

# Аннотация

Цель данной работы — проведение компьютерного моделирования волновых процессов, происходящих при эксплуатации искусственных ледовых островов, а также исследование применения поглощающих граничных условий типа PML совместно с сеточно-характеристическим методом для задач вычислительной геофизики.

В рамках работы проведено моделирование распространения волн упругости в ледовом острове, воде и грунте при бурении; найдены распределения напряжений в ледовом острове при статической нагрузке и выявлены области острова, наиболее подверженные разрушению.

Также в данной работе была теоретически доказана возможность применения поглощающих граничных условий Berenger PML и split-field PML совместно с сеточно-характеристическим методом для двумерной системы уравнений акустики. Для этих граничных условий проведён численный эксперимент по сравнению эффективности работы конечно-разностной и сеточно-характеристической реализаций, показавший превосходство последних.

# Содержание

<b>1 Введение</b>	<b>4</b>
<b>2 Моделирование динамических процессов в ледовом острове</b>	<b>6</b>
2.1 Постановка задачи . . . . .	6
2.2 Математическая модель среды . . . . .	7
2.2.1 Уравнения . . . . .	7
2.2.2 Контактные условия . . . . .	7
2.2.3 Граничные условия . . . . .	9
2.2.4 Модель бура . . . . .	11
2.2.5 Модель разрушений . . . . .	11
2.3 Численный метод . . . . .	12
2.3.1 Сеточно-характеристический метод . . . . .	12
2.3.2 Схемы для решения одномерного уравнения переноса . . . . .	14
2.3.3 Схема Куранта-Изаксона-Риса . . . . .	15
2.3.4 Схема Русанова . . . . .	15
2.3.5 Схема TVD 2-го порядка аппроксимации . . . . .	16
2.4 Моделирование воздействия бура . . . . .	17
2.4.1 Постановка численного эксперимента . . . . .	17
2.4.2 Результаты . . . . .	17
2.5 Моделирование статической нагрузки . . . . .	20
2.5.1 Постановка численного эксперимента . . . . .	20
2.5.2 Результаты . . . . .	20
<b>3 Поглощающие граничные условия для уравнений акустики</b>	<b>22</b>
3.1 Уравнения акустики . . . . .	22
3.2 Численное решение системы уравнений акустики . . . . .	23
3.2.1 Метод конечных разностей . . . . .	23
3.2.2 Сеточно-характеристический метод . . . . .	24
3.3 Виды поглощающих граничных условий . . . . .	25
3.4 Поглощающие граничное условие Mir . . . . .	26
3.5 Berenger PML . . . . .	27
3.6 Split-field PML . . . . .	28
3.7 Решение PML-систем методом конечных разностей . . . . .	29
3.8 Решение PML-систем сеточно-характеристическим методом . . . . .	30
3.8.1 Berenger PML . . . . .	30
3.8.2 Split-Field PML . . . . .	33
3.9 Численные эксперименты . . . . .	34
3.9.1 Область моделирования . . . . .	34
3.9.2 Начальные условия . . . . .	35
3.9.3 Методы оценки качества поглощения . . . . .	36
3.9.4 Результаты . . . . .	37
<b>4 Заключение</b>	<b>43</b>
<b>Благодарности</b>	<b>44</b>
<b>Список литературы</b>	<b>45</b>

# 1. Введение

Арктический регион имеет огромные запасы полезных ископаемых. Например, суммарный объём одних только газовых месторождений на шельфе северных морей достигает 2.7 трлн тонн. Поиск, разработка и эксплуатация новых месторождений перспективны, но требуют решения новых вычислительных и инженерных задач для обеспечения эффективной и безопасной работы в Арктике [1].

В настоящее время особенный интерес для нефтегазовой индустрии представляет добыча полезных ископаемых на Арктическом шельфе с использованием искусственных ледовых островов.

Ледовые острова обладают рядом преимуществ перед традиционными бетонными и металлическими нефтегазовыми платформами. Во-первых, основной строительный материал, лёд, в Арктике доступен и дёшев. Во-вторых, при использовании льда платформа является абсолютно экологически чистой. В третьих, в летний период лёд тает сам по себе, тем самым избавляя от необходимости проведения полного демонтажа несущих конструкций при завершении работы платформы. Это особенно важно для упрощения и удешевления разведочного бурения. Описанные преимущества делают ледовые острова отличным инструментом для проведения разведочного бурения в мелководных районах Северных морей.

При использовании ледовых островов возникает и ряд проблем. Важнейшей является обеспечение безопасности персонала и установок, находящихся на поверхности острова. Устойчивости и целостности льда угрожают как механические, так и термические воздействия. К механическим воздействиям относятся сейсмическая активность [2], столкновение с айсбергами и ледовыми полями [3], [4], бурение и статическая нагрузка [5]. К термическим — воздействие солнечной радиации и тёплых течений [1], [6]. Другой проблемой, возникающей при эксплуатации ледовых островов, оказывается значительное влияние льда на сейсморазведку [7]. Отражение упругих волн от поверхностей острова усложняет сейсмограммы, затрудняя их анализ и утяжеляя поиск полезных ископаемых.

Для расчёта механических воздействий, оказываемых на ледовый остров, требуется численное моделирование распространения упругих волн во льду и геологических средах. Для этих целей хорошо зарекомендовал себя сеточно-характеристический метод. С его помощью можно решать задачи как на прямоугольных, так и на тетраэдральных сетках. Это позволяет применять его для моделирования неоднородных и трещиноватых сред. К его достоинствам также относится возможность постановки корректных граничных и контактных условий. Кроме того, сеточно-характеристический метод эффективно распараллеливается, позволяя производить объёмные расчёты на многопроцессорных вычислительных системах. [1], [8]—[11]

При моделировании распространения волн в геологических средах часто используются поглощающие граничные условия [12], [13]. Самым простым поглощающим условием, пожалуй, является граничное условие Mur [13]. Граничные условия ти-

па полностью согласованного слоя (PML) — более сложные, но и более эффективные. Разработано множество вариантов граничных условий PML, в частности, Berenger PML [14] и split-field PML [15]. Граничные условия Mur, Berenger PML и split-field PML используются, как правило, совместно с конечно-разностным методом. Интересно изучить возможность их применения совместно с сеточно-характеристическим методом.

Данная работа состоит из двух частей. В первой части рассмотрено компьютерное моделирование динамических процессов в ледовом острове, в том числе задача о бурении и статической нагрузке. Во второй части рассмотрены поглощающие граничные условия типа Mur, Berenger PML и split-field PML для двумерной системы уравнений акустики, проведён анализ их эффективности при использовании конечно-разностного и сеточно-характеристического методов.

## 2. Моделирование динамических процессов в ледовом острове

### 2.1. Постановка задачи

Рассмотрим двумерную модель ледового острова шириной 300 м и высотой 10 м, покоящегося на дне моря глубиной 8 м. Грунт под островом будем считать состоящим из придонного слоя глубиной 10 м и слоя осадочных пород глубиной 600 м. В некоторых случаях мы будем также рассматривать газоносный слой, находящийся под слоем осадочных пород.

В табл. 1 приведены скорости поперечных и продольных волн  $c_p$  в рассматриваемых средах, а также их плотность  $\rho$ .

Ставятся следующие задачи:

1. Исследовать распространение акустических и упругих волн от бура, расположенного посередине длины острова на глубине 20 м, с учётом наличия газоносного слоя.

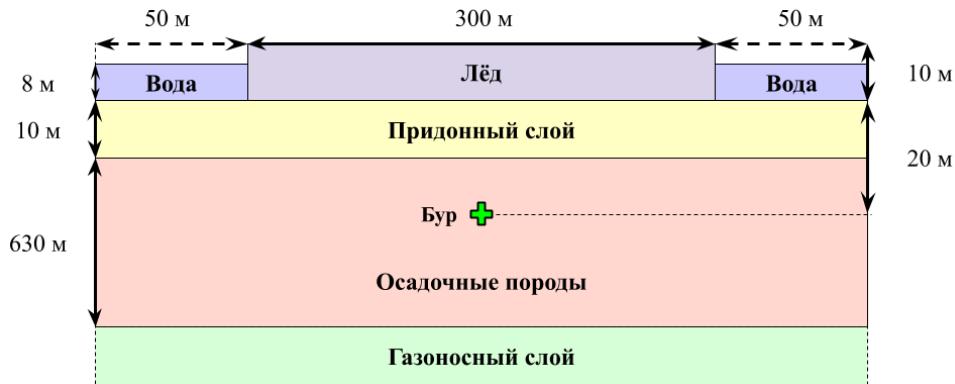


Рис. 1: Постановка задачи о бурении.

2. Найти распределение напряжений в ледовом острове при наличии здания на поверхности острова<sup>1</sup>. Оценить максимальную величину статической нагрузки, которая не приводит к разрушению льда. Найти области острова, наиболее подверженные разрушению.

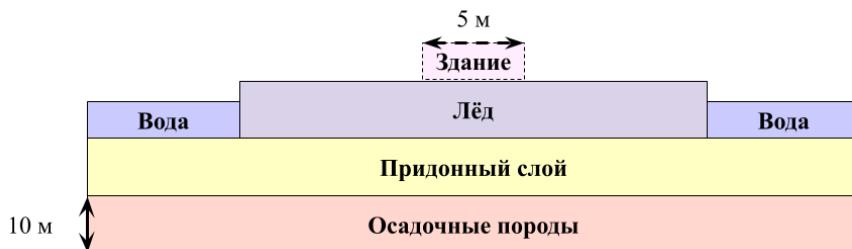


Рис. 2: Постановка задачи о статической нагрузке.

<sup>1</sup>Здесь линейные размеры слоёв совпадают с задачей о бурении, если не указано обратное.

Среда	$c_p$ , м/с	$c_s$ , м/с	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>
Лёд	3940	2493	917
Вода	1500	—	1025
Придонный грунт	1806	316	2000
Осадочные породы	2250	1000	2000

Таблица 1: Параметры рассматриваемых сред.

## 2.2. Математическая модель среды

### 2.2.1. Уравнения

Рассматриваемые среды будем считать сплошными, однородными, изотропными и несжимаемыми. В описанной постановке присутствуют как жидкие среды (вода, окружающая остров), так и твёрдые среды (лёд и слои грунта).

Жидкие среды в двумерном случае в декартовой эйлеровой системе координат описываются системой уравнений акустики [10]

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \vec{v}(x, y, t)}{\partial t} = -\nabla p(x, y, t), \\ \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial t} = -\rho c^2 \operatorname{div} \vec{v}(x, y, t), \end{cases} \quad (1)$$

где  $\rho$  — плотность среды,  $\vec{v}(x, y, t)$  — вектор скорости (производная вектора смещения частицы среды  $\vec{u}(x, y, t)$  по времени),  $p(x, y, t)$  — давление,  $c$  — скорость звука в жидкости.

Твёрдые среды в двумерном случае в декартовой эйлеровой системе координат описываются уже системой уравнений линейно-упругой среды [10]

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \vec{v}(x, y, t)}{\partial t} = \operatorname{div}^T \boldsymbol{\sigma}(x, y, t), \\ \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(x, y, t)}{\partial t} = \rho \left( c_p^2 - 2c_s^2 \right) \operatorname{div} \vec{v}(x, y, t) \mathbf{I} + \\ \quad + \rho c_s^2 \left( \nabla \otimes \vec{v}(x, y, t) + [\nabla \otimes \vec{v}(x, y, t)]^T \right), \end{cases} \quad (2)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}(x, y, t)$  — симметричный тензор напряжений Коши второго ранга,  $c_p$  и  $c_s$  — скорости продольной и поперечной волн соответственно,  $\mathbf{I}$  — единичный тензор второго ранга, операция  $\otimes$  — тензорное произведение векторов.

Далее мы будем для краткости опускать значок у вектора скорости, т.е. будем писать  $v$ , подразумевая при этом вектор  $\vec{v}$ . Также мы будем опускать параметры  $(x, y, t)$  у зависящих от них величин.

### 2.2.2. Контактные условия

Контактные условия, изображённые на рис. 3, одинаковы для задачи о бурении и задачи о статической нагрузке.



Рис. 3: Схема контактных условий: 1 — контактное условие полного слипания, 2 — контактное условие между упругой и акустической средами, 3 — контактное условие скольжения, 4 — контактное условие отражения.

Здесь и далее мы будем обозначать контактирующие среды (или расчётные сетки) индексами  $L$  и  $R$  — левая и правая среды соответственно. Вектор внешней нормали к левой под-области обозначим как  $n$ .

1. Контактное условие полного слипания ставится между слоями твёрдых сред.

Физически оно означает возможность беспрепятственного распространения упругих волн. Для этого требуется равенство скоростей и векторов нормального напряжения на границе раздела. Математически условие полного слипания записывается следующим образом:

$$\begin{cases} v_L = v_R, \\ \boldsymbol{\sigma}_L \cdot n = \boldsymbol{\sigma}_R \cdot n. \end{cases}$$

2. Контактное условие между упругой и акустической средой используется для реализации перехода волн из твёрдых сред в жидкость и обратно. Оно отличается от условий полного слипания, т.к. в данном случае контактирующие среды описываются разными уравнениями (см. (1) и (2)).

Если считать, что акустическая среда отвечает индексу  $L$ , а упругая —  $R$ , то данное условие запишется как

$$\begin{cases} v_L \cdot n = v_R \cdot n, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot n + pn = 0. \end{cases}$$

Физически это условие означает не-протекание жидкости и твёрдой среды друг в друга.

3. Контактное условие свободного скольжения ставится между ледовым островом и грунтом. В отличие от случая контакта двух слоёв грунта, когда применяется

условие полного слипания, лёд и придонный слой могут двигаться друг относительно друга. Это явление известно на практике, так, например, наблюдается «соскальзывание» ледников с поверхностей гор. Таким образом требуется использование специального контактного условия:

$$\begin{cases} v_L \cdot n = v_R \cdot n, \\ n \cdot \sigma_L \cdot n = n \cdot \sigma_R \cdot n, \\ n \cdot \sigma_{L/R} \cdot n = \sigma_{L/R} \cdot n. \end{cases}$$

4. Контактное условие полного отражения (свободной границы) ставится на границе раздела осадочных пород и газоносного слоя. Применение такого условия на верхней границе газоносного слоя не является вполне физически верным, однако для нашей задачи его применение вполне оправдано. Условие полного отражения имеет следующий вид:

$$\sigma \cdot n = 0.$$

Заметим, что для газоносного слоя не нужно вводить расчётную сетку — в модели он представляется исключительно отражающим контактным условием.

