Линейная алгебра.
Коллоквиум 2 семестр.
Основано на реальных событиях.
v2.0

26 мая 2017

Ченжлоги

v0.0 (16.05.2017) — *исходное (спасибо Борису, Глебу, Александру Г. (Ц.))*

v0.1 (16.05.2017) — *поправлены графические недочёты и 5-й номер*

v0.2 (17.05.2017) — *поправлены мелкие недочёты. Добавлен 4-й, 7-й номера, а также поправлен 10-й, 13-й, 24-й (спасибо Наташе)*

v0.3 (18.05.2017) — *поправил 60, 61, 67, 68, 71, 72, 74, 82, 100, 107 (спасибо Наташе, Стасу)*

v0.4 (20.05.2017) — *перенумерованы вопросы, т.к. убран 5-й (про 5 эквивалентных условий). Поправил 5, 6, 7, 14, 16 (спасибо Соне, Наташе, Стасу). Добавил 112-123 определения*

v0.5 (20.05.2017) — *поправил 5, 9 (обратно), 25 (спасибо Соне, Владу, Стасу, Наташе)*

v0.6 (21.05.2017) — *поправил 16, 18, 62, 63 (спасибо Соне, Стасу, Сергею)*

v0.7 (22.05.2017) — *поправил 49, 50 (спасибо Борису)*

v0.8 (23.05.2017) — *дополнил 5, 28, 49 (спасибо Соне, Наташе)*

v0.9 (24.05.2017) — *поправил 72, 86, 90, 106 (спасибо Алексею)*

v1.0 (24.05.2017) — *поправлено: 5–8, 12, 13, 17, 23, 25–34, 36, 40–53. 56–59 (спасибо Роману Сергеевичу, Станиславу Николаевичу, Мовсесу, Соне, Мире)*

v2.0 (27.05.2017) — *поправил всякое с опорой на список определений Никиты Орлова (также спасибо Асе)*

Определения

1. Сумма двух подпространств векторного пространства

Сумма двух подпространств U и W — это множество

$$U + W = \{u + w \mid u \in U,\, w \in W\}.$$

2. Теорема о связи размерности суммы двух подпространств с размерностью их пересечения

Пусть U, W — подпространства некоторого пространства.
Теорема. $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

3. Сумма нескольких подпространств векторного пространства

Пусть $U_1, \ldots, U_k$ — подпространства векторного пространства V.
Суммой нескольких подпространств называется

$$U_1 + \ldots + U_k = \{u_1 + \ldots + u_k \mid u_i \in U_i\}$$

4. Линейная независимость нескольких подпространств векторного пространства

Подпространства $U_1, \ldots, U_k$ векторного пространства V **линейно независимы** тогда и только тогда, когда: $u_1 + \ldots + u_k = 0 \Longrightarrow u_1 = \ldots = u_k = 0,\;\; u_i \in U_i$.

5. Разложение векторного пространства в прямую сумму подпространств

Пусть $U_1, \ldots, U_k$ — подпространства векторного пространства V.
$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$ называется **прямой суммой** тогда и только тогда,
когда $\begin{cases} V = U_1 + \ldots + U_k; \\ U_1, \ldots, U_k \text{ — линейно независимы} \end{cases}$

6. При каких условиях на подпространства U_1, U_2, векторного пространства V имеет место разложение $V = U_1 \oplus U_2$?

Пусть U_1, U_2 — подпространства векторного пространства V.

Тогда $V = U_1 \oplus U_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} V = U_1 + U_2, \\ U_1 \cap U_2 = \{0\}, \text{ т.е. } (U_1 \text{ и } U_2) \text{ — линейно независимы.} \end{cases}$

7. Описание всех базисов n-мерного векторного пространства в терминах одного базиса и матриц координат

Пусть V — векторное пространство, $\dim V = n$, а $(e_1, \dots, e_n)$ — базис V. То есть
$$\forall v \in V: \ \exists!\ v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n,$$
где $x_1, \dots, x_n \in F$ — координаты вектора v в базисе $(e_1, \dots, e_n)$.

Пусть также есть набор векторов $e'_1, \dots, e'_n$:
$$\begin{aligned} e'_1 &= c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \ldots + c_{n1}e_n,\\ e'_2 &= c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + \ldots + c_{n2}e_n,\\ &\vdots\\ e'_n &= c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \ldots + c_{nn}e_n. \end{aligned}$$

Обозначим матрицу $C = (c_{ij})$. Тогда
$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C.$$

Замечание. $e'_1, \dots, e'_n$ образуют базис $\iff \det C \neq 0$.

8. Матрица перехода от одного базиса векторного пространства к другому

Пусть V — векторное пространство, $\dim V = n$, $(e_1,\ \dots,\ e_n)$ — один базис, а $(e'_1,\ \dots,\ e'_n)$ — другой базис V. Тогда каждый вектор из $\mathbb{e}'$ линейно выражается через базис:
$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i, \quad c_{ij} \in F$$
$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C, \text{ где } C = (c_{ij}).$$

То есть мы получили матрицу, где в j-ом столбце стоят коэффициенты линейного разложения вектора e'_j в базисе $(e_1, \dots, e_n)$.

Матрица C называется **матрицей перехода** от базиса $(e_1, \dots, e_n)$ к базису $(e'_1, \dots, e'_n)$.

9. Формула преобразования координат вектора при замене базиса векторного пространства

Пусть C — матрица перехода от базиса $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ к базису $\mathbb{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ пространства V. Пусть $x \in V$ — вектор, имеющий координаты $(x_1, \dots, x_n)$ в базисе $\mathbb{e}$ и $(x'_1, \dots, x'_n)$ в базисе $\mathbb{e}'$ соответственно. Тогда:
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x'_j$$

10. Линейное отображение векторных пространств, его простейшие свойства.

Пусть V, W — векторные пространства над полем F.

Отображение $\varphi: V \to W$ называется **линейным**, если:
1. $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w),\ \ \forall v \in V, \forall w \in W$
2. $\varphi(\alpha v) = \alpha\varphi(v)$, $\forall \alpha \in F$, $\forall v \in V$

Простейшие свойства линейного отображения:
1. $\varphi(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$
2. $\varphi(-v) = -\varphi(v)$, $\forall v \in V$

11. Изоморфизм векторных пространств. Изоморфные векторные пространства

Пусть V, W — векторные пространства над полем F.

