

Résumé du cours d'Algorithmique et Recherche Opérationnelle  
*INFO-F310*

Théo Verhelst

30 mai 2017

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Programmation mathématique</b>	<b>3</b>
2.1	Définition de la programmation mathématique . . . . .	3
2.2	Classification des problèmes de programmation linéaire . . . . .	3
2.3	Respect d'un nombre paramétrique de contraintes . . . . .	4
2.4	Problèmes de programmation linéaire continus . . . . .	4
2.4.1	Forme matricielle . . . . .	4
2.4.2	Variables d'écart . . . . .	5
2.4.3	Définitions . . . . .	5
2.4.4	Résultats fondamentaux . . . . .	7
2.5	Algorithme du Simplexe . . . . .	9
2.5.1	Intuition . . . . .	9
2.5.2	Hypothèses . . . . .	9
2.5.3	Changement de base . . . . .	9
2.5.4	Fonction économique . . . . .	10
2.5.5	Choix des indices de changement de base . . . . .	11
2.5.6	Critère d'optimalité . . . . .	11
2.5.7	Technique de la base artificielle . . . . .	12
2.5.8	Convergence . . . . .	12
2.6	Dualité . . . . .	12
2.6.1	Propriétés fondamentales de la dualité . . . . .	13
2.7	Problèmes de transport . . . . .	14

# Chapitre 1

## Introduction

Parmi les nombreux domaines compris dans l'algorithmique et la recherche opérationnelle, dans ce cours seront abordés la *programmation mathématique* et les *méthodes combinatoires dans les graphes*.

## Chapitre 2

# Programmation mathématique

### 2.1 Définition de la programmation mathématique

La programmation mathématique est une modélisation de problèmes (qui peuvent provenir d'une large gamme de domaines) ainsi que leur résolution.

**Définition.** Un problème de programmation mathématique est défini par un tuple  $(z, G)$ , où

$$z : E^n \rightarrow E$$

est appelée *fonction économique* (ou encore *fonction de coût*), et où

$$\star \in \{=, \geq, \leq\}, G = \{(g_j(x_1, \dots, x_n) \star b_j) \mid \forall j \in \{1, \dots, m\}\}$$

sont appelées *contraintes*.  $(x_1, \dots, x_n)$  sont les *variables* du problème.

**Notation.** On notera

$$g_j(x_1, \dots, x_n) \begin{cases} \leq \\ \geq \\ = \end{cases} b_j \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}$$

**Définition.** On classe les problèmes selon la nature de l'ensemble  $E$  :

- $E = \mathbb{R}$  correspond aux problèmes continus
- $E = \mathbb{Z}$  correspond aux problèmes entiers
- $E = \{1, 0\}$  correspond aux problèmes booléens

Ces classes peuvent être mixées, si toutes les variables ou contraintes ne sont pas définies dans le même ensemble.

**Définition.** Résoudre un problème de programmation mathématique consiste à trouver les valeurs  $(x_1, \dots, x_n)$  qui maximisent ou minimisent le plus possible la fonction économique  $z$ , tout en satisfaisant toutes les contraintes  $g_j$ .

**Définition.** Pour une solution donnée  $(x_1, \dots, x_n)$ , on dit qu'une contrainte d'indice  $j$  est saturée quand :

$$g_j(x_1, \dots, x_n) = b_j$$

Cette notion n'est intéressante que pour les contraintes à inégalités, et représente le cas où une ressource est utilisée à son maximum.

**Définition.** Quand les fonctions  $z$  et  $g_j$  sont linéaires en  $x_i$ , alors le problème est appelé problème de programmation linéaire.

### 2.2 Classification des problèmes de programmation linéaire



On peut classer les problèmes de programmation linéaire selon la nature de leur variable. Le sens des flèches dans le schéma indique qu'une méthode permettant de résoudre le problème à la destination de la flèche permet également de résoudre un problème à la base de la flèche. On peut donc en conclure qu'un solveur de problème mixant variables entières et continues permet de résoudre tout type de problème de programmation linéaire.

*Note.* Un problème à nombre entiers peut également être résolu par un solveur booléens : on pourrait imaginer convertir tous les variables entières en suites de variables booléennes grâce à la représentation binaire du nombre.

## 2.3 Respect d'un nombre paramétrique de contraintes

On peut étendre la définition de la programmation mathématique en permettant de ne respecter qu'un nombre  $m'$  de contraintes, avec  $m' < m$ . Pour cela, introduisons  $m$  variables booléennes  $\delta_i$  qui indiqueront si la contrainte  $i$  est respectée. Introduisons également un nombre  $M$ , qui est supérieur à toutes les valeurs que peuvent prendre les contraintes  $g_i$ . On peut alors réécrire les contraintes comme suit :

$$g_i(x_1, \dots, x_n) - b_i \begin{cases} \leq \\ \geq \\ = \end{cases} M(1 - \delta_i)$$

et rajouter la contrainte suivante :

$$\sum_{i=1}^m \delta_i \geq m'$$

Le problème résultant reste un problème de programmation linéaire si  $f$  et  $g$  sont des fonctions linéaires.