### 2.2.3. Границные условия

Границные условия для задачи о бурении изображены на рис. 4, для задачи о статической нагрузке — на рис. 5.



Рис. 4: Схема граничных условий для задачи о бурении: а — граничное условие поглощения, б — граничное условие нулевого давления.

- а. Поглощающие (не-отражающие) граничные условия используются при рассмотрении ограниченной подобласти бесконечной физической области. В данном случае водяной, придонный, газоносный слои и слой осадочных пород продолжаются за границы расчётной области влево и вправо. Поэтому на их краях

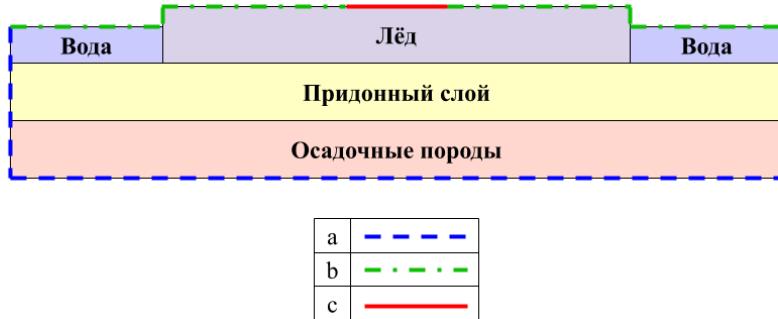


Рис. 5: Схема граничных условий для задачи о статической нагрузке: а — граничное условие поглощения, б — граничное условие нулевого давления, с — граничное условие постоянного давления.

необходимо использовать поглощающие граничные условия. Для упругих сред это условие запишется в виде:

$$\begin{cases} v_{l-2}^n = v_{l-1}^n = v_l^n, \\ \sigma_{l-2}^n = \sigma_{l-1}^n = \sigma_l^n, \end{cases}$$

а для акустических сред в виде

$$\begin{cases} v_{l-2}^n = v_{l-1}^n = v_l^n, \\ p_{l-2}^n = p_{l-1}^n = p_l^n. \end{cases}$$

Здесь верхний индекс  $n$  обозначает момент времени  $t_n$ , а нижний — номер сечочного узла, при этом узел  $l$  является граничным, а узлы  $l - 1$  и  $l - 2$  — его соседями по одной из осей. Такая форма записи будет верна и для левой, и для правой границы при соответствующем выборе значений координатных индексов.

- b. Граничное условие нулевого давления применяется на границе сред с воздухом. В нашей задаче мы не учитываем влияние атмосферного давления на исследуемые процессы, считая его пренебрежимо малым. Следовательно, мы принимаем  $p = 0$  на границах вода-воздух и лёд-воздух.
- c. Граничное условие постоянного давления ставится в месте контакта здания и ледового острова и записывается следующим образом:

$$\begin{cases} p = \sigma_{yy} = P_0, \\ \sigma_{xx} = \sigma_{xy} = 0. \end{cases}$$

Здесь  $P_0$  — константа, равная давлению здания на поверхность льда.

## 2.2.4. Модель бура

Современные буры имеют довольно сложное устройство, зачастую сочетая ударные и вращательные механизмы. В данной работе нас в первую очередь интересует волновая картина, возникающая при бурении в конкретной геологической модели (рис. 1). Поэтому, для простоты, мы будем представлять воздействие бура в качестве точечного источника с импульсом Рикера частотой 30 Гц и амплитудным коэффициентом  $10^{12}$  [10].

Точечный источник входит в левую часть системы уравнений (4), как слагаемое  $\frac{R(t)}{\rho}$ , и задаётся формулой

$$R(t) = \delta(r - r_0) R(t) \varphi, \quad (3)$$

где  $r_0$  — радиус-вектор положения точечного источника

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

а  $R(t)$  — импульс Рикера частотой  $f$  и коэффициентом сжатия  $A$ :

$$R(t) = A (1 - 2\pi^2 f^2 t^2) \exp(-\pi^2 f^2 t^2).$$

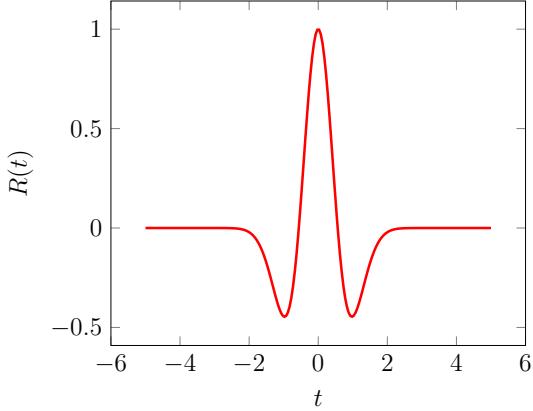


Рис. 6: Импульс Рикера частотой 0.4 Гц и амплитудным коэффициентом 1.

## 2.2.5. Модель разрушений

Для оценки прочности ледового острова будем использовать дискретную модель разрушений с критерием по главному напряжению [11]. На каждом шаге для всех узлов сетки ледового острова будем вычислять напряжение фон Мизеса

$$\sigma_\nu = \sqrt{\frac{(\sigma_{xx} - p)^2 + (\sigma_{yy} - p)^2 + 2\sigma_{xy}^2}{2}},$$

где давление

$$p = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{xy} + \sigma_{yy}}{3}.$$

Лёд разрушается, если выполнен критерий сдвигового разрушения

$$\sigma_\nu > y_s,$$

где  $y_s$  — предел сдвигового напряжения, равный 1 МПа для льда.

## 2.3. Численный метод

### 2.3.1. Сеточно-характеристический метод

Для решения систем уравнений в частных производных (1) и (2) воспользуемся сеточно-характеристическим методом на регулярных прямоугольных сетках. Получим его для системы (2), описывающей упругие среды. Для системы (1), описывающей акустические среды, он получается абсолютно аналогично если учесть, что для акустических сред  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = p$  и  $\sigma_{xy} = 0$ .

Будем работать в декартовой прямоугольной системе координат. Введём обозначение

$$\varphi = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \end{pmatrix}$$

Здесь нижние индексы обозначают соответствующие компоненты вектора скорости  $v$  и тензора напряжений  $\sigma$ .

Запишем гиперболическую полную систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных (2) в канонической матричной форме:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

Здесь

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ -(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  — параметры Ламе, которые выражаются через заданные для конкретных сред скорости продольных и поперечных волн следующим образом:

$$\begin{cases} c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \\ c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = (c_p^2 - 2c_s^2)\rho \\ \mu = c_s^2\rho \end{cases}.$$

Используя метод расщепления для системы, записанной в каноническом виде, получим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_x}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Заметим, что матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  можно диагонализовать:

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}_1^{-1} \boldsymbol{\Lambda}_1 \mathbf{S}_1,$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}_2^{-1} \boldsymbol{\Lambda}_2 \mathbf{S}_2,$$

где

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{\mu\rho}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{\mu\rho}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \sqrt{\frac{\lambda^2\rho}{4(\lambda+2\mu)}} & 0 & \frac{\lambda}{2\lambda+4\mu} & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{\lambda^2\rho}{4(\lambda+2\mu)}} & 0 & \frac{\lambda}{2\lambda+4\mu} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\lambda^2\rho}} & -\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\lambda^2\rho}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\mu\rho}} & -\frac{1}{\sqrt{\mu\rho}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\mu}{\lambda} + 1 & \frac{2\mu}{\lambda} + 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$

$$\mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{\mu\rho}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{\mu\rho}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \sqrt{\frac{\lambda^2\rho}{4(\lambda+2\mu)}} & 0 & \frac{\lambda}{2\lambda+4\mu} & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{\lambda^2\rho}{4(\lambda+2\mu)}} & 0 & \frac{\lambda}{2\lambda+4\mu} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\mu\rho} & -\frac{1}{\mu\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{(\lambda+2\mu)\rho}} & -\frac{1}{\sqrt{(\lambda+2\mu)\rho}} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} & \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_1 = \boldsymbol{\Lambda}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_p \end{pmatrix}.$$

Домножим слева первое уравнение системы (5) на  $S_1$ , а второе — на  $S_2$ , при этом диагонализуя матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ . В результате получим:

$$\begin{cases} S_1 \frac{\partial \varphi_x}{\partial t} + S_1 (S_1^{-1} \Lambda_1 S_1) \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = 0, \\ S_2 \frac{\partial \varphi_y}{\partial t} + S_2 (S_2^{-1} \Lambda_2 S_2) \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Пользуясь тем, что матрицы  $S_1$  и  $S_2$  не зависят ни от времени, ни от координат, вносим их в частные производные по времени и по пространственным координатам:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (S_1 \varphi_x) + \Lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} (S_1 \varphi_x) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (S_2 \varphi_y) + \Lambda_2 \frac{\partial}{\partial y} (S_2 \varphi_y) = 0. \end{cases}$$

Производя замену (переход к инвариантам Римана):

$$\begin{aligned} \omega_1 &= S_1 \varphi_x, \\ \omega_2 &= S_2 \varphi_y, \end{aligned} \tag{6}$$

получаем систему

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega_1}{\partial t} + \Lambda_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial t} + \Lambda_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Произведённая замена (6) обратима, т.к. матрицы  $S_1$  и  $S_2$  обратимы:

$$\begin{aligned} \varphi_x &= S_1^{-1} \omega_1, \\ \varphi_y &= S_2^{-1} \omega_2. \end{aligned} \tag{8}$$

Так как матрицы  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  диагональные, система (7) представляет собой 10 независимых скалярных уравнений переноса.

Таким образом, общая схема решения систем (2) и (1) следующая:

1. Произвести переход к инвариантам Римана (6).
2. Решить систему независимых одномерных линейных уравнений переноса (7).
3. Осуществить обратный переход к физическим переменным (8).

Заметим, что выбор метода решения одномерного линейного уравнения переноса является открытым. При этом именно он определяет порядок аппроксимации всего сеточно-характеристического численного метода.

### 2.3.2. Схемы для решения одномерного уравнения переноса

Рассмотрим несколько схем для решения одномерного линейного уравнение переноса на скалярную величину  $q$ :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \lambda \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad \lambda = const, \quad (9)$$

где

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Также будем использовать запись этого уравнения через поток  $f$ :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial f(q)}{\partial x} = 0, \quad f(q) = \lambda q. \quad (10)$$

Без ограничения общности будем полагать, что  $\lambda > 0$ . Далее при дискретизации шаг сетки по времени будем обозначать  $\tau$ , шаг по пространственной переменной —  $h$ .

### 2.3.3. Схема Куранта-Изаксона-Риса

Схема Куранта-Изаксона-Риса [16], [17] для решения уравнения (9) определяется как

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} + \lambda \frac{q_i^n - q_{i-1}^n}{h} = 0. \quad (11)$$

Данная схема имеет первый порядок аппроксимации по времени и по пространству и является устойчивой при выполнении условия Куранта-Фридрихса-Леви:

$$0 \leq |C| \leq 1, \quad (12)$$

где  $C = \frac{\lambda \tau}{h}$  — число Куранта.

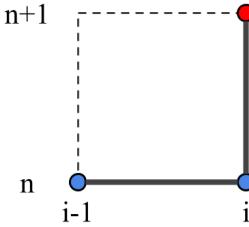


Рис. 7: Шаблон схемы Куранта-Изаксона-Риса.

### 2.3.4. Схема Русанова

Схема Русанова [18] для решения одномерного уравнения переноса (9) имеет следующий вид:

$$u_{i+1}^n = u_i^n + C \frac{\Delta_0 + \Delta_2}{2} + C^2 \frac{\Delta_0 - \Delta_2}{2} + C(C^2 - 1) \frac{\Delta_1 - 2\Delta_0 + \Delta + 2}{6}, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= u_{i-1}^n - u_i^n, \\ \Delta_1 &= u_{i-2}^n - u_{i-1}^n, \\ \Delta_2 &= u_i^n - u_{i+1}^n.\end{aligned}$$

Схема Русанова имеет третий порядок аппроксимации и является монотонной по Годунову. Условие устойчивости схемы Русанова совпадает с условием устойчивости для схемы Куранта-Изаксона-Риса (12).

Монотонность по Годунову означает, что данная схема переводит монотонный в момент времени  $t_n$  профиль  $u_i^n$  в монотонный в следующий момент времени  $t_{n+1}$  профиль  $u_i^{n+1}$ . Это свойство позволяет применять схему Русанова для решения уравнения переноса даже при возникновении разрывных решений [18].

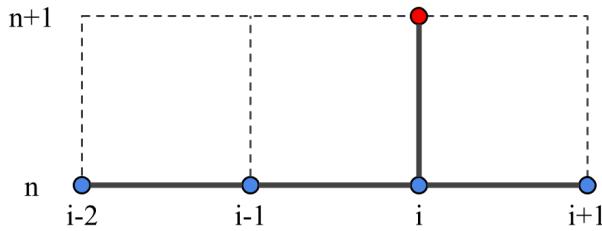


Рис. 8: Шаблон схемы Русанова.

