Résumé du cours d'Algorithmique et Recherche Opérationelle
INFO-F310

Théo Verhelst

24 mai 2017

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Parmi les nombreux domaines compris dans l'algorithmique et la recherche opérationelle, dans ce cours seront abordés la *programmation mathématique* et les *méthodes combinatoires dans les graphes*.

Chapitre 2

Programmation mathématique

2.1 Définition de la programmation mathématique

La programmation mathématique est une modélisation de problèmes (qui peuvent provenir d'une large gamme de domaines) ainsi que leur résolution.

Définition. Un problème de programmation mathématique est défini par un tuple (z, G), où

$$z : E^n \to E$$

est appelée *fonction économique* (ou encore *fonction de coût*), et où

$$\star \in \{=, \geq, \leq\},\ G = \{(g_j(x_1, \ldots, x_n) \star b_j)\ \forall j \in \{1, \ldots, m\}\}$$

sont appelées *contraintes.* $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les *variables* du problème.

Notation. On notera

$$g_j(x_1, \ldots, x_n) \begin{Bmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{Bmatrix} b_j \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\}$$

Définition. On classe les problèmes selon la nature de l'ensemble E :
- $E = \mathbb{R}$ correspond aux problèmes continus
- $E = \mathbb{Z}$ correspond aux problèmes entiers
- $E = \{1, 0\}$ correspond aux problèmes booléens

Ces classes peuvent être mixées, si toutes les variables ou contraintes ne sont pas définies dans le même ensemble.

Définition. Résoudre un problème de programmation mathématique consiste à trouver les valeurs $(x_1, \ldots, x_n)$ qui maximisent ou minimisent le plus possible la fonction économique z, tout en satisfaisant toutes les contraintes g_j.

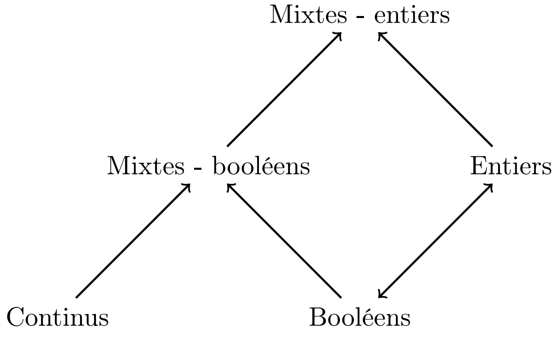
Définition. Pour une solution donnée $(x_1, \ldots, x_n)$, on dit qu'une contrainte d'indice j est saturée quand :

$$g_j(x_1, \ldots, x_n) = b_j$$

Cette notion n'est intéressante que pour les contraintes à inégalités, et représente le cas où une ressource est utilisée à son maximum.

Définition. Quand les fonctions z et g_j sont linéaires en x_i, alors le problème est appelé problème de programmation linéaire.

2.2 Classification des problèmes de programmation linéaire



On peut classer les problèmes de programmation linéaire selon la nature de leur variable. Le sens des flèches dans le schéma indique qu'une méthode permettant de résoudre le problème à la destination de la flèche permet également de résoudre un problème à la base de la flèche. On peut donc en conclure qu'un solveur de problème mixant variables entières et continues permet de résoudre tout type de problème de programmation linéaire.

Note. Un problème à nombre entiers peut également être résolu par un solveur booléens : on pourrait imaginer convertir tous les variables entières en suites de variables booléennes grâce à la représentation binaire du nombre.

2.3 Respect d'un nombre paramétrique de contraintes

On peut étendre la définition de la programmation mathématique en permettant de ne respecter qu'un nombre m' de contraintes, avec $m' < m$. Pour cela, introduisons m variables booléennes δ_i qui indiqueront si la contrainte i est respectée. Introduisons également un nombre M, qui est supérieur à toutes les valeurs que peuvent prendre les contraintes g_i. On peut alors réécrire les contraintes comme suit :

$$g_i(x_1, \dots, x_n) - b_i \begin{Bmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{Bmatrix} M(1 - \delta_i)$$

et rajouter la contrainte suivante :

$$\sum_{i=1}^{m} \delta_i \geq m'$$

Le problème résultant reste un problème de programmation linéaire si f et g sont des fonctions linéaires.

