

Линейная алгебра.
Коллоквиум 2 семестр.
Основано на реальных событиях.
v0.5

26 мая 2017

Ченжлоги

v0.0 (20.05.2017) — исходное: добавлены 1–10 вопросы (спасибо Соне, Даше, Лизе, Наташе, Алёне)
v0.1 (21.05.2017) — поправил 1, 2, 6 (спасибо Борису, Соне, Александру Г. (Ц.))
v0.2 (22.05.2017) — добавил 11–15. Поправил 2, 7 (спасибо Александру Г. (Ц.), Борису, Наташе)
v0.3 (23.05.2017) — поправил 2 ($2 \Rightarrow 3$ и $3 \Rightarrow 4$), дополнил 3, (спасибо Наташе, Глебу, Соне), добавил 16–20
v0.4 (24.05.2017) — поправил 2, 3, 4, 6, 8 (спасибо Соне, Боре, Глебу), добавил 21–30
v0.5 (24.05.2017) — добавил 31–40, поправил 7, 10, 11, 18, 20, 22, 24, 28 (спасибо Наташе, Глебу, Соне, Алексею, Лизе, Юле, Мовсесу)

Доказательства

1. Теорема о связи размерности суммы двух подпространств с размерностью их пересечения

Теорема. $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W)$

Доказательство. Пусть $p = \dim(U \cap W)$, $k = \dim U$, $m = \dim W$. Выберем базис $a = \{a_1, \dots, a_p\}$ в пересечении. Его можно дополнить до базиса U и до базиса W . Значит, $\exists b = \{b_1, \dots, b_{k-p}\}$ такой, что $a \cup b$ — базис в U и $\exists c = \{c_1, \dots, c_{m-p}\}$ такой, что $a \cup c$ — базис в W .

Докажем, что $a \cup b \cup c$ — базис в $U + W$.

1. Докажем, что $U + W$ порождается множеством $a \cup b \cup c$.

$$\left. \begin{array}{l} v \in U + W \Rightarrow \exists u \in U, w \in W : v = u + w \\ u \in U = \langle a \cup b \rangle \subset \langle a \cup b \cup c \rangle \\ w \in W = \langle a \cup c \rangle \subset \langle a \cup b \cup c \rangle \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{l} v = u + w \in \langle a \cup b \cup c \rangle \Rightarrow \\ \Rightarrow U + W = \langle a \cup b \cup c \rangle \end{array}$$

2. Докажем линейную независимость векторов из $a \cup b \cup c$.

Пусть скаляры $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_{k-p}, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-p}$ таковы, что

$$\begin{array}{l}
\underbrace{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_p a_p}_x + \underbrace{\beta_1 b_1 + \dots + \beta_{k-p} b_{k-p}}_y + \underbrace{\gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_{m-p} c_{m-p}}_z = 0 \\
x + y + z = 0 \\
z = -x - y \\
z \in W \\
-x - y \in U \cap W
\end{array} \quad \left| \right. \Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in F : z = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p$$

Тогда $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p - \gamma_1 c_1 - \dots - \gamma_{m-p} c_{m-p} = 0$. Но $a \cup c$ — базис W . Следовательно, $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = \gamma_1 = \dots = \gamma_{m-p} = 0$. Но тогда $0 = x + y = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_p a_p + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{k-p} b_{k-p}$. Но $a \cup b$ — базис $U \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_p = \beta_1 = \dots = \beta_{k-p} = 0$. Итого, все коэффициенты равны нулю и линейная независимость тем самым доказана. Т.е. $a \cup b \cup c$ — базис $U + W$.

$$\begin{aligned}
\dim(U + W) &= |a \cup b \cup c| = |a| + |b| + |c| = p + k - p + m - p = k + m - p = \\
&= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).
\end{aligned}$$

2. Теорема о пяти эквивалентных условиях, определяющих набор линейно независимых подпространств векторного пространства

Теорема. Следующие 5 условий эквивалентны:

1. Если $u_1 + \dots + u_k = 0 \Rightarrow u_1 = \dots = u_k = 0$ (U_1, \dots, U_k — линейно независимы)
2. Любой u единственным образом представим в виде $u = u_1 + \dots + u_k$, где $u_i \in U_i$
3. Если e_i — базис в U_i , то $e_1 \cup \dots \cup e_k$ — базис $U_1 + \dots + U_k$
4. $\dim(U_1 + \dots + U_k) = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$
5. $U_i \cap (U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k) = \{0\}$

Доказательство.

(1 \Rightarrow 2) Пусть $u_1 + \dots + u_k = u'_1 + \dots + u'_k$, где $u_i, u'_i \in U_i$. Тогда

$$\begin{aligned}
\underbrace{(u_1 - u'_1)}_{\in U_1} + \dots + \underbrace{(u_k - u'_k)}_{\in U_k} &= \vec{0} \Rightarrow \\
\Rightarrow (u_1 - u'_1) = \dots = (u_k - u'_k) &= \vec{0} \Rightarrow \\
\Rightarrow u_1 = u'_1, \dots, u_k = u'_k.
\end{aligned}$$

(2 \Rightarrow 3) Пусть $u \in U_1 + \dots + U_k$. Тогда u единственно представим в виде $u = u_1 + \dots + u_k$, где $u_i \in U_i$.

Каждый u единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов из $e_1 \cup \dots \cup e_k$ (так как каждый u_i представляется в базисе e_i) $\Rightarrow e_1 \cup \dots \cup e_k$ — базис.

(3 \Rightarrow 4) Пусть $e_1 \cup \dots \cup e_k$ — базис $U_1 + \dots + U_k$ и пусть наш базис — мультимножество (т.е. одинаковые векторы могут учитываться по нескольку раз). Тогда

$$\begin{aligned}
\dim(U_1 + \dots + U_k) &= |e_1^1 + \dots + e_{s_1}^1 + \dots + e_1^k + \dots + e_{s_k}^k| = \\
&= |e_1^1 + \dots + e_{s_1}^1| + \dots + |e_1^k + \dots + e_{s_k}^k| = \dim U_1 + \dots + \dim U_k.
\end{aligned}$$

(4 \Rightarrow 5) Пусть для краткости $\overline{U_i} = U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k$. Тогда

$$\begin{aligned}
\dim(U_i \cap \overline{U_i}) &= \dim U_i + \dim \overline{U_i} - \dim \underbrace{(U_i + \overline{U_i})}_{U_1 + \dots + U_k} \leq \\
&\leq \dim U_i + \dim U_1 + \dots + \dim U_{i-1} + \dim U_{i+1} + \dots + \dim U_k - \dim U_1 - \dots - \dim U_k.
\end{aligned}$$

Итак, $\dim(U_i \cap \overline{U_i}) \leq 0 \implies \dim(U_i \cap \overline{U_i}) = 0 \implies U_i \cap \overline{U_i} = \{\vec{0}\}$.

(5 \implies 1) Пусть $\vec{0} = u_1 + \dots + u_k$, где $u_i \in U_i$. Тогда для любого i имеем

$$\begin{aligned} u_i &= -u_1 - \dots - u_{i-1} - u_{i+1} - \dots - u_k \Rightarrow \\ &\Rightarrow u_i \in U_i \cap \overline{U_i} = \{\vec{0}\} \Rightarrow u_i = \vec{0}. \end{aligned}$$

3. Описание всех базисов n -мерного векторного пространства в терминах одного базиса и матриц координат. Формула преобразования координат вектора при замене базиса векторного пространства

Пусть V — векторное пространство, $\dim V = n$, e_1, \dots, e_n — базис. То есть

$$\forall v \in V : \exists! v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n,$$

где $x_1, \dots, x_n \in F$ — координаты вектора v в базисе (e_1, \dots, e_n) . Пусть также есть набор векторов e'_1, \dots, e'_n :

$$\begin{aligned} e'_1 &= c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \dots + c_{n1}e_n \\ e'_2 &= c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + \dots + c_{n2}e_n \\ &\vdots \\ e'_n &= c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \dots + c_{nn}e_n \end{aligned}$$

Обозначим матрицу $C = (c_{ij})$. Тогда можно переписать (e'_1, \dots, e'_n) как $(e_1, \dots, e_n) \cdot C$.

Предложение. e'_1, \dots, e'_n образуют базис тогда и только тогда, когда $\det C \neq 0$.

Доказательство.

(\Rightarrow) e'_1, \dots, e'_n — базис, а значит $\exists C' \in M_n$:

$$\begin{aligned} (e_1, \dots, e_n) &= (e'_1, \dots, e'_n)C' = (e_1, \dots, e_n)CC' \\ E &= CC' \end{aligned}$$

$$C' = C^{-1} \iff \exists C^{-1} \iff \det C \neq 0$$

(\Leftarrow) $\det C \neq 0 \Rightarrow \exists C^{-1}$. Покажем, что e'_1, \dots, e'_n в таком случае линейно независимы.

Пусть $\lambda_1 e'_1 + \dots + \lambda_n e'_n = 0$. Тогда можно записать

$$(e'_1, \dots, e'_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0 \iff (e_1, \dots, e_n)C \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0$$

Так как (e_1, \dots, e_n) — базис, то $C \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0$. Умножая слева на обратную матрицу

получаем $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Предложение. Формула преобразований координат вектора при переходе к новому базису:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Доказательство.

C одной стороны: $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$

$$C \text{ другой стороны: } v = x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n = (e'_1, \dots, e'_n) \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = (e_1, \dots, e_n) C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Так как } e_1, \dots, e_n \text{ — линейно независимы, то } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

4. Докажите, что отношение изоморфности на множестве всех векторных пространств является отношением эквивалентности

Теорема. "Изоморфность" — отношение эквивалентности на множестве всех векторных пространств над фиксированным полем F .

Доказательство.

I. *Рефлексивность.* $\varphi : V \rightarrow V$ — изоморфизм.

$$\text{Id} : V \simeq V$$

II. *Симметричность.* $\varphi : V \rightarrow W$ — изоморфизм $\implies \varphi^{-1} : W \rightarrow V$ — тоже изоморфизм.

Т.к. отображение φ^{-1} также биективно, то осталось проверить, что оно линейно.