### 2.3.5. Схема TVD 2-го порядка аппроксимации

Альтернативой монотонным по Годунову схемам являются TVD-схемы. Они также позволяют решать задачи с разрывами и большими градиентами, избегая появления осцилляций, вызванных дискретизацией задачи [17]—[20]. Полная вариация (total variation) решения линейного уравнения (9) определяется как

$$\text{TV}(q(\cdot, t)) = \int \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right| dx.$$

Соответственно полная вариация численного решения задаётся как

$$\text{TV}(q^n) = \text{TV}(q(\cdot, t^n)) = \sum_i |q_{i+1}^n - q_i^n|.$$

Схема называется схемой с уменьшением полной вариации, или TVD-схемой (total variation diminishing scheme), или схемой, монотонной по Хартену, если

$$\text{TV}(q^{n+1}) \leq \text{TV}(q^n).$$

В некоторых расчётах мы будем использовать TVD-схему 2-го порядка:

$$\begin{cases} q_i^{n+1} = q_i^n - \frac{\tau}{h} (f_{i+1/2} - f_{i-1/2}), \\ f_{i+1/2} = \frac{f_i^n + f_{i+1}^n}{2} - \frac{\theta}{2} (f_{i+1}^n - f_i^n) + \frac{\phi_{sb}(r_i)}{2} (\theta - C) (f_{i+1}^n - f_i^n), \\ \theta = \text{sign } C_{i+1/2}, \end{cases} \quad (14)$$

где  $\phi_{sb}(r_i)$  — ограничитель потока superbee

$$\phi_{sb}(r_i) = \max \{0, \min\{2r_i, 1\}, \min\{r_i, 2\}\},$$

$$r_i = \frac{q_i - q_{i-1}}{q_{i+1} - q_i}.$$

## 2.4. Моделирование воздействия бура

### 2.4.1. Постановка численного эксперимента

Будем рассматривать геологическую модель с газовым слоем (рис. 1). Для представления каждого слоя будем использовать регулярные прямоугольные сетки с пространственным шагом  $0.5 \times 0.5$  м. Для расчётов<sup>2</sup> применим схему Русанова третьего порядка (13) с шагом по времени 0.05 мс. Выполним 14 тыс. шагов по времени, чтобы пронаблюдать отражение волны, испущенной точечным источником, от газоносного слоя и далее от свободной поверхности льда.

### 2.4.2. Результаты

Распространение волны от бура можно условно разделить на три отрезка. Первый — начальное движение почти сферической волны от источника с активным проникновением в ледовый остров (рис. 9). Второй — движение волны вглубь твёрдой породы и обратное движение после отражения от газоносного слоя (рис. 10). Третий — движение волны вверх по придонному слою с последующим проникновением в остров и отражением от свободной поверхности льда (рис. 11).

Можно заметить (см. рис. 9), что ледовый остров играет роль своеобразного резонатора. Свободная поверхность льда является полностью отражающей, в то время как граница между льдом и придонным слоем отражает упругие волны частично. Так как высота острова мала по сравнению с его длиной, то за время, которое требуется горизонтально распространяющейся волне для достижения края острова, вертикально распространяющаяся волна испытывает множество переотражений. Это означает, что, возможно, при некотором специальном выборе внешнего периодического возмущения, ледовый остров способен накапливать упругие волны. Накопление, естественно, будет происходить до момента начала разрушения льда. Такое резонансное явление, если оно существует, представляет существенную опасность для работ на подобной ледовой платформе.

---

<sup>2</sup>В частях 2.4 и 2.5 расчёты проводятся с помощью программного пакета Кафедры информатики и вычислительной математики МФТИ.

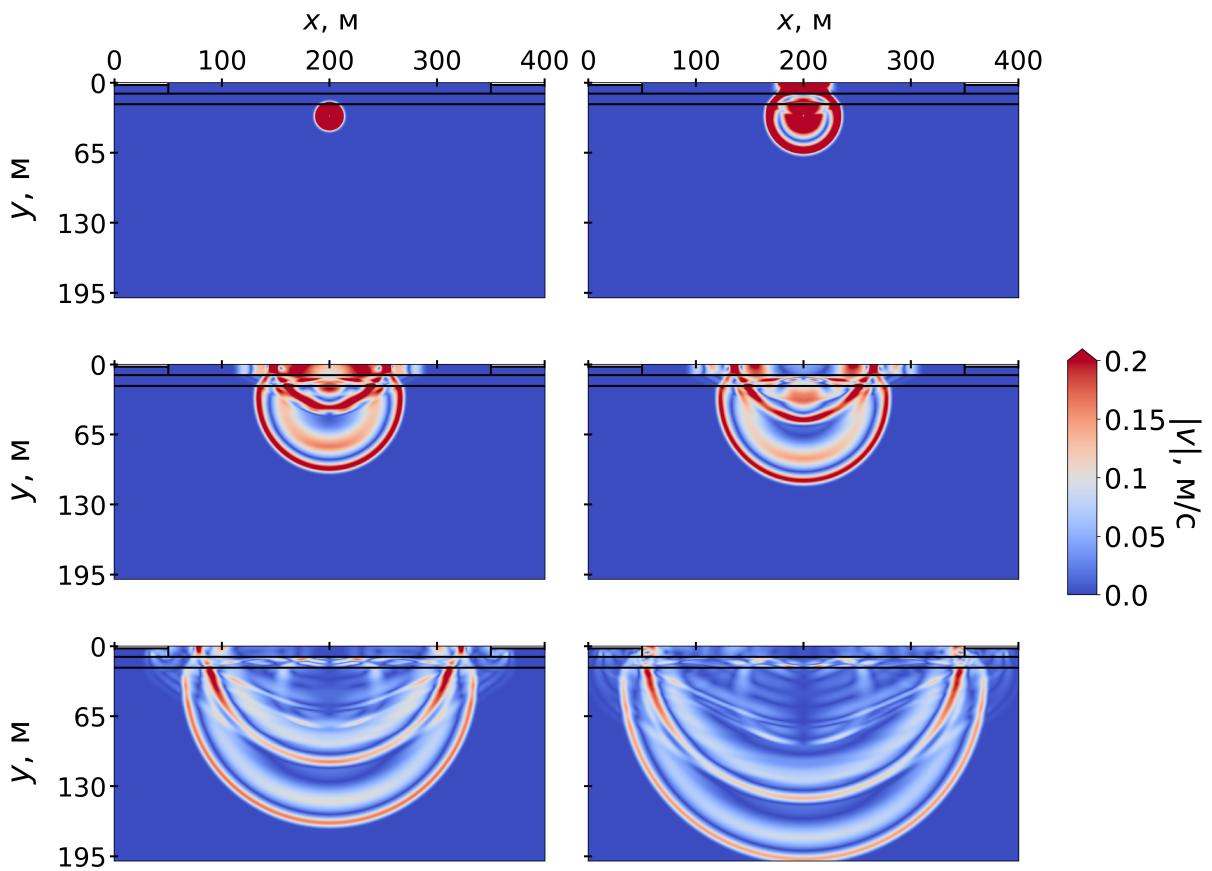


Рис. 9: Волновая картина в моменты времени 0.005, 0.020, 0.035, 0.050, 0.065 и 0.080 сек. (слева–направо и сверху–вниз).

Если волна, распространяющаяся от введённого точечного источника, имеет большую амплитуду, то она способна разрушить лёд. Как видно из рис. 9, такие разрушения будут вероятно локализованы непосредственно над точкой бурения. Этому способствует интерференция волн, входящих в остров снизу, с волнами, отражающимися от свободной поверхности льда. Волновая картина на рис. 11 свидетельствует о том, что разрушения возникнут сразу после начала бурения — волна, отражённая от газоносного слоя, имеет гораздо меньшую амплитуду по сравнению с первоначальной волной.

Можно заметить (см. рис. 10), что структура волны, отражённой от газового слоя, является довольно регулярной. Это может быть в дальнейшем использовано, например, для решения обратной задачи сейморазведки или для определения дефектов льда.

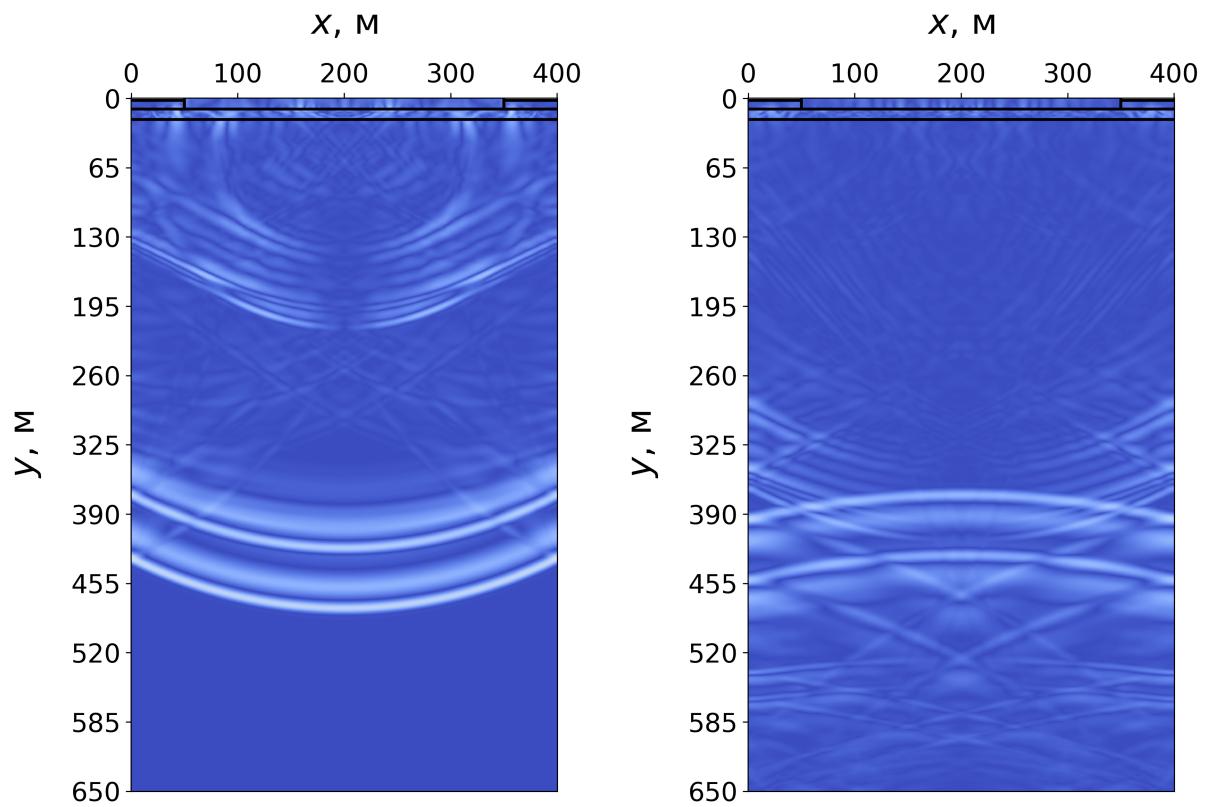


Рис. 10: Волновая картина в моменты времени 0.2 и 0.35 сек. (слева–направо)<sup>3</sup>.

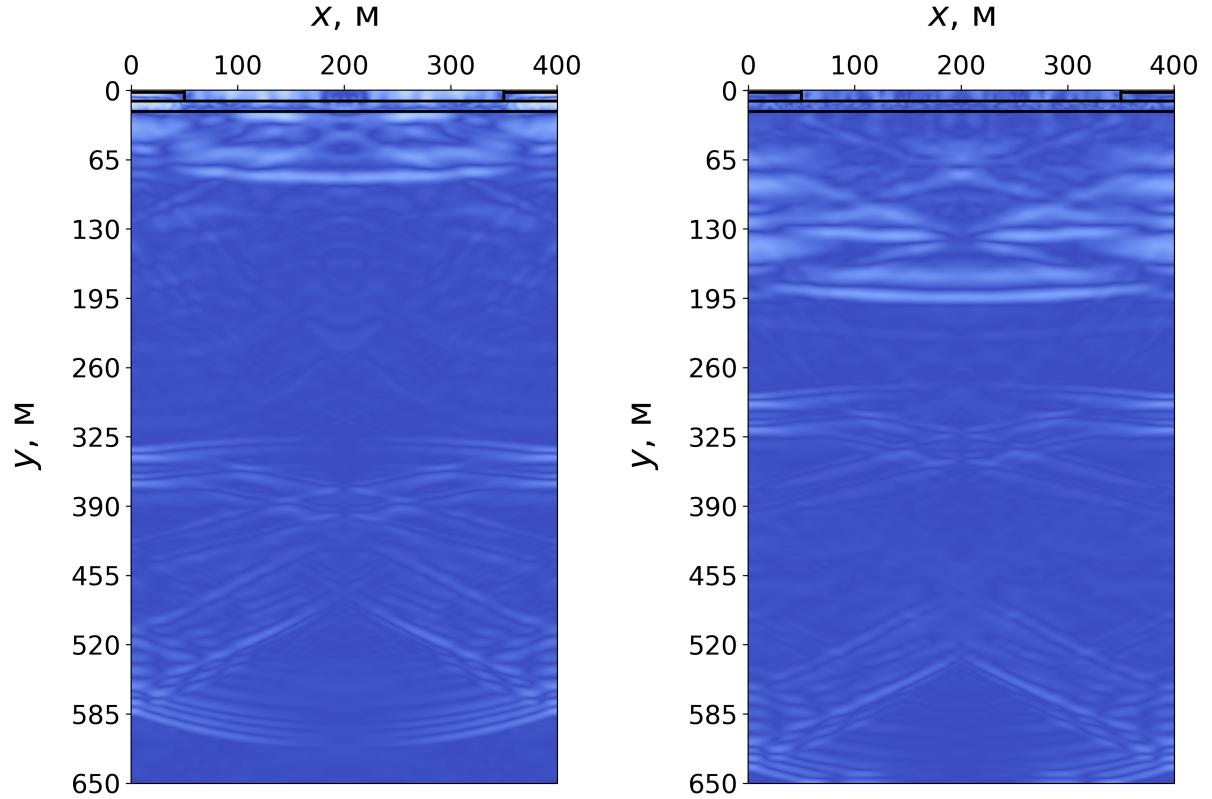


Рис. 11: Волновая картина в моменты времени 0.6 и 0.65 сек. (слева–направо)<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup>Здесь используется та же цветовая гамма, что и в рис. 9.

