# ΣΥΣΤΉΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΉΣ

5Η ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΘΟΔΩΡΗΣ ΑΡΑΠΗΣ – EL18028

6 ΙΟΥΝΙΟΥ, 2023

| **Ονοματεπώνυμο:** Θοδωρής Αράπης | **ΑΜ:** el18028 |
| --- | --- |

# Δίκτυο με εναλλακτική δρομολόγηση:

## (1)

Προκειμένου να μπορέσουμε να μοντελοποιήσουμε τους συνδέσμους σαν M/M/1 ουρές, είναι απαραίτητο να κάνουμε τις παρακάτω παραδοχές:

- Τυχαίες, με Poisson κατανομή, εξωτερικές αφίξεις.
- Τυχαία δρομολόγηση πακέτων βάσει των πιθανοτήτων $\alpha, (1-\alpha)$.
- Οι χρόνοι εξυπηρέτησης πακέτων (εκθετική κατανομή εξυπηρέτησης), καθώς αυτά διαπερνούν το δίκτυο, δε διατηρούν την τιμή τους (Μαρκοβιανή ιδιότητα έλλειψης μνήμης), αλλά αποκτούν χρόνο εξυπηρέτησης ανάλογα με την κατανομή του κάθε εξυπηρετητή (παραδοχή ανεξαρτησίας εξυπηρετητών Kleinrock).
- Άπειρες ουρές χωρίς απώλειες, με FCFS εξυπηρέτηση.

## (2)

Είναι $\lambda$ ο ρυθμός αφίξεων στον κόμβο 1. Ο ρυθμός αφίξεων στον κόμβο 2 θα είναι τότε $\lambda_1 = (\alpha\lambda)$ μέσω της γραμμής 1 και $\lambda_2 = [(1-\alpha)\lambda]$ μέσω της γραμμής 2. Επομένως:

- **<u>Από τη γραμμή 1:</u>**

  $\lambda_{2\_1} = \alpha\lambda$ και $\mu_1 = \frac{15\cdot 10^6\ (bits/sec)}{8\cdot 128\ (bits)} = 14648.4375\ packets/sec$. Επομένως,

$$\boldsymbol{E[n_1]} = \frac{\lambda_1}{\mu_1 - \lambda_1} = \frac{\boldsymbol{\alpha\lambda}}{\boldsymbol{\mu_1 - \alpha\lambda}} \qquad \kappa\alpha\iota$$

$$\boldsymbol{E[T_1]} = \frac{E[n_1]}{\lambda_1} = \frac{\left(\frac{\alpha\lambda}{\mu_1 - \alpha\lambda}\right)}{\alpha\lambda} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\mu_1 - \alpha\lambda}}$$

- **<u>Από τη γραμμή 2:</u>**

  $\lambda_{2\_2} = (1-\alpha)\lambda$ και $\mu_2 = \frac{12\cdot 10^6\ (bits/sec)}{8\cdot 128\ (bits)} = 11718.75\ packets/sec$. Επομένως,

$$\boldsymbol{E[n_2]} = \frac{\lambda_2}{\mu_2 - \lambda_2} = \frac{\boldsymbol{(1-\alpha)\lambda}}{\boldsymbol{\mu_2 - (1-\alpha)\lambda}} \qquad \kappa\alpha\iota$$

$$\boldsymbol{E[T_2]} = \frac{E[n_2]}{\lambda_2} = \frac{\left(\frac{(1-\alpha)\lambda}{\mu_2 - (1-\alpha)\lambda}\right)}{(1-\alpha)\lambda} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\mu_2 - (1-\alpha)\lambda}}$$

Συνολικά, ο μέσος χρόνος καθυστέρησης ενός πακέτου στο σύστημα είναι:

$$\boldsymbol{E[T]} = \frac{E[n_1] + E[n_2]}{\lambda} = \frac{\left(\frac{\alpha\lambda}{\mu_1 - \alpha\lambda}\right) + \left(\frac{(1-\alpha)\lambda}{\mu_2 - (1-\alpha)\lambda}\right)}{\lambda} = \boldsymbol{\frac{\alpha}{\mu_1 - \alpha\lambda} + \frac{(1-\alpha)}{\mu_2 - (1-\alpha)\lambda}}$$

