

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики
Кафедра информатики и вычислительной математики

Направление подготовки / специальность: 03.03.01 Прикладные математика и
физика (бакалавриат)

Направленность (профиль) подготовки: Математическое моделирование,
вычислительная математика и физика

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ИНДУСТРИАЛЬНЫХ ЛЕДОВЫХ КОНСТРУКЦИЯХ

(бакалаврская работа)

Студент:
Сергеев Фёдор Игоревич

(подпись студента)

Научный руководитель:
Петров Игорь Борисович,
чл.-корр., д. физ.-мат. наук, проф.

(подпись руководителя)

Консультант (при наличии):
Хохлов Николай Игоревич,
канд. физ.-мат. наук

(подпись консультанта)

Москва
2020

Аннотация

Целью данной работой является проведение компьютерного моделирования волновых процессов, происходящих при эксплуатации искусственных ледовых нефтедобывающих платформ, а также исследование поглощающих граничных условий для задач вычислительной геофизики.

В рамках выполнения работы было:

- Проведено моделирование распространения волн упругости в ледовом острове, воде и грунте при бурении.
- Произведён расчёт распределения напряжений в ледовом острове при статической нагрузке.
- Проведено сравнение эффективности работы поглощающих граничных условий Mur, Beringer PML и split-field PML для двумерной системы уравнений акустики.
- Исследована возможность применения поглощающих граничных условий Beringer PML и split-field PML совместно с сеточно-характеристического методом для двумерной системы уравнений акустики и двумерной системы уравнений эластодинамики.

Содержание

1 Введение	3
2 Моделирование динамических процессов в ледовом острове	3
2.1 Геологическая модель	4
2.2 Математическая модель среды	4
2.2.1 Уравнения	4
2.2.2 Контактные условия	5
2.2.3 Граничные условия	6
2.3 Численный метод	7
2.3.1 Сеточно-характеристический метод	7
2.3.2 Схема Куранта-Изаксона-Риса	10
2.3.3 Схема Русанова	10
2.3.4 Контактные и граничные условия	10
2.4 Моделирование воздействия бура	10
2.5 Моделирование статической нагрузке (задача о штампе)	11
3 что-то	11
3.1 Конечно-разностный метод	12
3.2 Сеточно-характеристический метод	12
4 Поглощающие граничные условия	13
4.1 Виды поглощающих граничных условий	14
4.2 Уравнения акустики	14
4.3 Поглощающие граничное условие MUR	15
4.4 Beringer PML	16
4.5 Split-field PML	18
4.6 Решение PML-систем методом конечных разностей	18
4.7 Решение PML-систем сеточно-характеристическим методом	19
4.7.1 Beringer PML	19
4.7.2 Splid-Field PML	21
4.8 Методы оценки результатов	22

1. Введение

В настоящее время особенный интерес для нефтегазовой индустрии представляет добыча полезных ископаемых на Арктическом шельфе с использованием искусственных ледовых островов. Они обладают рядом преимуществ перед традиционными бетонными и металлическими нефтегазовыми платформами:

- Основной строительный материал, лёд, в Арктике доступен и дешев.
- При использовании местного строительного материала, платформа является абсолютно экологически чистой.
- В летний период лёд тает сам по себе, тем самым избавляя от необходимости проведения полного демонтажа несущих конструкций при завершении работы платформы. Это особенно важно для упрощения и удешевления проведения разведочного бурения.

При использовании ледовых островов возникает и ряд проблем. Важнейшей является обеспечение безопасности персонала и установок, находящихся на поверхности острова. Устойчивости и целостности льда угрожают как механические воздействия (бурение, сейсмическая активность, статическая нагрузка, столкновение с айсбергами), так и тепловые воздействия (солнечная радиация, тёплые течения).

В данной работе произведено численное моделирование распространение упругих волн в ледовом острове, воде и грунте при бурении и сейсмической активности. Проанализировано влияние этих процессов, а также статической нагрузки на целостность льда.

Для численного моделирования вышеописанных процессов также требуется разработка новых методов численного моделирования. В данной работе рассматривается применения поглощающего граничного условия Perfectly Matched Layer

2. Моделирование динамических процессов в ледовом острове

2.1 Геологическая модель

Рассмотрим в двумерном случае ледовый остров шириной 300 м. и высотой 10 м., покоящийся на дне моря глубиной 8 м.

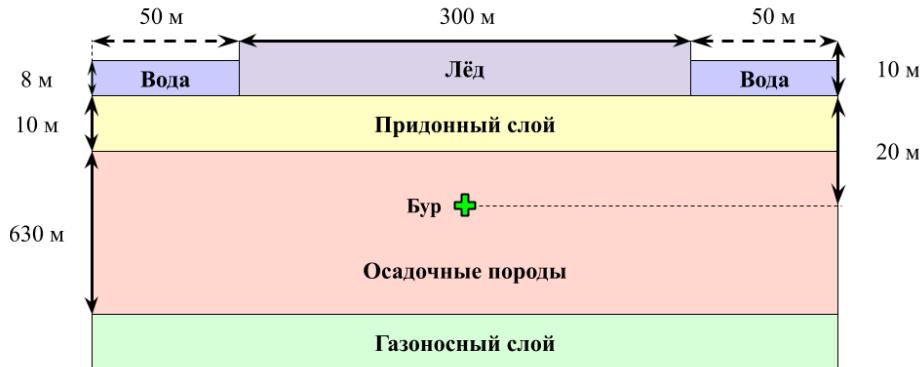


Рис. 1: Схема геологической модели.

Грунт под островом будем считать состоящим из придонного слоя глубиной 10 м. и слоя осадочных пород глубиной 600 м. В некоторых случаях мы будем также рассматривать газоносный слой. Бур будем считать расположенным посередине длины острова на глубине 20 м.

