# Линейная алгебра.
# Коллоквиум 2 семестр.
# Основано на реальных событиях.
# v0.6

26 мая 2017

# Ченжлоги

v0.0 (20.05.2017) — *исходное: добавлены 1–10 вопросы (спасибо Соне, Даше, Лизе, Наташе, Алёне)*
v0.1 (21.05.2017) — *поправил 1, 2, 6 (спасибо Борису, Соне, Александру Г. (Ц.))*
v0.2 (22.05.2017) — *добавил 11–15. Поправил 2, 7 (спасибо Александру Г. (Ц.), Борису, Наташе)*
v0.3 (23.05.2017) — *поправил 2 (*$2 \Rightarrow 3$ *и* $3 \Rightarrow 4$*), дополнил 3, (спасибо Наташе, Глебу, Соне), добавил 16–20*
v0.4 (24.05.2017) — *поправил 2, 3, 4, 6, 8 (спасибо Соне, Боре, Глебу), добавил 21–30*
v0.5 (24.05.2017) — *добавил 31–40, поправил 7, 10, 11, 18, 20, 22, 24, 28 (спасибо Наташе, Глебу, Соне, Алексею, Лизе, Юле, Мовсесу, Борису)*
v0.6 (25.05.2017) — *добавил 41, 42, 45 (спасибо Глебу)*

# Доказательства

## 1. Теорема о связи размерности суммы двух подпространств с размерностью их пересечения

**Теорема**. $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W)$
**Доказательство**. Пусть $p = \dim(U \cap W)$, $k = \dim U$, $m = \dim W$. Выберем базис $a = \{a_1, \dots, a_p\}$ в пересечении. Его можно дополнить до базиса $U$ и до базиса $W$. Значит, $\exists b = \{b_1, \dots, b_{k-p}\}$ такой, что $a \cup b$ — базис в $U$ и $\exists c = \{c_1, \dots, c_{m-p}\}$ такой, что $a \cup c$ — базис в $W$.

Докажем, что $a \cup b \cup c$ — базис в $U + W$.

1. Докажем, что $U + W$ порождается множеством $a \cup b \cup c$.

$$\left.\begin{array}{l} v \in U + W \Rightarrow \exists u \in U,\, w \in W : v = u + w \\ u \in U = \langle a \cup b \rangle \subset \langle a \cup b \cup c \rangle \\ w \in W = \langle a \cup c \rangle \subset \langle a \cup b \cup c \rangle \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} v = u + w \in \langle a \cup b \cup c \rangle \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow U + W = \langle a \cup b \cup c \rangle \end{array}$$

2. Докажем линейную независимость векторов из $a \cup b \cup c$.
Пусть скаляры $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_{k-p}, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-p}$ таковы, что

$$\underbrace{\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_p a_p}_{x} + \underbrace{\beta_1 b_1 + \ldots + \beta_{k-p} b_{k-p}}_{y} + \underbrace{\gamma_1 c_1 + \ldots + \gamma_{m-p} c_{m-p}}_{z} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &x + y + z = 0 \\ &z = -x - y \\ &z \in W \\ &-x - y \in U \cap W \end{aligned}\right| \Rightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in F : z = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_p a_p$$

Тогда $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_p a_p - \gamma_1 c_1 - \ldots - \gamma_{m-p} c_{m-p} = 0$. Но $a \cup c$ — базис $W$. Следовательно, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = \gamma_1 = \ldots = \gamma_{m-p} = 0$. Но тогда $0 = x + y = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_p a_p + \beta_1 b_1 + \ldots + \beta_{k-p} b_{k-p}$. Но $a \cup b$ — базис $U \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_p = \beta_1 = \ldots = \beta_{k-p} = 0$. Итого, все коэффициенты равны нулю и линейная независимость тем самым доказана. Т.е. $a \cup b \cup c$ — базис $U + W$.

$$\begin{aligned} \dim(U + W) = |a \cup b \cup c| = |a| + |b| + |c| = p + k - p + m - p = k + m - p = \\ = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W). \end{aligned}$$

# 2. Теорема о пяти эквивалентных условиях, определяющих набор линейно независимых подпространств векторного пространства