Για $\mu_1 = \frac{C_1}{8 \cdot 128\ bits} = \frac{\frac{15}{12} \cdot C_2}{8 \cdot 128\ bits} = 1.25\mu_2$ έχουμε:

$$\boldsymbol{E[T]} = \frac{\alpha}{1.25\mu_2 - \alpha\lambda} + \frac{(1-\alpha)}{\mu_2 - (1-\alpha)\lambda} = \frac{\alpha[\mu_2 - (1-\alpha)\lambda] + (1-\alpha)(1.25\mu_2 - \alpha\lambda)}{(1.25\mu_2 - \alpha\lambda)[\mu_2 - (1-\alpha)\lambda]}$$

$$= \frac{\mu_2\alpha - \lambda\alpha + \lambda\alpha^2 + 1.25\mu_2 - \lambda\alpha - 1.25\mu_2\alpha + \lambda\alpha^2}{1.25\mu_2{}^2 - 1.25\lambda\mu_2 + 1.25\lambda\mu_2\alpha - \lambda\mu_2\alpha + \lambda^2\alpha - \lambda^2\alpha^2} \Longrightarrow$$

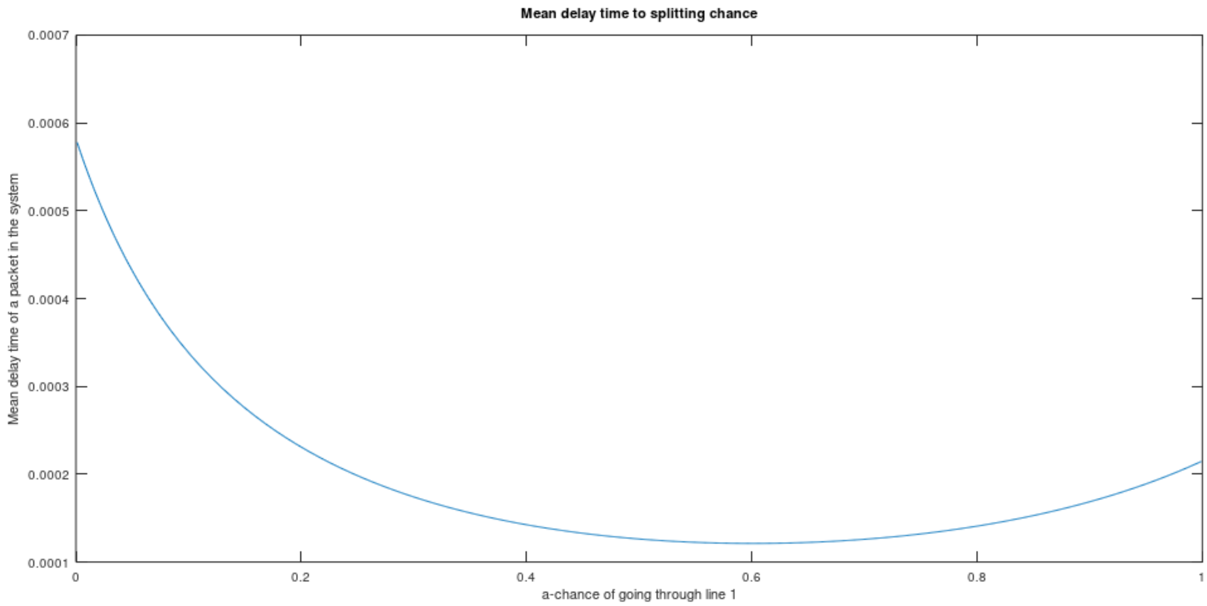
$$\boldsymbol{E[T]} = \boldsymbol{\frac{2\lambda\alpha^2 - (2\lambda + 0.25\mu_2)\alpha + 1.25\mu_2}{(-\lambda^2)\alpha^2 + (0.25\lambda\mu_2 + \lambda^2)\alpha + 1.25\mu_2(\mu_2 - \lambda)}}$$

(Λάβαμε τη ζητούμενη μέση καθυστέρηση συναρτήσει όχι μόνο του α, αλλά και των παραμέτρων μ2, λ σε περίπτωση που επιθυμούμε πληρέστερη ανάλυση).

