Линейная алгебра.
Коллоквиум 2 семестр.
Основано на реальных событиях.

29 мая 2017

Определения

1. Сумма двух подпространств векторного пространства

Сумма двух подпространств U и W — это множество $U+W : \{u+w \mid u \in U, w \in W\}$.
Замечание. $\dim(U \cap W) \leqslant \dim U \leqslant \dim(U+W)$

2. Теорема о связи размерности суммы двух подпространств с размерностью их пересечения

Теорема. $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W)$

3. Сумма нескольких подпространств векторного пространства

Пусть $U_1, \ \ldots, U_k$ — подпространства векторного пространства V.
Суммой нескольких подпространств называется

$$U_1 + \ldots + U_k = \{u_1 + \ldots + u_k \mid u_i \in U_i\}$$

4. EDIT: Линейная независимость нескольких подпространств векторного пространства

5. Эквивалентные условия, определяющие линейно независимый набор подпространств векторного пространства

Пусть $L_1+\ldots+L_k = \{v_1+\ldots+v_k \mid v_i \in L_i\}$. Тогда следующие 5 **условий** эквивалентны:

1. $v_1 + \ldots + v_k = 0 \Longrightarrow v_1 = \ldots = v_k = 0$
2. $\forall v \in V$ единственно представим в виде $v = v_1 + \ldots + v_k$, где $v_i \in L_i$
3. если e_i — базис в L_i, то $e_1 \cup \ldots \cup e_k$ — базис в $L_1 + \ldots + L_k$
4. $\dim(L_1 + \ldots + L_k) = \dim L_1 + \ldots + \dim L_k$
5. $L_i \cap (L_1 + \ldots + L_{i-1} + L_{i+1} + \ldots + L_k) = \{0\}$

6. Разложение векторного пространства в прямую сумму подпространств

Пусть U, W — подпространства векторного пространства V.

Тогда если $U \cap W = \{0\}$, то $U \oplus W$ называется **прямой суммой**.

7. EDIT: При каких условиях на подпространства U_1, U_2, векторного пространства V имеет место разложение $V = U_1 \oplus U_2$?

8. Описание всех базисов n-мерного векторного пространства в терминах одного базиса и матриц координат

Пусть V — векторное пространство, $\dim V = n$, $e_1, \ \ldots, e_n$ — базис. То есть

$$\forall v \in V : \exists! v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n,$$

где $x_1, \ \ldots, x_n \in F$ — координаты вектора v в базисе $(e_1, \ \ldots, e_n)$. Пусть также есть базис $e'_1, \ \ldots, e'_n$:

$$\begin{aligned} e'_1 &= c_{11}e_1 + c21e_2 + \ldots + cn1e_n \\ e'_2 &= c_{12}e_1 + c22e_2 + \ldots + cn2e_n \\ &\vdots \\ e'_n &= c_{1n}e_1 + c2ne_2 + \ldots + cnne_n \end{aligned}$$

Обозначим матрицу $C = (c_{ij})$.

Тогда можно переписать $(e'_1, \ \ldots, e'_n)$ как $(e_1, \ \ldots, e_n) \cdot C$.

Замечание. $e_1, \ \ldots, e_n$ образуют базис $\iff \det C \neq 0$.

9. Матрица перехода от одного базиса векторного пространства к другому

Пусть V — векторное пространство, $\dim V = n$, $e_1, \ \ldots, e_n$ — базис $e_1, \ \ldots, e_n$ — некий набор из n векторов. Тогда каждый вектор из этого набора линейно выражается через базис.

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i, \, c_{ij} \in F$$

$$(e'_1, \ \ldots, e'_n) = (e_1, \ \ldots, e_n) \cdot C, \quad C = (c_{ij})$$

То есть мы получили матрицу, где в j-ом столбце стоят коэффициенты линейного разложения вектора e'_j в базисе $(e_1, \ \ldots, e_n)$.

Теперь пусть $e'_1, \ \ldots, e'_n$ — тоже базис в V. В этом случае $\det C \neq 0$.

Матрица C называется **матрицей перехода** от базиса $(e_1, \ \ldots, e_n)$ к базису $(e'_1, \ \ldots, e'_n)$.

10. Формула преобразования координат вектора при замене базиса векторного пространства

Пусть C — матрица перехода от базиса $(e_1, \ \dots, e_n)$ к базису $(e'_1, \ \dots, e'_n)$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x'_i$$

11. Линейное отображение векторных пространств, его простейшие свойства.

Пусть V, W — векторные пространства.

Отображение $\varphi : V \to W$ называется **линейным**, если:

1. $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$, $\forall v_1, v_2 \in V$
2. $\varphi(\alpha v) = \alpha\varphi(v)$, $\forall \alpha \in F$, $\forall v \in V$

Простейшие свойства линейного отображения:

1. $\varphi(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$
2. $\varphi(-v) = -\varphi(v)$, $\forall v \in V$

12. Изоморфизм векторных пространств. Изоморфные векторные пространства

Пусть V, W — векторные пространства над полем F.

Отображение $\varphi : V \to W$ называется **изоморфизмом**, если φ линейно и биективно. *Обозначение*: $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$.

Два векторных пространства называются **изоморфными**, если существует изоморфизм $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ (и тогда существует изоморфизм $W \xrightarrow{\sim} V$ по предположению). *Обозначение*: $V \simeq W$.

13. Какими свойствами обладает отношение изоморфности на множестве всех векторных пространств?