## 2.4 Problèmes de programmation linéaire continus

### 2.4.1 Forme matricielle

**Notation.** On définit la notation d'inégalité entre deux vecteurs et entre un vecteur et un scalaire par la conjonction des inégalités membre à membre, ou entre chaque membre et le scalaire.

$$\begin{aligned} \forall a, b \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R} \\ a \leq b &:= a_i \leq b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ a \leq \alpha &:= a_i \leq \alpha \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

On commencera par exprimer les problèmes de programmation linéaire continus sous forme matricielle :

$$\begin{cases} \text{Min } cx & c \in \mathbb{R}^{1 \times n}, x \in [0, \infty[^{n \times 1} \\ Ax \leq b & A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^{m \times 1} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

où  $x = [x_1, \dots, x_n]^T$  est le vecteur de variables,  $c$  est le vecteur de coefficients de la fonction économique  $z$ ,  $A$  est la matrices de coefficients des contraintes, et  $b = [b_1, \dots, b_m]^T$  est le vecteur de termes indépendants des contraintes. Un certain nombre de restrictions sont imposées sur la formulation du problème, car on peut toujours se ramener à ce problème plus restreint :

- On se passe des contraintes en  $\geq$  et  $=$ , car on peut toujours reformuler ces contraintes avec d'autres contraintes en  $\leq$  :

$$\begin{aligned} \alpha = \beta &\Leftrightarrow \alpha \leq \beta \wedge -\alpha \leq -\beta \\ \alpha \geq \beta &\Leftrightarrow -\alpha \leq -\beta \\ \forall \alpha, \beta &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- On ne considère que les problèmes où les variables  $(x_1, \dots, x_n)$  sont positives, car ces variables représentent souvent des quantités, et ne peuvent donc pas être négatives. Si toutefois une variable  $x_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  peut être négative, on se ramène dans le cas positif en posant

$$x_i = y_i - z_i$$

où  $y_i, z_i$  sont deux nouvelles variables dans  $[0, \infty[$ .

- On ne considère que la minimisation de la fonction économique, car on peut ramener un problème de maximisation en un problème de minimisation en prenant l'opposé de la fonction économique.

**Notation.**

$$x \geq 0 := x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

## 2.4.2 Variables d'écart

Étant donné un problème continu linéaire

$$\begin{cases} \text{Min } cx \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Afin de pouvoir résoudre le problème avec les outils de l'algèbre linéaire, on introduit  $m$  nouvelles variables positives  $[t_1, \dots, t_m] = t$ , et on reformule les contraintes comme suit :

$$Ax + t = b$$

Les variables  $t_j$  sont appelées variables d'écart, et représentent la quantité de ressource qui est encore disponible pour une contrainte donnée. On en déduit que quand  $t_j = 0$ , la contrainte  $j$  est saturée. Par la suite, nous admettrons l'utilisation implicite de variables d'écart, et considérerons généralement les problèmes de la forme

$$\begin{cases} \text{Min } cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

**Notation.** On notera le problème

$$\begin{cases} \text{Min } cx \\ Ax \begin{cases} \leq \\ = \end{cases} b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

comme suit :

$$\text{Min } \{cx : Ax \begin{cases} \leq \\ = \end{cases} b, x \geq 0\}$$

## 2.4.3 Définitions

Dans cette section, nous considérerons le problème linéaire

$$\text{Min } \{cx : Ax = b, x \geq 0\}$$

où le nombre de contraintes  $m$  est plus petit ou égal au nombre de variables  $n$ . On peut toujours s'assurer de cette dernière contrainte avec la méthode de la base artificielle, qui sera développée plus loin.

**Définition.** Une *solution* est une instance du vecteur  $x$  telle que  $Ax = b$ .

**Définition.** Une *solution admissible* est une instance du vecteur  $x$  telle que  $Ax = b$  et  $x \geq 0$ .

**Définition.** Une *base*  $B$  est une matrice carrée  $m \times m$  extraite de la matrice  $A$ , avec  $\det(B) \neq 0$ . On parlera d'*indices de base* (réciproquement *hors base*) et de *variables de base* (réciproquement *hors base*) quand ces indices ou variables sont inclus (réciproquement exclus) dans la base  $B$ . Les lignes et colonnes incluses dans  $B$  ne doivent pas forcément être adjacentes dans  $A$ .

*Exemple.* Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Une base  $B$  possible serait la matrice

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

Si et seulement si  $\det(B) \neq 0$ . Les variables hors base sont alors  $(x_{m+1}, \dots, x_n)$ .

*Note.* Si une base  $B$  existe, alors  $A$  est de rang  $m$ , par la définition du rang.

**Définition.** Une solution  $x$  est une *solution de base* associée à une base  $B$  si et seulement si les variables hors base sont nulles.

**Intuition :** Étant donné qu'on a  $m$  équations et  $n$  variables, avec  $m < n$ , on a donc une infinité de solutions possibles. Pour résoudre le problème et ainsi trouver la solution optimale, on fixe à zéro  $n - m$  variables, pour n'avoir alors que  $m$  variables à décider avec les  $m$  équations.

**Corollaire 1.** Le sous-vecteur  $x^{(B)}$  d'une solution de base  $x$  de base  $B$  contenant les variables en base est donné par  $x^{(B)} = B^{-1}b$ .

