

Линейная алгебра.  
Коллоквиум 2 семестр.  
Основано на реальных событиях.  
v0.9

26 мая 2017

## Ченжлоги

- v0.0 (16.05.2017) — исходное (спасибо Борису, Глебу, Александру Г. (Ц.))  
v0.1 (16.05.2017) — поправлены графические недочёты и 5-й номер  
v0.2 (17.05.2017) — поправлены мелкие недочёты. Добавлен 4-й, 7-й номера, а также поправлен 10-й, 13-й, 24-й (спасибо Наташе)  
v0.3 (18.05.2017) — поправил 60, 61, 67, 68, 71, 72, 74, 82, 100, 107 (спасибо Наташе, Стасу)  
v0.4 (20.05.2017) — перенумерованы вопросы, т.к. убран 5-й (про 5 эквивалентных условий). Поправил 5, 6, 7, 14, 16 (спасибо Соне, Наташе, Стасу). Добавил 112-123 определения  
v0.5 (20.05.2017) — поправил 5, 9 (обратно), 25 (спасибо Соне, Владу, Стасу, Наташе)  
v0.6 (21.05.2017) — поправил 16, 18, 62, 63 (спасибо Соне, Стасу, Сергею)  
v0.7 (22.05.2017) — поправил 49, 50 (спасибо Борису)  
v0.8 (23.05.2017) — дополнил 5, 28, 49 (спасибо Соне, Наташе)  
v0.9 (24.05.2017) — поправил 72, 86, 90, 106 (спасибо Алексею)

## Определения

### 1. Сумма двух подпространств векторного пространства

**Сумма двух подпространств**  $U$  и  $W$  — это множество  $U+W : \{u+w \mid u \in U, w \in W\}$ .  
*Замечание.*  $\dim(U \cap W) \leq \dim U \leq \dim(U+W)$

### 2. Теорема о связи размерности суммы двух подпространств с размерностью их пересечения

**Теорема.**  $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W)$

### 3. Сумма нескольких подпространств векторного пространства

Пусть  $U_1, \dots, U_k$  — подпространства векторного пространства  $V$ .

**Суммой нескольких подпространств** называется

$$U_1 + \dots + U_k = \{u_1 + \dots + u_k \mid u_i \in U_i\}$$

### 4. Линейная независимость нескольких подпространств векторного пространства

Подпространства векторного пространства  $L_1, \dots, L_k$  линейно независимы тогда и только тогда, когда:  $v_1 + \dots + v_k = 0 \implies v_1 = \dots = v_k = 0, v_i \in L_i$ .

### 5. Разложение векторного пространства в прямую сумму подпространств

Пусть  $U_1, \dots, U_k$  — подпространства векторного пространства  $V$ .

Тогда, если  $U_i \cap (U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k) = \{0\}$  (т.е. линейно независимы), то  $U_1 \oplus \dots \oplus U_k$  называется **прямой суммой** подпространств.

### 6. При каких условиях на подпространства $U_1, U_2$ , векторного пространства $V$ имеет место разложение $V = U_1 \oplus U_2$ ?

1.  $V = U_1 + U_2$ ;
2.  $U_1$  и  $U_2$  — линейно независимы ( $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ );
3.  $\dim U_1 + \dim U_2 = \dim V$ ;
4. любой вектор  $v \in V$  единственным образом разлагается на  $U_1 + U_2$ .

### 7. Описание всех базисов $n$ -мерного векторного пространства в терминах одного базиса и матриц координат

Пусть  $V$  — векторное пространство,  $\dim V = n$ ,  $e_1, \dots, e_n$  — базис. То есть

$$\forall v \in V : \exists! v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n,$$

где  $x_1, \dots, x_n \in F$  — координаты вектора  $v$  в базисе  $(e_1, \dots, e_n)$ . Пусть также есть базис  $e'_1, \dots, e'_n$ :

$$e'_1 = c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \dots + c_{n1}e_n$$

$$e'_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + \dots + c_{n2}e_n$$

$$\vdots$$

$$e'_n = c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \dots + c_{nn}e_n$$

Обозначим матрицу  $C = (c_{ij})$ . Тогда можно переписать  $(e'_1, \dots, e'_n)$  как  $(e_1, \dots, e_n) \cdot C$ .

*Замечание.*  $e'_1, \dots, e'_n$  образуют базис  $\iff \det C \neq 0$ .

## 8. Матрица перехода от одного базиса векторного пространства к другому

Пусть  $V$  — векторное пространство,  $\dim V = n$ ,  $e_1, \dots, e_n$  — базис, а  $e'_1, \dots, e'_n$  — некий набор из  $n$  векторов. Тогда каждый вектор из этого набора линейно выражается через базис:

$$e'_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} e_i, \quad c_{ij} \in F$$
$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C, \quad C = (c_{ij}).$$

То есть мы получили матрицу, где в  $j$ -ом столбце стоят коэффициенты линейного разложения вектора  $e'_j$  в базисе  $(e_1, \dots, e_n)$ .

Теперь пусть  $e'_1, \dots, e'_n$  — тоже базис в  $V$ . В этом случае  $\det C \neq 0$ .

Матрица  $C$  называется **матрицей перехода** от базиса  $(e_1, \dots, e_n)$  к базису  $(e'_1, \dots, e'_n)$ .

## 9. Формула преобразования координат вектора при замене базиса векторного пространства

Пусть  $C$  — матрица перехода от базиса  $(e_1, \dots, e_n)$  к базису  $(e'_1, \dots, e'_n)$ .

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad x_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} x'_j$$

## 10. Линейное отображение векторных пространств, его простейшие свойства.

Пусть  $V, W$  — векторные пространства.

Отображение  $\varphi : V \rightarrow W$  называется **линейным**, если:

1.  $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in V$
2.  $\varphi(\alpha v) = \alpha \varphi(v), \quad \forall \alpha \in F, \forall v \in V$

**Простейшие свойства** линейного отображения:

1.  $\varphi(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$
2.  $\varphi(-v) = -\varphi(v), \quad \forall v \in V$

## 11. Изоморфизм векторных пространств. Изоморфные векторные пространства

Пусть  $V, W$  — векторные пространства над полем  $F$ .

Отображение  $\varphi : V \rightarrow W$  называется **изоморфизмом**, если  $\varphi$  линейно и биективно.

Обозначение:  $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ .

Два векторных пространства называются **изоморфными**, если существует изоморфизм  $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$  (и тогда существует изоморфизм  $W \xrightarrow{\sim} V$  по предположению). Обозначение:  $V \simeq W$ .

