

Линейная алгебра.
Коллоквиум 2 семестр.
Основано на реальных событиях.
v0.2

26 мая 2017

Ченжлоги

v0.0 (20.05.2017) — исходное: добавлены 1–10 вопросы (спасибо Соне, Даше, Лизе, Наташе, Алёне)

v0.1 (21.05.2017) — поправил 1, 2, 6 (спасибо Борису, Соне, Александру Г. (Ц.))

v0.2 (22.05.2017) — добавил 11–15. Поправил 2, 7 (спасибо Александру Г. (Ц.), Борису, Наташе)

Доказательства

1. Теорема о связи размерности суммы двух подпространств с размерностью их пересечения

Теорема. $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W)$

Доказательство. Пусть $p = \dim(U \cap W)$, $k = \dim U$, $m = \dim W$. Выберем базис $a = \{a_1, \dots, a_p\}$ в пересечении. Его можно дополнить до базиса U и до базиса W . Значит, $\exists b = \{b_1, \dots, b_{k-p}\}$ такой, что $a \cup b$ — базис в U и $\exists c = \{c_1, \dots, c_{m-p}\}$ такой, что $a \cup c$ — базис в W .

Докажем, что $a \cup b \cup c$ — базис в $U + W$.

1. Докажем, что $U + W$ порождается множеством $a \cup b \cup c$.

$$\left. \begin{array}{l} v \in U + W \Rightarrow \exists u \in U, w \in W : v = u + w \\ u \in U = \langle a \cup b \rangle \subset \langle a \cup b \cup c \rangle \\ w \in W = \langle a \cup c \rangle \subset \langle a \cup b \cup c \rangle \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{l} v = u + w \in \langle a \cup b \cup c \rangle \Rightarrow \\ \Rightarrow U + W = \langle a \cup b \cup c \rangle \end{array}$$

2. Докажем линейную независимость векторов из $a \cup b \cup c$.

Пусть скаляры $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_{k-p}, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-p}$ таковы, что

$$\underbrace{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_p a_p}_x + \underbrace{\beta_1 b_1 + \dots + \beta_{k-p} b_{k-p}}_y + \underbrace{\gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_{m-p} c_{m-p}}_z = 0$$
$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ z = -x - y \\ z \in W \\ -x - y \in U \cap W \end{array} \right| \Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in F : z = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p$$

Тогда $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p - \gamma_1 c_1 - \dots - \gamma_{m-p} c_{m-p} = 0$. Но $a \cup c$ — базис W . Следовательно, $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = \gamma_1 = \dots = \gamma_{m-p} = 0$. Но тогда $0 = x + y = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_p a_p + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{k-p} b_{k-p}$. Но $a \cup b$ — базис $U \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_p = \beta_1 = \dots = \beta_{k-p} = 0$. Итого, все коэффициенты равны нулю и линейная независимость тем самым доказана. Т.е. $a \cup b \cup c$ — базис $U + W$.

$$\dim(U + W) = |a \cup b \cup c| = |a| + |b| + |c| = p + k - p + m - p = k + m - p = \\ = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

2. Теорема о пяти эквивалентных условиях, определяющих набор линейно независимых подпространств векторного пространства

Определение. Сумма называется прямой, если из условия $u_1 + \dots + u_k = 0$ следует, что $u_1 = \dots = u_k = 0$. *Обозначение:* $U_1 \oplus \dots \oplus U_k$.

В этом случае, подпространства U_1, \dots, U_k называют линейно независимыми.

1. Если $u_1 + \dots + u_k = 0 \Rightarrow u_1 = \dots = u_k = 0$ (U_1, \dots, U_k — линейно независимы)
2. Любой u единственным образом представим в виде $u = u_1 + \dots + u_k$, где $u_i \in U_i$
3. Если e_i — базис в U_i , то $e_1 \cup \dots \cup e_k$ — базис $U_1 + \dots + U_k$
4. $\dim(U_1 + \dots + U_k) = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$
5. $U_i \cap (U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k) = \{0\}$

Доказательство.