*Démonstration.* Posons  $x^{(B)} = [x_1, \dots, x_m]$ . On toujours réordonner les variables de manière à avoir les variables en base dans les  $m$  premiers indices. On a alors

$$\begin{aligned}
Ax &= b \\
\Rightarrow \\
\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,m}x_m + a_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,m}x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases} \\
\Rightarrow \\
\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,m}x_m + 0 + \dots + 0 = b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,m}x_m + 0 + \dots + 0 = b_m \end{cases} \\
\Rightarrow \\
Bx^{(B)} = b \Rightarrow x^{(B)} = B^{-1}b
\end{aligned}$$

□

**Définition.** Une solution de base  $x$  est *explicitée* si et seulement si la base associée  $B$  est la matrice unité  $m \times m$ .

**Définition.** Une solution de base  $x$  est dégénérée si et seulement si il existe plus d'une variable en base étant nulle.

**Définition.** Une *combinaison linéaire convexe* d'éléments  $p_1, \dots, p_n$  est une expression de la forme

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i p_i$$

où  $\alpha_i \in [0, 1] \forall i \in \{1, \dots, n\}$  et où  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ .

Par exemple, pour deux points  $p_1$  et  $p_2$ , cette expression représente le segment de droite reliant  $p_1$  et  $p_2$ .

**Définition.** Un ensemble  $P$  est *convexe* si est seulement si toute combinaison linéaire convexe de deux de ses éléments appartient également à  $P$  :

$$\forall (p_1, p_2, \alpha) \in P^2 \times [0, 1], (\alpha p_1 + (1 - \alpha)p_2) \in P$$

C'est à dire que étant donné deux points  $p_1, p_2$  dans l'ensemble  $P$ , tout point appartenant au segment de droite reliant  $p_1$  et  $p_2$  appartient également à  $P$ .

**Définition.** Les *sommets* d'un ensemble convexe  $P$  est le sous-ensemble  $S$  de  $P$  de tous les éléments ne pouvant pas être exprimés comme une combinaison linéaire convexe d'autres éléments :

$$S = \{s \in P : \forall p_1 \neq p_2 \in P \setminus \{s\}, \alpha \in [0, 1], (\alpha p_1 + (1 - \alpha)p_2) \neq s\}$$

C'est à dire tous les points qui ne se situent pas sur une droite reliant deux autres points de l'ensemble  $P$ , quels que soient ces derniers points.

**Corollaire 2.** Tout élément  $p$  d'un ensemble convexe  $P$  peut être formulé comme une combinaison linéaire convexe de ses sommets.

*Démonstration.*  $p$  est soit un sommet, soit  $p$  n'est pas un sommet :

- Si il est un sommet, alors il est effectivement la combinaison linéaire convexe triviale  $p$ .
- Sinon, par la définition des sommets, il peut être exprimé par une combinaison linéaire convexe d'autres points de  $P$ , par exemple ses sommets.

□

## 2.4.4 Résultats fondamentaux

**Théorème 1.** *L'ensemble  $P = \{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$  est convexe.*

*Démonstration.* Pour toute combinaison linéaire convexe de facteurs  $(\alpha, 1 - \alpha)$  d'éléments  $x_1, x_2 \in P$ , on a

$$\begin{aligned} A(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) &= A\alpha x_1 + A(1 - \alpha)x_2 \leq \alpha b + (1 - \alpha)b = b \\ \Rightarrow A(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) &\leq b \end{aligned}$$

Pour la seconde contrainte, on a

$$\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \geq 0$$

Car c'est une combinaison linéaire convexe d'éléments positifs.

On en conclut que toute combinaison linéaire convexe d'éléments de  $P$  répond également aux contraintes définissant l'ensemble  $P$ . □

**Théorème 2.** *L'ensemble  $P = \{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$  est*

- *Soit vide ;*
- *Soit un polyèdre convexe ;*
- *Soit un ensemble polyédrique non-borné.*

**Théorème 3.** *Si  $P$  est un polyèdre convexe, alors l'ensemble des solutions optimales du problème  $\text{Min } \{cx : x \in P\}$  contient au moins un sommet de  $P$ .*

*Démonstration.* Soient  $s^{(1)}, \dots, s^{(k)}$  les sommets de  $P$  et  $cs^{(m)} = \min_i cs^{(i)}$ .

Puisque  $P$  est convexe, chacun de ses points peut être exprimé comme une combinaison linéaire convexe de ses sommets. Pour toute solution  $x$  du problème, on a

$$\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in [0, 1]^k : x = \sum_i \alpha_i s^{(i)} \text{ (et } \sum_i \alpha_i = 1)$$

En multipliant par  $c$ , on a

$$cx = \sum_i c\alpha_i s^{(i)} \geq cs^{(m)}$$

Donc, le sommet  $s^{(m)}$  ayant la plus petite évaluation parmi les autres sommets est une des solutions optimales. □

**Corollaire 3.** *L'ensemble des solutions optimales d'un problème contient au moins un sommet de l'ensemble des solutions admissibles.*

*Démonstration.* On peut le déduire directement du résultat 1 et du résultat 3. □

**Notation.**  $P_j$  est la  $j^{\circ}$  colonne de la matrice  $A$ . On notera également  $P_0 = b$ . On peut alors exprimer les contraintes d'un problème linéaire comme suit :

$$\sum_{j=1}^n x_j P_j \begin{cases} \leq \\ = \end{cases} P_0$$

**Théorème 4.** *Étant donné le problème linéaire  $\text{Min } \{cx : x \in P\}$  avec  $P = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$ , si  $A$  est de rang  $m$ , alors tout sommet de  $P$  est une solution de base admissible.*

*Démonstration.* Soit  $s = (s_1, \dots, s_k, 0, \dots, 0)$  un sommet de  $P$  dont un certain nombre  $0 \leq (n - k) \leq n$  de composantes sont nulles, avec et  $s_i > 0 \forall i \in \{1, \dots, k\}$ . On peut toujours s'y ramener en réordonnant les variables, de manière à avoir les zéros à la fin.



