

MAT311 SAYISAL ANALİZ TEKNİKLERİ  
ÇALIŞMA SORULARI

1.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (8 + 4\sin x) dx$  integralini
  - a. trapez kuralının tekli uygulamasını kullanarak
  - b. Simpson'un 3/8 kuralının tekli uygulamasını kullanarak hesaplayınız.
2.  $\int_0^3 (1 - e^{-x}) dx$  integralini trapez kuralının çoklu uygulamasını kullanarak  $n = 4$  ve  $n = 6$  için çözünüz.
3.  $\int_{-2}^4 (1 - x - 4x^3 + x^5) dx$  integralini Simpson'un 1/3 kuralının çoklu uygulamasını kullanarak hesaplayınız.
4. Aşağıda tabloda verilen değerleri kullanarak Newton'un bölünmüş fark interpolasyon polinomunu elde ediniz.

|        |    |   |   |   |
|--------|----|---|---|---|
| $x$    | 2  | 1 | 4 | 5 |
| $f(x)$ | -1 | 1 | 6 | 8 |

5. Aşağıda doğrusal denklem sistemi verilmiştir.

$$3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11$$

$$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 4$$

Bu sistemin katsayılar matrisinin LU-ayrışımı aşağıdaki gibidir.

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0.66667 & 0.77778 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } [U] = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2.0000 \\ 0 & -6 & 6.0000 \\ 0 & 0 & -4.33333 \end{bmatrix}$$

$[A] = [L][U]$  ayrıştırmasını kullanarak  $[A]\{X\} = \{B\}$  denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

6. Bir tür bilgisayarın güç kaynağından geçen akım ( $i$ ), zamana ( $t$ ) bağlı olarak büyük bir hassasiyetle ölçülmüştür. Sonuçlar aşağıda verilmiştir:

|                     |        |        |        |        |
|---------------------|--------|--------|--------|--------|
| $t \text{ (sn)}$    | 0.1250 | 0.2500 | 0.3750 | 0.5000 |
| $i \text{ (Amper)}$ | 6.2402 | 7.7880 | 4.8599 | 0.0000 |

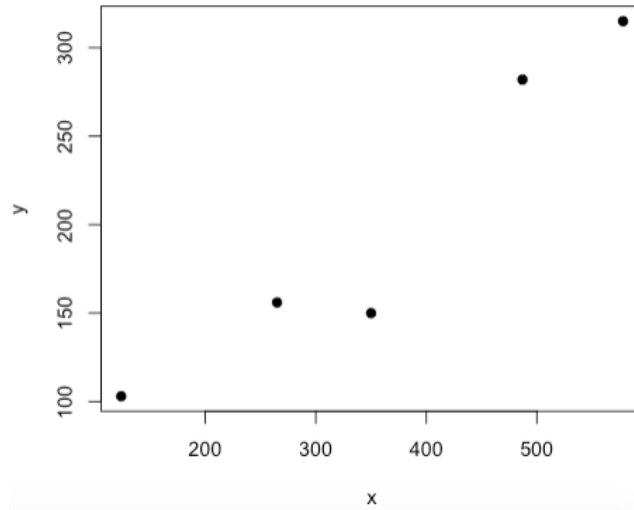
$t = 0.22$  sn'deki güç kaynağından geçen akımın yaklaşık değerini üçüncü dereceden bir Newton interpolasyon polinomunu kullanarak hesaplayınız (Hesaplamalarınızda veri ile aynı anlamlı basamak sayısını kullanınız)

7.  $\int_0^1 x^4 e^{x-1} dx$  integralinin yaklaşık değerini 7 nokta kullanarak Simpson Kuralı ile çözünüz. İntegralin gerçek değeri 0.17089 olduğuna göre gerçek bağıl yüzde hatayı hesaplayınız (Hesaplamalarınızda noktadan sonra 5 basamak ve yuvarlama kullanınız).