2.4 Problèmes de programmation linéaire continus

2.4.1 Forme matricielle

On commencera par exprimer les problèmes de programmation linéaire continus sous forme matricielle :

$$\begin{cases} \text{Min } cx & c \in \mathbb{R}^{1\times n},\ x \in \mathbb{R}_+^{n\times 1} \\ Ax \leq b & A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ b \in \mathbb{R}^{m\times 1} \\ x_i \geq 0 & \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

où $x = [x_1, \dots, x_n]^T$ est le vecteur de variables, c est le vecteur de coefficients de la fonction économique z, A est la matrices de coefficients des contraintes, et $b = [b_1, \dots, b_m]^T$ est le vecteur de termes indépendants des contraintes. Un certain nombre de restrictions sont imposées sur la formulation du problème, car on peut toujours se ramener à ce problème plus restreint :

— On se passe des contraintes en $\geq$ et $=$, car on peut toujours reformuler ces contraintes avec d'autres contraintes en $\leq$:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha \leq \beta \wedge -\alpha \leq -\beta$$

$$\alpha \geq \beta \Leftrightarrow -\alpha \leq -\beta$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

— On ne considère que les problèmes où les variables $(x_1, \dots, x_n)$ sont positives, car ces variables représentent souvent des quantités, et ne peuvent donc pas être négatives. Si toutefois une variable x_i, $i \in \{1, \dots, n\}$ peut être négative, on se ramène dans le cas positif en posant

$$x_i = y_i - z_i$$

où y_i, z_i sont deux nouvelles variables dans $\mathbb{R}^+$.

— On ne considère que la minimisation de la fonction économique, car on peut ramener un problème de maximisation en un problème de minimisation en prenant l'opposé de la fonction économique.

Notation.

$$x \geq 0 := x_i \geq 0\ \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

2.4.2 Variables d'écart

Étant donné un problème continu linéaire

$$\begin{cases} \text{Min } cx \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Afin de pouvoir résoudre le problème avec les outils de l'algèbre linéaire, on introduit m nouvelles variables positives $[t_1, \ldots, t_m] = t$, et on reformule les contraintes comme suit :

$$Ax + t = b$$

Les variables t_j sont appelées variables d'écart, et représentent la quantité de ressource qui est encore disponible pour une contrainte donnée. On en déduit que quand $t_j = 0$, la contrainte j est saturée. Par la suite, nous admettrons l'utilisation implicite de variables d'écart, et considererons généralement les problèmes de la forme

$$\begin{cases} \text{Min } cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Notation. On notera le problème

$$\begin{cases} \text{Min } cx \\ Ax \begin{Bmatrix} \leq \\ = \end{Bmatrix} b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

comme suit :

$$\text{Min } \{cx : Ax \begin{Bmatrix} \leq \\ = \end{Bmatrix} b, x \geq 0\}$$

2.4.3 Définitions

Définition. Une *solution* est une instance du vecteur x telle que $Ax = b$.

Définition. Une *solution admissible* est une instance du vecteur x telle que $Ax = b$ et $x \geq 0$.

Définition. Une *base* B est une matrice carrée $m \times m$ extraite de la matrice A, avec $\det(B) \neq 0$. On parlera d'*indices de base* (réciproquement *hors base*) et de *variables de base* (réciproquement *hors base*) quand ces indices ou variables sont inclus (réciproquement exclus) dans la base B. Les lignes et colonnes incluses dans B ne doivent pas forcément être adjacentes dans A.

Exemple. Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Une base B possible serait la matrice

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

Si et seulement si $\det(B) \neq 0$. Les variables hors base sont alors $(x_{m+1}, \ldots, x_n)$.

Définition. Une solution x est une *solution de base* associée à une base B si et seulement si les variables hors base sont nulles.

Définition. Une solution de base x est *explicitée* si et seulement si la base associée B est la matrice unité $m \times m$.

