

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования

«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»  
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики  
Кафедра информатики и вычислительной математики

**Направление подготовки / специальность:** 03.03.01 Прикладные математика и  
физика (бакалавриат)

**Направленность (профиль) подготовки:** Математическое моделирование,  
вычислительная математика и физика

# КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ИНДУСТРИАЛЬНЫХ ЛЕДОВЫХ КОНСТРУКЦИЯХ

(бакалаврская работа)

**Студент:**  
Сергеев Фёдор Игоревич

(подпись студента)

**Научный руководитель:**  
Петров Игорь Борисович,  
чл.-корр., д. физ.-мат. наук, проф.

(подпись руководителя)

**Консультант (при наличии):**  
Хохлов Николай Игоревич,  
канд. физ.-мат. наук

(подпись консультанта)

Москва  
2020

## Аннотация

Целью данной работой является проведение компьютерного моделирования волновых процессов, происходящих при эксплуатации искусственных ледовых нефтедобывающих платформ, а также исследование использования поглощающих граничных условий PML совместно с сеточно-характеристическим методом для задач вычислительной геофизики.

В рамках выполнения работы было:

- Проведено моделирование распространения волн упругости в ледовом острове, воде и грунте при бурении.
- Произведён расчёт распределения напряжений в ледовом острове при статической нагрузке.
- Проведено сравнение эффективности работы поглощающих граничных условий Mur, Beringer PML и split-field PML для двумерной системы уравнений акустики.
- Исследована возможность применения поглощающих граничных условий Beringer PML и split-field PML совместно с сеточно-характеристического методом для двумерной системы уравнений акустики и двумерной системы уравнений эластодинамики.

# Содержание

<b>1 Введение</b>	<b>3</b>
<b>2 Моделирование динамических процессов в ледовом острове</b>	<b>3</b>
2.1 Геологическая модель . . . . .	4
2.2 Математическая модель среды . . . . .	4
2.2.1 Уравнения . . . . .	4
2.2.2 Контактные условия . . . . .	5
2.2.3 Граничные условия . . . . .	6
2.3 Численный метод . . . . .	7
2.3.1 Сеточно-характеристический метод . . . . .	7
2.3.2 Схема Куранта-Изаксона-Риса . . . . .	10
2.3.3 Схема Русанова . . . . .	10
2.3.4 Контактные и граничные условия . . . . .	11
2.4 Моделирование воздействия бура . . . . .	11
2.5 Моделирование статической нагрузке (задача о штампе) . . . . .	13
<b>3 Поглощающие граничные условия для двумерной системы уравнений акустики</b>	<b>13</b>
3.1 Уравнения акустики . . . . .	14
3.2 Численное решение системы уравнений акустики . . . . .	15
3.2.1 Метод конечных разностей . . . . .	15
3.2.2 Сеточно-характеристический метод . . . . .	15
3.3 Виды поглощающих граничных условий . . . . .	17
3.4 Поглощающие граничное условие Mur . . . . .	17
3.5 Berenger PML . . . . .	18
3.6 Split-field PML . . . . .	19
3.7 Решение PML-систем методом конечных разностей . . . . .	20
3.8 Решение PML-систем сеточно-характеристическим методом . . . . .	20
3.8.1 Berenger PML . . . . .	20
3.8.2 Split-Field PML . . . . .	23
3.9 Численные эксперименты . . . . .	24
3.10 Методы оценки результатов . . . . .	25

## 1. Введение

В настоящее время особенный интерес для нефтегазовой индустрии представляет добыча полезных ископаемых на Арктическом шельфе с использованием искусственных ледовых островов. Они обладают рядом преимуществ перед традиционными бетонными и металлическими нефтегазовыми платформами:

- Основной строительный материал, лёд, в Арктике доступен и дешев.
- При использовании местного строительного материала, платформа является абсолютно экологически чистой.
- В летний период лёд тает сам по себе, тем самым избавляя от необходимости проведения полного демонтажа несущих конструкций при завершении работы платформы. Это особенно важно для упрощения и удешевления проведения разведочного бурения.

При использовании ледовых островов возникает и ряд проблем. Важнейшей является обеспечение безопасности персонала и установок, находящихся на поверхности острова. Устойчивости и целостности льда угрожают как механические воздействия (бурение, сейсмическая активность, статическая нагрузка, столкновение с айсбергами), так и тепловые воздействия (солнечная радиация, тёплые течения).

В данной работе произведено численное моделирование распространение упругих волн в ледовом острове, воде и грунте при бурении и сейсмической активности. Проанализировано влияние этих процессов, а также статической нагрузки на целостность льда.

Для численного моделирования вышеописанных процессов также требуется разработка новых методов численного моделирования. В данной работе рассматривается применения поглощающего граничного условия Perfectly Matched Layer

## 2. Моделирование динамических процессов в ледовом острове

### 2.1 Геологическая модель

Рассмотрим в двумерном случае ледовый остров шириной 300 м. и высотой 10 м., покоящийся на дне моря глубиной 8 м.

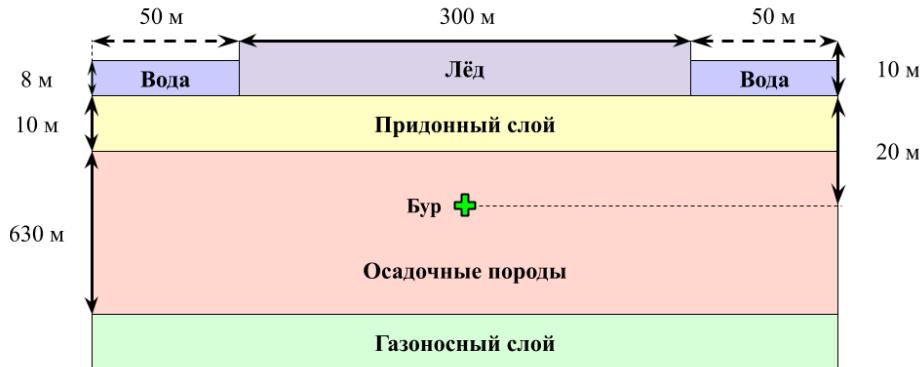


Рис. 1: Схема геологической модели.

Грунт под островом будем считать состоящим из придонного слоя глубиной 10 м. и слоя осадочных пород глубиной 600 м. В некоторых случаях мы будем также рассматривать газоносный слой. Бур будем считать расположенным посередине длины острова на глубине 20 м.

Параметры рассматриваемых сред приведены в таблице табл. 1.

Среда	$c_p$ , м/с	$c_s$ , м/с	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>
Лёд	3940	2493	917
Вода	1500	—	1025
Придонный грунт	1806	316	2000
Осадочные породы	2250	1000	2000

Таблица 1: Параметры рассматриваемых сред.

### 2.2 Математическая модель среды

#### 2.2.1 Уравнения

Рассматриваемые среды (см. таблицу табл. 1) будем считать сплошными, однородными, изотропными и несжимаемыми. В описанной постановке присутствуют как жидкие среды (вода, окружающая остров), так и твёрдые среды (льд и слои грунта).