Пусть $w_1, w_2 \in W$. Тогда $\exists v_1, v_2 \in V$, такие что

$$w_1 = \varphi(v_1), w_2 = \varphi(v_2) \Rightarrow v_1 = \varphi^{-1}(w_1), v_2 = \varphi^{-1}(w_2).$$

Теперь $\varphi^{-1}(w_1 + w_2) = \varphi^{-1}(\varphi(v_1) + \varphi(v_2)) = \varphi^{-1}(\varphi(v_1 + v_2)) = v_1 + v_2 = \varphi^{-1}(w_1) + \varphi^{-1}(w_2)$.

$$\varphi^{-1}(\alpha w) = \varphi^{-1}(\alpha \varphi(v)) = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha v)) = \alpha v = \alpha \varphi^{-1}(w).$$

III. *Транзитивность.* $\psi \circ \varphi : U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W$. Если φ и ψ — изоморфизм, то $\psi \circ \varphi$ — тоже изоморфизм.

Докажем, что если φ и ψ — линейны, то $\psi \circ \varphi$ — тоже линейна.

$$(\psi \circ \varphi)(v_1 + v_2) = \psi(\varphi(v_1 + v_2)) = \psi(\varphi(v_1) + \varphi(v_2)) =$$

$$= \psi(\varphi(v_1)) + \psi(\varphi(v_2)) = (\psi \circ \varphi)(v_1) + (\psi \circ \varphi)(v_2).$$

$$(\psi \circ \varphi)(\alpha v) = \psi(\varphi(\alpha v)) = \psi(\alpha \varphi(v)) =$$

$$= \alpha \psi(\varphi(v)) = \alpha (\psi \circ \varphi)(v).$$

Тогда очевидно, что транзитивность следует из линейности, так как композиция двух биективных отображений также биективна.

5. Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств

Теорема. V, W — конечномерные векторные пространства $\implies V \simeq W \iff \dim V = \dim W$. Докажем две леммы.

Лемма 1. $\dim V = n \Rightarrow V \simeq F^n$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varphi : V \rightarrow F^n$. Выберем базис (e_1, \dots, e_n) в V . Тогда

$$x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_i \in F.$$

Отображение является изоморфизмом (т.к. линейно и биективно), а следовательно $V \simeq F^n$.

Лемма 2. Пусть $\varphi : V \simeq W$ — изоморфизм. e_1, \dots, e_n — базис V . Тогда $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — базис W .

Доказательство. Пусть $w \in W$, тогда существует $v \in V : w = \varphi(v)$. Положим $v = \varphi^{-1}(w)$. Тогда

$$\begin{aligned} \Rightarrow v &= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, \quad x_i \in F \\ \Rightarrow w &= \varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) \\ \Rightarrow W &= \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle \end{aligned}$$

Теперь покажем, что $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — линейно независимы.

Пусть $\alpha_1 \varphi(e_1) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n) = 0$, где $\alpha_i \in F$. Тогда $\varphi(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = 0$. Применим φ^{-1} : $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \varphi^{-1}(0) = 0$. Так как e_1, \dots, e_n — базис V , то $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Доказательство теоремы.

(\Leftarrow) Пусть $\dim V = \dim W = n$. Тогда $V \simeq F^n$, $W \simeq F^n$ (по лемме 1), а следовательно $V \simeq W$.

(\Rightarrow) Пусть $V \simeq W$ и $\dim V = n$. Пусть $\varphi : V \simeq W$ — изоморфизм. (e_1, \dots, e_n) — базис V .

Тогда $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — базис W (по лемме 2), а следовательно $\dim W = n = \dim V$.

6. Существование и единственность линейного отображения с заданными образами базисных векторов. Связь между координатами вектора и его образа при линейном отображении. Формула изменения матрицы линейного отображения при замене базисов.

Пусть V, W — векторные пространства. (e_1, \dots, e_n) — базис V . $\varphi : V \rightarrow W$ — линейное отображение.

Предложение 1. φ однозначно определено векторами $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$.

Доказательство. $v \in V \Rightarrow v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, где $x_i \in F$.

Тогда $\varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n)$.

Предложение 2. Для любого набора $f_1, \dots, f_n \in W$ существует единственное линейное отображение $\varphi : V \rightarrow W$, такое что $(\varphi(e_1) = f_1), \dots, (\varphi(e_n) = f_n)$.

Доказательство. $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.

Положим $\varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$. Тогда легко убедиться, что φ линейно (прямая проверка), а единственность следует из пункта 1.

Предложение 3. Если $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ и $\varphi(v) = y_1 f_1 + \dots + y_m f_m$, то

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Доказательство.

С одной стороны:

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) = \\ &= (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (f_1, \dots, f_m) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

С другой стороны:

$$\varphi(v) = (f_1, \dots, f_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$\text{Так как } f_1, \dots, f_m \text{ — линейно независимы, то } A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Предложение. Пусть V и W — векторные пространства, $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ — базисы V , $f = (f_1, \dots, f_m)$ и $f' = (f'_1, \dots, f'_m)$ — базисы W , A — матрица линейного отображения $\varphi : V \rightarrow W$ по отношению к e и f , A' — матрица линейного отображения по отношению к базисам e' и f' . $e' = eC$, $f' = fD$. Тогда

$$A' = D^{-1}AC \quad (A = DA'C^{-1})$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} (e'_1, \dots, e'_n) &= (e_1, \dots, e_n)C \Rightarrow \\ \Rightarrow \underbrace{(\varphi(e'_1), \dots, \varphi(e'_n))}_{(f'_1, \dots, f'_m)A' = (f_1, \dots, f_m)DA'} &= \underbrace{(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))}_{(f_1, \dots, f_m)A} C = (f_1, \dots, f_m)AC \Rightarrow \\ &\Rightarrow DA' = AC \Rightarrow A' = D^{-1}AC. \end{aligned}$$

7. Установите изоморфизм между пространствами $\text{Hom}(V, W)$ и $\text{Mat}_{m \times n}$, где V и W — векторные пространства размерностей n и m соответственно

Теорема. При фиксированных базисах e и f отображение $\text{Hom}(V, W) \rightarrow \text{Mat}_{m \times n}(F) : \varphi \rightarrow A(\varphi, e, f)$ является изоморфизмом векторных пространств V и W .

Рассмотрим две вещи:

Утверждение. $\text{Hom}(V, W) \rightarrow \text{Mat}_{m \times n}(F) : \varphi \mapsto A(\varphi, e, f)$ является биекцией.

Вывод. Задать линейное отображение $V \rightarrow W$ — то же самое, что выбрать базис e в V , базис f в W и задать матрицу $(m \times n)$, где $n = \dim V$, $m = \dim W$.

Наглядный пример. $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (x, y)$.

$$\begin{aligned} e &= (e_1, e_2, e_3), f = (f_1, f_2). \text{ Тогда} \\ \varphi(e_1) &= f_1 \\ \varphi(e_2) &= f_2 \\ \varphi(e_3) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } A(\varphi, e, f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Предложение. Положим

$$\begin{aligned} e &= (e_1, \dots, e_n) \text{ — базис } V \\ f &= (f_1, \dots, f_m) \text{ — базис } W \\ A_\varphi &= A(\varphi, e, f) \\ A_\psi &= A(\psi, e, f) \\ A_{\varphi+\psi} &= A(\varphi + \psi, e, f) \\ A_{\lambda\varphi} &= A(\lambda\varphi, e, f) \end{aligned}$$

1. $A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$:

С одной стороны: $((\varphi + \psi)e_1, \dots, (\varphi + \psi)e_n) = (f_1, \dots, f_m)A_{\varphi+\psi}$.

С другой стороны:

$$\begin{aligned}
((\varphi + \psi)e_1, \dots, (\varphi + \psi)e_n) &= (\varphi(e_1) + \psi(e_1), \dots, \varphi(e_n) + \psi(e_n)) = \\
&= (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) + (\psi(e_1), \dots, \psi(e_n)) = \\
&= (f_1, \dots, f_m)A_\varphi + (f_1, \dots, f_m)A_\psi = (f_1, \dots, f_m)(A_\varphi + A_\psi) \Rightarrow \\
&\Rightarrow A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi.
\end{aligned}$$

2. $A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi$

С одной стороны: $((\lambda\varphi)e_1, \dots, (\lambda\varphi)e_n) = (f_1, \dots, f_m)A_{\lambda\varphi}$.

С другой стороны:

$$\begin{aligned}
((\lambda\varphi)e_1, \dots, (\lambda\varphi)e_n) &= (\lambda\varphi(e_1), \dots, \lambda\varphi(e_n)) = \lambda(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = \\
&= \lambda(f_1, \dots, f_m)A_\varphi = (f_1, \dots, f_m)\lambda A_\varphi \Rightarrow \\
&\Rightarrow A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi.
\end{aligned}$$

Таким образом, очевидно, что так как отображение биективно и линейно, то оно является изоморфизмом.

8. Докажите, что ядро и образ линейного отображения являются подпространствами в соответствующих векторных пространствах. Сформулируйте и докажите критерий инъективности линейного отображения в терминах его ядра

Предложение 1. $\text{Ker}\varphi$ — подпространство в V .

Доказательство. Проверим по определению.

1. $0_v \in \text{Ker}\varphi$, так как $\varphi(0_v) = 0_w$.
2. $v_1, v_2 \in \text{Ker}\varphi \Rightarrow \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = 0_w + 0_w = 0_w \Rightarrow v_1 + v_2 \in \text{Ker}\varphi$.
3. $v \in \text{Ker}\varphi, \lambda \in F \Rightarrow \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v) = \lambda 0 = 0 \Rightarrow \lambda v \in \text{Ker}\varphi$.

Предложение 2. $\text{Im}\varphi$ — подпространство в W .

Доказательство. Проверим по определению.

1. $0_w = \varphi(0_v) \Rightarrow 0_w \in \text{Im}\varphi$.
2. $w_1, w_2 \in \text{Im}\varphi \Rightarrow \exists v_1, v_2 \in V : w_1 = \varphi(v_1), w_2 = \varphi(v_2) \Rightarrow w_1 + w_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2) \Rightarrow w_1 + w_2 \in \text{Im}\varphi$.
3. $w \in \text{Im}\varphi, \lambda \in F \Rightarrow \exists v \in V : \varphi(v) = w \Rightarrow \lambda w = \lambda\varphi(v) = \varphi(\lambda v) \Rightarrow \lambda w \in \text{Im}\varphi$.