Параметры рассматриваемых сред приведены в таблице табл. 1.

Среда	c_p , м/с	c_s , м/с	ρ , кг/м ³
Лёд	3940	2493	917
Вода	1500	—	1025
Придонный грунт	1806	316	2000
Осадочные породы	2250	1000	2000

Таблица 1: Параметры рассматриваемых сред.

2.2 Математическая модель среды

2.2.1 Уравнения

Рассматриваемые среды (см. таблицу табл. 1) будем считать сплошными, однородными, изотропными и несжимаемыми. В описанной постановке присутствуют как жидкие среды (вода, окружающая остров), так и твёрдые среды (льд и слои грунта).

Жидкие среды в двумерном случае в декартовой эйлеровой системе координат описываются акустическим волновым уравнением

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \vec{v}(x, y, t)}{\partial t} = -\nabla p(x, y, t) \\ \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial t} = -\rho c^2 \operatorname{div} \vec{v}(x, y, t) \end{cases} \quad (1)$$

где ρ — плотность среды, $\vec{v}(x, y, t)$ — вектор скорости (производная вектора смещения частицы среды $\vec{u}(x, y, t)$ по времени), $p(x, y, t)$ — давление, c — скорость звука в жидкости.

Твёрдые среды в двумерном случае в декартовой эйлеровой системе координат описываются уже упругим волновым уравнением

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \vec{v}(x, y, t)}{\partial t} = \operatorname{div}^T \boldsymbol{\sigma}(x, y, t) \\ \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(x, y, t)}{\partial t} = \rho \left(c_p^2 - 2c_s^2 \right) \operatorname{div} \vec{v}(x, y, t) \mathbf{I} + \rho c_s^2 \left(\nabla \otimes \vec{v}(x, y, t) + [\nabla \otimes \vec{v}(x, y, t)]^T \right) \end{cases} \quad (2)$$

где $\boldsymbol{\sigma}(x, y, t)$ — симметричный тензор напряжений Коши второго ранга, c_p и c_s — скорости продольной и поперечной волн соответственно, \mathbf{I} — единичный тензор второго ранга, операция \otimes — тензорное произведение векторов.

Далее для краткости мы будем опускать значок у вектора скорости, то есть будем писать v , подразумевая при этом вектор \vec{v} . Также мы будем опускать параметры (x, y, t) у зависящих от них величин.

2.2.2 Контактные условия

Между средами необходимо поставить контактные условия, которые изображены на рис. 2.



Рис. 2: Схема контактных условий: 1 — контактное условие полного слипания, 2 — контактное условие между упругой и акустической средами, 3 — контактное условие скольжения, 4 — контактное условие отражения.

Здесь и далее мы будем обозначать контактирующие среды (или расчётные сетки) индексами L и R — левая и правая среды соответственно. Вектор внешней нормали к левой под-области обозначим как n .

- Контактное условие полного слипания ставится между слоями твёрдых сред. Физически оно означает возможность беспрепятственного распространения упругих волн. Для этого требуется равенство скоростей и векторов нормального напряжения на границе раздела.

Математически условие полного слипания записывается следующим образом

$$\begin{cases} v_L = v_R \\ \boldsymbol{\sigma}_L \cdot n = \boldsymbol{\sigma}_R \cdot n \end{cases} \quad (3)$$

2. Контактное условие между упругой и акустической средой используется для реализации перехода волн из твёрдых сред в жидкость и обратно. Оно отличается от условий полного слипания, т.к. в данном случае контактирующие среды описываются разными уравнениями (см. (1) и (2)).

Если считать, что акустическая среда отвечает индексу L , а упругая — R , то данное условие запишется как

$$\begin{cases} v_L \cdot n = v_R \cdot n \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot n + p n = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Физически это условие означает не-протекание жидкости в твёрдое тело, и наоборот. Для этого требуется равенство нормальных скоростей. первое уравнение, и равенство нормального вектора напряжений на контактной границе, второе уравнение.

3. Контактное условие свободного скольжения ставится между ледовым островом и грунтом. В отличие от случая контакта двух слоёв грунта, когда применяется условие полного слипания, лёд и придонный слой могут двигаться друг относительно друга. Это явление известно на практике, так, например, наблюдается "соскальзывание" ледников с поверхностей гор. Таким образом требуется использование специального контактного условия.

$$\begin{cases} v_L \cdot n = v_R \cdot n \\ n \cdot \boldsymbol{\sigma}_L \cdot n = n \cdot \boldsymbol{\sigma}_R \cdot n \\ n \cdot \boldsymbol{\sigma}_{L/R} \cdot n = \boldsymbol{\sigma}_{L/R} \cdot n \end{cases} \quad (5)$$

4. Контактное условие полного отражения (свободной границы) ставится на границе раздела осадочных пород и газоносного слоя. Применение такого условия не является вполне физически верным, однако для нашей задачи его применение вполне оправдано.

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot n = 0 \quad (6)$$

2.2.3 Границные условия

Границные условия расчётной области изображены на рис. 3.

1. Поглощающие (не-отражающие) граничные условия используются при рассмотрении ограниченной под-области бесконечного физического региона. В данном случае водяной, придонный, газоносный слои и слой осадочных пород продолжаются за границы расчётной области налево, направо и, для газоносного слоя, вниз. Поэтому на их краях необходимо использовать поглощающие граничные условия.¹

Для упругих сред это условие запишется в виде

$$\begin{cases} v_{l-2}^n = v_{l-1}^n = v_l^n \\ \boldsymbol{\sigma}_{l-2}^n = \boldsymbol{\sigma}_{l-1}^n = \boldsymbol{\sigma}_l^n \end{cases} \quad (7)$$

¹Поглощающие условия будут рассмотрены подробнее в главе 4.