(1 \Rightarrow 2) Пусть $u_1 + \dots + u_k = u'_1 + \dots + u'_k$, где $u_i, u'_i \in U_i$. Тогда

$$\underbrace{(u_1 - u'_1)}_{\in U_1} + \dots + \underbrace{(u_k - u'_k)}_{\in U_k} = \vec{0} \Rightarrow \\ \Rightarrow (u_1 - u'_1) = \dots = (u_k - u'_k) = \vec{0} \Rightarrow \\ \Rightarrow u_1 = u'_1, \dots, u_k = u'_k.$$

(2 \Rightarrow 3) Пусть $u \in U_1 + \dots + U_k$. Тогда u единственно представим в виде $u = u_1 + \dots + u_k$, где $u_i \in U_i$.

Каждый u_i единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов из $e_1 \cup \dots \cup e_k \Rightarrow e_1 \cup \dots \cup e_k$ — базис.

(3 \Rightarrow 4) Пусть $e_1 \cup \dots \cup e_k$ — базис $U_1 + \dots + U_k$. Тогда

$$\dim(U_1 + \dots + U_k) = |e_1^1 + \dots + e_{s_1}^1 + \dots + e_1^k + \dots + e_{s_k}^k| = \\ = |e_1^1 + \dots + e_{s_1}^1| + \dots + |e_1^k + \dots + e_{s_k}^k| = \dim U_1 + \dots + \dim U_k.$$

(4 \Rightarrow 5) Пусть для краткости $\overline{U_i} = U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k$. Тогда

$$\dim(U_i \cap \overline{U_i}) = \dim U_i + \dim \overline{U_i} - \underbrace{\dim(U_i + \overline{U_i})}_{U_1 + \dots + U_k} \leq \\ \leq \dim U_i + \dim U_1 + \dots + \dim U_{i-1} + \dim U_{i+1} + \dots + \dim U_k - \dim U_1 - \dots - \dim U_k.$$

Итак, $\dim(U_i \cap \overline{U_i}) \leq 0 \Rightarrow \dim(U_i \cap \overline{U_i}) = 0 \Rightarrow U_i \cap \overline{U_i} = \{0\}$.

(5 \Rightarrow 1) Пусть $\vec{0} = u_1 + \dots + u_k$, где $u_i \in U_i$. Тогда для любого i имеем

$$u_i = -u_1 - \dots - u_{i-1} - u_{i+1} - \dots - u_k \Rightarrow \\ \Rightarrow u_i \in U_i \cap \overline{U_i} = \{0\} \Rightarrow u_i = 0.$$

3. Описание всех базисов n -мерного векторного пространства в терминах одного базиса и матриц координат. Формула преобразования координат вектора при замене базиса векторного пространства

Пусть V — векторное пространство, $\dim V = n$, e_1, \dots, e_n — базис. То есть

$$\forall v \in V : \exists! v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n,$$

где $x_1, \dots, x_n \in F$ — координаты вектора v в базисе (e_1, \dots, e_n) . Пусть также есть базис e'_1, \dots, e'_n :

$$e'_1 = c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \dots + c_{n1}e_n$$

$$e'_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + \dots + c_{n2}e_n$$

$$\vdots$$

$$e'_n = c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \dots + c_{nn}e_n$$

Обозначим матрицу $C = (c_{ij})$. Тогда можно переписать (e'_1, \dots, e'_n) как $(e_1, \dots, e_n) \cdot C$.

Предложение. e'_1, \dots, e'_n образуют базис тогда и только тогда, когда $\det C \neq 0$.

Доказательство.

\Rightarrow e'_1, \dots, e'_n — базис, а значит $\exists C' \in M_n$:

$$(e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_n)C' = (e_1, \dots, e_n)CC'$$

$$E = CC'$$

$$C' = C^{-1} \iff \exists C^{-1} \iff \det C \neq 0$$

\Leftarrow $\det C \neq 0 \Rightarrow \exists C^{-1}$. Покажем, что e'_1, \dots, e'_n в таком случае линейно независимы.

Пусть $x_1 e'_1 + \dots + x_n e'_n = 0$. Тогда можно записать

$$(e'_1, \dots, e'_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

$$(e_1, \dots, e_n)C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

Так как (e_1, \dots, e_n) — базис, то $C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$. Умножая слева на обратную матрицу

получаем $x_1 = \dots = x_n = 0$.

4. Докажите, что отношение изоморфности на множестве всех векторных пространств является отношением эквивалентности

Теорема. "Изоморфность" — отношение эквивалентности на множестве всех векторных пространств над фиксированным полем F .