Следствие из теоремы. Изоморфизм — это отношение эквивалентности на множестве всех векторных пространств над фиксированным полем F.

Если φ и ψ изоморфны, то $\varphi \circ \psi$ тоже изоморфизм.

14. Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств

Два конечномерных векторных пространства V и W над полем F **изоморфны** тогда и только тогда, когда $\dim V = \dim W$.

15. Матрица линейного отображения

Пусть V и W — векторные пространства, $\mathbb{e} = (e_1, \ \dots, e_n)$ — базис V, $\mathbb{f} = (f_1, \ \dots, f_m)$ — базис W, $\varphi : V \to W$ — линейное отображение. Тогда:

$$\varphi(e_j) = a_{aj} f_1 + \ldots + a_{mj} f_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i.$$

Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(F)$ называется матрицей линейного отображения φ в базисах $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$.

16. Связь между координатами вектора и его образа при линейном отображении

Пусть V и W — векторные пространства, $\mathbb{e} = (e_1, \ \dots, e_n)$ — базис V, $\mathbb{f} = (f_1, \ \dots, f_m)$ — базис W, $\varphi : V \to W$ — линейное отображение. $A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$ — матрица линейного отображения φ.

Если $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ и $\varphi(v) = y_1 f_1 + \ldots + y_m f_m$, то

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

17. Формула изменения матрицы линейного отображения при замене базисов

Пусть φ — линейный *оператор векторного* пространства V, A — матрица φ в базисе $\mathbb{e} = (e_1, \ \dots, e_n)$. Пусть $\mathbb{e}' = (e_1', \ \dots, e_n')$ — другой базис, причем

$$(e_1', \ \dots, e_n') = (e_1, \ \dots, e_n) \cdot C, \quad C = (c_{ij}),$$

где C — матрица перехода, и A' — матрица φ в базисе $\mathbb{e}'$. Тогда

$$A' = C^{-1} A C.$$

18. Сумма двух линейных отображений и ее матрица. Произведение линейного отображения на скаляр и его матрица

Пусть V, W — векторные пространства $\mathrm{Hom}(V, W)$ — множество всех линейных отображений из V в W. $\mathbb{e} = (e_1, \ \dots, e_n)$ — базис V, $\mathbb{f} = (f_1, \ \dots, f_m)$ — базис W, $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $\alpha \in F$ A_φ — матрица линейного отображения φ, A_ψ — матрица ψ.

1. **Сумма** $\varphi + \psi$ — это линейное отображение, такое что $\forall v \in V : (\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v)$. **Матрица суммы** линейных отображений: $A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$.
2. **Произведение** $\alpha\varphi$ — это линейное отображение, такое что $\forall v \in V : (\alpha\phi)(v) = \alpha\phi(v)$. **Матрица произведения** линейного отображения на скаляр: $A_{\alpha\varphi} = \alpha A_\varphi$

19. Композиция двух линейных отображений и ее матрица

Пусть V, U, W — векторные пространства. $V \xrightarrow{g} U \xrightarrow{f} W$ — два линейных отображения. n, m, k — их размерности соответственно. $\mathbb{e}''$, $\mathbb{e}'$, $\mathbb{e}$ — их базисы, а A_g, A_f, A_{fg} — матрицы отображений в этих базисах.

$$A_{fg} = A_f A_g$$

Матрица композиции линейных отображений имеет вид:

$$A_{fg} = \sum_i a_{ji} b_{ik},$$

где a — коэффициент при f, а b — коэффициент при g.

20. Ядро и образ линейного отображения

Пусть V, W — векторные пространства с линейным отображением $\varphi : V \to W$.
Ядро φ — это множество $\mathrm{Ker}\varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$
Образ φ — это множество $\mathrm{Im}\varphi := \{w \in W \mid \exists v \in V : \varphi(v) = w\}$

21. Критерий инъективности линейного отображения в терминах его ядра. Критерий изоморфности линейного отображения в терминах ядра и образа

Пусть $\varphi : V \to W$ — линейное отображение.

1. Отображение φ **инъективно** тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$
2. Отображение φ является **изоморфизмом** тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$ и $\mathrm{Im}\varphi = W$.

22. Связь между рангом матрицы линейного отображения и размерностью его образа

Пусть V, W — векторные пространства, $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V, $\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ — базис W, A — матрица линейного отображения $\varphi : V \to W$.

$$\dim \mathrm{Im}\varphi = \mathrm{rk} A$$

23. Оценки на ранг произведения двух матриц

Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{k \times m}$, $B \in \mathrm{Mat}_{m \times n}$. Тогда

$$\mathrm{rk} AB \leqslant \min(\mathrm{rk} A, \mathrm{rk} B)$$

24. EDIT: Каким свойством обладает набор векторов, дополняющий базис ядра линейного отображения до базиса всего пространства?

Набор векторов, дополняющий базис ядра линейного отображения до базиса всего пространства линейно независим по отношению к базису ядра линейного отображения.

25. Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения

$$\dim \mathrm{Im}\varphi = \dim V - \dim \mathrm{Ker}\varphi$$

26. К какому простейшему виду можно привести матрицу линейного отображения путем замены базисов?

Простейшим видом матрицы линейного отображения является её канонический вид — диагональная матрица $D \in \mathrm{Mat}_n$ вида

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right),$$

задаваемая формулой

$$A' = D^{-1}AC$$

27. Линейная функция на векторном пространстве

Линейной функцией (формой) на векторном пространстве V называется всякое линейное отображение $\sigma : V \to F$. *Обозначение*: $V^* = \mathrm{Hom}(V,\, F)$.