## 12. Какими свойствами обладает отношение изоморфности на множестве всех векторных пространств?

**Следствие из теоремы.** Изоморфизм — это отношение эквивалентности на множестве всех векторных пространств над фиксированным полем  $F$  (рефлексивность, симметричность, транзитивность).

Если  $\varphi$  и  $\psi$  изоморфны, то  $\varphi \circ \psi$  — тоже изоморфизм.

## 13. Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств

Два конечномерных векторных пространства  $V$  и  $W$  над полем  $F$  **изоморфны** тогда и только тогда, когда  $\dim V = \dim W$ .

## 14. Матрица линейного отображения

Пусть  $V$  и  $W$  — векторные пространства,  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,  $f = (f_1, \dots, f_m)$  — базис  $W$ ,  $\varphi : V \rightarrow W$  — линейное отображение. Тогда:

$$\varphi(e_j) = a_{1j}f_1 + \dots + a_{mj}f_m = \sum_{i=1}^m a_{ij}f_i.$$

Матрица  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$  называется матрицей линейного отображения  $\varphi$  в базисах  $e$  и  $f$  (или по отношению к базисам  $e$  и  $f$ ).

## 15. Связь между координатами вектора и его образа при линейном отображении

Пусть  $V$  и  $W$  — векторные пространства,  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,  $f = (f_1, \dots, f_m)$  — базис  $W$ ,  $\varphi : V \rightarrow W$  — линейное отображение.  $A = A(\varphi, e, f)$  — матрица линейного отображения  $\varphi$ .

Если  $v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$  и  $\varphi(v) = y_1f_1 + \dots + y_mf_m$ , то

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

## 16. Формула изменения матрицы линейного отображения при замене базисов

Пусть  $V$  и  $W$  — векторные пространства,  $e = (e_1, \dots, e_n)$  и  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$  — базисы  $V$ ,  $f = (f_1, \dots, f_m)$  и  $f' = (f'_1, \dots, f'_m)$  — базисы  $W$ ,  $A$  — матрица линейного отображения  $\varphi : V \rightarrow W$  по отношению к  $e$  и  $f$ ,  $A'$  — матрица линейного отображения по отношению к базисам  $e'$  и  $f'$ ,  $e' = eC$ ,  $f' = fD$ . Тогда

$$A' = D^{-1}AC$$

## 17. Сумма двух линейных отображений и ее матрица. Произведение линейного отображения на скаляр и его матрица

Пусть  $V, W$  — векторные пространства  $\text{Hom}(V, W)$  — множество всех линейных отображений из  $V$  в  $W$ .  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,  $f = (f_1, \dots, f_m)$  — базис  $W$ ,  $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$ ,  $\alpha \in F$ ,  $A_\varphi$  — матрица линейного отображения  $\varphi$ ,  $A_\psi$  — матрица  $\psi$ .

1. **Сумма**  $\varphi + \psi$  — это линейное отображение, такое что  $\forall v \in V : (\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v)$ .  
**Матрица суммы** линейных отображений:  $A_{\varphi + \psi} = A_\varphi + A_\psi$ .
2. **Произведение**  $\alpha\varphi$  — это линейное отображение, такое что  $\forall v \in V : (\alpha\varphi)(v) = \alpha\varphi(v)$ .  
**Матрица произведения** линейного отображения на скаляр:  $A_{\alpha\varphi} = \alpha A_\varphi$

## 18. Композиция двух линейных отображений и ее матрица

Пусть  $V, U, W$  — векторные пространства.  $V \xrightarrow{g} U \xrightarrow{f} W$  — два линейных отображения.  $n, m, k$  — их размерности соответственно.  $e'', e', e$  — их базисы, а  $A_g, A_f, A_{fg}$  — матрицы отображений в этих базисах.

$$A_{fg} = A_f A_g$$

**Матрица композиции линейных отображений** имеет вид:

$$A_{fg}(i, j) = \sum_i a_{ji} b_{ik},$$

где  $a$  — коэффициент при  $f$ , а  $b$  — коэффициент при  $g$ .

## 19. Ядро и образ линейного отображения

Пусть  $V, W$  — векторные пространства с линейным отображением  $\varphi : V \rightarrow W$ .

**Ядро**  $\varphi$  — это множество  $\text{Ker} \varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$

**Образ**  $\varphi$  — это множество  $\text{Im} \varphi := \{w \in W \mid \exists v \in V : \varphi(v) = w\}$

## 20. Критерий инъективности линейного отображения в терминах его ядра. Критерий изоморфности линейного отображения в терминах ядра и образа

Пусть  $\varphi : V \rightarrow W$  — линейное отображение.

1. Отображение  $\varphi$  **инъективно** тогда и только тогда, когда  $\text{Ker} \varphi = \{0\}$
2. Отображение  $\varphi$  является **изоморфизмом** тогда и только тогда, когда  $\text{Ker} \varphi = \{0\}$  и  $\text{Im} \varphi = W$ .

## 21. Связь между рангом матрицы линейного отображения и размерностью его образа

Пусть  $V, W$  — векторные пространства,  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,  $f = (f_1, \dots, f_m)$  — базис  $W$ ,  $A$  — матрица линейного отображения  $\varphi : V \rightarrow W$ .

$$\dim \text{Im} \varphi = \text{rk} A$$

## 22. Оценки на ранг произведения двух матриц

Пусть  $A \in \text{Mat}_{k \times m}$ ,  $B \in \text{Mat}_{m \times n}$ . Тогда

$$\text{rk} AB \leq \min(\text{rk} A, \text{rk} B)$$

## 23. Каким свойством обладает набор векторов, дополняющий базис ядра линейного отображения до базиса всего пространства?

Образы векторов, дополняющих базис ядра линейного отображения до базиса всего пространства, являются базисом образа самого пространства.

## 24. Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения

$$\dim \text{Im} \varphi = \dim V - \dim \text{Ker} \varphi$$

## 25. К какому простейшему виду можно привести матрицу линейного отображения путем замены базисов?

Простейшим видом матрицы линейного отображения является её канонический вид — диагональная матрица  $D \in M_n$  вида

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & 0 & \\ \hline & & & \ddots & & \\ & 0 & & & 0 & \end{array} \right), \text{ где количество единиц} = \text{rk} A$$

задаваемая формулой

$$A' = D^{-1}AC$$

## 26. Линейная функция на векторном пространстве

**Линейной функцией** (формой) на векторном пространстве  $V$  называется всякое линейное отображение  $\sigma : V \rightarrow F$ . *Обозначение:*  $V^* = \text{Hom}(V, F)$ .