Montrons que  $P_1, \dots, P_k$  sont linéairement indépendants par l'absurde. Par la notation précédente, on a

$$\sum_{j=1}^k s_j P_j = P_0 = b$$

Si  $P_1, \dots, P_k$  ne sont pas linéairement indépendants, on a également

$$\exists(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k : \sum_{j=1}^k \alpha_j P_j = 0$$

avec  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  non tous nuls. En choisissant un nombre  $\epsilon \in \mathbb{R}$  tel que  $|\epsilon \alpha_j| < s_j \forall j \in \{1, \dots, k\}$ , on peut écrire :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^k s_j P_j + \epsilon \sum_{j=1}^k \alpha_j P_j = P_0 \\ \sum_{j=1}^k s_j P_j - \epsilon \sum_{j=1}^k \alpha_j P_j = P_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^k (s_j + \epsilon \alpha_j) P_j = P_0 \\ \sum_{j=1}^k (s_j - \epsilon \alpha_j) P_j = P_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

On en déduit qu'il existe deux solutions admissibles

$$x^{(1)} = (s_1 + \epsilon \alpha_1, \dots, s_k + \epsilon \alpha_k)$$

$$x^{(2)} = (s_1 + \epsilon \alpha_1, \dots, s_k - \epsilon \alpha_k)$$

*Note.* On a imposé la condition  $|\epsilon \alpha_j| < s_j \forall j \in \{1, \dots, k\}$  afin de garantir que  $x^{(1)} \geq 0$  et  $x^{(2)} \geq 0$ .

On a donc

$$s = \frac{1}{2}(x^{(1)} + x^{(2)})$$

Ce qui est contraire à l'hypothèse de  $s$  étant un sommet. On en conclut que  $P_1, \dots, P_k$  sont linéairement indépendants.

Puisque  $A$  est de rang  $m$ , il existe au maximum  $m$  vecteurs colonnes extraits de  $A$  étant linéairement indépendants entre eux. Donc  $k \leq m$ .

- Si  $k = m$ , alors  $s$  est la solution admissible de base associée à la base  $B = (P_1 \dots P_k)$  ;
- Sinon,  $k < m$ , et  $s$  est la solution admissible de base associée à la base  $B = (P_1 \dots P_k, P_{i_1} \dots P_{i_{m-k}})$  construite en choisissant  $m - k$  colonnes dans  $A$  de telle sorte que  $\det(B) \neq 0$ . C'est toujours possible, puisque  $A$  est de rang  $m$ .

□

**Théorème 5.** *Étant donné le problème linéaire  $\text{Min } \{cx : x \in P\}$  avec  $P = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$ , si  $A$  est de rang  $m$ , alors toute solution de base admissible du problème est un sommet de  $P$  (réciproque du théorème précédent).*

*Démonstration.* Soit  $s = (s_1, \dots, s_m, 0, \dots, 0)$  une solution de base admissible. Cela signifie que la matrice  $B = (P_1 \dots P_m)$  est une base. Prouvons que  $s$  est un sommet :

Si  $s_i = 0 \forall i \in \{1, \dots, m\}$ , alors  $s$  ne peut pas être exprimé comme une combinaison linéaire convexe de deux autres éléments de  $P$ , et donc  $s$  est un sommet.

Sinon, prouvons par l'absurde que  $s$  est aussi un sommet. Si  $s$  n'est pas un sommet, alors

$$\exists(x^{(1)}, x^{(2)}, \alpha) \in P^2 \times [0, 1] : s = \alpha x^{(1)} + (1 - \alpha)x^{(2)}$$