Отображение $\varphi : V \to W$ называется **изоморфизмом**, если φ линейно и биективно.

Два векторных пространства называются **изоморфными**, если существует изоморфизм $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ (и тогда существует изоморфизм $W \xrightarrow{\sim} V$ по предположению).

Обозначение: $V \simeq W$.

12. Какими свойствами обладает отношение изоморфности на множестве всех векторных пространств?

Следствие из теоремы. Изоморфизм — это отношение эквивалентности на множестве всех векторных пространств над фиксированным полем F (рефлексивность, симметричность, транзитивность).

13. Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств

Два конечномерных векторных пространства V и W над одним и тем же полем F **изоморфны** тогда и только тогда, когда $\dim V = \dim W$.

14. Матрица линейного отображения

Пусть V и W — векторные пространства, $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V, $\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис W, $\varphi : V \to W$ — линейное отображение. Пусть:

$$\varphi(e_j) = a_{1j}f_1 + \ldots + a_{mj}f_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}f_i.$$

Тогда матрица $A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$ называется матрицей линейного отображения φ в базисах $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$ (или по отношению к базисам $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$). Иными словами, в столбцах $A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$ записаны координаты образов базисных векторов V.

Справедливо равенство: $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = (f_1, \ldots, f_m)A$

15. Связь между координатами вектора и его образа при линейном отображении

Пусть V и W — векторные пространства, $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V, $\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис W, $\varphi : V \to W$ — линейное отображение. $A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$ — матрица линейного отображения φ.

Если $v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ и $\varphi(v) = y_1f_1 + \ldots + y_mf_m$, то

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

16. Формула изменения матрицы линейного отображения при замене базисов

Пусть V и W — векторные пространства, $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ и $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ — базисы V, $\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ и $\mathbb{f}' = (f'_1, \ldots, f'_m)$— базисы W, $\mathbb{e}' = \mathbb{e}C$, $\mathbb{f}' = \mathbb{f}D$, A — матрица линейного отображения $\varphi : V \to W$ по отношению к $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$, A' — матрица линейного отображения по отношению к базисам $\mathbb{e}'$ и $\mathbb{f}'$. Тогда

$$A' = D^{-1}AC$$

17. Сумма двух линейных отображений и ее матрица. Произведение линейного отображения на скаляр и его матрица

Пусть V, W — векторные пространства.

$\mathrm{Hom}(V, W)$ — множество всех линейных отображений из V в W. $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V, $\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис W, $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $\alpha \in F$, $A_\varphi = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$ — матрица линейного отображения φ, $A_\psi = A(\psi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$ — матрица ψ.

1. **Сумма** $\varphi+\psi$ — это линейное отображение, такое что $\forall v \in V : (\varphi+\psi)(v) = \varphi(v)+\psi(v)$.
   Матрица суммы линейных отображений: $A(\varphi + \psi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$.
2. **Произведение** $\alpha\varphi$ — это линейное отображение, такое что $\forall v \in V : (\alpha\varphi)(v) = \alpha\varphi(v)$.
   Матрица умножения линейного отображения на скаляр: $A(\alpha\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = A_{\alpha\varphi} = \alpha A_\varphi$.

18. Композиция двух линейных отображений и ее матрица

Пусть U, V, W — векторные пространства. n, m, k — их размерности соответственно. $\varphi : U \to V$ — линейное отображение с матрицей $A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$. $\psi : V \to W$ — линейное отображение с матрицей $B(\psi, \mathbb{f}, \mathbb{g})$. Тогда матрица $C(\varphi \circ \psi, \mathbb{e}, \mathbb{g})$ вычисляется как:

$$C = BA$$

19. Ядро и образ линейного отображения

Пусть V, W — векторные пространства с линейным отображением $\varphi : V \to W$.
Ядро φ — это множество $\mathrm{Ker}\varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$.
Образ φ — это множество $\mathrm{Im}\varphi := \{w \in W \mid \exists v \in V : \varphi(v) = w\}$.

20. Критерий инъективности линейного отображения в терминах его ядра. Критерий изоморфности линейного отображения в терминах ядра и образа

Пусть $\varphi : V \to W$ — линейное отображение.

1. Отображение φ **инъективно** тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$.
2. Отображение φ является **изоморфизмом** тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$ и $\mathrm{Im}\varphi = W$.

21. Связь между рангом матрицы линейного отображения и размерностью его образа

Пусть V, W — векторные пространства, $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V, $\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ — базис W, $A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$ — матрица линейного отображения $\varphi : V \to W$ в F. Тогда справедливо равенство:

$$\dim \mathrm{Im}\varphi = \mathrm{rk} A.$$

22. Оценки на ранг произведения двух матриц

Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{k\times m}$, $B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$. Тогда

$$\mathrm{rk} AB \leqslant \min(\mathrm{rk} A, \mathrm{rk} B).$$

Также, если

1. $n = m$ и $\det A \neq 0$, то $\mathrm{rk} AB = \mathrm{rk} B$
2. $m = k$ и $\det B \neq 0$, то $\mathrm{rk} AB = \mathrm{rk} A$

23. Каким свойством обладает набор векторов, дополняющий базис ядра линейного отображения до базиса всего пространства?

Свойство. Пусть $\varphi : V \to W$ — линейное отображение, $(e_1, \ldots, e_k)$ — базис $\mathrm{Ker}\varphi$. Дополним базис ядра до базиса всего пространства векторами $e_{k+1}, \ldots, e_n$. Тогда векторы $\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)$ — базис $\mathrm{Im}\varphi$.

24. Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения

Пусть $\varphi : V \to W$ — линейное отображение. Тогда справедливо:

$$\dim \mathrm{Im}\varphi = \dim V - \dim \mathrm{Ker}\varphi$$

25. К какому простейшему виду можно привести матрицу линейного отображения путем замены базисов?

Простейшим видом матрицы линейного отображения является её канонический вид — диагональная матрица A', где $\mathbb{e}' = \mathbb{e}C$, $\mathbb{f}' = \mathbb{f}D$ вида

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array}\right), \text{ где количество единиц} = \mathrm{rk} A$$

задаваемая формулой

$$A' = D^{-1}AC$$

26. Линейная функция на векторном пространстве

Линейной функцией на векторном пространстве V над полем F называется всякое линейное отображение $\varphi : V \to F$.

