

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования

«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»  
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики  
Кафедра информатики и вычислительной математики

**Направление подготовки / специальность:** 03.03.01 Прикладные математика и  
физика (бакалавриат)

**Направленность (профиль) подготовки:** Математическое моделирование,  
вычислительная математика и физика

# КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ИНДУСТРИАЛЬНЫХ ЛЕДОВЫХ КОНСТРУКЦИЯХ

(бакалаврская работа)

**Студент:**  
Сергеев Фёдор Игоревич

(подпись студента)

**Научный руководитель:**  
Петров Игорь Борисович,  
чл.-корр., д. физ.-мат. наук, проф.

(подпись руководителя)

**Консультант (при наличии):**  
Хохлов Николай Игоревич,  
канд. физ.-мат. наук

(подпись консультанта)

Москва  
2020

## Аннотация

Целью данной работой является проведение компьютерного моделирования волновых процессов, происходящих при эксплуатации искусственных ледовых нефтедобывающих платформ, а также исследование использования поглощающих граничных условий PML совместно с сеточно-характеристическим методом для задач вычислительной геофизики.

В рамках выполнения работы было:

- Проведено моделирование распространения волн упругости в ледовом острове, воде и грунте при бурении.
- Произведён расчёт распределения напряжений в ледовом острове при статической нагрузке.
- Проведено сравнение эффективности работы поглощающих граничных условий Mur, Beringer PML и split-field PML для двумерной системы уравнений акустики.
- Исследована возможность применения поглощающих граничных условий Beringer PML и split-field PML совместно с сеточно-характеристического методом для двумерной системы уравнений акустики и двумерной системы уравнений эластодинамики.

# Содержание

<b>1 Введение</b>	<b>3</b>
<b>2 Моделирование динамических процессов в ледовом острове</b>	<b>3</b>
2.1 Постановка задачи . . . . .	4
2.2 Математическая модель среды . . . . .	5
2.2.1 Уравнения . . . . .	5
2.2.2 Контактные условия . . . . .	5
2.2.3 Граничные условия . . . . .	7
2.3 Численный метод . . . . .	8
2.3.1 Сеточно-характеристический метод . . . . .	8
2.3.2 Схема Куранта-Изаксона-Риса . . . . .	11
2.3.3 Схема Русанова . . . . .	11
2.3.4 Схема TVD 2-го порядка аппроксимации . . . . .	12
2.4 Моделирование воздействия бура . . . . .	13
2.5 Моделирование статической нагрузки . . . . .	13
2.6 Выводы . . . . .	15
<b>3 Поглощающие граничные условия для двумерной системы уравнений акустики</b>	<b>15</b>
3.1 Уравнения акустики . . . . .	16
3.2 Численное решение системы уравнений акустики . . . . .	17
3.2.1 Метод конечных разностей . . . . .	17
3.2.2 Сеточно-характеристический метод . . . . .	18
3.3 Виды поглощающих граничных условий . . . . .	19
3.4 Поглощающие граничное условие Mir . . . . .	19
3.5 Berenger PML . . . . .	20
3.6 Split-field PML . . . . .	22
3.7 Решение PML-систем методом конечных разностей . . . . .	22
3.8 Решение PML-систем сеточно-характеристическим методом . . . . .	23
3.8.1 Berenger PML . . . . .	23
3.8.2 Split-Field PML . . . . .	25
3.9 Численные эксперименты . . . . .	26
3.9.1 Область моделирования . . . . .	27
3.9.2 Начальные условия . . . . .	27
3.9.3 Методы оценки качества поглощения . . . . .	28
3.9.4 Результаты . . . . .	29

## 1. Введение

В настоящее время особенный интерес для нефтегазовой индустрии представляет добыча полезных ископаемых на Арктическом шельфе с использованием искусственных ледовых островов. Они обладают рядом преимуществ перед традиционными бетонными и металлическими нефтегазовыми платформами:

- Основной строительный материал, лёд, в Арктике доступен и дешев.
- При использовании местного строительного материала, платформа является абсолютно экологически чистой.
- В летний период лёд тает сам по себе, тем самым избавляя от необходимости проведения полного демонтажа несущих конструкций при завершении работы платформы. Это особенно важно для упрощения и удешевления проведения разведочного бурения.

При использовании ледовых островов возникает и ряд проблем. Важнейшей является обеспечение безопасности персонала и установок, находящихся на поверхности острова. Устойчивости и целостности льда угрожают как механические воздействия (бурение, сейсмическая активность, статическая нагрузка, столкновение с айсбергами), так и тепловые воздействия (солнечная радиация, тёплые течения).

В данной работе произведено численное моделирование распространение упругих волн в ледовом острове, воде и грунте при бурении и сейсмической активности. Проанализировано влияние этих процессов, а также статической нагрузки на целостность льда.

Для численного моделирования вышеописанных процессов также требуется разработка новых методов численного моделирования. В данной работе рассматривается применения поглощающего граничного условия Perfectly Matched Layer

## 2. Моделирование динамических процессов в ледовом острове

### 2.1 Постановка задачи

Рассмотрим в двумерном случае ледовый остров шириной 300 м. и высотой 10 м., покоящийся на дне моря глубиной 8 м.

Грунт под островом будем считать состоящим из придонного слоя глубиной 10 м. и слоя осадочных пород глубиной 600 м. В некоторых случаях мы будем также рассматривать газоносный слой, находящийся под слоем осадочных пород. Параметры рассматриваемых сред приведены в табл. 1.

Ставятся следующие задачи

1. Исследовать распространение акустических и упругих волн от бура, расположенного посередине длины острова на глубине 20 м., с учётом наличия газоносного слоя (см. рис. 1).



Рис. 1: Постановка задачи о бурении.

2. Найти распределение напряжений в ледовом острове при наличии здания на поверхности острова (см. рис. 2)<sup>1</sup>. Оценить максимальную величину статической нагрузки, которая не приводит к разрушению льда. Найти области острова, наиболее подверженные разрушению.

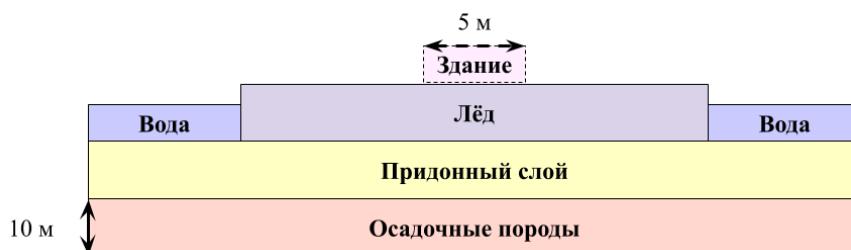


Рис. 2: Постановка задачи о статической нагрузке.

<sup>1</sup>Здесь линейные размеры совпадают с задачей о бурении, если не указано обратное.

	Среда	$c_p$ , м/с	$c_s$ , м/с	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>
Лёд	3940	2493	917	
Вода	1500	—	1025	
Придонный грунт	1806	316	2000	
Осадочные породы	2250	1000	2000	

Таблица 1: Параметры рассматриваемых сред.

## 2.2 Математическая модель среды

### 2.2.1 Уравнения

Рассматриваемые среды (см. таблицу табл. 1) будем считать сплошными, однородными, изотропными и несжимаемыми. В описанной постановке присутствуют как жидкие среды (вода, окружающая остров), так и твёрдые среды (лёд и слои грунта).

Жидкие среды в двумерном случае в декартовой эйлеровой системе координат описываются акустическим волновым уравнением

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \vec{v}(x, y, t)}{\partial t} = -\nabla p(x, y, t) \\ \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial t} = -\rho c^2 \operatorname{div} \vec{v}(x, y, t) \end{cases} \quad (1)$$

где  $\rho$  — плотность среды,  $\vec{v}(x, y, t)$  — вектор скорости (производная вектора смещения частицы среды  $\vec{u}(x, y, t)$  по времени),  $p(x, y, t)$  — давление,  $c$  — скорость звука в жидкости.

Твёрдые среды в двумерном случае в декартовой эйлеровой системе координат описываются уже упругим волновым уравнением

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \vec{v}(x, y, t)}{\partial t} = \operatorname{div}^T \boldsymbol{\sigma}(x, y, t) \\ \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(x, y, t)}{\partial t} = \rho \left( c_p^2 - 2c_s^2 \right) \operatorname{div} \vec{v}(x, y, t) \mathbf{I} + \rho c_s^2 \left( \nabla \otimes \vec{v}(x, y, t) + [\nabla \otimes \vec{v}(x, y, t)]^T \right) \end{cases} \quad (2)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}(x, y, t)$  — симметричный тензор напряжений Коши второго ранга,  $c_p$  и  $c_s$  — скорости продольной и поперечной волн соответственно,  $\mathbf{I}$  — единичный тензор второго ранга, операция  $\otimes$  — тензорное произведение векторов.

Далее для краткости мы будем опускать значок у вектора скорости, то есть будем писать  $v$ , подразумевая при этом вектор  $\vec{v}$ . Также мы будем опускать параметры  $(x, y, t)$  у зависящих от них величин.

### 2.2.2 Контактные условия

Между средами необходимо поставить контактные условия, которые изображены на рис. 3 (они одинаковы для задачи о буре и задачи о статической нагрузке).

Здесь и далее мы будем обозначать контактирующие среды (или расчётные сетки) индексами  $L$  и  $R$  — левая и правая среды соответственно. Вектор внешней нормали к левой под-области обозначим как  $n$ .

- Контактное условие полного слипания ставится между слоями твёрдых сред. Физически оно означает возможность беспрепятственного распространения упругих волн. Для этого требуется равенство скоростей и векторов нормального напряжения на границе раздела.