## 2.5. Моделирование статической нагрузки

### 2.5.1. Постановка численного эксперимента

Для решения задачи о распределении статической нагрузки (см. рис. 2), воспользуемся методом установления [21], решая при этом те же системы дифференциальных уравнений в частных производных (1) и (2). Будем считать распределение напряжений в ледовом острове установившимся, если модуль скорости распространения упругих волн оказывается в конечный момент времени в 20–30 раз меньше по сравнению со значением скорости в начальный момент.

Будем считать, что здание<sup>4</sup>, расположенное на поверхности ледового острова, имеет массу 100 тонн и основание  $5 \times 5$  метров, тем самым производя на лёд давление величиной 4 кПа.

Будем использовать схему Куранта-Изаксона-Риса первого порядка (11) на регулярных прямоугольных сетках с пространственным шагом  $0.5 \times 0.5$  м и шагом по времени 0.02 мс.

### 2.5.2. Результаты

После выполнения 200 тысяч шагов модуль скорости уменьшился примерно в 33 раза с  $2.4 \cdot 10^{-4}$  м/с до  $7.3 \cdot 10^{-6}$  м/с. Таким образом, получившиеся распределения напряжений можно считать установившимся.

Так как внешними условиями задано только давление здания на горизонтальную поверхность льда, то естественно, что  $\sigma_{yy}$  будет составлять большую часть от итогового суммарного давления  $p$  и, соответственно, напряжения фон Мизеса  $\sigma_\nu$ . Для того, чтобы в этом убедиться, достаточно сравнить распределение  $\sigma_{yy}$ , изображённое на рис. 12, с распределениями горизонтальной и смешанной компонент тензора напряжений  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{xy}$ , представленными на рис. 13 и рис. 14.

Из распределения давлений  $p$  (рис. 15) и напряжения фон Мизеса (рис. 16) хорошо видно, что, кроме цилиндрической области непосредственно под зданием, наиболее подверженными разрушению областями являются конусообразные области радиусом около 20 метров, находящиеся в приблизительно 2 метрах от поверхности. Вблизи свободной поверхности данные области подвержены растягивающим напряжениям (см. рис. 15), а вблизи границы с придонным слоем — сдавливающим.

Максимальное достигаемое напряжение фон Мизеса

$$\max_{i,j} \sigma_\nu(x_i, y_j) \approx 2.2 \text{ кПа.}$$

много меньше предела сдвигового напряжения льда, равного  $y_s = 1$  Мпа. Таким образом, при реалистичных значениях статической нагрузки лёд разрушаться не будет.

---

<sup>4</sup>Здесь под «зданием» мы понимаем некоторую покоящуюся конструкцию. Это может быть, например, техническое помещение, буровая установка или тяжёлое транспортное средство.

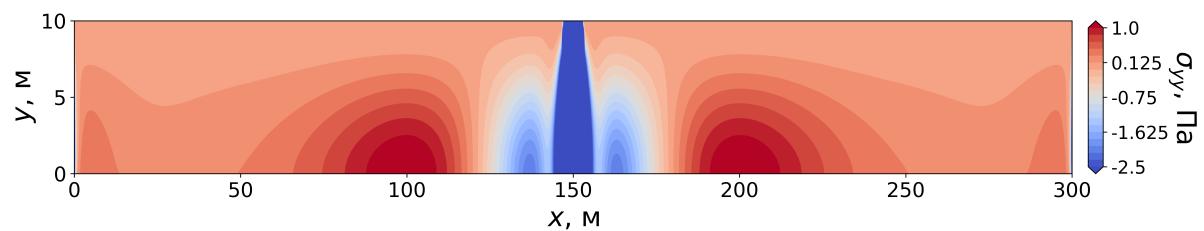


Рис. 12: Распределение вертикальной компоненты тензора напряжений  $\sigma_{yy}$ .

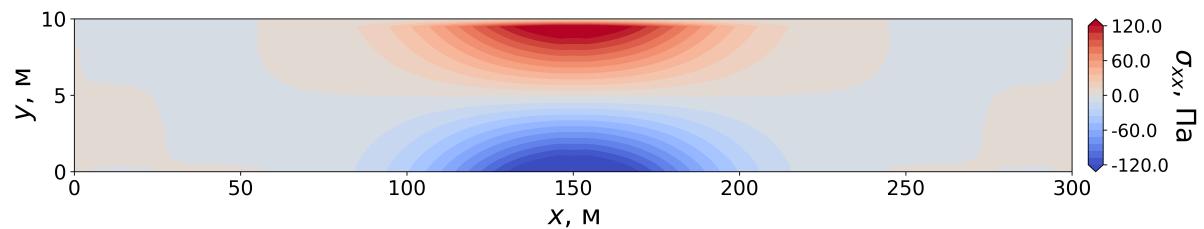


Рис. 13: Распределение горизонтальной компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xx}$ .

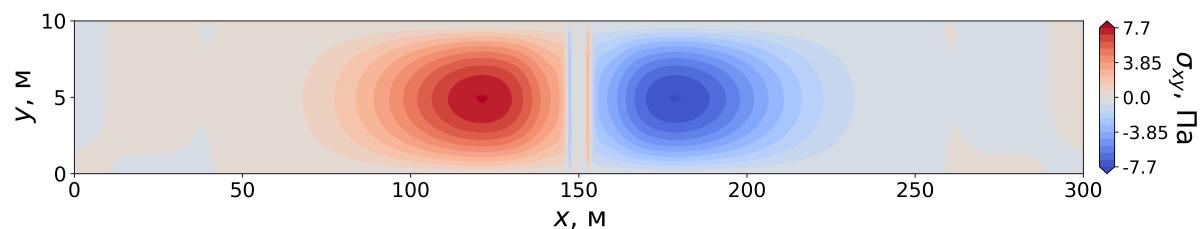


Рис. 14: Распределение смешанной компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xy}$ .

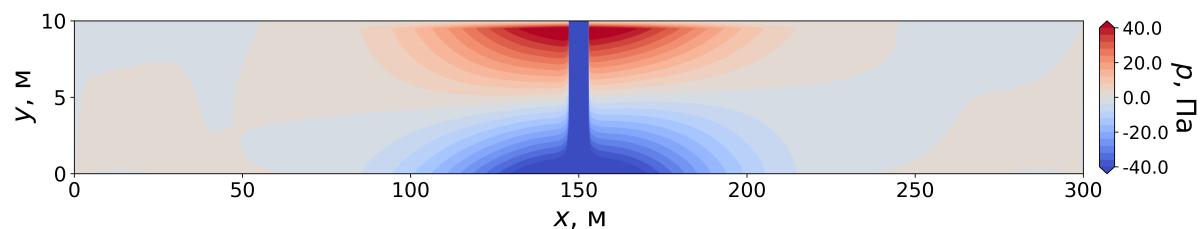


Рис. 15: Распределение давления  $p$ .

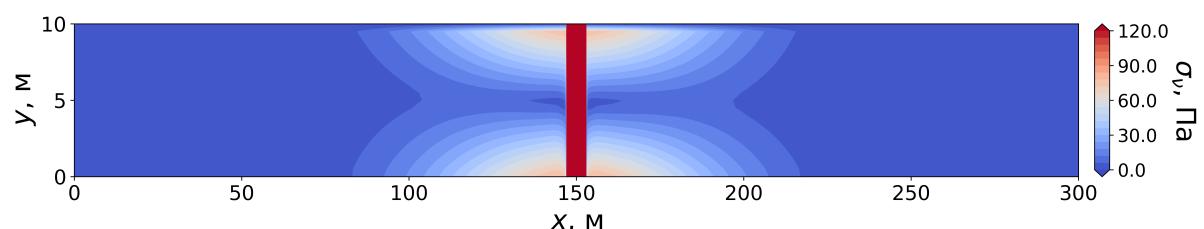


Рис. 16: Распределение напряжения фон Мизеса  $\sigma_\nu$ .

### 3. Поглощающие граничные условия для уравнений акустики

При моделировании волновых процессов в геофизике зачастую приходится иметь дело с неограниченной физической областью, в которой выделяется конечная расчётная под-область. Волны упругости, выходя за границу такой под-области, продолжают распространяться по неограниченной области, не оказывая влияния на процессы, происходящие внутри расчётной под-области. Для обеспечения такого поведения на практике на границах расчётных под-областей необходимо применять специальные условия.

В данной главе будут рассмотрены поглощающие граничные условия Mur и PML для системы уравнений акустики в двумерном случае.

#### 3.1. Уравнения акустики

Система уравнений акустики описывает распространение малых колебаний в идеальном газе и является следствием уравнений Эйлера. В двумерном случае она имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} = -\rho c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \end{cases} \quad (15)$$

Здесь  $x$  и  $y$  — координата малой частицы газа в ортонормированной декартовой системе координат,  $u(x, y, t)$  и  $v(x, y, t)$  — её скорости<sup>5</sup>,  $p$  — отклонение давление от равновесного,  $\rho$  — плотность,  $c$  — скорость звука. Также иногда используют величину  $\kappa = \rho c^2$  — объёмный модуль упругости.

Решение системы будем рассматривать в моменты времени  $t \in [0, T]$  в прямоугольной области  $\Gamma := \{(x, y) \mid (x, y) \in [0, X] \times [0, Y]\}$ .

Для краткости записи введём векторную переменную

$$\varphi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Тогда начальное и граничные условия запишутся в следующем виде:

$$\varphi(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma,$$

---

<sup>5</sup>Ранее в (1) мы обозначали  $u \equiv v_x$ ,  $v \equiv v_y$ . Переход к новым обозначениям позволяет уменьшить количество индексов, упрощая запись рассматриваемых ниже численных методов.

$$\begin{cases} \varphi(0, y, t) = \varphi_L(y, t), & y \in [0, Y], \\ \varphi(X, y, t) = \varphi_R(y, t), & y \in [0, Y], \\ \varphi(x, 0, t) = \varphi_T(x, t), & x \in [0, X], \\ \varphi(x, Y, t) = \varphi_B(x, t), & x \in [0, X]. \end{cases}$$

## 3.2. Численное решение системы уравнений акустики

Здесь и далее решение дискретной задачи будем рассматривать на регулярной прямоугольной сетке с размером шага  $h_x$  и  $h_y$  по осям  $x$  и  $y$  соответственно. Для простоты будем считать, что физические размеры рассматриваемой прямоугольной области нацело делятся на шаг сетки:  $X = Nh_x$ ,  $Y = Mh_y$ , где  $N, M \in \mathbb{N}$ . Таким образом, разностная сетка определяется как

$$G := \left\{ (x_i, y_j) \mid x_i = ih_x, i \in \overline{0, N}, y_j = jh_y, j \in \overline{0, M} \right\}.$$

Шаг по времени будем считать постоянным, равным  $\tau$  и нацело делящим  $T$ .

При использовании значений в узлах сетки, нижние индексы будем использовать для обозначения пространственных координат, а верхний — для времени. Например,  $p_{i,j}^n$  — давление в момент времени  $t = \tau n \in [0, T]$  в точке с координатами  $(ih_x, jh_y) \in G$

### 3.2.1. Метод конечных разностей

Простейшим численным методом решения системы уравнений в частных производных (15) является метод конечных разностей. Получим одну из возможных разностных схем. Для этого применим явную двухточечную схему для дискретизации производных по времени и центральную двухточечную схему для дискретизации производных по пространственным переменным:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n}{\tau}, \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{f_{i+1,j}^n - f_{i-1,j}^n}{2h_x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{f_{i,j+1}^n - f_{i,j-1}^n}{2h_y}. \end{aligned}$$

Тогда мы получим следующую разностную схему (leapfrog scheme):

$$\begin{cases} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} = -\frac{1}{\rho} \frac{p_{i+1,j}^{n+1/2} - p_{i-1,j}^{n+1/2}}{2h_x}, \\ \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\tau} = -\frac{1}{\rho} \frac{p_{i,j+1}^{n+1/2} - p_{i,j-1}^{n+1/2}}{2h_y}, \\ \frac{p_{i,j}^{n+3/2} - p_{i,j}^{n+1/2}}{\tau} = -\rho c^2 \left( \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{2h_x} + \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1}}{2h_y} \right). \end{cases} \quad (17)$$

Она имеет второй порядок аппроксимации по пространственным переменным и первый по времени.

### 3.2.2. Сеточно-характеристический метод

Более эффективным методом решения гиперболических систем является сеточно-характеристический метод. В части 2.3.1 мы уже рассматривался вывод сеточно-характеристического метода для решения уравнений, описывающих линейно-упругие среды. Проделаем этот вывод снова, на этот раз для уравнений акустики.

Перепишем исходную систему (15) в матричном виде, используя ранее введённую переменную  $\varphi$  (16):

$$\varphi_t = \mathbf{A}\varphi_x + \mathbf{B}\varphi_y,$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\rho c^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} \\ 0 & -\rho c^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для решения полученной системы воспользуемся методом расщепления: будем решать систему, делая шаг по  $x$  на первом полушаге по времени и делая шаг по  $y$  на втором полушаге по времени:

$$\begin{aligned} \varphi_t &= \mathbf{A}\varphi_x, \\ \varphi_t &= \mathbf{B}\varphi_y. \end{aligned} \quad (18)$$

Таким образом, пересчёт на новой временной слой будет иметь вид

$$\begin{aligned} \varphi^{t+\Delta t/2} &= S_x(\Delta t/2, \varphi^t), \\ \varphi^{t+\Delta t} &= S_y(\Delta t/2, \varphi^{t+\Delta t/2}), \end{aligned} \quad (19)$$

где  $\Delta t$  — величина шага по времени,  $S_x$  — некоторый оператор шага по  $x$ ,  $S_y$  — шага по  $y$ .

Заметим, что матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  раскладываются как произведения

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{S}_1^{-1} \boldsymbol{\Lambda}_1 \mathbf{S}_1, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{S}_2^{-1} \boldsymbol{\Lambda}_2 \mathbf{S}_2, \end{aligned}$$

где  $\Lambda_i$  — диагональные матрицы, составленные из собственных чисел матриц  $A$  и  $B$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, & \mathbf{S}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\rho c}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{\rho c}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \\ \mathbf{S}_2^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, & \mathbf{S}_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho c}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\rho c}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \\ \Lambda_1 = \Lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Поскольку, как было показано выше, матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  приводятся к диагональному виду, то поставленная задача является гиперболической.