Рис. 3: Схема граничных условий: а — граничное условие поглощения, б — граничное условие нулевого давления.

А для акустических сред в виде

$$\begin{cases} v_{l-2}^n = v_{l-1}^n = v_l^n \\ p_{l-2}^n = p_{l-1}^n = p_l^n \end{cases} \quad (8)$$

здесь верхний индекс n обозначает момент времени t_n , а нижний — номер сечочного узла, при этом узел l является граничным, а узлы $l - 1$ и $l - 2$ — его соседями по одной из осей. Такая форма записи будет верна для левой, правой и нижней границе при соответствующем выборе значений координатных индексов.

- Граничное условие нулевого давления применяется на границе сред с воздухом. В нашей задаче мы не учитываем влияние атмосферного давления на исследуемые процессы, считая его пренебрежимо малым. Следовательно мы принимаем $p = 0$ на границах вода-воздух и лёд-воздух.

2.3 Численный метод

2.3.1 Сеточно-характеристический метод

Для решения систем уравнений в частных производных (2) и (1) воспользуемся сеточно-характеристическим методом на регулярных прямоугольных сетках. Получим его для системы (1), описывающей упругие среды. Для системы (1) он получается абсолютно аналогично если учесть, что для акустических сред $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = p$ и $\sigma_{xy} = 0$.

Будем работать в декартовой прямоугольной системе координат. Введём обозначение

$$\varphi = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Нижние индексы здесь обозначают соответствующие компоненты вектора скорости v и тензора напряжений σ .

Запишем гиперболическую полную систему линейный дифференциальных уравнений в частных производных (2) в канонической матричной форме

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ -(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Здесь λ и μ — параметры Ламе, которые выражаются через заданные для конкретных сред скорости продольных и поперечных волн

$$\begin{cases} c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \\ c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \lambda = (c_p^2 - 2c_s^2)\rho \\ \mu = c_s^2\rho \end{cases} \quad (14)$$

Используя метод расщепления для системы, записанной в каноническом виде, получим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_x}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Заметим, что матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} можно диагонализовать

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{S}_1^{-1} \boldsymbol{\Lambda}_1 \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{B} &= \mathbf{S}_2^{-1} \boldsymbol{\Lambda}_2 \mathbf{S}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_1^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\lambda^2\rho}} & -\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\lambda^2\rho}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\mu\rho}} & -\frac{1}{\sqrt{\mu\rho}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\mu}{\lambda} + 1 & \frac{2\mu}{\lambda} + 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{\mu\rho}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{\mu\rho}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \sqrt{\frac{\lambda^2\rho}{4(\lambda+2\mu)}} & 0 & \frac{\lambda}{2\lambda+4\mu} & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{\lambda^2\rho}{4(\lambda+2\mu)}} & 0 & \frac{\lambda}{2\lambda+4\mu} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
S_2^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\mu\rho} & -\frac{1}{\mu\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{(\lambda+2\mu)\rho}} & -\frac{1}{\sqrt{(\lambda+2\mu)\rho}} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} & \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{\mu\rho}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{\mu\rho}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \sqrt{\frac{\lambda^2\rho}{4(\lambda+2\mu)}} & 0 & \frac{\lambda}{2\lambda+4\mu} & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{\lambda^2\rho}{4(\lambda+2\mu)}} & 0 & \frac{\lambda}{2\lambda+4\mu} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\Lambda_1 = \Lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_p \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Домножим первое уравнение системы (15) на S_1 слева, а второе — на S_2 также слева, при этом диагонализуя матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} .

$$\begin{cases} \mathbf{S}_1 \frac{\partial \varphi_x}{\partial t} + \mathbf{S}_1 (\mathbf{S}_1^{-1} \Lambda_1 \mathbf{S}_1) \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = 0 \\ \mathbf{S}_2 \frac{\partial \varphi_y}{\partial t} + \mathbf{S}_2 (\mathbf{S}_2^{-1} \Lambda_2 \mathbf{S}_2) \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Пользуясь тем, что матрицы \mathbf{S}_1 и \mathbf{S}_2 не зависят ни от времени, ни от координаты, вносим их в частные производные по времени и пространственным координатам

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{S}_1 \varphi_x) + \Lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{S}_1 \varphi_x) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{S}_2 \varphi_y) + \Lambda_2 \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{S}_2 \varphi_y) = 0 \end{cases}$$

Производя замену

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \mathbf{S}_1 \varphi_x \\
\omega_2 &= \mathbf{S}_2 \varphi_y
\end{aligned} \tag{16}$$

получаем систему

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega_1}{\partial t} + \Lambda_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial t} + \Lambda_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

2.3.2 Схема Куранта-Изаксона-Риса

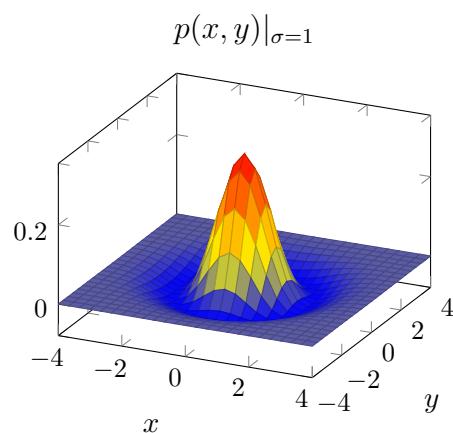
2.3.3 Схема Русанова

2.3.4 Контактные и граничные условия

2.4 Моделирование воздействия бура

Современные буры имеют довольно сложное устройство, зачастую сочетаая в себе ударные и врачащательные механизмы. В данной работе нас в первую очередь интересует волновая картина, возникающая при бурении в конкретной геологической модели (см. рис. 1). Поэтому, для простоты, воздействие бура мы будем представлять в качестве точечного источника давления в виде импульса Рикера частотой 30 Гц.