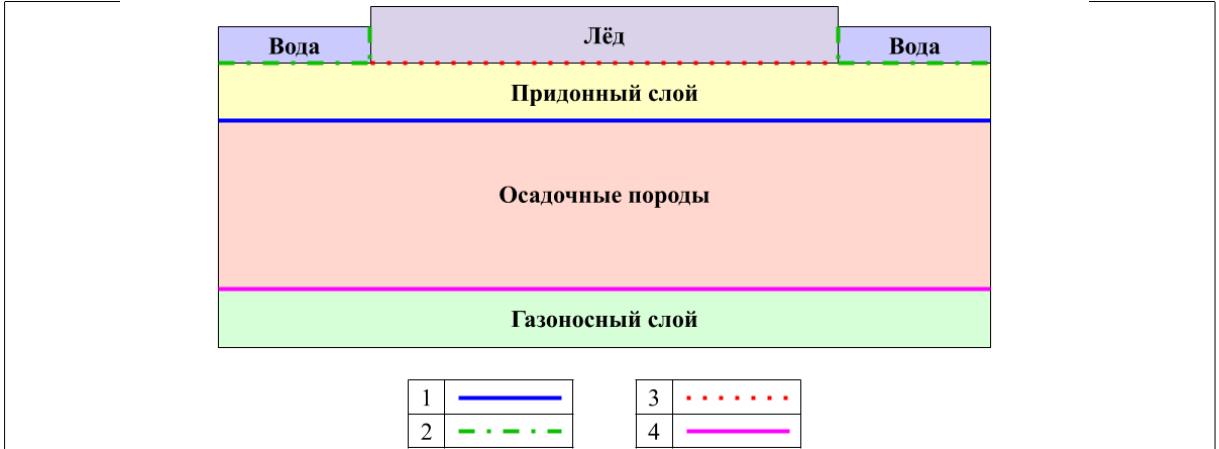


Рис. 3: Схема контактных условий: 1 — контактное условие полного слипания, 2 — контактное условие между упругой и акустической средами, 3 — контактное условие скольжения, 4 — контактное условие отражения.

Математически условие полного слипания записывается следующим образом

$$\begin{cases} v_L = v_R \\ \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}_R \cdot \mathbf{n} \end{cases} \quad (3)$$

2. Контактное условие между упругой и акустической средой используется для реализации перехода волн из твёрдых сред в жидкость и обратно. Оно отличается от условий полного слипания, т.к. в данном случае контактирующие среды описываются разными уравнениями (см. (1) и (2)).

Если считать, что акустическая среда отвечает индексу  $L$ , а упругая —  $R$ , то данное условие запишется как

$$\begin{cases} v_L \cdot \mathbf{n} = v_R \cdot \mathbf{n} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} + p\mathbf{n} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Физически это условие означает не-протекание жидкости в твёрдое тело, и наоборот. Для этого требуется равенство нормальных скоростей. первое уравнение, и равенство нормального вектора напряжений на контактной границе, второе уравнение.

3. Контактное условие свободного скольжения ставится между ледовым островом и грунтом. В отличие от случая контакта двух слоёв грунта, когда применяется условие полного слипания, лёд и придонный слой могут двигаться друг относительно друга. Это явление известно на практике, так, например, наблюдается "соскальзывание" ледников с поверхностей гор. Таким образом требуется использование специального контактного условия.

$$\begin{cases} v_L \cdot \mathbf{n} = v_R \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_R \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{L/R} \cdot \mathbf{n} = \sigma_{L/R} \cdot \mathbf{n} \end{cases} \quad (5)$$

4. Контактное условие полного отражения (свободной границы) ставится на гра-

нице раздела осадочных пород и газоносного слоя. Применение такого условия не является вполне физически верным, однако для нашей задачи его применение вполне оправдано.

$$\sigma \cdot n = 0 \quad (6)$$

### 2.2.3 Границные условия

Границные условия области изображены на рис. 4 для задачи о бурении и на рис. 2 для задачи о статической нагрузке.



Рис. 4: Схема граничных условий для задачи о бурении: а — граничное условие поглощения, б — граничное условие нулевого давления.



Рис. 5: Схема граничных условий для задаче о статической нагрузке: а — граничное условие поглощения, б — граничное условие нулевого давления, с — граничное условие постоянного давления.

- а. Поглощающие (не-отражающие) граничные условия используются при рассмотрении ограниченной под-области бесконечного физического региона. В данном случае водянной, придонный, газоносный слои и слой осадочных пород продолжаются за границы расчётной области налево, направо и, для газоносного слоя, вниз. Поэтому на их краях необходимо использовать поглощающие граничные условия.<sup>2</sup>

Для упругих сред это условие запишется в виде

<sup>2</sup>Поглощающие условия будут рассмотрены подробнее в главе 3.

$$\begin{cases} v_{l-2}^n = v_{l-1}^n = v_l^n \\ \sigma_{l-2}^n = \sigma_{l-1}^n = \sigma_l^n \end{cases} \quad (7)$$

А для акустических сред в виде

$$\begin{cases} v_{l-2}^n = v_{l-1}^n = v_l^n \\ p_{l-2}^n = p_{l-1}^n = p_l^n \end{cases} \quad (8)$$

здесь верхний индекс  $n$  обозначает момент времени  $t_n$ , а нижний — номер сечочного узла, при этом узел  $l$  является граничным, а узлы  $l - 1$  и  $l - 2$  — его соседями по одной из осей. Такая форма записи будет верна для левой, правой и нижней границе при соответствующем выборе значений координатных индексов.

- b. Граничное условие нулевого давления применяется на границе сред с воздухом. В нашей задаче мы не учитываем влияние атмосферного давления на исследуемые процессы, считая его пренебрежимо малым. Следовательно мы принимаем  $p = 0$  на границах вода-воздух и лёд-воздух.
- c. Граничное условие постоянного давление задаёт давление здания на поверхность льда  $p = \sigma_{yy} = P_0$ ,  $\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = 0$ , не зависящее от времени.

## 2.3 Численный метод

### 2.3.1 Сеточно-характеристический метод

Для решения систем уравнений в частных производных (2) и (1) воспользуемся сеточно-характеристическим методом на регулярных прямоугольных сетках. Получим его для системы (1), описывающей упругие среды. Для системы (1) он получается абсолютно аналогично если учесть, что для акустических сред  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = p$  и  $\sigma_{xy} = 0$ .

Будем работать в декартовой прямоугольной системе координат. Введём обозначение

$$\varphi = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Нижние индексы здесь обозначают соответствующие компоненты вектора скорости  $v$  и тензора напряжений  $\sigma$ .

Запишем гиперболическую полную систему линейный дифференциальных уравнений в частных производных (2) в канонической матричной форме

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ -(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Здесь  $\lambda$  и  $\mu$  — параметры Ламе, которые выражаются через заданные для конкретных сред скорости продольных и поперечных волн

$$\begin{cases} c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \\ c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \lambda = (c_p^2 - 2c_s^2)\rho \\ \mu = c_s^2\rho \end{cases} \quad (14)$$

Используя метод расщепления для системы, записанной в каноническом виде, получим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_x}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Заметим, что матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  можно диагонализовать

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}_1^{-1} \boldsymbol{\Lambda}_1 \mathbf{S}_1$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}_2^{-1} \boldsymbol{\Lambda}_2 \mathbf{S}_2$$

$$\mathbf{S}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\lambda^2\rho}} & -\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\lambda^2\rho}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\mu\rho}} & -\frac{1}{\sqrt{\mu\rho}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\mu}{\lambda} + 1 & \frac{2\mu}{\lambda} + 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{\mu\rho}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{\mu\rho}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \sqrt{\frac{\lambda^2\rho}{4(\lambda+2\mu)}} & 0 & \frac{\lambda}{2\lambda+4\mu} & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{\lambda^2\rho}{4(\lambda+2\mu)}} & 0 & \frac{\lambda}{2\lambda+4\mu} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\mu\rho} & -\frac{1}{\mu\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{(\lambda+2\mu)\rho}} & -\frac{1}{\sqrt{(\lambda+2\mu)\rho}} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} & \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{\mu\rho}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{\mu\rho}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \sqrt{\frac{\lambda^2\rho}{4(\lambda+2\mu)}} & 0 & \frac{\lambda}{2\lambda+4\mu} & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{\lambda^2\rho}{4(\lambda+2\mu)}} & 0 & \frac{\lambda}{2\lambda+4\mu} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_p \end{pmatrix}$$

Домножим слева первое уравнение системы (15) на  $S_1$  а второе — на  $S_2$ , при этом диагонализуя матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ .

$$\begin{cases} \mathbf{S}_1 \frac{\partial \varphi_x}{\partial t} + \mathbf{S}_1 (\mathbf{S}_1^{-1} \Lambda_1 \mathbf{S}_1) \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = 0 \\ \mathbf{S}_2 \frac{\partial \varphi_y}{\partial t} + \mathbf{S}_2 (\mathbf{S}_2^{-1} \Lambda_2 \mathbf{S}_2) \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Пользуясь тем, что матрицы  $\mathbf{S}_1$  и  $\mathbf{S}_2$  не зависят ни от времени, ни от координаты, вносим их в частные производные по времени и пространственным координатам

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{S}_1 \varphi_x) + \Lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{S}_1 \varphi_x) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{S}_2 \varphi_y) + \Lambda_2 \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{S}_2 \varphi_y) = 0 \end{cases}$$

Производя замену (переход к инвариантам Римана)

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \mathbf{S}_1 \varphi_x \\ \omega_2 &= \mathbf{S}_2 \varphi_y \end{aligned} \tag{16}$$

получаем систему

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega_1}{\partial t} + \Lambda_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial t} + \Lambda_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial y} = 0 \end{cases} \tag{17}$$

Произведённая замена (16) очевидно обратимая, так как матрицы  $\mathbf{S}_i$ ,  $i = 1, 2$  обратимы

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \mathbf{S}_1^{-1} \omega_1 \\ \varphi_y &= \mathbf{S}_2^{-1} \omega_2 \end{aligned} \tag{18}$$

Так как матрицы  $\Lambda_i$ ,  $i = 1, 2$  диагональные, то система (17) представляет собой 10 независимых скалярных уравнений переноса.

Таким образом общая схема решения систем (2) и (1) следующая

1. Произвести переход к инвариантам Римана (16).
2. Решить систему независимых одномерных линейных уравнений переноса (17).
3. Осуществить обратный переход к физическим переменным (18).