## 27. Сопряженное (двойственное) векторное пространство и его размерность

Пространство  $V^*$  (т.е. множество линейных функций на  $V$ ) называется **сопряженным** (двойственным) к пространству  $V$ .

Пусть  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ . Тогда он определяет изоморфизм  $\varphi : V^* \rightarrow \text{Mat}_{1 \times n}$ ,  $\alpha \mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , где  $\alpha_i = \varphi(e_i)$  и  $\alpha$  — линейная функция.

$$\dim V^* = n.$$

## 28. Базис сопряженного пространства, двойственный к данному базису исходного векторного пространства

Пусть  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ . Рассмотрим линейные функции  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  такие, что  $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$ , где  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ . То есть  $\varepsilon_i = (\delta_{i1}, \dots, \delta_{ii}, \dots, \delta_{in}) = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ .

$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  — базис  $V^*$  (сопряженного пространства).

Также справедлива формула:  $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1, \dots, e_n) = E$ .

## 29. Билинейная форма на векторном пространстве

**Билинейная функция** (форма) на  $V$  — это отображение  $\beta : V \times V \rightarrow F$ , линейное по каждому аргументу:

1.  $\beta(x_1 + x_2, y) = \beta(x_1, y) + \beta(x_2, y)$
2.  $\beta(\lambda x, y) = \lambda \beta(x, y)$
3. аналогично 1, но по второму аргументу
4. аналогично 2, но по второму аргументу

## 30. Матрица билинейной формы

Пусть  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$  ( $\dim V < \infty$ ),  $\beta : V \times V \rightarrow F$  — билинейная функция.

**Матрицей билинейной функции**  $\beta$  в базисе  $e$  называется матрица  $B = (b_{ij})$ , где  $b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$ . Обозначение:  $B(\beta, e)$

## 31. Формула для вычисления значений билинейной формы в координатах

Пусть  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$  ( $\dim V < \infty$ ),  $\beta : V \times V \rightarrow F$  — билинейная функция,  $B$  — её матрица в базисе  $e$ .

Тогда для некоторых векторов  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in V$  и  $y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \in V$ :

$$\beta(x, y) = (x_1, \dots, x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

## 32. Формула изменения матрицы билинейной формы при переходе к другому базису

Пусть

$$\begin{aligned} e &= (e_1, \dots, e_n) \text{ — базис в } V, \\ e' &= (e'_1, \dots, e'_n) \text{ — другой базис в } V, \\ e' &= eC, \\ B &= B(\beta, e), \\ B' &= B(\beta, e'). \end{aligned}$$

Тогда

$$B' = C^T B C.$$

### 33. Ранг билинейной формы

Пусть  $B(\beta, e)$  — матрица билинейной функции  $\beta$  в базисе  $e$ .

Число  $\text{rk} B$  называется **рангом билинейной функции**  $\beta$ . Обозначение:  $\text{rk} \beta$ .

### 34. Симметричная билинейная форма

Билинейная функция  $\beta$  называется **симметричной**, если  $\beta(x, y) = \beta(y, x) \forall x, y \in V$ .  
 $\beta$  симметрична  $\iff B$  симметрична (т.е.  $B = B^T$ ).

### 35. Квадратичная форма

Пусть  $\beta : V \times V \rightarrow F$  — билинейная функция. Тогда отображение  $Q_\beta : V \rightarrow F$ , заданное формулой  $Q_\beta(x) = \beta(x, x)$  называется **квадратичной функцией** (формой), ассоциированной с билинейной функцией  $\beta$ .

### 36. Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами

Пусть в поле  $F$  выполняется условие:  $1 + 1 \neq 0$  (т.е.  $2 \neq 0$ ).

**Теорема.** Отображение  $\beta \rightarrow Q_\beta$  является биекцией между симметричными и квадратичными билинейными функциями.

### 37. Симметризация билинейной формы

Билинейная функция  $\sigma(x, y) = \frac{1}{2}(\beta(x, y) + \beta(y, x))$  называется **симметризацией билинейной функции**  $\beta$ .

### 38. Поляризация квадратичной формы

Симметричная билинейная функция  $\beta(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y))$  называется **поляризацией квадратичной формы**  $Q$ .

### 39. Матрица квадратичной формы

Пусть  $V$  — векторное пространство,  $\dim V < \infty$ .

**Матрицей квадратичной формы**  $Q : V \rightarrow F$  в базисе  $e$  называется матрица соответствующей ей симметричной билинейной функции (поляризацией)  $\beta : V \times V \rightarrow F$  в том же базисе.

### 40. Канонический вид квадратичной формы

Квадратичная форма  $Q$  имеет в базисе  $e = (e_1, \dots, e_n)$  **канонический вид**, если для любого вектора  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$  верно, что  $Q(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2$ , где  $a_i \in F$  (т.е. матрица квадратичной формы  $Q$  в этом базисе диагональна).



## 41. Нормальный вид квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Квадратичная форма  $Q$  имеет в базисе  $e = (e_1, \dots, e_n)$  **нормальный вид**, если для любого вектора  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$  верно, что  $Q(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2$ , где  $a_i \in \{-1, 0, 1\}$  (т.е. матрица квадратичной формы  $Q$  в этом базисе диагональна).

## 42. Индексы инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Пусть  $Q$  — квадратичная функция над  $R$ , которая в базисе  $e$  имеет нормальный вид:

$$Q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2,$$

где  $s$  — количество положительных слагаемых,  $t$  — количество отрицательных слагаемых. Тогда

$i_+ := s$  — **положительный индекс инерции** квадратичной формы  $Q$

$i_- := t$  — **отрицательный индекс инерции** квадратичной формы  $Q$

$n - s - t$  — **нулевой индекс инерции** квадратичной формы  $Q$

## 43. Закон инерции для квадратичной формы над $\mathbb{R}$

**Теорема.** Индексы инерции ( $i_+ := s$ ,  $i_- := t$ ) не зависят от базиса, в котором  $Q$  принимает нормальный вид.

## 44. Положительно/неотрицательно определенная квадратичная форма

Квадратичная форма  $Q$  называется **положительно определённой** ( $Q > 0$ ), если  $Q(x) > 0 \forall x \neq 0$ , а её нормальный вид:  $x_1^2 + \dots + x_n^2$ .

Квадратичная форма  $Q$  называется **неотрицательно определённой** ( $Q \geq 0$ ), если  $Q(x) \geq 0 \forall x$ , а её нормальный вид:  $x_1^2 + \dots + x_k^2$ ,  $k \leq n$ .