27. Сопряженное (двойственное) векторное пространство и его размерность

Пространство V^* (т.е. множество всех линейных функций на V) называется **сопряженным** (двойственным) к пространству V, причем $\dim V^* = \dim V$.

28. Базис сопряженного пространства, двойственный к данному базису исходного векторного пространства

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V. Рассмотрим линейные функции $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ такие, что $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$, где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \, i = j, \\ 0, \, i \neq j \end{cases}$. То есть $\varepsilon_i = (\delta_{i1}, \ldots, \delta_{ii}, \ldots, \delta_{in}) = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$.

$(\varepsilon_1, \, \ldots, \, \varepsilon_n)$ — базис V^*, **двойственный** к базису $\mathbb{e}$.

29. Билинейная форма на векторном пространстве

Билинейная форма на векторном пространстве V над полем F — это отображение $\beta : V \times V \to F$, линейное по каждому аргументу:

1. $\beta(x_1 + x_2, \, y) = \beta(x_1, \, y) + \beta(x_2, \, y)$
2. $\beta(\lambda x, y) = \lambda \beta(x, y)$
3. $\beta(x, \, y_1 + y_2) = \beta(x, \, y_1) + \beta(x, \, y_2)$
4. $\beta(x, \, \lambda y) = \lambda \beta(x, \, y)$

30. Матрица билинейной формы

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V $(\dim V < \infty)$, $\beta : V \times V \to F$ — билинейная форма.

Матрицей билинейной формы β в базисе $\mathbb{e}$ называется матрица $B(\beta, \, \mathbb{e}) = (b_{ij})$, где $b_{ij} = \beta(e_i, \, e_j)$.

31. Формула для вычисления значений билинейной формы в координатах

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V $(\dim V < \infty)$, $\beta : V \times V \to F$ — билинейная форма, B — её матрица в базисе $\mathbb{e}$.

Тогда для любых векторов $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \in V$ и $y = y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n \in V$:

$$\beta(x, \, y) = (x_1, \ldots, x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

32. Формула изменения матрицы билинейной формы при переходе к другому базису

Пусть $B(\beta, \mathbb{e})$ — матрица билинейной формы β в базисе $\mathbb{e}$. Пусть $\mathbb{f}$ — другой базис в том же пространстве V. C — матрица перехода от $\mathbb{e}$ к $\mathbb{f}$. Тогда матрица билинейной формы $B'(\beta, \mathbb{f})$ а базисе $\mathbb{f}$ вычисляется как

$$B' = C^T BC.$$

33. Ранг билинейной формы

Рангом билинейной формы β называется ранг её матрицы B в базисе $\mathbb{e}$:

$$\mathrm{rk}\beta = \mathrm{rk}B(\beta, \mathbb{e})$$

34. Симметричная билинейная форма. Критерий симметричности билинейной формы в терминах её матрицы

Билинейная форма β называется **симметричной**, если

$$\beta(x, y) = \beta(y, x)\ \forall x, y \in V.$$

Также β симметрична тогда и только тогда, когда B симметрична (т.е. $B = B^T$), где B — матрица билинейной формы.

35. Квадратичная форма

Пусть V — векторное пространство над полем F. Пусть $\beta : V \times V \to F$ — билинейная форма.

Отображение $Q_\beta : V \to F$, заданное формулой $Q_\beta(x) = \beta(x, x)$ называется **квадратичной формой**, ассоциированной с билинейной формой β.

36. Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами

Пусть в поле F выполняется условие: $1 + 1 \neq 0$ (т.е. $2 \neq 0$).

Теорема. Отображение $\beta \to Q_\beta$, где $Q_\beta(x) = \beta(x, x)$ является биекцией между симметричными билинейными и квадратичными формами.

37. Симметризация билинейной формы

Билинейная форма $\sigma(x, y) = \frac{1}{2}(\beta(x, y) + \beta(y, x))$ называется **симметризацией билинейной формы** β.

38. Поляризация квадратичной формы

Симметричная билинейная форма $\beta(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x + y) - Q(x) - Q(y))$ называется **поляризацией квадратичной формы** Q.

39. Матрица квадратичной формы

Пусть V — векторное пространство, $\dim V < \infty$.

Матрицей квадратичной формы $Q : V \to F$ в базисе $\mathbb{e}$ называется матрица соответствующей ей симметричной билинейной формы (т.е. поляризации Q) $\beta : V \times V \to F$ в том же базисе.

40. Канонический вид квадратичной формы

Квадратичная форма Q имеет в базисе $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ **канонический вид**, если для любого вектора $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ верно, что $Q(x) = a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_n^2$, где $a_i \in F$ (т.е. матрица квадратичной формы Q в этом базисе диагональна).

41. Нормальный вид квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Квадратичная форма Q имеет в базисе $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ **нормальный вид**, если для любого вектора $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ верно, что $Q(x) = a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_n^2$, где $a_i \in \{-1, 0, 1\}$ (т.е. матрица квадратичной формы Q в этом базисе диагональна, где элементы на диагонали $\in \{-1, 0, 1\}$).

42. Индексы инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Пусть Q — квадратичная форма над R, которая в базисе $\mathbb{e}$ имеет нормальный вид:

$$Q(x_1,\ \ldots,\ x_n) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_{s+t}^2,$$

где s — количество положительных слагаемых, t — количество отрицательных слагаемых. Тогда

$i_+ := s$ — **положительный индекс инерции** квадратичной формы Q,

$i_- := t$ — **отрицательный индекс инерции** квадратичной формы Q,

$n - s - t$ — **нулевой индекс инерции** квадратичной формы Q.

43. Закон инерции для квадратичной формы над R

Теорема. Индексы инерции $(i_+,\ i_-)$ не зависят от базиса, в котором Q принимает нормальный вид.

44. Положительно/неотрицательно определенная квадратичная форма

Квадратичная форма Q называется **положительно определённой** ($Q > 0$), если $Q(x) > 0\ \forall x \neq 0$.

Квадратичная форма Q называется **неотрицательно определённой** ($Q \geqslant 0$), если $Q(x) \geqslant 0\ \forall x$.

45. Отрицательно/неположительно определенная квадратичная форма

Квадратичная форма Q называется **отрицательно определённой** ($Q < 0$), если $Q(x) < 0 \ \forall x \neq 0$.