Таким образом, все условия подпространства выполнены.

Предложение. Отображение φ инъективно тогда и только тогда, когда $\text{Ker}\varphi = \{0\}$.

Доказательство.

(\Rightarrow) Очевидно, так как если $\text{Ker}\varphi = \{0\}$, то это значит, что у 0 существует единственный прообраз.

(\Leftarrow) Пусть $v_1, v_2 \in V$ таковы, что $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$.

Тогда $\varphi(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 \in \text{Ker}\varphi \Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \Leftrightarrow v_1 = v_2$.

9. Связь между рангом матрицы линейного отображения и размерностью его образа

Для начала докажем одну лемму.

Лемма. $U \subseteq V$ — подпространство и (e_1, \dots, e_k) — его базис. Тогда $\varphi(U) = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k) \rangle$ — подпространство. В частности, $\dim \varphi(U) \leq \dim U$.

Доказательство. $u \in U \implies u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k \implies \varphi(u) = \varphi(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k) = \lambda_1 \varphi(e_1) + \dots + \lambda_k \varphi(e_k) \in \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k) \rangle$.

Пусть V, W — векторные пространства, $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V , $f = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W , $A = A(\varphi, e, f)$ — матрица линейного отображения φ по отношению к e и f .

Теорема. $\dim \operatorname{Im} \varphi = \operatorname{rk} A$

Доказательство. Воспользуемся леммой, доказанной выше: $\operatorname{Im} \varphi = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle$.

Координаты вектора $\varphi(e_i)$ находятся в столбце $A^{(i)} \implies \lambda_1 \varphi(e_1) + \dots + \lambda_n \varphi(e_n) = 0 \iff \lambda_1 A^{(1)} + \dots + \lambda_n A^{(n)} = 0 \implies \operatorname{rk}\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\} = \operatorname{rk} A$.

$\dim \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k) \rangle = \dim \operatorname{Im} \varphi$.

10. Оценки на ранг произведения двух матриц

Теорема. Пусть $A \in \operatorname{Mat}_{k \times m}$, $B \in \operatorname{Mat}_{m \times n}$. Тогда $\operatorname{rk} AB \leq \min(\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B)$.

Доказательство. Реализуем A и B как матрицы линейных отображений, то есть $\varphi_A : F^m \rightarrow F^k$, $\varphi_B : F^n \rightarrow F^m$. Тогда AB будет матрицей отображения $\varphi_A \circ \varphi_B$.

$$\operatorname{rk}(AB) = \operatorname{rk}(\varphi_A \circ \varphi_B) = \begin{cases} \leq \dim \operatorname{Im} \varphi_A = \operatorname{rk} A \\ \leq \dim \operatorname{Im} \varphi_B = \operatorname{rk} B \end{cases}$$

Первое неравенство следует из того, что $\operatorname{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) \subset \operatorname{Im} \varphi_A$, откуда, в свою очередь следует, что $\dim \operatorname{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) \leq \dim \operatorname{Im} \varphi_A$.

Рассматривая второе неравенство, получим:

$$\operatorname{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) = \varphi_A(\operatorname{Im} \varphi_B) \implies \dim \operatorname{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) = \dim(\varphi_A(\operatorname{Im} \varphi_B)) \leq \dim \operatorname{Im} \varphi_B.$$

11. Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения

Для начала докажем предложение.

Предложение. Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V такой, что (e_1, \dots, e_k) — базис $\operatorname{Ker} \varphi$, а $(\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n))$ — базис $\operatorname{Im} \varphi$.

Замечание. Базис с указанным свойством существует всегда, так как его можно получить путём дополнения базиса $\operatorname{Ker} \varphi$ до базиса всего пространства V .

Доказательство. Дополним базис (e_1, \dots, e_k) до базиса V векторами e_{k+1}, \dots, e_n . Тогда:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \varphi &= \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k), \dots, \varphi(e_n) \rangle = \\ &= \langle 0, \dots, 0, \varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n) \rangle = \\ &= \langle \varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n) \rangle. \end{aligned}$$

$\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$ — линейно независимы. Тогда пусть $\alpha_{k+1} \varphi(e_{k+1}) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n) = 0$, где $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n \in F$. Тогда:

$$\varphi(\alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n) = 0 \implies$$

$$\implies \alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n \in \operatorname{Ker} \varphi \implies$$

$$\implies \alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_{k+1} + \dots + \beta_k e_n, \text{ где } \beta_1, \dots, \beta_k \in F.$$

Но так как e_{k+1}, \dots, e_n — базис V , то $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = \beta_1 = \dots = \beta_k = 0$. То есть векторы $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — линейно независимы, а значит они образуют базис $\operatorname{Im} \varphi$.

Теорема. $\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim V - \dim \operatorname{Ker} \varphi$.

Доказательство. Выберем базис в V такой же, как в предположении.

Тогда $\dim \operatorname{Im} \varphi = n - k = \dim V - \dim \operatorname{Ker} \varphi$.

12. Приведение матрицы линейного отображения к диагональному виду с единицами и нулями на диагонали

Пусть $\varphi : V \rightarrow W$ — линейное отображение. e — базис V , f — базис W .

$A = A(\varphi, e, f) \in \text{Mat}_{m \times n}$, $\text{rk} A = r$.

Утверждение. Существуют базис e' в V и базис f' в W такие, что $A(\varphi, e', f')$ имеет вид:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right), \text{rk} A' = r$$

Эквивалентное утверждение. Существуют невырожденные матрицы $C \in M_n$, $D \in M_m$, такие что $A' = D^{-1}AC \iff A = DA'C^{-1}$.

Доказательство. Реализуем A как матрицу линейного отображения $\varphi : F^n \rightarrow F^m$ в стандартных базисах.

Тогда существует базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ такой, что (e_{r+1}, \dots, e_n) — базис $\text{Ker} \varphi$, а $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_r)$ — базис $\text{Im} \varphi$.

Пусть f — базис F^m , дополняющий систему $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_r)$. Тогда $A(\varphi, e, f) = A'$.

Результат следует из теоремы о замене базисов.

13. Докажите, что всякий базис сопряженного пространства двойственен к некоторому базису исходного векторного пространства

Предложение. Любой базис $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ пространства V^* двойственен к некоторому базису пространства V .

Доказательство. Возьмём произвольный базис $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ пространства V .

Пусть $\varepsilon' = (\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n)$ двойственный к e' базис в V^* .

Тогда $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \vdots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix}$ для некоторой невырожденной матрицы $C \in M_n$.

Положим $e = (e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_n)C^{-1}$ — некий (искомый) базис в V .

Зная, что $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1, \dots, e_n) = E$, имеем $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1, \dots, e_n) = C \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \vdots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix} (e'_1, \dots, e'_n)C^{-1} = CEC^{-1} = E$.

14. Докажите, что всякое подпространство в F^n является множеством решений некоторой однородной системы линейных уравнений

Теорема. Всякое подпространство F^n есть множество решений некоторой ОСЛУ.

Доказательство. Пусть $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$.

$$(a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \text{ — значение линейной функции } \alpha = (a_1, \dots, a_n) \text{ на векторе } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Пусть дано подпространство $U \subseteq F^n$. Выберем в нём базис (v_1, \dots, v_k) .

Рассмотрим в $(F^n)^*$ подмножество $S := \{\alpha \in (F^n)^* \mid \alpha(v_1) = 0, \dots, \alpha(v_k) = 0\}$. S — подпространство в $(F^n)^*$.

$$S \text{ — множество решений ОСЛУ } \begin{cases} \alpha(v_1) = 0, \\ \vdots \\ \alpha(v_k) = 0 \end{cases} \text{ на коэффициенты } \alpha.$$

Так как v_1, \dots, v_k линейно независимы, то ранг матрицы коэффициентов равен $k \implies \dim S = n - k$.

$$\text{Выберем в } S \text{ базис } \alpha_1, \dots, \alpha_{n-k} \text{ и рассмотрим ОСЛУ } \begin{cases} \alpha_1(x) = 0, \\ \vdots \\ \alpha_{n-k}(x) = 0 \end{cases} \text{ относительно неиз-}$$

вестного вектора $x \in F^n$.

Пусть $U' \subseteq F^n$ — подпространство решений этой ОСЛУ.

Ранг матрицы коэффициентов равен $n - k$, так как $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k}$ линейно независимы $\implies \dim U' = n - (n - k) = k$. Но $U \subseteq U'$ по построению.

$$\text{Так как } \dim U = k = \dim U', \text{ то } U = U' \implies \begin{cases} \alpha_1(x) = 0, \\ \vdots \\ \alpha_{n-k}(x) = 0 \end{cases} \text{ — искомая ОСЛУ.}$$

15. Формула для вычисления значений билинейной формы в координатах. Существование и единственность билинейной формы с заданной матрицей. Формула изменения матрицы билинейной формы при переходе к другому базису

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V ($\dim V = n < \infty$).

Определение. Матрица $B = B(\beta, e)$, где $b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$, называется матрицей билинейной функции β в базисе e .

Пусть $B = B(\beta, e)$, $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V , $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in V$, $y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \in V$.

$$\begin{aligned} \beta(x, y) &= \beta\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \beta(e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j \cdot \underbrace{\beta(e_i, e_j)}_{b_{ij}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i b_{ij} y_j = \\ &= (x_1, \dots, x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (*) \end{aligned}$$

(*) — формула для вычисления значений б.ф. в координатах.

Пусть e — произвольный базис V . Тогда:

Предложение 1. Любая билинейная функция однозначно определяется своей матрицей в базисе e .

Доказательство 1. Следует из (*).

Предложение 2. Для любой матрицы $V \in M_n(F)$ существует единственная билинейная функция β на V , такая что $B(\beta, e) = V$.

Доказательство 2. Единственность следует из 1.

Существование: зададим β по формуле (*). Тогда β — билинейная функция на V и её матрицей является B .