8. Bir araştırmacı tıbbi görüntüleme alanında kullanılan yazılımların kalitesi üzerine bir çalışma yapmaktadır. Araştırmacının önemli değişkenlerinden ikisi kod satır sayısı ve döngüsel (cyclomatic) karmaşıklık metriğidir. Döngüsel karmaşıklık değerinin kod satır sayısını etkilediği düşünülmektedir. Kullanılan yazılımlardan rasgele seçilen 5 tanesinden bu iki değişkene ait değerler elde etmiştir. Buna ait veriler aşağıda verilmiştir.

|                      |     |     |     |     |     |
|----------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| Döngüsel Karmaşıklık | 350 | 487 | 124 | 265 | 578 |
| Kod Satır Sayısı     | 150 | 282 | 103 | 156 | 315 |

a) Aşağıda iki değişkene ilişkin saçılım grafiği (scatter plot) verilmiştir. Verilen iki değişkenden hangisi bağımlı hangisi bağımsız değişkendir? Belirtiniz. Değişkenler arasında ne tür bir ilişki vardır? Yorumlayınız



b) Döngüsel karmaşıklık ve kod satır sayısı değerlerine en küçük kareler yöntemini (least square method) kullanarak düz bir doğru uydurunuz. Denklemi yazınız. Elde ettiğiniz  $a_1$  katsayısını yorumlayınız.

c) Döngüsel karmaşıklık değeri 500 olduğunda kod satır sayısı tahmini ne olur?

d) Aşağıda bu problem için R programlama dilinde elde edilmiş bir çıktı yer almaktadır. Bu sonuca göre modelin belirtme (determination) katsayısı nedir? İki değişken arasındaki korelasyon katsayısı nedir? Değerleri nasıl yorumlarsınız?

```
Residual standard error: 30.78 on 3 degrees of freedom  
Multiple R-squared:  0.9159,    Adjusted R-squared:  0.8878  
F-statistic: 32.66 on 1 and 3 DF,  p-value: 0.01063
```

9.  $\int_0^{0.6} e^{-x^2} dx$  integralinin yaklaşık değerini 7 nokta kullanarak Simpson'un 1/3 kuralı ile elde ediniz.

### SORU 1:

$$\int_0^{\pi/2} (8+4\sin x) dx$$

a) Trapez kuralı (Tekli Uygulama)

$$x_0=0 \quad x_1=\pi/2 \quad \begin{array}{c} | \text{---} \text{---} \text{---} | \\ 0 \quad \quad \quad \pi/2 \end{array} \quad n=1$$

$$I = (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2} = \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) \frac{8+12}{2} \cong \boxed{15.708}$$

$$x_0=0 \Rightarrow f(x_0)=f(a)=f(0)=8$$

$$x_1=\pi/2 \Rightarrow f(x_1)=f(b)=f(\pi/2)=12$$

$$\text{Gerçek değer} = 16.56637$$

b) Simpson'un  $\frac{3}{8}$  kuralı

$$I = \int_a^b f(x) dx \cong \int_a^b f_3(x) dx$$

$n$ : Aralık sayısı tek sayı

Simpson'un  $\frac{11}{3}$  kuralı (Çoklu Uygulaması)

$$I = \int_a^b f(x) dx \cong \int_a^b f_2(x) dx$$

$n$ : Aralık sayısı çift sayı

$$n=3 \quad \begin{array}{c} | \text{---} | \text{---} | \text{---} | \text{---} | \\ 0 \quad \quad \pi/6 \quad \quad \pi/3 \quad \quad \pi/2 \end{array}$$

$$h = \frac{b-a}{3}$$

$$h = \frac{\pi}{6}$$

$$x_0=0 \Rightarrow f(x_0)=8$$

$$x_1=\frac{\pi}{6} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right)=10$$

$$x_2=\frac{\pi}{3} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right)=11.46$$

$$x_3=\frac{\pi}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)=12$$

$$I \cong (b-a) \frac{f(x_0)+3(f(x_1)+f(x_2))+f(x_3)}{8}$$

$$\cong \left( \frac{\pi}{2} \right) \frac{8+3(10+11.46)+12}{8} = 16.57$$

$$Et = 16.56637 - 16.57$$

## SORU 2:

$$\int_0^3 (1 - e^{-x}) dx$$

a)  $n=4$

$a=0$   $b=3$

$x_0$   $x_1$   $x_2$   $x_3$   $x_4$

$0$   $0.75$   $1.5$   $2.25$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{4}$$