## 45. Отрицательно/неположительно определенная квадратичная форма

Квадратичная форма  $Q$  называется **отрицательно определённой** ( $Q < 0$ ), если  $Q(x) < 0 \forall x \neq 0$ , а её нормальный вид:  $-x_1^2 - \dots - x_n^2$ .

Квадратичная форма  $Q$  называется **неположительно определённой** ( $Q \leq 0$ ), если  $Q(x) \leq 0 \forall x$ , а её нормальный вид:  $-x_1^2 - \dots - x_k^2$ ,  $k \leq n$ .

## 46. Неопределенная квадратичная форма

Квадратичная форма называется **неопределённой**, если  $\exists x, y : Q(x) > 0, Q(y) < 0$ , а её нормальный вид:  $x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2$ ,  $s, t \geq 1$ .

## 47. Следствие метода Якоби о нахождении индексов инерции квадратичной формы

Пусть  $B = B(Q, e)$ ,  $B_k = B(Q, e)$ ,  $\delta_k = \det B_k$  —  $k$ -й угловой минор.

**Теорема.** Пусть  $\delta_k \neq 0 \forall k = 1, \dots, n$ . Тогда  $i_-$  равен числу перемен знака в последовательности  $1, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$

## 48. Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы

**Теорема.**  $Q > 0$  тогда и только тогда, когда  $\delta_i > 0$  для всех  $i$ .

## 49. Критерий отрицательной определённости квадратичной формы

$$Q < 0 \iff \begin{cases} \delta_i < 0, i \neq 2, \\ \delta_i > 0, i = 2 \end{cases}$$

## 50. Евклидово пространство

**Евклидово пространство** ( $F = \mathbb{R}$ ) — это векторное пространство  $\mathbb{E}$  над полем  $\mathbb{R}$ , на котором задана положительно определённая симметричная билинейная функция  $(\cdot, \cdot) : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ , которую мы будем называть произведением.

## 51. Длина вектора в евклидовом пространстве

$\mathbb{E}$  — евклидово пространство,  $\dim \mathbb{E} < \infty$

**Длиной вектора**  $x \in \mathbb{E}$  называется число  $|x| = \sqrt{(x, x)}$ .  $|x| > 0$ , причём  $|x| = 0 \iff x = 0$ .

## 52. Неравенство Коши-Буняковского

Пусть  $x, y \in \mathbb{E}$ . Тогда

$$|(x, y)| \leq |x||y|,$$

причем знак равенства возможен тогда и только тогда, когда  $x$  и  $y$  пропорциональны.

## 53. Угол между ненулевыми векторами евклидова пространства

**Углом между векторами**  $x$  и  $y$  называют такое число  $\alpha \in [0, \pi]$ , что

$$\cos \alpha = \frac{(x, y)}{|x||y|}.$$

## 54. Матрица Грама системы векторов евклидова пространства

$v_1, \dots, v_k \in \mathbb{E}$  — система векторов.

Матрицей Грама системы векторов  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{E}$  называется матрица

$$G(v_1, \dots, v_k) := \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) & \dots & (v_1, v_k) \\ (v_2, v_1) & (v_2, v_2) & \dots & (v_2, v_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (v_k, v_1) & (v_k, v_2) & \dots & (v_k, v_k) \end{pmatrix} := (g_{ij}), \quad g_{ij} = (v_i, v_j).$$

## 55. Свойства определителя матрицы Грама

1.  $\det G(v_1, \dots, v_k) \geq 0$
2.  $\det G(v_1, \dots, v_k) = 0$  тогда и только тогда, когда  $v_1, \dots, v_k$  линейно зависимы.

## 56. Ортогональное дополнение подмножества евклидова пространства

Пусть  $\mathbb{E}$  — евклидово пространство,  $\dim \mathbb{E} = n$ .  $S \subseteq \mathbb{E}$  — произвольное подпространство. Ортогональным дополнением к  $S$  называется множество  $S^\perp = \{x \in \mathbb{E} \mid (x, y) = 0 \ \forall y \in S\}$ .

## 57. Чему равна размерность ортогонального дополнения к подпространству?

Пусть  $S \subseteq \mathbb{E}$ ,  $\dim \mathbb{E} = n$ . Тогда

$$\dim S^\perp = n - \dim S.$$

## 58. Каким свойством обладают подпространство евклидова пространства и его ортогональное дополнение?

Пусть  $S \subseteq \mathbb{E}$ . Тогда:

1.  $\mathbb{E} = S \oplus S^\perp$  — евклидово пространство разлагается в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения
2.  $(S^\perp)^\perp = S$  — ортогональное дополнение ортогонального дополнения пространства есть само пространство

## 59. Ортогональная проекция вектора на подпространство

Пусть  $S \subseteq \mathbb{E}$ . Тогда  $\forall x \in E$  единственным образом разбивается на сумму  $x = y + z$ , где  $y \in S$ , а  $z \in S^\perp$ .

Вектор  $y$  называется ортогональной проекцией вектора  $x$  на подпространство  $S$ .

Обозначение:  $pr_s x$ .

## 60. Ортогональная составляющая вектора относительно подпространства

Пусть  $S \subseteq \mathbb{E}$ . Тогда  $\forall x \in E$  единственным образом разбивается на сумму  $x = y + z$ , где  $y \in S$ , а  $z \in S^\perp$ .

Вектор  $z$  называется ортогональной составляющей вектора  $x$  вдоль подпространства  $S$ . Обозначение:  $ort_s x$ .

## 61. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в $\mathbb{R}^n$ , заданное своим базисом

Пусть  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$  со стандартным скалярным произведением.  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  — подпространство,  $a_1, \dots, a_k$  — базис в  $S$ .

Образуем матрицу  $A \in \text{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R})$ , где  $A^{(i)} = a_i$ .

$$\forall v \in \mathbb{E} : pr_S v = A(A^T A)^{-1} A^T v$$

## 62. Ортогональная система векторов. Ортогональный базис

Система векторов  $v_1, \dots, v_k$  евклидова пространства называется **ортогональной**, если все её векторы попарно ортогональны, т.е.  $(v_i, v_j) = 0 \ \forall i \neq j$ .

**Базис**  $(e_1, \dots, e_n)$  в  $\mathbb{E}$  называется **ортогональным**, если  $(e_i, e_j) = 0 \ \forall i \neq j$ . Это равносильно тому, что  $G(e_1, \dots, e_n)$  диагональна.

## 63. Ортонормированная система векторов. Ортонормированный базис

Система векторов  $v_1, \dots, v_k$  евклидова пространства называется **ортонормированной**, если все её векторы попарно ортогональны, т.е.  $(v_i, v_j) = 0 \ \forall i \neq j$ , и длина (норма) каждого вектора системы равна 1 ( $\Leftrightarrow G(v_1, \dots, v_k) = E$ ).