**Теорема**. Следующие 5 условий эквивалентны:

1. Если $u_1 + \ldots + u_k = 0 \Rightarrow u_1 = \ldots = u_k = 0$ ($U_1, \ldots, U_k$ — линейно независимы)
2. Любой $u$ единственным образом представим в виде $u = u_1 + \ldots + u_k$, где $u_i \in U_i$
3. Если $\mathbb{e}_i$ — базис в $U_i$, то $\mathbb{e}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{e}_k$ — базис $U_1 + \ldots + U_k$
4. $\dim(U_1 + \ldots + U_k) = \dim U_1 + \ldots + \dim U_k$
5. $U_i \cap (U_1 + \ldots + U_{i-1} + U_{i+1} + \ldots + U_k) = \{0\}$

**Доказательство**.
$1 \Rightarrow 2$ Пусть $u_1 + \ldots + u_k = u_1' + \ldots + u_k'$, где $u_i$, $u_i' \in U_i$. Тогда

$$\begin{gathered} \underbrace{(u_1 - u_1')}_{\in U_1} + \ldots + \underbrace{(u_k - u_k')}_{\in U_k} = \vec{0} \Rightarrow \\ \Rightarrow (u_1 - u_1') = \ldots = (u_k - u_k') = \vec{0} \Rightarrow \\ \Rightarrow u_1 = u_1', \ldots, u_k = u_k'. \end{gathered}$$

$2 \Rightarrow 3$ Пусть $u \in U_1 + \ldots + U_k$. Тогда $u$ единственно представим в виде $u = u_1 + \ldots + u_k$, где $u_i \in U_i$.

Каждый $u$ единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов из $\mathbb{e}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{e}_k$ (так как каждый $u_i$ представляется в базисе $\mathbb{e}_i$) $\Longrightarrow \mathbb{e}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{e}_k$ — базис.

$3 \Rightarrow 4$ Пусть $\mathbb{e}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{e}_k$ — базис $U_1 + \ldots + U_k$ и пусть наш базис — мультимножество (т.е. одинаковые векторы могут учитываться по нескольку раз). Тогда

$$\begin{aligned} \dim(U_1 + \ldots + U_k) = |e_1^1 + \ldots + e_{s_1}^1 + \ldots + e_1^k + \ldots + e_{s_k}^k| = \\ = |e_1^1 + \ldots + e_{s_1}^1| + \ldots + |e_1^k + \ldots + e_{s_k}^k| = \dim U_1 + \ldots + \dim U_k. \end{aligned}$$

$4 \Rightarrow 5$ Пусть для краткости $\overline{U_i} = U_1 + \ldots + U_{i-1} + U_{i+1} + \ldots + U_k$. Тогда

$$\dim(U_i \cap \overline{U_i}) = \dim U_i + \dim \overline{U_i} - \dim \underbrace{(U_i + \overline{U_i})}_{U_1 + \ldots + U_k} \leqslant$$

$$\leqslant \dim U_i + \dim U_1 + \ldots + \dim U_{i-1} + \dim U_{i+1} + \ldots + \dim U_k - \dim U_1 - \ldots - \dim U_k.$$

Итак, $\dim(U_i \cap \overline{U_i}) \leqslant 0 \Longrightarrow \dim(U_i \cap \overline{U_i}) = 0 \Longrightarrow U_i \cap \overline{U_i} = \{\vec{0}\}$.

$5 \Rightarrow 1$ Пусть $\vec{0} = u_1 + \ldots + u_k$, где $u_i \in U_i$. Тогда для любого $i$ имеем

$$u_i = -u_1 - \ldots - u_{i-1} - u_{i+1} - \ldots - u_k \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u_i \in U_i \cap \overline{U_i} = \{\vec{0}\} \Rightarrow u_i = \vec{0}.$$

# 3. Описание всех базисов $n$-мерного векторного пространства в терминах одного базиса и матриц координат. Формула преобразования координат вектора при замене базиса векторного пространства

Пусть $V$ — векторное пространство, $\dim V = n$, $e_1, \ldots, e_n$ — базис. То есть

$$\forall v \in V : \ \exists! \ v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n,$$

где $x_1, \ldots, x_n \in F$ — координаты вектора $v$ в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$. Пусть также есть набор векторов $e'_1, \ldots, e'_n$:

$$\begin{aligned} e'_1 &= c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \ldots + c_{n1}e_n \\ e'_2 &= c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + \ldots + c_{n2}e_n \\ &\vdots \\ e'_n &= c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \ldots + c_{nn}e_n \end{aligned}$$

Обозначим матрицу $C = (c_{ij})$. Тогда можно переписать $(e'_1, \ldots, e'_n)$ как $(e_1, \ldots, e_n) \cdot C$.