$$p(x, y) = \frac{1}{\pi\sigma^4} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2} \right) \right) \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2} \right) \quad (17)$$



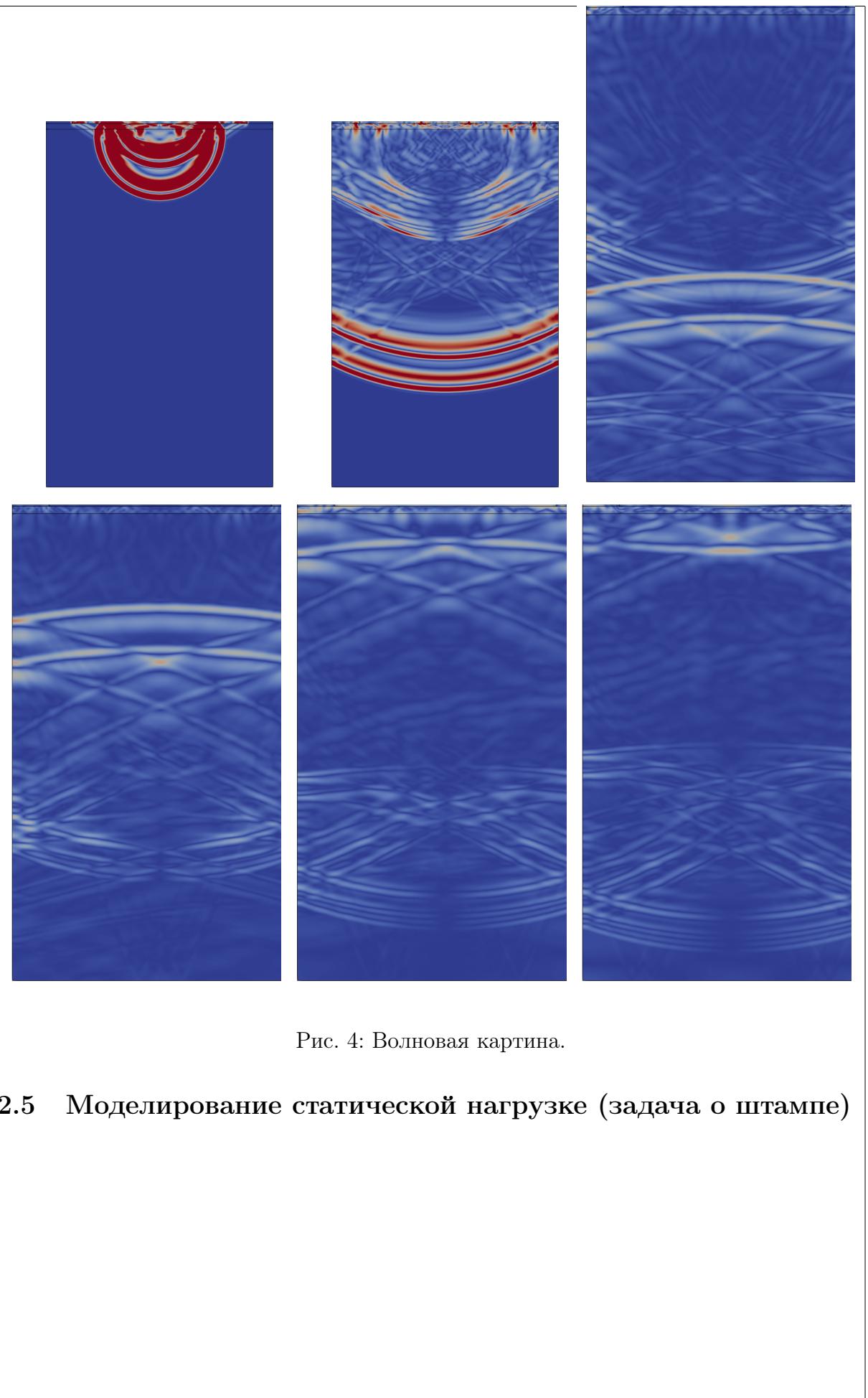


Рис. 4: Волновая картина.

2.5 Моделирование статической нагрузке (задача о штампе)

3. ЧТО-ТО

3.1 Конечно-разностный метод

Простейшим численным методом решения системы уравнений в частных производных (34) является метод конечных разностей. Применим явную двухточечную схему для дискретизации производных по времени и центральную двухточечную схему для дискретизации производных по пространственным переменным.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n}{\tau} \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{f_{i+1,j}^n - f_{i-1,j}^n}{2h_x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{f_{i,j+1}^n - f_{i,j-1}^n}{2h_y}\end{aligned}$$

Таким образом разностная схема (leapfrog scheme):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} = -\frac{1}{\rho} \frac{p_{i+1,j}^{n+1/2} - p_{i-1,j}^{n+1/2}}{2h_x} \\ \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\tau} = -\frac{1}{\rho} \frac{p_{i,j+1}^{n+1/2} - p_{i,j-1}^{n+1/2}}{2h_y} \\ \frac{p_{i,j}^{n+3/2} - p_{i,j}^{n+1/2}}{\tau} = -\rho c^2 \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{2h_x} + \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1}}{2h_y} \right) \end{array} \right. \quad (18)$$

3.2 Сеточно-характеристический метод

Более эффективным методом решения гиперболических систем является сеточно-характеристический метод.