$$x_0=0 \Rightarrow f(0)=0$$

$$x_1=0.75 \Rightarrow f(0.75) = 1 - e^{-0.75} = 0.5276$$

$$x_2=1.5 \Rightarrow f(1.5) = 1 - e^{-1.5} = 0.7769$$

$$x_3=2.25 \Rightarrow f(2.25) = 1 - e^{-2.25} = 0.8946$$

$$x_4=3 \Rightarrow f(3) = 0.9502$$

$$I \cong (3-0) \frac{0 + [0.5276 + 0.7769 + 0.8946] + 0.9502}{2(4)}$$

$$\cong 2.005658$$

$$n=6 \text{ ise, } h = \frac{b-a}{6} = \frac{3}{6} = 0.5$$

$0$   $0.5$   $1.0$   $1.5$   $2$   $2.5$   $3.0$

$x_0$   $x_1$   $x_2$   $x_3$   $x_4$   $x_5$   $x_6$

### SORU 3:

$$\int_{-2}^4 (1-x-4x^3+x^5) dx$$

$$n=4 \text{ olsun } h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-(-2)}{4} = 1.5$$

|       |       |       |       |       |     |
|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| $a$   |       |       |       |       | $b$ |
| -2    | -0.5  | 1     | 2.5   | 4     |     |
| $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |     |

$$f(x_0) = f(-2) = 3$$

$$f(x_1) = f(-0.5) = 1.97$$

$$f(x_2) = f(1) = -3$$

$$f(x_3) = f(2.5) = 33.66$$

$$f(x_4) = f(4) = 765$$

$$I \approx (4-(-2)) \frac{3 + 4[1.97 + 33.66] + 2(-3) + 765}{3 \cdot 4}$$

$$\approx 452.25$$

\*  $E_a$ 'yı hesaplayın

\*  $n=6$  için hesaplayabilirsiniz.

### SORU 4:

|        | $x_0$    | $x_1$    | $x_2$    | $x_3$    |
|--------|----------|----------|----------|----------|
| $x$    | 2        | 1        | 4        | 5        |
| $f(x)$ | -1       | 1        | 6        | 8        |
|        | $f(x_0)$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | $f(x_3)$ |

Birinci derece sonlu bölünmüş farklar;

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1 - (-1)}{1 - 2} = -2$$

$$f[x_2, x_1] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 1}{4 - 1} = \frac{5}{3}$$

$$f[x_3, x_2] = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{8 - 6}{5 - 4} = 2$$

İkinci Dereceden Bölünmüş Farklar:

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{5}{3} + 2}{4 - 2} = \frac{11}{6} \quad \text{b}_2$$

$$f[x_3, x_2, x_1] = \frac{f[x_3, x_2] - f[x_2, x_1]}{x_3 - x_1} = \frac{2 - \frac{5}{3}}{5 - 1} = \frac{1}{12}$$

Üçüncü Dereceden Bölünmüş Farklar:

$$f[x_3, x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_3, x_2, x_1] - f[x_2, x_1, x_0]}{x_3 - x_0} = \frac{\frac{1}{12} - \frac{11}{6}}{5 - 2} = -\frac{7}{12} \quad \text{b}_3$$

SORU 5:

İlk aşama

$$[L] \{D\} = \{B\} \Rightarrow D \text{ vektörü elde edilir.}$$

$$[A] \{x\} = \{B\} \Rightarrow \{x\} = [A]^{-1} \{B\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0.66667 & 0.77778 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 11 \\ 4 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} d_1 &= 11 \\ d_1 + d_2 &= 11 \Rightarrow d_2 = 0 \\ 0.66667 d_1 + 0.77778 d_2 + d_3 &= 4 \\ d_3 &= -3.33337 \end{aligned}$$

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 0 \\ -3.33337 \end{Bmatrix}$$

İkinci Aşama:

$$[U] \{x\} = \{D\}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & -4.33333 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 0 \\ -3.33337 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_3 &= \frac{-3.33337}{-4.33333} = 0.769240 \\ -6x_2 + 6x_3 &= 0 \Rightarrow x_3 = x_2 = 0.769240 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 11 \Rightarrow x_1 = 3.15385 \end{aligned}$$

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} 3.15385 \\ 0.769240 \\ 0.769240 \end{Bmatrix}$$

## SORU 6:

| $x$<br>$t(s)$ | 0.1250   | 0.2500   | 0.3750   | 0.5000   |
|---------------|----------|----------|----------|----------|
| $i(Amp)$      | 6.2402   | 7.7880   | 4.8599   | 0.0000   |
|               | $f(x_0)$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | $f(x_3)$ |