Заметим, что выбор метода решения одномерного уравнения переноса является открытым. При этом именно он определяет порядок аппроксимации всего сеточно-характеристического численного метода. Приведём несколько наиболее часто используемых схем для решения одномерного линейного уравнения переноса на скалярную величину  $q$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \lambda \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad \lambda = \text{const} \quad (19)$$

Также будем использовать запись этого уравнения через поток  $f$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} &= 0 \\ f &= \lambda u \end{aligned} \quad (20)$$

### 2.3.2 Схема Куранта-Изаксона-Риса

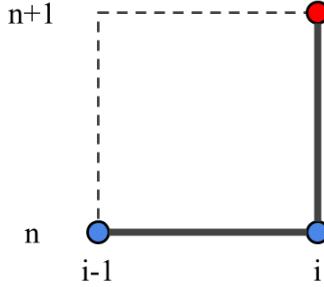


Рис. 6: Шаблон схемы Куранта-Изаксона-Риса.

Схема Куранта-Изаксона-Риса для решения уравнения (19) определяется как [1] [2]

$$\begin{cases} \frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} + \lambda \frac{q_i^n - q_{i-1}^n}{h} = 0 & , \lambda > 0 \\ \frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} + \lambda \frac{q_{i+1}^n - q_i^n}{h} = 0 & , \lambda < 0 \end{cases} \quad (21)$$

Данная схема имеет первый порядок аппроксимации по времени и по пространству и является устойчивой при выполнении условия Куранта-Фридрихса-Леви

$$C = \left| \frac{\lambda \tau}{h} \right| \leq 1 \quad (22)$$

### 2.3.3 Схема Русанова

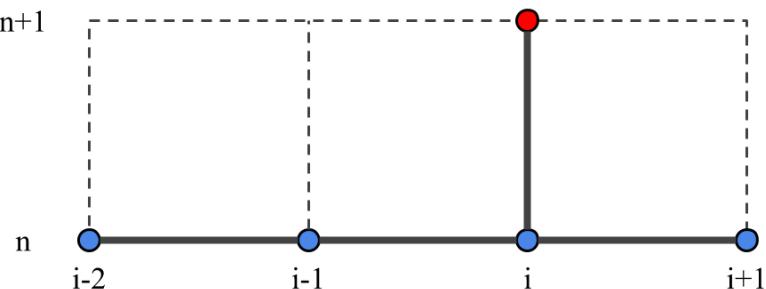


Рис. 7: Шаблон схемы Русанова третьего порядка аппроксимации.

Схема Русанова использует промежуточные индексы и состоит из трёх этапов [3] [2]

1. Переход  $t_n \rightarrow t_{n+1/3}$  производится по схеме Лакса

$$\begin{aligned} \frac{q_{i+1/2}^{n+1/3} - \frac{1}{2}(q_i^n + q_{i+1}^n)}{\tau/3} + \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{h} &= 0 \\ \frac{q_{i-1/2}^{n+1/3} - \frac{1}{2}(q_i^n + q_{i-1}^n)}{\tau/3} + \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{h} &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

2. Для шага  $t_{n+1/3} \rightarrow t_{n+2/3}$  используется схема «чехарда»

$$\frac{q_i^{n+2/3} - q_i^n}{2\tau/3} + \frac{f_{i+1/2}^{n+1/3} - f_{i-1/2}^{n+1/3}}{h} = 0 \quad (24)$$

3. Последний шаг  $t_{n+2/3} \rightarrow t_{n+1}$  следующий

$$\begin{aligned} \frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} + \frac{3}{8} \frac{f_{i+1}^{n+2/3} - f_{i-1}^{n+2/3}}{h} + \frac{-2f_{i+2}^n + 7f_{i+1}^n - 7f_{i-1}^n + 22f_{i-2}^n}{24h} + \\ + \frac{\omega}{24} (q_{i+2}^n - 4q_{i+1}^n + 6q_i^n - 4q_{i-1}^n + q_{i-2}^n) &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Последнее слагаемое необходимо для обеспечения устойчивости данной схемы.

Схема Русанова имеет третий порядок аппроксимации и является условно устойчивой при выполнении, в дополнении к условию Куранта-Фридрихса-Леви (22), неравенства  $4s^2 - s^4 \leq \omega \leq 3$ , где  $s = \frac{\tau}{h}$ .

#### 2.3.4 Схема TVD 2-го порядка аппроксимации

TVD-схемы позволяют решать задачи с большими градиентами, избегая появления осцилляций, вызванных дискретизацией задачи [4] [5] [2].

Полная вариация (total variation) решения линейного уравнения переноса (19) определяется как

$$\text{TV}(q(\cdot, t)) = \int \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right| dx$$

Соответственно полная вариация численного решения

$$\text{TV}(q^n) = \text{TV}(q(\cdot, t^n)) = \sum_i |q_{i+1}^n - q_i^n|$$

Схема называется схемой с уменьшением полной вариации, или TVD-схемой (total variation diminishing scheme), или схемой, монотонной по Хартену, если

$$\text{TV}(q^{n+1}) \leq \text{TV}(q^n)$$

В некоторых расчётах мы будем использовать TVD-схему 2-го порядка

$$\begin{aligned} q_i^{n+1} &= q_i^n - \frac{\tau}{h} (f_{i+1/2} - f_{i-1/2}) \\ f_{i+1/2} &= \frac{f_i^n + f_{i+1}^n}{2} - \frac{\theta}{2} (f_{i+1}^n - f_i^n) + \frac{\phi_{sb}(r_i)}{2} (\theta - C) (f_{i+1}^n - f_i^n) \\ \theta &= \text{sign } C_{i+1/2} \end{aligned} \quad (26)$$

с ограничителем superbee

$$\phi_{sb}(r_i) = \max \{0, \min\{2r_i, 1\}, \min\{r_i, 2\}\} \quad (27)$$

где

$$r_i = \frac{q_i - q_{i-1}}{q_{i+1} - q_i}$$

## 2.4 Моделирование воздействия бура

Современные буры имеют довольно сложное устройство, зачастую сочетаю ударные и вращательные механизмы. В данной работе нас в первую очередь интересует волновая картина, возникающая при бурении в конкретной геологической модели (см. рис. 1). Поэтому, для простоты, воздействие бура мы будем представлять в качестве точечного источника давления в виде импульса Рикера частотой 30 Гц.

$$p(x, y) = \frac{1}{\pi\sigma^4} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2}\right)\right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) \quad (28)$$

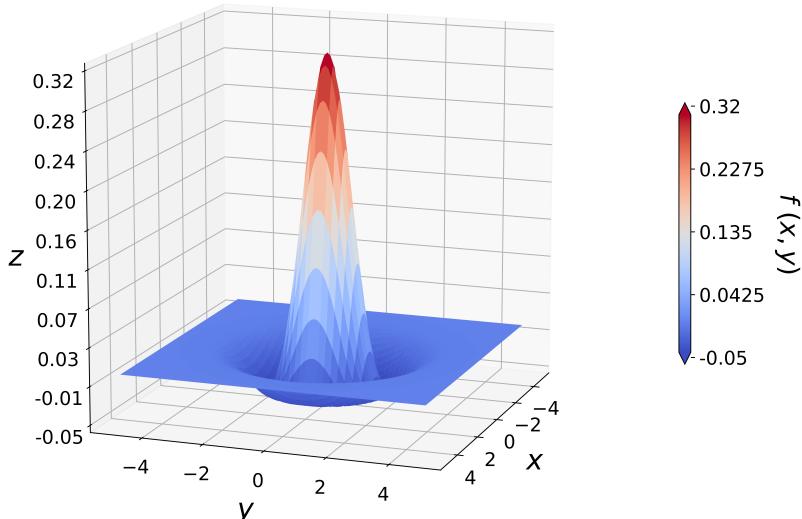


Рис. 8: График импульса Рикера (28) при  $\sigma = 1$ .

## 2.5 Моделирование статической нагрузки

Для решения задачи о распределении статической нагрузки (см. рис. 2), воспользуемся методом установления [6], решая при этом те же системы дифференциальных уравнений в частных производных (1) и (2). Будем считать распределение напряжений в ледовом острове установившимся, если модуль скорости распространения упругих волн оказывается в конечный момент времени в 20 – 30 раз меньше по сравнению со значением скорости в начальный момент времени значением.

Будем считать, что здание<sup>3</sup>, расположенное на поверхности ледового острова, имеет массу 100 тонн и основание  $5 \times 5$  метров, тем самым производя на лёд давление величиной 4 кПа.

Эта задача была решена с помощью схемы Куранта-Изаксона-Риса первого порядка (21) на регулярных прямоугольных сетках с шагом  $0.5 \times 0.5$  м., шагом по

<sup>3</sup>Здесь под «зданием» мы понимаем некоторую покоящуюся конструкцию. Это может быть, например, техническое помещение, буровая установка или тяжёлое транспортное средство.