28. Сопряженное (двойственное) векторное пространство и его размерность

Пространство V^* (т.е. множество линейных функций на V) называется **сопряженным** (двойственным) к пространству V.

Пусть $\mathbb{e} = (e_1,\, \dots,\, e_n)$ — базис V. Тогда он определяет изоморфизм $\varphi : V^* \to \mathrm{Mat}_{1\times n}$, $\alpha \rightarrowtail (\alpha_1,\, \dots,\, \alpha_n)$, где $\alpha_i = \varphi(e_i)$ и α — линейная функция.

$$\dim V^* = n.$$

29. Базис сопряженного пространства, двойственный к данному базису исходного векторного пространства

Пусть $\mathbb{e} = (e_1,\, \dots,\, e_n)$ — базис V. Рассмотрим линейные функции $\varepsilon_1,\, \dots,\, \varepsilon_n$ такие, что $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$, где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1,\, i = j \\ 0,\, i \neq j \end{cases}$. То есть $\varepsilon_i = (\delta_{i1},\, \dots,\, \delta_{ii},\, \dots,\, \delta_{in}) = (0,\, \dots,\, 1,\, \dots,\, 0)$.

$(\varepsilon_1,\, \dots,\, \varepsilon_n)$ — **базис** в V^* (сопряженного пространства).

30. Билинейная форма на векторном пространстве

Билинейная функция (форма) на V — это отображение $\beta : V \times V \to F$, линейное по каждому аргументу:

1. $\beta(x_1 + x_2,\, y) = \beta(x_1,\, y) + \beta(x_2,\, y)$
2. $\beta(\lambda x, y) = \lambda\beta(x, y)$
3. аналогично 1, но по второму аргументу
4. аналогично 2, но по второму аргументу

31. Матрица билинейной формы

Пусть $\mathbb{e} = (e_1,\ \ldots,\, e_n)$ — базис V ($\dim V < \infty$), $\beta : V \times V \to F$ — билинейная функция.

Матрицей билинейной функции β в базисе $\mathbb{e}$ называется матрица $B = (b_{ij})$, где $b_{ij} = \beta(e_i,\, e_j)$. *Обозначение*: $B(\beta, \mathbb{e})$

32. Формула для вычисления значений билинейной формы в координатах

Пусть $\mathbb{e} = (e_1,\ \ldots,\, e_n)$ — базис V ($\dim V < \infty$), $\beta : V \times V \to F$ — билинейная функция, B — её матрица в базисе $\mathbb{e}$.

Тогда для некоторых векторов $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \in V$ и $y = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n \in V$:

$$\beta(x,\, y) = (x_1,\ \ldots,\, x_n)B\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

33. Формула изменения матрицы билинейной формы при переходе к другому базису

Пусть

$$\begin{aligned} &\mathbb{e} = (e_1,\ \ldots,\, e_n) - \text{базис в } V \\ &\mathbb{e}' = (e'_1,\ \ldots,\, e'_n) - \text{другой базис в } V \\ &\mathbb{e}' = \mathbb{e}C \\ &B = B(\beta, \mathbb{e}) \\ &B' = B(\beta, \mathbb{e}') \end{aligned}$$

Тогда $B' = C^TBC$.

34. Ранг билинейной формы

Пусть $B(\beta, \mathbb{e})$ — матрица билинейной функции β в базисе $\mathbb{e}$.

Число $\mathrm{rk}B$ называется **рангом билинейной функции** β. Обозначение: $\mathrm{rk}\beta$.

35. Симметричная билинейная форма

Билинейная функция β называется **симметричной**, если $\beta(x,\, y) = \beta(y,\, x)\ \forall x,\, y \in V$.

β симметрична $\iff$ B симметрична (т.е. $B = B^T$).

36. Квадратичная форма

Пусть $\beta : V \times V \to F$ — билинейная функция. Тогда отображение $Q_\beta : V \to F$, заданное формулой $Q_\beta(x) = \beta(x,\, x)$ называется **квадратичной функцией** (формой), ассоциированной с билинейной функцией β.

37. Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами

Пусть в поле F выполняется условие: $1 + 1 \neq 0$ (т.е. $2 \neq 0$).

Теорема. Отображение $\beta \to Q_\beta$ является биекцией между симметричными и квадратичными б.ф.

38. Симметризация билинейной формы

Билинейная функция $\sigma(x,\ y) = \frac{1}{2}(\beta(x,\ y) + \beta(y,\ x))$ называется **симметризацией билинейной функции** β.

39. Поляризация квадратичной формы

Симметричная билинейная функция $\beta(x,\ y) = \frac{1}{2}(Q(x + y) - Q(x) - Q(y)$ называется **поляризацией квадратичной формы** Q.

40. Матрица квадратичной формы

Пусть V — векторное пространство, $\dim V < \infty$.

Матрицей квадратичной формы $Q : V \to F$ в базисе $\mathbb{e}$ называется матрица соответствующей ей симметричной билинейной функции (поляризацией) $\beta : V \times V \to F$ в том же базисе.

41. Канонический вид квадратичной формы

Квадратичная форма Q имеет в базисе $\mathbb{e} = (e_1,\ \ldots,\ e_n)$ **канонический вид**, если для любого вектора $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ верно, что $Q(x) = a_1 x_1^2 + \ldots + a_n x_n^2$, где $a_i \in F$ (т.е. матрица квадратичной формы Q в этом базисе диагональна).