Жидкие среды в двумерном случае в декартовой эйлеровой системе координат описываются акустическим волновым уравнением

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \vec{v}(x, y, t)}{\partial t} = -\nabla p(x, y, t) \\ \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial t} = -\rho c^2 \operatorname{div} \vec{v}(x, y, t) \end{cases} \quad (1)$$

где  $\rho$  — плотность среды,  $\vec{v}(x, y, t)$  — вектор скорости (производная вектора смещения частицы среды  $\vec{u}(x, y, t)$  по времени),  $p(x, y, t)$  — давление,  $c$  — скорость звука в жидкости.

Твёрдые среды в двумерном случае в декартовой эйлеровой системе координат описываются уже упругим волновым уравнением

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \vec{v}(x, y, t)}{\partial t} = \operatorname{div}^T \boldsymbol{\sigma}(x, y, t) \\ \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(x, y, t)}{\partial t} = \rho \left( c_p^2 - 2c_s^2 \right) \operatorname{div} \vec{v}(x, y, t) \mathbf{I} + \rho c_s^2 \left( \nabla \otimes \vec{v}(x, y, t) + [\nabla \otimes \vec{v}(x, y, t)]^T \right) \end{cases} \quad (2)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}(x, y, t)$  — симметричный тензор напряжений Коши второго ранга,  $c_p$  и  $c_s$  — скорости продольной и поперечной волн соответственно,  $\mathbf{I}$  — единичный тензор второго ранга, операция  $\otimes$  — тензорное произведение векторов.

Далее для краткости мы будем опускать значок у вектора скорости, то есть будем писать  $v$ , подразумевая при этом вектор  $\vec{v}$ . Также мы будем опускать параметры  $(x, y, t)$  у зависящих от них величин.

## 2.2.2 Контактные условия

Между средами необходимо поставить контактные условия, которые изображены на рис. 2.



Рис. 2: Схема контактных условий: 1 — контактное условие полного слипания, 2 — контактное условие между упругой и акустической средами, 3 — контактное условие скольжения, 4 — контактное условие отражения.

Здесь и далее мы будем обозначать контактирующие среды (или расчётные сетки) индексами  $L$  и  $R$  — левая и правая среды соответственно. Вектор внешней нормали к левой под-области обозначим как  $n$ .

- Контактное условие полного слипания ставится между слоями твёрдых сред. Физически оно означает возможность беспрепятственного распространения упругих волн. Для этого требуется равенство скоростей и векторов нормального напряжения на границе раздела.

Математически условие полного слипания записывается следующим образом

$$\begin{cases} v_L = v_R \\ \boldsymbol{\sigma}_L \cdot n = \boldsymbol{\sigma}_R \cdot n \end{cases} \quad (3)$$

2. Контактное условие между упругой и акустической средой используется для реализации перехода волн из твёрдых сред в жидкость и обратно. Оно отличается от условий полного слипания, т.к. в данном случае контактирующие среды описываются разными уравнениями (см. (1) и (2)).

Если считать, что акустическая среда отвечает индексу  $L$ , а упругая —  $R$ , то данное условие запишется как

$$\begin{cases} v_L \cdot n = v_R \cdot n \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot n + p n = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Физически это условие означает не-протекание жидкости в твёрдое тело, и наоборот. Для этого требуется равенство нормальных скоростей. первое уравнение, и равенство нормального вектора напряжений на контактной границе, второе уравнение.

3. Контактное условие свободного скольжения ставится между ледовым островом и грунтом. В отличие от случая контакта двух слоёв грунта, когда применяется условие полного слипания, лёд и придонный слой могут двигаться друг относительно друга. Это явление известно на практике, так, например, наблюдается "соскальзывание" ледников с поверхностей гор. Таким образом требуется использование специального контактного условия.

$$\begin{cases} v_L \cdot n = v_R \cdot n \\ n \cdot \boldsymbol{\sigma}_L \cdot n = n \cdot \boldsymbol{\sigma}_R \cdot n \\ n \cdot \boldsymbol{\sigma}_{L/R} \cdot n = \boldsymbol{\sigma}_{L/R} \cdot n \end{cases} \quad (5)$$

4. Контактное условие полного отражения (свободной границы) ставится на границе раздела осадочных пород и газоносного слоя. Применение такого условия не является вполне физически верным, однако для нашей задачи его применение вполне оправдано.

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot n = 0 \quad (6)$$

### 2.2.3 Границные условия

Границные условия расчётной области изображены на рис. 3.

1. Поглощающие (не-отражающие) граничные условия используются при рассмотрении ограниченной под-области бесконечного физического региона. В данном случае водяной, придонный, газоносный слои и слой осадочных пород продолжаются за границы расчётной области налево, направо и, для газоносного слоя, вниз. Поэтому на их краях необходимо использовать поглощающие граничные условия.<sup>1</sup>

Для упругих сред это условие запишется в виде

$$\begin{cases} v_{l-2}^n = v_{l-1}^n = v_l^n \\ \boldsymbol{\sigma}_{l-2}^n = \boldsymbol{\sigma}_{l-1}^n = \boldsymbol{\sigma}_l^n \end{cases} \quad (7)$$

<sup>1</sup>Поглощающие условия будут рассмотрены подробнее в главе 3.



Рис. 3: Схема граничных условий: а — граничное условие поглощения, б — граничное условие нулевого давления.

А для акустических сред в виде

$$\begin{cases} v_{l-2}^n = v_{l-1}^n = v_l^n \\ p_{l-2}^n = p_{l-1}^n = p_l^n \end{cases} \quad (8)$$

здесь верхний индекс  $n$  обозначает момент времени  $t_n$ , а нижний — номер сечочного узла, при этом узел  $l$  является граничным, а узлы  $l - 1$  и  $l - 2$  — его соседями по одной из осей. Такая форма записи будет верна для левой, правой и нижней границе при соответствующем выборе значений координатных индексов.

- Граничное условие нулевого давления применяется на границе сред с воздухом. В нашей задаче мы не учитываем влияние атмосферного давления на исследуемые процессы, считая его пренебрежимо малым. Следовательно мы принимаем  $p = 0$  на границах вода-воздух и лёд-воздух.

## 2.3 Численный метод

### 2.3.1 Сеточно-характеристический метод

Для решения систем уравнений в частных производных (2) и (1) воспользуемся сеточно-характеристическим методом на регулярных прямоугольных сетках. Получим его для системы (1), описывающей упругие среды. Для системы (1) он получается абсолютно аналогично если учесть, что для акустических сред  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = p$  и  $\sigma_{xy} = 0$ .

Будем работать в декартовой прямоугольной системе координат. Введём обозначение

$$\varphi = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Нижние индексы здесь обозначают соответствующие компоненты вектора скорости  $v$  и тензора напряжений  $\sigma$ .