Доказательство.

I. *Рефлексивность.* $\varphi : V \simeq V$ — изоморфизм.

$$\text{Id} : V \simeq V$$

II. *Симметричность.* $\varphi : V \simeq W$ — изоморфизм $\implies \varphi^{-1} : W \simeq V$ — тоже изоморфизм.

Т.к. отображение φ^{-1} также биективно, то осталось проверить, что оно линейно.

Пусть $w_1, w_2 \in W$. Тогда $\exists v_1, v_2 \in V$, такие что

$$w_1 = \varphi(v_1), w_2 = \varphi(v_2) \Rightarrow v_1 = \varphi^{-1}(w_1), v_2 = \varphi^{-1}(w_2).$$

Теперь $\varphi^{-1}(w_1 + w_2) = \varphi^{-1}(\varphi(v_1) + \varphi(v_2)) = \varphi^{-1}(\varphi(v_1 + v_2)) = v_1 + v_2 = \varphi^{-1}(w_1) + \varphi^{-1}(w_2)$.

$$\varphi^{-1}(\alpha w) = \varphi^{-1}(\alpha \varphi(v)) = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha v)) = \alpha v = \alpha \varphi^{-1}(w).$$

III. *Транзитивность.* $\psi \circ \varphi : U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W$. Если φ и ψ — изоморфизм, то $\psi \circ \varphi$ — тоже изоморфизм.

Докажем, что если φ и ψ — линейны, то $\psi \circ \varphi$ — тоже линейна.

$$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi)(v_1 + v_2) &= \psi(\varphi(v_1 + v_2)) = \psi(\varphi(v_1) + \varphi(v_2)) = \\ &= \psi(\varphi(v_1)) + \psi(\varphi(v_2)) = (\psi \circ \varphi)(v_1) + (\psi \circ \varphi)(v_2). \\ (\psi \circ \varphi)(\alpha v) &= \psi(\varphi(\alpha v)) = \psi(\alpha \varphi(v)) = \\ &= \alpha \psi(\varphi(v)) = \alpha (\psi \circ \varphi)(v). \end{aligned}$$

Тогда очевидно, что транзитивность следует из линейности, так как композиция двух биективных отображений также биективна.

5. Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств

Теорема. V, W — конечномерные векторные пространства $\implies V \simeq W \iff \dim V = \dim W$. Докажем две леммы.

Лемма 1. $\dim V = n \Rightarrow V \simeq F^n$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varphi : V \rightarrow F^n$. Выберем базис (e_1, \dots, e_n) в V . Тогда

$$x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_i \in F.$$

Отображение является изоморфизмом (т.к. линейно и биективно), а следовательно $V \simeq F^n$.

Лемма 2. Пусть $\varphi : V \simeq W$ — изоморфизм. e_1, \dots, e_n — базис V . Тогда $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — базис W .

Доказательство. Пусть $w \in W$, тогда существует $v \in V : w = \varphi(v)$. Положим $v = \varphi^{-1}(w)$. Тогда

$$\begin{aligned} \Rightarrow v &= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, \quad x_i \in F \\ \Rightarrow w &= \varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) \\ \Rightarrow W &= \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle \end{aligned}$$

Теперь покажем, что $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — линейно независимы.

Пусть $\alpha_1 \varphi(e_1) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n) = 0$, где $\alpha_i \in F$. Тогда $\varphi(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = 0$. Применим φ^{-1} : $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \varphi^{-1}(0) = 0$. Так как e_1, \dots, e_n — базис V , то $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Доказательство теоремы.

(\Leftarrow) Пусть $\dim V = \dim W = n$. Тогда $V \simeq F^n$, $W \simeq F^n$ (по лемме 1), а следовательно $V \simeq W$.

(\Rightarrow) Пусть $V \simeq W$ и $\dim V = n$. Пусть $\varphi : V \simeq W$ — изоморфизм. (e_1, \dots, e_n) — базис V .

Тогда $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — базис W (по лемме 2), а следовательно $\dim W = n = \dim V$.

6. Существование и единственность линейного отображения с заданными образами базисных векторов. Связь между координатами вектора и его образа при линейном отображении. Формула изменения матрицы линейного отображения при замене базисов.

Пусть V, W — векторные пространства. (e_1, \dots, e_n) — базис V . $\varphi : V \rightarrow W$ — линейное отображение.