Birinci Derece Sonlu bölünmüş form:

$$f[x_1, x_0] = 12.3824 \Rightarrow b_1$$

$$f[x_2, x_1] = -23.4248$$

$$f[x_3, x_2] = -38.8792$$

2. derece

$$f[x_2, x_1, x_0] = -143.2288 \Rightarrow b_2$$

$$f[x_3, x_2, x_1] = -61.8176$$

3. derece

$$f[x_3, x_2, x_1, x_0] = 217.0965 \Rightarrow b_3$$

$$f_3(x) = 6.2402 + 12.3824(x - 0.1250) - 143.2288(x - 0.1250)(x - 0.2500) + 217.0965(x - 0.1250)$$

$$(x - 0.2500)(x - 0.3750)$$

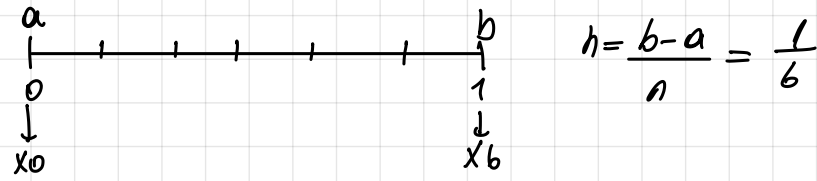
$$f_3(0.22) \approx 7.9206$$



### SORU 7:

$$\int_0^1 \underbrace{x^4 e^{x-1}}_{f(x)} dx$$

7 veri noktası,  $n=6$  aralık  $\rightarrow$  çift sayı  $\Rightarrow$  Simpson'un 1/3 kuralı



$$x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = 0$$

$$x_1 = 0.16667 \Rightarrow f(x_1) = 0.00034$$

$$x_2 = 0.33334 \Rightarrow f(x_2) = 0.00634$$

$$x_3 = 0.50001 \Rightarrow f(x_3) = 0.03791$$

$$x_4 = 0.66668 \Rightarrow f(x_4) = 0.14155$$

$$x_5 = 0.83335 \Rightarrow f(x_5) = 0.40826$$

$$x_6 = 1 \Rightarrow f(x_6) = 1$$

$$I \cong (b-a) \frac{f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(x_i) + f(x_1)}{3(n)}$$

$$\cong 1 \cdot \frac{0 + 4 [0.00034 + 0.03791 + 0.40826] + 2 [0.00634 + 0.14155] + 1}{3 \cdot 6} = 0.1712$$

$$|E_t| = \frac{|0.17089 - 0.1712|}{0.17089} \times 100 = 7.0.18$$

### SORU 8:

- a)  $X$ : Döngüsel karmaşıklık Değeri (Bağımsız değişken)  
 $Y$ : Kod Satır Sayısı (Bağımlı değişken)

b)  $\sum x = 1804$   
 $\sum y = 1006$   
 $\sum xy = 426016$   
 $\sum x^2 = 779354$   
 $(\sum x)^2 = 3254416$

$$a_1 = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$= \frac{5 \cdot (426016) - (1804)(1006)}{5(779354) - 3254416} = 0.49078$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x} = 201.2 - (0.49078)(360.8) = 24.1266$$

$$\hat{y} = 24.1266 + 0.49078x$$

$\downarrow$   
Kod sayısı

$\downarrow$   
Döngüsel karmaşıklık değeri

$$c) \hat{y} = 24.1266 + 0.49078(500) = 269.5166 \approx 270$$

$$d) r^2 = \%91.59 \Rightarrow r = \sqrt{r^2} = \sqrt{0.9159} = 0.9570$$

iki değişken arasındaki doğrusal ilişkinin miktarı %95.7'dir

X değişkenindeki değişim, Y değişkenindeki değişimin %91.6'sını açıklamaktadır.

Yani bu model iki değişken arasındaki doğrusal ilişkinin %91.6'sını açıkla-  
maktadır.

SORU 9:

$$\int_0^{0.6} e^{-x^2} dx \quad f(x) = e^{-x^2}$$

7 veri noktası  $\Rightarrow n=6$

|       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0     | 0.1   | 0.2   | 0.3   | 0.4   | 0.5   | 0.6   |
| $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.6}{6} = 0.1$$

|       |   |        |        |        |        |        |        |
|-------|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| x     | 0 | 0.1    | 0.2    | 0.3    | 0.4    | 0.5    | 0.6    |
| $x^2$ | 0 | 0.01   | 0.04   | 0.09   | 0.16   | 0.25   | 0.36   |
| f(x)  | 1 | 0.9900 | 0.9608 | 0.9129 | 0.8521 | 0.7788 | 0.6977 |

$$I \approx 0.5351$$