Перепишем исходную систему (34) в матричном виде, используя ранее введённую переменную φ (36)

$$\varphi_t = \mathbf{A}\varphi_x + \mathbf{B}\varphi_y \quad (19)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\rho c^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} \\ 0 & -\rho c^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Для решения полученной системы воспользуемся методом расщепления: будем решать систему, делая шаг по x на первом полушаге по времени, и делая шаг по y на втором полушаге по времени:

$$\varphi_t = \mathbf{A}\varphi_x \quad (21)$$

$$\varphi_t = \mathbf{A}\varphi_x \quad (22)$$

Таким образом пересчёт на новой временной слой будет иметь вид

$$\varphi^{t+\Delta t/2} = S_x(\Delta t/2, \varphi^t) \quad (23)$$

$$\varphi^{t+\Delta t} = S_y(\Delta t/2, \varphi^{t+\Delta t/2}) \quad (24)$$

где Δt — величина шага по времени, S_x — шаг по x , S_y — шаг по y .

Заметим, что матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} раскладываются как произведения

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}_1 \Lambda_1 \mathbf{R}_1 \quad (25)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}_2 \Lambda_2 \mathbf{R}_2 \quad (26)$$

где $\mathbf{L}_i = \mathbf{R}_i^{-1}$ ($i \in \{1, 2\}$), а Λ_i — диагональные матрицы, составленные из собственных чисел матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} , т. е.

$$\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\rho c}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{\rho c}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$\mathbf{L}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho c}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\rho c}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad (29)$$

Так как, как было показано выше, матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} приводятся к диагональному виду, то поставленная задача является гиперболической.

Домножим слева уравнения (21) и (22) на R_1 и R_2 соответственно:

$$\mathbf{R}_1 \varphi_t = \mathbf{R}_1 \mathbf{A} \varphi_x = (\mathbf{R}_1 \mathbf{L}_1) \Lambda_1 \mathbf{R}_1 \varphi_x = \Lambda_1 (\mathbf{R}_1 \varphi_x) \quad (30)$$

$$\mathbf{R}_2 \varphi_t = \mathbf{R}_2 \mathbf{A} \varphi_x = (\mathbf{R}_2 \mathbf{L}_2) \Lambda_2 \mathbf{R}_2 \varphi_y = \Lambda_2 (\mathbf{R}_2 \varphi_y) \quad (31)$$

Делая замену $\omega^i = \mathbf{R}_i \varphi$, $i \in \{1, 2\}$, и учитывая, что матрицы Λ_i диагональные, приходим к двум системам из трёх скалярных независимых уравнений переноса:

$$\omega_t^1 = \Lambda_1 \omega_x^1 \quad (32)$$

$$\omega_t^2 = \Lambda_2 \omega_y^2 \quad (33)$$

Для решения этих скалярных уравнений будем использовать схему TVD второго порядка с ограничителем superbee.

4. Поглощающие граничные условия

При моделировании волновых процессов в геофизике зачастую приходится иметь дело с неограниченными физическими областями, в которых выделяются конечные расчётные под-области. Волны упругости, выходя за границу такой под-области, продолжает распространяться по неограниченной области, не оказывая влияния на процессы, происходящие внутри расчётной под-области. Для обеспечения такого поведения на практике, необходим ввод специальных условий на границах расчётных под-областей.

В данной главе будут рассмотрены поглощающие граничные условия Mur и PML для систем уравнений акустики и уравнений линейной теории упругости в двумерном случае.

4.1 Виды поглощающих граничных условий

Существует три основных подхода для реализации поглощающих граничных условий: (<http://129.67.184.129/trefethen/6all.pdf>) (Computational-Simulation-in-Architectural-and-Environmental-Acoustics-Methods-and-Applications-of-Wave-Based-Computation.pdf)

1. Введение новых пространственных переменных, которые переводят неограниченную рассматриваемую область в ограниченную. На этот подход можно посмотреть и с "физической" стороны, рассматривая дискретизацию неограниченного региона сеткой с бесконечно возрастающим по мере удаления от рассматриваемой под-области шагом сетки.
2. Анализ соотношений между падающей и отражённой волной и постановка граничного условия соответствующего минимизации отражённой части.
3. Добавление к рассматриваемой ограниченной области новых граничных слоёв, в которых дополнительно вводится диссипативный член, растущий по мере удаления от рассматриваемой области.

В данной работе мы будем обращаться к последним двум подходам, представленным соответственно граничными условиями Mur и PML. Начнём их рассмотрение

4.2 Уравнения акустики

Система уравнений акустики описывает распространение малых колебаний в идеальном газе и является следствием уравнений Эйлера. В двумерном случае она имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial t} = -\rho c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (34)$$

Здесь x и y — координаты в ортонормированной декартовой системе координат, $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$ — скорости, p — давление, ρ — плотность, c — скорость звука. Также можно ввести $\kappa = \rho c^2$ — объёмный модуль упругости.

Решение системы будем рассматривать в моменты времени $t \in [0, T]$ в прямоугольной области $\Gamma := \{(x, y) \mid (x, y) \in [0, X] \times [0, Y]\}$.