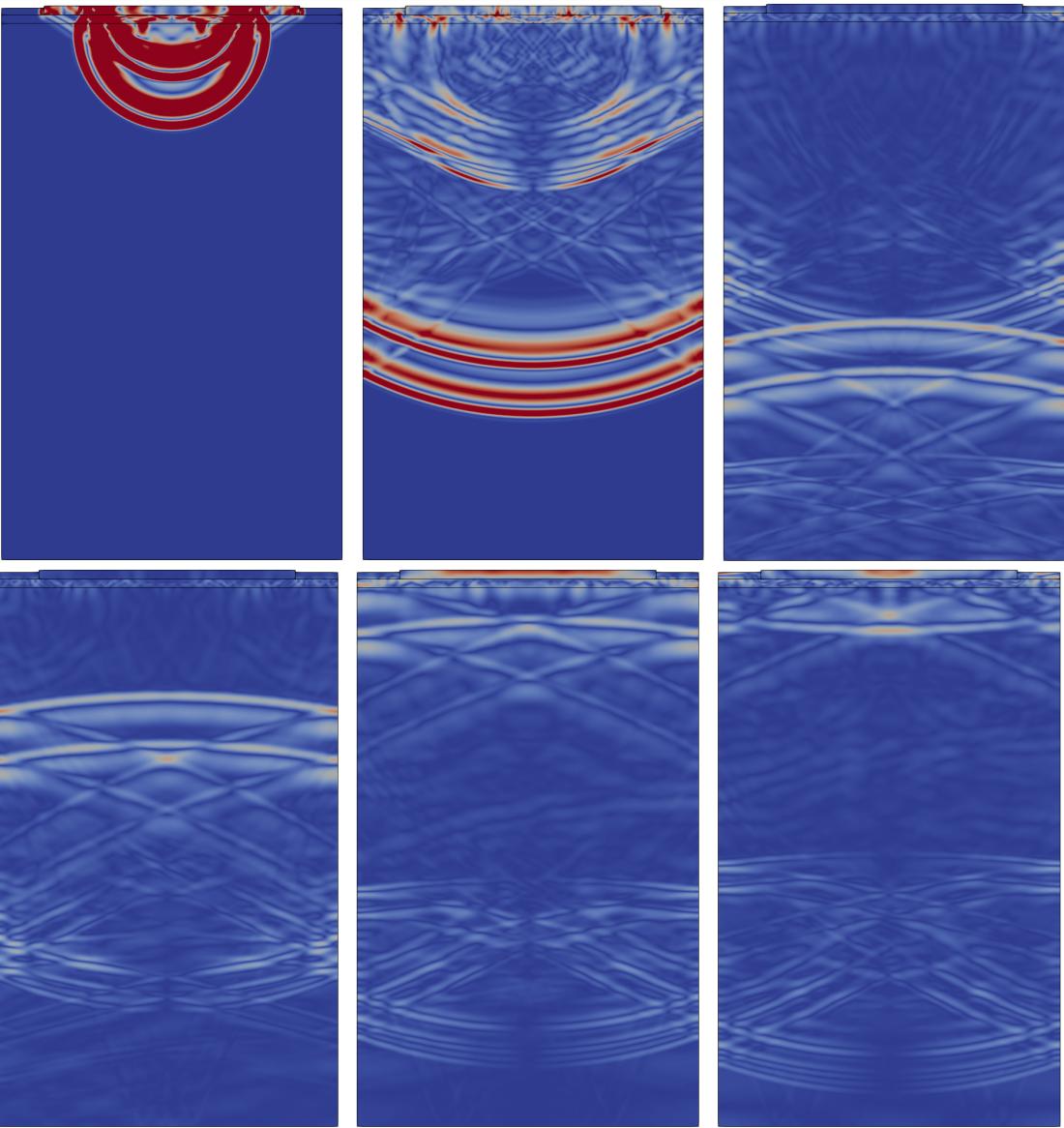


Рис. 9: Волновая картина.

времени 0.02 мс.

Было выполнено 200 тыс. шагов, за это время модуль скорости упал с примерно в 33 раза с  $2.4 \cdot 10^{-4}$  м/с до  $7.3 \cdot 10^{-6}$  м/с. Таким образом, получившееся распределение напряжений можно считать установившимся.

Так как внешними условиями задано только давление здания, направленное вертикально вниз, то естественно, что  $\sigma_{yy}$  будет составлять большую часть от итогового суммарного давления  $p$  или напряжения фон Мизеса  $\sigma_\nu$ . Для того, чтобы в этом убедиться, достаточно сравнить распределение  $\sigma_{yy}$ , изображённое на рис. 10, с распределениями горизонтальной и смешанной компонент тензора напряжений  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{xy}$ , представленными на рис. 11 и рис. 12.

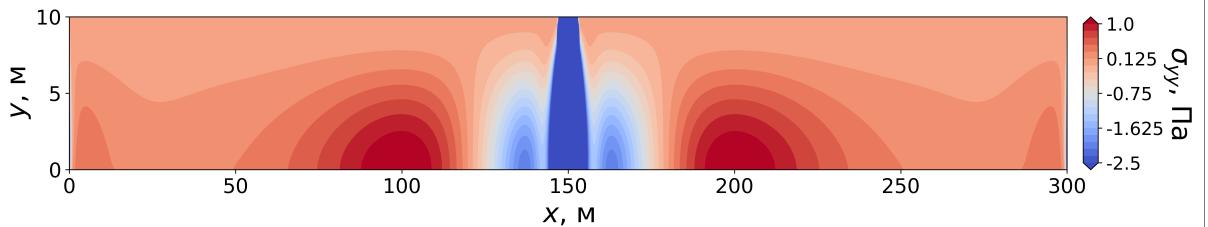


Рис. 10: Распределение вертикальной компоненты тензора напряжений  $\sigma_{yy}$ .

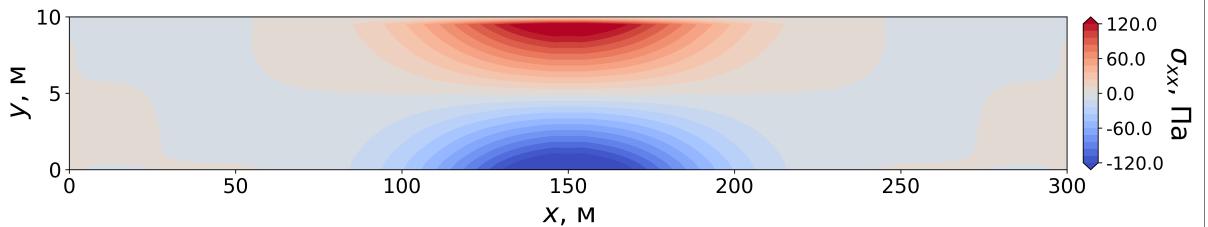


Рис. 11: Распределение горизонтальной компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xx}$  в ледовом острове при статической нагрузке.

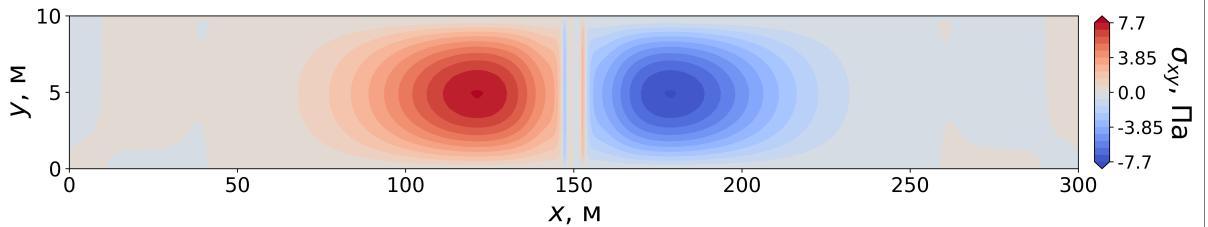


Рис. 12: Распределение смешанной компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xy}$  в ледовом острове при статической нагрузке.

Рассмотрим теперь распределения давления  $p$  (рис. 13), напряжения фон Мизеса (рис. 14).

Из приведённых распределений хорошо видно, что, кроме цилиндра непосредственно под зданием, наиболее подверженными разрушению областями являются конусообразные области радиусом около 20 метров, находящиеся в приблизительно 2 метрах от поверхности. Причём вблизи свободной поверхности данные области подвержены растягивающим напряжениям (см. рис. 13), а вблизи границы с придонным слоем — сдавливающим.

При этом максимальное достигаемое напряжение фон Мизеса  $\max_{i,j} \sigma_\nu(x_i, y_j) \approx 2.2$  кПа. Это значение много меньше предела разрушения льда, равному 1 Мпа, откуда следует, что при реалистичных значениях статической нагрузки (в нашем случае 1000 тонн), ледовый остров не будет разрушаться.

## 2.6 Выводы

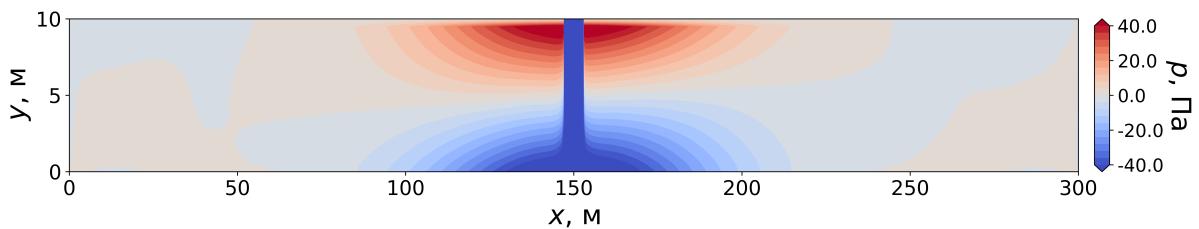


Рис. 13: Распределение давления  $p$  в ледовом острове при статической нагрузке.

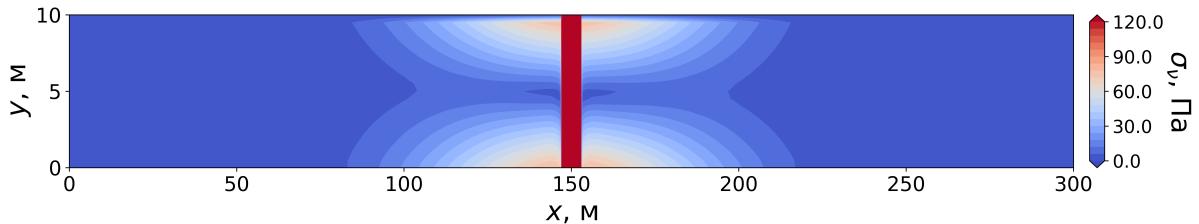


Рис. 14: Распределение напряжения фон Мизеса  $\sigma_\nu$  в ледовом острове при статической нагрузке.

### 3. Поглощающие граничные условия для двумерной системы уравнений акустики

При моделировании волновых процессов в геофизике зачастую приходится иметь дело с неограниченными физическими областями, в которых выделяются конечные расчётные под-области. Волны упругости, выходя за границу такой под-области, продолжают распространяться по неограниченной области, не оказывая влияния на процессы, происходящие внутри расчётной под-области. Для обеспечения такого поведения на практике, на границах расчётных под-областей необходимо применять специальные условия.

В данной главе будут рассмотрены поглощающие граничные условия Mur и PML для систем уравнений акустики в двумерном случае.

#### 3.1 Уравнения акустики

Система уравнений акустики описывает распространение малых колебаний в идеальном газе и является следствием уравнений Эйлера. В двумерном случае она имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial t} = -\rho c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (29)$$

Здесь  $x$  и  $y$  — координаты в ортонормированной декартовой системе координат,  $u(x, y, t)$  и  $v(x, y, t)$  — скорости<sup>4</sup>,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $c$  — скорость звука.

<sup>4</sup>Ранее в (1) мы обозначали  $u \equiv v_x$ ,  $v \equiv v_y$ . Здесь переход к новым обозначениям позволяет уменьшить количество индексов, что значительно упрощает запись рассматриваемых далее численных

Также иногда используют величину  $\kappa = \rho c^2$  — объёмный модуль упругости.