Квадратичная форма Q называется **неположительно определённой** ($Q \leqslant 0$), если $Q(x) \leqslant 0 \ \forall x$.

46. Неопределенная квадратичная форма

Квадратичная форма называется **неопределенной**, если $\exists x, \, y : Q(x) > 0, \, Q(y) < 0$.

47. Следствие метода Якоби о нахождении индексов инерции квадратичной формы

Пусть $B = B(Q, \mathbb{e})$, δ_k — k-й угловой минор матрицы B.

Теорема. Пусть $\delta_k \neq 0 \ \forall k = 1, \ \ldots, n$. Тогда i_- равен числу перемен знака в последовательности $1, \delta_1, \delta_2, \ \ldots, \delta_n$

48. Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы

Теорема. $Q > 0$ тогда и только тогда, когда $\delta_i > 0$ для всех i, где δ_i — i-й угловой минор матрицы квадратичной формы.

49. Критерий отрицательной определенности квадратичной формы

Пусть Q — квадратичная форма, δ_i — i-й угловой минор матрицы квадратичной формы Q.

$$Q < 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \delta_i > 0, \ i \,\vdots\, 2, \\ \delta_i < 0, \ i \not\vdots\, 2. \end{cases}$$

50. Евклидово пространство

Евклидово пространство — это векторное пространство $\mathbb{E}$ над полем $\mathbb{R}$, на котором задана положительно определённая симметричная билинейная функция $(\cdot \, , \cdot) : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$, которую мы будем называть скалярным произведением.

51. Длина вектора в евклидовом пространстве

$\mathbb{E}$ — евклидово пространство, $\dim \mathbb{E} < \infty$.

Длиной вектора $x \in \mathbb{E}$ называется число $|x| = \sqrt{(x, \, x)}$.

52. Неравенство Коши-Буняковского

Пусть $x,\, y \in \mathbb{E}$. Тогда
$$|(x,\, y)| \leqslant |x||y|,$$
причем равенство достигается тогда и только тогда, когда x и y пропорциональны.

53. Угол между ненулевыми векторами евклидова пространства

Углом между ненулевыми векторами x и y называют такое число $\alpha \in [0,\, \pi]$, что
$$\cos\alpha = \frac{(x,\, y)}{|x||y|}.$$

54. Матрица Грама системы векторов евклидова пространства

$v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{E}$ — система векторов.

Матрицей Грама системы векторов $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{E}$ называется матрица их попарных скалярных произведений:
$$G(v_1,\ \ldots,\, v_k) := \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) & \ldots & (v_1, v_k) \\ (v_2, v_1) & (v_2, v_2) & \ldots & (v_2, v_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (v_k, v_1) & (v_k, v_2) & \ldots & (v_k, v_k) \end{pmatrix} := (g_{ij}), \quad g_{ij} = (v_i, v_j).$$

55. Свойства определителя матрицы Грама

1. $\det G(v_1,\ \ldots,\, v_k) \geqslant 0$
2. $\det G(v_1,\ \ldots,\, v_k) = 0$ тогда и только тогда, когда $v_1,\ \ldots,\, v_k$ линейно зависимы.

56. Ортогональное дополнение подмножества евклидова пространства

Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство, $\dim\mathbb{E} = n$. $S \subseteq \mathbb{E}$ — произвольное подпространство. Ортогональным дополнением к S называется множество $S^{\perp} = \{x \in \mathbb{E} \mid (x,\, y) = 0\ \forall y \in S\}$.

57. Чему равна размерность ортогонального дополнения к подпространству?

Пусть $S \subseteq \mathbb{E},\ \dim\mathbb{E} = n$. Тогда
$$\dim S^{\perp} = n - \dim S.$$

58. Каким свойством обладают подпространство евклидова пространства и его ортогональное дополнение?

Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$. Тогда:

1. $\mathbb{E} = S \oplus S^{\perp}$ — евклидово пространство разлагается в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения.
2. $(S^{\perp})^{\perp} = S$ — ортогональное дополнение ортогонального дополнения пространства есть само пространство.

59. Ортогональная проекция вектора на подпространство

Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$. Тогда $\forall x \in E$ единственным образом разбивается на сумму $x = y + z$, где $y \in S$, а $z \in S^{\perp}$.

Вектор y называется **ортогональной проекцией** вектора x на подпространство S.

Обозначение: $pr_s x$.

60. Ортогональная составляющая вектора относительно подпространства

Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$. Тогда $\forall x \in E$ единственным образом разбивается на сумму $x = y + z$, где $y \in S$, а $z \in S^{\perp}$.

Вектор z называется **ортогональной составляющей** вектора x вдоль подпространства S. *Обозначение*: $ort_s x$.

61. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в $\mathbb{R}^n$, заданное своим базисом

Пусть $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением. $S \subseteq \mathbb{R}^n$ — подпространство, $(e_1, \ldots, e_k)$ — базис в S. Образуем матрицу $A \in \mathrm{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R})$, где $A^{(i)} = e_i$. Тогда

$$\forall v \in \mathbb{E} : pr_s v = A(A^T A)^{-1} A^T v$$

62. Ортогональная система векторов. Ортогональный базис

Система векторов $v_1, \ldots, v_k$ евклидова пространства называется **ортогональной**, если все её векторы попарно ортогональны, т.е. $(v_i,\, v_j) = 0\ \forall i \neq j$.

Базис $(e_1, \ldots, e_n)$ в $\mathbb{E}$ называется **ортогональным**, если $(e_i,\, e_j) = 0\ \forall i \neq j$. Это равносильно тому, что $G(e_1, \ldots, e_n)$ диагональна.

63. Ортонормированная система векторов. Ортонормированный базис

Система векторов $v_1, \ldots, v_k$ евклидова пространства называется **ортонормированной**, если все её векторы попарно ортогональны, т.е. $(v_i, v_j) = 0 \ \forall i \neq j$, и длина (норма) каждого вектора системы равна 1.

Базис $(e_1, \ldots, e_n)$ в $\mathbb{E}$ называется **ортонормированным**, если $(e_i, e_j) = 0 \ \forall i \neq j$ и длина каждого вектора равна 1: $\left(\frac{e_1}{|e_1|}, \ \ldots, \ \frac{e_n}{|e_n|}\right)$. Это равносильно тому, что $G(e_1, \ldots, e_k)$ единична.