Et comme  $x^{(1)} \geq 0$  et  $x^{(2)} \geq 0$ , on peut en déduire que

$$x_i^{(1)} = x_i^{(2)} = 0 \forall i \in \{m+1, \dots, n\}$$

On peut alors écrire

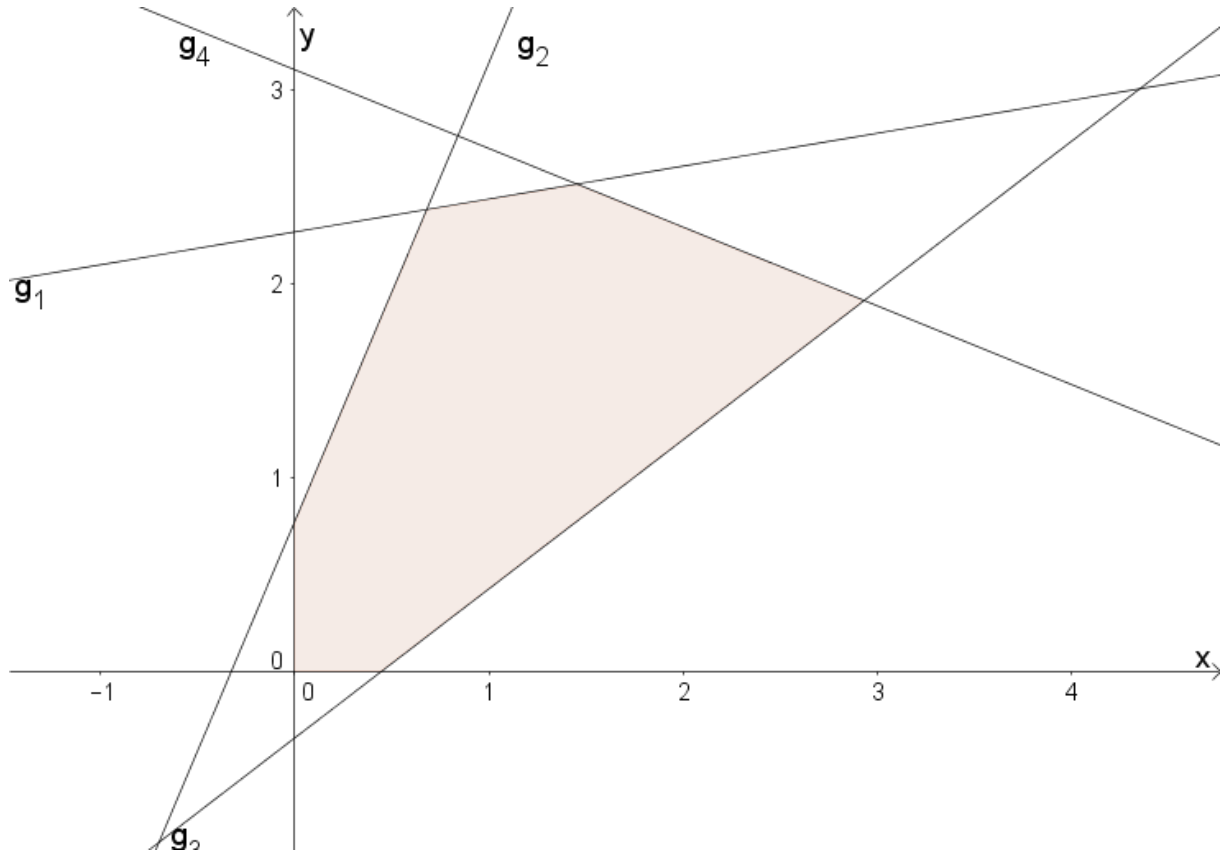
$$Bx^{(1)} = Bx^{(2)} = b$$

Et puisque  $B$  est carrée et inversible, on a  $x^{(1)} = x^{(2)} = s$ . Donc  $s$  est un sommet. □

## 2.5 Algorithme du Simplexe

### 2.5.1 Intuition

L'algorithme du Simplexe résout des problèmes de programmation linéaire continus, et peut être facilement imaginé dans le cas d'un problème à deux variables continues  $(x, y)$ . Représentons dans le plan chacune des contraintes comme l'ensemble des points satisfaisant cette contrainte. L'ensemble des solutions admissibles (qui est l'intersection de toutes ces régions) est alors représenté par un polygone.



On a prouvé précédemment qu'une des solutions optimales se trouve sur l'un des sommets du polygone. L'algorithme du Simplexe démarre sur l'un des sommets et passe de sommet en sommet vers la solution optimale, toujours en améliorant la solution courante.

### 2.5.2 Hypothèses

- Les contraintes sont de la forme  $Ax = b$  ;
- $A$  contient une matrice unité ;
- $b \geq 0$  ;

La technique de la base artificielle permet de s'assurer de ces hypothèses dans un cadre général.

### 2.5.3 Changement de base

Nous avons démontré dans le théorème 4 qu'un sommet de l'ensemble des solutions admissibles correspond à une valuation de  $x$  répondant à  $Ax = b$  telle que :

$$\begin{cases} x_i = b_i & \forall i \in I(B) \\ x_i = 0 & \forall i \in J(B) \end{cases}$$

où  $B$  est la matrice unité extraite de  $A$ ,  $I(B)$  (resp.  $J(B)$ ) sont les indices des colonnes de  $A$  inclus (resp. exclus) dans  $B$ . La valeur de la fonction économique est alors

$$Z_0 = \sum_{i \in I(B)} c_i b_i$$

*Note.* On considère que les variables ont été réordonnées de manière à ce que les indices en base aillent de 1 à  $m$ . Sans quoi, l'expression  $x_i = b_i \forall i \in I(B)$  ne pourrait pas être définie pour  $i > m$ .

Passer à un sommet adjacent revient à effectuer un **changement de base** en y ajoutant un indice exclus  $k$  et en retirant un indice inclus  $r$ , de manière à obtenir :

$$\begin{cases} x_i = b'_i & \forall i \in I(B') = [I(B) \cup \{k\}] \setminus \{r\} \\ x_i = 0 & \forall i \in J(B') = [J(B) \cup \{r\}] \setminus \{k\} \end{cases}$$

Ce nouveau sommet correspond à une valuation de  $x$  répondant à  $A'x = b'$ . Ces deux couples d'équations peuvent s'écrire comme suit :

$$x_i + \sum_{j \in J(B)} a_{ij}x_j = b_i, i \in I(B) \quad (2.3)$$

$$x_i + \sum_{j \in J(B')} a'_{ij}x_j = b'_i, i \in I(B') \quad (2.4)$$

**Théorème 6.** Appliquer un changement de base revient à effectuer les transformations suivantes

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{rj} \frac{a_{ik}}{a_{rk}}, \forall i \in I(B) \cap I(B') \quad a'_{kj} = \frac{a_{rj}}{a_{rk}}$$

$$b'_i = b_i - b_r \frac{a_{ik}}{a_{rk}}, \forall i \in I(B) \cap I(B') \quad b'_k = \frac{b_r}{a_{rk}}$$