Решение системы будем рассматривать в моменты времени  $t \in [0, T]$  в прямоугольной области  $\Gamma := \{(x, y) \mid (x, y) \in [0, X] \times [0, Y]\}$ .

Для краткости записи введём векторную переменную

$$\varphi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \end{pmatrix} \quad (30)$$

Тогда начальное условие и граничные условия запишутся в следующем виде

$$\varphi(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma \quad (31)$$

$$\begin{cases} \varphi(0, y, t) = \varphi_L(y, t), & y \in [0, Y] \\ \varphi(X, y, t) = \varphi_R(y, t), & y \in [0, Y] \\ \varphi(x, 0, t) = \varphi_T(x, t), & x \in [0, X] \\ \varphi(x, Y, t) = \varphi_B(x, t), & x \in [0, X] \end{cases} \quad (32)$$

## 3.2 Численное решение системы уравнений акустики

Здесь и далее решение дискретной задачи будем рассматривать на регулярной прямоугольной сетке с размером шага  $h_x$  и  $h_y$  соответственно. Для простоты будем считать, что физические размеры рассматриваемой прямоугольной области нацело делятся на шаг сетки:  $X = Nh_x$ ,  $Y = Mh_y$ ,  $N, M \in \mathbb{N}$ . Таким образом разностная сетка определяется как  $G := \{(x_i, y_j) \mid x_i = ih_x, i \in \overline{0, N}, y_j = jh_y, j \in \overline{0, M}\}$ . Шаг по времени будем считать постоянным равным  $\tau$  и нацело делящим  $T$ .

При использовании значений в узлах сетки, нижние индексы будем использовать для обозначения пространственных координат, а верхний — для времени. Например,  $p_{i,j}^n$  — давление в момент времени  $t = \tau n \in [0, T]$  в точке с координатами  $(ih_x, jh_y) \in G$ .

### 3.2.1 Метод конечных разностей

Простейшим численным методом решения системы уравнений в частных производных (29) является метод конечных разностей. Получим одну из возможных разностных схем. Для этого применим явную двухточечную схему для дискретизации производных по времени и центральную двухточечную схему для дискретизации производных по пространственным переменным.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n}{\tau} \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{f_{i+1,j}^n - f_{i-1,j}^n}{2h_x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{f_{i,j+1}^n - f_{i,j-1}^n}{2h_y} \end{aligned}$$

методов.

Таким образом мы получим следующую разностную схему (leapfrog scheme)

$$\begin{cases} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} = -\frac{1}{\rho} \frac{p_{i+1,j}^{n+1/2} - p_{i-1,j}^{n+1/2}}{2h_x} \\ \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\tau} = -\frac{1}{\rho} \frac{p_{i,j+1}^{n+1/2} - p_{i,j-1}^{n+1/2}}{2h_y} \\ \frac{p_{i,j}^{n+3/2} - p_{i,j}^{n+1/2}}{\tau} = -\rho c^2 \left( \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{2h_x} + \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1}}{2h_y} \right) \end{cases} \quad (33)$$

Она имеет второй порядок аппроксимации по пространственным переменным и первый по времени.

### 3.2.2 Сеточно-характеристический метод

Более эффективным методом решения гиперболических систем является сеточно-характеристический метод. В части 2.3.1 уже рассматривался вывод сеточно-характеристического метода для решения упругого волнового уравнения. Проведём этот вывод ещё раз, на этот раз для уравнений акустики.

Перепишем исходную систему (29) в матричном виде, используя ранее введённую переменную  $\varphi$  (31)

$$\varphi_t = \mathbf{A}\varphi_x + \mathbf{B}\varphi_y \quad (34)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\rho c^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} \\ 0 & -\rho c^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (35)$$

Для решения полученной системы воспользуемся методом расщепления: будем решать систему, делая шаг по  $x$  на первом полушаге по времени, и делая шаг по  $y$  на втором полушаге по времени:

$$\begin{aligned} \varphi_t &= \mathbf{A}\varphi_x \\ \varphi_t &= \mathbf{B}\varphi_y \end{aligned} \quad (36)$$

Таким образом пересчёт на новой временной слой будет иметь вид

$$\begin{aligned} \varphi^{t+\Delta t/2} &= S_x(\Delta t/2, \varphi^t) \\ \varphi^{t+\Delta t} &= S_y(\Delta t/2, \varphi^{t+\Delta t/2}) \end{aligned} \quad (37)$$

где  $\Delta t$  — величина шага по времени,  $S_x$  — некоторый оператор шага по  $x$ ,  $S_y$  — шага по  $y$ .

Заметим, что матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  раскладываются как произведения

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}_1^{-1} \boldsymbol{\Lambda}_1 \mathbf{S}_1 \quad (38)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}_2^{-1} \boldsymbol{\Lambda}_2 \mathbf{S}_2 \quad (39)$$

где  $\boldsymbol{\Lambda}_i$  — диагональные матрицы, составленные из собственных чисел матриц  $A$  и  $B$

$$\mathbf{S}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\rho c}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{\rho c}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (40)$$

$$\mathbf{S}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho c}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\rho c}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (41)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_1 = \boldsymbol{\Lambda}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad (42)$$

Так как, как было показано выше, матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  приводятся к диагональному виду, то поставленная задача является гиперболической.

Домножим уравнения (36) слева на  $\mathbf{S}_1$  и  $\mathbf{S}_2$  соответственно:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1 \varphi_t &= \mathbf{S}_1 \mathbf{A} \varphi_x = (\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_1^{-1}) \boldsymbol{\Lambda}_1 \mathbf{S}_1 \varphi_x = \boldsymbol{\Lambda}_1 (\mathbf{S}_1 \varphi_x) \\ \mathbf{S}_2 \varphi_t &= \mathbf{S}_2 \mathbf{B} \varphi_y = (\mathbf{S}_2 \mathbf{S}_2^{-1}) \boldsymbol{\Lambda}_2 \mathbf{S}_2 \varphi_y = \boldsymbol{\Lambda}_2 (\mathbf{S}_2 \varphi_y) \end{aligned} \quad (43)$$

Делая замену  $\omega^i = \mathbf{S}_i \varphi$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , и учитывая, что матрицы  $\boldsymbol{\Lambda}_i$  диагональные, приходим к двум системам из трёх скалярных независимых уравнений переноса:

$$\begin{aligned} \omega_t^1 &= \boldsymbol{\Lambda}_1 \omega_x^1 \\ \omega_t^2 &= \boldsymbol{\Lambda}_2 \omega_y^2 \end{aligned} \quad (44)$$

Для решения этих скалярных уравнений будем использовать схему TVD второго порядка с ограничителем superbee.

### 3.3 Виды поглощающих граничных условий

Существует три основных подхода для реализации поглощающих граничных условий [7] [8]:

1. Введение новых пространственных переменных, которые переводят неограниченную рассматриваемую область в ограниченную. На этот подход можно посмотреть и с «физической» стороны, рассматривая дискретизацию неограниченного региона сеткой с бесконечно возрастающим по мере удаления от рассматриваемой под-области шагом сетки.
2. Анализ соотношений между падающей и отражённой волной и постановка граничного условия соответствующего минимизации отражённой части.
3. Добавление к рассматриваемой ограниченной области новых граничных слоёв, в которых дополнительно вводится диссипативный член, растущий по мере удаления от рассматриваемой области.

В данной работе мы будем обращаться к последним двум подходам, представленным соответственно граничными условиями Mur и PML.

### 3.4 Поглощающие граничное условие Mur

Рассмотрим одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (45)$$

Это уравнение очевидно является одномерным частным случаем двумерной системы уравнений акустики (29) при  $\varphi(x, y, t) = \varphi(x, t)$ .

Разложим (45) на два уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (46)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (47)$$

Уравнение (46) соответствует волне, идущей влево по оси  $x$ , а уравнение (47) — идущей вправо.

Пусть рассматриваемая область представляет собой отрезок  $\gamma := [0, Nh_x]$ . Поставим поглощающее граничное условие на правом конце (для левой границы это можно сделать абсолютно аналогично). Чтобы правая граница была поглощающей, или не-отражающей, необходимо, чтобы отсутствовала отражённая волна, распространяющаяся влево. В таком случае, на правой границе должно выполняться только уравнение (47), а не полное волновое уравнение (45).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (48)$$

Для того, чтобы при дискретизации производная по времени и производная по пространственной координате были вычислены в одной точке, будем усреднять разностные производные в моменты времени  $n$  и  $n+1$ , получая таким образом решение в точке  $x = (N - \frac{1}{2}) h_x$ ,  $t = (n + \frac{1}{2}) \tau$ . [8]

$$\frac{1}{2} \left( \frac{u_N^n - u_{N-1}^n}{h_x} + \frac{u_N^{n+1} - u_{N-1}^n}{h_y} \right) = -\frac{1}{c} \frac{1}{2} \left( \frac{u_N^{n+1} - u_N^n}{\tau} + \frac{u_{N-1}^{n+1} + u_{N-1}^n}{\tau} \right) \quad (49)$$

Обозначая  $r = \frac{c\tau}{h_x}$ , получаем явное выражение для граничного условия

$$u_N^{n+1} = u_{N-1}^n + \frac{r-1}{r+1} (u^{n+1} N - 1 - u_N^n) \quad (50)$$

В одномерном случае поглощающее условие Mir является точным. Распространить его можно и на двухмерный случай для рассматриваемой нами системы уравнений акустики (29)

$$u_{N,j}^{n+1} = u_{N-1,j}^n + \frac{r-1}{r+1} (u^{n+1} N - 1, j - u_{N,j}^n) \quad (51)$$

В этом случае поглощение будет точным только если волна падает строго нормально на рассматриваемую границу, соответствующа тем самым одномерному случаю. В противном случае будет наблюдаться возникновение отражённых от границы волн.

### 3.5 Berenger PML

Поглощающее граничное условие *perfectly matched layer* (PML) впервые было введено в работе [9] для системы уравнений Максвелла, описывающих распространение электромагнитных волн. Оказывается [10], что, произведя необходимые замены переменных, эту систему уравнений можно свести к системе уравнений акустики (29).