Для краткости записи введём векторную переменную

$$\varphi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \end{pmatrix} \quad (35)$$

Тогда начальное условие и граничные условия запишутся в следующем виде

$$\varphi(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma \quad (36)$$

$$\begin{cases} \varphi(0, y, t) = \varphi_L(y, t), & y \in [0, Y] \\ \varphi(X, y, t) = \varphi_R(y, t), & y \in [0, Y] \\ \varphi(x, 0, t) = \varphi_T(x, t), & x \in [0, X] \\ \varphi(x, Y, t) = \varphi_B(x, t), & x \in [0, X] \end{cases} \quad (37)$$

Здесь и далее решение дискретной задачи будем рассматривать на регулярной прямоугольной сетке с размером шага h_x и h_y соответственно. Для простоты будем считать, что физические размеры рассматриваемой прямоугольной области нацело делятся на шаг сетки: $X = Nh_x$, $Y = Mh_y$, $N, M \in \mathbb{N}$. Таким образом разностная сетка определяется как $G := \{(x_i, y_j) \mid x_i = ih_x, i \in \overline{0, N}, y_j = jh_y, j \in \overline{0, M}\}$. Шаг по времени будем считать постоянным и равным τ .

4.3 Поглощающие граничное условие MUR

Рассмотрим одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (38)$$

Разложим его на два уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (39)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (40)$$

Уравнение 39 соответствует волне, идущей влево по оси x , а уравнение 40 — идущей вправо.

Пусть рассматриваемая область представляет собой отрезок $\Gamma := [0, Nh_x]$. Поставим поглощающее граничное условие на правом конце. Для этого необходимо, чтобы отсутствовала отражённая волна, распространяющаяся влево. В таком случае, на правой границе должно выполняться только уравнение 40, а не полное волновое уравнение 38.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (41)$$

Для того, чтобы при дискретизации производная по времени и производная по пространственной координате были вычислены в одной точке, будем усреднять разностные производные в моменты времени n и $n+1$, получая таким образом решение в точке $x = (N - 1/2)h_x$, $t = (n + 1/2)\tau$.

$$\frac{1}{2} \left(\frac{u_N^n - u_{N-1}^n}{h_x} + \frac{u_N^{n+1} - u_{N-1}^n}{h_y} \right) = -\frac{1}{c} \frac{1}{2} \left(\frac{u_N^{n+1} - u_N^n}{\tau} + \frac{u_{N-1}^{n+1} + u_{N-1}^n}{\tau} \right) \quad (42)$$

Обозначая $r = c \frac{\tau}{h_x}$, получаем явное выражение для граничного условия

$$u_N^{n+1} = u_{N-1}^n + \frac{r-1}{r+1} (u^{n+1} N - 1 - u_N^n) \quad (43)$$

В одномерном случае поглощающее условие Mir является точным. Распространить его можно и на двухмерный случай

$$u_{N,j}^{n+1} = u_{N-1,j}^n + \frac{r-1}{r+1} (u^{n+1} N - 1, j - u_{N,j}^n) \quad (44)$$

Однако в этом случае, если волна падает на границу не строго нормально, то будут возникать паразитные отражённые волны.

4.4 Beringer PML

Поглощающее граничное условие *perfectly matched layer* (PML) впервые было введено Берингером для системы уравнений Максвелла, описывающих распространение электромагнитных волн. Однако оказывается, что, произведя необходимые замены переменных, эту систему уравнений можно свести к системе уравнений акустики 34.

Для реализации затухания в PML слое добавляются диссипативные слагаемые $c_i \sigma_x(x, y)$ и $c_i \sigma_y(x, y)$, где в качестве функций $\sigma_{x/y}$ обычно выбирают

$$\sigma_x = \left(\frac{d_x}{w_x} \right)^k \Sigma_x \quad (45)$$

$$\sigma_y = \left(\frac{d_y}{w_y} \right)^k \Sigma_y \quad (46)$$

здесь $d_{x/y}(x, y)$ — глубина проникновения в PML слой, имеющий глубину $w_{x/y}$, k — степень скорости роста, $\Sigma_{x/y}$ — максимальные значения диссипативных слагаемых².

²Глубина проникновения в PML слой очевидно меньше ширины слоя, а значит множитель перед $\Sigma_{x/y}$ лежит в пределах от 0 до 1. Значит $\sigma_{x/y}$ лежит в пределах от 0 до $\Sigma_{x/y}$.

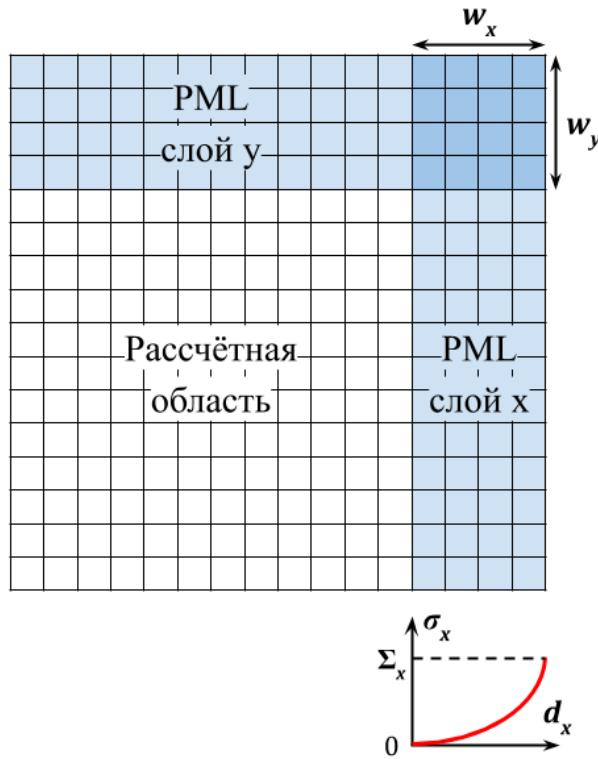


Рис. 5: Схема правого и верхнего PML слоёв.

Значения параметров k и $\Sigma_{x,y}$ обычно подбираются под конкретную задачу из эмпирических соображений для наиболее эффективной реализации поглощающего граничного условия.