Запишем гиперболическую полную систему линейный дифференциальных уравнений в частных производных (2) в канонической матричной форме

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ -(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Здесь  $\lambda$  и  $\mu$  — параметры Ламе, которые выражаются через заданные для конкретных сред скорости продольных и поперечных волн

$$\begin{cases} c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \\ c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \lambda = (c_p^2 - 2c_s^2)\rho \\ \mu = c_s^2\rho \end{cases} \quad (14)$$

Используя метод расщепления для системы, записанной в каноническом виде, получим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_x}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Заметим, что матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  можно диагонализовать

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{S}_1^{-1} \boldsymbol{\Lambda}_1 \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{B} &= \mathbf{S}_2^{-1} \boldsymbol{\Lambda}_2 \mathbf{S}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_1^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\lambda^2\rho}} & -\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\lambda^2\rho}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\mu\rho}} & -\frac{1}{\sqrt{\mu\rho}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\mu}{\lambda} + 1 & \frac{2\mu}{\lambda} + 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{\mu\rho}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{\mu\rho}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \sqrt{\frac{\lambda^2\rho}{4(\lambda+2\mu)}} & 0 & \frac{\lambda}{2\lambda+4\mu} & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{\lambda^2\rho}{4(\lambda+2\mu)}} & 0 & \frac{\lambda}{2\lambda+4\mu} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
S_2^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\mu\rho} & -\frac{1}{\mu\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{(\lambda+2\mu)\rho}} & -\frac{1}{\sqrt{(\lambda+2\mu)\rho}} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} & \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{\mu\rho}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{\mu\rho}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \sqrt{\frac{\lambda^2\rho}{4(\lambda+2\mu)}} & 0 & \frac{\lambda}{2\lambda+4\mu} & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{\lambda^2\rho}{4(\lambda+2\mu)}} & 0 & \frac{\lambda}{2\lambda+4\mu} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\Lambda_1 = \Lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_p \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Домножим первое уравнение системы (15) на  $S_1$  слева, а второе — на  $S_2$  также слева, при этом диагонализуя матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ .

$$\begin{cases} \mathbf{S}_1 \frac{\partial \varphi_x}{\partial t} + \mathbf{S}_1 (\mathbf{S}_1^{-1} \Lambda_1 \mathbf{S}_1) \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = 0 \\ \mathbf{S}_2 \frac{\partial \varphi_y}{\partial t} + \mathbf{S}_2 (\mathbf{S}_2^{-1} \Lambda_2 \mathbf{S}_2) \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Пользуясь тем, что матрицы  $\mathbf{S}_1$  и  $\mathbf{S}_2$  не зависят ни от времени, ни от координаты, вносим их в частные производные по времени и пространственным координатам

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{S}_1 \varphi_x) + \Lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{S}_1 \varphi_x) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{S}_2 \varphi_y) + \Lambda_2 \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{S}_2 \varphi_y) = 0 \end{cases}$$

Производя замену (переход к инвариантам Римана)

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \mathbf{S}_1 \varphi_x \\
\omega_2 &= \mathbf{S}_2 \varphi_y
\end{aligned} \tag{16}$$

получаем систему

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega_1}{\partial t} + \Lambda_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial t} + \Lambda_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial y} = 0 \end{cases} \tag{17}$$

Произведённая замена (16) очевидно обратимая, так как матрицы  $\mathbf{S}_i$ ,  $i = 1, 2$  обратимы

$$\begin{aligned}\varphi_x &= \mathbf{S}_1^{-1} \omega_1 \\ \varphi_y &= \mathbf{S}_2^{-1} \omega_2\end{aligned}\quad (18)$$

Так как матрицы  $\Lambda_i$ ,  $i = 1, 2$  диагональные, то система (17) представляет собой 10 независимых скалярных уравнений переноса.

Таким образом общая схема решения систем (2) и (1) следующая

1. Произвести переход к инвариантам Римана (16).
2. Решить систему независимых одномерных линейных уравнений переноса (17).
3. Осуществить обратный переход к физическим переменным (18).

Заметим, что выбор метода решения одномерного уравнения переноса является открытым. При этом именно он определяет порядок аппроксимации всего сеточно-характеристического численного метода. Приведём несколько наиболее часто используемых схем для решения одномерного линейное уравнение переноса на скалярную величину  $q$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \lambda \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

### 2.3.2 Схема Куранта-Изаксона-Риса

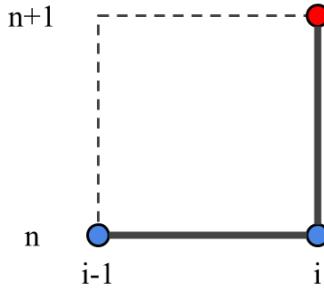


Рис. 4: Шаблон схемы Куранта-Изаксона-Риса.

Схема Куранта-Изаксона-Риса для решения уравнения (2.3.1) определяется как

$$\begin{cases} \frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} + \lambda \frac{q_i^n - q_{i-1}^n}{h} = 0 & , \lambda > 0 \\ \frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} + \lambda \frac{q_{i+1}^n - q_i^n}{h} = 0 & , \lambda < 0 \end{cases}$$

Данная схема имеет первый порядок аппроксимации и является устойчивой при выполнении условия Куранта-Фридрихса-Леви

$$\left| \frac{\lambda \tau}{h} \right| \leq 1 \quad (19)$$

### 2.3.3 Схема Русанова

Схема Русанова использует промежуточные индексы и состоит из трёх этапов

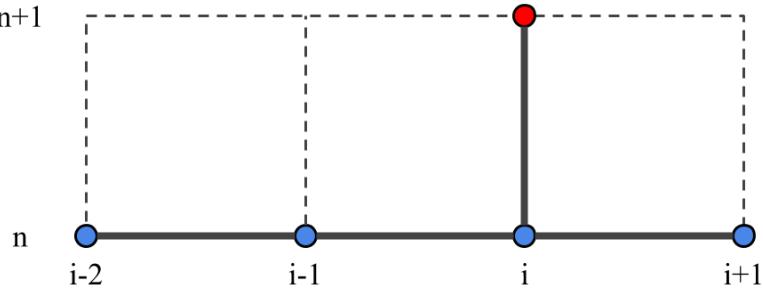


Рис. 5: Шаблон схемы Русанова третьего порядка аппроксимации.

- Переход  $t_n \rightarrow t_{n+1/3}$  производится по схеме Лакса

$$\begin{aligned} \frac{q_{i+1/2}^{n+1/3} - \frac{1}{2}(q_i^n + q_{i+1}^n)}{\tau/3} + \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{h} &= 0 \\ \frac{q_{i-1/2}^{n+1/3} - \frac{1}{2}(q_i^n + q_{i-1}^n)}{\tau/3} + \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{h} &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

- Для шага  $t_{n+1/3} \rightarrow t_{n+2/3}$  используется схема «чехарда»

$$\frac{q_i^{n+2/3} - q_i^n}{2\tau/3} + \frac{f_{i+1/2}^{n+1/3} - f_{i-1/2}^{n+1/3}}{h} = 0 \quad (21)$$

- Последний шаг  $t_{n+2/3} \rightarrow t_{n+1}$  следующий

$$\begin{aligned} \frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} + \frac{3}{8} \frac{f_{i+1}^{n+2/3} - f_{i-1}^{n+2/3}}{h} + \frac{-2f_{i+2}^n + 7f_{i+1}^n - 7f_{i-1}^n + 22f_{i-2}^n}{24h} + \\ + \frac{\omega}{24} (q_{i+2}^n - 4q_{i+1}^n + 6q_i^n - 4q_{i-1}^n + q_{i-2}^n) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Последнее слагаемое необходимо для обеспечения устойчивости данной схемы.

Схема Русанова имеет третий порядок аппроксимации и является условно устойчивой при выполнении, в дополнении к условию Куранта-Фридрихса-Леви (19), неравенства  $4s^2 - s^4 \leq \omega \leq 3$ , где  $s = \frac{\tau}{h}$ .