Définition. Une *combinaison linéaire convexe* d'éléments $p_1, \ldots, p_n$ est une expression de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i$$

où $\alpha_i \in [0, 1]$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ et où $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.
Par exemple, pour deux points p_1 et p_2, cette expression représente le segment de droite reliant p_1 et p_2.

Définition. Un ensemble P est *convexe* si est seulement si toute combinaison linéaire convexe de deux de ses éléments appartient également à P :

$$\forall (p_1, p_2, \alpha) \in P^2 \times [0,1], (\alpha p_1 + (1-\alpha)p_2) \in P$$

C'est à dire que étant donné deux points p_1, p_2 dans l'ensemble P, tout point appartenant au segment de droite reliant p_1 et p_2 appartient également à P.

Définition. Les *sommets* d'un ensemble convexe P est le sous-ensemble S de P de tous les éléments ne pouvant pas être exprimés comme une combinaison linéaire convexe d'autres éléments :

$$S = \{s \in P : \forall (p_1, p_2, \alpha) \in (P \setminus \{s\})^2 \times [0,1], (\alpha p_1 + (1-\alpha)p_2) \neq s\}$$

C'est à dire tous les points qui ne se situent pas sur une droite reliant deux autres points de l'ensemble P, quels que soient ces derniers points.

Corollaire 1. *Tout élément p d'un ensemble convexe P peut être formulé comme une combinaison linéaire convexe de ses sommets.*

Démonstration. p est soit un sommet, soit p n'est pas un sommet :
- Si il est un sommet, alors il est effectivement la combinaison linéaire convexe triviale p.
- Sinon, par la définition des sommets, il peut être exprimé par une combinaison linéaire convexe d'autres points de P, par exemple ses sommets.

□

2.4.4 Résultats fondamentaux

Théorème 1. *L'ensemble $P = \{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$ est convexe.*

Démonstration. Pour toute combinaison linéaire convexe de facteurs $(\alpha, 1-\alpha)$ d' éléments $x_1, x_2 \in P$, on a

$$A(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = A\alpha x_1 + A(1-\alpha)x_2 \leq \alpha b + (1-\alpha)b = b$$
$$\Rightarrow A(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq b$$

Pour la second contrainte, on a

$$\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \geq 0$$

Car c'est un combinaison linéaire convexe d'éléments positifs.
On en conclut que toute combinaison linéaire convexe d'éléments de P a répond également aux contraintes définissant l'ensemble P.

□

Théorème 2. *L'ensemble $P = \{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$ est*
- *Soit vide ;*
- *Soit un polyèdre convexe ;*
- *Soit un ensemble polyédrique non-borné.*

Théorème 3. *Si P est un polyèdre convexe, alors l'ensemble des solutions optimales du problème Min $\{cx : x \in P\}$ contient au moins un sommet de P.*

Démonstration. Soient $s^{(1)}, \ldots, s^{(k)}$ les sommets de P et $cs^{(m)} = \min_i cs^{(i)}$.
Puisque P est convexe, chacun de ses points peut être exprimé comme une combinaison linéaire convexe de ses sommets. Pour toute solution x du problème, on a

$$\exists (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in [0,1]^k : x = \sum_i \alpha_i s^{(i)} \text{ (et } \sum_i \alpha_i = 1)$$

En multipliant par c, on a

$$cx = \sum_i c\alpha_i s^{(i)} \geq cs^{(m)}$$

Donc, le sommet $s^{(m)}$ ayant la plus petite évaluation parmis les autres sommets est une des solution optimale. □

Corollaire 2. *L'ensemble des solutions optimales d'un problème contient au moins un sommet de l'ensemble des solutions admissibles.*

Démonstration. On peut le déduire directement du résultat **??** et du résultat **??**. □

Notation. P_j est la j^e colonne de la matrice A. On notera également $P_0 = b$. On peut alors exprimer les contraintes d'un problème linéaire comme suit :

$$\sum_{j=1}^{n} x_j P_j \begin{Bmatrix} \leq \\ = \end{Bmatrix} P_0$$

Théorème 4. *Étant donné le problème linéaire Min* $\{cx : x \in P\}$ *avec* $P = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$*, si* A *est de rang* m*, alors tout sommet de* P *est une solution de base admissible.*