Предложение 1. φ однозначно определено векторами $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$.

Доказательство. $v \in V \Rightarrow v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, где $x_i \in F$.

Тогда $\varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n)$.

Предложение 2. Для любого набора $w_1, \dots, w_n \in W$ существует единственное линейное отображение $\varphi : V \rightarrow W$, такое что $\varphi(e_1) = w_1, \dots, \varphi(e_n) = w_n$.

Доказательство. $v \in V, v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.

Положим $\varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 w_1 + \dots + x_n w_n$. Тогда легко убедиться, что φ линейно (прямая проверка), а единственность следует из пункта 1.

Предложение 3. Если $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ и $\varphi(v) = y_1 w_1 + \dots + y_n w_n$, то

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Доказательство.

С одной стороны:

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) = \\ &= (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (w_1, \dots, w_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

С другой стороны:

$$\varphi(v) = (w_1, \dots, w_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Так как w_1, \dots, w_n — линейно независимы, то $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Предложение. Пусть V и W — векторные пространства, $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ — базисы V , $f = (f_1, \dots, f_m)$ и $f' = (f'_1, \dots, f'_m)$ — базисы W , A — матрица линейного отображения $\varphi : V \rightarrow W$ по отношению к e и f , A' — матрица линейного отображения по отношению к базисам e' и f' . $e' = eC$, $f' = fD$. Тогда

$$A' = D^{-1}AC \quad (A = DA'C^{-1})$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} (e'_1, \dots, e'_n) &= (e_1, \dots, e_n)C \Rightarrow \underbrace{(\varphi(e'_1), \dots, \varphi(e'_n))}_{(f'_1, \dots, f'_m)A' = (f_1, \dots, f_m)DA^{-1}} = \\ &= \underbrace{(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))}_{(f_1, \dots, f_m)A} C = (f_1, \dots, f_m)AC \Rightarrow \\ &\Rightarrow DA' = AC \Rightarrow A' = D^{-1}AC. \end{aligned}$$

7. Установите изоморфизм между пространствами $\text{Hom}(V, W)$ и $\text{Mat}_{m \times n}$, где V и W — векторные пространства размерностей n и m соответственно

Теорема. При фиксированных базисах e и f отображение $\text{Hom}(V, W) \rightarrow \text{Mat}_{m \times n}(F) : \varphi \rightarrow A(\varphi, e, f)$ является изоморфизмом векторных пространств V и W .

Рассмотрим две вещи:

Утверждение. $\text{Hom}(V, W) \rightarrow \text{Mat}_{m \times n}(F) : \varphi \mapsto A(\varphi, e, f)$ является биекцией.

Вывод. Задать линейное отображение $V \rightarrow W$ — то же самое, что выбрать базис e в V , базис f в W и задать матрицу $(m \times n)$, где $n = \dim V$, $m = \dim W$.

Наглядный пример. $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (x, y)$.

$e = (e_1, e_2, e_3)$, $f = (f_1, f_2)$. Тогда $\varphi(e_1) = e_1$

$$\varphi(e_2) = e_2$$

$$\varphi(e_3) = 0$$

Следовательно, $A(\varphi, e, f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Предложение. Положим $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V

$f = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W

$$A_\varphi = A(\varphi, e, f)$$

$$A_\psi = A(\psi, e, f)$$

$$A_{\varphi+\psi} = A(\varphi + \psi, e, f)$$

$$A_{\lambda\varphi} = A(\lambda\varphi, e, f)$$

1. $A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$:

С одной стороны: $((\varphi + \psi)e_1, \dots, (\varphi + \psi)e_n) = (f_1, \dots, f_m)A_{\varphi+\psi}$.

С другой стороны:

$$\begin{aligned} ((\varphi + \psi)e_1, \dots, (\varphi + \psi)e_n) &= (\varphi(e_1) + \psi(e_1), \dots, \varphi(e_n) + \psi(e_n)) = \\ &= (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) + (\psi(e_1), \dots, \psi(e_n)) = \\ &= (f_1, \dots, f_m)A_\varphi + (f_1, \dots, f_m)A_\psi = (f_1, \dots, f_m)(A_\varphi + A_\psi) \Rightarrow \\ &\Rightarrow A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi. \end{aligned}$$

2. $A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi$

С одной стороны: $((\lambda\varphi)e_1, \dots, (\lambda\varphi)e_n) = (f_1, \dots, f_m)A_{\lambda\varphi}$.