42. Нормальный вид квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Квадратичная форма Q имеет в базисе $\mathbb{e} = (e_1,\ \ldots,\ e_n)$ **нормальный вид**, если для любого вектора $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ верно, что $Q(x) = a_1 x_1^2 + \ldots + a_n x_n^2$, где $a_i \in \{-1, 0, 1\}$ (т.е. матрица квадратичной формы Q в этом базисе диагональна).

43. Индексы инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Пусть Q — квадратичная функция над R, которая в базисе $\mathbb{e}$ имеет нормальный вид:

$$Q(x_1,\ \ldots,\ x_n) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_{s+t}^2,$$

где s — количество положительных слагаемых, t — количество отрицательных слагаемых. Тогда

$i_+ := s$ — **положительный индекс инерции** квадратичной формы Q

$i_- := t$ — **отрицательный индекс инерции** квадратичной формы Q

$n - s - t$ — **нулевой индекс инерции** квадратичной формы Q

44. Закон инерции для квадратичной формы над R

Теорема. Индексы инерции ($i_+ := s$, $i_- := t$) не зависят от базиса, в котором Q принимает нормальный вид.

45. Положительно/неотрицательно определенная квадратичная форма

Квадратичная форма Q называется **положительно определённой** ($Q > 0$), если $Q(x) > 0\ \forall x \neq 0$, а её нормальный вид: $x_1^2 + \ldots + x_n^2$.

Квадратичная форма Q называется **неотрицательно определённой** ($Q \geqslant 0$), если $Q(x) \geqslant 0\ \forall x$, а её нормальный вид: $x_1^2 + \ldots + x_k^2$, $k \leqslant n$.

46. Отрицательно/неположительно определенная квадратичная форма

Квадратичная форма Q называется **отрицательно определённой** ($Q < 0$), если $Q(x) < 0\ \forall x \neq 0$, а её нормальный вид: $-x_1^2 - \ldots - x_n^2$.

Квадратичная форма Q называется **неположительно определённой** ($Q \leqslant 0$), если $Q(x) \leqslant 0\ \forall x$, а её нормальный вид: $-x_1^2 - \ldots - x_k^2$, $k \leqslant n$.

47. Неопределенная квадратичная форма

Квадратичная форма называется **неопределенной**, если $\exists x, y : Q(x) > 0$, $Q(y) < 0$, а её нормальный вид: $x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_{s+t}^2$, $s,t \geqslant 1$.

48. Следствие метода Якоби о нахождении индексов инерции квадратичной формы

Пусть $B = B(Q, \mathbb{e})$, $B_k = B(Q, \mathbb{e})$, $\delta_k = \det B_k$ — k-й угловой минор.

Теорема. Пусть $\delta_k \neq 0\ \forall k = 1, \ \ldots, n$. Тогда i_- равен числу перемен знака в последовательности $1, \delta_1, \delta_2, \ \ldots, \delta_n$

49. Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы

Теорема. $Q > 0$ тогда и только тогда, когда $\delta_i > 0$ для всех i.

50. Критерий отрицательной определенности квадратичной формы

$$Q < 0 \iff \begin{cases} \delta_i < 0, \ i \,\vdots\, 2 \\ \delta_i > 0, \ i \not\vdots\, 2 \end{cases}$$

51. Евклидово пространство

Евклидово пространство ($F = \mathbb{R}$) — это векторное пространство $\mathbb{E}$ над полем $\mathbb{R}$, на котором задана положительно определённая симметрическая билинейная функция $(\cdot, \cdot) : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$, которую мы будем называть произведением.

52. Длина вектора в евклидовом пространстве

$\mathbb{E}$ — евклидово пространство, $\dim \mathbb{E} < \infty$

Длиной вектора $x \in \mathbb{E}$ называется число $|x| = \sqrt{(x, x)}$. $|x| > 0$, причём $|x| = 0 \iff x = 0$.

53. Неравенство Коши-Буняковского

Пусть $x, y \in \mathbb{E}$. Тогда

$$|(x, y)| \leqslant |x||y|,$$

причем знак равенства возможен тогда и только тогда, когда x и y пропорциональны.

54. Угол между ненулевыми векторами евклидова пространства

Углом между векторами x и y называют такое число $\alpha \in [0, \pi]$, что

$$\cos \alpha = \frac{(x, y)}{|x||y|}.$$

55. Матрица Грама системы векторов евклидова пространства

$v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{E}$ — система векторов.

Матрицей Грама системы векторов $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{E}$ называется матрица

$$G(v_1, \ldots, v_k) := \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) & \ldots & (v_1, v_k) \\ (v_2, v_1) & (v_2, v_2) & \ldots & (v_2, v_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (v_k, v_1) & (v_k, v_2) & \ldots & (v_k, v_k) \end{pmatrix} := (g_{ij}), \quad g_{ij} = (v_i, v_j).$$

56. Свойства определителя матрицы Грама

1. $\det G(v_1, \ldots, v_k) \geqslant 0$
2. $\det G(v_1, \ldots, v_k) = 0$ тогда и только тогда, когда $v_1, \ldots, v_k$ линейно зависимы.