### 2.3.4 Контактные и граничные условия

## 2.4 Моделирование воздействия бура

Современные буры имеют довольно сложное устройство, зачастую сочетаю в себе ударные и врацательные механизмы. В данной работе нас в первую очередь интересует волновая картина, возникающая при бурении в конкретной геологической модели (см. рис. 1). Поэтому, для простоты, воздействие бура мы будем представлять в качестве точечного источника давления в виде импульса Рикера частотой 30 Гц.

$$p(x, y) = \frac{1}{\pi\sigma^4} \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{x^2 + y^2}{\sigma^2} \right) \right) \exp \left( -\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2} \right) \quad (23)$$

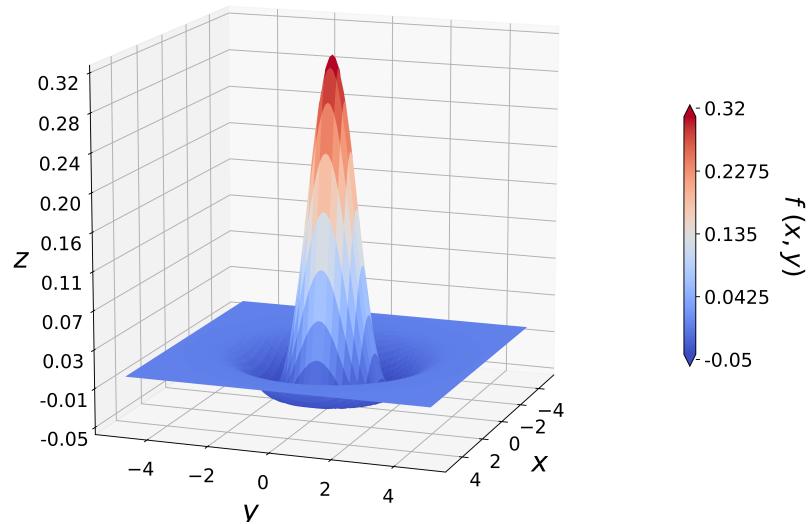
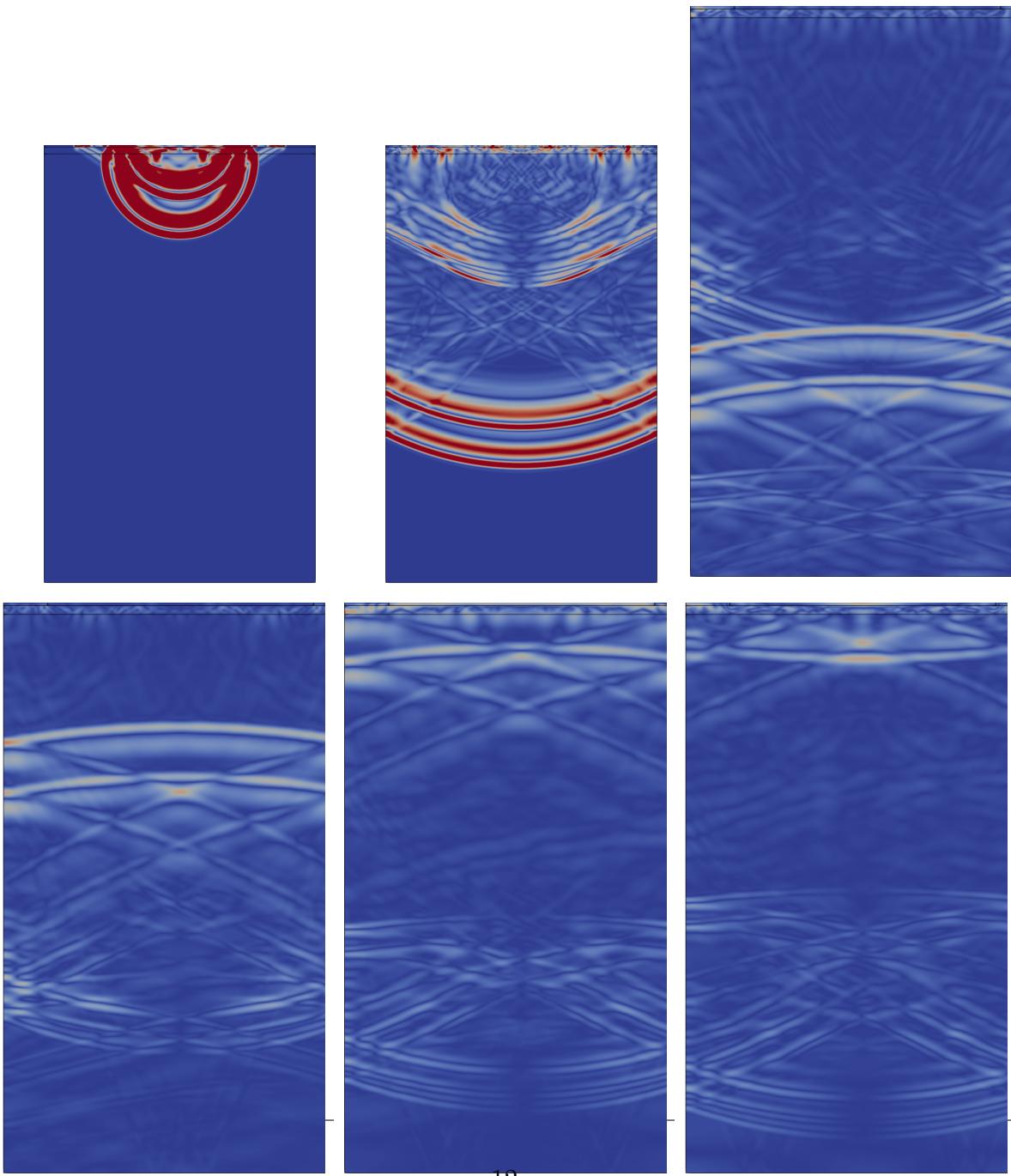


Рис. 6: График импульса Рикера (23) при  $\sigma = 1$ .



12

Рис. 7: Волновая картина

---

---

## 2.5 Моделирование статической нагрузке (задача о штампе)

### 3. Поглощающие граничные условия для двумерной системы уравнений акустики

При моделировании волновых процессов в геофизике зачастую приходится иметь дело с неограниченными физическими областями, в которых выделяются конечные расчётные под-области. Волны упругости, выходя за границу такой под-области, продолжают распространяться по неограниченной области, не оказывая влияния на процессы, происходящие внутри расчётной под-области. Для обеспечения такого поведения на практике, на границах расчётных под-областей необходимо применять специальные условия.

В данной главе будут рассмотрены поглощающие граничные условия Mur и PML для систем уравнений акустики в двумерном случае.

#### 3.1 Уравнения акустики

Система уравнений акустики описывает распространение малых колебаний в идеальном газе и является следствием уравнений Эйлера. В двумерном случае она имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial t} = -\rho c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (24)$$

Здесь  $x$  и  $y$  — координаты в ортонормированной декартовой системе координат,  $u(x, y, t)$  и  $v(x, y, t)$  — скорости<sup>2</sup>,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $c$  — скорость звука. Также иногда используют величину  $\kappa = \rho c^2$  — объёмный модуль упругости.