*Démonstration.* Soient  $k \in J(B)$  et  $r \in I(B)$ . Nous cherchons à retirer  $k$  de  $J(B)$  :

$$x_r + \sum_{j \in J(B)} a_{rj}x_j = b_r \Rightarrow x_r + \sum_{j \in J(B) \setminus \{k\}} a_{rj}x_j + a_{rk}x_k = b_r$$

Nous pouvons ainsi isoler  $x_k$  :

$$x_k = \frac{b_r}{a_{rk}} - \frac{x_r}{a_{rk}} - \sum_{j \in J(B) \setminus \{k\}} \frac{a_{rj}}{a_{rk}} x_j \quad (2.5)$$

Nous pouvons réécrire l'expression 2.3 de façon différente pour des valeurs distinctes de  $i$  :

$$\begin{cases} x_i + a_{ik}x_k + \sum_{j \in J(B) \setminus \{k\}} a_{ij}x_j = b_i, i \in I(B) \setminus \{r\} \\ x_k + \frac{x_r}{a_{rk}} + \sum_{j \in J(B) \setminus \{k\}} \frac{a_{rj}}{a_{rk}} x_j = \frac{b_r}{a_{rk}} \end{cases}$$

Et, simplement en réinsérant la définition de  $x_k$  de l'équation 2.5 dans la première égalité nous trouvons :

$$\begin{cases} x_i - \frac{a_{ik}}{a_{rk}}x_r + \sum_{j \in J(B) \setminus \{k\}} \left[ a_{ij} - \frac{a_{ik}a_{rj}}{a_{rk}} \right] x_j = b_i - \frac{a_{ik}b_r}{a_{rk}}, i \in I(B) \setminus \{r\} \\ x_k + \frac{x_r}{a_{rk}} + \sum_{j \in J(B) \setminus \{k\}} \frac{a_{rj}}{a_{rk}} x_j = \frac{b_r}{a_{rk}} \end{cases}$$

Similairement, en réécrivant l'expression 2.4 en séparant la valeur  $k$  des autres, nous obtenons :

$$\begin{cases} x_i + a'_{ir}x_r + \sum_{j \in J(B') \setminus \{r\}} a'_{ij}x_j = b'_i, i \in I(B') \setminus \{k\} \\ x_k + a'_{kr}x_r + \sum_{j \in J(B') \setminus \{r\}} a'_{kj}x_j = b'_k \end{cases}$$

La symétrie des deux dernières paires d'égalités, ainsi que l'égalité des ensembles

$$I(B) \cap I(B') = I(B) \setminus \{r\} = I(B') \setminus \{k\}, \quad J(B) \setminus \{k\} = J(B') \setminus \{r\}$$

nous amènent aux coefficients du théorème. □

## 2.5.4 Fonction économique

Avant le changement de base, nous avons comme fonction économique :

$$z_0 = \sum_{i \in I(B)} c_i b_i$$

Après le changement de base, celle-ci devient d'après le théorème :

$$\begin{aligned}
z'_0 &= \sum_{i \in I(B')} c_i b'_i = \sum_{i \in I(B) \cap I(B')} c_i b'_i + c_k b'_k = \sum_{i \in I(B) \cap I(B')} c_i \left( b_i - b_r \frac{a_{ik}}{a_{rk}} \right) + c_k \frac{b_r}{a_{rk}} \\
&= \sum_{i \in I(B)} c_i \left( b_i - b_r \frac{a_{ik}}{a_{rk}} \right) + c_k \frac{b_r}{a_{rk}} = \sum_{i \in I(B)} c_i b_i - \frac{b_r}{a_{rk}} \left[ \sum_{i \in I(B)} c_i a_{ik} - c_k \right] \\
&= z_0 - \frac{b_r}{a_{rk}} (z_k - c_k)
\end{aligned}$$

### 2.5.5 Choix des indices de changement de base

Pour choisir les indices  $k$  et  $r$ , il faut que la solution soit toujours admissible et qu'elle amène à une meilleur fonction économique. Plus formellement, le choix de  $k$  et  $r$  doit vérifier :

$$\begin{cases} z_k - c_k > 0 & \text{dans un problème à minimum} \\ z_k - c_k < 0 & \text{dans un problème à maximum} \\ a_{rk} > 0 & \text{(pivot)} \\ b_i - b_r \frac{a_{ik}}{a_{rk}} \geq 0, \forall i \in I(B) \cap I(B') \end{cases}$$

Tant qu'il existe un pivot  $a_{rk}$  positif, la règle suivante peut être utilisée pour déterminer  $k$  et  $r$  :

$$\begin{cases} z_k - c_k = \max_j z_j - c_j & \text{dans un problème à minimum} \\ z_k - c_k = \min_j z_j - c_j & \text{dans un problème à maximum} \\ \frac{b_r}{a_{rk}} = \min_{a_{ik} > 0} \frac{b_i}{a_{ik}} \end{cases}$$

*Note.* Dans la pratique, les quantités  $z_j - c_j \forall j \in J(B)$  correspondent aux coefficients de la fonction économique exprimée uniquement à partir des variables hors base. Il suffit donc de substituer au sein de la fonction économique les variables introduites dans la base par leur expression dans le système au fur et à mesure des changement de base. Ensuite, pour déterminer  $k$ , il suffit de chercher le plus grand/petit coefficient dans la nouvelle expression de la fonction économique.