57. Ортогональное дополнение подмножества евклидова пространства

Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство, $\dim \mathbb{E} = n$. $S \subseteq \mathbb{E}$ — произвольное подпространство. Ортогональным дополнением к S называется множество $S^{\perp} = \{x \in \mathbb{E} \mid (x, y) = 0 \ \forall y \in S\}$.

58. Чему равна размерность ортогонального дополнения к подпространству?

Пусть $S \subseteq \mathbb{E},\ \dim \mathbb{E} = n$. Тогда

$$\dim S^{\perp} = n - \dim S.$$

59. Каким свойством обладают подпространство евклидова пространства и его ортогональное дополнение?

Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$. Тогда:

1. $\mathbb{E} = S \oplus S^{\perp}$ — евклидово пространство разлагается в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения
2. $(S^{\perp})^{\perp} = S$ — ортогональное дополнение ортогонального дополнения пространства есть само пространство

60. Ортогональная проекция вектора на подпространство

Вектор y называется ортогональной проекцией вектора x на подпространство S. *Обозначение*: $pr_s x$.

61. Ортогональная составляющая вектора относительно подпространства

Вектор z называется ортогональной составляющей вектора x вдоль подпространства S. *Обозначение*: $ort_s x$.

62. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в $\mathbb{R}^n$, заданное своим базисом

Пусть $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением. $S \subseteq \mathbb{R}^n$ — подпространство, $a_1,\ \ldots,\ a_k$ — базис в S.

Образуем матрицу $A \in \mathrm{Mat}_{n\times k}(\mathbb{R})$, где $A^{(i)} = a_i$.

$$\forall v \in \mathbb{E} : pr_s v = A(A^T A)^{-1} A^T v$$

63. Ортогональная система векторов. Ортогональный базис

Система векторов $v_1,\ \ldots,\ v_k$ евклидова пространства называется **ортогональной**, если все её векторы попарно ортогональны, т.е. $(e_i,\ e_j) = 0\ \forall i \neq j$.

Базис $(e_1,\ \ldots,\ e_n)$ в $\mathbb{E}$ называется **ортогональным**, если $(e_i,\ e_j) = 0\ \forall i \neq j$. Это равносильно тому, что $G(e_1,\ \ldots,\ e_n)$ диагональна.

64. Ортонормированная система векторов. Ортонормированный базис

Система векторов $v_1, \ldots, v_k$ евклидова пространства называется **ортонормированной**, если все её векторы попарно ортогональны, т.е. $(e_i, e_j) = 0 \ \forall i \neq j$, и длина (норма) каждого вектора системы равна 1.

Базис $(e_1, \ldots, e_n)$ в $\mathbb{E}$ называется **ортонормированным**, если $(e_i, e_j) = 0 \ \forall i \neq j$ и длина каждого вектора равна 1: $\left(\frac{e_1}{|e_1|}, \ldots, \frac{e_n}{|e_n|}\right)$.

65. Описание всех ортонормированных базисов евклидова пространства в терминах одного такого базиса и матриц перехода

Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — ортонормированный базис в $\mathbb{E}$. Пусть также есть ещё один базис $(e'_1, \ldots, e'_n)$, причём $(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n) \cdot C$.

$(e'_1, \ldots, e'_n)$ — **ортонормированный** тогда и только тогда, когда $C^T C = E$ или, что то же самое, $C^{-1} = C^T$.

66. Ортогональная матрица

Матрица $C \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ называется **ортогональной**, если $C^T C = E$ или, что то же самое, $C^{-1} = C^T$.

Из матана: C — ортогональна $\iff$ её столбцы образуют ортонормированный базис (сумма квадратов координат по столбцам равна единице).

67. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в терминах его ортогонального базиса

Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство, $(e_1, \ldots, e_k)$ — его ортогональный базис, $x \in \mathbb{E}$.

Пусть есть базис $e_1, \ldots, e_n$ в $\mathbb{E}$. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта даёт ортогональный базис $(f_1, \ldots, f_n)$, причём:

$$\begin{aligned}
&f_1 = e_1 \\
&f_2 \in e_2 + \langle e_1 \rangle \\
&\ \vdots \\
&f_n \in e_n + \langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle
\end{aligned}$$

Точно так же можно заметить, что $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle \ \forall i = 1, \ldots, n$.

$$pr_S x = \sum_{i=1}^{k} \frac{(x, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i, \text{ — для ортогонального базиса}$$

$$pr_S x = \sum_{i=1}^{k} (x, e_i) e_i, \text{ — для ортонормированного базиса}$$

68. Теорема Пифагора в евклидовом пространстве

Если $x,\, y \in \mathbb{E}$ и $x \perp y$ $((x,\, y) = 0)$, то

$$|x + y| = |x|^2 + |y|^2.$$

69. Расстояние между векторами евклидова пространства

Рассмотрим векторы $x,\, y \in \mathbb{E}$.
Расстоянием между двумя векторами называется величина

$$\rho(x,\, y) := |x - y|.$$

70. Неравенство треугольника в евклидовом пространстве

$$\rho(a,\, b) + \rho(b,\, c) \geqslant \rho(a,\, c)\ \forall a, b, c \in \mathbb{E}.$$

71. Теорема о расстоянии между вектором и подпространством в терминах ортогональной составляющей

Пусть $x \in \mathbb{E}$ и $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство.
Теорема. $\rho(x,\, U) = |ort_S x|$, причём $pr_S x$ – единственный ближайший к x вектор из S.