Решение системы будем рассматривать в моменты времени  $t \in [0, T]$  в прямоугольной области  $\Gamma := \{(x, y) \mid (x, y) \in [0, X] \times [0, Y]\}$ .

Для краткости записи введём векторную переменную

$$\varphi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \end{pmatrix} \quad (25)$$

Тогда начальное условие и граничные условия запишутся в следующем виде

$$\varphi(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma \quad (26)$$

$$\begin{cases} \varphi(0, y, t) = \varphi_L(y, t), & y \in [0, Y] \\ \varphi(X, y, t) = \varphi_R(y, t), & y \in [0, Y] \\ \varphi(x, 0, t) = \varphi_T(x, t), & x \in [0, X] \\ \varphi(x, Y, t) = \varphi_B(x, t), & x \in [0, X] \end{cases} \quad (27)$$

<sup>2</sup>Ранее в (1) мы обозначали  $u \equiv v_x$ ,  $v \equiv v_y$ . Здесь переход к новым обозначениям позволяет уменьшить количество индексов, что значительно упрощает запись рассматриваемых далее численных методов.

### 3.2 Численное решение системы уравнений акустики

Здесь и далее решение дискретной задачи будем рассматривать на регулярной прямоугольной сетке с размером шага  $h_x$  и  $h_y$  соответственно. Для простоты будем считать, что физические размеры рассматриваемой прямоугольной области нацело делятся на шаг сетки:  $X = Nh_x$ ,  $Y = Mh_y$ ,  $N, M \in \mathbb{N}$ . Таким образом разностная сетка определяется как  $G := \{(x_i, y_j) \mid x_i = ih_x, i \in \overline{0, N}, y_j = jh_y, j \in \overline{0, M}\}$ . Шаг по времени будем считать постоянным равным  $\tau$  и нацело делящим  $T$ .

При использовании значений в узлах сетки, нижние индексы будем использовать для обозначения пространственных координат, а верхний — для времени. Например,  $p_{i,j}^n$  — давление в момент времени  $t = \tau n \in [0, T]$  в точке с координатами  $(ih_x, jh_y) \in G$ .

#### 3.2.1 Метод конечных разностей

Простейшим численным методом решения системы уравнений в частных производных (24) является метод конечных разностей. Получим одну из возможных разностных схем. Для этого применим явную двухточечную схему для дискретизации производных по времени и центральную двухточечную схему для дискретизации производных по пространственным переменным.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n}{\tau} \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{f_{i+1,j}^n - f_{i-1,j}^n}{2h_x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{f_{i,j+1}^n - f_{i,j-1}^n}{2h_y}\end{aligned}$$

Таким образом мы получим следующую разностную схему (leapfrog scheme)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} = -\frac{1}{\rho} \frac{p_{i+1,j}^{n+1/2} - p_{i-1,j}^{n+1/2}}{2h_x} \\ \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\tau} = -\frac{1}{\rho} \frac{p_{i,j+1}^{n+1/2} - p_{i,j-1}^{n+1/2}}{2h_y} \\ \frac{p_{i,j}^{n+3/2} - p_{i,j}^{n+1/2}}{\tau} = -\rho c^2 \left( \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{2h_x} + \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1}}{2h_y} \right) \end{array} \right. \quad (28)$$

Она имеет второй порядок аппроксимации по пространственным переменным и первый по времени.

#### 3.2.2 Сеточно-характеристический метод

Более эффективным методом решения гиперболических систем является сеточно-характеристический метод. В части 2.3.1 уже рассматривался вывод сеточно-характеристического метода для решения упругого волнового уравнения. Проведём этот вывод ещё раз, на этот раз для уравнений акустики.

Перепишем исходную систему (24) в матричном виде, используя ранее введённую переменную  $\varphi$  (26)

$$\varphi_t = \mathbf{A}\varphi_x + \mathbf{B}\varphi_y \quad (29)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\rho c^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} \\ 0 & -\rho c^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

Для решения полученной системы воспользуемся методом расщепления: будем решать систему, делая шаг по  $x$  на первом полушаге по времени, и делая шаг по  $y$  на втором полушаге по времени:

$$\begin{aligned} \varphi_t &= \mathbf{A}\varphi_x \\ \varphi_t &= \mathbf{B}\varphi_y \end{aligned} \quad (31)$$

Таким образом пересчёт на новой временной слой будет иметь вид

$$\begin{aligned} \varphi^{t+\Delta t/2} &= S_x(\Delta t/2, \varphi^t) \\ \varphi^{t+\Delta t} &= S_y(\Delta t/2, \varphi^{t+\Delta t/2}) \end{aligned} \quad (32)$$

где  $\Delta t$  — величина шага по времени,  $S_x$  — некоторый оператор шага по  $x$ ,  $S_y$  — шага по  $y$ .

Заметим, что матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  раскладываются как произведения

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}_1^{-1} \boldsymbol{\Lambda}_1 \mathbf{S}_1 \quad (33)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}_2^{-1} \boldsymbol{\Lambda}_2 \mathbf{S}_2 \quad (34)$$

где  $\boldsymbol{\Lambda}_i$  — диагональные матрицы, составленные из собственных чисел матриц  $A$  и  $B$

$$\mathbf{S}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\rho c}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{\rho c}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (35)$$

$$\mathbf{S}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho c}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\rho c}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (36)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_1 = \boldsymbol{\Lambda}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad (37)$$

Так как, как было показано выше, матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  приводятся к диагональному виду, то поставленная задача является гиперболической.

Домножим уравнения (31) слева на  $\mathbf{S}_1$  и  $\mathbf{S}_2$  соответственно:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1 \varphi_t &= \mathbf{S}_1 \mathbf{A} \varphi_x = (\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_1^{-1}) \boldsymbol{\Lambda}_1 \mathbf{S}_1 \varphi_x = \boldsymbol{\Lambda}_1 (\mathbf{S}_1 \varphi_x) \\ \mathbf{S}_2 \varphi_t &= \mathbf{S}_2 \mathbf{B} \varphi_y = (\mathbf{S}_2 \mathbf{S}_2^{-1}) \boldsymbol{\Lambda}_2 \mathbf{S}_2 \varphi_y = \boldsymbol{\Lambda}_2 (\mathbf{S}_2 \varphi_y) \end{aligned} \quad (38)$$

Делая замену  $\omega^i = \mathbf{S}_i \varphi$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , и учитывая, что матрицы  $\boldsymbol{\Lambda}_i$  диагональные, приходим к двум системам из трёх скалярных независимых уравнений переноса:

$$\begin{aligned} \omega_t^1 &= \boldsymbol{\Lambda}_1 \omega_x^1 \\ \omega_t^2 &= \boldsymbol{\Lambda}_2 \omega_y^2 \end{aligned} \quad (39)$$

Для решения этих скалярных уравнений будем использовать схему TVD второго порядка с ограничителем superbee. [?]

### 3.3 Виды поглощающих граничных условий

Существует три основных подхода для реализации поглощающих граничных условий [1] [2]:

1. Введение новых пространственных переменных, которые переводят неограниченную рассматриваемую область в ограниченную. На этот подход можно посмотреть и с «физической» стороны, рассматривая дискретизацию неограниченного региона сеткой с бесконечно возрастающим по мере удаления от рассматриваемой под-области шагом сетки.
2. Анализ соотношений между падающей и отражённой волной и постановка граничного условия соответствующего минимизации отражённой части.
3. Добавление к рассматриваемой ограниченной области новых граничных слов, в которых дополнительно вводится диссипативный член, растущий по мере удаления от рассматриваемой области.