В случае применения PML на всех четырёх границах прямоугольной области Γ (i, j — номер соответствующего узла; N, M — общее количество узлов по осям абсцисс и ординат соответственно):

$$d_x = h_x \cdot \min\{i, N - i\} \quad (47)$$

$$d_y = h_y \cdot \min\{j, M - j\} \quad (48)$$

Система уравнений акустики с диссипативными членами имеет вид [2]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c\sigma_x u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + c\sigma_y u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial t} + c(\sigma_x + \sigma_y)p = -\rho c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \rho c^2 \sigma_x \frac{\partial Q}{\partial y} - \rho c^2 \sigma_y \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = cv \\ \frac{\partial P}{\partial t} = cu \end{cases} \quad (49)$$

где Q и P — дополнительные переменные, определяющиеся из последних двух уравнений.

4.5 Split-field PML

Другим классическим вариантом граничного условия PML является так называемый *split-field PML*

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sigma_x(x) \right) p_1 + \kappa \frac{\partial}{\partial x} v_x = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sigma_y(y) \right) p_2 + \kappa \frac{\partial}{\partial y} v_y = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sigma_x(x) \right) v_x + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sigma_y(y) \right) v_y + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} p = 0 \\ p = p_1 + p_2 \end{array} \right. \quad (50)$$

где, напомним, $\kappa = \rho c^2$ — объёмный модуль упругости. Функции $\sigma_{x/y}$ выбираются аналогично случаю Beringer PML.

В системе 50 давление p разделяется на компоненты p_1 и p_2 . В начальный момент времени они определяются как половины общего значения давления p : $p_1(x, y, t = 0) = p_2(x, y, t = 0) = \frac{p(x, y)}{2}$. В дальнейшем p_1 и p_2 определяются из численных уравнений, а p вычисляется после каждой итерации, как сумма p_1 и p_2 .

4.6 Решение PML-систем методом конечных разностей

Аналогично разностной схеме (18) для системы уравнений акустики, заменяя аналитические производные на разностные, получим системы разностных уравнений для Beringer PML 49

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + c \sigma_{x_i} u^n = - \frac{1}{\rho} \frac{p_{i+1/2,j}^{n+1/2} - p_{i-1/2,j}^{n+1/2}}{\Delta x} \\ \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} + c \sigma_{y_j} v^n = - \frac{1}{\rho} \frac{p_{i,j+1}^{n+1/2} - p_{i,j-1}^{n+1/2}}{2 \Delta y} \\ \frac{Q^{n+1} - Q^n}{\Delta t} = c v_{i,j}^n \\ \frac{P^{n+1} - P^n}{\Delta t} = c u_{i,j}^n \\ \frac{p_{i,j}^{n+3/2} - p_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t} + c (\sigma_{x_i} + \sigma_{y_j}) p^{n+1/2} = \\ = - \rho c^2 \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{2 \Delta x} + \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1}}{2 \Delta y} - \sigma_{x_i} \frac{Q_{i,j+1}^{n+1} - Q_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} - \sigma_{y_j} \frac{P_{i+1,j}^{n+1} - P_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} \right) \end{array} \right. \quad (51)$$

и для split-field PML 50

$$\left\{ (p_1)_{i,j}^{n+1} p_{i,j}^{n+1} = (p_1)_{i,j}^{n+1} + (p_2)_{i,j}^{n+1} \right. \quad (52)$$

4.7 Решение PML-систем сеточно-характеристическим методом

Сеточно-характеристический метод, рассмотренный в первой главе, является более эффективным по сравнению с простым конечно-разностным методом. Появляется естественный вопрос о применимости этого метода для решения систем уравнений Beringer PML (49) и split-field pml (50). Покажем это.

4.7.1 Beringer PML

Рассмотрим систему уравнений, реализующую затухающее граничное условие типа PML (49), и произведём замену:

$$\varphi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \\ Q \\ P \end{pmatrix} \quad (53)$$

Тогда система принимает вид

$$\varphi_t = \mathbf{A}\varphi_x + \mathbf{B}\varphi_y + \mathbf{S}\varphi \quad (54)$$

Где матрицы \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{S} , имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\rho c^2 & 0 & 0 & 0 & -\rho c^2 \sigma_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & -\rho c^2 & 0 & -\rho c^2 \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -c\sigma_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c\sigma_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c(\sigma_x + \sigma_y) & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Эти матрицы можно диагонализовать

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}_1 \Lambda_1 \mathbf{R}_1$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}_2 \Lambda_2 \mathbf{R}_2$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{L}_3 \Lambda_3 \mathbf{R}_3$$

$$\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_y & 0 & \frac{1}{c\rho} & -\frac{1}{c\rho} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c\rho}{2} & \frac{1}{2} & \frac{c\rho\sigma_y}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{c\rho}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{c\rho\sigma_y}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L}_2 = \begin{pmatrix} -\sigma_x & 0 & 0 & \frac{1}{c\rho} & -\frac{1}{c\rho} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{c\rho}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{c\rho\sigma_x}{2} \\ -\frac{c\rho}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{c\rho\sigma_x}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_3 = \begin{pmatrix} \sigma_x^{-1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sigma_y^{-1} & 0 & 1 & 0 \\ -\sigma_x^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_y^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c\sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c\sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c(\sigma_x + \sigma_y) \end{pmatrix}$$

Полученное векторное уравнение в частных производных можно расщепить по физическим процессам для каждой компоненты аналогично уравнению переноса-диффузии с $\mu = 0$ [4].