Εκτελούμε σε Octave τη ζητούμενη προσομοίωση, οπότε και λαμβάνουμε τα εξής αποτελέσματα αναφορικά με τον ελάχιστο χρόνο καθυστέρησης E(T)_min, καθώς και για την τιμή του α για την οποία αυτός προκύπτει:

```
E(T) is minimized for a = 0.601000
E(T)_min = 0.000121
```

Η γραφική παράσταση του μέσου χρόνου καθυστέρησης ενός τυχαίου πακέτου στο σύστημα συναρτήσει του α:




Ο κώδικας που υλοποιεί τα παραπάνω:

```
# Task 5
# Δίκτυο με εναλλακτική δρομολόγηση
# 2)

clc;
clear all;
close all;

a = [0.001 : 0.001 : 0.999];
lambda = 10^4;
pack_length = 128 * 8;          #In bits
C2 = 12 * 10^6;                 #In bits/s
m2 = C2/pack_length;
Numerator = (2 * lambda) * a.^2 - (2 * lambda + 0.25 * m2) * a + 1.25 * m2;
Denominator = (-(lambda)^2) * a.^2 + (0.25 * m2 * lambda + (lambda)^2 ) * a + 1.25 * m2 * (m2 - lambda);
mean_delay = Numerator./Denominator;

figure(1);
plot(a, mean_delay);
xlabel("a-chance of going through line 1");
ylabel("Mean delay time of a packet in the system");
title("Mean delay time to splitting chance");

min_mean = mean_delay(1);
index = a(1);
for i = 2 : columns(a)
  if(mean_delay(i) < min_mean)
    min_mean = mean_delay(i);
    index = a(i);
  endif
endfor

printf("E(T) is minimized for a = %f\n", index);
printf("E(T)_min = %f\n", min_mean);
```

# Ανοιχτό δίκτυο ουρών αναμονής:

## (1)

Παρατηρούμε αρχικά πως έχουμε είσοδο/έξοδο από/στον έξω κόσμο, επομένως έχουμε ανοικτό δίκτυο. Οι απαραίτητες παραδοχές που πρέπει να γίνουν, έτσι ώστε να μπορούμε να μελετήσουμε το ανοιχτό δίκτυο με το θεώρημα Jackson είναι οι εξής:

- Τυχαίες εξωτερικές αφίξεις $\sim$ Poisson
- Τυχαία δρομολόγηση πελατών βάσει των πιθανοτήτων διάσπασης
- Ανεξάρτητες εκθετικές εξυπηρετήσεις πελατών, βασισμένοι στην παραδοχή Kleinrock περί ανεξαρτησίας εξυπηρετητών.
- Άπειρες FIFO ουρές, χωρίς απώλειες.

## (2)

Η ένταση του φορτίου $\rho_i$, που δέχεται η κάθε ουρά συναρτήσει των παραμέτρων $\lambda_i$ (ρυθμός αφίξεων) και $\mu_i$ (ρυθμός εξυπηρετήσεων) είναι:

- $\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}$
- $\rho_2 = \frac{\lambda_2+(2/7)\lambda_1}{\mu_2}$
- $\rho_3 = \frac{(4/7)\lambda_1}{\mu_3}$
- $\rho_4 = \frac{(1/2)(4/7)\lambda_1+(1/7)\lambda_1}{\mu_4}$
- $\rho_5 = \frac{\lambda_2+(2/7)\lambda_1+(1/2)(4/7)\lambda_1}{\mu_5}$

Παρακάτω, ο κώδικας για τη συνάρτηση **intensities** (όπου η συνθήκη εργοδικότητας είναι $\rho_i < 1$):

```
# Task 5
# Ανοιχτό δίκτυο ουρών αναμονής
# (2)

clc;
clear all;
close all;

function [v1,v2,v3,v4,v5] = intensities(l1,l2,m1,m2,m3,m4,m5)
  ergodic = [0, 0, 0 ,0, 0];
  v1 = l1./m1;
  if(v1 < 1)
    ergodic(1) = 1;
  endif
  v2 = (l2 + (2/7) .* l1)./m2;
  if(v2 < 1)
    ergodic(2) = 1;
  endif
  v3 = ((4/7) * l1)/m3;
  if(v3 < 1)
    ergodic(3) = 1;
  endif
  v4 = ((1/7) .* l1 + (1/2) .* ((4/7) .* l1)) ./ m4;
  if(v4 < 1)
    ergodic(4) = 1;
  endif
  v5 = ((l2 + (2/7) .* l1) + (1/2) .* ((4/7) .* l1))./m5;
  if(v5 < 1)
    ergodic(5) = 1;
  endif
  for i = ergodic
    if (i == 0)
      printf("Non-Ergodic System (0)\n");
      break;
    endif
  endfor
  if(i)
    printf("Ergodic System (1)\n");
  endif
endfunction
```