В данной работе мы будем обращаться к последним двум подходам, представленным соответственно граничными условиями Mur и PML.

### 3.4 Поглощающие граничное условие Mur

Рассмотрим одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (40)$$

Это уравнение очевидно является одномерным частным случаем двумерной системы уравнений акустики (24) при  $\varphi(x, y, t) = \varphi(x, t)$ .

Разложим (40) на два уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (41)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (42)$$

Уравнение (41) соответствует волне, идущей влево по оси x, а уравнение (42) — идущей вправо.

Пусть рассматриваемая область представляет собой отрезок  $\gamma := [0, N h_x]$ . Поставим поглощающее граничное условие на правом конце (для левой границы это можно сделать абсолютно аналогично). Чтобы правая граница была поглощающей, или не-отражающей, необходимо, чтобы отсутствовала отражённая волна, распространяющаяся влево. В таком случае, на правой границе должно выполняться только уравнение (42), а не полное волновое уравнение (40).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (43)$$

Для того, чтобы при дискретизации производная по времени и производная по пространственной координате были вычислены в одной точке, будем усреднять разностные производные в моменты времени  $n$  и  $n + 1$ , получая таким образом решение в точке  $x = (N - \frac{1}{2}) h_x$ ,  $t = (n + \frac{1}{2}) \tau$ . [2] [?]

$$\frac{1}{2} \left( \frac{u_N^n - u_{N-1}^n}{h_x} + \frac{u_N^{n+1} - u_{N-1}^n}{h_y} \right) = -\frac{1}{c} \frac{1}{2} \left( \frac{u_N^{n+1} - u_N^n}{\tau} + \frac{u_{N-1}^{n+1} + u_{N-1}^n}{\tau} \right) \quad (44)$$

Обозначая  $r = \frac{c\tau}{h_x}$ , получаем явное выражение для граничного условия

$$u_N^{n+1} = u_{N-1}^n + \frac{r-1}{r+1} (u^{n+1} N - 1 - u_N^n) \quad (45)$$

В одномерном случае поглощающее условие Mir является точным. Распространить его можно и на двухмерный случай для рассматриваемой нами системы уравнений акустики (24)

$$u_{N,j}^{n+1} = u_{N-1,j}^n + \frac{r-1}{r+1} (u^{n+1} N - 1, j - u_{N,j}^n) \quad (46)$$

В этом случае поглощение будет точным только если волна падает строго нормально на рассматриваемую границу, соответствующа тем самым одномерному случаю. В противном случае будет наблюдаться возникновение отражённых от границы волн.

### 3.5 Berenger PML

Поглощающее граничное условие *perfectly matched layer* (PML) впервые было введено в работе [3] для системы уравнений Максвелла, описывающих распространение электромагнитных волн. Оказывается [4], что, произведя необходимые замены переменных, эту систему уравнений можно свести к системе уравнений акустики (24).

Для реализации затухания в PML слое добавляются диссипативные слагаемые  $c_i \sigma_x(x, y)$  и  $c_i \sigma_y(x, y)$ , где в качестве функций  $\sigma_{x/y}$  обычно выбирают

$$\sigma_x = \left( \frac{d_x}{w_x} \right)^k \Sigma_x \quad (47)$$

$$\sigma_y = \left( \frac{d_y}{w_y} \right)^k \Sigma_y \quad (48)$$

здесь  $d_{x/y}(x, y)$  — глубина проникновения в PML слой, имеющий глубину  $w_{x/y}$ ,  $k$  — степень скорости роста коэффициентов PML,  $\Sigma_{x/y}$  — максимальные значения диссипативных слагаемых<sup>3</sup>.

Значения параметров  $k$  и  $\Sigma_{x,y}$  обычно подбираются под конкретную задачу из эмпирических соображений для наиболее эффективной реализации поглощающего граничного условия.

В случае применения PML на всех четырёх границах прямоугольной области  $\Gamma$ , то, используя обозначения, введённые для рассчётной сетки  $G$ , можно записать

$$d_x = h_x \cdot \min\{i, N - i\} \quad (49)$$

$$d_y = h_y \cdot \min\{j, M - j\} \quad (50)$$

Система уравнений акустики с диссипативными членами имеет вид [4]

---

<sup>3</sup>Глубина проникновения в PML слой очевидно меньше ширины слоя, а значит множитель перед  $\Sigma_{x/y}$  лежит в пределах от 0 до 1. Значит  $\sigma_{x/y}$  лежит в пределах от 0 до  $\Sigma_{x/y}$ .

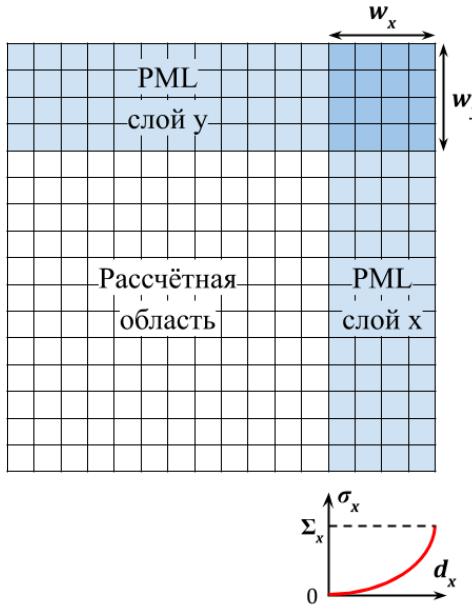


Рис. 8: Схема правого и верхнего PML слоёв.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c\sigma_x u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + c\sigma_y u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial t} + c(\sigma_x + \sigma_y)p = -\rho c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \rho c^2 \sigma_x \frac{\partial Q}{\partial y} - \rho c^2 \sigma_y \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = cv \\ \frac{\partial P}{\partial t} = cu \end{cases} \quad (51)$$

где  $Q$  и  $P$  — дополнительные переменные, определяющиеся из последних двух уравнений.

### 3.6 Split-field PML

Другим классическим вариантом граничного условия PML является так называемый *split-field PML* [?]

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sigma_x(x) \right) p_1 + \kappa \frac{\partial}{\partial x} v_x = 0 \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sigma_y(y) \right) p_2 + \kappa \frac{\partial}{\partial y} v_y = 0 \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sigma_x(x) \right) v_x + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p = 0 \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sigma_y(y) \right) v_y + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} p = 0 \\ p = p_1 + p_2 \end{cases} \quad (52)$$

где, напомним,  $\kappa = \rho c^2$  — объёмный модуль упругости. Функции  $\sigma_{x/y}$  выбираются аналогично случаю Berenger PML.

В системе (52) давление  $p$  разделяется на компоненты  $p_1$  и  $p_2$ . В начальный момент времени они определяются как половины общего значения давления  $p$ :  $p_1(x, y, t = 0) = p_2(x, y, t = 0) = \frac{p(x, y)}{2}$ . В дальнейшем  $p_1$  и  $p_2$  определяются из численных уравнений, а  $p$  вычисляется после каждой итерации, как сумма  $p_1$  и  $p_2$ .