Для реализации затухания в PML слое добавляются диссипативные слагаемые  $c_i \sigma_x(x, y)$  и  $c_i \sigma_y(x, y)$ , где в качестве функций  $\sigma_{x/y}$  обычно выбирают

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \left(\frac{d_x}{w_x}\right)^k \Sigma_x \\ \sigma_y &= \left(\frac{d_y}{w_y}\right)^k \Sigma_y\end{aligned}\quad (52)$$

здесь  $d_{x/y}(x, y)$  — глубина проникновения в PML слой, имеющий глубину  $w_{x/y}$ ,  $k$  — степень скорости роста коэффициентов PML,  $\Sigma_{x/y}$  — максимальные значения диссипативных слагаемых<sup>5</sup>.

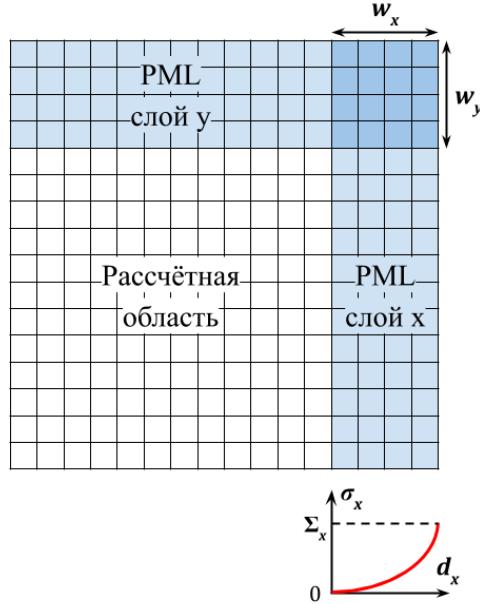


Рис. 15: Схема правого и верхнего PML слоёв.

Значения параметров  $k$  и  $\Sigma_{x,y}$  обычно подбираются под конкретную задачу из эмпирических соображений для наиболее эффективной реализации поглощающего граничного условия.

В случае применения PML на всех четырёх границах прямоугольной области  $\Gamma$ , то, используя обозначения, введённые для рассчётной сетки  $G$ , можно записать

$$d_x = h_x \cdot \min\{i, N - i\} \quad (53)$$

$$d_y = h_y \cdot \min\{j, M - j\} \quad (54)$$

Система уравнений акустики с диссипативными членами имеет вид [10]

<sup>5</sup>Глубина проникновения в PML слой очевидно меньше ширины слоя, а значит множитель перед  $\Sigma_{x/y}$  лежит в пределах от 0 до 1. Значит  $\sigma_{x/y}$  лежит в пределах от 0 до  $\Sigma_{x/y}$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c\sigma_x u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + c\sigma_y u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial t} + c(\sigma_x + \sigma_y)p = -\rho c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \rho c^2 \sigma_x \frac{\partial Q}{\partial y} - \rho c^2 \sigma_y \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = cv \\ \frac{\partial P}{\partial t} = cu \end{cases} \quad (55)$$

где  $Q$  и  $P$  — дополнительные переменные, определяющиеся из последних двух уравнений.

### 3.6 Split-field PML

Другим классическим вариантом граничного условия PML является так называемый *split-field PML* [?]

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sigma_x(x) \right) p_1 + \kappa \frac{\partial}{\partial x} v_x = 0 \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sigma_y(y) \right) p_2 + \kappa \frac{\partial}{\partial y} v_y = 0 \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sigma_x(x) \right) v_x + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p = 0 \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sigma_y(y) \right) v_y + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} p = 0 \\ p = p_1 + p_2 \end{cases} \quad (56)$$

где, напомним,  $\kappa = \rho c^2$  — объёмный модуль упругости. Функции  $\sigma_{x/y}$  выбираются аналогично случаю Berenger PML.

В системе (56) давление  $p$  разделяется на компоненты  $p_1$  и  $p_2$ . В начальный момент времени они определяются как половины общего значения давления  $p$ :  $p_1(x, y, t = 0) = p_2(x, y, t = 0) = \frac{p(x, y)}{2}$ . В дальнейшем  $p_1$  и  $p_2$  определяются из численных уравнений, а  $p$  вычисляется после каждой итерации, как сумма  $p_1$  и  $p_2$ .

### 3.7 Решение PML-систем методом конечных разностей

Аналогично разностной схеме (33) для системы уравнений акустики, заменяя аналитические производные на разностные, получим системы разностных уравнений для Berenger PML (55)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} + c\sigma_{x_i} u^n = -\frac{1}{\rho} \frac{p_{i+1/2,j}^{n+1/2} - p_{i-1/2,j}^{n+1/2}}{h_x} \\ \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\tau} + c\sigma_{y_j} v^n = -\frac{1}{\rho} \frac{p_{i,j+1}^{n+1/2} - p_{i,j-1}^{n+1/2}}{2h_y} \\ \frac{Q^{n+1} - Q^n}{\tau} = cv_{i,j}^n \\ \frac{P^{n+1} - P^n}{\tau} = cu_{i,j}^n \\ \frac{p_{i,j}^{n+3/2} - p_{i,j}^{n+1/2}}{\tau} + c(\sigma_{x_i} + \sigma_{y_j}) p^{n+1/2} = \\ = -\rho c^2 \left( \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{2h_x} + \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1}}{2h_y} - \sigma_{x_i} \frac{Q_{i,j+1}^{n+1} - Q_{i,j}^{n+1}}{h_y} - \sigma_{y_j} \frac{P_{i+1,j}^{n+1} - P_{i,j}^{n+1}}{h_x} \right) \end{array} \right. \quad (57)$$

и для split-field PML (56)

$$\left\{ (p_1)_{i,j}^{n+1} p_{i,j}^{n+1} = (p_1)_{i,j}^{n+1} + (p_2)_{i,j}^{n+1} \right. \quad (58)$$

### 3.8 Решение PML-систем сеточно-характеристическим методом

Сеточно-характеристический метод, рассмотренный в первой главе, является более эффективным по сравнению с простым конечно-разностным методом. Покажем, что он применим для решения систем уравнений Berenger PML (55) и split-field pml (56).

#### 3.8.1 Berenger PML

Рассмотрим систему уравнений, реализующую затухающее граничное условие типа PML (55), и произведём замену:

$$\varphi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \\ Q \\ P \end{pmatrix} \quad (59)$$

Тогда система принимает вид

$$\varphi_t = \mathbf{A}\varphi_x + \mathbf{B}\varphi_y + \mathbf{S}\varphi \quad (60)$$

где матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{S}$  следующие

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\rho c^2 & 0 & 0 & 0 & -\rho c^2 \sigma_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & -\rho c^2 & 0 & -\rho c^2 \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -c\sigma_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c\sigma_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c(\sigma_x + \sigma_y) & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Эти матрицы можно диагонализовать

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}_1 \boldsymbol{\Lambda}_1 \mathbf{R}_1$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}_2 \boldsymbol{\Lambda}_2 \mathbf{R}_2$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{L}_3 \boldsymbol{\Lambda}_3 \mathbf{R}_3$$

$$\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_y & 0 & \frac{1}{c\rho} & -\frac{1}{c\rho} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c\rho}{2} & \frac{1}{2} & \frac{c\rho\sigma_y}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{c\rho}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{c\rho\sigma_y}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L}_2 = \begin{pmatrix} -\sigma_x & 0 & 0 & \frac{1}{c\rho} & -\frac{1}{c\rho} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{c\rho}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{c\rho\sigma_x}{2} \\ -\frac{c\rho}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{c\rho\sigma_x}{2} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_1 = \boldsymbol{\Lambda}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_3 = \begin{pmatrix} \sigma_x^{-1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sigma_y^{-1} & 0 & 1 & 0 \\ -\sigma_x^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_y^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c\sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c\sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c(\sigma_x + \sigma_y) \end{pmatrix}$$

Полученное векторное уравнение в частных производных можно расщепить по физическим процессам для каждой компоненты аналогично уравнению переноса-диффузии с  $\mu = 0$  [11].

Будем решать систему, делая шаг по  $x$  на первой трети шага по времени, делая шаг по  $y$  на второй, и решая неоднородное уравнение на третьей части шага по

времени:

$$\begin{aligned}\varphi_t &= \mathbf{A}\varphi_x \\ \varphi_t &= \mathbf{B}\varphi_y \\ \varphi_t &= \mathbf{S}\varphi\end{aligned}$$

Домножая  $i$ -ое уравнение слева на  $\mathbf{R}_i$

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_1\varphi_t &= \mathbf{R}_1(L_1\Lambda_1\mathbf{R}_1)\varphi_x \\ \mathbf{R}_2\varphi_t &= \mathbf{R}_2(L_2\Lambda_2\mathbf{R}_2)\varphi_y \\ \mathbf{R}_3\varphi_t &= \mathbf{R}_3(L_3\Lambda_3\mathbf{R}_3)\varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_1\varphi_t &= \Lambda_1\mathbf{R}_1\varphi_x \\ \mathbf{R}_2\varphi_t &= \Lambda_2\mathbf{R}_2\varphi_y \\ \mathbf{R}_3\varphi_t &= \Lambda_3\mathbf{R}_3\varphi\end{aligned}$$

Делая замену  $\omega^i = \mathbf{R}_i\varphi$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , и учитывая, что матрицы  $\Lambda_i$  диагональные, приходим к трём системам из трёх скалярных независимых уравнений:

$$\begin{cases} \omega_t^1 = \Lambda_1\omega_x^1 \\ \omega_t^2 = \Lambda_2\omega_y^2 \\ \omega_t^3 = \Lambda_3\omega^3 \end{cases} \quad (61)$$

Первые две системы представляют собой независимые скалярные уравнения переноса. Для их численного решения мы воспользуемся TVD-схемой второго порядка с ограничителем superbee.

Третья система представляет собой 5 независимых скалярных уравнений с разделяемыми переменными, которые очевидно решаются аналитически. Обозначая номер уравнения нижним индексом  $l$ , получаем

$$\begin{cases} (\omega_l^3)_t = 0 & l = 1, 2 \\ (\omega_l^3)_t = [\Lambda_3]_{ll}\omega_l^3 & l = 3, 4, 5 \\ \omega_l^3(t) = \omega_l^3(t=0) & l = 1, 2 \\ \omega_l^3(t) = \omega_l^3(t=0) \cdot \exp([\Lambda_3]_{ll}t) & l = 3, 4, 5 \end{cases}$$

Таким образом построен сеточно-характеристический метод решения уравнения (55).