Будем решать систему, делая шаг по x на первой трети шага по времени, делая шаг по y на второй, и решая неоднородное уравнение на третьей части шага по времени:

$$\begin{aligned} \varphi_t &= \mathbf{A}\varphi_x \\ \varphi_t &= \mathbf{B}\varphi_y \\ \varphi_t &= \mathbf{S}\varphi \end{aligned}$$

Домножая i -ое уравнение слева на \mathbf{R}_i

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1\varphi_t &= \mathbf{R}_1(\mathbf{L}_1\Lambda_1\mathbf{R}_1)\varphi_x \\ \mathbf{R}_2\varphi_t &= \mathbf{R}_2(\mathbf{L}_2\Lambda_2\mathbf{R}_2)\varphi_y \\ \mathbf{R}_3\varphi_t &= \mathbf{R}_3(\mathbf{L}_3\Lambda_3\mathbf{R}_3)\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1\varphi_t &= \Lambda_1\mathbf{R}_1\varphi_x \\ \mathbf{R}_2\varphi_t &= \Lambda_2\mathbf{R}_2\varphi_y \\ \mathbf{R}_3\varphi_t &= \Lambda_3\mathbf{R}_3\varphi \end{aligned}$$

Делая замену $\omega^i = \mathbf{R}_i\varphi$, $i \in \{1, 2, 3\}$, и учитывая, что матрицы Λ_i диагональные,

приходим к трём системам из трёх скалярных независимых уравнений:

$$\begin{cases} \omega_t^1 = \Lambda_1 \omega_x^1 \\ \omega_t^2 = \Lambda_2 \omega_y^2 \\ \omega_t^3 = \Lambda_3 \omega^3 \end{cases} \quad (55)$$

Первые две системы представляют собой независимые скалярные уравнения переноса. Для их численного решения мы воспользуемся TVD-схемой второго порядка с ограничителем superbee.

Третья система представляет собой 5 независимых скалярных уравнений с разделяемыми переменными, которые очевидно решаются аналитически. Обозначая номер уравнения нижним индексом l , получаем

$$\begin{cases} (\omega_l^3)_t = 0 & l = 1, 2 \\ (\omega_l^3)_t = [\Lambda_3]_{ll} \omega_l^3 & l = 3, 4, 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_l^3(t) = \omega_l^3(t=0) & l = 1, 2 \\ \omega_l^3(t) = \omega_l^3(t=0) \cdot \exp([\Lambda_3]_{ll} t) & l = 3, 4, 5 \end{cases}$$

Таким образом построен сеточно-характеристический метод решения уравнения (49).

4.7.2 Splid-Field PML

Теперь построим сеточно-характеристический метод решения системы уравнений split-field PML (50)

На этот раз произведём замену

$$\varphi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (56)$$

Тогда система принимает вид

$$\varphi_t = \mathbf{A}\varphi_x + \mathbf{B}\varphi_y - \mathbf{C}\varphi \quad (57)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_y \end{pmatrix} \quad (58)$$

Опять замечаем, что матрицы можно диагонализовать

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}_1 \Lambda_1 \mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{\kappa\rho}} & \frac{1}{\sqrt{\kappa\rho}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{\kappa}{\rho}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{\kappa\rho}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{\kappa\rho}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}_2 \Lambda_2 \mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{\kappa\rho}} & \frac{1}{\sqrt{\kappa\rho}} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{\kappa}{\rho}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{\kappa\rho}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{\kappa\rho}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Опять воспользуемся расщеплением по физическим процессам для каждой компоненты полученного векторного уравнение в частных [4]. Тогда, расщепляя систему и домножая на $\mathbf{L}_i^{-1} = \mathbf{R}_i$ слева, получим

$$\begin{cases} \mathbf{R}_1 \varphi_t = \Lambda_1 \mathbf{R}_1 \varphi_x \\ \mathbf{R}_2 \varphi_t = \Lambda_2 \mathbf{R}_2 \varphi_y \\ \varphi_t = -\mathbf{C} \varphi \end{cases} \quad (59)$$

Производя замену переменных $\omega_i = \mathbf{R}_i \varphi$:

$$\begin{cases} \omega_t^1 = \Lambda_1 \omega_x^1 \\ \omega_t^2 = \Lambda_2 \omega_y^2 \\ \varphi_t = -\mathbf{C} \varphi \end{cases} \quad (60)$$

Решение этой системы аналогично уже разобранному решению системы (55). Таким образом система уравнений split-field PML (50) также решается сеточно-характеристическим методом.

4.8 Методы оценки результатов

Для оценки эффективности PML и сравнения PML для конечно-разностных и сеточно-характеристических методов предлагается строить график зависимости нормализованного давления от времени, как это делается в [1]. Там же приводится способ получения аналитического решения посредством обратного преобразования Фурье.

Другой метод оценки идеального затухания состоит в моделировании на в несколько раз большей сетке, и использовании только его центральной части. Таким образом, при выборе достаточно большой сетки и достаточно малого временного промежутка, начальная волна пройдёт полностью через мнимые границы без отражения, а реальная отражённая волна не успеет вернуться, и в итоговом восприятии мы получим идеальное поглощение.

Список литературы

- [1] Q. Liu and J. Tao, *The perfectly matched layer for acoustic waves in absorptive media*, Journal of The Acoustical Society of America 102 (1997) 2072-2082.
- [2] E. Turkel and A. Yefet, *Absorbing PML boundary layers for wave-like equations*, Applied Numerical Mathematics 27 (1998) 533-557.
- [3] И. Петров и А. Лобанов, *Лекции по вычислительной математике: Учебное пособие*, 2017.
- [4] Марчук: Методы расщепления для решения нестационарных задач, §3, стр. 848)
[уравнение (27) выше == уравнение 3.1 стр.846 из статьи].