### 3.7 Решение PML-систем методом конечных разностей

Аналогично разностной схеме (28) для системы уравнений акустики, заменяя аналитические производные на разностные, получим системы разностных уравнений для Berenger PML (51)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} + c\sigma_{x_i} u^n = -\frac{1}{\rho} \frac{p_{i+1/2,j}^{n+1/2} - p_{i-1/2,j}^{n+1/2}}{h_x} \\ \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\tau} + c\sigma_{y_j} v^n = -\frac{1}{\rho} \frac{p_{i,j+1}^{n+1/2} - p_{i,j-1}^{n+1/2}}{2h_y} \\ \frac{Q^{n+1} - Q^n}{\tau} = cv_{i,j}^n \\ \frac{P^{n+1} - P^n}{\tau} = cu_{i,j}^n \\ \frac{p_{i,j}^{n+3/2} - p_{i,j}^{n+1/2}}{\tau} + c(\sigma_{x_i} + \sigma_{y_j}) p^{n+1/2} = \\ = -\rho c^2 \left( \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{2h_x} + \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1}}{2h_y} - \sigma_{x_i} \frac{Q_{i,j+1}^{n+1} - Q_{i,j}^{n+1}}{h_y} - \sigma_{y_j} \frac{P_{i+1,j}^{n+1} - P_{i,j}^{n+1}}{h_x} \right) \end{array} \right. \quad (53)$$

и для split-field PML (52)

$$\left\{ (p_1)_{i,j}^{n+1} p_{i,j}^{n+1} = (p_1)_{i,j}^{n+1} + (p_2)_{i,j}^{n+1} \right. \quad (54)$$

### 3.8 Решение PML-систем сеточно-характеристическим методом

Сеточно-характеристический метод, рассмотренный в первой главе, является более эффективным по сравнению с простым конечно-разностным методом. Покажем, что он применим для решения систем уравнений Berenger PML (51) и split-field pml (52).

#### 3.8.1 Berenger PML

Рассмотрим систему уравнений, реализующую затухающее граничное условие типа PML (51), и произведём замену:

$$\varphi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \\ Q \\ P \end{pmatrix} \quad (55)$$

Тогда система принимает вид

$$\varphi_t = \mathbf{A}\varphi_x + \mathbf{B}\varphi_y + \mathbf{S}\varphi \quad (56)$$

где матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{S}$  следующие

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\rho c^2 & 0 & 0 & 0 & -\rho c^2 \sigma_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & -\rho c^2 & 0 & -\rho c^2 \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -c\sigma_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c\sigma_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c(\sigma_x + \sigma_y) & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Эти матрицы можно диагонализовать

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}_1 \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{R}_1$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}_2 \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{R}_2$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{L}_3 \mathbf{\Lambda}_3 \mathbf{R}_3$$

$$\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_y & 0 & \frac{1}{c\rho} & -\frac{1}{c\rho} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c\rho}{2} & \frac{1}{2} & \frac{c\rho\sigma_y}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{c\rho}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{c\rho\sigma_y}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L}_2 = \begin{pmatrix} -\sigma_x & 0 & 0 & \frac{1}{c\rho} & -\frac{1}{c\rho} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{c\rho}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{c\rho\sigma_x}{2} \\ -\frac{c\rho}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{c\rho\sigma_x}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Lambda}_1 = \mathbf{\Lambda}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_3 = \begin{pmatrix} \sigma_x^{-1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sigma_y^{-1} & 0 & 1 & 0 \\ -\sigma_x^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_y^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c\sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c\sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c(\sigma_x + \sigma_y) \end{pmatrix}$$

Полученное векторное уравнение в частных производных можно расщепить по физическим процессам для каждой компоненты аналогично уравнению переноса-диффузии с  $\mu = 0$  [5].

Будем решать систему, делая шаг по  $x$  на первой трети шага по времени, делая шаг по  $y$  на второй, и решая неоднородное уравнение на третьей части шага по времени:

$$\varphi_t = \mathbf{A}\varphi_x$$

$$\varphi_t = \mathbf{B}\varphi_y$$

$$\varphi_t = \mathbf{S}\varphi$$

Домножая  $i$ -ое уравнение слева на  $\mathbf{R}_i$

$$\mathbf{R}_1\varphi_t = \mathbf{R}_1(\mathbf{L}_1\Lambda_1\mathbf{R}_1)\varphi_x$$

$$\mathbf{R}_2\varphi_t = \mathbf{R}_2(\mathbf{L}_2\Lambda_2\mathbf{R}_2)\varphi_y$$

$$\mathbf{R}_3\varphi_t = \mathbf{R}_3(\mathbf{L}_3\Lambda_3\mathbf{R}_3)\varphi$$

$$\mathbf{R}_1\varphi_t = \Lambda_1\mathbf{R}_1\varphi_x$$

$$\mathbf{R}_2\varphi_t = \Lambda_2\mathbf{R}_2\varphi_y$$

$$\mathbf{R}_3\varphi_t = \Lambda_3\mathbf{R}_3\varphi$$

Делая замену  $\omega^i = \mathbf{R}_i\varphi$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , и учитывая, что матрицы  $\Lambda_i$  диагональные, приходим к трём системам из трёх скалярных независимых уравнений:

$$\begin{cases} \omega_t^1 = \Lambda_1\omega_x^1 \\ \omega_t^2 = \Lambda_2\omega_y^2 \\ \omega_t^3 = \Lambda_3\omega^3 \end{cases} \quad (57)$$

Первые две системы представляют собой независимые скалярные уравнения переноса. Для их численного решения мы воспользуемся TVD-схемой второго порядка с ограничителем superbee.

Третья система представляет собой 5 независимых скалярных уравнений с разделяемыми переменными, которые очевидно решаются аналитически. Обозначая номер уравнения нижним индексом  $l$ , получаем

$$\begin{cases} (\omega_l^3)_t = 0 & l = 1, 2 \\ (\omega_l^3)_t = [\Lambda_3]_{ll}\omega_l^3 & l = 3, 4, 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_l^3(t) = \omega_l^3(t=0) & l = 1, 2 \\ \omega_l^3(t) = \omega_l^3(t=0) \cdot \exp([\Lambda_3]_{ll}t) & l = 3, 4, 5 \end{cases}$$

Таким образом построен сеточно-характеристический метод решения уравнения

(51).

### 3.8.2 Split-Field PML

Теперь построим сеточно-характеристический метод решения системы уравнений split-field PML (52)

На этот раз произведём замену

$$\varphi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (58)$$

Тогда система принимает вид

$$\varphi_t = \mathbf{A}\varphi_x + \mathbf{B}\varphi_y - \mathbf{C}\varphi \quad (59)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_y \end{pmatrix} \quad (60)$$

Опять замечаем, что матрицы можно диагонализовать

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}_1 \boldsymbol{\Lambda}_1 \mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{\kappa\rho}} & \frac{1}{\sqrt{\kappa\rho}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{\kappa}{\rho}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{\kappa\rho}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{\kappa\rho}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}_2 \boldsymbol{\Lambda}_2 \mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{\kappa\rho}} & \frac{1}{\sqrt{\kappa\rho}} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{\kappa}{\rho}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{\kappa\rho}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{\kappa\rho}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Опять воспользуемся расщеплением по физическим процессам для каждой компоненты полученного векторного уравнение в частных [5]. Тогда, расщепляя систему и домножая на  $\mathbf{L}_i^{-1} = \mathbf{R}_i$  слева, получим

$$\begin{cases} \mathbf{R}_1 \varphi_t = \boldsymbol{\Lambda}_1 \mathbf{R}_1 \varphi_x \\ \mathbf{R}_2 \varphi_t = \boldsymbol{\Lambda}_2 \mathbf{R}_2 \varphi_y \\ \varphi_t = -\mathbf{C}\varphi \end{cases} \quad (61)$$

Производя замену переменных  $\omega_i = \mathbf{R}_i \varphi$ :

$$\begin{cases} \omega_t^1 = \boldsymbol{\Lambda}_1 \omega_x^1 \\ \omega_t^2 = \boldsymbol{\Lambda}_2 \omega_y^2 \\ \varphi_t = -\mathbf{C}\varphi \end{cases} \quad (62)$$

Решение этой системы аналогично уже разобранному решению системы (57).

