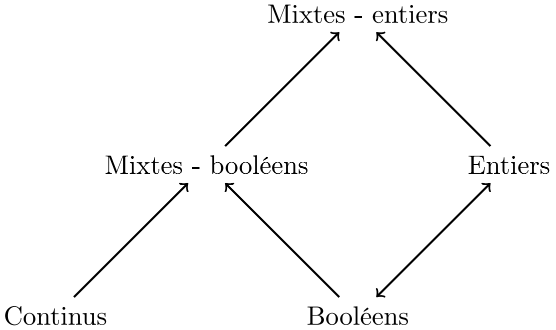
Définition. Pour une solution donnée $(x_1, \ldots, x_n)$, on dit qu'une contrainte d'indice j est saturée quand :

$$g_j(x_1, \ldots, x_n) = b_j$$

Cette notion n'est intéressante que pour les contraintes à inégalités, et représente le cas où une ressource est utilisée à son maximum.

Définition. Quand les fonctions f et g_j sont linéaires en x_i, alors le problème est appelé problème de programmation linéaire.

2.2 Classification des problèmes de programmation linéaire



On peut classer les problèmes de programmation linéaire selon la nature de leur variable. Le sens des flèches dans le schéma indique qu'une méthode permettant de résoudre le problème à la destination de la flèche permet également de résoudre un problème à la base de la flèche. On peut donc en conclure qu'un solveur de problème mixant variables entières et continues permet de résoudre tout type de problème de programmation linéaire.

Note. Un problème à nombre entiers peut également être résolu par un solveur booléens : on pourrait imaginer convertir tous les variables entières en suites de variables booléennes grâce à la représentation binaire du nombre.

2.3 Respect d'un nombre paramétrique de contraintes

On peut étendre la définition de la programmation mathématique en permettant de ne respecter qu'un nombre m' de contraintes, avec $m' < m$. Pour cela, introduisons m variables booléennes δ_i qui indiqueront si la contrainte i est respectée. Introduisons également un nombre M, qui est supérieur à toutes les valeurs que peuvent prendre les contraintes g_i. On peut alors réécrire les contraintes comme suit :

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) - b_i \begin{Bmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{Bmatrix} M(1 - \delta_i)$$

et rajouter la contrainte suivante :

$$\sum_{i=1}^{m} \delta_i \geq m'$$

Le problème résultant reste un problème de programmation linéaire si f et g sont des fonctions linéaires.

2.4 Problèmes de programmation linéaire continus

2.4.1 Forme matricielle

On commencera par exprimer les problèmes de programmation linéaire continus sous forme matricielle :

$$\begin{cases} \text{Min } cx & c \in \mathbb{R}^{1\times n},\ x \in \mathbb{R}_+^{n\times 1} \\ Ax \leq b & A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ b \in \mathbb{R}^{m\times 1} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

où x est le vecteur de variables, c est le vecteur de coefficients de la fonction économique z, A est la matrices de coefficients des contraintes, et b est le vecteur de termes indépendants des contraintes. Un certain nombre de restrictions sont imposées sur la formulation du problème, car on peut toujours se ramener à ce problème plus restreint :

— On se passe des contraintes en $\geq$ et $=$, car on peut toujours reformuler ces contraintes avec d'autres contraintes en $\leq$:

$$a = b \Leftrightarrow a \leq b \wedge -a \leq -b$$

$$a \geq b \Leftrightarrow -a \leq -b$$

— On ne considère que les problèmes où les variables $(x_1, \ldots, x_n)$ sont non-strictement positives, car ces variables représentent souvent des quantités, et ne peuvent donc pas être négatives. Si toutefois une variable x_i, $i \in [1, n]$ peut être négative, on se ramène dans le cas non-strictement positif en posant

$$x_i = y_i - z_i$$

où y_i, z_i sont deux nouvelles variables dans $\mathbb{R}^+$.

— On ne considère que la minimisation de la fonction économique, car on peut ramener un problème de maximisation en un problème de minimisation en prenant l'opposé de la fonction économique.