С другой стороны:

$$\begin{aligned} ((\lambda\varphi)e_1, \dots, (\lambda\varphi)e_n) &= (\lambda\varphi(e_1), \dots, \lambda\varphi(e_n)) = \lambda(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = \\ &= \lambda(f_1, \dots, f_m)A_\varphi = (f_1, \dots, f_m)\lambda A_\varphi \Rightarrow \\ &\Rightarrow A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi. \end{aligned}$$

Таким образом, очевидно, что так как отображение биективно и линейно, то оно является изоморфизмом.

8. Докажите, что ядро и образ линейного отображения являются подпространствами в соответствующих векторных пространствах. Сформулируйте и докажите критерий инъективности линейного отображения в терминах его ядра

Предложение 1. $\text{Ker}\varphi$ — подпространство в V .

Доказательство. Проверим по определению.

1. $0_v \in \text{Ker}\varphi$, так как $\varphi(0_v) = 0_w$.
2. $v_1, v_2 \in \text{Ker}\varphi \implies \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = 0_w + 0_w = 0_w \implies v_1 + v_2 \in \text{Ker}\varphi$.
3. $v \in \text{Ker}\varphi, \lambda \in F \implies \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v) = \lambda 0 = 0 \implies \lambda v \in \text{Ker}\varphi$.

Предложение 2. $\text{Im}\varphi$ — подпространство в W .

Доказательство. Проверим по определению.

1. $0_w = \varphi(0_v) \implies 0_w \in \text{Im}\varphi$.
2. $w_1, w_2 \in \text{Im}\varphi \implies \exists v_1, v_2 \in V : w_1 = \varphi(v_1), w_2 = \varphi(v_2) \implies w_1 + w_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2) \implies w_1 + w_2 \in \text{Im}\varphi$.
3. $w \in \text{Im}\varphi, \lambda \in F \implies \exists v \in V : \varphi(v) = w \implies \lambda w = \lambda\varphi(v) = \varphi(\lambda v) \implies \lambda w \in \text{Im}\varphi$.

Таким образом, все условия подпространства выполнены.

Предложение. Отображение φ инъективно тогда и только тогда, когда $\text{Ker}\varphi = \{0\}$.

Доказательство.

(\Rightarrow) Очевидно, так как если $\text{Ker}\varphi = \{0\}$, то это значит, что все векторы переходят в W .

(\Leftarrow) Пусть $v_1, v_2 \in V$ таковы, что $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$.

Тогда $\varphi(v_1 - v_2) = 0 \implies v_1 - v_2 \in \text{Ker}\varphi \implies v_1 - v_2 = 0 \iff v_1 = v_2$.

9. Связь между рангом матрицы линейного отображения и размерностью его образа

Для начала докажем одну лемму.

Лемма. $U \subseteq V$ — подпространство и (e_1, \dots, e_k) — его базис. Тогда $\varphi(U) = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k) \rangle$ — подпространство. В частности, $\dim \varphi(U) \leq \dim U$.

Доказательство. $u \in U \implies u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k \implies \varphi(u) = \varphi(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k) = \lambda_1 \varphi(e_1) + \dots + \lambda_k \varphi(e_k) \in \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k) \rangle$.

Пусть V, W — векторные пространства, $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V , $f = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W , $A = A(\varphi, e, f)$ — матрица линейного отображения φ по отношению к e и f .

Теорема. $\dim \text{Im}\varphi = \text{rk} A$

Доказательство. Воспользуемся леммой, доказанной выше: $\text{Im}\varphi = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle$.

Координаты вектора $\varphi(e_i)$ находятся в столбце $A^{(i)} \implies \lambda_1 \varphi(e_1) + \dots + \lambda_n \varphi(e_n) = 0 \iff \lambda_1 A^{(1)} + \dots + \lambda_n A^{(n)} = 0 \implies \text{rk}\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\} = \text{rk} A$.

$\dim \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k) \rangle = \dim \text{Im}\varphi$.

10. Оценки на ранг произведения двух матриц

Теорема. Пусть $A \in \text{Mat}_{k \times m}$, $B \in \text{Mat}_{m \times n}$. Тогда $\text{rk} AB \leq \min(\text{rk} A, \text{rk} B)$.