64. Описание всех ортонормированных базисов евклидова пространства в терминах одного такого базиса и матриц перехода

Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — ортонормированный базис в $\mathbb{E}$. Пусть также есть ещё один базис $(e'_1, \ldots, e'_n)$, причём $(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)C$.

$(e'_1, \ldots, e'_n)$ — **ортонормированный** тогда и только тогда, когда $C^T C = E$ $(C^{-1} = C^T)$.

65. Ортогональная матрица

Матрица $C \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ называется **ортогональной**, если $C^T C = E$ $(C^{-1} = C^T)$.

66. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в терминах его ортогонального базиса

Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство, $(e_1, \ldots, e_k)$ — его ортогональный базис, $x \in \mathbb{E}$.

$$pr_S x = \sum_{i=1}^{k} \frac{(x, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i \text{ — для ортогонального базиса.}$$

$$pr_S x = \sum_{i=1}^{k} (x, e_i) e_i \text{ — для ортонормированного базиса.}$$

67. Теорема Пифагора в евклидовом пространстве

Пусть $x, y \in \mathbb{E}$ и $x \perp y$ (т.е. $(x, y) = 0$). Тогда

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2.$$

68. Расстояние между векторами евклидова пространства

Пусть $x, y \in \mathbb{E}$ — векторы.

Расстоянием между двумя векторами называется величина

$$\rho(x, y) := |x - y|.$$

69. Неравенство треугольника в евклидовом пространстве

$$\rho(a,\, b) + \rho(b,\, c) \geqslant \rho(a,\, c), \;\; \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Или, что то же самое

$$|x| + |y| \geqslant |x + y|, \;\; \forall x, y \in \mathbb{E}$$

70. Теорема о расстоянии между вектором и подпространством в терминах ортогональной составляющей

Пусть $x \in \mathbb{E}$ и $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство.
Теорема. $\rho(x,\, S) = |ort_S x|$, причём $pr_S x$ – единственный ближайший к x вектор из S.

71. Псевдорешение несовместной системы линейных уравнений

Пусть $(Ax = b)$ — несовместная система линейных уравнений. Тогда вектор $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется **псевдорешением**, если $\rho(Ax_0,\, b) = |Ax_0 - b|$ минимально.

72. Формула для расстояния от вектора до подпространства в терминах матриц Грама

Пусть $S \subset \mathbb{E}$ — подпространство, $x \in \mathbb{E}$, $(e_1, \ldots, e_k)$ — базис S. Тогда

$$(\rho(x,\, S))^2 = \frac{\det G(e_1, \ldots, e_k, x)}{\det G(e_1, \ldots, e_k)}$$

73. k-мерный параллелепипед и его объём

k-мерным параллелепипедом, натянутым на векторы $a_1, \ldots, a_k$, называется подмножество

$$P(a_1, \ldots, a_k) := \left\{ x = \sum_{i=1}^{k} x_i a_i \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1 \right\}.$$

Объем k-мерного параллелепипеда — это величиина $volP(a_1, \ldots, a_k)$, определяемая индуктивно:

$$k = 1 \Rightarrow volP(a_1) := |a_1|,$$
$$k > 1 \Rightarrow volP(a_1, \ldots, a_k) := \underbrace{volP(a_1, \ldots, a_{k-1})}_{\text{основание}} \cdot \underbrace{|h|}_{\text{высота}}, \text{ где } h = \mathrm{ort}_{\langle a_1, \ldots, a_{k-1} \rangle} a_k$$

Также объём k-мерного параллелепипеда можно посчитать по следующим формулам:

1. $volP(a_1, \ldots, a_k)^2 = \det G(a_1, \ldots, a_k)$.
2. Пусть $(e_1, \ldots, e_k)$ — ортонормированный базис в $\mathbb{E}$. $(a_1, \ldots, a_k) = (e_1, \ldots, e_k)A$, где $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ — матрица координат векторов $a_1, \ldots, a_k$.
   $volP(a_1, \ldots, a_k) = \det A$.

74. В каком случае два базиса евклидова пространства называются одинаково ориентированными?

Пусть $\mathbb{e}$, $\mathbb{e}'$ — два базиса пространства.

Будем говорить, что базисы $\mathbb{e}$, $\mathbb{e}'$ **ориентированны одинаково**, если определитель матрицы перехода от $\mathbb{e}$ к $\mathbb{e}'$ больше нуля ($\det C > 0$).

75. Смешанное произведение векторов трёхмерного евклидова пространства, формула для его вычисления в терминах координат в правом ортонормированном базисе

Правый ортонормированный базис — положительно ориентированный.

Смешанным произведением векторов a, b, c называется величина

$$(a,\, b,\, c) = Vol(a,\, b,\, c).$$

Если (e_1, e_2, e_3) — правый ортонормированный базис и

$$a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$$
$$b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$$
$$c = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3,$$

то

$$(a,\, b,\, c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

76. Критерий компланарности трёх векторов трёхмерного евклидова пространства

Векторы a, b, c **компланарны** (линейно зависимы) $\Longleftrightarrow$ $(a, b, c) = 0$.

77. Векторное произведение в трёхмерном евклидовом пространстве

Векторным произведением векторов $a, b \in \mathbb{E}$ называется вектор c такой, что:

1. $c \perp \langle a,\, b\rangle$
2. $|c| = |a||b| \sin\alpha$ (или же $|c|$ = площади параллелограмма, образованного (a, b))
3. $(a,\, b,\, c) \geqslant 0$ (т.е. векторы образуют правую тройку)

Обозначение: $[a, b]$ или $a \times b$.

78. Критерий коллинеарности двух векторов трёхмерного евклидова пространства

a, b **коллинеарны** (т.е. линейно зависимы) $\Longleftrightarrow$ $[a, b] = 0$.