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ — два базиса V . β — билинейная функция на V . $e' = eC$ — матрица перехода. $B = B(\beta, e)$ и $B' = B(\beta, e')$.

Предложение. $B' = C^T B C$.

Доказательство. Рассмотрим x в обоих базисах.

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n$$

$$y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n = y'_1 e'_1 + \dots + y'_n e'_n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

$$(x'_1, \dots, x'_n) B' \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = \beta(x, y) = (x_1, \dots, x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\beta(x, y) = (x'_1, \dots, x'_n) C^T B C \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

Отсюда следует, что $B' = C^T B C$, так как для любого $p \in \text{Mat}_n$ верно

$$p_{ij} = (0 \dots i \dots 0) p \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

16. Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами

Пусть в поле F выполняется условие $1 + 1 \neq 0$ (т.е. $2 \neq 0$).

Тогда отображение $\beta \mapsto Q_\beta$ является биекцией между симметричными билинейными функциями на V и квадратичными функциями на V .

Доказательство.

Сюръективность. Пусть β — билинейная функция. Рассмотрим ассоциированную с ней квадратичную функцию $Q_\beta(x) = \beta(x, x)$. Пусть $\sigma(x, y) = \frac{1}{2}(\beta(x, y) + \beta(y, x))$ — симметричная билинейная функция на V . Тогда:

$$Q_\sigma(x) = \sigma(x, x) = \frac{1}{2}(\beta(x, x) + \beta(x, x)) = \beta(x, x) = Q_\beta(x)$$

Инъективность. Пусть $\beta(x, y)$ — симметричная билинейная функция, $Q_\beta(x) = \beta(x, x)$ — соответствующая ей квадратичная функция.

$$\begin{aligned} Q_\beta(x+y) &= \beta(x+y, x+y) = \beta(x, x) + \beta(x, y) + \beta(y, x) + \beta(y, y) = \\ &= Q_\beta(x) + Q_\beta(y) + \underbrace{2\beta(x, y)}_{\beta(x, y) = \beta(y, x)} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \beta(x, y) = \frac{1}{2}(Q_\beta(x+y) - Q_\beta(x) - Q_\beta(y)).$$

17. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду

Пусть V — векторное пространство, $\dim V = n$, $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V , $Q : V \rightarrow F$ — квадратичная функция на V .

Теорема (метод Лагранжа). Пусть в $F : 1 + 1 \neq 0$. Тогда для всякой квадратичной функции Q существует такой базис, в котором Q имеет канонический вид.

Доказательство.

Оформим *индукцию* по n .

$n = 1$: тогда $Q(x) = b_{11}x_1^2$ — канонический вид, очевидно.

Предположим, что для всех $< n$, докажем для n . Пусть в исходном базисе e :

$$Q(x) = Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n b_{ii}x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2b_{ij}x_i x_j,$$

где $B = (b_{ij})$ — матрица квадратичной функции Q .

Случай 0: $b_{ij} = 0$ для всех i, j . Тогда очевидно.

Случай 1: существует такое i , что $b_{ii} \neq 0$. Перенумеруем переменные так, что $b_{11} \neq 0$:

$$\begin{aligned} Q(x_1, \dots, x_n) &= b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + \dots + 2b_{1n}x_1x_n + Q_1(x_2, \dots, x_n) = \\ &= \frac{1}{b_{11}}(b_{11}^2x_1^2 + 2b_{11}b_{12}x_1x_2 + \dots + 2b_{11}b_{1n}x_1x_n) + Q_1(x_2, \dots, x_n) = \\ &= \frac{1}{b_{11}}(b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n)^2 - \underbrace{\frac{1}{b_{11}}(b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n)^2}_{Q_2(x_2, \dots, x_n)} + Q_1(x_2, \dots, x_n) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{b_{11}}(b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n)^2 + Q_2(x_2, \dots, x_n) = \\ &= \frac{1}{b_{11}}x_1'^2 + Q_2(x_2', \dots, x_n'), \end{aligned}$$

$$\text{где } \begin{cases} x_1' = b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n, \\ x_2' = x_2, \\ \vdots \\ x_n' = x_n \end{cases}, \text{ то есть замена координат } \begin{cases} x_1 = \frac{1}{b_{11}}(x_1' - b_{12}x_2' - \dots - b_{1n}x_n'), \\ x_2 = x_2', \\ \vdots \\ x_n = x_n' \end{cases}.$$

Далее применяем предположение индукции к $Q_2(x_2', \dots, x_n')$.

Случай 2: $b_{ii} = 0$ для всех i , но существует $b_{ij} \neq 0$ при $i < j$.

Б.о.о. считаем, что $b_{12} \neq 0$. Делаем замену:

$$\begin{cases} x_1 = x_1' - x_2', \\ x_2 = x_1' + x_2', \\ x_3 = x_3', \\ \vdots \\ x_n = x_n' \end{cases} \quad \text{Тогда } Q(x') = \underbrace{2b_{12}x_1'^2 - 2b_{12}x_2'^2}_{2b_{12}x_1x_2} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2b_{ij}x_i'x_j', \text{ что есть 1-й случай.}$$

18. Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду

Вначале докажем лемму.

$$\text{Пусть } e' \text{ — базис } V, \text{ имеющий вид } \begin{cases} e_1' = e_1, \\ e_2' \in e_2 + \langle e_1 \rangle, \\ e_3' \in e_3 + \langle e_1, e_2 \rangle, \\ \vdots \\ e_n' \in e_n + \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle \end{cases} \quad (*),$$

12

$B'_k = B_k(Q, \mathfrak{e}')$ — матрица k -го углового минора

$\delta'_k = \delta_k(Q, \mathfrak{e}')$ — определитель матрицы k -го углового минора

Лемма. $\forall k = 1, \dots, n : \delta_k = \delta'_k$.

Доказательство. При любом k имеем $B'_k = C_k^T B_k C_k \Rightarrow \delta'_k = \det B'_k = \det(C_k^T B_k C_k) = (\det C_k^T)(\det B_k)(\det C_k) = \det B_k = \delta_k$.

Теорема (метод Якоби лекционный). Положим, что $\delta_k \neq 0$ для всех $k = 1, \dots, n$. Тогда единственно существует базис $\mathfrak{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ в V такой, что

1. \mathfrak{e}' имеет вид $(*)$

2. В этом базисе Q имеет канонический вид $Q(x) = \frac{\delta_1}{\delta_0} x_1'^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} x_2'^2 + \dots + \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} x_n'^2$

(то есть $B(Q, \mathfrak{e}') = \text{diag}(\frac{\delta_1}{\delta_0}, \frac{\delta_2}{\delta_1}, \dots, \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}})$).

Доказательство.

Оформим *индукцию* по n .

$n = 1$: $Q(x) = \delta_1 x_1'^2$ — очевидно, верно.

Докажем для $n - 1$. Пусть векторы e'_1, \dots, e'_n уже построены:

$$B(Q, (e'_1, \dots, e'_{n-1}, e_n)) = \begin{pmatrix} \delta_1 & & & * \\ & \frac{\delta_2}{\delta_1} & & 0 & * \\ & & \ddots & & * \\ & 0 & & \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Ищем e'_n в виде $e_n + \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle = e_n + \langle e'_1, \dots, e'_{n-1} \rangle$,

т.е. в виде $e'_n = e_n + \lambda_1 e'_1 + \dots + \lambda_{n-1} e'_{n-1}$.

Пусть $\beta : V \times V \rightarrow F$ — симметричная билинейная форма, соответствующая Q .

$$\beta(e'_k, e'_n) = \beta(e'_k, e_n) + \lambda_1 \beta(e'_k, e'_1) + \dots + \lambda_{k-1} \beta(e'_k, e'_{k-1}) = \beta(e'_k, e_n) + \lambda_k \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}}.$$

Значит $\beta(e'_k, e'_n) = 0 \iff \lambda_k = -\beta(e'_k, e_n) \frac{\delta_{k-1}}{\delta_k}$ — единственное значение.

В итоге построен базис $\mathfrak{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ такой, что

$$B(Q, (e'_1, \dots, e'_{n-1}, e_n)) = \begin{pmatrix} \delta_1 & & & 0 \\ & \frac{\delta_2}{\delta_1} & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} \\ & & & ? \end{pmatrix}$$

Но в силу доказанной выше леммы $\delta_n = \delta'_n = \delta_1 \cdot \frac{\delta_2}{\delta_1} \cdot \dots \cdot \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} \cdot ? = \delta_{n-1} \cdot ? \implies ? = \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}$.

19. Существование нормального вида для квадратичной формы над \mathbb{R} . Закон инерции

Предложение. Для любой квадратичной формы Q над \mathbb{R} существует базис, в котором Q принимает нормальный вид.

Доказательство. Знаем, что существует базис, в котором Q имеет канонический вид. $Q(x) = b_1 x_1^2 + \dots + b_n x_n^2$.

Делаем невырожденную замену $x_i = \begin{cases} \frac{x'_i}{\sqrt{|b_i|}}, & \text{если } b_i \neq 0, \\ x'_i, & \text{если } b_i = 0 \end{cases}$

Тогда в новых координатах (= новом базисе) Q имеет вид $Q(x') = \varepsilon_1 x_1'^2 + \dots + \varepsilon_n x_n'^2$,
где $\varepsilon_i = \operatorname{sgn} b_i = \begin{cases} 1, & b_i > 0, \\ 0, & b_i = 0, \\ -1, & b_i < 0 \end{cases}$. Всё доказали.

Пусть Q — квадратичная функция над R , которая в базисе e имеет нормальный вид:

$$Q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2,$$

где s — количество положительных слагаемых, t — количество отрицательных слагаемых. Тогда

$i_+ := s$ — **положительный индекс инерции** квадратичной формы Q

$i_- := t$ — **отрицательный индекс инерции** квадратичной формы Q

Теорема (закон инерции). Числа $i_+ = s$ и $i_- = t$ не зависят от базиса, в котором Q принимает нормальный вид.

Доказательство. $s + t = \operatorname{rk} Q$ — инвариантная величина \Rightarrow достаточно доказать инвариантность s .