**Базис**  $(e_1, \dots, e_n)$  в  $\mathbb{E}$  называется **ортонормированным**, если  $(e_i, e_j) = 0 \ \forall i \neq j$  и длина каждого вектора равна 1:  $\left( \frac{e_1}{|e_1|}, \dots, \frac{e_n}{|e_n|} \right)$ .

## 64. Описание всех ортонормированных базисов евклидова пространства в терминах одного такого базиса и матриц перехода

Пусть  $(e_1, \dots, e_n)$  — ортонормированный базис в  $\mathbb{E}$ . Пусть также есть ещё один базис  $(e'_1, \dots, e'_n)$ , причём  $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C$ .

$(e'_1, \dots, e'_n)$  — **ортонормированный** тогда и только тогда, когда  $C^T C = E$  или, что то же самое,  $C^{-1} = C^T$ .

## 65. Ортогональная матрица

Матрица  $C \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  называется **ортогональной**, если  $C^T C = E$  или, что то же самое,  $C^{-1} = C^T$ .

Из матана:  $C$  — ортогональна  $\iff$  её столбцы образуют ортонормированный базис (сумма квадратов координат по столбцам равна единице).

## 66. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в терминах его ортогонального базиса

Пусть  $S \subseteq \mathbb{E}$  — подпространство,  $(e_1, \dots, e_k)$  — его ортогональный базис,  $x \in \mathbb{E}$ .

$$pr_S x = \sum_{i=1}^k \frac{(x, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i \text{ — для ортогонального базиса}$$

$$pr_S x = \sum_{i=1}^k (x, e_i) e_i \text{ — для ортонормированного базиса}$$

## 67. Теорема Пифагора в евклидовом пространстве

Пусть  $x, y \in \mathbb{E}$  и  $x \perp y$  ( $(x, y) = 0$ ). Тогда

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2.$$

## 68. Расстояние между векторами евклидова пространства

Рассмотрим векторы  $x, y \in \mathbb{E}$ .

**Расстоянием** между двумя векторами называется величина

$$\rho(x, y) := |x - y|.$$

## 69. Неравенство треугольника в евклидовом пространстве

$$\rho(a, b) + \rho(b, c) \geq \rho(a, c) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{E}.$$

## 70. Теорема о расстоянии между вектором и подпространством в терминах ортогональной составляющей

Пусть  $x \in \mathbb{E}$  и  $S \subseteq \mathbb{E}$  — подпространство.

**Теорема.**  $\rho(x, S) = |ort_S x|$ , причём  $pr_S x$  — единственный ближайший к  $x$  вектор из  $S$ .

## 71. Псевдорешение несовместной системы линейных уравнений

*Метод наименьших квадратов:*

Имеем СЛУ(\*)  $Ax = b$ , где  $A \in \text{Mat}_{m \times n}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  — вектор неизвестных,  $b \in \mathbb{R}^m$ .

$x_0 \in \mathbb{R}^n$  — решение СЛУ(\*)  $\Leftrightarrow Ax_0 = b \Leftrightarrow Ax_0 - b = 0 \Leftrightarrow |Ax_0 - b| = 0$  (где  $\mathbb{R}^n$  рассматривается как евклидово пространство со стандартным скалярным произведением)  $\Leftrightarrow \rho(Ax_0, b) = 0$ .

В случае, когда СЛУ(\*) несовместна, набор  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  (вектор-столбец) называется **псевдорешением**, если  $\rho(Ax_0, b) = \min \rho(Ax, b)$ .

## 72. Формула для расстояния от вектора до подпространства в терминах матриц Грама

Пусть  $S$  — подпространство евклидова пространства  $\mathbb{E}$ ,  $x \in \mathbb{E}$ ,  $(e_1, \dots, e_k)$  — базис  $S$ . Тогда

$$(\rho(x, S))^2 = \frac{\det G(e_1, \dots, e_k, x)}{\det G(e_1, \dots, e_k)}$$

## 73. $k$ -мерный параллелепипед и его объём

$k$ -мерным параллелепипедом, натянутым на векторы  $a_1, \dots, a_k$ , называется подмножество

$$P(a_1, \dots, a_k) := \left\{ x = \sum_{i=1}^k x_i a_i \mid 0 \leq x_i \leq 1 \right\}.$$

Объём  $k$ -мерного параллелепипеда — это величина  $\text{vol}P(a_1, \dots, a_k)$ , определяемая индуктивно:

$$k = 1 \Rightarrow \text{vol}P(a_1) := |a_1|$$

$$k > 1 \Rightarrow \text{vol}P(a_1, \dots, a_k) := \underbrace{\text{vol}P(a_1, \dots, a_{k-1})}_{\text{основание}} \cdot \underbrace{|h|}_{\text{высота}}, \text{ где } h = \text{ort}_{\langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle} a_k$$

## 74. В каком случае два базиса евклидова пространства называются одинаково ориентированными?

Одинаковая ориентированность — отношение эквивалентности на множестве всех базисов в  $\mathbb{E}$ .

Пусть  $e, e'$  — два базиса пространства.

Будем говорить, что базисы  $e, e'$  **ориентированны одинаково**, если определитель матрицы перехода от  $e$  к  $e'$  больше нуля ( $\det C > 0$ ).

## 75. Смешанное произведение векторов трёхмерного евклидова пространства, формула для его вычисления в терминах координат в правом ортонормированном базисе

Правый ортонормированный базис — положительно ориентированный.

**Смешанным произведением векторов  $a, b, c$**  называется величина  $(a, b, c) = \text{vol}(a, b, c)$ .

Если  $(e_1, e_2, e_3)$  — правый ортонормированный базис и

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

$$b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$$

$$c = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3,$$

то

$$(a, b, c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

## 76. Критерий компланарности трёх векторов трёхмерного евклидова пространства

Векторы  $a, b, c$  компланарны (линейно зависимы)  $\iff (a, b, c) = 0$ .

## 77. Векторное произведение в трёхмерном евклидовом пространстве

Векторным произведением векторов  $a, b \in \mathbb{E}$  называется вектор  $c$  такой, что:

1.  $c \perp \langle a, b \rangle$
2.  $|c| = |a||b| \sin \alpha$  (или же  $|c|$  = площади параллелограмма, образованного  $(a, b)$ )
3.  $(a, b, c) \geq 0$  (т.е. векторы образуют правую тройку)

Обозначение:  $[a, b]$  или  $a \times b$ .