79. Выражение смешанного произведения через векторное и скалярное в трёхмерном евклидовом пространстве

$$(a, b, c) = (a, [b, c]) \ \forall a, b, c \in \mathbb{R}^3$$

80. Формула для двойного векторного произведения в трёхмерном евклидовом пространстве

$$\begin{aligned}[a, [b, c]] &= (a, c)b - (a, b)c = \\ &= b(a, c) - c(a, b)\end{aligned}$$

81. Формула для вычисления векторного произведения в терминах координат в правом ортонормированном базисе

Пусть (e_1, e_2, e_3) — ортонормированный базис.

$$a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$$
$$b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$$

Тогда

$$\begin{aligned}[a,\, b] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \\ = (a_2b_3 - b_2a_3)e_1 - (a_1b_3 - b_1a_3)e_2 + (a_1b_2 - b_1a_2)e_3 = \\ = \underline{((a_2b_3 - b_2a_3),\, (b_1a_3 - a_1b_3),\, (a_1b_2 - b_1a_2))}\end{aligned}$$

82. Линейное многообразие. Характеризация линейных многообразий как сдвигов подпространств

Линейное многообразие в $\mathbb{R}^n$ — множество решений некоторой совместной СЛУ.

Если $L \subseteq \mathbb{R}^n$ — непустое множество $\Longrightarrow L$ — линейное многообразие $\Longrightarrow L = v_0 + S$ для некоторых $v_0 \in L$ и подпространства $S \subseteq \mathbb{R}^n$, откуда и следует, что линейные многообразия — в точности **сдвиги подпространств**.

83. Критерий равенства двух линейных многообразий. Направляющее подпространство и размерность линейного многообразия

$L_1, L_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ — множества всех решений. $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ — множество решений однородной СЛУ $Ax = 0$.

$L_1 = v_1 + S_1$ и $L_2 = v_2 + S_2$ — два линейных многообразия.

$$L_1 = L_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} S_1 = S_2 \ (= S), \\ v_1 - v_2 \in S \end{cases}$$

S называется **направляющим подпространством** линейного многообразия L.

84. Теорема о плоскости, проходящей через точку $k+1$ в $\mathbb{R}^n$

Теорема. а) Через любые $k+1$ точек в $\mathbb{R}^n$ проходит плоскость размерности $\leqslant k$
б) Если $k+1$ точек не лежат в плоскости размерности $< k$, то через них проходит ровно одна плоскость размерности k

85. Три способа задания прямой в $\mathbb{R}^2$. Уравнение прямой в $\mathbb{R}^2$, проходящей через две различные точки

1. **Уравнение в координатах**: $Ax + By = C, \ \ (A, B) \neq (0, 0)$
2. **Векторное уравнение**: $(n, v - v_0) = 0$, где n — вектор нормали, $v - v_0$ вектор на прямой
3. **Параметрическое уравнение**: $v = v_0 + \vec{a}\lambda$, где v_0 — точка на прямой, $\vec{a}$ — направляющий вектор прямой, λ — коэффициент

Уравнение прямой, проходящей через две точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1):

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

86. Три способа задания плоскости в $\mathbb{R}^3$. Уравнение плоскости в $\mathbb{R}^3$, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой

1. **Уравнение в координатах**: $Ax + By + Cz = D, \ \ (A, B, C) \neq (0, 0, 0)$
2. **Векторное уравнение**: $(n, v - v_0) = 0$, где n — вектор нормали плоскости, $v - v_0$ — вектор на плоскости
3. **Параметрическое уравнение**: $v = v_0 + \vec{a}\alpha + \vec{b}\beta$, где v_0 — радиус-вектор фиксированной точки на плоскости, a, b — направляющие векторы на плоскости, α, β — коэффициенты.

Уравнение плоскости, проходящей через точки (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2):

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

87. Три способа задания прямой в $\mathbb{R}^3$. Уравнения прямой в $\mathbb{R}^3$, проходящей через две различные точки

1. **СЛУ**: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{cases}$, $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2.$
2. **Векторное уравнение**: $[v - v_0,\, a] = 0$, где, a — направляющий вектор, $v - v_0$ принадлежит прямой
3. **Параметрическое уравнение**: $v = v_0 + \vec{a}\lambda$, где v_0 — точка на прямой, $\vec{a}$ — направляющий вектор
4. **Каноническое уравнение прямой**: $\dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2} = \dfrac{z - z_0}{a_3}$, где $a_1,\, a_2,\, a_3$ — направляющий вектор, $x_0,\, y_0,\, z_0$ — координаты точки на прямой

Уравнение прямой, проходящей через две различные точки $(x_0,\, y_0,\, z_0)$ и $(x_1,\, y_1,\, z_1)$:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

88. Случаи взаимного расположения двух прямых в $\mathbb{R}^3$

Пусть $a_1,\, a_2$ — направляющие прямых $l_1,\, l_2$, а $v_1,\, v_2$ — точки, лежащие на данных прямых. Тогда прямые $l_1,\, l_2$:

$$\left.\begin{array}{l} \text{1. совпадают} \\ \text{2. параллельны} \\ \text{3. пересекаются в точке} \end{array}\right\} \text{лежат в одной плоскости} \Rightarrow (a_1,\, a_2,\, v_2 - v_1) = 0$$

4. скрещиваются (не лежат в одной плоскости)

89. Случаи взаимного расположения трёх попарно различных плоскостей в $\mathbb{R}^3$

Пусть имеются три плоскости $P_1,\, P_2,\, P_3$.

1. Среди $P_1,\, P_2,\, P_3$ есть две параллельных
   (a) $P_1 \parallel P_2 \parallel P_3$
   (b) Две параллельны, а третья их пересекает
2. Никакие две плоскости не параллельны
   (a) Все три пересекаются по одной прямой
   (b) Прямые пересечения параллельны
   (c) $P_1,\, P_2,\, P_3$ пересекаются в одной точке

90. Формула для расстояния от точки до прямой в $\mathbb{R}^3$

Пусть l — прямая, заданная точкой v_0 и направляющим вектором a.
v — точка, не лежащая на данной прямой.

$$\rho(v,\, l) = |ort_{\langle a \rangle}(v - v_0)| = \frac{|[v - v_0,\, a]|}{|a|}$$

91. Формула для расстояния от точки до плоскости в $\mathbb{R}^3$

Пусть P — плоскость, n — вектор нормали, v_0 — точка, лежащая на плоскости, v — точка, не лежащая на плоскости, $S = \langle n \rangle^\perp$ — направляющее подпространство.

$$\rho(v,\, P) = |ort_S(v - v_0)| = |pr_{\langle n \rangle}(v - v_0)| = \left| \frac{(v - v_0,\, n)}{(n,\, n)} n \right| = \frac{|(v - v_0,\, n)|}{|n|}$$

92. Формула для расстояния между двумя скрещивающимися прямыми в $\mathbb{R}^3$

Пусть $l_1,\, l_2$ — прямые. $v_1,\, v_2$ — точки, лежащие на каждой из данных прямых. $a_1,\, a_2$ — их направляющие векторы.