### 2.5.6 Critère d'optimalité

Soit  $Q$  une valuation de  $x$  (un point quelconque admissible), ce que nous noterons  $x_i = x_i(Q) \forall i$ . Nous pouvons calculer la fonction économique en ce point :

$$z_0(Q) = \sum_{i \in I(B)} c_i x_i(Q) + \sum_{i \in J(B)} c_j x_j(Q)$$

En insérant l'équation 2.3, nous pouvons réduire  $z_0(Q)$  :

$$\begin{aligned}
z_0(Q) &= \sum_{i \in I(B)} c_i \left[ b_i - \sum_{j \in J(B)} a_{ij} x_j(Q) \right] + \sum_{j \in J(B)} c_j x_j(Q) \\
&= \sum_{i \in I(B)} c_i b_i - \sum_{j \in J(B)} \left[ \sum_{i \in I(B)} c_i a_{ij} - c_j \right] x_j(Q) \\
&= z_0 - \sum_{j \in J(B)} (z_j - c_j) x_j(Q)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Nous pouvons donc affirmer que  $z_0$  est optimal si :

$$z_j - c_j \leq 0 \forall j \in J(B) \quad (\text{problème à min.})$$

$$z_j - c_j \geq 0 \forall j \in J(B) \quad (\text{problème à max.})$$

## 2.5.7 Technique de la base artificielle

Bien qu'on puisse toujours exprimer les contraintes d'un système linéaire par des égalités, il n'est pas évident que la matrice de coefficients des contraintes contienne une matrice unité. Afin de palier à ce problème, on peut insérer  $m$  variables artificielles  $v = [v_1, \dots, v_m]$  dans le système, qui devient

$$\begin{cases} \min \sum_{i=0}^n c_i x_i + \sum_{j=1}^m M v_j A x + v = b \\ x \geq 0 \\ v \geq 0 \end{cases}$$

pour un problème à minimum, ou

$$\begin{cases} \max \sum_{i=0}^n c_i x_i - \sum_{j=1}^m M v_j A x + v = b \\ x \geq 0 \\ v \geq 0 \end{cases}$$

pour un problème à maximum, où  $M$  est une contrainte arbitrairement grande. On peut alors utiliser les variables  $v_j$  comme base initiale. Si l'algorithme du Simplexe n'anule pas les  $v_j$ , c'est que les contraintes sont contradictoires. Si par contre il les annule, alors la solution optimale correspond à la solution optimale du problème initial, mises à part les variables artificielles.

## 2.5.8 Convergence

Comme on cherche à annuler  $n - m$  variables du système, l'algorithme de devrait faire qu'au maximum  $C_{m-k}^n$  itérations. Toutefois, il peut arriver que deux choix soient possible pour l'indice  $k$ , et que la solution ne s'améliore plus, mais que l'algorithme boucle entre les deux choix. Même si c'est très peu probable (ne serait-ce qu'à cause des erreurs de virgule flottante), on peut insérer une perturbation artificielle afin de converger dans ce cas également.

Considérons le système

$$\begin{cases} \text{Min } cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Si l'algorithme boucle, on travaille alors sur le système

$$\begin{cases} \text{Min } cx \\ Ax = b' \quad b'_i = b_i \epsilon^i \\ x \geq 0 \end{cases}$$

où  $\epsilon$  est une quantité positive arbitrairement proche de zéro.

## 2.6 Dualité

**Définition.** Soit le problème linéaire en forme canonique, qui est appelé *problème primal*

$$\begin{cases} \text{Min } cx \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

On définit le *problème dual* comme

$$\begin{cases} \text{Max } yb \\ yA \leq c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

avec  $y = [y_1, \dots, y_m] \in [0, \infty[^m$  étant les nouvelles variables du dual.

**Corollaire 4.** On peut montrer que les dualités suivantes sont aussi vérifiées :

$$\text{Primal : } \begin{cases} \text{Max } cx \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{Dual : } \begin{cases} \text{Min } yb \\ yA \geq c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Primal : } \begin{cases} \text{Max } cx \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} & \quad \text{Dual : } \begin{cases} \text{Max } yb \\ yA \geq -c \\ y \geq 0 \end{cases} \\ \text{Primal : } \begin{cases} \text{Min } cx \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} & \quad \text{Dual : } \begin{cases} \text{Min } yb \\ yA \geq -c \\ y \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Le problème dual du dual est le problème primal.

On peut également se servir des règles suivantes :

- Si la  $j^{\text{e}}$  contrainte du primal est en  $\leq$ , alors la  $j^{\text{e}}$  variable du dual est  $\geq 0$ .
- Si la  $j^{\text{e}}$  contrainte du primal est en  $=$ , alors la  $j^{\text{e}}$  variable du dual est sans restriction de signe (s.r.s).
- Si la  $i^{\text{e}}$  variable du primal est en  $\geq 0$ , alors la  $i^{\text{e}}$  variable du dual est en  $\geq$ .
- Si la  $i^{\text{e}}$  variable du primal est s.r.s, alors la  $i^{\text{e}}$  variable du dual est en  $=$ .