### 3.8.2 Split-Field PML

Теперь построим сеточно-характеристический метод решения системы уравнений split-field PML (56)

На этот раз произведём замену

$$\varphi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (62)$$

Тогда система принимает вид

$$\varphi_t = \mathbf{A}\varphi_x + \mathbf{B}\varphi_y - \mathbf{C}\varphi \quad (63)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_y \end{pmatrix} \quad (64)$$

Опять замечаем, что матрицы можно диагонализовать

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}_1 \boldsymbol{\Lambda}_1 \mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{\kappa\rho}} & \frac{1}{\sqrt{\kappa\rho}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{\kappa}{\rho}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{\kappa\rho}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{\kappa\rho}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}_2 \boldsymbol{\Lambda}_2 \mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{\kappa\rho}} & \frac{1}{\sqrt{\kappa\rho}} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{\kappa}{\rho}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{\kappa\rho}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{\kappa\rho}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Опять воспользуемся расщеплением по физическим процессам для каждой компоненты полученного векторного уравнение в частных [11]. Тогда, расщепляя систему и домножая на  $\mathbf{L}_i^{-1} = \mathbf{R}_i$  слева, получим

$$\begin{cases} \mathbf{R}_1 \varphi_t = \boldsymbol{\Lambda}_1 \mathbf{R}_1 \varphi_x \\ \mathbf{R}_2 \varphi_t = \boldsymbol{\Lambda}_2 \mathbf{R}_2 \varphi_y \\ \varphi_t = -\mathbf{C}\varphi \end{cases} \quad (65)$$

Производя замену переменных  $\omega_i = \mathbf{R}_i \varphi$ :

$$\begin{cases} \omega_t^1 = \boldsymbol{\Lambda}_1 \omega_x^1 \\ \omega_t^2 = \boldsymbol{\Lambda}_2 \omega_y^2 \\ \varphi_t = -\mathbf{C}\varphi \end{cases} \quad (66)$$

Решение этой системы аналогично уже разобранному решению системы (61).

Таким образом система уравнений split-field PML (56) также решается сеточно-характеристическим методом.

### 3.9 Численные эксперименты

Сравним эффективность описанных в предыдущей части поглощающих граничных условий: Mur, конечно-разностной реализации Berenger PML, сеточно-характеристической реализации Berenger PML, конечно-разностной реализации split-field PML, и, наконец, сеточно-характеристической реализации split-field PML.

### 3.9.1 Область моделирования

Будем, как и ранее, рассматривать физическую область

$$\Gamma = \{(x, y) \mid (x, y) \in [0, X] \times [0, Y], X = Nh_x, Y = Mh_y\}$$

и расчётную сетку с узлами

$$G = \{(x_i, y_j) \mid x = ih_x, y = jh_y, i \in \overline{0, N}, j \in \overline{0, M}\}$$

взятыми в моменты времени  $t_n = n\tau \in [0, T]$

Размеры физической области  $\Gamma$  примем  $X = Y = 1$  м., плотность среды  $\rho = 1$  кг/м<sup>3</sup>, скорость звука  $c = 1$  м/с. Выберем количество узлов сетки  $N = M = 101$ , при этом шаг сетки будет равен  $h := h_x = h_y = 0.01$ , шаг по времени примем равным  $\tau = 0.005$  сек., предел по времени  $T = 750\tau = 3.75$  сек. Заметим, что для выбранных параметров выполнено условие устойчивости Куранта.

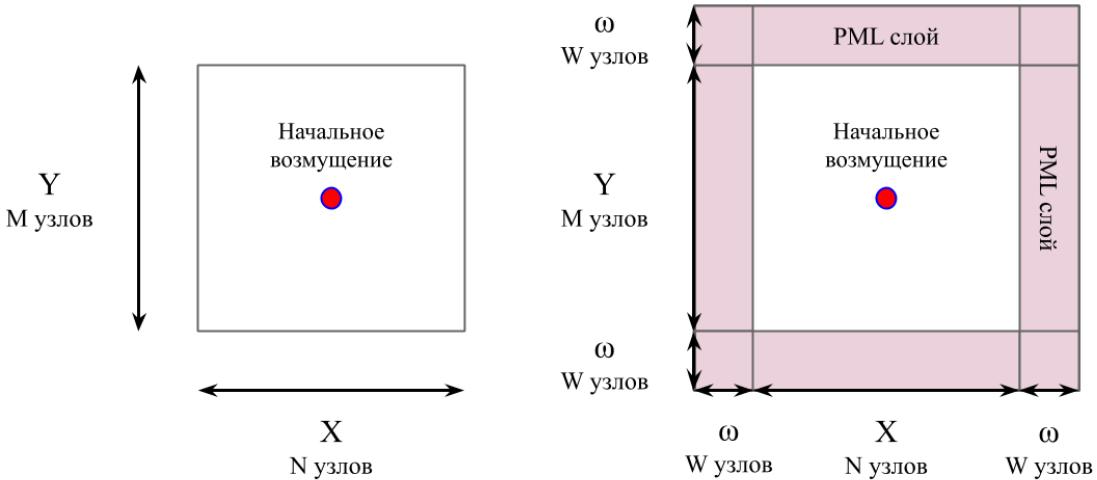


Рис. 16: Схема расчётных областей для Migr (слева) и PML (справа) случаев.

Для PML методов мы зафиксируем степень возрастания диссипативного коэффициента  $k = 1$  (см. (52)) и толщину PML слоя  $\omega := \omega_x = \omega_y = 40h$  ( $W = 40$  узлов). Значение коэффициента  $\Sigma := \Sigma_x = \Sigma_y$  будем варьировать для изучения зависимости качества поглощения от максимального значения диссипативного коэффициента.

### 3.9.2 Начальные условия

Поставим следующие начальные условия на распределения скоростей

$$\begin{aligned} u(x, y) &\equiv 0 \\ v(x, y) &\equiv 0 \end{aligned} \tag{67}$$

и на распределение давления

$$\begin{aligned} p(x, y) = p(r) &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{r - \mu}{\sigma}\right)^2\right) \\ A &= 0.05 \text{ Па} \quad \mu = 0 \quad \sigma = 0.05 \end{aligned} \tag{68}$$

где расстояние от точки  $(x, y)$  центра расчётной области  $\left(\frac{X}{2}, \frac{Y}{2}\right)$

$$r = \sqrt{\left(\frac{X}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{Y}{2} - y\right)^2}$$

6

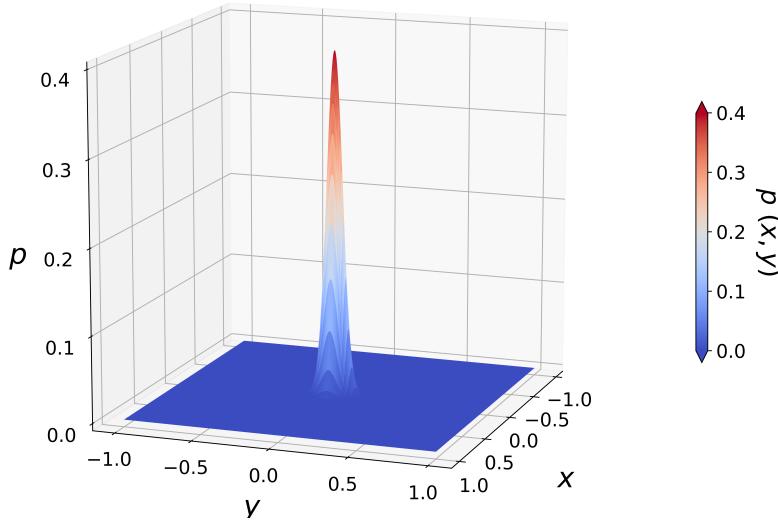


Рис. 17: График начального распределения давления (68) при указанных параметрах.

### 3.9.3 Методы оценки качества поглощения

Оценить качество работы представленных поглощающих граничных условий можно несколькими способами

1. Визуально по цветовой гистограмме  $p(x, y)$ .

Этот способ позволяет наглядно проверить работоспособность алгоритма, однако сравнение работы уже двух алгоритмов затруднительно.

2. По зависимости кинетической энергии расчётной области от времени.

Вспомним, что мы рассматриваем идеальный газ, для которого известно выражение кинетической энергии через давление и занимаемый объём

$$pV = \frac{2}{3}K$$

Так как значение давления известно только в узлах сетки, то вычислить  $K$  точно нельзя. Для получения приближённого значения  $K$ , будем считать, что  $p(x, y) \equiv p_{i,j}$  для  $x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ ,  $y \in [y_{i-1/2}, y_{i+1/2}]$ . Тогда численное значение кинетической энергии

$$K_G = \frac{3}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p_{i,j}^n dV_{i,j} \quad (69)$$

здесь  $dV_{i,j} = h_x \cdot h_y \cdot 1$  — приведённая к единицам объёма площадь одной клетки расчётной сетки.

<sup>6</sup> $p(r)$  задаёт центрально-симметричное начальное распределение давлений).

Этот способ позволяет сравнивать между собой сразу несколько алгоритмов.

### 3. Площадь под графиками $K_G(t)$ .

Сравнение графиков  $K_G(t)$  позволяет на глаз определить, какой алгоритм является наилучшим, что, конечно, не является строгим критерием. Переход к сравнению площадей под ними позволяет формализовать данную процедуру, сводя задачу сравнения качества алгоритмов к сравнению действительных чисел.