**Предложение**. $e'_1, \ldots, e'_n$ образуют базис тогда и только тогда, когда $\det C \neq 0$.
**Доказательство**.
$\Rightarrow$ $e'_1, \ldots, e'_n$ — базис, а значит $\exists C' \in \mathrm{M}_n$ :

$$(e_1, \ldots, e_n) = (e'_1, \ldots, e'_n)C' = (e_1, \ldots, e_n)CC'$$
$$E = CC'$$
$$C' = C^{-1} \Longleftrightarrow \exists C^{-1} \Longleftrightarrow \det C \neq 0$$

$\Leftarrow$ $\det C \neq 0 \Rightarrow \exists C^{-1}$. Покажем, что $e'_1, \ldots, e'_n$ в таком случае линейно независимы. Пусть $\lambda_1 e'_1 + \ldots + \lambda_n e'_n = 0$. Тогда можно записать

$$(e'_1, \ldots, e'_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (e_1, \ldots, e_n) C \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0$$

Так как $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис, то $C \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0$. Умножая слева на обратную матрицу получаем $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

**Предложение**. Формула преобразований координат вектора при переходе к новому базису:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

**Доказательство**.

*С одной стороны*: $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = (e_1, \ldots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

*С другой стороны*: $v = x_1'e_1' + \ldots + x_n'e_n' = (e_1', \ldots, e_n') \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = (e_1, \ldots, e_n)C \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$

Так как $e_1, \ldots, e_n$ — линейно независимы, то $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$

# 4. Докажите, что отношение изоморфности на множестве всех векторных пространств является отношением эквивалентности

**Теорема**. "Изоморфность" — отношение эквивалентности на множестве всех векторных пространств над фиксированным полем $F$.

**Доказательство**.

I. *Рефлексивность*. $\varphi : V \to V$ — изоморфизм.
$\mathrm{Id} : V \simeq V$

II. *Симметричность*. $\varphi : V \to W$ — изоморфизм $\Longrightarrow \varphi^{-1} : W \to V$ — тоже изоморфизм.
Т.к. отображение $\varphi^{-1}$ также биективно, то осталось проверить, что оно линейно.
Пусть $w_1$, $w_2 \in W$. Тогда $\exists v_1$, $v_2 \in V$, такие что
$$w_1 = \varphi(v_1),\ w_2 = \varphi(v_2) \Rightarrow v_1 = \varphi^{-1}(w_1),\ v_2 = \varphi^{-1}(w_2).$$
Теперь $\varphi^{-1}(w_1 + w_2) = \varphi^{-1}(\varphi(v_1) + \varphi(v_2)) = \varphi^{-1}(\varphi(v_1 + v_2)) = v_1 + v_2 = \varphi^{-1}(w_1) + \varphi^{-1}(w_2)$.
$\varphi^{-1}(\alpha w) = \varphi^{-1}(\alpha\varphi(v)) = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha v)) = \alpha v = \alpha\varphi^{-1}(w)$.

III. *Транзитивность*. $\psi \circ \varphi : U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W$. Если $\varphi$ и $\psi$ — изоморфизм, то $\psi \circ \varphi$ — тоже изоморфизм.
Докажем, что если $\varphi$ и $\psi$ — линейны, то $\psi \circ \varphi$ — тоже линейна.
$$(\psi \circ \varphi)(v_1 + v_2) = \psi(\varphi(v_1 + v_2)) = \psi(\varphi(v_1) + \varphi(v_2)) =$$
$$= \psi(\varphi(v_1)) + \psi(\varphi(v_2)) = (\psi \circ \varphi)(v_1) + (\psi \circ \varphi)(v_2).$$
$$(\psi \circ \varphi)(\alpha v) = \psi(\varphi(\alpha v)) = \psi(\alpha\varphi(v)) =$$
$$= \alpha\psi(\varphi(v)) = \alpha(\psi \circ \varphi)(v).$$
Тогда очевидно, что транзитивность следует из линейности, так как композиция двух биективных отображений также биективна.

# 5. Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств

**Теорема**. $V$, $W$ — конечномерные векторные пространства $\Longrightarrow V \simeq W \Longleftrightarrow \dim V = \dim W$. Докажем две леммы.

**Лемма 1**. $\dim V = n \Rightarrow V \simeq F^n$.

**Доказательство**. Рассмотрим отображение $\varphi : V \to F^n$. Выберем базис $(e_1, \ldots, e_n)$ в $V$. Тогда
$$x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \ x_i \in F.$$
Отображение является изоморфизмом (т.к. линейно и биективно), а следовательно $V \simeq F^n$.