Εκτελώντας την για "εργοδικούς" συνδυασμούς (π.χ. $\lambda_i = 1$ και $\mu_i = 10$) και για μη εργοδικούς ($\lambda_i = 10$ και $\mu_i = 1$), λαμβάνουμε τα εξής αποτελέσματα:

```
>> [x1, x2, x3, x4, x5] = intensities(1, 1, 10, 10, 10, 10, 10)

Ergodic System (1)
x1 = 0.1000
x2 = 0.1286
x3 = 0.057143
x4 = 0.042857
x5 = 0.1571
>> [y1, y2, y3, y4, y5] = intensities(10, 10, 1, 1, 1, 1, 1)

Non-Ergodic System (0)
y1 = 10
y2 = 12.857
y3 = 5.7143
y4 = 4.2857
y5 = 15.714
```

# (3)

Ο μέσος αριθμός πελατών της κάθε ουράς $Q_i$ δίνεται από τη σχέση:

$$\boldsymbol{E[n_1] = \frac{\rho_i}{1-\rho_i}}$$

Υλοποιούμε, συνεπώς, τη συνάρτηση **mean_clients**, και στη συνέχεια την εκτελούμε για $\lambda_1 = 1,\ \lambda_1 = 2,\ \mu_1 = 3,\ \mu_2 = 4,\ \mu_3 = 5,\ \mu_4 = 6,\ \mu_5 = 7$:

```
# Task 5
# Ανοιχτό δίκτυο ουρών αναμονής:
# (3)

task5_2_2_intensities
function [x1,x2,x3,x4,x5] = mean_clients(l1,l2,m1,m2,m3,m4,m5)
[t1,t2,t3,t4,t5] = intensities(l1,l2,m1,m2,m3,m4,m5);
x1 = t1./(1-t1); #E[n_1]
x2 = t2./(1-t2); #E[n_2]
x3 = t3./(1-t3); #E[n_3]
x4 = t4./(1-t4); #E[n_4]
x5 = t5./(1-t5); #E[n_5]
endfunction
```

```
>> [x1, x2, x3, x4, x5] = mean_clients(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)
Ergodic System (1)
x1 = 0.5000
x2 = 1.3333
x3 = 0.1290
x4 = 0.076923
x5 = 0.5806
```

# (4)

## (α)

Για τις δοθείσες τιμές, η ένταση που δέχεται κάθε ουρά είναι:

```
>> [vol1, vol2, vol3, vol4, vol5] = intensities(4, 1, 6, 5, 8, 7, 6)
Ergodic System (1)
vol1 = 0.6667
vol2 = 0.4286
vol3 = 0.2857
vol4 = 0.2449
vol5 = 0.5476
```

## (β)

Ο μέσος χρόνος καθυστέρησης ενός πελάτη από άκρο σε άκρο του δικτύου, υπολογίζεται παρακάτω μέσω της σχέσης

$$\boldsymbol{E[T] = \frac{E[n_1] + E[n_2] + E[n_3] + E[n_4] + E[n_5]}{\lambda_1 + \lambda_2}}$$