Домножим уравнения (18) слева на  $\mathbf{S}_1$  и  $\mathbf{S}_2$  соответственно:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1 \varphi_t &= \mathbf{S}_1 \mathbf{A} \varphi_x = (\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_1^{-1}) \Lambda_1 \mathbf{S}_1 \varphi_x = \Lambda_1 (\mathbf{S}_1 \varphi_x), \\ \mathbf{S}_2 \varphi_t &= \mathbf{S}_2 \mathbf{B} \varphi_y = (\mathbf{S}_2 \mathbf{S}_2^{-1}) \Lambda_2 \mathbf{S}_2 \varphi_y = \Lambda_2 (\mathbf{S}_2 \varphi_y). \end{aligned}$$

Делая замену  $\omega^1 = \mathbf{S}_1 \varphi$ ,  $\omega^2 = \mathbf{S}_2 \varphi$  и учитывая, что матрицы  $\Lambda_i$  диагональные, приходим к двум системам из трёх независимых скалярных уравнений переноса:

$$\begin{aligned} \omega_t^1 &= \Lambda_1 \omega_x^1 \\ \omega_t^2 &= \Lambda_2 \omega_y^2 \end{aligned}$$

### 3.3. Виды поглощающих граничных условий

Существует три основных подхода для реализации поглощающих граничных условий [13], [22]:

1. Введение новых пространственных переменных, которые переводят неограниченную рассматриваемую область в ограниченную. Этот подход можно также рассматривать, как дискретизацию неограниченной области сеткой с бесконечно возрастающим по мере удаления от рассматриваемой под-области шагом.
2. Анализ соотношений между падающей и отражённой волной и постановка граничного условия, соответствующего минимизации отражённой части.
3. Добавление к рассматриваемой ограниченной области новых граничных слоёв, в которых дополнительно вводится диссипативный член, растущий по мере удаления от рассматриваемой области.

В данной работе мы обратимся к последним двум подходам на примере граничных условий Mur и PML соответственно.

### 3.4. Поглощающие граничное условие Mur

Рассмотрим одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (20)$$

Это уравнение, очевидно, является одномерным частным случаем двумерной системы уравнений акустики (15) при  $\varphi(x, y, t) = \varphi(x, t)$ .

Разложим (20) на два уравнения переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (22)$$

Уравнение (21) соответствует волне, идущей влево по оси  $x$ , а уравнение (22) — идущей вправо.

Пусть рассматриваемая область представляет собой отрезок  $\gamma := [0, Nh_x]$ . Поставим поглощающее граничное условие на правом конце (для левой границы это можно сделать абсолютно аналогично). Правая граница будет поглощающей, или не-отражающей, если при набегании на неё волн, распространяющихся вправо, не будет возникать отражённых волн, распространяющихся влево. Это значит, что на правой границе должно выполняться только уравнение переноса (22), а не полное волновое уравнение (20). Таким образом граничное условие записывается в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad x = Nh_x.$$

Теперь запишем численное граничное условие [13]. Для того, чтобы при дискретизации производная по времени и производная по пространственной координате были вычислены в одной точке, будем усреднять разностные производные в моменты времени  $n$  и  $n+1$ , получая таким образом решение в точке  $x = (N - \frac{1}{2}) h_x$ ,  $t = (n + \frac{1}{2}) \tau$ :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{u_N^n - u_{N-1}^n}{h_x} + \frac{u_N^{n+1} - u_{N-1}^n}{h_y} \right) = -\frac{1}{c} \frac{1}{2} \left( \frac{u_N^{n+1} - u_N^n}{\tau} + \frac{u_{N-1}^{n+1} + u_{N-1}^n}{\tau} \right).$$

Обозначая  $r = \frac{c\tau}{h_x}$ , получаем явное выражение для поглощающего граничного условия Mur в одномерном случае:

$$u_N^{n+1} = u_{N-1}^n + \frac{r-1}{r+1} (u^{n+1} N - 1 - u_N^n).$$

Его можно распространить на двухмерный случай, получая тем самым поглоща-

ющее граничное условие для рассматриваемой нами системы уравнений акустики: (15):

$$u_{N,j}^{n+1} = u_{N-1,j}^n + \frac{r-1}{r+1}(u^{n+1}N-1,j - u_{N,j}^n).$$

В одномерном случае поглощающее условие Mur является точным. В двумерном же случае поглощение будет точным, только если волны падают на рассматриваемую поглощающую границу строго нормально, что соответствует одномерному случаю. В противном случае будет наблюдаться возникновение отражённых от границы волн.

### 3.5. Berenger PML

Поглощающее граничное условие *perfectly matched layer* (PML) впервые было предложено в работе [14] для системы уравнений Максвелла, описывающих распространение электромагнитных волн. Оказывается [23], что, произведя некоторую замену переменных, эту систему уравнений можно свести к системе уравнений акустики (15).

Для реализации затухания в PML слое в уравнения акустики (15) добавляются диссипативные слагаемые

$$\begin{aligned} c u \sigma_x(x, y), \\ c u \sigma_y(x, y), \end{aligned}$$

где в качестве функций  $\sigma_{x/y}$  обычно выбирают

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \left( \frac{d_x}{w_x} \right)^k \Sigma_x, \\ \sigma_y &= \left( \frac{d_y}{w_y} \right)^k \Sigma_y. \end{aligned} \tag{23}$$

Здесь  $d_{x/y}(x, y)$  — глубина проникновения в PML слой, имеющий глубину  $w_{x/y}$ ,  $k$  — степень скорости роста коэффициентов PML,  $\Sigma_{x/y}$  — максимальные значения диссипативных слагаемых<sup>6</sup>.

Значения параметров  $k$  и  $\Sigma_{x,y}$  обычно подбираются под конкретную задачу из эмпирических соображений для наиболее эффективной реализации поглощающего граничного условия.

Рассмотрим случай применения PML на всех четырёх границах прямоугольной области  $\Gamma$ . Используя обозначения, введённые для расчётной сетки  $G$ , можно записать

$$\begin{aligned} d_x &= h_x \cdot \min\{i, N - i\}, \\ d_y &= h_y \cdot \min\{j, M - j\}. \end{aligned}$$

Система уравнений акустики с диссипативными членами [23] имеет следующий

---

<sup>6</sup>Глубина проникновения в PML слой очевидно меньше ширины слоя, а, значит, множитель перед  $\Sigma_{x/y}$  лежит в пределах от 0 до 1. Следовательно  $\sigma_{x/y}$  лежит в пределах от 0 до  $\Sigma_{x/y}$ .

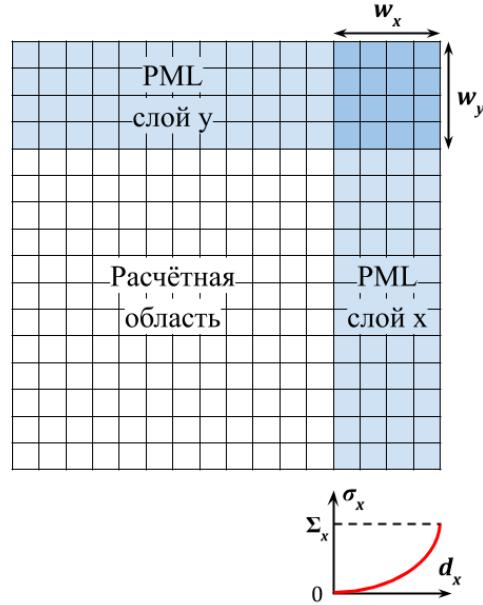


Рис. 17: Схема правого и верхнего PML слоёв.

вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c\sigma_x u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + c\sigma_y u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + c(\sigma_x + \sigma_y)p = -\rho c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \rho c^2 \sigma_x \frac{\partial Q}{\partial y} - \rho c^2 \sigma_y \frac{\partial P}{\partial x}, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = cv, \\ \frac{\partial P}{\partial t} = cu, \end{cases} \quad (24)$$

где  $Q$  и  $P$  — дополнительные переменные, определяющиеся из последних двух уравнений.

### 3.6. Split-field PML

Другим классическим вариантом граничного условия PML является *split-field PML* [15]. Приведём систему уравнений split-field PML без вывода:

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sigma_x(x) \right) p_1 + \kappa \frac{\partial}{\partial x} v_x = 0, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sigma_y(y) \right) p_2 + \kappa \frac{\partial}{\partial y} v_y = 0, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sigma_x(x) \right) v_x + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p = 0, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sigma_y(y) \right) v_y + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} p = 0, \\ p = p_1 + p_2, \end{cases} \quad (25)$$

где, напомним,  $\kappa = \rho c^2$  — объёмный модуль упругости, а функции  $\sigma_{x/y}$  выбираются аналогично случаю Berenger PML.

В системе (25) давление  $p$  разделяется на компоненты  $p_1$  и  $p_2$ . В начальный момент времени они определяются как половины общего значения давления. В дальнейшем  $p_1$  и  $p_2$  определяются из системы (25), а  $p$  вычисляется как сумма  $p_1$  и  $p_2$ .

### 3.7. Решение PML-систем методом конечных разностей

Аналогично разностной схеме (17) для системы уравнений акустики, можно получить системы конечно-разностных уравнений для Berenger PML (24)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} + c\sigma_{x_i} u^n = -\frac{1}{\rho} \frac{p_{i+1/2,j}^{n+1/2} - p_{i-1/2,j}^{n+1/2}}{h_x}, \\ \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\tau} + c\sigma_{y_j} v^n = -\frac{1}{\rho} \frac{p_{i,j+1}^{n+1/2} - p_{i,j-1}^{n+1/2}}{2h_y}, \\ \frac{Q^{n+1} - Q^n}{\tau} = cv_{i,j}^n, \\ \frac{P^{n+1} - P^n}{\tau} = cu_{i,j}^n, \\ \frac{p_{i,j}^{n+3/2} - p_{i,j}^{n+1/2}}{\tau} + c(\sigma_{x_i} + \sigma_{y_j}) p^{n+1/2} = -\rho c^2 \left( \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{2h_x} + \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1}}{2h_y} - \sigma_{x_i} \frac{Q_{i,j+1}^{n+1} - Q_{i,j}^{n+1}}{h_y} - \sigma_{y_j} \frac{P_{i+1,j}^{n+1} - P_{i,j}^{n+1}}{h_x} \right), \end{array} \right. \quad (26)$$

и split-field PML (25)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} + c\sigma_x u_{i,j}^n = \frac{1}{\rho} \frac{p_{i,j}^n - p_{i-1,j}^n}{h_x} \\ \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\tau} + c\sigma_y v_{i,j}^n = \frac{1}{\rho} \frac{p_{i,j}^n - p_{i,j-1}^n}{h_y} \\ \frac{(p_1)_{i,j}^{n+1} - (p_1)_{i,j}^n}{\tau} + c\sigma_x (p_1)_{i,j}^n = \kappa \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}}{h_x} \\ \frac{(p_2)_{i,j}^{n+1} - (p_2)_{i,j}^n}{\tau} + c\sigma_x (p_2)_{i,j}^n = \kappa \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j}^{n+1}}{h_y} \\ p_{i,j}^{n+1} = (p_1)_{i,j}^{n+1} + (p_2)_{i,j}^{n+1} \end{array} \right. \quad (27)$$

В граничных узлах, где схемы (26) и (27), будем просто занулять значения всех

переменных:

$$\begin{aligned} u_{0,j} &= u_{N,j} = u_{i,0} = u_{i,M} = 0 \\ v_{0,j} &= v_{N,j} = v_{i,0} = v_{i,M} = 0 \\ p_{0,j} &= p_{N,j} = p_{i,0} = p_{i,M} = 0 \end{aligned} \quad \dots \quad (28)$$

Такое граничное условие формально является отражающим, однако, благодаря наличию диссипативных членов в системах уравнений (24) и (25), слой PML будет работать как поглощающий.

### 3.8. Решение PML-систем сеточно-характеристическим методом

Сеточно-характеристический метод, рассмотренный в первой главе, является более эффективным по сравнению с конечно-разностным. Покажем, что он применим для решения систем уравнений Berenger PML (24) и split-field pml (25).

#### 3.8.1. Berenger PML

Рассмотрим систему уравнений, реализующую затухающее граничное условие типа Berenger PML (24), и произведём замену:

$$\varphi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \\ Q \\ P \end{pmatrix}.$$

Тогда система примет вид

$$\varphi_t = \mathbf{A}\varphi_x + \mathbf{B}\varphi_y + \mathbf{S}\varphi, \quad (29)$$

где матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{S}$  следующие

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\rho c^2 & 0 & 0 & 0 & -\rho c^2 \sigma_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & -\rho c^2 & 0 & -\rho c^2 \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -c\sigma_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c\sigma_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c(\sigma_x + \sigma_y) & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эти матрицы можно диагонализовать:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}_1 \Lambda_1 \mathbf{R}_1,$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}_2 \Lambda_2 \mathbf{R}_2,$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{L}_3 \Lambda_3 \mathbf{R}_3,$$

$$\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_y & 0 & \frac{1}{c\rho} & -\frac{1}{c\rho} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c\rho}{2} & \frac{1}{2} & \frac{c\rho\sigma_y}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{c\rho}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{c\rho\sigma_y}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L}_2 = \begin{pmatrix} -\sigma_x & 0 & 0 & \frac{1}{c\rho} & -\frac{1}{c\rho} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{c\rho}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{c\rho\sigma_x}{2} \\ -\frac{c\rho}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{c\rho\sigma_x}{2} \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_3 = \begin{pmatrix} \sigma_x^{-1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sigma_y^{-1} & 0 & 1 & 0 \\ -\sigma_x^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_y^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c\sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c\sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c(\sigma_x + \sigma_y) \end{pmatrix}.$$

Векторное уравнение (29) в частных производных можно расщепить по физическим процессам для каждой компоненты аналогично уравнению переноса-диффузии с  $\mu = 0$  [24].