## 78. Критерий коллинеарности двух векторов трёхмерного евклидова пространства

$a, b$  коллинеарны (т.е. линейно зависимы)  $\iff [a, b] = 0$ .

## 79. Выражение смешанного произведения через векторное и скалярное в трёхмерном евклидовом пространстве

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}^3 : (a, b, c) = (a, [b, c])$$

## 80. Формула для двойного векторного произведения в трёхмерном евклидовом пространстве

$$\begin{aligned} [a, [b, c]] &= (a, c)b - (a, b)c = \\ &= b(a, c) - c(a, b) \end{aligned}$$

## 81. Формула для вычисления векторного произведения в терминах координат в правом ортонормированном базисе

Пусть  $(e_1, e_2, e_3)$  — ортонормированный базис.

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

$$b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$$

Тогда

$$\begin{aligned} [a, b] &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \\ &= (a_2 b_3 - b_2 a_3) e_1 - (a_1 b_3 - b_1 a_3) e_2 + (a_1 b_2 - b_1 a_2) e_3 = \\ &= \underline{(a_2 b_3 - b_2 a_3, b_1 a_3 - a_1 b_3, a_1 b_2 - b_1 a_2)} \end{aligned}$$

## 82. Линейное многообразие. Характеризация линейных многообразий как сдвигов подпространств

Линейное многообразие в  $\mathbb{R}^n$  — множество решений некоторой совместной СЛУ.

## 83. Критерий равенства двух линейных многообразий. Направляющее подпространство и размерность линейного многообразия

$L_1, L_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  — множества всех решений.  $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  — множество решений однородной СЛУ  $Ax = 0$ .

$L_1 = v_1 + S_1$  и  $L_2 = v_2 + S_2$  — два линейных многообразия.

$$L_1 = L_2 \iff \begin{cases} S_1 = S_2 (= S), \\ v_1 - v_2 \in S \end{cases}$$

$S$  называется направляющим подпространством линейного многообразия  $L$ .

## 84. Теорема о плоскости, проходящей через точку $k + 1$ в $\mathbb{R}^n$

**Теорема.** а) Через любые  $k + 1$  точек в  $\mathbb{R}^n$  проходит плоскость размерности  $\leq k$   
б) Если  $k + 1$  точек не лежат в плоскости размерности  $< k$ , то через них проходит ровно одна плоскости размерности  $k$

## 85. Три способа задания прямой в $\mathbb{R}^2$ . Уравнение прямой в $\mathbb{R}^2$ , проходящей через две различные точки

1. Уравнение в координатах:  $Ax + By = C$ ,  $(A, B) \neq (0, 0)$
2. Векторное уравнение:  $(\vec{n}, v - v_0) = 0$ , где  $\vec{n}$  — вектор нормали,  $v - v_0$  принадлежит прямой
3. Параметрическое уравнение:  $v = v_0 + \vec{a}\lambda$ , где  $v_0$  — точка на прямой,  $\vec{a}$  — направляющий вектор прямой,  $\lambda$  — коэффициент

Уравнение прямой, проходящей через две точки  $(x_0, y_0)$  и  $x_1, y_1$ :

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

## 86. Три способа задания плоскости в $\mathbb{R}^3$ . Уравнение плоскости в $\mathbb{R}^3$ , проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой

1. Уравнение в координатах:  $Ax + By + Cz = D$ ,  $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$
2. Векторное уравнение:  $(\vec{n}, v - v_0) = 0$ , где  $\vec{n}$  — нормальный вектор плоскости,  $v - v_0$  — вектор на плоскости



3. **Параметрическое уравнение:**  $v = v_0 + \vec{a}\alpha + \vec{b}\beta$ , где  $v_0$  — радиус-вектор фиксированной точки на плоскости,  $a, b$  — направляющие векторы на плоскости

**Уравнение плоскости, проходящей через точки**  $(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ :

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

## 87. Три способа задания прямой в $\mathbb{R}^3$ . Уравнения прямой в $\mathbb{R}^3$ , проходящей через две различные точки

1. **СЛУ:**  $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{cases}$
2. **Векторное уравнение:**  $[v - v_0, \vec{a}] = 0$ , где  $v - v_0$  принадлежит прямой,  $\vec{a}$  — направляющий вектор
3. **Параметрическое уравнение:**  $v = v_0 + \vec{a}\lambda$ , где  $v_0$  — точка на прямой,  $\vec{a}$  — направляющий вектор
4. **Каноническое уравнение прямой:**  $\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$ , где  $a_1, a_2, a_3$  — направляющий вектор,  $x_0, y_0, z_0$  — координаты точки на прямой

Уравнение прямой, проходящей через две различные точки  $(x_0, y_0, z_0)$  и  $(x_1, y_1, z_1)$ :

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

## 88. Случай взаимного расположения двух прямых в $\mathbb{R}^3$

Пусть  $a_1, a_2$  — направляющие прямых  $l_1, l_2$ , а  $v_1, v_2$  — точки, лежащие на данных прямых. Тогда прямые  $l_1, l_2$ :

- |   |   |   |
|---|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. совпадают</li> <li>2. параллельны</li> <li>3. пересекаются в точке</li> </ol> | } | лежат в одной плоскости $\Rightarrow (a_1, a_2, v_2 - v_1) = 0$ |
| 4. скрещиваются или не лежат в одной плоскости  |   |   |

## 89. Случай взаимного расположения трёх попарно различных плоскостей в $\mathbb{R}^3$

Пусть имеются три плоскости  $P_1, P_2, P_3$ .

1. Среди  $P_1, P_2, P_3$  есть две параллельных
  - (a)  $P_1 \parallel P_2 \parallel P_3$
  - (b) Две параллельны, а третья их пересекает
2. Никакие две плоскости не параллельны
  - (a) Все три пересекаются по одной прямой
  - (b) Прямые пересечения параллельны
  - (c)  $P_1, P_2, P_3$  пересекаются в одной точке

## 90. Формула для расстояния от точки до прямой в $\mathbb{R}^3$

Пусть  $l$  — прямая,  $v$  — точка, не лежащая на данной прямой,  $a$  — направляющий вектор прямой,  $v_0$  — точка на прямой.

$$\rho(v, l) = |\text{ort}_{\langle a \rangle}(v - v_0)| = \frac{|[v - v_0, a]|}{|a|}$$

## 91. Формула для расстояния от точки до плоскости в $\mathbb{R}^3$

Пусть  $P$  — плоскость,  $n$  — вектор нормали,  $v_0$  — точка, лежащая на плоскости,  $v$  — точка, не лежащая на плоскости,  $S = \langle n \rangle^\perp$  — направляющее подпространство.

$$\rho(v, P) = |\text{ort}_S(v - v_0)| = |\text{pr}_{\langle n \rangle}(v - v_0)| = \left| \frac{(v - v_0, n)}{(n, n)} n \right| = \frac{|(v - v_0, n)|}{|n|}$$

## 92. Формула для расстояния между двумя скрещивающимися прямыми в $\mathbb{R}^3$

Пусть  $l_1, l_2$  — прямые.  $v_1, v_2$  — точки, лежащие на каждой из данных прямых.  $a_1, a_2$  — их направляющие векторы.

