Résumé du cours d'Algorithmique et Recherche Opérationelle *INFO-F310*

Théo Verhelst

5 avril 2017

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Parmi les nombreux domaines compris dans l'algorithmique et la recherche opérationelle, dans ce cours seront abordés la *programmation mathématique* et les *méthodes combinatoires dans les graphes*.

Chapitre 2

Programmation mathématique

2.1 Définition de la programmation mathématique

La programmation mathématique est une modélisation de problèmes (qui peuvent provenir d'une large gamme de domaines) ainsi que leur résolution.

Définition : Un problème de programmation mathématique est défini par un tuple (z, G), où

$$z : E^n \to E : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$$

est appelée *fonction économique* (ou encore *fonction de coût*), et où

$$\star \in \{=, \geq, \leq\},\ G = \{(g_j(x_1, \ldots, x_n) \star b_j)\ \forall j \in [1, m]\}$$

sont appelées *contraintes*. $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les *variables* du problème.

Notation : On notera

$$g_j(x_1, \ldots, x_n) \left\{ \begin{matrix} \leq \\ \geq \\ = \end{matrix} \right\} b_j \quad \forall j \in [1, m]$$

Définition : On classe les problèmes selon la nature de l'ensemble E :
- $E = \mathbb{R}$ correspond aux problèmes continus
- $E = \mathbb{Z}$ correspond aux problèmes entiers
- $E = \{1, 0\}$ correspond aux problèmes booléens

Ces classes peuvent être mixées, si toutes les variables ou contraintes ne sont pas définies dans le même ensemble.

Définition : Résoudre un problème de programmation mathématique consiste à trouver les valeurs $(x_1, \ldots, x_n)$ qui maximisent ou minimisent le plus possible d'une valeur donnée la fonction économique z, tout en satisfaisant toutes les contraintes g_j.

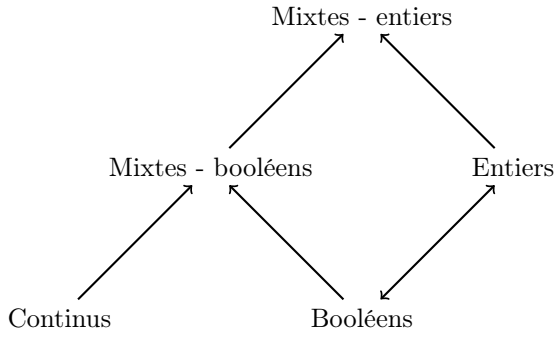
Définition : Pour une solution donnée $(x_1, \ldots, x_n)$, on dit qu'une contrainte d'indice j est saturée quand :

$$g_j(x_1, \ldots, x_n) = b_j$$

Cette notion n'est intéressante que pour les contraintes à inégalités, et représente le cas où une ressource est utilisée à son maximum.

Définition : Quand les fonctions f et g_j sont linéaires en x_i, alors le problème est appelé problème de programmation linéaire.

2.2 Classification des problèmes de programmation linéaire



On peut classer les problèmes de programmation linéaire selon la nature de leur variable. Le sens des flèches dans le schéma indique qu'une méthode permettant de résoudre le problème à la destination de la flèche permet également de résoudre un problème à la base de la flèche. On peut donc en conclure qu'un solveur de problème mixant variables entières et continues permet de résoudre tout type de problème de programmation linéaire.

Note : Un problème à nombre entiers peut également être résolu par un solveur booléens : on pourrait imaginer convertir tous les variables entières en suites de variables booléennes grâce à la représentation binaire du nombre.

2.3 Respect d'un nombre paramétrique de contraintes

On peut étendre la définition de la programmation mathématique en permettant de ne respecter qu'un nombre m' de contraintes, avec $m' < m$. Pour cela, introduisons m variables booléennes δ_i qui indiqueront si la contrainte i est respectée. Introduisons également un nombre M, qui est supérieur à toutes les valeurs que peuvent prendre les contraintes g_i. On peut alors réécrire les contraintes comme suit :

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) - b_i \begin{Bmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{Bmatrix} M(1 - \delta_i)$$

et rajouter la contrainte suivante :

$$\sum_{i=1}^{m} \delta_i \geq m'$$

Le problème résultant reste un problème de programmation linéaire si f et g sont des fonctions linéaires.