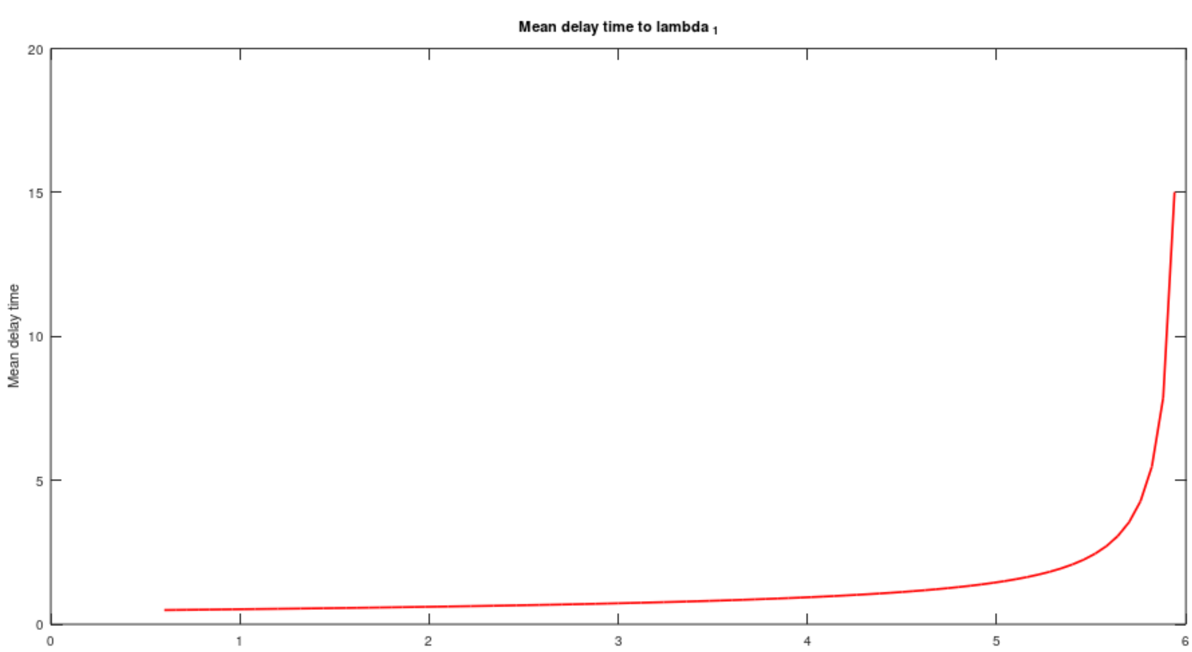
```
>> [mean1, mean2, mean3, mean4, mean5] = mean_clients(4, 1, 6, 5, 8, 7, 6)
Ergodic System (1)
mean1 = 2.0000
mean2 = 0.7500
mean3 = 0.4000
mean4 = 0.3243
mean5 = 1.2105
>> delay = (mean1 + mean2 + mean3 + mean4 + mean5) / (4 + 1)
delay = 0.9370
```

## (5)

Από τα παραπάνω αποτελέσματα, παρατηρούμε πως μεγαλύτερη ένταση δέχεται η ουρά 1, η οποία, επομένως αποτελεί και τη στενωπό του δικτύου. Είδαμε πως η ένταση της ουράς 1 δίνεται από τη σχέση $\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}$, επομένως, για $\mu_1 = 6$, η μέγιστη τιμή του $\lambda_1$, ώστε να παραμένει εργοδικό το σύστημα $\left(\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} < 1\right)$ είναι $\lambda_1 = 6$. (κανονικά είναι κάτι μικρότερο του 6 καθώς το σύστημα δεν είναι εργοδικό για $\rho = 1$)

## (6)

Η ζητούμενη γραφική παράσταση:



Όπως αναμενόταν, για μικρό λ1, έχουμε μικρή ένταση, άρα και μικρή καθυστέρηση.

Ο κώδικας που την υλοποιεί:

```
# Task 5
# Ανοιχτό δίκτυο ουρών αναμονής
# (3)

task5_2_3_mean_clients

lambda1 = 0.6 : 0.06 : 5.94; #from 10% of lambda1 max to 99% of it
lambda2 = 1;
m1 = 6;
m2 = 5;
m3 = 8;
m4 = 7;
m5 = 6;
total_in = (lambda1 .+ lambda2);
[mean1,mean2,mean3,mean4,mean5] = mean_clients(lambda1,lambda2,m1,m2,m3,m4,m5);
figure(1)
total_mean = mean1 + mean2 + mean3 + mean4 + mean5
mean1
delay_mean = total_mean ./ total_in;
plot(lambda1, delay_mean, "r", "linewidth", 1.3);
xlabel("\lambda _1 - from 10% to 99% of it's maximum value");
ylabel("Mean delay time");
title("Mean delay time to \lambda _1");
```

*Σημείωση:* Σε όλες τις συναρτήσεις, καθώς και στο τελευταίο πρόγραμμα που υλοποιεί την γραφική παράσταση έχουν τεθεί element-wise operators για να γίνει η γραφική παράσταση. Αν οι τιμές των $\lambda_i$, $\mu_i$ είναι "απλές" και όχι πίνακες, οι συναρτήσεις ορίζονται και με απλούς operators (χωρίς την ".").