#### 3.9.4 Результаты

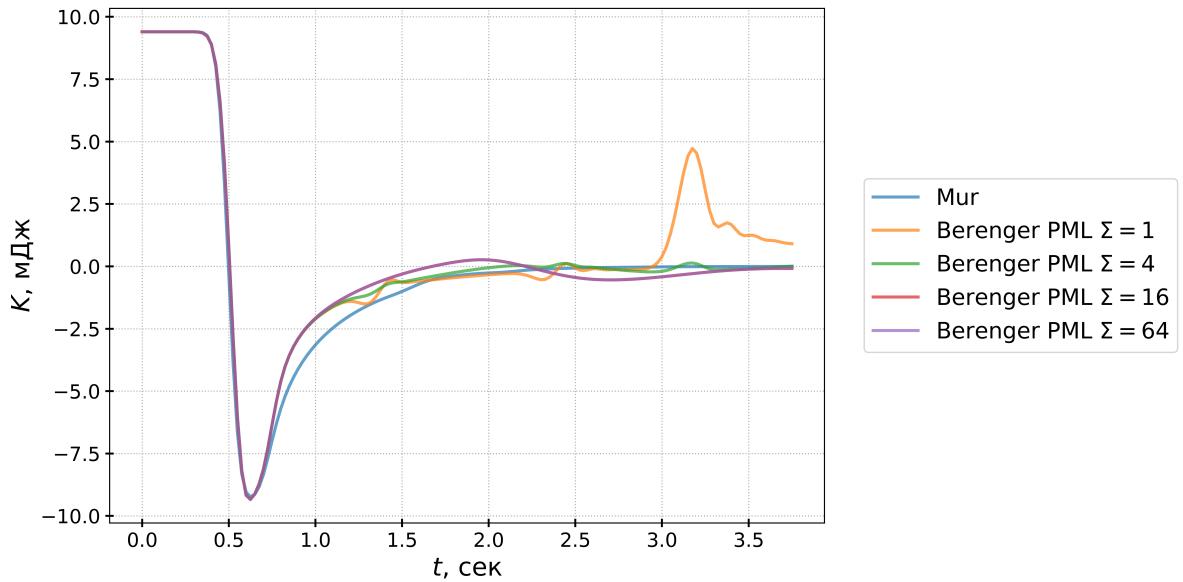


Рис. 18: Зависимость кинетической энергии от времени для конечно-разностной реализации поглощающих граничных условий Mur и Berenger PML для различных значений параметра  $\Sigma$ .

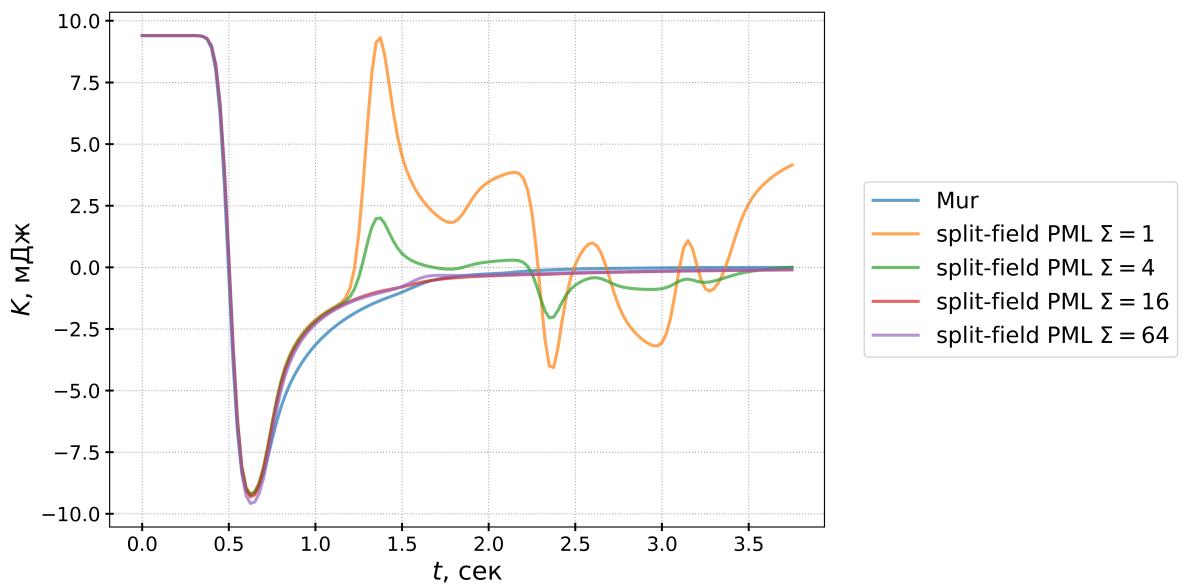


Рис. 19: Зависимость кинетической энергии от времени для конечно-разностной реализации поглощающих граничных условий Mur и split-field PML для различных значений параметра  $\Sigma$ .

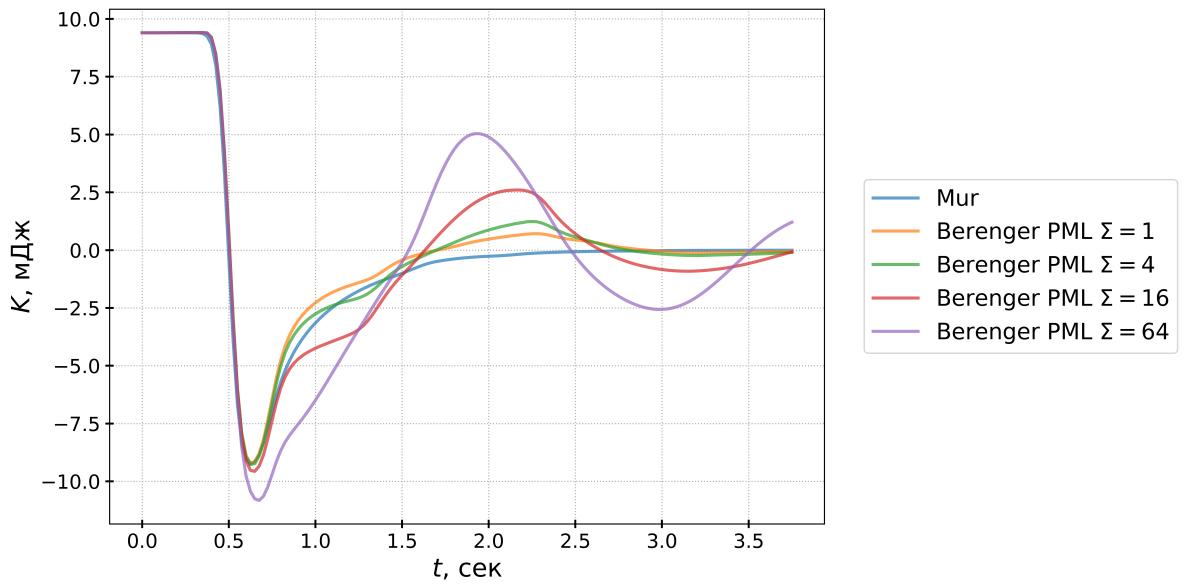


Рис. 20: Зависимость кинетической энергии от времени для сеточно-характеристической реализации поглощающих граничных условий Mur и berenger PML для различных значений параметра  $\Sigma$ .

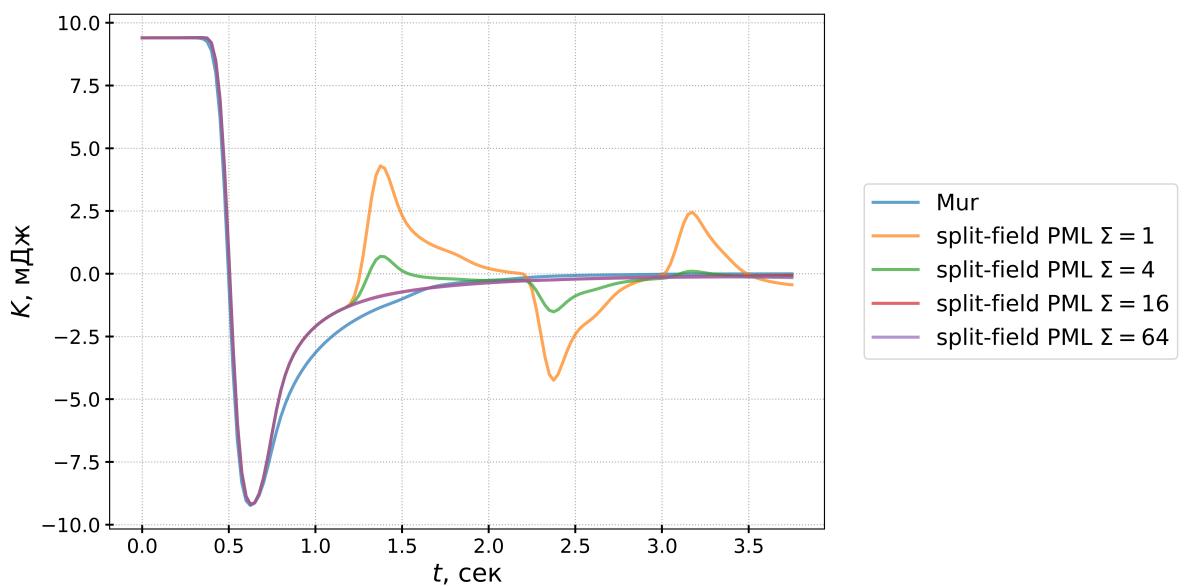


Рис. 21: Зависимость кинетической энергии от времени для сеточно-характеристической реализации поглощающих граничных условий Mur и split-field PML для различных значений параметра  $\Sigma$ .

## Список литературы

- [1] E; Rees M. Courant, Richard; Isaacson. On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences. *Comm. Pure Appl. Math.*, 5(3):243–255, 08 1952.
- [2] А.И. Лобанов И.Б. Петров. *Лекции по вычислительной математике: Учебное пособие*. М.: Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.
- [3] Я. А. Холодов А. С. Холодов. О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 46(9):1638–1667, 08 2006.
- [4] Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J. of Computational Physics*, 49(3):357–393, 1983.
- [5] Н. В. Бородкин В. Б. Баракин. Tvd схема второго порядка аппроксимации на подвижной адаптивной сетке для гиперболических систем. *Сиб. журн. вычисл. матем.*, 3(2):109–121, 2000.
- [6] Р. П. Федоренко. Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1(5):922–927, 1961.
- [7] Lloyd N. Trefethen. Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equations. In *Finite Difference and Spectral Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*, pages 225–226, 1994.
- [8] Shinichi Sakamoto, Hideo Tsuru, Masahiro Toyoda, and Takumi Asakura. *Computational Simulation in Architectural and Environmental Acoustics*. Springer Japan, 2014.
- [9] J.P.Berenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. of Comp.Phys*, 114(2):185–200, 10 1994.
- [10] Eli Turkel and A. Yefet. Absorbing pml boundary layers for wave-like equations. *Applied Numerical Mathematics*, 27:533–557, 08 1998.
- [11] Г. И. Марчук. Методы расщепления для решения нестационарных задач. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 35(6):667–671, 08 1995.