Пусть базис $e = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ таков, что в нём $Q(x) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2$

Пусть базис $e' = \langle e'_1, \dots, e'_n \rangle$ таков, что в нём $Q(x) = x_1'^2 + \dots + x_s'^2 - x_{s'+1}'^2 - \dots - x_{s'+t'}'^2$

Предположим, что $s \neq s'$. Можем считать, что $s > s'$.

Рассмотрим в V подпространства $\begin{cases} L = \langle e_1, \dots, e_s \rangle, \dim L = s, \\ L' = \langle e'_{s'+1}, \dots, e'_{s'+t'} \rangle, \dim L' = s' \end{cases}$

$L + L' \subseteq V \Rightarrow \dim(L + L') \leq \dim V = n$.

Тогда $\dim(L \cap L') = \dim L + \dim L' - \dim(L + L') \geq s + n - s' - n = s - s' > 0$.

Тогда $\exists v \in L \cap L', v \neq 0$.

Т.к. $v \in L$, то $Q(v) > 0$.

Т.к. $v \in L'$, то $Q(v) \leq 0$.

Противоречие!

20. Следствие метода Якоби о нахождении индексов инерции квадратичной формы над \mathbb{R} . Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы. Критерий отрицательной определённости квадратичной формы

$Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ — квадратичная форма

$e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис

$B = B(Q, e)$

$B_k = B_k(Q, e)$

$\delta_k = \det B_k$ — k -й угловой минор

Следствие (метода Якоби). Пусть $\delta_k \neq 0$ для всех $k = 1, \dots, n$.

Тогда i_- равен числу перемен знака в последовательности $1, \delta_1, \dots, \delta_n$.

Доказательство. Метод Якоби: существует базис, в котором Q принимает вид

$$Q(x) = \frac{\delta}{1} x_1^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} x_2^2 + \dots + \frac{\delta_n}{\delta_{n+1}} x_n^2.$$

Получаем, что если для некоторого i выполняется $\frac{\delta_i}{\delta_{i-1}}$, значит $\operatorname{sgn} \delta_i \neq \operatorname{sgn} \delta_{i-1}$, что и означает, что отрицательный индекс i_- равен числу перемен знака.

Теорема (Критерий Сильвестра). $Q > 0$ тогда и только тогда, когда $\delta_k > 0$ для всех $k = 1, \dots, n$.

Доказательство.

(\Leftarrow) Следует из следствия метода Якоби: $i_- = 0 \implies i_+ = n \implies Q > 0$.

(\Rightarrow) $Q > 0 \implies$ существует матрица $C \in M_n(\mathbb{R})$, $\det C \neq 0$, такая что $C^T B C = E$. Тогда $\det C^T \cdot \det B \cdot \det C = 1 \implies \delta_n = \det B = \frac{1}{(\det C)^2} > 0$.

$\forall k$ B_k есть матрица ограничения квадратной функции Q на подпространство $\langle e_1, \dots, e_k \rangle$. На этом подпространстве будет также положительная определенность $\implies \delta_k = \det B_k > 0$.

Теорема (критерий отрицательной определенности).

$$Q < 0 \iff \begin{cases} \delta_i < 0, i \not\equiv 2 \\ \delta_i > 0, i \equiv 2 \end{cases}$$

Доказательство. $Q < 0 \iff -Q > 0$. Далее применяем критерий Сильвестра.

21. Неравенство Коши-Буняковского, неравенство треугольника и теорема Пифагора в евклидовом пространстве

Предложение (неравенство К-Б). Пусть $x, y \in \mathbb{E}$. Тогда $|(x, y)| \leq |x||y|$, причём знак равенства возможен только в том случае, если x, y — пропорциональны.

Доказательство.

1. x, y — пропорциональны (можно считать, что $y = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$)

Тогда $|(x, y)| = |(x, \alpha x)| = |\alpha|(x, x) = |\alpha||x|^2 = |x||\alpha x| = |x||y|$.

2. x, y — не пропорциональны

Тогда они линейно независимы $\implies x, y$ — базис в $\langle x, y \rangle$. Ограничение квадратичной функции $Q(v) = (v, v)$ на $\langle x, y \rangle$ положительно определено; тогда по критерию Силь-

вестра $\det \begin{vmatrix} (x, x) & (x, y) \\ (x, y) & (y, y) \end{vmatrix} > 0$, то есть $(x, x)(y, y) - (x, y)^2 > 0 \implies |x|^2|y|^2 > |(x, y)|^2$.

Предложение (неравенство треугольника).

$$\rho(a, b) + \rho(b, c) \geq \rho(a, c) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{E}.$$

Доказательство. Пусть $x := a - b$, $y := b - c$. Надо доказать $|x| + |y| \geq |x + y|$:

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y) = \underbrace{(x, x)}_{|x|^2} + \underbrace{2(x, y)}_{2|x||y| \text{ (по К-Б)}} + \underbrace{(y, y)}_{|y|^2} \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2.$$

Предложение (теорема Пифагора). Пусть $x, y \in \mathbb{E}$, $x \perp y$ ($(x, y) = 0$). Тогда $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.

Доказательство. $|x + y|^2 = (x + y, x + y) = \underbrace{(x, x)}_{|x|^2} + \underbrace{(x, y)}_0 + \underbrace{(y, x)}_0 + \underbrace{(y, y)}_{|y|^2} = |x|^2 + |y|^2$.

22. Свойства определителя матрицы Грама системы векторов евклидова пространства

Пусть v_1, \dots, v_k — система векторов в \mathbb{E} . $G = G(v_1, \dots, v_k)$.

Предложение 1. $\forall v_1, \dots, v_k \in E, \det G(v_1, \dots, v_k) \geq 0$.

Предложение 2. $\det G(v_1, \dots, v_k) = 0$ тогда и только тогда, когда v_1, \dots, v_k — линейно зависимы.

Доказательство 1. v_1, \dots, v_k — линейно независимы $\implies v_1, \dots, v_k$ — базис в $\langle v_1, \dots, v_k \rangle \implies \det G > 0$ по критерию Сильвестра (т.к. G есть матрица билинейной функции (\cdot, \cdot) на $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ в базисе (v_1, \dots, v_k)).

Доказательство 2. v_1, \dots, v_k — линейно зависимы.

Тогда $\lambda_{(1)}v_1 + \dots + \lambda_{(k)}v_k = 0$ для некоторого набора $(\lambda_{(1)}, \dots, \lambda_{(k)}) \neq (0, \dots, 0)$.

Тогда $\forall i = 1, \dots, k$:

$$\begin{aligned} \lambda_{(1)}(v_1, v_i) + \dots + \lambda_{(k)}(v_k, v_i) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda_{(1)}G_{(1)} + \dots + \lambda_{(k)}G_{(k)} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{строки } G \text{ линейно зависимы} &\Rightarrow \det G = 0. \end{aligned}$$

23. Свойства ортогонального дополнения к подпространству в евклидовом пространстве

Предложение. Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство, $\dim \mathbb{E} = n$. Тогда:

1. $\dim S^\perp = n - \dim S$
2. $\mathbb{E} = S \oplus S^\perp$
3. $(S^\perp)^\perp = S$

Доказательство.

1. Пусть e_1, \dots, e_k — базис в S . Дополним его до базиса всего пространства \mathbb{E} .

Пусть $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n, x \in \mathbb{E}$.

Если $x \in S^\perp$, то это то же самое, что $(x, e_i) = 0$ для всех $i = 1, \dots, k$. Тогда:

$$(x, e_i) = x_1(e_1, e_i) + x_2(e_2, e_i) + \dots + x_n(e_n, e_i) = 0, \forall i = 1, \dots, k.$$

Тогда x есть решение ОСЛУ: $G \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$ с матрицей $G \in \text{Mat}_{k \times n}(\mathbb{R})$, где $g_{ij} = (e_i, e_j)$.

Так как левый блок размера $k \times k$ матрицы G есть $G(e_1, \dots, e_k)$, где e_1, \dots, e_k — линейно независимы, то $\det G(e_1, \dots, e_n) > 0$, следовательно $\text{rk} G = k$. Тогда $\dim S^\perp = n - \text{rk} G = n - k = n - \dim S$.

2. Из предыдущего пункта получили, что $\dim S + \dim S^\perp = n = \dim \mathbb{E}$.

Если $s \in S \cap S^\perp$, то $\begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix} \begin{smallmatrix} \in S \\ \in S^\perp \end{smallmatrix} = 0 \implies v = 0 \implies S \cap S^\perp = \{0\} \implies S$ и S^\perp линейно независимы $\implies \mathbb{E} = S \oplus S^\perp$.

3. $\dim(S^\perp)^\perp = \dim \mathbb{E} - \dim(S^\perp) = \dim \mathbb{E} - (\dim \mathbb{E} - \dim S) = \dim S$. Остаётся заметить, что $S \subseteq (S^\perp)^\perp \implies S = (S^\perp)^\perp$.

24. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в \mathbb{R}^n , заданное своим базисом

Пусть $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением. $S \subseteq \mathbb{R}^n$ — подпространство, a_1, \dots, a_k — базис в S . Образует матрицу $A \in \text{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R})$, где $A^{(i)} = a_i$.

Предложение. $\forall v \in \mathbb{E} : pr_S v = A(A^T A)^{-1} A^T v$

Доказательство. *Корректность:* $A^T A = (a_i, a_j) = G(a_1, \dots, a_k)$ — невырожденная матрица, так как a_1, \dots, a_k — линейно независимы, следовательно $(A^T A)^{-1}$ существует.

Пусть $v \in \mathbb{E}$, тогда $x = pr_S v \Rightarrow x \in S \Rightarrow x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$.

$y = ort_S v \Rightarrow A^T y = 0$.

$$\begin{aligned} A(A^T A)^{-1} A^T v &= A(A^T A)^{-1} A^T (x + y) = \\ &= A \underbrace{(A^T A)^{-1} (A^T A)}_E \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} + A(A^T A)^{-1} \underbrace{A^T y}_0 = \\ &= A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = x = pr_S v. \end{aligned}$$

25. Существование ортонормированного базиса в евклидовом пространстве. Описание всех ортонормированных базисов в терминах одного и матриц перехода. Дополнение ортогональной системы векторов до ортогонального базиса

Теорема. Во всяком (конечномерном) евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Доказательство. Так как квадратичная функция (v, v) положительно определена, то существует базис, в котором она принимает нормальный вид. Этот базис и есть то, что нам требуется.