2.4 Problèmes de programmation linéaire continus

2.4.1 Forme matricielle

On commencera par exprimer les problèmes de programmation linéaire continus sous forme matricielle :

$$\begin{cases} \text{Min } cx & c \in \mathbb{R}^{1\times n},\ x \in \mathbb{R}_+^{n\times 1} \\ Ax \leq b & A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ b \in \mathbb{R}^{m\times 1} \\ x \geq 0 & \end{cases}$$

où x est le vecteur de variables, c est le vecteur de coefficients de la fonction économique z, A est la matrices de coefficients des contraintes, et b est le vecteur de termes indépendants des contraintes. Un certain nombre de restrictions sont imposées sur la formulation du problème, car on peut toujours se ramener à ce problème plus restreint :

— On se passe des contraintes en $\geq$ et $=$, car on peut toujours reformuler ces contraintes avec d'autres contraintes en $\leq$:

$$a = b \Leftrightarrow a \leq b \wedge -a \leq -b$$

$$a \geq b \Leftrightarrow -a \leq -b$$

— On ne considère que les problèmes où les variables $(x_1, \ldots, x_n)$ sont non-strictement positives, car ces variables représentent souvent des quantités, et ne peuvent donc pas être négatives. Si toutefois

une variable x_i, $i \in [1, n]$ peut être négative, on se ramène dans le cas non-strictement positif en posant

$$x_i = y_i - z_i$$

où y_i, z_i sont deux nouvelles variables dans $\mathbb{R}^+$.

— On ne considère que la minimisation de la fonction économique, car on peut ramener un problème de maximisation en un problème de minimisation en prenant l'opposé de la fonction économique.

2.4.2 Variables d'écart

Étant donné un problème continu linéaire

$$\begin{cases} \text{Min } cx \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Afin de pouvoir résoudre le problème avec les outils de l'algèbre linéaire, on introduit m nouvelles variables non-strictement positives $[t_1, \ldots, t_m] = t$, et on reformule les contraintes comme suit :

$$Ax + t = b$$

Les variables t_j sont appelées variables d'écart, et représentent la quantité de ressource qui est encore disponible pour une contrainte donnée. On en déduit que quand $t_j = 0$, la contrainte j est saturée. Par la suite, nous admettrons l'utilisation implicite de variables d'écart, et considererons généralement les problèmes de la forme

$$\begin{cases} \text{Min } cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

2.4.3 Définitions

Définition : Une *solution* est une instance du vecteur x telle que $Ax = b$.

Définition : Une *solution admissible* est une instance du vecteur x telle que $Ax = b$ et $x \geq 0$.

Définition : Une *base* B est une matrice carrée $m \times m$ extraite de la matrice A, avec $\det(B) \neq 0$. On parlera d'*indices de base* (réciproquement *hors base*) et de *variables de base* (réciproquement *hors base*) quand ces indices ou variables sont inclus dans la base B. Les lignes et colonnes incluses dans B ne doivent pas forcément être adjacentes dans A.

Définition : Une solution x est une *solution de base* associée à une base B si et seulement si les variables hors base sont nulles.

Définition : Une solution de base x est *explicitée* si et seulement si la base associée B est la matrice unité $m \times m$.

Définition : Un ensemble P est *convexe* si est seulement si

$$\forall (p_1, p_2, \alpha) \in P^2 \times [0, 1], (\alpha p_1 + (1 - \alpha) p_2) \in P$$

C'est à dire que étant donné deux points p_1, p_2 dans l'ensemble P, tout point appartenant au segment de droite reliant p_1 et p_2 appartient également à P.