Построим плоскости

$$P_1 = v_1 + \langle a_1,\, a_2 \rangle \supseteq l_1$$
$$P_2 = v_2 + \langle a_1,\, a_2 \rangle \supseteq l_2$$

Тогда

$$\rho(l_1,\, l_2) = \rho(P_1,\, P_2) = \frac{|(a_1,\, a_2,\, v_2 - v_1)|}{|[a_1,\, a_2]|}$$

93. Линейный оператор

Пусть V — конечномерное векторное пространство.

Линейным оператором называется всякое линейное отображение $\varphi : V \to V$, то есть из V в себя. *Обозначение*: $L(V) = \mathrm{Hom}(V,\, V)$.

94. Матрица линейного оператора

Пусть V — векторное пространство, $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — его базис и φ — его линейный оператор.

Матрицей линейного оператора φ называется такая матрица, в j-ом столбце которой стоят координаты вектора $\varphi(e_j)$ в базисе $\mathbb{e}$.

$$(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = (e_1, \ldots, e_n)A, \quad A \in \mathrm{Mat}_n.$$

95. Формула преобразования координат вектора при действии линейного оператора

Пусть $\varphi \in L(V)$, $A = A(\varphi,\, \mathbb{e})$ — матрица φ в базисе $\mathbb{e}$. Тогда

$$v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n,$$
$$\varphi(v) = y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n,$$
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

96. Формула изменения матрицы линейного оператора при переходе к другому базису

Пусть φ — линейный оператор векторного пространства V, $A = A(\varphi, \mathbb{e})$ — матрица φ в базисе $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$. Пусть $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ — другой базис, причём $(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)C$.

Тогда

$$A' = C^{-1}AC,$$

где C — матрица перехода к новому базису $\mathbb{e}'$, $A' = A'(\varphi, \mathbb{e}')$ — матрица φ в базисе $\mathbb{e}'$.

97. Подобные матрицы

Две матрицы A', $A \in \mathrm{M}_n(F)$ называются **подобными**, если существует такая матрица $C \in \mathrm{M}_n(F)$, $\det C \neq 0$, что $A' = C^{-1}AC$.

98. Подпространство, инвариантное относительно линейного оператора

Подпространство $U \subseteq V$ называется **инвариантным** относительно φ (или φ-инвариантным), если $\varphi(U) \subseteq U$. То есть $\forall u \in U : \varphi(u) \in U$.

99. Матрица линейного оператора в базисе, дополняющем базис инвариантного подпространства

Пусть $\varphi : V \to V$ — линейный оператор.

Пусть $U \subset V$ — φ-инвариантное подпространство. Также пусть $e_1, \ \ldots, e_k$ — базис в U. Дополним его до базиса V : $\mathbb{e} = (e_1, \ \ldots, e_n)$. Тогда

$$\underbrace{A(\varphi, \mathbb{e})}_{\text{матрица с углом нулей}} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad \text{где } B \in \mathrm{M}_k.$$

100. Собственный вектор линейного оператора

Пусть $\varphi : V \to V$ — линейный оператор.

Ненулевой **вектор** $v \in V$ называется **собственным** для V, если $\varphi(v) = \lambda v$ для некоторого $\lambda \in F$.

101. Собственное значение линейного оператора

Элемент $\lambda \in F$ называется **собственным значением** линейного оператора $\varphi : V \to V$, если существует такой ненулевой вектор $v \in V$, что $\varphi(v) = \lambda v$.

102. Спектр линейного оператора

Множество всех собственных значений линейного оператора φ называется **спектром**. *Обозначение*: $\mathrm{Spec}(\varphi)$.

103. Диагонализуемый линейный оператор

Линейный оператор φ называется **диагонализуемым**, если существует такой базис $\mathbb{e}$, что $A(\varphi, \mathbb{e})$ — диагональная матрица, т.е. $A(\varphi, \mathbb{e}) = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, где $\lambda_i \in \operatorname{Spec}(\varphi)$.

104. Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах собственных векторов

Линейный оператор φ диагонализуем тогда и только тогда, когда в V существует базис из собственных векторов для φ.

105. Собственное подпространство линейного оператора

Пусть $\lambda \in \operatorname{Spec}(\varphi)$.

Множество $V_\lambda(\varphi) = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$ называется **собственным подпространством** линейного оператора, отвечающим собственному значению λ.

106. Характеристический многочлен линейного оператора

Пусть $A_\varphi = A(\varphi, \mathbb{e})$ — матрица линейного оператора φ, $t \in F$, n — размерность пространства.

Многочлен $\chi_\varphi(t) := (-1)^n \det(A_\varphi - tE)$ называется **характеристическим многочленом** линейного оператора φ.

107. Связь спектра линейного оператора с его характеристическим многочленом

Пусть $\lambda \in \operatorname{Spec}(\varphi)$.

$$\chi_\varphi(\lambda) = 0,$$

то есть λ — корень характеристического многочлена.

108. Алгебраическая кратность собственного значения линейного оператора

Пусть $\varphi : V \to V$ — линейный оператор, λ — его собственное значение.

Алгебраической кратностью собственного значения λ линейного оператора φ называется такое число k, которое равняется кратности λ как корня характеристического многочлена.

109. Геометрическая кратность собственного значения линейного оператора

Пусть $\varphi : V \to V$ — линейный оператор, λ — его собственное значение, $V_\lambda(\varphi)$ — соответствующее собственное подпространство.

Геометрической кратностью собственного значения λ называется число $\dim V_\lambda(\varphi)$, т.е. размерность соответствующего собственного подпространства.