Таким образом система уравнений split-field PML (52) также решается сеточно-характеристическим методом.

### 3.9 Численные эксперименты

$$\kappa(x, y, t) = \frac{3}{2}/p(x, y, t) dV(x, y) \quad (63)$$

$$K = \frac{3}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p(ih_x, jh_y, t) h_x h_y \quad (64)$$

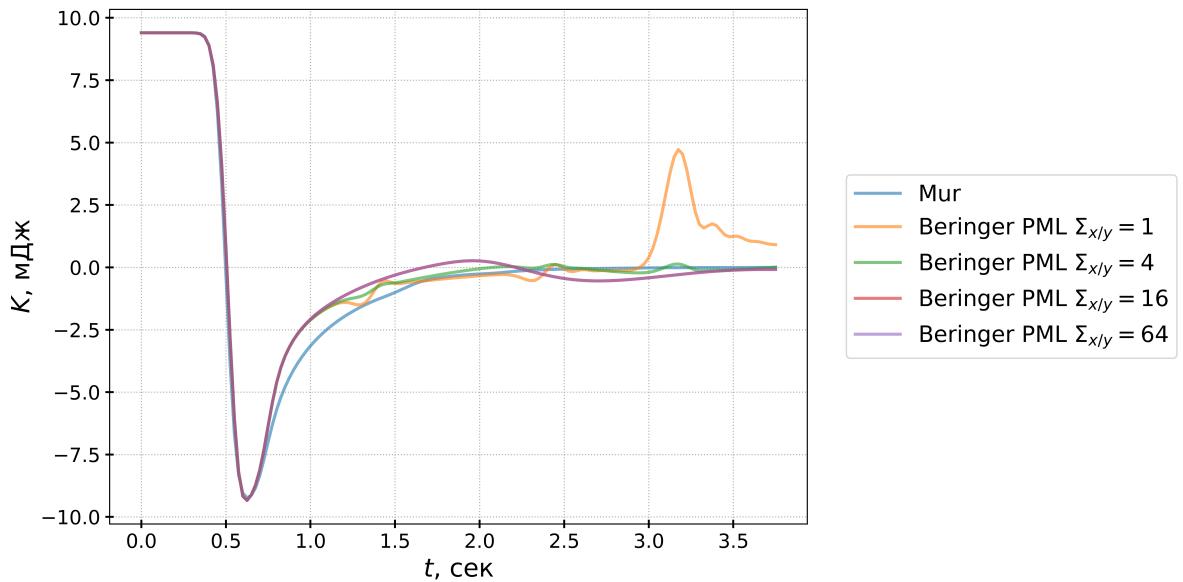


Рис. 9: Зависимость кинетической энергии от времени для конечно-разностной реализации поглощающих граничных условий Mur и Berenger PML для различных значений параметра  $\Sigma_{x/y}$ .

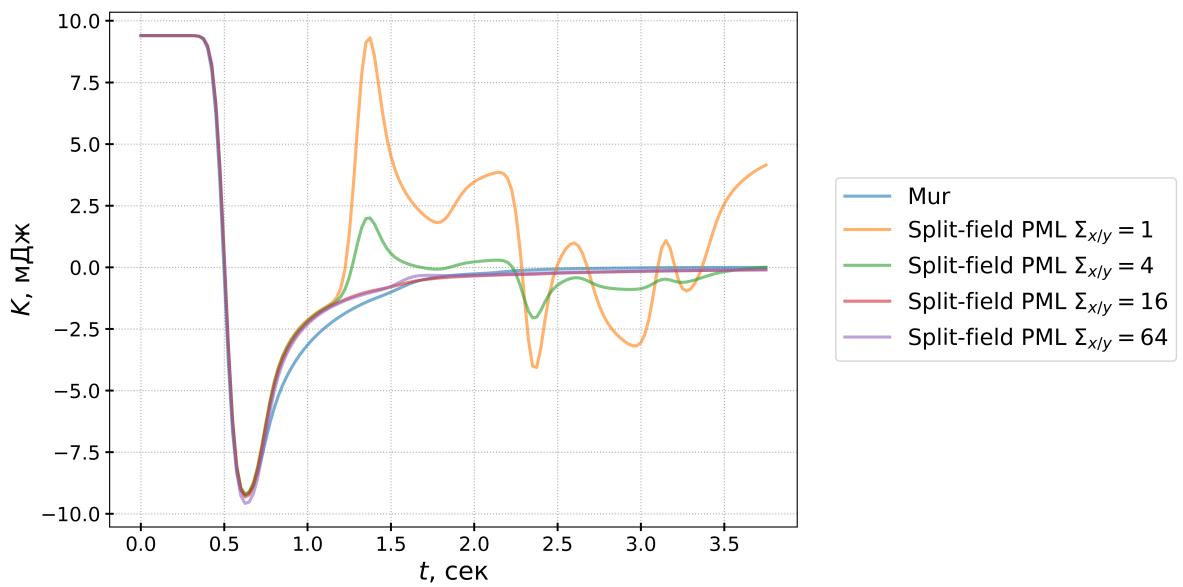


Рис. 10: Зависимость кинетической энергии от времени для конечно-разностной реализации поглощающих граничных условий Mur и split-field PML для различных значений параметра  $\Sigma_{x/y}$ .

### 3.10 Методы оценки результатов

- [6] [7]
- [4] [5] [2]

## Список литературы

- [1] Lloyd N. Trefethen. In *Finite Difference and Spectral Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*, pages 225–226, 1994.
- [2] Shinichi Sakamoto, Hideo Tsuru, Masahiro Toyoda, and Takumi Asakura. *Computational Simulation in Architectural and Environmental Acoustics*. Springer Japan, 2014.
- [3] J.P.Berenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. of Comp.Phys*, 114(2):185–200, 10 1994.
- [4] Eli Turkel and A. Yefet. Absorbing pml boundary layers for wave-like equations. *Applied Numerical Mathematics*, 27:533–557, 08 1998.
- [5] Г. И. Марчук. Методы расщепления для решения нестационарных задач. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 35(6):667–671, 08 1995.
- [6] E; Rees M. Courant, Richard; Isaacson. On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences. *Comm. Pure Appl. Math.*, 5(3):243–255, 08 1952.
- [7] А.И. Лобанов И.Б. Петров. *Лекции по вычислительной математике: Учебное пособие*. М.: Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.