Доказательство. Реализуем A и B как матрицы линейных отображений, то есть $\varphi_A : F^m \rightarrow F^k$, $\varphi_B : F^n \rightarrow F^m$. Тогда AB будет матрицей отображения $\varphi_A \circ \varphi_B$.

$$\operatorname{rk}(AB) = \operatorname{rk}(\varphi_A \circ \varphi_B) = \begin{cases} \leq \operatorname{Im} \varphi_A = \operatorname{rk} A \\ \leq \operatorname{Im} \varphi_B = \operatorname{rk} B \end{cases}$$

Первое неравенство следует из того, что $\operatorname{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) \subset \operatorname{Im} \varphi_A$, откуда, в свою очередь следует, что $\dim \operatorname{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) \leq \dim \operatorname{Im} \varphi_A$.

Рассматривая второе неравенство, получим:

$$\operatorname{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) = \varphi_A(\operatorname{Im} \varphi_B) \implies \dim \operatorname{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) = \dim(\varphi_A(\operatorname{Im} \varphi_B)) \leq \dim \operatorname{Im} \varphi_B.$$

11. Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения

Для начала докажем предложение.

Предложение. Пусть $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V такой, что (e_1, \dots, e_k) — базис $\operatorname{Ker} \varphi$, а $(\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n))$ — базис $\operatorname{Im} \varphi$.

Замечание. Базис с указанным свойством существует всегда, так как его можно получить путём дополнения базиса $\operatorname{Ker} \varphi$ до базиса всего пространства V .

Доказательство. Дополним базис (e_1, \dots, e_k) до базиса V векторами e_{k+1}, \dots, e_n . Тогда:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \varphi &= \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k), \dots, \varphi(e_n) \rangle = \\ &= \langle 0, \dots, 0, \varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n) \rangle = \\ &= \langle \varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n) \rangle. \end{aligned}$$

$\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$ — линейно независимы. Тогда пусть $\alpha_{k+1}\varphi(e_{k+1}) + \dots + \alpha_n\varphi(e_n) = 0$, где $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n \in F$. Тогда:

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n &\in \operatorname{Ker} \varphi \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n &= \beta_{k+1}e_{k+1} + \dots + \beta_n e_n, \text{ где } \beta_{k+1}, \dots, \beta_n \in F. \end{aligned}$$

Но так как e_1, \dots, e_n — базис V , то $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = \beta_{k+1} = \dots = \beta_n = 0$. То есть векторы $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — линейно независимы, а значит они образуют базис $\operatorname{Im} \varphi$.

Теорема. $\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim V - \dim \operatorname{Ker} \varphi$.

Доказательство. Выберем базис в V такой же, как в предположении.

Тогда $\dim \operatorname{Im} \varphi = n - k = \dim V - \dim \operatorname{Ker} \varphi$.

12. Приведение матрицы линейного отображения к диагональному виду с единицами и нулями на диагонали

Пусть $\varphi : V \rightarrow W$ — линейное отображение. \mathfrak{e} — базис V , \mathfrak{f} — базис W .

$A = A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}) \in \operatorname{Mat}_{m \times n}$, $\operatorname{rk} A = r$.

Утверждение. Существуют базис \mathfrak{e}' в V и базис \mathfrak{f}' в W такие, что $A(\varphi, \mathfrak{e}', \mathfrak{f}')$ имеет вид:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right), \operatorname{rk} A' = r$$

Эквивалентное утверждение. Существуют невырожденные матрицы $C \in M_n$, $D \in M_m$, такие что $A' = D^{-1}AC \iff A = DA'C^{-1}$.

Доказательство. Реализуем A как матрицу линейного отображения $\varphi : F^n \rightarrow F^m$ в стандартных базисах.

Тогда существует базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ такой, что (e_{r+1}, \dots, e_n) — базис $\text{Ker} \varphi$, а $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_r)$ — базис $\text{Im} \varphi$.

Пусть f — базис F^m , дополняющий систему $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_r)$. Тогда $A(\varphi, e, f) = A'$.

Результат следует из теоремы о замене базисов.

13. Докажите, что всякий базис сопряженного пространства двойственен к некоторому базису исходного векторного пространства

Предложение. Любой базис $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ пространства V^* двойственен к некоторому базису пространства V .