110. Связь между алгебраической и геометрической кратностями собственного значения линейного оператора

Пусть a_i — алгебраическая кратность собственного значения, s_i — геометрическая кратность. Тогда справедливо неравенство

$$s_i \leqslant a_i.$$

111. Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах его характеристического многочлена и кратностей его собственных значений

Линейный оператор $\varphi : V \to V$ диагонализуем тогда и только тогда, когда:

- $\chi_\varphi(t)$ разлагается на линейные множители
- Для любого собственного значения линейного оператора φ геометрическая кратность равна алгебраической

112. Линейный оператор в евклидовом пространстве, сопряженный к данному

Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство, φ — его линейный оператор. Тогда ему можно сопоставить две билинейные функции на $\mathbb{E}$:

$$\beta_\varphi(x,\, y) = (x, \varphi(y))$$
$$\beta^T_\varphi(x,\, y) = (\varphi(x),\, y)$$

Линейный оператор $\psi \in L(\mathbb{E})$ называется **сопряженным** к φ, если для всех векторов $x,\, y \in \mathbb{E}$ верно, что $(\psi(x),\, y) = (x, \varphi(y))$. Это также равносильно тому, что $\beta^T_\psi = \beta_\varphi$. *Обозначение*: $\psi = \varphi*$.

113. Матрица сопряженного линейного оператора в произвольном и ортонормированном базисах

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис в $\mathbb{E}$, $G = G(e_1, \dots, e_n)$ — матрица Грама, $A_\varphi = A(\varphi, \mathbb{e})$ — матрица линейного оператора φ. Тогда матрица сопряженного линейного оператора выражается как

$$A_{\varphi^*} = G^{-1} A^T_\varphi G, \text{ где } A_{\varphi^*} = A(\varphi^*,\, \mathbb{e}) \text{ — в произвольном базисе,}$$
$$A_{\varphi^*} = A^T_\varphi \text{ — в ортонормированном базисе.}$$

114. Самосопряженный линейный оператор в евклидовом пространстве

Линейный оператор φ называется **самосопряженным** (симметрическим) в том случае, если $\varphi^* = \varphi$. Это равносильно тому, что $(\varphi(x),\, y) = (x, \varphi(y))$ для любых векторов $x,\, y \in \mathbb{E}$.

Замечание. В случае, когда $\mathbb{e}$ — ортонормированный базис в $\mathbb{E}$ и $A_\varphi = A(\varphi,\, \mathbb{e})$, то самосопряженность линейного оператора φ равносильна $A_\varphi = A^T_\varphi$. Отсюда берётся название — симметрический.

115. Теорема о каноническом виде самосопряженного линейного оператора

Теорема. Пусть φ — самосопряженный линейный оператор. Тогда в $\mathbb{E}$ существует ортонормированный базис $\mathbb{e}$ из собственных векторов такой, что

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \;\; \lambda_i \in \operatorname{Spec}(\varphi).$$

116. Каким свойством обладают собственные подпространства самосопряженного линейного оператора, отвечающие попарно различным собственным значениям?

Пусть φ — самосопряженный линейный оператор и λ, μ — его собственные значения. Тогда

$$V_\lambda(\varphi) \perp V_\mu(\varphi), \;\; \lambda \neq \mu.$$

117. Приведение квадратичной формы к главным осям

Для любой квадратичной формы Q над $\mathbb{E}$ существует ортонормированный базис, в котором Q имеет канонический вид

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2,$$

причём числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ определены однозначно с точностью до перестановки.

118. Ортогональный линейный оператор в евклидовом пространстве

Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство, $\dim \mathbb{E} < \infty$.
Линейный оператор $\varphi \in L(\mathbb{E})$ называется **ортогональным**, если

$$(\varphi(x), \, \varphi(y)) = (x, \, y), \;\; \forall x,y \in \mathbb{E}.$$

119. Классификация ортогональных линейных операторов в одномерном и двумерном евклидовых пространствах

Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство.

1. *Ортогональные операторы* при $\dim \mathbb{E} = 1$.
   φ — ортогонален $\iff \varphi = \pm \mathrm{Id}$
2. *Ортогональные операторы* при $\dim \mathbb{E} = 2$.
   $\mathbb{e} = (e_1, \, e_2)$ — ортонормированный базис. Возможны два случая:
   (a) φ — поворот на угол α, тогда $A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$
   (b) φ — поворот на угол α + отражение относительно прямой $\langle \varphi(e_1) \rangle$,
   тогда $A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$

120. Теорема о каноническом виде ортогонального оператора

Для любого ортогонального оператора $\varphi \in L(\mathbb{E})$ существует ортонормированный базис $\mathbb{e}$, в котором

$$A(\varphi,\, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} \Pi(\alpha_1) &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && \Pi(\alpha_k) &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 1 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 1 \end{pmatrix}, \text{ где } \Pi(\alpha_i) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i \\ \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{pmatrix}$$

121. Классификация ортогональных линейных операторов в трёхмерном евклидовом пространстве

Для любого ортогонального линейного оператора в $\mathbb{E}$ существует такой ортонормированный базис $\mathbb{e}$, такой что

- либо $A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} \Pi(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где φ — это поворот на угол α вокруг оси $\langle e_3 \rangle$;
- либо $A(\varphi,\, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} \Pi(\alpha) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, где φ — поворот на угол α вокруг прямой e_3, но зеркально отражённый относительно $\langle e_1,\, e_2 \rangle = \langle e_3 \rangle^\perp$.

122. Теорема о сингулярных базисах для линейного отображения евклидовых пространств. Сингулярные значения линейного отображения

Пусть $\mathbb{E}$, $\mathbb{E}'$ — евклидовы пространства, $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ — линейное отображение. Существуют ортонормированные базисы $\mathbb{e} \in \mathbb{E}$ и $\mathbb{e}' \in \mathbb{E}'$, такие что

$$A(\varphi,\, \mathbb{e},\, \mathbb{e}') = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \sigma_1 &&&&& \\ & \ddots &&& 0 & \\ && \sigma_r &&& \\ \hline &&& 0 && \\ & 0 &&& \ddots & \\ &&&&& 0 \end{array}\right), \quad \sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_r > 0.$$

Более того, числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ определены однозначно и называются **сингулярными значениями** линейного оператора φ.

123. Сингулярное разложение матрицы и её сингулярные значения

SVD = "singular value decomposition"

$\forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ существует ортогональные матрицы $U \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ и $V \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ и диагональная матрица $\Sigma \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, такие что

$$A = U\Sigma V^T, \text{ где } \Sigma = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \sigma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \sigma_r & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array}\right), \quad \sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_r > 0.$$

Более того, числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ определены однозначно.