Построим плоскости

$$P_1 = v_1 + \langle a_1, a_2 \rangle \supseteq l_1$$

$$P_2 = v_2 + \langle a_1, a_2 \rangle \supseteq l_2$$

Тогда

$$\rho(l_1, l_2) = \rho(P_1, P_2) = \frac{|(a_1, a_2, v_2 - v_1)|}{|[a_1, a_2]|}$$

## 93. Линейный оператор

Пусть  $V$  — конечномерное векторное пространство.

**Линейным оператором** (преобразованием) называется всякое линейное отображение  $\varphi : V \rightarrow V$ , то есть из  $V$  в себя. *Обозначение:*  $L(V) = \text{Hom}(V, V)$ .

## 94. Матрица линейного оператора

Пусть  $V$  — векторное пространство,  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — его базис и  $\varphi$  — его линейный оператор.

**Матрицей линейного оператора**  $\varphi$  называется такая матрица, в  $j$ -ом столбце которой стоят координаты вектора  $\varphi(e_j)$  в базисе  $e$ .

$$(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (e_1, \dots, e_n)A, \quad A \in \text{Mat}_n.$$

## 95. Формула преобразования координат вектора при действии линейного оператора

Пусть  $\varphi \in L(V)$ ,  $A$  — матрица  $\varphi$  в базисе  $e$ . Тогда

$$\begin{aligned}v &= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, \\ \varphi(v) &= y_1 e_1 + \dots + y_n e_n, \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

## 96. Формула изменения матрицы линейного оператора при переходе к другому базису

Пусть  $\varphi$  — линейный оператор векторного пространства  $V$ ,  $A$  — матрица  $\varphi$  в базисе  $e = (e_1, \dots, e_n)$ . Пусть  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$  — другой базис, причём  $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)C$ . Тогда

$$A' = C^{-1}AC,$$

где  $C$  — матрица перехода к новому базису  $e'$ ,  $A'$  — матрица  $\varphi$  в базисе  $e'$ .

## 97. Подобные матрицы

Две матрицы  $A', A \in M_n(F)$  называются **подобными**, если существует такая матрица  $C \in M_n(F)$ ,  $\det C \neq 0$ , что  $A' = C^{-1}AC$ .

## 98. Подпространство, инвариантное относительно линейного оператора

Подпространство  $U \subseteq V$  называется **инвариантным** относительно  $\varphi$  (или  $\varphi$ -инвариантным), если  $\varphi(U) \subseteq U$ . То есть  $\forall u \in U : \varphi(u) \in U$ .

## 99. Матрица линейного оператора в базисе, дополняющем базис инвариантного подпространства

Пусть  $\varphi : V \rightarrow V$  — линейный оператор.

Пусть  $U \subset V$  —  $\varphi$ -инвариантное подпространство. Также пусть  $e_1, \dots, e_k$  — базис в  $U$ . Дополним его до базиса  $V$ :  $e = (e_1, \dots, e_n)$ . Тогда

$$\underbrace{A(\varphi, e)}_{\text{матрица с углом нулей}} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad \text{где } B \in M_k.$$

## 100. Собственный вектор линейного оператора

Пусть  $\varphi : V \rightarrow V$  — линейный оператор.

Ненулевой **вектор**  $v \in V$  называется **собственным** для  $V$ , если  $\varphi(v) = \lambda v$  для некоторого  $\lambda \in F$ .

## 101. Собственное значение линейного оператора

Элемент  $\lambda \in F$  называется **собственным значением** линейного оператора  $\varphi : V \rightarrow V$ , если существует такой ненулевой вектор  $v \in V$ , что  $\varphi(v) = \lambda v$ .

## 102. Спектр линейного оператора

Множество всех собственных значений линейного оператора  $\varphi$  называется **спектром**.  
Обозначение:  $\text{Spec}(\varphi)$ .

## 103. Диагонализуемый линейный оператор

Линейный оператор  $\varphi$  называется **диагонализуемым**, если существует такой базис  $e$ , что  $A(\varphi, e)$  — диагональная матрица, т.е.  $A(\varphi, e) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

## 104. Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах собственных векторов

Линейный оператор  $\varphi$  диагонализуем тогда и только тогда, когда в  $V$  есть базис из собственных векторов для  $\varphi$ .

## 105. Собственное подпространство линейного оператора

Пусть  $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$ .

Множество  $V_\lambda(\varphi) = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$  называется **собственным подпространством** линейного оператора, отвечающим собственному значению  $\lambda$ .

## 106. Характеристический многочлен линейного оператора

Пусть  $A_\varphi$  — матрица линейного оператора  $\varphi$ , а  $t \in F$ .

Многочлен  $\chi_\varphi(t) := \det(A_\varphi - tE)$  называется **характеристическим многочленом** линейного оператора  $\varphi$ .

## 107. Связь спектра линейного оператора с его характеристическим многочленом

Пусть  $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$ .

$$\chi_\varphi(\lambda) = 0,$$

то есть  $\lambda$  — корень характеристического многочлена.

## 108. Алгебраическая кратность собственного значения линейного оператора

Пусть  $\varphi : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda$  — его собственное значение.

**Алгебраической кратностью** собственного значения  $\lambda$  линейного оператора  $\varphi$  называется такое число  $k$ , которое равняется кратности  $\lambda$  как корня характеристического многочлена.

## 109. Геометрическая кратность собственного значения линейного оператора

Пусть  $\varphi : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $\lambda$  — его собственное значение,  $V_\lambda(\varphi)$  — соответствующее собственное подпространство.

**Геометрической кратностью** собственного значения  $\lambda$  называется число  $\dim V_\lambda(\varphi)$  (проще говоря — количество линейно независимых векторов в ФСР матрицы, образованной  $\lambda$ ).