72. Псевдорешение несовместной системы линейных уравнений

Метод наименьших квадратов:
Имеем СЛУ(*) $Ax = b$, где $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор неизвестных, $b \in \mathbb{R}^m$.

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ — решение СЛУ(*) $\Leftrightarrow Ax_0 = b \Leftrightarrow Ax_0 - b = 0 \Leftrightarrow |Ax_0 - b| = 0$ (где $\mathbb{R}^n$ рассматривается как евклидово пространство со стандартным скалярным произведением) $\Leftrightarrow \rho(Ax_o,\, b) = 0$.

В случае, когда СЛУ(*) несовместна, набор $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (вектор-столбец) называется **псевдорешением**, если $\rho(Ax_o,\, b) = \min(Ax,\, b)$.

73. Формула для расстояния от вектора до подпространства в терминах матриц Грама

Пусть U — подпространство евклидова пространства $\mathbb{E}$, $x \in \mathbb{E}$, $(e_1,\, \ldots,\, e_n)$ — базис U. Тогда

$$(\rho(x,\, U))^2 = \frac{\det G(e_1,\, \ldots,\, e_k,\, x)}{\det G(e_1,\, \ldots,\, e_k)}$$

74. k-мерный параллелепипед и его объём

k-мерным параллелепипедом, натянутым на векторы $a_1, \ \ldots, a_k$, называется подмножество

$$P(a_1, \ \ldots, a_k) := \left\{ x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \mid 0 \leqslant x_t \leqslant 1 \right\}.$$

75. В каком случае два базиса евклидова пространства называются одинаково ориентированными?

Одинаковая ориентированность — отношение эквивалентности на множестве всех базисов в $\mathbb{E}$.

Пусть $\mathbb{e}$, $\mathbb{e}'$ — два базиса пространства.

Будем говорить, что базисы $\mathbb{e}$, $\mathbb{e}'$ **ориентированны одинаково**, если определитель матрицы перехода от $\mathbb{e}$ к $\mathbb{e}'$ больше нуля ($\det C > 0$).

76. Смешанное произведение векторов трёхмерного евклидова пространства, формула для его вычисления в терминах координат в правом ортонормированном базисе

Правый ортонормированный базис — положительно ориентированный.

Смешанным произведением векторов a, b, c называется величина $(a, \, b, \, c) = vol(a, \, b, \, c)$.

Если $(e_1, \, e_2, \, e_3)$ — правый ортонормированный базис и

$$\begin{aligned} a &= a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \\ b &= b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 \\ c &= c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3, \end{aligned}$$

то

$$(a, \, b, \, c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

77. Критерий компланарности трёх векторов трёхмерного евклидова пространства

Векторы a, b, c **компланарны** (линейно зависимы) $\Longleftrightarrow (a, \, b, \, c) = 0$.

78. Векторное произведение в трёхмерном евклидовом пространстве

Векторным произведением векторов $a, b \in \mathbb{E}$ называется вектор c такой, что:

1. $c \perp \langle a, \, b \rangle$
2. $|c| = |a||b| \sin\alpha$ (или же $|c|$ = площади параллелограмма, образованного $(a, \, b)$)
3. $(a, \, b, \, c) \geqslant 0$ (т.е. векторы образуют правую тройку)

Обозначение: $[a, \, b]$ или $a \times b$.

79. Критерий коллинеарности двух векторов трёхмерного евклидова пространства

a, b **коллинеарны** (т.е. линейно зависимы) $\iff [a,\, b] = 0$.

80. Выражение смешанного произведения через векторное и скалярное в трёхмерном евклидовом пространстве

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}^3: \ (a,\, b,\, c) = (a,\, [b,\, c])$$

81. Формула для двойного векторного произведения в трёхмерном евклидовом пространстве

$$\begin{aligned}[a,\, [b,\, c]] &= (a,\, c)b - (a,\, b)c \\ &= b(a,\, c) - c(a,\, b)\end{aligned}$$

82. Формула для вычисления векторного произведения в терминах координат в правом ортонормированном базисе

Пусть $(e_1,\, e_2,\, e_3)$ — ортонормированный базис.

$$\begin{aligned}a &= a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \\ b &= b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}[a,\, b] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \\ = (b_1c_2 - b_2c_1)e_1 - (a_1c_2 - a_2c_1)e_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)e_3 = \\ = ((b_1c_2 - b_2c_1),\, (a_2c_1 - a_1c_2),\, (a_1b_2 - a_2b_1))\end{aligned}$$

83. Линейное многообразие. Характеризация линейных многообразий как сдвигов подпространств

Линейное многообразие в $\mathbb{R}^n$ — множество решений некоторой совместной СЛУ.

84. Критерий равенства двух линейных многообразий. Направляющее подпространство и размерность линейного многообразия

$L_1,\, L_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ — множества всех решений. $S_1,\, S_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ — множество решений однородной СЛУ $Ax = 0$.

$L_1 = v_1 + S_1$ и $L_2 = v_2 + S_2$ — два линейных многообразия.

$$L_1 = L_2 \iff \begin{cases} S_1 = S_2 \ (= S), \\ v_1 - v_2 \in S \end{cases}$$

S называется **направляющим подпространством** линейного многообразия L.