Будем решать систему, делая шаг по  $x$  на первой трети шага по времени, делая

шаг по  $y$  на второй, и решая однородное уравнение на третей части шага по времени:

$$\begin{aligned}\varphi_t &= \mathbf{A}\varphi_x, \\ \varphi_t &= \mathbf{B}\varphi_y, \\ \varphi_t &= \mathbf{S}\varphi.\end{aligned}$$

Домножим каждое  $i$ -ое уравнение слева на  $\mathbf{R}_i$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_1\varphi_t &= \mathbf{R}_1(\mathbf{L}_1\Lambda_1\mathbf{R}_1)\varphi_x, \\ \mathbf{R}_2\varphi_t &= \mathbf{R}_2(\mathbf{L}_2\Lambda_2\mathbf{R}_2)\varphi_y, \\ \mathbf{R}_3\varphi_t &= \mathbf{R}_3(\mathbf{L}_3\Lambda_3\mathbf{R}_3)\varphi.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_1\varphi_t &= \Lambda_1\mathbf{R}_1\varphi_x \\ \mathbf{R}_2\varphi_t &= \Lambda_2\mathbf{R}_2\varphi_y \\ \mathbf{R}_3\varphi_t &= \Lambda_3\mathbf{R}_3\varphi\end{aligned}$$

Делая замену  $\omega^i = \mathbf{R}_i\varphi$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , и учитывая, что матрицы  $\Lambda_i$  диагональные, приходим к трём системам из трёх независимых скалярных уравнений:

$$\begin{cases} \omega_t^1 = \Lambda_1\omega_x^1, \\ \omega_t^2 = \Lambda_2\omega_y^2, \\ \omega_t^3 = \Lambda_3\omega^3. \end{cases} \quad (30)$$

Первые две системы представляют собой независимые скалярные уравнения переноса. Для их численного решения мы воспользуемся TVD-схемой второго порядка с ограничителем superbee.

Третья система представляет собой 5 независимых скалярных уравнений с разделяемыми переменными, которые, очевидно, решаются аналитически. Обозначая номер уравнения нижним индексом  $l$ , получаем

$$\begin{aligned}\begin{cases} (\omega_l^3)_t = 0, & l = 1, 2, \\ (\omega_l^3)_t = [\Lambda_3]_{ll}\omega_l^3, & l = 3, 4, 5, \end{cases} \\ \begin{cases} \omega_l^3(t) = \omega_l^3(t = 0), & l = 1, 2, \\ \omega_l^3(t) = \omega_l^3(t = 0) \cdot \exp([\Lambda_3]_{ll}t), & l = 3, 4, 5. \end{cases}\end{aligned}$$

Таким образом, сеточно-характеристический метод решения уравнения (24) построен.

### 3.8.2. Split-Field PML

Теперь построим сеточно-характеристический метод решения системы уравнений split-field PML (25). На этот раз произведём замену

$$\varphi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда система принимает вид

$$\varphi_t = \mathbf{A}\varphi_x + \mathbf{B}\varphi_y - \mathbf{C}\varphi,$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_y \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрицы можно диагонализовать и в этом случае

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}_1 \boldsymbol{\Lambda}_1 \mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{\kappa\rho}} & \frac{1}{\sqrt{\kappa\rho}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{\kappa}{\rho}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{\kappa\rho}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{\kappa\rho}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}_2 \boldsymbol{\Lambda}_2 \mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{\kappa\rho}} & \frac{1}{\sqrt{\kappa\rho}} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{\kappa}{\rho}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{\kappa\rho}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{\kappa\rho}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Вновь воспользуемся расщеплением по физическим процессам для каждой компоненты полученного векторного уравнение в частных [24]. Тогда, расщепляя систему и домножая на  $\mathbf{L}_i^{-1} = \mathbf{R}_i$  слева, получим

$$\begin{cases} \mathbf{R}_1 \varphi_t = \boldsymbol{\Lambda}_1 \mathbf{R}_1 \varphi_x, \\ \mathbf{R}_2 \varphi_t = \boldsymbol{\Lambda}_2 \mathbf{R}_2 \varphi_y, \\ \varphi_t = -\mathbf{C}\varphi. \end{cases}$$

Произведя замену переменных  $\omega_i = \mathbf{R}_i\varphi$ , получим систему

$$\begin{cases} \omega_t^1 = \mathbf{\Lambda}_1 \omega_x^1, \\ \omega_t^2 = \mathbf{\Lambda}_2 \omega_y^2, \\ \varphi_t = -\mathbf{C}\varphi. \end{cases}$$

Решение этой системы аналогично уже разобранному решению системы (30).

Таким образом? система уравнений split-field PML (25) также решается сеточно-характеристическим методом.

### 3.9. Численные эксперименты

Сравним эффективность описанных в предыдущей части поглощающих граничных условий: Mur, конечно-разностной реализации Berenger PML, сеточно-характеристической реализации Berenger PML, конечно-разностной реализации split-field PML, и, наконец, сеточно-характеристической реализации split-field PML.

При применении сеточно-характеристического метода для решения одномерных линейных уравнений переноса воспользуемся описанной в предыдущей главе TVD-схемой второго порядка с ограничителем superbee (14).

#### 3.9.1. Область моделирования

Будем, как и ранее, рассматривать физическую область

$$\Gamma = \{(x, y) \mid (x, y) \in [0, X] \times [0, Y], X = Nh_x, Y = Mh_y\},$$

и расчётную сетку с узлами

$$G = \{(x_i, y_j) \mid x = ih_x, y = jh_y, i \in \overline{0, N}, j \in \overline{0, M}\},$$

взятыми в моменты времени  $t_n = n\tau \in [0, T]$ .

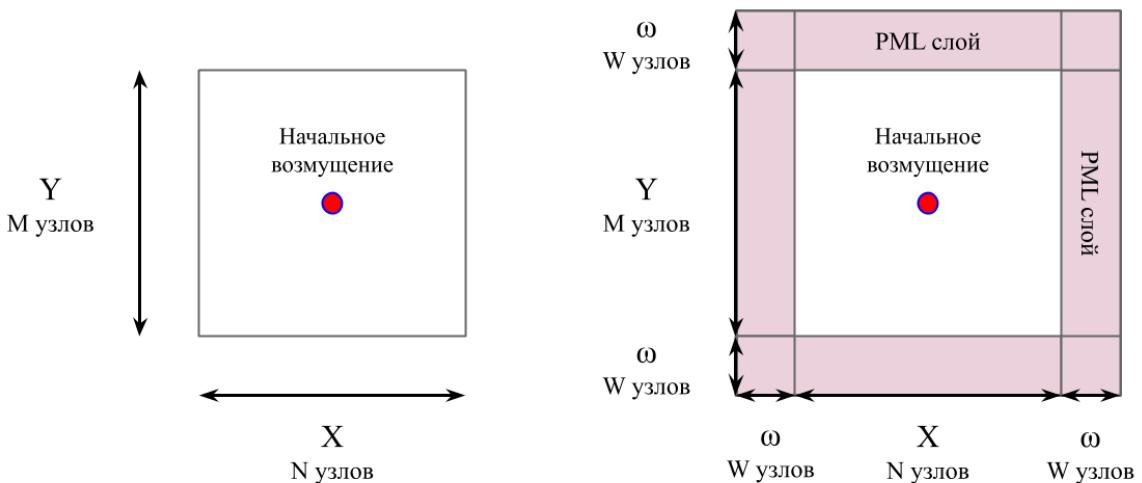


Рис. 18: Схема расчётных областей для Mur (слева) и PML (справа) случаев.

Размеры физической области  $\Gamma$  примем  $X = Y = 1$  м, плотность среды  $\rho = 1$  кг/м<sup>3</sup>, скорость звука  $c = 1$  м/с. Выберем количество узлов сетки  $N = M = 101$  (шаг сетки будет равен  $h := h_x = h_y = 0.01$ ), шаг по времени примем равным  $\tau = 0.005$  сек, предел по времени —  $T = 750\tau = 3.75$  сек. Заметим, что для выбранных параметров выполнено условие устойчивости Куранта (12).

Для PML методов мы зафиксируем степень возрастания диссипативного коэффициента  $k = 1$  (см. (23)) и толщину PML слоя  $\omega := \omega_x = \omega_y = 40h$  ( $W = 40$  узлов). Значение коэффициента  $\Sigma := \Sigma_x = \Sigma_y$  будем варьировать для изучения зависимости качества поглощения от максимального значения диссипативного коэффициента.

### 3.9.2. Начальные условия

Поставим на распределения скоростей начальные условия

$$u(x, y) \equiv 0,$$

$$v(x, y) \equiv 0,$$

а на распределение давления начальное условие

$$p(x, y) = p(r) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{r - \mu}{\sigma}\right)^2\right), \quad (31)$$

$$A = 0.05 \text{ Па}, \quad \mu = 0 \quad \sigma = 0.05,$$

где расстояние от точки  $(x, y)$  центра расчётной области  $(\frac{X}{2}, \frac{Y}{2})$ :

$$r = \sqrt{\left(\frac{X}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{Y}{2} - y\right)^2}.$$

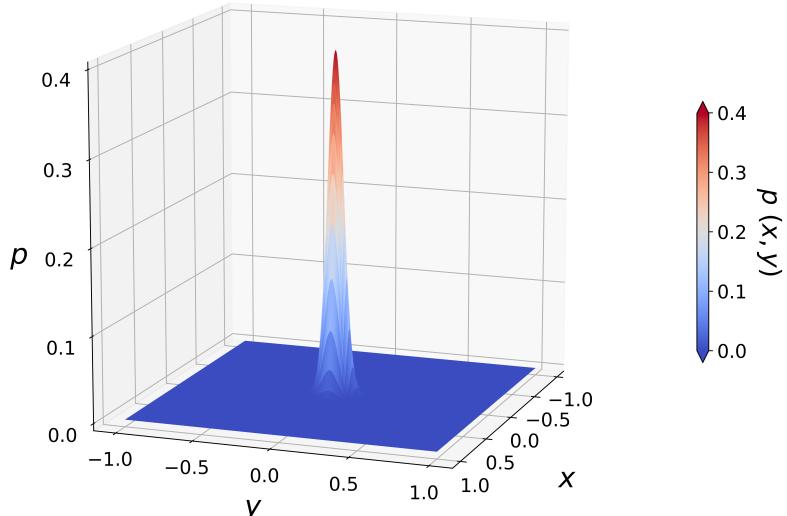


Рис. 19: График начального распределения давления (31) при указанных параметрах.

### 3.9.3. Методы оценки качества поглощения

Оценить качество работы представленных поглощающих граничных условий можно несколькими способами

1. Визуально по цветовой гистограмме  $p(x, y)$ .

Этот способ позволяет наглядно проверить работоспособность одного алгоритма, однако сравнение качества работы даже всего двух алгоритмов затруднительно.

2. По зависимости кинетической энергии расчётной области от времени.

Вспомним, что мы рассматриваем идеальный газ, для которого известно выражение кинетической энергии через давление и занимаемый объём

$$pV = \frac{2}{3}K.$$

Отметим, что в нашем случае  $p$  — отклонение давления от равновесного значения, тогда  $K$  — отклонение значения кинетической энергии от равновесного. Значит  $K$ , как и  $p$ , может принимать и положительные, и отрицательные значения.

Так как значение давления известно только в узлах сетки, то вычислить  $K$  точно нельзя. Для получения приближённого значения  $K$ , будем считать, что  $p(x, y) \equiv p_{i,j}$  для  $x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ ,  $y \in [y_{i-1/2}, y_{i+1/2}]$ . Тогда численное значение отклонения кинетической энергии

$$K_G = \frac{3}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p_{i,j}^n dV_{i,j}.$$

Здесь  $dV_{i,j} = h_x \cdot h_y \cdot 1$  — приведённая к единицам объёма площадь одной клетки расчётной сетки.

Заметим, что значения  $K_G$  вычисляются для узлов, не лежащих в PML областях, так как PML слой добавляются к рассматриваемой физической области формально и не являются её частью.

Этот способ позволяет сравнивать между собой сразу несколько алгоритмов.

3. Площадь под графиками  $K_G(t)$ .

Сравнение графиков  $K_G(t)$  позволяет на глаз определить, какой алгоритм является наилучшим, что, конечно, не является строгим критерием. Переход к сравнению площадей

$$E := \sum_n K_G(\tau n) \tag{32}$$

под графиками  $K_G(t)$  позволяет формализовать данную процедуру, сводя задачу сравнения качества алгоритмов к сравнению действительных чисел.

### 3.9.4. Результаты

Проанализируем результаты численных экспериментов<sup>7</sup>. Они представлены на графиках давления 21 и 20, графиках зависимости  $K_G(t)$  22, 23 и 24, а также в таблице площадей  $E$  под графиками отклонения кинетической энергии табл. 2.

Для поглощающих условий типа PML была исследована зависимость качества поглощения от максимального значения диссипативного коэффициента. Из графиков зависимости  $K_G(t)$  и таблицы 2 видно, что для конечно-разностных реализаций PML при росте значения коэффициента  $\Sigma$  от 1 до 64 качество работы поглощающего условия также растёт. Однако, при дальнейшем увеличении коэффициента до 256 конечно-разностный численный метод перестаёт быть устойчивым (рис. 24а и рис. 24б). Это значит, что, к сожалению, нельзя просто выбрать большое значение коэффициента  $\Sigma$  и быть уверенным в том, что конечно-разностный метод будет показывать хорошие результаты. Значения параметра  $\Sigma$ ,  $k$  и  $w$  необходимо подбирать для эффективной работы поглощающего условия, и это является одним из основных недостатков PML методов.

В случае, если коэффициент подобран неудачно, будут заметны нежелательные отражённые волны (см. рис. 20).