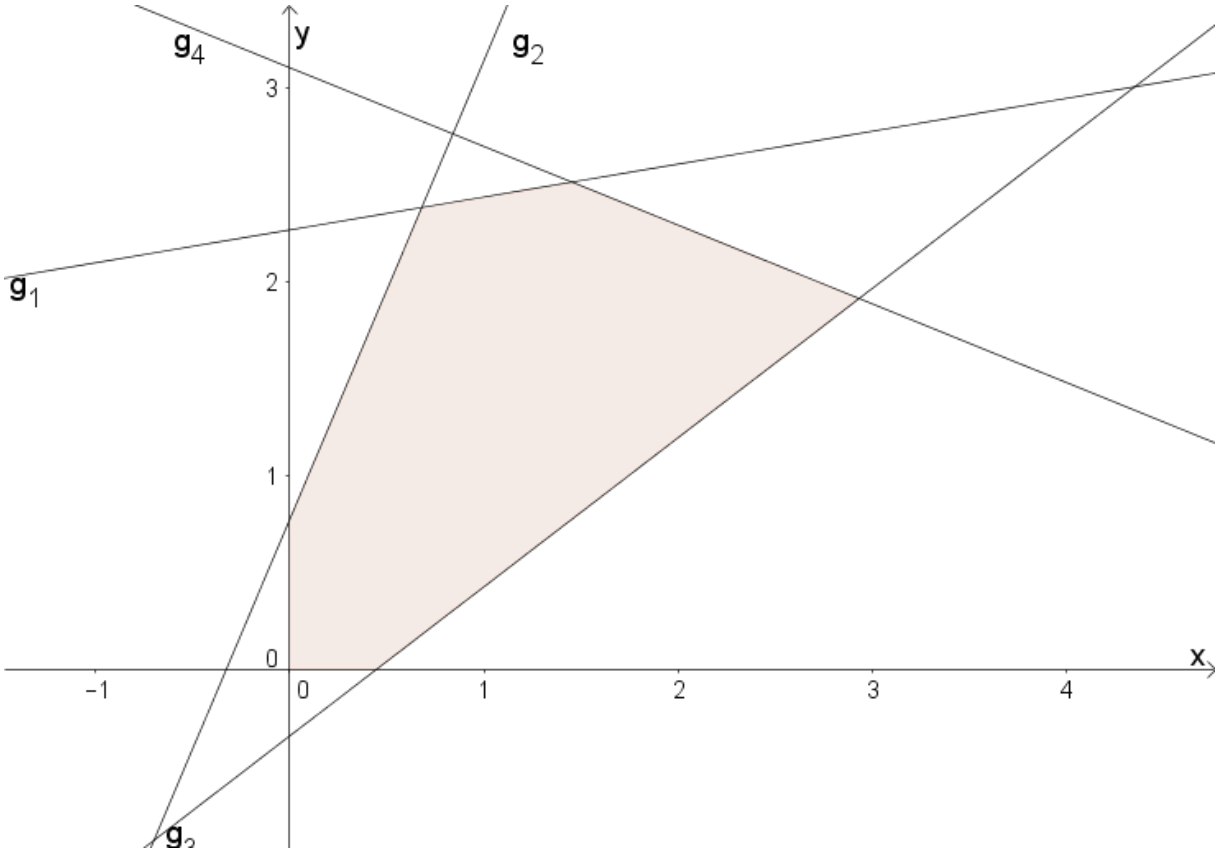
2.4.4 Résultats fondamentaux

Résultat : L'ensemble des solutions admissibles d'un problème linéaire est convexe.

2.5 Algorithme du simplex

2.5.1 Intuition

L'algorithme du simplex résout des problèmes de programmation linéaire continus, et peut être facilement imaginé dans le cas d'un problème à deux variables continues (x, y). Représentons dans le plan chacune des contraintes comme l'ensemble des points satisfaint cette contrainte. L'ensemble des solutions admissibles (qui est l'intersection de toutes ces régions) est alors représenté par un polygone.



On peut prouver que la solution se trouve sur un des sommets du polygone (ce sera fait plus tard). L'algorithme du simplex démarre sur l'un de ces sommets et passe de sommet en sommet vers la solution optimale, toujours en améliorant la solution courante.

2.6 Notes

Le problème dual de

$$Max\ cx$$
$$Ax \leq b$$
$$x \in \mathbb{R}^+$$

est

$$Min\ yb$$
$$yA \geq c$$

Les deux on les même solutions, le premier est un problème d'optimisation de vente, le deuxième optimise la production.

Pour passer du primal au dual :

$$Min\ cx \Rightarrow Max\ (-c)x \Rightarrow Min\ y(-b) \Rightarrow Max\ yb$$

$$Ax \geq b \Rightarrow -Ax \leq -b \Rightarrow y(-A) \geq -c \Rightarrow yA \leq c$$

Slides p. 48 : s.r.s veut dire "sans restriction de signe".

Démonstration de la dualité des problèmes : On a

$$Max\ cx; ax \leq b$$

dual de

$$Min\ yb; yA \geq c$$

On travaille sur

$$Min\ cx; Ax = b \Leftrightarrow Min\ cx; Ax \leq b; Ax \geq b$$

$$\Leftrightarrow Max\ -cx; Ax \leq b; -Ax \leq b \Leftrightarrow Max\ -cx; \tilde{A}x \leq \tilde{b}$$

Avec $\tilde{A}_{2m\times m}$ la superposition de A et $-A$, et pareil pour b.