85. Теорема о плоскости, проходящей через точку $k+1$ в $\mathbb{R}^n$

Теорема. а) Через любые $k+1$ точек в $\mathbb{R}^n$ проходит плоскость размерности $\leqslant k$
б) Если $k+1$ точек не лежат в плоскости размерности $< k$, то через них проходит ровно одна плоскости размерности k

86. Три способа задания прямой в $\mathbb{R}^2$. Уравнение прямой в $\mathbb{R}^2$, проходящей через две различные точки

1. **Уравнение в координатах**: $Ax + By = C, \ \ (A,\, B) \neq (0,\, 0)$
2. **Векторное уравнение**: $(\vec{n},\, v - v_0) = 0$, где $\vec{n}$ — вектор нормали, $v - v_0$ принадлежит прямой
3. **Параметрическое уравнение**: $v = v_0 + \vec{a}\lambda$, где v_0 — точка на прямой, $\vec{a}$ — направляющий вектор прямой, λ — коэффициент

Уравнение прямой, проходящей через две точки $(x_0,\, y_0)$ и $x_1,\, y_1$:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

87. Три способа задания плоскости в $\mathbb{R}^3$. Уравнение плоскости в $\mathbb{R}^3$, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой

1. **Уравнение в координатах**: $Ax + By + Cz = D, \ \ (A,\, B,\, C) \neq (0,\, 0,\, 0)$
2. **Векторное уравнение**: $(\vec{n},\, v - v_0 = 0)$, где $\vec{n}$ — нормальный вектор плоскости, $v - v_0$ — вектор на плоскости
3. **Параметрическое уравнение**: $v = v_0 + \vec{a}\alpha + \vec{b}\beta$, где $v_0 - - -$, a, b — направляющие векторы на плоскости

Уравнение плоскости, проходящей через точки (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2):

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

88. Три способа задания прямой в $\mathbb{R}^3$. Уравнения прямой в $\mathbb{R}^3$, проходящей через две различные точки

1. **СЛУ**: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{cases}$
2. **Векторное уравнение**: $[v - v_0,\, a] = 0$, где $v - v_0$ принадлежит прямой, $\vec{a}$ — направляющий вектор
3. **Параметрическое уравнение**: $v = v_0 + \vec{a}\lambda$, где v_0 — точка на прямой, $\vec{a}$ — направляющий вектор
4. **Каноническое уравнение прямой**: $\dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2} = \dfrac{z - z_0}{a_3}$, где $a_1,\, a_2,\, a_3$ — направляющий вектор, $x_0,\, y_0,\, z_0$ — координаты точки на прямой

Уравнение прямой, проходящей через две различные точки $(x_0,\, y_0,\, z_0)$ и $(x_1,\, y_1,\, z_1)$:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

89. Случаи взаимного расположения двух прямых в $\mathbb{R}^3$

Пусть $a_1,\, a_2$ — направляющие прямых $l_1,\, l_2$, а $v_1,\, v_2$ — точки, лежащие на данных прямых. Тогда прямые $l_1,\, l_2$:

$$\left.\begin{array}{l} \text{1. совпадают} \\ \text{2. параллельны} \\ \text{3. пересекаются в точке} \end{array}\right\} \text{лежат в одной плоскости} \Rightarrow (a_1,\, a_2,\, v_2 - v_1) = 0$$

4. скрещиваются или не лежат в одной плоскости

90. Случаи взаимного расположения трёх попарно различных плоскостей в $\mathbb{R}^3$

Пусть имеются три плоскости $P_1,\, P_2,\, P_3$.

1. Среди $P_1,\, P_2,\, P_3$ есть две параллельных
   (a) $P_1 \parallel P_2 \parallel P_3$
   (b) Две параллельны, а третья их пересекает
2. Никакие две плоскости не параллельны
   (a) Все три пересекаются по одной прямой
   (b) Прямые пересечения параллельны
   (c) $P_1,\, P_2,\, P_3$ пересекаются в одной точке

91. Формула для расстояния от точки до прямой в $\mathbb{R}^3$

Пусть l — прямая, v — точка, не лежащая на данной прямой, a — направляющий вектор прямой.

$$\rho(v,\, l) = |ort_{\langle a \rangle}(v - v_0)| = \frac{[v - v_0,\, a]}{|a|}$$

92. Формула для расстояния от точки до плоскости в $\mathbb{R}^3$

Пусть P — плоскость, n — вектор нормали, v_0 — точка, лежащая на плоскости, v — точка, не лежащая на плоскости, $S = \langle n\rangle^\perp$ — направляющее подпространство.

$$\rho(v,\, P) = |ort_S(v - v_0)| = |pr_{\langle n\rangle}(v - v_0)| = \left|\frac{(v - v_0,\, n)}{(n,\, n)}n\right| = \frac{|(v - v_0,\, n)|}{|n|}$$

93. Формула для расстояния между двумя скрещивающимися прямыми в $\mathbb{R}^3$

Пусть $l_1,\, l_2$ — прямые. $v_1,\, v_2$ — точки, лежащие на каждой из данных прямых. $a_1,\, a_2$ — их направляющие векторы.

Построим плоскости

$$P_1 = v_1 + \langle a_1,\, a_2\rangle \supseteq l_1$$
$$P_2 = v_2 + \langle a_1,\, a_2\rangle \supseteq l_2$$

Тогда

$$\rho(l_1,\, l_2) = \rho(P_1,\, P_2) = \frac{|(a_1,\, a_2,\, v_2 - v_1)|}{|[a_1,\, a_2]|}$$

94. Линейный оператор

Пусть V — конечномерное векторное пространство.

Линейным оператором (преобразованием) называется всякое линейное отображение $\varphi : V \to V$, то есть из V в себя. *Обозначение*: $L(V) = \mathrm{Hom}(V,\, V)$.