2.4.2 Variables d'écart

Étant donné un problème continu linéaire

$$\begin{cases} \text{Min } cx \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Afin de pouvoir résoudre le problème avec les outils de l'algèbre linéaire, on introduit m nouvelles variables non-strictement positives $[t_1, \ldots, t_m] = t$, et on reformule les contraintes comme suit :

$$Ax + t = b$$

Les variables t_j sont appelées variables d'écart, et représentent la quantité de ressource qui est encore disponible pour une contrainte donnée. On en déduit que quand $t_j = 0$, la contrainte j est saturée. Par la suite, nous admettrons l'utilisation implicite de variables d'écart, et considererons généralement les problèmes de la forme

$$\begin{cases} \text{Min } cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

2.4.3 Définitions

Définition. Une *solution* est une instance du vecteur x telle que $Ax = b$.

Définition. Une *solution admissible* est une instance du vecteur x telle que $Ax = b$ et $x \geq 0$.

Définition. Une *base* B est une matrice carrée $m \times m$ extraite de la matrice A, avec $\det(B) \neq 0$. On parlera d'*indices de base* (réciproquement *hors base*) et de *variables de base* (réciproquement *hors base*) quand ces indices ou variables sont inclus dans la base B. Les lignes et colonnes incluses dans B ne doivent pas forcément être adjacentes dans A.

Définition. Une solution x est une *solution de base* associée à une base B si et seulement si les variables hors base sont nulles.

Définition. Une solution de base x est *explicitée* si et seulement si la base associée B est la matrice unité $m \times m$.

Définition. Une *combinaison linéaire convexe* d'éléments $p_1, \ldots, p_n$ est une expression de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i$$

où $\alpha_i \in [0, 1]\ \forall i \in [1, n]$ et où $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$

Définition. Un ensemble P est *convexe* si est seulement si toute combinaison linéaire convexe de ses éléments appartient également à P :

$$\forall (p_1, p_2, \alpha) \in P^2 \times [0, 1], (\alpha p_1 + (1 - \alpha) p_2) \in P$$

C'est à dire que étant donné deux points p_1, p_2 dans l'ensemble P, tout point appartenant au segment de droite reliant p_1 et p_2 appartient également à P.

Définition. Les *sommets* d'un ensemble convexe P est le sous-ensemble S de P de tous les éléments ne pouvant pas être exprimés comme une combinaison linéaire convexe d'autres éléments :

$$S = \{s \in P : \forall (p_1, p_2, \alpha) \in (P \setminus \{s\})^2 \times [0, 1], (\alpha p_1 + (1 - \alpha) p_2) \neq s\}$$

C'est à dire tous les points qui ne se situent pas sur une droite reliant deux autres points de l'ensemble P, quels que soient ces derniers points.

Corollaire. *Tout élément p d'un ensemble convexe P peut être formulé comme une combinaison linéaire convexe de ses sommets.*

Démonstration. p est soit un sommet, soit p n'est pas un sommet :

- Si il est un sommet, alors il est effectivement la combinaison linéaire convexe trivialle p.
- Sinon, par la définition des sommets, il peut être exprimé par une combinaison linéaire convexe d'autres points de P, par exemple ses sommets.

□

2.4.4 Résultats fondamentaux

Notation. On notera le problème

$$\begin{cases} \text{Min } cx \\ Ax \begin{Bmatrix} \leq \\ = \end{Bmatrix} b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

comme suit :

$$\text{Min } \{cx : Ax \begin{Bmatrix} \leq \\ = \end{Bmatrix} b, x \geq 0\}$$

Résultat. *L'ensemble $P = \{cx : Ax \leq b, x \geq 0\}$ est convexe.*

Démonstration. □

Résultat. *L'ensemble des solutions admissibles d'un problème linéaire est*
- *Soit vide ;*
- *Soit un polyèdre convexe ;*
- *Soit un ensemble polyédrique non-borné.*

Résultat. *Si P est un polyèdre convexe, alors l'ensemble des solutions optimales du problème*

$$\begin{cases} \mathit{Min}\ cx \\ x \in P \end{cases}$$

contient au moins un sommet de P.