Другими словами, всякую положительно определённую квадратичную форму можно привести к нормальному виду.

Пусть (e_1, \dots, e_n) — ортонормированный базис в \mathbb{E} . Пусть также есть ещё один базис (e'_1, \dots, e'_n) , причём $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C$.

Предложение. (e'_1, \dots, e'_n) — ортонормирован $\iff C^T C = E$.

Доказательство. e' — ортонормированный базис $\implies G(e') = E$ с одной стороны (по определению ортонормированного базиса), а с другой $G(e') = C^T G(e) C = C^T C$.
 $\quad \quad \quad = E$

Следствие. Всякую ортогональную (соотв. ортонормированную) систему векторов можно дополнить до ортогонального (соотв. ортонормированного) базиса.

Доказательство. Если (e_1, \dots, e_k) — такая система, то искомым дополнением будет ортогональный (соотв. ортонормированный) базис в $\{e_1, \dots, e_k\}^\perp$.

26. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в терминах его ортогонального базиса. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта, явные формулы для каждого шага

Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство. $e = (e_1, \dots, e_k)$ — ортогональный базис в S .

Предложение. $\forall v \in \mathbb{E} : pr_S v = \sum_{i=1}^k \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$.

Доказательство. Представим v в виде суммы $v = pr_S v + ort_S v$. Тогда:

$$(v, e_i) = (pr_S v, e_i) + (ort_S v, e_i) = (pr_S v, e_i), \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Также $pr_S v = \sum_{j=1}^k \lambda_j e_j$. Следовательно, $(v, e_i) = \sum_{j=1}^k \lambda_j (e_j, e_i)$. Учитывая, что базис e — ортогональный, то все слагаемые кроме $j = i$ обнулятся, следовательно останется только $(v, e_i) = \lambda_i (e_i, e_i) \implies \lambda_i = \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)}$.

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

Пусть (e_1, \dots, e_k) — линейно независимая система векторов.

Метод Якоби: $\det G(e_1, \dots, e_k) > 0$, где i -й угловой минор — это $\det G(e_1, \dots, e_i) > 0$.

Применим результат — ортогональный базис (f_1, \dots, f_k) в $\langle e_1, \dots, e_k \rangle$ так, что $(*)$:

$$\begin{aligned} f_1 &= e_1 \\ f_2 &\in e_2 + \langle e_1 \rangle \\ f_3 &\in e_3 + \langle e_1, e_2 \rangle \\ &\vdots \\ f_k &\in e_k + \langle e_1, \dots, e_{k-1} \rangle \end{aligned}$$

Предложение. $\forall i = 1, \dots, k$:

1. $f_i = ort_{\langle e_1, \dots, e_{i-1} \rangle} e_i$;
2. $f_i = e_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(e_i, f_j)}{(f_j, f_j)} f_j$; $(**)$
3. $\det G(f_1, \dots, f_i) = \det G(e_1, \dots, e_i)$;

Доказательство. Помним, что при $(*)$ $\langle e_1, \dots, e_i \rangle = \langle f_1, \dots, f_i \rangle \forall i$

1. Распишем:

$$\begin{aligned} f_i &\in e_i + \langle e_1, \dots, e_{i-1} \rangle = e_i + \langle f_1, \dots, f_{i-1} \rangle \Rightarrow \\ &\Rightarrow f_i = e_i + h_i, \text{ где } h_i \in \langle f_1, \dots, f_{i-1} \rangle \Rightarrow \\ &\Rightarrow e_i = \underset{ort}{f_i} - \underset{pr}{h_i} \end{aligned}$$

Так как $f_i \in \langle f_1, \dots, f_{i-1} \rangle^\perp$, то

$$f_i = ort_{\langle f_1, \dots, f_{i-1} \rangle} e_i = ort_{\langle e_1, \dots, e_{i-1} \rangle} e_i$$

$$2. f_i = ort_{\langle f_1, \dots, f_{i-1} \rangle} e_i = e_i - pr_{\langle f_1, \dots, f_{i-1} \rangle} e_i = e_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(e_i, f_j)}{(f_j, f_j)} f_j \text{ (по предыдущему)}$$

3. Следует из того, что $G(f_1, \dots, f_i) = C^T G(e_1, \dots, e_i) C$, где C — верхнетреугольная с единицами на диагонали, следовательно $\det C = 1$.

Построение ортогонального базиса f_1, \dots, f_k (по формулам $(**)$) называется методом (процессом) ортогонализации Грама-Шмидта.

27. Теорема о расстоянии от точки до подпространства в евклидовом пространстве. Явная формула для расстояния в терминах определителей матриц Грама

Пусть $x \in \mathbb{E}$, $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство.

Теорема. $\rho(x, S) = |\text{ort}_S x|$, причём $\text{pr}_S x$ является единственной ближайшей к x точкой из S .

Доказательство.

$y := \text{pr}_S x$, $z := \text{ort}_S x$, $x = y + z$.

Пусть теперь $y' \in S$, $y' \neq 0$. Покажем, что $\rho(x, y + y') > \rho(x, y)$.

$$\rho(x, y + y')^2 = \left| \underbrace{x - y}_{z} - y' \right|^2 = \left| \underbrace{z}_{\in S^\perp} - \underbrace{y'}_{\in S} \right|^2 \stackrel{\text{по т. Пифагора}}{=} |z|^2 + |y'|^2 > |z|^2 = \rho(x, y)^2.$$

$S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство, $x \in S$, $e = (e_1, \dots, e_k)$ — базис.

Теорема. $\rho(x, S)^2 = \frac{\det G(e_1, \dots, e_k, x)}{\det G(e_1, \dots, e_k)}.$

Доказательство.

(1) $x \in S \implies \rho(x, S) = 0$ и $\det G(e_1, \dots, e_k, x) = 0$, т.к. e_1, \dots, e_k, x — линейно зависимы

(2) $x \notin S \implies$ Положим $z := \text{ort}_S x$.

Тогда $\rho(x, S) = |z|$ — уже знаем.

Применим ортогонализацию Грама–Шмидта к e_1, \dots, e_k, x : получим систему f_1, \dots, f_k, z .

Но при ортогонализации определитель матрицы Грама не меняется $\implies \frac{\det G(e_1, \dots, e_k, x)}{\det G(e_1, \dots, e_k)} =$

$$\frac{\det G(f_1, \dots, f_k, z)}{\det G(f_1, \dots, f_k)} = \frac{|f_1|^2 \dots |f_k|^2 |z|^2}{|f_1|^2 \dots |f_k|^2} = |z|^2 = \rho(x, S)^2.$$

28. Метод наименьших квадратов для несовместных систем линейных уравнений: постановка задачи и её решение. Единственность псевдорешения и явная формула для него в случае линейной независимости столбцов матрицы коэффициентов

Метод наименьших квадратов:

Имеем СЛУ(*) $Ax = b$, где $A \in \text{Mat}_{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор неизвестных, $b \in \mathbb{R}^m$.

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ — решение СЛУ(*) $\Leftrightarrow Ax_0 = b \Leftrightarrow Ax_0 - b = 0 \Leftrightarrow |Ax_0 - b| = 0$ (где \mathbb{R}^n рассматривается как евклидово пространство со стандартным скалярным произведением) $\Leftrightarrow \rho(Ax_0, b) = 0$.

В случае, когда СЛУ(*) несовместна, набор $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (вектор-столбец) называется **псевдорешением**, если $\rho(Ax_0, b) = \min \rho(Ax, b)$.

Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ — подпространство, натянутое на столбцы матрицы A , то есть $S = \langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle$.

Предложение 1. x_0 — псевдорешение для (*) тогда и только тогда, когда x_0 — решение для СЛУ $Ax = \text{pr}_S b$.

Предложение 2. Если столбцы матрицы A — линейно независимы, то псевдорешение единственно и может быть найдено по формуле $x_0 = (A^T A)^{-1} A^T b$.

Доказательство 1. Так как $Ax = x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + \dots + x_n A^{(n)}$, то $\{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\} = S$. Следовательно, $\rho(\{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}, b) = \rho(S, b)$.

По теореме о расстоянии от точки до плоскости искомым минимум достигается в точке x_0 , для которой $A_{x_0} = or_S b$.

Доказательство 2. Так как столбцы $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ — линейно независимы, то они образуют базис в $S \implies \exists! x_0 : A_{x_0} = pr_S b$.

Так как $pr_S b = A(A^T A)^{-1} A^T b$, то $x_0 = (A^T A)^{-1} A^T b$ является решением для СЛУ $Ax = pr_S b$.

29. Две формулы для объёма параллелепипеда: в терминах определителя матрицы Грама и в терминах координат в ортонормированном базисе

Пусть a_1, \dots, a_k — базис пространства \mathbb{E} . P — k -мерный параллелепипед.

Теорема. $vol P(a_1, \dots, a_k)^2 = \det G(a_1, \dots, a_k)$.

Доказательство. Индукция по k :

$\underline{k=1}$: $|a_1|^2 = (a_1, a_1)$ — верно. $\underline{k > 1}$: имеем $vol P(a_1, \dots, a_k)^2 = vol P(a_1, \dots, a_{k-1})^2 |h|^2 = \det G(a_1, \dots, a_{k-1}) |h|^2 = (*)$.

- Если a_1, \dots, a_{k-1} линейно независимы, то $|h|^2 = \frac{\det G(a_1, \dots, a_k)}{\det G(a_1, \dots, a_{k-1})} \implies \Rightarrow (*) = \det G(a_1, \dots, a_k)$.
- Если a_1, \dots, a_{k-1} — линейно зависимы, то $\det G(a_1, \dots, a_{k-1}) = 0 \implies vol P(a_1, \dots, a_k) = 0 = (*)$. Но $\det G(a_1, \dots, a_k) = 0$, так как a_1, \dots, a_k — линейно зависимы

Теорема. $vol P(a_1, \dots, a_n) = |\det A|$. Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ — ортонормированный базис в \mathbb{E} .