**Лемма 2**. Пусть $\varphi : V \simeq W$ — изоморфизм. $e_1, \ldots, e_n$ — базис $V$. Тогда $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ — базис $W$.

**Доказательство**. Пусть $w \in W$, тогда существует $v \in V : w = \varphi(v)$. Положим $v = \varphi^{-1}(w)$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n, \;\; x_i \in F \\
&\Rightarrow w = \varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \ldots + x_n \varphi(e_n) \\
&\Rightarrow W = \langle \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n) \rangle
\end{aligned}$$

Теперь покажем, что $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ — линейно независимы.

Пусть $\alpha_1 \varphi(e_1) + \ldots + \alpha_n \varphi(e_n) = 0$, где $\alpha_i \in F$. Тогда $\varphi(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n) = 0$. Применим $\varphi^{-1}$: $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = \varphi^{-1}(0) = 0$. Так как $e_1, \ldots, e_n$ — базис $V$, то $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

**Доказательство теоремы**.

$\Leftarrow$ Пусть $\dim V = \dim W = n$. Тогда $V \simeq F^n$, $W \simeq F^n$ (по лемме 1), а следовательно $V \simeq W$.

$\Rightarrow$ Пусть $V \simeq W$ и $\dim V = n$. Пусть $\varphi : V \simeq W$ — изоморфизм. $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис $V$.

Тогда $\varphi(e_1), \ldots \varphi(e_n)$ — базис $W$ (по лемме 2), а следовательно $\dim W = n = \dim V$.

# 6. Существование и единственность линейного отображения с заданными образами базисных векторов. Связь между координатами вектора и его образа при линейном отображении. Формула изменения матрицы линейного отображения при замене базисов.

Пусть $V$, $W$ — векторные пространства. $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис $V$. $\varphi : V \to W$ — линейное отображение.

**Предложение 1**. $\varphi$ однозначно определено векторами $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$.

**Доказательство**. $v \in V \Longrightarrow v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, где $x_i \in F$.

Тогда $\varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \ldots + x_n \varphi(e_n)$.

**Предложение 2**. Для любого набора $f_1, \ldots, f_n \in W$ существует единственное линейное отображение $\varphi : V \to f$, такое что $(\varphi(e_1) = f_1), \ldots, (\varphi(e_n) = f_n)$.

**Доказательство**. $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$.

Положим $\varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n$. Тогда легко убедиться, что $\varphi$ линейно (прямая проверка), а единственность следует из пункта 1.

**Предложение 3**. Если $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ и $\varphi(v) = y_1 f_1 + \ldots + y_m f_m$, то

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

**Доказательство**.

С одной стороны:

$$\begin{aligned}
\varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \ldots + x_n \varphi(e_n) = \\
= (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (f_1, \ldots, f_m) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

С другой стороны:

$$\varphi(v) = (f_1, \dots, f_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Так как $f_1, \dots, f_m$ — линейно независимы, то $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$.

**Предложение**. Пусть $V$ и $W$ — векторные пространства, $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ и $\mathbb{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ — базисы $V$, $\mathbb{f} = (f_1, \dots, f_m)$ и $\mathbb{f}' = (f'_1, \dots, f'_m)$— базисы $W$, $A$ — матрица линейного отображения $\varphi : V \to W$ по отношению к $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$, $A'$ — матрица линейного отображения по отношению к базисам $\mathbb{e}'$ и $\mathbb{f}'$. $\mathbb{e}' = \mathbb{e}C$, $\mathbb{f}' = \mathbb{f}D$. Тогда

$$A' = D^{-1}AC \ (A = DA'C^{-1})$$

**Доказательство**.

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \underbrace{(\varphi(e'_1), \dots, \varphi(e'_n))}_{(f'_1, \dots, f'_m)A' = (f_1, \dots, f_m)DA'} = \underbrace{(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))}_{(f_1, \dots, f_m)A} C = (f_1, \dots, f_m)AC \Rightarrow$$
$$\Rightarrow DA' = AC \Rightarrow A' = D^{-1}AC.$$

# 7. Установите изоморфизм между пространствами Hom$(V, W)$ и Mat$_{m\times n}$, где $V$ и $W$ — векторные пространства размерностей $n$ и $m$ соответственно

**Теорема**. При фиксированных базисах $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$ отображение $\mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$ : $\varphi \to A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$ является изоморфизмом векторных пространств $V$ и $W$.