## 110. Связь между алгебраической и геометрической кратностями собственного значения линейного оператора

Пусть  $a_i$  — алгебраическая кратность собственного значения,  $s_i$  — геометрическая кратность. Тогда справедливо неравенство

$$s_i \leq a_i$$

## 111. Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах его характеристического многочлена и кратностей его собственных значений

Линейный оператор  $\varphi : V \rightarrow V$  диагонализуем тогда и только тогда, когда:

- $\chi_\varphi(t)$  разлагается на линейные множители
- Для любого собственного значения  $\varphi$  геометрическая кратность равна алгебраической

## 112. Линейный оператор в евклидовом пространстве, сопряженный к данному

Пусть  $\mathbb{E}$  — евклидово пространство,  $\varphi$  — его линейный оператор. Тогда ему можно сопоставить две билинейные функции на  $\mathbb{E}$ :

$$\beta_\varphi(x, y) = (x, \varphi(y))$$

$$\beta_\varphi^T(x, y) = (\varphi(x), y)$$

Линейный оператор  $\psi \in L(\mathbb{E})$  называется **сопряженным** к  $\varphi$ , если для всех векторов  $x, y \in \mathbb{E}$  верно, что  $(\psi(x), y) = (x, \varphi(y))$ . Это также равносильно тому, что  $\beta_\psi^T = \beta_\varphi$ .  
*Обозначение:*  $\psi = \varphi^*$ .

### 113. Матрица сопряженного линейного оператора в произвольном и ортонормированном базисах

Пусть  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис в  $\mathbb{E}$ ,  $G = G(e_1, \dots, e_n)$  — матрица Грама,  $A_\varphi = A(\varphi, e)$  — матрица линейного оператора  $\varphi$ . Тогда матрица сопряженного линейного оператора выражается как

$$A_{\varphi^*} = G^{-1} A_\varphi^T G, \text{ где } A_{\varphi^*} = A(\varphi^*, e) \text{ — в произвольном базисе,}$$
$$A_{\varphi^*} = A_\varphi^T \text{ — в ортонормированном базисе.}$$

### 114. Самосопряженный линейный оператор в евклидовом пространстве

Линейный оператор  $\varphi$  называется **самосопряженным** (симметрическим) в том случае, если  $\varphi^* = \varphi$ . Это равносильно тому, что  $(\varphi(x), y) = (x, \varphi(y))$  для любых векторов  $x, y \in \mathbb{E}$ .

*Замечание.* В случае, когда  $e$  — ортонормированный базис в  $\mathbb{E}$  и  $A_\varphi = A(\varphi, e)$ , то самосопряженность линейного оператора  $\varphi$  равносильна  $A_\varphi = A_\varphi^T$ . Отсюда берётся название — симметрические.

### 115. Теорема о каноническом виде самосопряженного линейного оператора

**Теорема.** Самосопряженный линейный оператор  $\varphi$  имеет канонический вид в базисе  $e$ , если его матрица в этом базисе имеет диагональный вид с собственными значениями на диагонали.

### 116. Каким свойством обладают собственные подпространства самосопряженного линейного оператора, отвечающие попарно различным собственным значениям?

Пусть  $\varphi$  — самосопряженный линейный оператор и  $\lambda, \mu$  — его собственные значения. Тогда

$$V_\lambda(\varphi) \perp V_\mu(\varphi), \quad \lambda \neq \mu.$$

### 117. Приведение квадратичной формы к главным осям

Для любой квадратичной формы  $Q$  над  $\mathbb{E}$  существует ортонормированный базис, в котором  $Q$  имеет канонический вид

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2,$$

причем числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  определены однозначно с точностью до перестановки.

### 118. Ортогональный линейный оператор в евклидовом пространстве

Пусть  $\mathbb{E}$  — евклидово пространство,  $\dim \mathbb{E} < \infty$ .

Линейный оператор  $\varphi \in L(\mathbb{E})$  называется **ортогональным**, если

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{E}.$$

## 119. Классификация ортогональных линейных операторов в одномерном и двумерном евклидовых пространствах

Пусть  $\mathbb{E}$  — евклидово пространство.

1. *Ортогональные операторы* при  $\dim \mathbb{E} = 1$ .

$\varphi$  — ортогонален  $\iff \varphi = \pm \text{Id}$

2. *Ортогональные операторы* при  $\dim \mathbb{E} = 2$ .

$\mathfrak{e} = (e_1, e_2)$  — ортонормированный базис. Возможны два случая:

(a)  $\varphi$  — поворот на угол  $\alpha$ , тогда  $A(\varphi, \mathfrak{e}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

(b)  $\varphi$  — поворот на угол  $\alpha$  + отражение относительно прямой  $\langle \varphi(e_1) \rangle$ ,  
тогда  $A(\varphi, \mathfrak{e}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$

## 120. Теорема о каноническом виде ортогонального оператора

Для любого ортогонального оператора  $\varphi \in L(\mathbb{E})$  существует ортонормированный базис  $\mathfrak{e}$ , в котором

$$A(\varphi, \mathfrak{e}) = \begin{pmatrix} \Pi(\alpha_1) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \Pi(\alpha_k) & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \text{ где } \Pi(\alpha_i) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{pmatrix}$$

## 121. Классификация ортогональных линейных операторов в трёхмерном евклидовом пространстве

Для любого ортогонального линейного оператора в  $\mathbb{E}$  существует такой ортонормированный базис  $\mathfrak{e}$ , такой что

- либо  $A(\varphi, \mathfrak{e}) = \begin{pmatrix} \Pi(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , где  $\varphi$  — это поворот на угол  $\alpha$  вокруг оси  $\langle e_3 \rangle$ ;
- либо  $A(\varphi, \mathfrak{e}) = \begin{pmatrix} \Pi(\alpha) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , где  $\varphi$  — зеркальный поворот на угол  $\alpha$  вокруг прямой  $e_3$ , но зеркально отражённый относительно  $\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_3 \rangle^\perp$ .

## 122. Теорема о сингулярных базисах для линейного отображения евклидовых пространств. Сингулярные значения линейного отображения

Существуют ортонормированные базисы  $\mathfrak{e} \in \mathbb{E}$  и  $\mathfrak{f} \in \mathbb{E}$ , такие что

$$A(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \sigma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_r & & 0 & \\ \hline & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array} \right), \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0.$$

Более того, числа  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  определены однозначно и называются **сингулярными значениями** линейного оператора  $\varphi$ .

## 123. Сингулярное разложение матрицы и её сингулярные значения

*SVD = "singular value decomposition"*

$\forall A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$  существует ортогональные матрицы  $U \in M_m(\mathbb{R})$  и  $V \in M_n(\mathbb{R})$ , такие что

$$A = U \Sigma V^T, \text{ где } \Sigma = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \sigma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_r & & 0 & \\ \hline & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array} \right), \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0.$$

Более того, числа  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  определены однозначно.