Démonstration. Soient $s_1, \ldots, s_k$ les sommets de P et $cs_m = \min_i cs_i$.
Puisque P est convexe, chacun de ses points peut être exprimé comme une combinaison de ses sommets. Pour toute solution x du problème, on a

$$x \in P \Rightarrow \exists \alpha \in [0,1]^k : x = \sum_i \alpha_i s_i \text{ (et} \sum_i \alpha_i = 1)$$

En multipliant par c, on a

$$cx = \sum_i c\alpha_i s_i \geq cs_m$$

Donc, le sommet s_m ayant la plus petite évaluation parmis les autres sommets est une des solution optimale. □

Notation. P_j est la j^{e} colonne de la matrice A. On notera également $P_0 = b$.

Résultat. *Si A est de rang m, alors tout sommet de l'ensemble des solutions admissibles est une solution de base admissible.*

Démonstration. Soit $s = (s_1, \ldots, s_k, 0 \ldots, 0)$ une solution admissible, avec $s_i \geq 0\ \forall i \in [1, k]$
Si $P_1, \ldots, P_k$ ne sont pas linéairement indépendants, alors

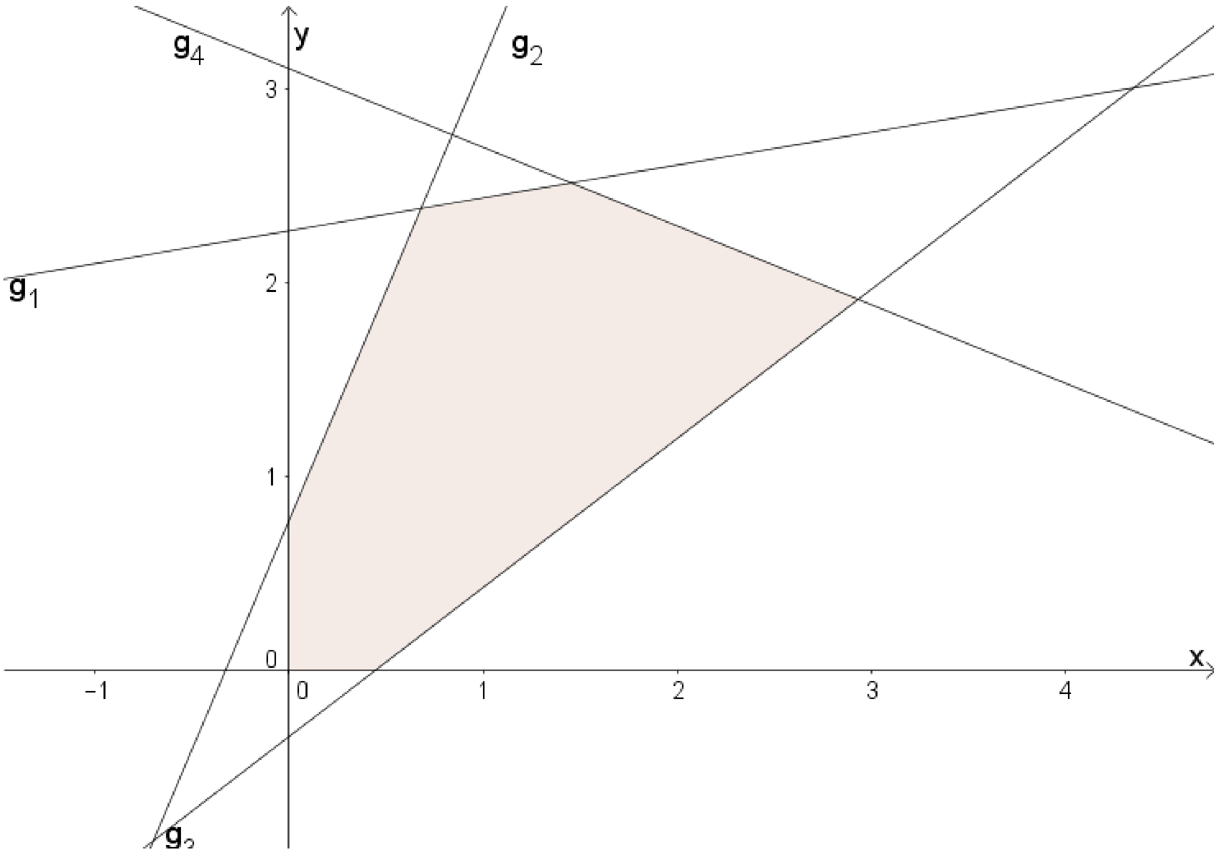
$$\exists \alpha \in \mathbb{R}^k : \sum_{j=1}^{k} \alpha_j P_j = 0$$