$(a_1, \dots, a_n) = (e_1, \dots, e_n)A$, $a \in M_n(\mathbb{R})$.

Доказательство. $G(a_1, \dots, a_n) = A^T \underbrace{G(e_1, \dots, e_n)}_E A \implies vol P(a_1, \dots, a_n)^2$

$= \det G(a_1, \dots, a_n) = (\det A)^2$.

30. Связь смешанного произведения с векторным и скалярным в трёхмерном евклидовом пространстве. Антикоммутативность и билинейность векторного произведения. Формула для вычисления векторного произведения в терминах координат в правом ортонормированном базисе

Теорема. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^3 : (a, b, c) = (a, [b, c])$

Доказательство.

1. b, c — пропорциональны $\implies [b, c] = 0 \implies \begin{cases} \text{левая часть} = 0 \\ \text{правая часть} = 0 \end{cases}$
2. b, c — не пропорциональны \implies положим $d = [b, c]$.

$$\begin{aligned} (a, [b, c]) &= (a, d) = (pr_{\langle d \rangle} a, d) = (ort_{\langle b, c \rangle} a, d) = \begin{cases} |ort_{\langle b, c \rangle} a| \frac{|d|}{vol P(b, c)}, & \text{если } (a, b, c) > 0, \\ -|ort_{\langle b, c \rangle} a| |d|, & \text{если } (a, b, c) < 0 \end{cases} = \\ &= Vol(a, b, c) = (a, b, c). \end{aligned}$$

Предложение.

1. $[a, b] = -[b, a] \forall a, b$ — антикоммутативность
2. $[\cdot, \cdot]$ линейна по каждому аргументу
 $[\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b] = \lambda_1 [a_1, b] + \lambda_2 [a_2, b]$
 $[a, \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2] = \mu_1 [a, b_1] + \mu_2 [a, b_2]$

Доказательство.

1. Ясно из определения
- 2.

$$\begin{aligned} \forall x(x, [\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b]) &= (x, \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b) = \\ &= \lambda_1 (x, a_1, b) + \lambda_2 (x, a_2, b) = \lambda_1 (x, [a_1, b]) + \lambda_2 (x, [a_2, b]) = \\ &= (x, \lambda_1 [a_1, b] + \lambda_2 [a_2, b]). \end{aligned}$$

Так как $\forall y = (e_1, y)e_1 + (e_2, y)e_2 + (e_3, y)e_3$ для (e_1, e_2, e_3) — ортонормированного базиса $\Rightarrow [\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b] = \lambda_1 [a_1, b] + \lambda_2 [a_2, b]$. Линейность по второму аргументу аналогична.

Пусть (e_1, e_2, e_3) — ортонормированный базис.

$$\begin{aligned} a &= a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \\ b &= b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 \end{aligned}$$

Тогда формула для вычисления векторного произведения выглядит так:

$$\begin{aligned} [a, b] &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \\ &= (a_2 b_3 - b_2 a_3) e_1 - (a_1 b_3 - b_1 a_3) e_2 + (a_1 b_2 - b_1 a_2) e_3 = \\ &= \underline{((a_2 b_3 - b_2 a_3), (b_1 a_3 - a_1 b_3), (a_1 b_2 - b_1 a_2))} \end{aligned}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} [a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3] &= \\ &= a_1 [e_1, b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3] + a_2 [e_2, b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3] + a_3 [e_3, b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3] = \\ &= a_1 (b_1 [e_1, e_1] + b_2 [e_1, e_2] + b_3 [e_1, e_3]) + \\ &\quad + a_2 (b_1 [e_2, e_1] + b_2 [e_2, e_2] + b_3 [e_2, e_3]) + \\ &\quad + a_3 (b_1 [e_3, e_1] + b_2 [e_3, e_2] + b_3 [e_3, e_3]) = \\ &= a_1 b_1 [e_1, e_1] + a_1 b_2 [e_1, e_2] + a_1 b_3 [e_1, e_3] + \\ &\quad + a_2 b_1 [e_2, e_1] + a_2 b_2 [e_2, e_2] + a_2 b_3 [e_2, e_3] + \\ &\quad + a_3 b_1 [e_3, e_1] + a_3 b_2 [e_3, e_2] + a_3 b_3 [e_3, e_3] \end{aligned}$$

В результате, подставив вычисления $[e_2, e_3] = e_1$ и $[e_3, e_2] = -e_1$, получим искомую формулу.

31. Формула для двойного векторного произведения в трехмерном евклидовом пространстве

Предложение. $[a, [b, c]] = (a, c)b - (a, b)c$.

Доказательство.

1. b, c — пропорциональны \Rightarrow можем считать $c = \lambda b$
Правая часть $= (a, \lambda b)b - (a, b)\lambda b = 0$

2. b, c — не пропорциональны

Выберем правый ортонормированный базис e_1, e_2, e_3 так, чтобы

(а) b пропорционален e_1

(б) $\langle b, c \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle$

Тогда $b = \beta e_1, c = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2, a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$.

$[b, c] = [\beta e_1, \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2] = \beta \gamma_2 e_3$

Левая часть $= [a, [b, c]] = [\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \beta \gamma_2 e_3] = -\alpha_1 \beta \gamma_2 e_2 + \alpha_2 \beta \gamma_2 e_1$

Правая часть $= (\alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2) \beta e_1 - \alpha_1 \beta (\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2) = \alpha_2 \gamma_2 \beta e_1 - \alpha_1 \beta \gamma_2 e_2 = \text{левая часть}.$

32. Линейные многообразия как сдвиги подпространств. Критерий равенства двух линейных многообразий

Предложение. $L \subseteq \mathbb{R}^n$ — непустое множество $\Rightarrow L$ — линейное многообразие $\Rightarrow L = v_0 + S$ для некоторых $v_0 \in L$ и подпространства $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

Замечание. Из предложения следует, что линейные многообразия — в точности сдвиги подпространств в \mathbb{R}^n .

Доказательство.

\Rightarrow Ясно и очевидно

$\Leftarrow L = v_0 + S.$

Так как S — подпространство, то существует ОСЛУ $Ax = 0$, такая что S есть ее множество решений.

Тогда L есть множество решений СЛУ $Ax = A_{v_0}$.

Пусть $L_1 = v_1 + S_1$ и $L_2 = v_2 + S_2$ — два линейных многообразия.

Предложение. $L_1 = L_2 \iff \begin{cases} S_1 = S_2 (= S) \\ v_1 - v_2 \in S \end{cases}$

Доказательство.

\Leftarrow Очевидно

$\Rightarrow L_1 = L_2: v_1 = v_1 + 0 \in v_2 + S_2 \Rightarrow v_1 - v_2 \in S_2.$

Аналогично $v_1 - v_2 \in S_1 \Rightarrow v_1 - v_2 \in S_1 \cap S_2.$

$v \in S_1 \Rightarrow v_1 + v \in v_2 + S_2 \Rightarrow v \in (v_2 - v_1) + S_2 \subseteq S_2.$

Отсюда $S_1 \cap S_2$. Аналогично $S_2 \subseteq S_1 \implies S_1 = S_2 (= S)$ и $v_1 - v_2 \in S.$

33. Теорема о плоскости, проходящей через $k + 1$ точку в \mathbb{R}^n

Теорема.

1. Через любые $k + 1$ точек в \mathbb{R}^n проходит плоскость размерности $\leq k$.
2. Если $k + 1$ точек не лежат в плоскости размерности $< k$, то через них проходит ровно одна плоскость размерности k .

Доказательство.

1. Пусть v_0, \dots, v_k — наши точки.

Тогда они все лежат в плоскости $P = v_0 + \langle (v_1 - v_0), (v_2 - v_0), \dots, (v_k - v_0) \rangle$, $\dim P = \dim S \leq k$.

2. В этом случае $\dim P = k \implies \dim S = k \implies v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0$ линейно независимы. $(v_1 - v_0), \dots, (v_k - v_0)$ лежат в направляющем подпространстве любой плоскости, проходящей через $v_0, \dots, v_k \implies P$ — единственная плоскость размерности k с требуемым свойством.

34. Инвариантность определителя матрицы линейного оператора относительно замены базиса. Критерий обратимости линейного оператора в терминах его ядра, образа и определителя. Связь спектра линейного оператора с его характеристическим многочленом

Пусть φ — линейный оператор.

Следствие. $\det A(\varphi, e)$ не зависит от выбора базиса e .

Доказательство. $\det A' = \det(C^{-1}AC)$ — очевидно, так как $\det C^{-1} = \det C = 1$.

Теорема (критерий обратимости). Для $\varphi \in L(V)$ следующие условия эквивалентны:

1. $\text{Ker} \varphi = \{0\}$
2. $\text{Im} \varphi = V$
3. φ обратим (т.е. φ — изоморфизм V на себя)
4. $\det \varphi \neq 0$

Доказательство.

$(1 \Leftrightarrow 2)$ Так как $\dim V = \dim \text{Ker} \varphi + \dim \text{Im} \varphi$.

$(1 \& 2 \Leftrightarrow 3)$ Очевидно

$(2 \Leftrightarrow 4)$ $\text{Im} \varphi = V \Leftrightarrow \text{rk} \varphi = \dim V \Leftrightarrow \det \varphi \neq 0$.

Утверждение. $\lambda \in \text{Спекс} \varphi \Leftrightarrow \chi_\varphi(\lambda) = 0$, то есть λ — корень характеристического многочлена.

Доказательство. Докажем аналогичное утверждение, из которого следует текущее:

$\lambda \in \text{Спекс} \varphi \Leftrightarrow \det(\varphi - \lambda \text{Id}) = 0$.

$\lambda \in \text{Спекс} \varphi \Leftrightarrow V_\lambda(\varphi) \neq \{0\} \Leftrightarrow \text{Ker}(\varphi - \lambda \text{Id}) \neq \{0\} \Leftrightarrow \det(\varphi - \lambda \text{Id}) = 0$.