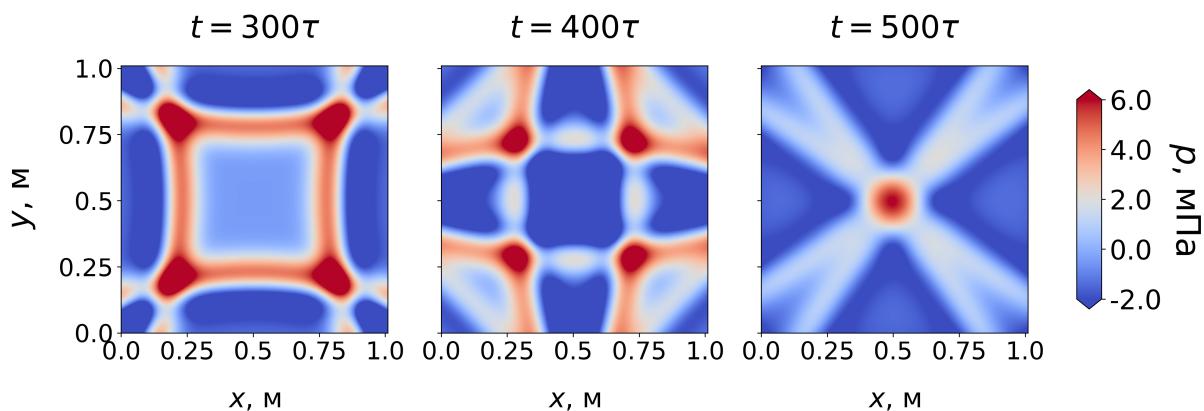


Рис. 20: Отражённые волны при использовании конечно-разностного варианта split-field PML с  $\Sigma = 4$ .

Заметим, что сеточно-характеристический метод оказывается более устойчив по отношению к выбору значения параметра  $\Sigma$ . Так, при выборе  $\Sigma = 256$  для сеточно-характеристических реализаций не наблюдается расхождения (рис. 24с и рис. 24д). Это может быть связано с тем, что у сеточно-характеристических реализаций граничного условия PML рост качества поглощения происходит с уменьшением параметра  $\Sigma$  (рис. 23). Такое отличие от конечно-разностной реализации объясняется тем,

<sup>7</sup>Исходный код доступен в репозитории <https://github.com/TheodorSergeev/Acoustic2d>.

что параметр  $\Sigma$  подбирается для системы уравнений в Римановых переменных (30), а не физических.

В плане вычислительных затрат PML методы, очевидно, являются гораздо более дорогостоящими, чем поглощающее условие Mur. Это связано с тем, что при использовании PML мы, во-первых, увеличиваем расчётную область, добавляя PML слои, и, во-вторых, увеличиваем количество решаемых дифференциальных уравнений и переменных. При этом при реализации PML методов более предпочтительным будет использование сеточно-характеристического метода в силу возможности его распараллеливания для использования многопроцессорных машин.

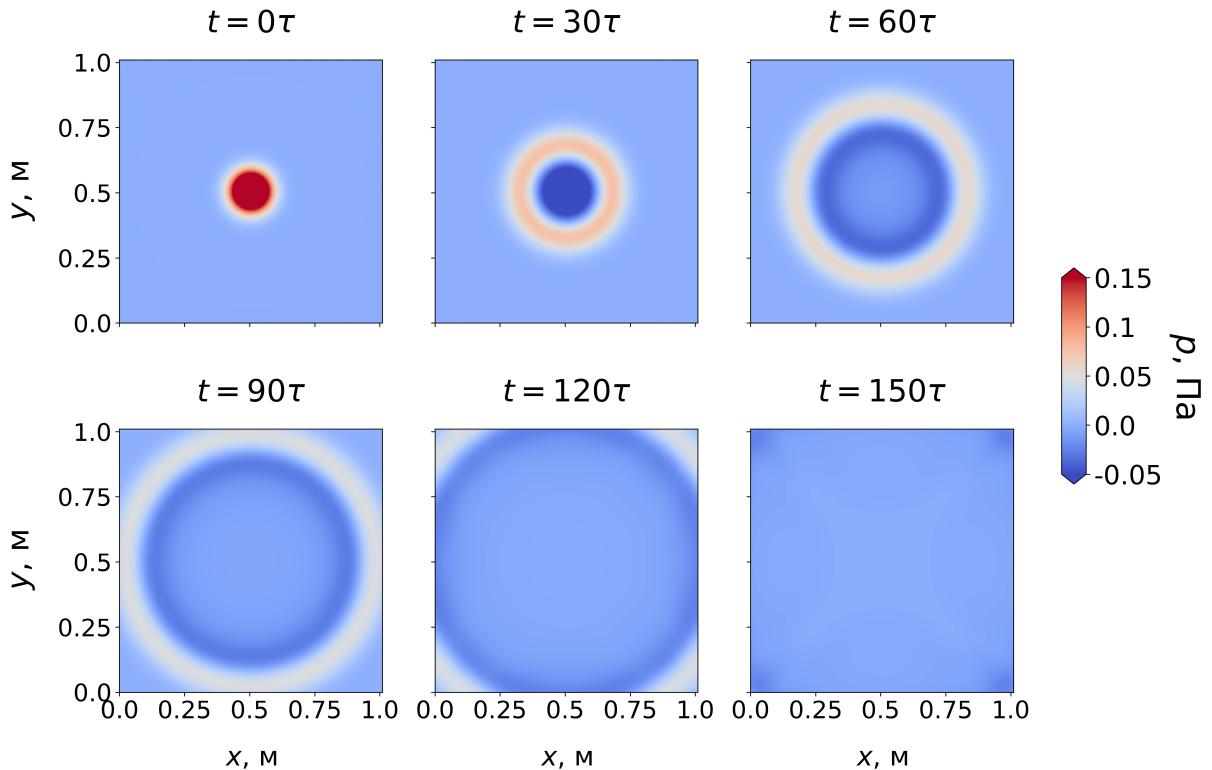
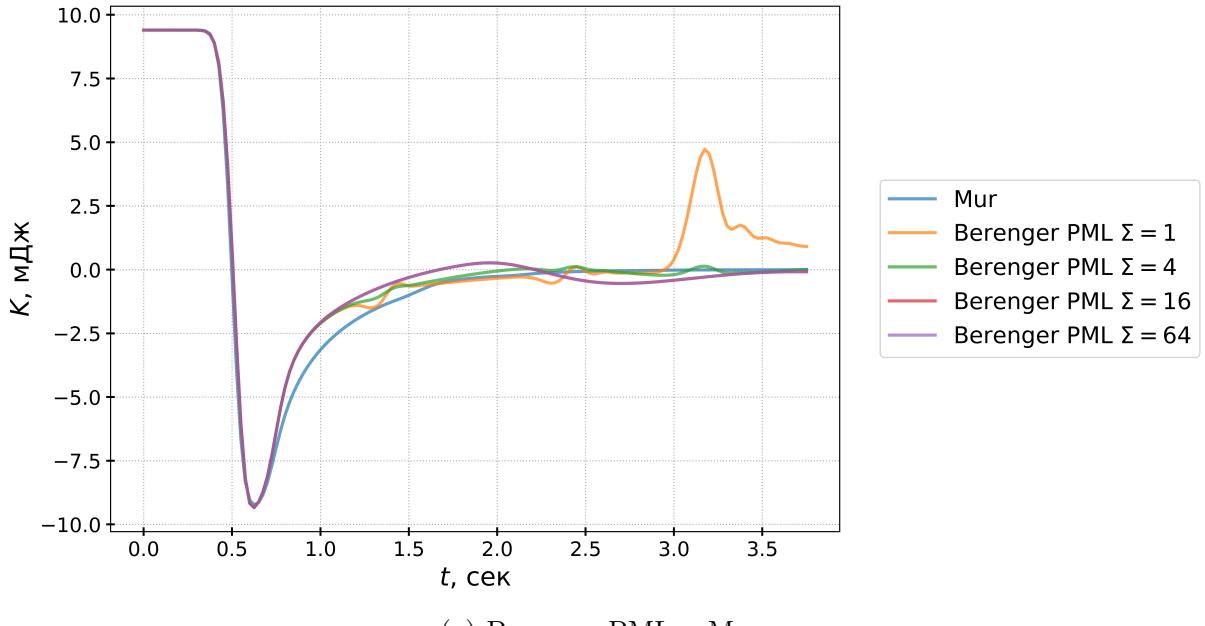


Рис. 21: Давление в различные моменты времени при использовании поглощающего граничного условия Mur.

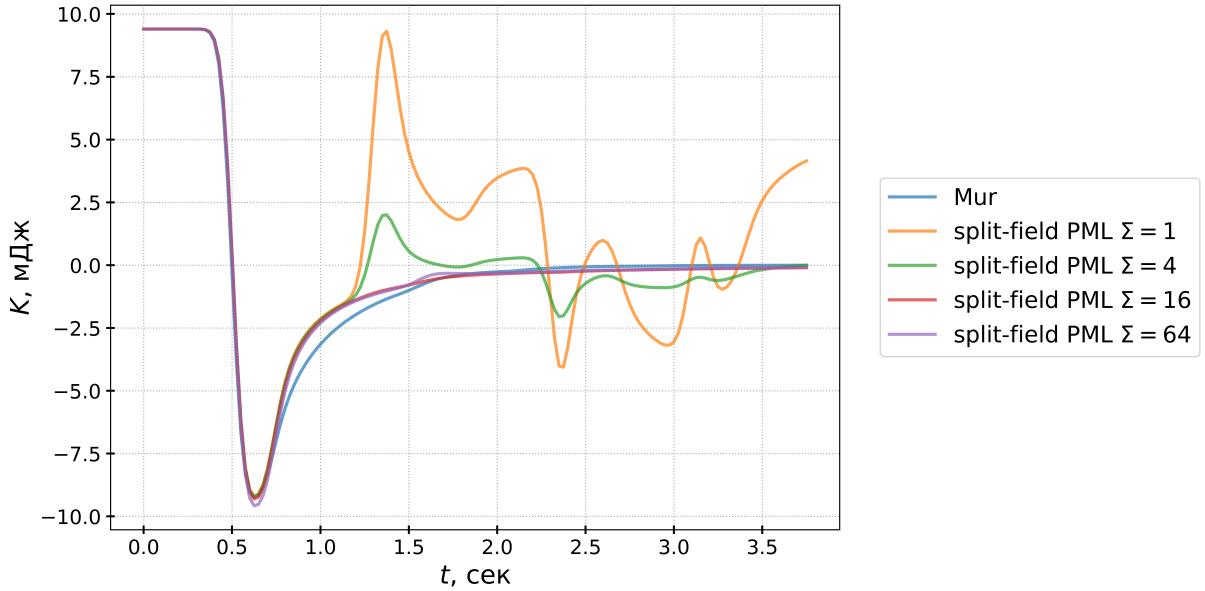
Границное условие Mur оказывается достаточно дешёвым и эффективным поглощающим условием (см. рис. 21). Конечно, площади  $E$  под графиками отклонения кинетической энергии (табл. 2) у PML почти всегда будут меньше, чем у Mur. Однако, что для Mur, что для PML методов кинетическая энергия затухает до нуля примерно на одной и той же временной отметке в районе 2 сек. (см. рис. 22 и 23).

Заметим, что поглощающие граничные условия PML и Mur можно объединить. Действительно, формально для граничных узлов PML слоёв мы используем отражающее граничное условие (28). Вместо него можно использовать граничное условие Mur. Это бы позволило нивелировать как недостатки PML, так и недостатки Mur. Так, волна, падающая на поглощающую границу не строго нормально, будет предварительно диссирировать в PML слое, что уменьшит амплитуду отражённой по вине Mur волны. В то же время неточный подбор PML параметров будет не так критичен,

т.к. условие Mur будет поглощать некоторую часть незатухшей в PML слое энергии. Это позволило бы избежать появления таких отражённых волн, как, например, мы получили при выборе  $\Sigma = 1$  для конечно-разностной реализации split-field PML (рис. 20 и рис. 22b).

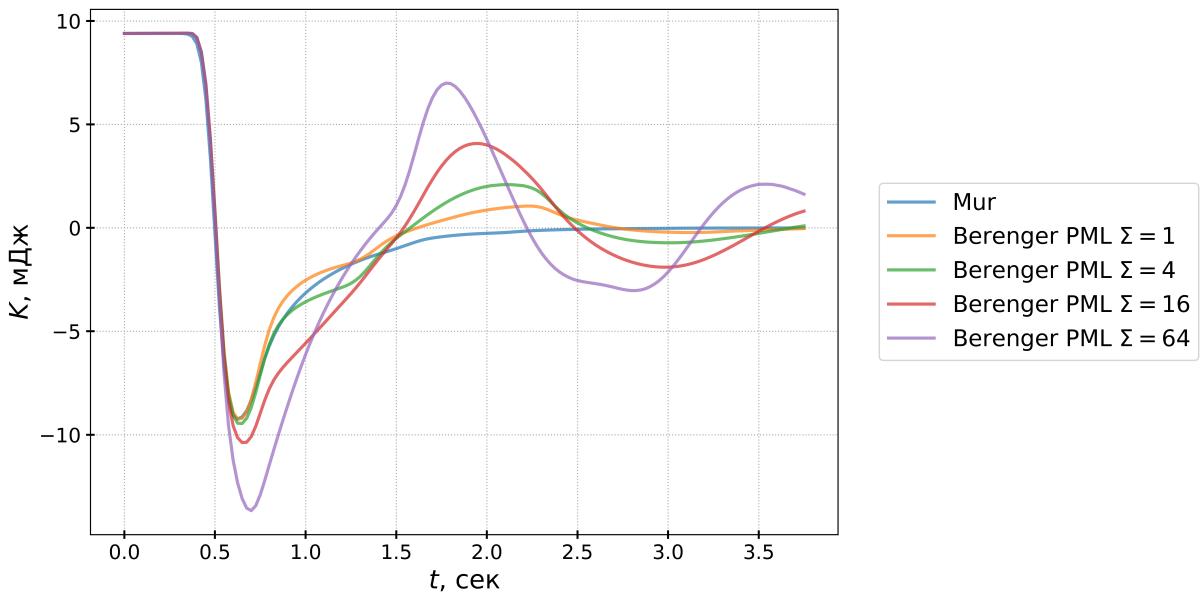


(a) Berenger PML и Mur.