□

2.5 Algorithme du simplex

2.5.1 Intuition

L'algorithme du simplex résout des problèmes de programmation linéaire continus, et peut être facilement imaginé dans le cas d'un problème à deux variables continues (x, y). Représentons dans le plan chacune des contraintes comme l'ensemble des points satisfaisant cette contrainte. L'ensemble des solutions admissibles (qui est l'intersection de toutes ces régions) est alors représenté par un polygone.



On peut prouver que la solution se trouve sur un des sommets du polygone (ce sera fait plus tard). L'algorithme du simplex démarre sur l'un de ces sommets et passe de sommet en sommet vers la solution optimale, toujours en améliorant la solution courante.

2.6 Notes

Le problème dual de

$$Max\ cx$$
$$Ax \leq b$$
$$x \in \mathbb{R}^+$$

est

$$Min\ yb$$
$$yA \geq c$$

Les deux on les même solutions, le premier est un problème d'optimisation de vente, le deuxième optimise la production.

Pour passer du primal au dual :

$$Min\ cx \Rightarrow Max\ (-c)x \Rightarrow Min\ y(-b) \Rightarrow Max\ yb$$

$$Ax \geq b \Rightarrow -Ax \leq -b \Rightarrow y(-A) \geq -c \Rightarrow yA \leq c$$

Slides p. 48 : s.r.s veut dire "sans restriction de signe".

Démonstration de la dualité des problèmes : On a

$$Max\ cx; ax \leq b$$

dual de

$$Min\ yb; yA \geq c$$

On travaille sur

$$Min\ cx; Ax = b \Leftrightarrow Min\ cx; Ax \leq b; Ax \geq b$$

$$\Leftrightarrow Max\ -cx; Ax \leq b; -Ax \leq b \Leftrightarrow Max\ -cx; \tilde{A}x \leq \tilde{b}$$

Avec $\tilde{A}_{2m\times m}$ la superposition de A et $-A$, et pareil pour b.

$$\Leftrightarrow Min\ y\tilde{b}; y\tilde{A} \geq -c$$

$$y \begin{matrix} A \\ -A \end{matrix} \geq -c$$

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m - a_{11}y_{m+1} - a_{21}y_2 - a_{31}y_3 - \cdots - a_{m2}y_m$$

Si on rassemble certains termes, on trouve qu'il n'y a pas de restriction de signe sur y.

$$\Leftrightarrow Min\ yb; yA \geq -b$$

Prenons une solution admissible x de $Ax = b$. Multiplions par y

$$yb = yAx$$

$$\Leftrightarrow yb = yAx \leq cx$$

$$\Leftrightarrow yb \leq cx$$

Le problème primal minimise, et le dual maximise, or la solution du dual est plus petite ou égale à celle du dual.
On a un *duality gap* entre les deux solutions, et on peut en déduire que si ce gap est nul, on a la solution optimale.

Autre démonstration : On a

$$Max\ cx; Ax \leq b$$

dual de

$$Min\ yb; yA \geq c$$

On réécrit

$$Max\ cx; Ax + s \leq b$$

dual de

$$Min\ yb; yA - t \geq c$$

pour deux solutions $\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{y}, \tilde{s}$. On va prouver que si on a

$$\tilde{x} \cdot \tilde{t} = 0$$

$$\tilde{y} \cdot \tilde{y} = 0$$

alors ces solutions sont optimales. Pour cela, commencons par :

$$c\tilde{x} = (\tilde{y}A - t)\tilde{x} = \tilde{y}A\tilde{x} - \tilde{t}\tilde{x}$$

$$= \tilde{y}A\tilde{x} = \tilde{y}(b - \tilde{s}) = \tilde{y}b - \tilde{y}\tilde{s}$$

$$= \tilde{y}b = c\tilde{x}\ \square$$