Démonstration. Soit $s = (s_1, \dots, s_k, 0 \dots, 0)$ un sommet de P (c'est donc une solution admissible), avec $s_i \geq 0 \ \forall i \in \{1, \dots, k\}$. On peut toujours s'y ramener en réordonnant les variables, de manière à avoir les zéros à la fin.
Montrons que $P_1, \dots, P_k$ sont linéairement indépendants par l'absurde :
Par la notation précédente, on a

$$\sum_{j=1}^{k} s_j P_j = P_0 = b$$

Si $P_1, \dots, P_k$ ne sont pas linéairement indépendants, on a également

$$\exists(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k : \sum_{j=1}^{k} \alpha_j P_j = 0$$

avec $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ non tous nuls.
En choisissant un nombre $\epsilon \in \mathbb{R}$ tel que $|\epsilon \alpha_j| < s_j \ \forall j \in \{1, \dots, k\}$, on peut écrire :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{k} (s_j + \epsilon \alpha_j) P_j = P_0 \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{k} (s_j - \epsilon \alpha_j) P_j = P_0 \end{cases}$$

On en déduit qu'il existe deux solutions admissibles

$$x^{(1)} = (s_1 + \epsilon \alpha_1, \dots, s_k + \epsilon \alpha_k)$$

$$x^{(2)} = (s_1 + \epsilon \alpha_1, \dots, s_k - \epsilon \alpha_k)$$

Note. On a imposé la condition $|\epsilon \alpha_j| < s_j \ \forall j \in \{1, \dots, k\}$ afin de garantir que $x^{(1)} \geq 0$ et $x^{(2)} \geq 0$.

On a donc

$$s = \frac{1}{2}(x^{(1)} + x^{(2)})$$

Ce qui est contraire à l'hypothèse de s étant un sommet. On en conclut que $P_1, \dots, P_k$ sont linéairement indépendants.
Puisque A est de rang m, il existe au maximum m vecteurs colonnes extraits de A étant linéairement indépendants entre eux. Donc $k \leq m$.

- Si $k = m$, alors s est la solution admissible de base associée à la base $B = (P_1 \dots P_k)$;
- Sinon, $k < m$, et s est la solution admissible de base associée à la base $B = (P_1 \dots P_k \cdot P_{i_1} \dots P_{i_{m-k}})$ construite en choisissant $m - k$ colonnes dans A de telle sorte que $\det(B) \neq 0$. C'est toujours possible, puisque A est de rang m.

□

Théorème 5. *Étant donné le problème linéaire Min* $\{cx : x \in P\}$ *avec* $P = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$*, si* A *est de rang* m*, alors toute solution de base admissible du problème est un sommet de* P *(réciproque du théorème précédent).*

Démonstration. Soit $s = (s_1, \dots, s_m, 0, \dots, 0)$ une solution de base admissible. Cela signifie que la matrice $B = (P_1 \dots P_m)$ est une base. Prouvons que s est un sommet :

Si $s_i = 0 \ \forall i \in \{1, \dots, m\}$, alors s ne peut pas être exprimé comme une combinaison linéaire convexe de deux autres éléments de P, et donc s est un sommet.

Sinon, prouvons par l'absurde que s est aussi un sommet. Si s n'est pas un sommet, alors

$$\exists(x^{(1)}, x^{(2)}, \alpha) \in P^2 \times [0,1] : s = \alpha x^{(1)} + (1-\alpha)x^{(2)}$$