35. Связь между алгебраической и геометрической кратностями собственного значения линейного оператора

Предложение. Пусть $\lambda \in \text{Спекс} \varphi \Rightarrow (\text{геом. кратность } \lambda) \leq (\text{алг. кратность } \lambda)$

Доказательство. Пусть d_λ — геометрическая кратность $= \dim V_\lambda(\varphi)$.

Выберем базис $(e_1, \dots, e_{d_\lambda})$ в $V_\lambda(\varphi)$ и дополним его до базиса $e = (e_1, \dots, e_n)$ всего пространства V . Тогда $A(\varphi, e)$ имеет вид:

$$A(\varphi, e) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & 0 & B \\ 0 & \cdots & \lambda & \\ \hline & 0 & & D \end{array} \right), \text{ количество } \lambda = d_\lambda$$

Тогда

$$\begin{aligned} \chi_\varphi(t) &= \left| \begin{array}{ccc|c} \lambda - t & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & 0 & B \\ 0 & \cdots & \lambda - t & \\ \hline & 0 & & D - tE \end{array} \right| = \\ &= (-1)^n (\lambda - t)^{d_\lambda} \det(D - tE) = (-1)^{n-d_\lambda} (t - \lambda)^{d_\lambda} \det(D - tE) \end{aligned}$$

Отсюда, $(\text{алг. кратн.}) \geq d_\lambda = (\text{геом. кратн.})$.

36. Линейная независимость собственных подпространств линейного оператора, отвечающих попарно различным собственным значениям. Диагонализуемость линейного оператора, у которого число корней характеристического многочлена равно размерности пространства

Определение. v_1, \dots, v_s — линейно независимы $\iff \forall v_1 \in V_1, \dots, v_s \in V_s$ из условия $v_1 + \dots + v_s = 0$ следует $v_1 = \dots = v_s = 0$.

Пусть $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\} \subseteq \text{Срес}\varphi$, $\lambda_i \neq \lambda_j \ \forall i, j$.

Предложение. Подпространства $V_{\lambda_1}(\varphi), \dots, V_{\lambda_s}(\varphi)$ — линейно независимы.

Доказательство.

$s = 1$: очевидно.

Пусть доказано для всех $< s$, докажем для s :

Пусть $v_1 \in V_{\lambda_1}(\varphi), \dots, v_s \in V_{\lambda_s}(\varphi)$ и $v_1 + \dots + v_s = 0$ (*) $\implies \varphi(v_1) + \dots + \varphi(v_s) = \varphi(0) = 0$
 $\implies \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_s v_s = 0$

Вычтем (*), умноженное на λ_s : $(\lambda_1 - \lambda_s)v_1 + \dots + (\lambda_{s-1} - \lambda_s)v_{s-1} = 0$.

Так как $\lambda_i \neq \lambda_s$ при $i \neq s$, то по предположению индукции получаем: $v_1 = \dots = v_{s-1} = 0$. Тогда (*) влечет $v_s = 0$.

Следствие. Если $\chi_\varphi(t)$ имеет ровно n попарно различных корней, то φ — диагонализуем.

Доказательство. Пусть $\text{Срес}\varphi = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. В каждом $V_{\lambda_i}(\varphi)$ возьмем ненулевой вектор v_i , тогда по предыдущему предложению векторы v_1, \dots, v_n — линейно независимы $\implies v_1, \dots, v_n$ — базис из собственных векторов $\implies \varphi$ — диагонализуем.

37. Два критерия диагонализуемости линейного оператора

Теорема. Линейный оператор φ диагонализуем \iff выполнены следующие два условия:

1. $\chi_\varphi(t)$ разлагается на линейные множители
2. $\forall \lambda \in \text{Срес}\varphi$ (геом. кратн.) = (алг. кратн.)

Доказательство.

(\Rightarrow) φ диагонализуем \rightarrow существует базис $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ такой, что

$$A(\varphi, \mathfrak{e}) = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Тогда } \chi_\varphi(t) = (-1)^n \begin{vmatrix} \mu_1 - t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n - t \end{vmatrix} = (t - \mu_1)(t - \mu_2) \dots (t - \mu_n) \Rightarrow \text{условие 1.}$$

Теперь перепишем $\chi_\varphi(t)$ в виде $\chi_\varphi(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \dots (t - \lambda_s)^{k_s}$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$ и $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\} = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$.

Тогда $\forall i = 1, \dots, s$: $V_{\lambda_i}(\varphi) \equiv \langle e_i \mid \mu_i = \lambda_i \rangle \Rightarrow \dim V_{\lambda_i}(\varphi) \geq \underset{\text{геом. кр.}}{k_i} \Rightarrow (\text{геом. кр.}) = (\text{алг. кр.}) \Rightarrow \text{условие 2.}$

(\Leftarrow) Пусть $\chi_\varphi(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \dots (t - \lambda_s)^{k_s}$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$.

Из условия 2 получаем, что $\dim V_{\lambda_i}(\varphi) = k$. Так как $V_{\lambda_1}(\varphi), \dots, V_{\lambda_s}(\varphi)$ — линейно независимы, то $\dim(V_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V_{\lambda_s}(\varphi)) = \dim V_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + \dim V_{\lambda_s}(\varphi) = k_1 + \dots + k_s = n \Rightarrow V_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V_{\lambda_s}(\varphi) = V \Rightarrow V = V_{\lambda_1}(\varphi) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_s}(\varphi)$.

$\forall i = 1, \dots, s$ пусть e_i — базис в $V_{\lambda_i}(\varphi)$, тогда $e_1 \cup \dots \cup e_s$ — базис V — он состоит из собственных векторов $\Rightarrow \varphi$ — диагонализуем.

38. Существование одномерного или двумерного инвариантного подпространства для линейного оператора в векторном пространстве над \mathbb{R}

Теорема. Если $F = \mathbb{R}$, то $\forall \varphi \in L(V)$ существует либо одномерное, либо двумерное φ -инвариантное подпространство.

Доказательство.

1. $\chi_\varphi(t)$ имеет действительные корни \Rightarrow есть собственные векторы \Rightarrow есть одномерное φ -инвариантное подпространство.
2. $\chi_\varphi(t)$ не имеет действительных корней.

Пусть $\lambda + i\mu$ — комплексный корень $\chi_\varphi(t)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$.

Выберем базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ в V . Пусть $A = A(\varphi, e)$. Над e у φ есть собственный вектор \Rightarrow существует $u \in \mathbb{R}^n$ и $v \in \mathbb{R}^n$, такие что $A(u + iv) = (\lambda + i\mu)(u + iv) = (\lambda u - \mu v) + i(\mu u + \lambda v)$.

Также $A(u + iv) = Au + iAv$.

Отделив действительные и мнимые части, получаем:
$$\begin{cases} Au = \lambda u - \mu v, \\ Av = \mu u + \lambda v \end{cases}$$

Пусть $x \in V$ — вектор с координатами u , а $y \in V$ — вектор с координатами v .

Тогда
$$\begin{cases} \varphi(x) = \lambda x - \mu y, \\ \varphi(y) = \mu x + \lambda y \end{cases} \Rightarrow U = \langle x, y \rangle — \varphi\text{-инвар. подпространство и } \dim U \leq 2.$$

39. Линейный оператор в евклидовом пространстве, сопряжённый к данному: определение, существование, единственность. Матрица сопряженного оператора в произвольном и ортонормированном базисах

Определение. Линейный оператор $\psi \in L(\mathbb{E})$ называется **сопряженным** к φ , если $(x, \varphi(y)) = (\psi(x), y) \forall x, y \in \mathbb{E}$.

$$\beta_\varphi = \beta_\psi^T$$

Предложение.

1. ψ существует, причём единственно.
2. если e — ортонормированный базис в \mathbb{E} , то $A_\psi = A_\varphi^T$, где $A_\varphi = A(\varphi, e)$, $A_\psi = A(\psi, e)$.

Доказательство. Пусть e — базис в \mathbb{E} . $G = G(e_1, \dots, e_n)$.

$$B(\beta_\varphi^T, e) = A_\psi^T G$$

$$B(\beta_\varphi, e) = G A_\psi$$

$A_\psi^T G = G A_\psi \Leftrightarrow G A_\psi = A_\varphi^T G$ ($G = G^T$) $\Leftrightarrow A_\psi = G^{-1} A_\varphi^T G$. Отсюда следует существование и единственность ψ .

Если e — ортонормированный базис, то $G = E \Rightarrow A_\varphi = A_\varphi^T$.

40. Самосопряженный линейный оператор в евклидовом пространстве: инвариантность ортогонального дополнения к инвариантному подпространству и существование собственного вектора

Предложение. $\varphi = \varphi^*$, $U \in \mathbb{E}$ — φ -инвариантное подпространство $\Rightarrow U^\perp$ — тоже φ -инвариантное подпространство.

Доказательство.

Имеем $\varphi(U) \in U$.

Хотим $\varphi(U^\perp) \in U^\perp$.

$$\forall x \in U, \forall y \in U^\perp : \left(\underset{\in U}{x}, \varphi(y) \right) = \left(\underset{\in U}{\varphi(x)}, \underset{\in U^\perp}{y} \right) = 0$$

Предложение. $\varphi = \varphi^* \Rightarrow$ в \mathbb{E} существует собственный вектор.

Доказательство. Знаем существование либо $\begin{cases} 1\text{-мерного } \varphi\text{-инвариантного подпространства,} \\ 2\text{-мерного } \varphi\text{-инвариантного подпространства} \end{cases}$

1. Ок

2. $U \in \mathbb{E}$ — φ -инвариантное подпространство, $\dim U = 2$.

Фиксируем $e = (e_1, \dots, e_n)$ — ортонормированный базис в U .

$\psi := \varphi|_U$, $\psi = \psi^*$.

$$\Delta = \Delta(\varphi, e) \Rightarrow \Delta = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

$$\chi_\psi(t) = (-1)^2 \begin{vmatrix} a-t & b \\ b & c-t \end{vmatrix} = t^2 - (a+c)t + ac - b^2.$$

$D = (a+c)^2 - 4(ac - b^2) = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0 \Rightarrow \chi_\psi(t)$ имеет действительные корни \Rightarrow у ψ есть собственный вектор \Rightarrow у φ также есть собственный вектор.