95. Матрица линейного оператора

Пусть V — векторное пространство, $\mathbb{e} = (e_1,\ \ldots,\, e_n)$ — его базис и φ — его линейный оператор.

Матрицей линейного оператора φ называется такая матрица, в j-ом столбце которой стоят координаты вектора $\varphi(e_j)$ в базисе $\mathbb{e}$.

$$(\varphi(e_1),\ \ldots,\, \varphi(e_n)) = (e_1,\ \ldots,\, e_n)A, \quad A \in \mathrm{Mat}_n.$$

96. Формула преобразования координат вектора при действии линейного оператора

Пусть $\varphi \in L(V)$, A — матрица φ в базисе $\mathbb{e}$. Тогда

$$\begin{aligned} v &= x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \\ \varphi(v) &= y_1e_1 + \ldots + y_ne_n \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} &= A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

97. Формула изменения матрицы линейного оператора при переходе к другому базису

Пусть φ — линейный оператор векторного пространства V, A — матрица φ в базисе $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$. Пусть $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ — другой базис, причём $(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)C$.

Тогда
$$A' = C^{-1}AC,$$
где C — матрица перехода к новому базису $\mathbb{e}'$, A' — матрица φ в базисе $\mathbb{e}'$.

98. Подобные матрицы

Две матрицы A', $A \in \mathrm{Mat}_n(F)$ называются **подобными**, если существует такая матрица $C \in \mathrm{Mat}_n(F)$, $\det C \neq 0$, что $A' = C^{-1}AC$.

99. Подпространство, инвариантное относительно линейного оператора

Подпространство $U \subseteq V$ называется **инвариантным** относительно φ (или φ-инвариантным), если $\varphi(U) \subseteq U$. То есть $\forall u \in U : \varphi(u) \in U$.

100. Матрица линейного оператора в базисе, дополняющем базис инвариантного подпространства

Пусть $\varphi : V \to V$ — линейный оператор.

Пусть $U \subset V$ — φ-инвариантное подпространство. Также пусть $e_1, \ldots, e_k$ — базис в U. Дополним его до базиса V : $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$. Тогда

$$\underbrace{A(\varphi, \mathbb{e})}_{\text{матрица с углом нулей}} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad \text{где } B \in \mathrm{Mat}_n.$$

101. Собственный вектор линейного оператора

Пусть $\varphi : V \to V$ — линейный оператор.

Ненулевой **вектор** $v \in V$ называется **собственным** для V, если $\varphi(v) = \lambda v$ для некоторого $\lambda \in F$.

102. Собственное значение линейного оператора

Элемент $\lambda \in F$ называется **собственным значением** линейного оператора $\varphi : V \to V$, если существует такой ненулевой вектор $v \in V$, что $\varphi(v) = \lambda v$.

103. Спектр линейного оператора

Множество всех собственных значений линейного оператора φ называется **спектром**.
Обозначение: $\mathrm{Spec}(\varphi)$.

104. Диагонализуемый линейный оператор

Линейный оператор φ называется **диагонализуемым**, если существует такой базис $\mathbb{e}$, что $A(\varphi, \mathbb{e})$ — диагональная матрица, т.е. $A(\varphi, \mathbb{e}) = diag(\lambda_1, \ \dots, \lambda_n)$

105. Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах собственных векторов

Линейный оператор φ диагонализуем тогда и только тогда, когда в V есть базис из собственных векторов для φ.

106. Собственное подпространство линейного оператора

Пусть $\lambda \in \operatorname{Spec}(\varphi)$.

Множество $V_\lambda(\varphi) = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$ называется **собственным подпространством** линейного оператора, отвечающим собственному значению λ.

107. Характеристический многочлен линейного оператора

Пусть $t \in F$.

Многочлен $\chi_\varphi(t) := (-1)^n \det(\varphi - t \cdot \mathrm{id})$ называется **характеристическим многочленом** линейного оператора φ.

108. Связь спектра линейного оператора с его характеристическим многочленом

Пусть $\lambda \in \operatorname{Spec}(\varphi)$.

$$\chi_\varphi(\lambda) = 0,$$

то есть λ — корень характеристического многочлена.

109. Алгебраическая кратность собственного значения линейного оператора

Пусть $\varphi : V \to V$ — линейный оператор, λ — его собственное значение.

Алгебраической кратностью собственного значения λ линейного оператора φ называется такое число k, которое равняется кратности λ как корня характеристического многочлена.

110. Геометрическая кратность собственного значения линейного оператора

Пусть $\varphi : V \to V$ — линейный оператор, λ — его собственное значение, $V_\lambda(\varphi)$ — соответствующее собственное подпространство.

Геометрической кратностью собственного значения λ называется число $\dim V_\lambda(\varphi)$ (проще говоря — количество линейно независимых векторов в ФСР матрицы, образованной λ).

111. Связь между алгебраической и геометрической кратностями собственного значения линейного оператора

Пусть a_i — алгебраическая кратность собственного значения, s_i — геометрическая кратность. Тогда справедливо неравенство

$$s_i \leqslant a_i$$

112. Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах его характеристического многочлена и кратностей его собственных значений

Линейный оператор $\varphi : V \to V$ диагонализуем тогда и только тогда, когда:

- $\chi_\varphi(t)$ разлагается на линейные множители
- Для любого собственного значения φ геометрическая кратность равна алгебраической