### 2.6.1 Propriétés fondamentales de la dualité

Dans cette sous-section, nous considererons le couple primal-dual suivant :

$$\text{Primal : } \begin{cases} \text{Min } cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{Dual : } \begin{cases} \text{Max } yb \\ yA \leq c \\ y \text{ s.r.s} \end{cases}$$

**Théorème 7.** Si  $x$  et  $y$  sont respectivement des solutions admissibles du primal et du dual (c.à.d si les contraintes et les domaines des variables sont respectés), alors l'évaluation de la fonction économique du primal est plus grande ou égale à l'évaluation de la fonction économique du dual (c.à.d  $cx \geq yb$ ).

*Démonstration.*

$$cx \geq (yA)x = y(Ax) = yb$$

□

**Théorème 8.** Si  $x$  et  $y$  sont respectivement des solutions admissibles du primal et du dual et si  $cx = yb$ , alors  $x$  et  $y$  sont respectivement des solutions optimales du primal et du dual.

*Démonstration.* Soient  $X$  l'ensemble des solutions admissibles du primal, et  $Y$  l'ensemble des solutions admissibles du dual. Soient  $x^{(m)}$  la solution optimale du primal telle que

$$cx^{(m)} = \min_{x \in X} cx$$

et  $y^{(m)}$  la solution optimale du dual telle que

$$y^{(m)}b = \max_{y \in Y} yb$$

Soient deux solutions admissibles du primal et du dual respectivement  $x$  et  $y$ , telles que  $cx = yb$ . On a

$$cx^{(m)} \leq cx = yb \leq y^{(m)}b$$

Or, par le théorème précédent, on a aussi

$$cx^{(m)} \geq y^{(m)}b$$

Par conséquent,

$$cx^{(m)} = cx = yb = y^{(m)}b$$

Et donc

$$x^{(m)} = x \wedge y^{(m)} = y$$

□

## 2.7 Problèmes de transport

**Définition.** Un problème de transport est un tuple  $(G, C)$  où  $G = (X, U)$  est un graphe orienté simple, avec  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  l'ensemble des sommets,  $U \subseteq X^2$  est l'ensemble des arrêtes, et où  $C = [c_{ij}]_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \in [0, \infty]^{n \times n}$  est la matrice des capacités des arrêtes. Une capacité peut effectivement être infinie.  $x_1$  est nommé entrée, ou source, et n'a pas de prédecesseur :

$$\nexists i \in \{1, \dots, n\} : \{x_i, x_1\} \in U$$

$x_n$  est nommé sortie, ou puit, et n'a pas de successeur :

$$\nexists i \in \{1, \dots, n\} : \{x_n, x_i\} \in U$$

*Note.* On peut également formuler le problème avec  $G' = (X, U')$  étant un graphe complet (c'est à dire  $U' = X^2$ ), et où  $\{x_i, x_i\} \notin U \Rightarrow c'_{ij} = 0$ .

**Notation.**

$$N := \{1, \dots, n\}$$

**Définition.** Un flot dans un réseau de transport est un ensemble

$$\{\phi_{i,j}\}_{i,j \in N}$$

tel que

$$\begin{cases} \phi_{ij} \geq 0 & \forall i, j \in N \\ \phi_{ij} \leq c_{ij} & \forall i, j \in N \\ \sum_{j=1}^n (c_{ij} - \phi_{ji}) = 0 & \forall i \in \{2, \dots, n-1\} \end{cases}$$

La troisième propriété (appelée *loi de conservation*) exprime que le flux entrant dans un noeud est égal au flux sortant de ce noeud, mis à part pour la source et le puit.

**Corollaire 5** (Corollaire de la loi de conservation).

$$\sum_{j=1}^n \phi_{1j} = \sum_{j=1}^n \phi_{jn}$$

*Démonstration.*

$$\sum_{j=1}^n (\phi_{ij} - \phi_{ji}) = 0 \quad \forall i \in \{2, \dots, n-1\} \quad (2.7)$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n \phi_{ij} = \sum_{j=1}^n \phi_{ji} \quad \forall i \in \{2, \dots, n-1\} \quad (2.8)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi_{ij} - \sum_{j=1}^n \phi_{1j} - \underbrace{\sum_{j=1}^n \phi_{nj}}_{=0} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi_{ji} - \underbrace{\sum_{j=1}^n \phi_{j1}}_{=0} - \sum_{j=1}^n \phi_{jn} \quad (2.9)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi_{ij} - \sum_{j=1}^n \phi_{1j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi_{ji} - \sum_{j=1}^n \phi_{jn} \quad (2.10)$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n \phi_{1j} = \sum_{j=1}^n \phi_{jn} \quad (2.11)$$

$$(2.12)$$

□

**Définition.** La quantité  $\sum_{j=1}^n \phi_{1j}$  est appelée *valeur du flux*.

**Définition.** Une *coupe* est une partition de  $X$  en deux ensembles (disjoints)  $M$  et  $\bar{M} = X \setminus M$ . La valeur d'une coupe  $\{M, \bar{M}\}$  est

$$C(M, \bar{M}) = \sum_{x_i \in M} \sum_{x_j \in \bar{M}} c_{ij}$$

L'ensemble des arcs  $\{\{x_i, x_j\} | x_i \in M, x_j \in \bar{M}\}$  sont appelés *arcs de la coupe*.