Et comme $x^{(1)} \geq 0$ et $x^{(2)} \geq 0$, on peut en déduire que

$$x_i^{(1)} = x_i^{(2)} = 0 \; \forall i \in \{m+1, \ldots, n\}$$

On peut alors écrire

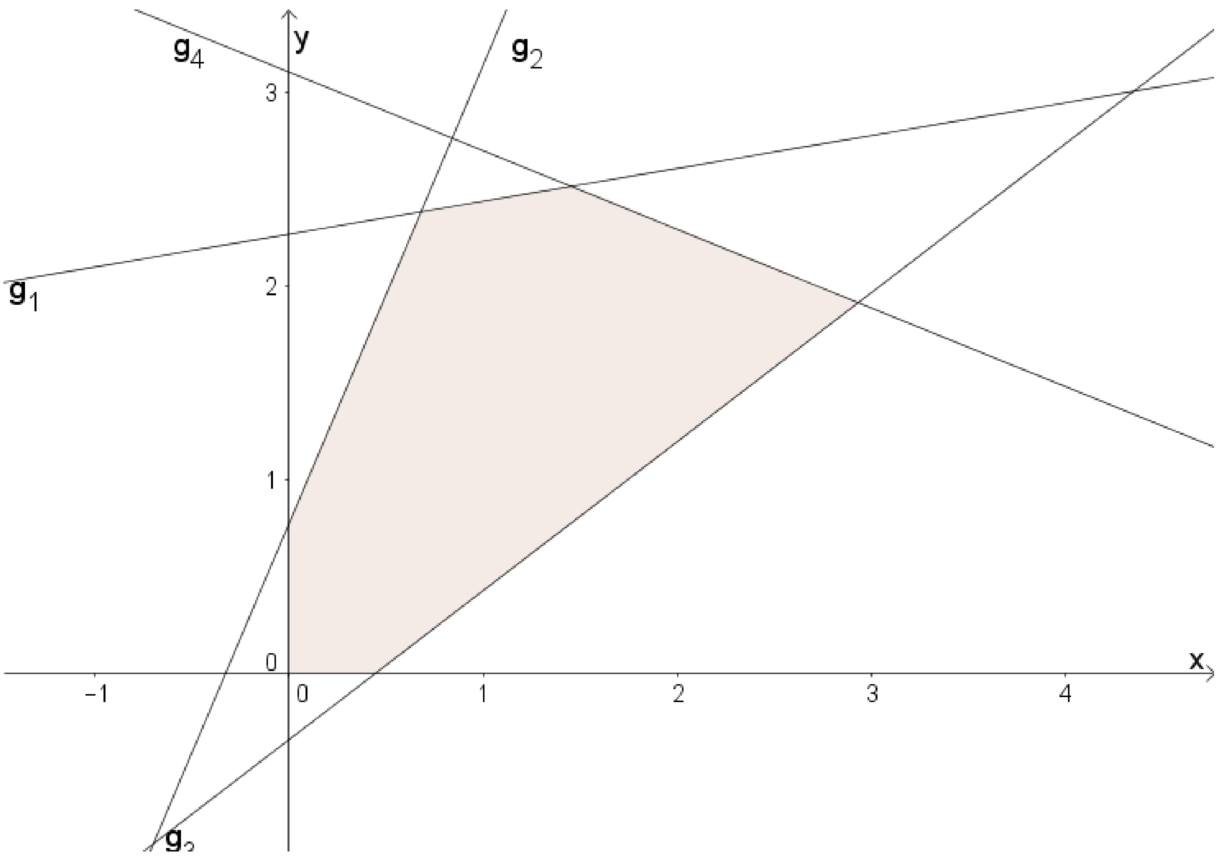
$$Bx^{(1)} = Bx^{(2)} = b$$

Et puisque B est carrée et inversible, on a $x^{(1)} = x^{(2)} = s$. Donc s est un sommet. □

2.5 Algorithme du simplex

2.5.1 Intuition

L'algorithme du simplex résout des problèmes de programmation linéaire continus, et peut être facilement imaginé dans le cas d'un problème à deux variables continues (x, y). Représentons dans le plan chacune des contraintes comme l'ensemble des points satisfaisant cette contrainte. L'ensemble des solutions admissibles (qui est l'intersection de toutes ces régions) est alors représenté par un polygone.



On a prouvé précédemment qu'une des solutions optimales se trouve sur l'un des sommets du polygone. L'algorithme du simplex démarre sur l'un des sommets et passe de sommet en sommet vers la solution optimale, toujours en améliorant la solution courante.