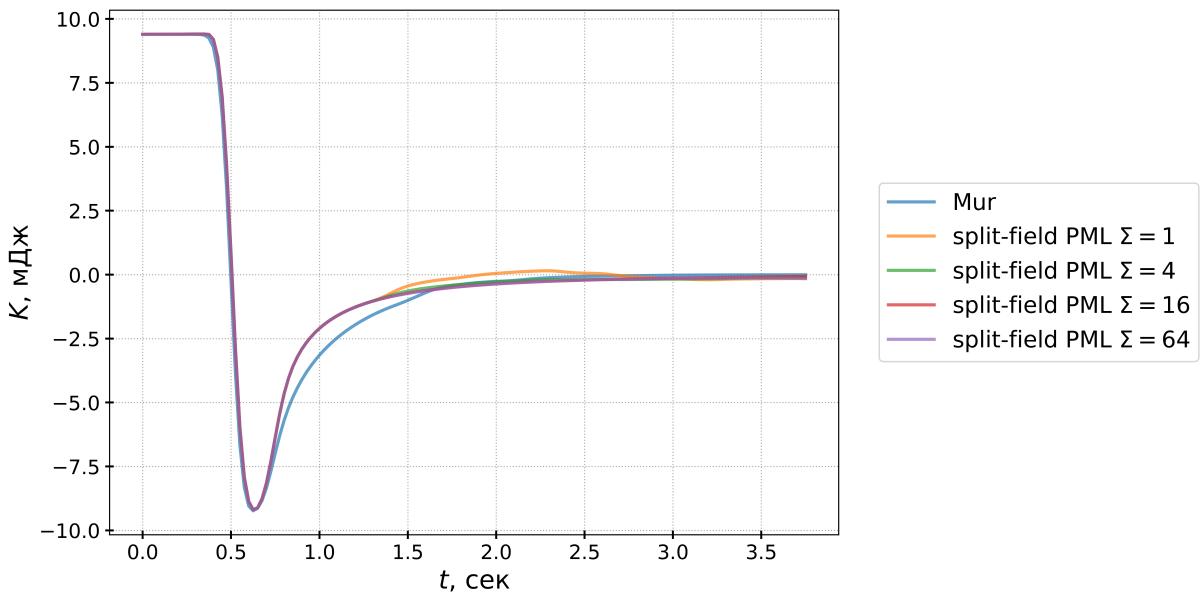


(b) Split-field PML и Mur.

Рис. 22: Временная зависимость отклонения кинетической энергии от равновесия для конечно-разностной реализации поглощающих граничных условий для различных значений параметра  $\Sigma$ .

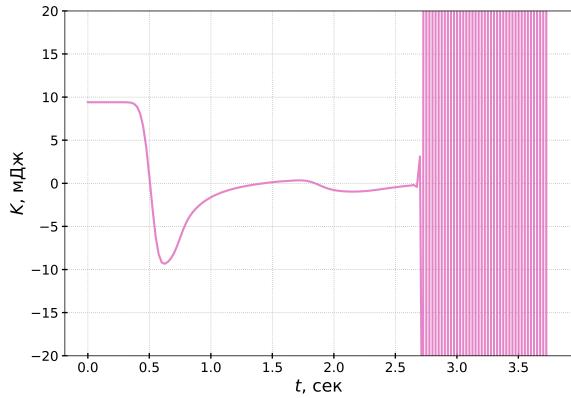


(a) Berenger PML и Mur.



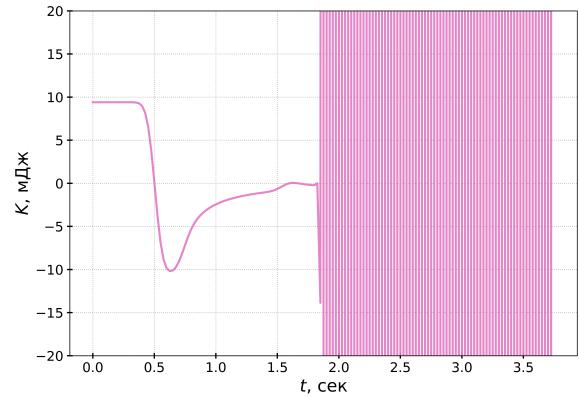
(b) Split-field PML и Mur.

Рис. 23: Временная зависимость отклонения кинетической энергии от равновесия для сеточно-характеристической реализации поглощающих граничных условий для различных значений параметра  $\Sigma$ .



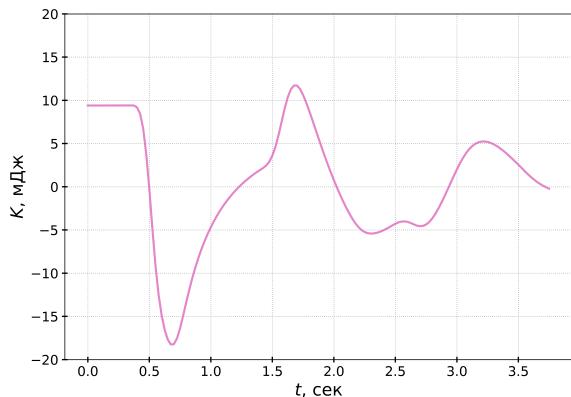
(a) Berenger PML.

Конечно-разностный метод.



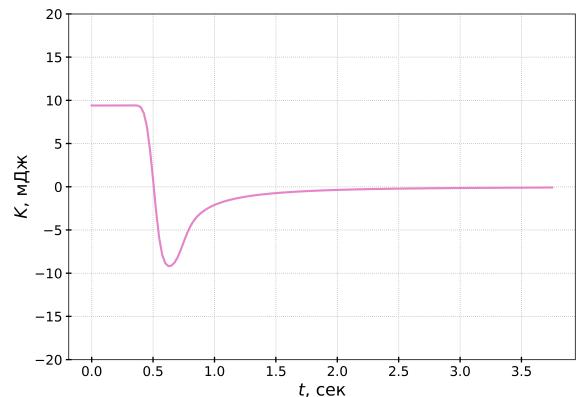
(b) Split-field PML.

Конечно-разностный метод.



(c) Berenger PML.

Сеточно-характеристический метод.



(d) Split-field PML.

Сеточно-характеристический метод.

Рис. 24: Временная зависимость отклонения кинетической энергии от равновесия для различных реализаций поглощающих граничных при  $\Sigma = 256$ .

Вид гр. усл.	Тип	Числ. метод	$\Sigma$	$[E] \cdot 10^3$
MUR	-	FD	-	<b>6.39</b>
PML	Berenger	FD	1	7.37
			4	5.72
			16	<b>5.90</b>
			64	5.90
			256	$3.2 \cdot 10^{44}$
	GC	GC	1	<b>6.53</b>
			4	8.22
			16	11.27
			64	14.22
			256	18.54
	Split-field	FD	1	11.88
			4	6.59
			16	<b>6.12</b>
			64	6.15
			256	$2.5 \cdot 10^{134}$
	GC	GC	1	<b>5.72</b>
			4	5.95
			16	6.00
			64	6.04
			256	6.03

Таблица 2: Площади  $E$  (32) под графиками  $K_G(t)$  для различных граничных поглощающих условий. Значения  $E$  округлены до трёх значащих цифр. Для численных методов использованы сокращения: FD — конечно-разностный численный метод, GC — сеточно-характеристический.

## 4. Заключение

В первой части данной работы было рассмотрено численное моделирование динамических процессов, происходящих в ледовом острове при бурении грунта и статической нагрузке острова. Анализ волновых картин, возникающих при моделировании бурения, показал, что ледовый остров проявляет свойства резонатора волн упругости. Это свидетельствует о наличии риска резонансного разрушения льда при наличии периодических источников возмущений вблизи острова. Также был проведён анализ распределений напряжений фон Мизеса в ледовом острове при 100-тонной статической нагрузке с 5-метровым основанием. Данная нагрузка оказалась недостаточной для разрушения льда. Наиболее нагруженными частями острова были цилиндрическая область непосредственно под основанием статической нагрузки, а также конусообразные области радиусом около 20 метров с вершиной в центре острова и вертикальной осью.

Во второй части данной работы была теоретически показана возможность применения поглощающих граничных условий типа Berenger PML и split-field PML совместно с сеточно-характеристическим методом. Был поставлен и проведён численный эксперимент для сравнения эффективности сеточно-характеристических и конечно-разностных реализаций этих граничных условий, а также поглощающего граничного условия Mur. Анализ результатов показал превосходство сеточно-характеристических реализаций PML методов над конечно-разностными. Также был предложен метод комбинирования граничных условий типов PML и Mur для улучшения качества поглощения.

Полученные результаты могут быть использованы для решения задач об использовании искусственных ледовых островов и улучшения точности численного моделирования распространения упругих волн в задачах прикладной вычислительной геофизики.

## **Благодарности**

Я хотел бы поблагодарить своего научного руководителя профессора Игоря Борисовича Петрова за постановку задачи и ценные обсуждения. Также я хотел бы поблагодарить Николая Игоревича Хохлова за оказанную помощь при исследовании поглощающих граничных условий.

# Список литературы

- [1] И. Б. Петров, «Проблемы моделирования природных и антропогенных процессов в арктической зоне российской федерации», *Матем. моделирование*, т. 30, № 7, с. 103—106, 2018.
- [2] Y. Yamauchi, K. Kamesaki, and M. Hyodo, “Numerical simulation on ice-structure interaction during earthquakes”, in *Proceedings of The Twelfth (2002) International Offshore and Polar Engineering Conference*, vol. 159, 2002, pp. 802–807.
- [3] В. А. Бирюков, В. А. Миляха и И. Б. Петров, «Анализ зависимости глобальной нагрузки от механических параметров льда при взаимодействии ледяного поля с конструкцией», *Доклады Академии наук*, т. 474, № 6, с. 696–699, 2017.
- [4] В. А. Миляха, А. В. Санников, В. А. Бирюков и И. Б. Петров, «Моделирование экспериментов по исследованию прочностных характеристик льда разрывным методом галёркина», *Матем. моделирование*, т. 30, № 2, с. 110—118, 2018.
- [5] В. П. Епифанов, «Особенности контактного разрушения льда», *Лёд и снег*, т. 60, № 2, с. 274—284, 2020.
- [6] A. Crawford, D. Mueller, E. Humphreys, T. Carrières, and H. Tran, “Surface ablation model evaluation on a drifting ice island in the canadian arctic”, *Cold Regions Science and Technology*, vol. 110, pp. 170–182, 2015.
- [7] P. Stognii, I. Petrov, and A. Favorskaya, “The influence of the ice field on the seismic exploration in the arctic region”, *Procedia Computer Science*, vol. 159, pp. 870–877, 2019.
- [8] A. Favorskaya, M. Zhdanov, N. Khokhlov, and I. Petrov, “Modeling the wave phenomena in acoustic and elastic media with sharp variations of physical properties using the grid-characteristic method”, *Geophysical Prospecting*, vol. 66, pp. 1485–1502, 2018.
- [9] V. Biryukov, M. Muratov, I. Petrov, A. Sannikov, and A. Favorskaya, “Application of the grid-characteristic method on unstructured tetrahedral meshes to the solution of direct problems in seismic exploration of fractured layers”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 55, pp. 1733–1742, 2015.
- [10] А. В. Фаворская, «Метод исследования пространственных волновых явлений в средах со сложной структурой с помощью вычислительных экспериментов», дис. д-ра физ.-мат. наук, Московский физико-технический институт (государственный университет), 2018.
- [11] Д. П. Григорьевых, Н. И. Хохлов и И. Б. Петров, «Расчёт динамического разрушения в твёрдых деформируемых телах», *Матем. моделирование*, т. 29, № 4, с. 45—58, 2017.

- [12] А. В. Шалашников, Д. Б. Фиников, Н. И. Хохлов и А. М. Иванов, «Новые подходы в оптимизации расчета волновых полей, связанных непосредственно с выделенной целевой областью сейсмического отклика», *Геофизические технологии*, № 1, с. 4—32, 2019.
- [13] S. Sakamoto, H. Tsuru, M. Toyoda, and T. Asakura, *Computational Simulation in Architectural and Environmental Acoustics*. Springer Japan, 2014, pp. 20–25.
- [14] J. P. Berenger, “A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves”, *J. of Comp. Phys*, vol. 114, no. 2, pp. 185–200, 1994.
- [15] F. Collino and C. Tsogka, “Application of the perfectly matched absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media”, *Geophysics*, vol. 66, pp. 294–307, 2001.
- [16] R. Courant, E. Isaacson, and M. Rees, “On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences”, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 5, no. 3, pp. 243–255, 1952.
- [17] И. Б. Петров и А. И. Лобанов, *Лекции по вычислительной математике: Учебное пособие*. М.: Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.
- [18] А. С. Холодов и Я. А. Холодов, «О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа», *Ж. вычисл. матем. и матем. физ*, т. 46, № 9, с. 1638—1667, 2006.
- [19] A. Harten, “High resolution schemes for hyperbolic conservation laws”, *J. of Computational Physics*, vol. 49, no. 3, pp. 357–393, 1983.
- [20] Б. Б. Баракин и Н. В. Бородкин, «Tvd схема второго порядка аппроксимации на подвижной адаптивной сетке для гиперболических систем», *Сиб. журн. вычисл. матем.*, т. 3, № 2, с. 109—121, 2000.
- [21] Р. П. Федоренко, «Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений», *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, т. 1, № 5, с. 922—927, 1961.
- [22] L. N. Trefethen, *Finite Difference and Spectral Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. Cornell University, 1994, pp. 225–226.
- [23] E. Turkel and A. Yefet, “Absorbing pml boundary layers for wave-like equations”, *Applied Numerical Mathematics*, vol. 27, pp. 533–557, 1998.
- [24] Г. И. Марчук, «Методы расщепления для решения нестационарных задач», *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, т. 35, № 6, с. 667—671, 1995.