$$\Leftrightarrow Min\ y\tilde{b}; y\tilde{A} \geq -c$$

$$y \begin{matrix} A \\ -A \end{matrix} \geq -c$$

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m - a_{11}y_{m+1} - a_{21}y_2 - a_{31}y_3 - \cdots - a_{m2}y_m$$

Si on rassemble certains termes, on trouve qu'il n'y a pas de restriction de signe sur y.

$$\Leftrightarrow Min\ yb; yA \geq -b$$

Prenons une solution admissible x de $Ax = b$. Multiplions par y

$$yb = yAx$$

$$\Leftrightarrow yb = yAx \leq cx$$

$$\Leftrightarrow yb \leq cx$$

Le problème primal minimise, et le dual maximise, or la solution du dual est plus petite ou égale à celle du dual.
On a un *duality gap* entre les deux solutions, et on peut en déduire que si ce gap est nul, on a la solution optimale.

Autre démonstration : On a

$$Max\ cx; Ax \leq b$$

dual de

$$Min\ yb; yA \geq c$$

On réécrit

$$Max\ cx; Ax + s \leq b$$

dual de

$$Min\ yb; yA - t \geq c$$

pour deux solutions $\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{y}, \tilde{s}$. On va prouver que si on a

$$\tilde{x} \cdot \tilde{t} = 0$$

$$\tilde{y} \cdot \tilde{y} = 0$$

alors ces solutions sont optimales. Pour cela, commencons par :

$$c\tilde{x} = (\tilde{y}A - t)\tilde{x} = \tilde{y}A\tilde{x} - \tilde{t}\tilde{x}$$

$$= \tilde{y}A\tilde{x} = \tilde{y}(b - \tilde{s}) = \tilde{y}b - \tilde{y}\tilde{s}$$

$$= \tilde{y}b = c\tilde{x}\ \square$$

2.7 Exemples de problèmes de programmation mathématique

Le problème du sac à dos Supposons que, dans l'optique d'une randonnée en montagne, l'on cherche à remplir au mieux un sac à dos avec des aliments ayant chacun un poids et une valeur énergétique, en sachant que l'on ne peut pas porter plus de 16 unités de poids :

	A	B	C
Énergie	5	4	1
Poids	4	2	1

On va représenter le problème comme suit :

$$f(x_A, x_B, x_C) = 5x_A + 4x_B + x_C$$

$$4x_A + 2x_B + x_C \leq 16$$

où x_A, x_B, x_C sont le nombre de fois que l'on mettra un objet A, B ou C respectivement dans le sac.
On cherche donc à maximiser f, car il faut maximiser la valeur nutritionelle totale des aliments dans le sac.
C'est un problème de programmation linéaire.

Le problème du voyageur de commerce Problème bien connu, passons directement à la modélisation en programmation mathématique :
Soit n villes, posons $x_{ij} = 1$ si le voyageur va de la ville i à la ville j, $x_{ij} = 0$ sinon.
Le cout du trajet entre chaque ville est décrit par la matrice $[c_{ij}]_{i,j\in[n]^2}$ Nous cherchons à minimiser la fonction de coût

$$z = \sum_i \sum_j x_{ij} c_{ij}$$

Les contraintes sont les suivantes :

— Il faut que chaque ville soit visitée une seule fois :

$$\sum_i x_{ij} = 1$$

— Il faut aussi que le voyageur parte aussi de chaque ville :

$$\sum_j x_{ij} = 1$$

— Mais il faut également que le graphe ainsi formé soit connexe ! Pour toute partition de l'ensemble V des villes en deux sous-ensembles S et $\bar{S}$ tels que $S \cup \bar{S} = V$ et $S \cap \bar{S} = \emptyset$, il faut qu'il existe un cheMin reliant S et $\bar{S}$:

$$\sum_{s\in S} \sum_{\bar{s}\in\bar{S}} x_{s\bar{s}} \geq 1$$

pour $x_{s\bar{s}} = x_{ij}$ si s et $\bar{s}$ correspondent aux villes i et j respectivement.

Difficulté : L'énumération de toutes les possibilités de cette dernière contrainte prends beaucoup, beaucoup de temps. C'est ce qui explique la nature difficile de ce problème, et qui le rends impossible à résoudre en temps polynomial.

On pourrait être tenté de résoudre le problème en énumérant toutes les solutions possibles, et en prenant la meilleure. On peut trouver facilement que le nombre de solutions possibles est $n!$. Pour $n = 52$ (le problème tel que posé pour visiter tous les états des États-Unis), on a à une vache près 10^{69} solutions. Leur énumération est simplement impossible, même avec le plus puissant des ordinateur connus.