Доказательство. Возьмём произвольный базис $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ пространства V .

Пусть $\varepsilon' = (\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n)$ двойственный к e' базис в V^* .

Тогда $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \vdots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix}$ для некоторой невырожденной матрицы $C \in M_n$.

Положим $e = (e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_n)C^{-1}$ — некий (искомый) базис в V .

Зная, что $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1, \dots, e_n) = E$, имеем $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1, \dots, e_n) = C \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \vdots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix} (e'_1, \dots, e'_n)C^{-1} = CEC^{-1} = E$.

14. Докажите, что всякое подпространство в F^n является множеством решений некоторой однородной системы линейных уравнений

Теорема. Всякое подпространство F^n есть множество решений некоторой ОСЛУ.

Доказательство. Пусть $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$.

$(a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$ — значение линейной функции $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ на векторе $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Пусть дано подпространство $U \subseteq F^n$. Выберем в нём базис (v_1, \dots, v_k) .

Рассмотрим в $(F^n)^*$ подмножество $S := \{\alpha \in (F^n)^* \mid \alpha(v_1) = 0, \dots, \alpha(v_k) = 0\}$. S — подпространство в $(F^n)^*$.

S — множество решений ОСЛУ $\begin{cases} \alpha(v_1) = 0, \\ \vdots \\ \alpha(v_k) = 0 \end{cases}$ на коэффициенты α .

Так как v_1, \dots, v_k линейно независимы, то ранг матрицы коэффициентов равен $k \implies \dim S = n - k$.

Выберем в S базис $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k}$ и рассмотрим ОСЛУ $\begin{cases} \alpha_1(x) = 0, \\ \vdots \\ \alpha_{n-k}(x) = 0 \end{cases}$ относительно неиз-

вестного вектора $x \in F^n$.

Пусть $U' \subseteq F^n$ — подпространство решений этой ОСЛУ.

Ранг матрицы коэффициентов равен $n - k$, так как $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k}$ линейно независимы $\Rightarrow \dim U' = n - (n - k) = k$. Но $U \subseteq U'$ по построению.

Так как $\dim U = k = \dim U'$, то $U = U' \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1(x) = 0, \\ \vdots \\ \alpha_{n-k}(x) = 0 \end{cases}$ — искомая ОСЛУ.

15. Формула для вычисления значений билинейной формы в координатах. Существование и единственность билинейной формы с заданной матрицей. Формула изменения матрицы билинейной формы при переходе к другому базису

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V ($\dim V = n < \infty$).

Определение. Матрица $B = B(\beta, e)$, где $b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$, называется матрицей билинейной функции β в базисе e .

Пусть $B = B(\beta, e)$, $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V , $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in V$, $y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \in V$.

$$\begin{aligned} \beta(x, y) &= \beta\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \beta(e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j \cdot \underbrace{\beta(e_i, e_j)}_{b_{ij}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i b_{ij} y_j = \\ &= (x_1, \dots, x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (*) \end{aligned}$$

(*) — формула для вычисления значений б.ф. в координатах.

Пусть e — произвольный базис V . Тогда:

Предложение 1. Любая билинейная функция однозначно определяется своей матрицей в базисе e .

Доказательство 1. Следует из (*).

Предложение 2. Для любой матрицы $V \in M_n(F)$ существует единственная билинейная функция β на V , такая что $B(\beta, e) = V$.

Доказательство 2. Единственность следует из 1.

Существование: зададим β по формуле (*). Тогда β — билинейная функция на V и её матрицей является V .

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ — два базиса V . β — билинейная функция на V . $e' = eC$ — матрица перехода. $B = B(\beta, e)$ и $B' = B(\beta, e')$.

Предложение. $B' = C^T B C$.

Доказательство. Рассмотрим x в обоих базисах.

$$\begin{aligned} x &= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n \\ y &= y_1 e_1 + \dots + y_n e_n = y'_1 e'_1 + \dots + y'_n e'_n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(x'_1, \dots, x'_n)B' \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = \beta(x, y) = (x_1, \dots, x_n)B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\beta(x, y) = (x'_1, \dots, x'_n)C^T B C \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

Отсюда следует, что $B' = C^T B C$, так как для любого $p \in \text{Mat}_n$ верно

$$p_{ij} = (0 \dots i \dots 0)p \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$