Рассмотрим две вещи:

**Утверждение**. $\mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Mat}_{m\times n}(F) : \varphi \mapsto A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$ является биекцией.

**Вывод**. Задать линейное отображение $V \to W$ — то же самое, что выбрать базис $\mathbb{e}$ в $V$, базис $\mathbb{f}$ в $W$ и задать матрицу $(m \times n)$, где $n = \dim V$, $m = \dim W$.

**Наглядный пример**. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (x, y)$.

$\mathbb{e} = (e_1, e_2, e_3)$, $\mathbb{f} = (f_1, f_2)$. Тогда

$$\varphi(e_1) = f_1$$
$$\varphi(e_2) = f_2$$
$$\varphi(e_3) = 0$$

Следовательно, $A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**Предложение**. Положим

$$\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n) \text{ — базис } V$$
$$\mathbb{f} = (f_1, \dots, f_m)\text{— базис } W$$
$$A_\varphi = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$$
$$A_\psi = A(\psi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$$
$$A_{\varphi+\psi} = A(\varphi + \psi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$$
$$A_{\lambda\varphi} = A(\lambda\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$$

1. $A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$:
   С одной стороны: $((\varphi + \psi)e_1, \dots, (\varphi + \psi)e_n) = (f_1, \dots, f_m)A_{\varphi+\psi}$.
   С другой стороны:

$$\begin{gathered}((\varphi+\psi)e_1,\dots,(\varphi+\psi)e_n)=(\varphi(e_1)+\psi(e_1),\dots,\varphi(e_n)+\psi(e_n))=\\=(\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n))+(\psi(e_1),\dots,\psi(e_n))=\\=(f_1,\dots,f_m)A_\varphi+(f_1,\dots,f_m)A_\psi=(f_1,\dots,f_m)(A_\varphi+A_\psi)\Rightarrow\\\Rightarrow A_{\varphi+\psi}=A_\varphi+A_\psi.\end{gathered}$$

2. $A_{\lambda\varphi}=\lambda A_\varphi$
   С одной стороны: $((\lambda\varphi)e_1,\dots,(\lambda\varphi)e_n)=(f_1,\dots,f_m)A_{\lambda\varphi}$.
   С другой стороны:
$$\begin{gathered}((\lambda\varphi)e_1,\dots,(\lambda\varphi)e_n)=(\lambda\varphi(e_1),\dots,\lambda\varphi(e_n))=\lambda(\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n))=\\=\lambda(f_1,\dots,f_m)A_\varphi=(f_1,\dots,f_m)\lambda A_\varphi\Rightarrow\\\Rightarrow A_{\lambda\varphi}=\lambda A_\varphi.\end{gathered}$$

Таким образом, очевидно, что так как отображение биективно и линейно, то оно является изоморфизмом.

# 8. Докажите, что ядро и образ линейного отображения являются подпространствами в соответствующих векторных пространствах. Сформулируйте и докажите критерий инъективности линейного отображения в терминах его ядра

**Предложение 1**. Ker$\varphi$ — подпространство в $V$.
**Доказательство**. Проверим по определению.
1. $0_v\in\mathrm{Ker}\varphi$, так как $\varphi(0_v)=0_w$.
2. $v_1,\ v_2\in\mathrm{Ker}\varphi\Longrightarrow\varphi(v_1+v_2)=\varphi(v_1)+\varphi(v_2)=0_w+0_w=0_w\Longrightarrow v_1+v_2\in\mathrm{Ker}\varphi$.
3. $v\in\mathrm{Ker}\varphi,\ \lambda\in F\Longrightarrow\varphi(\lambda v)=\lambda\varphi(v)=\lambda0=0\Longrightarrow\lambda v\in\mathrm{Ket}\varphi$.

**Предложение 2**. Im$\varphi$ — подпространство в $W$.
**Доказательство**. Проверим по определению.
1. $0_w=\varphi(0_v)\Longrightarrow 0_w\in\mathrm{Im}\varphi$.
2. $w_1,\ w_2\in\mathrm{Im}\varphi\Longrightarrow\exists v_1,\ v_2\in V:w_1=\varphi(v_1),\ w_2=\varphi(v_2)\Longrightarrow w_1+w_2=\varphi(v_1)+\varphi(v_2)=\varphi(v_1+v_2)\Longrightarrow w_1+w_2\in\mathrm{Im}\varphi$.
3. $w\in\mathrm{Im}\varphi,\lambda\in F\Longrightarrow\exists v\in V:\varphi(v)=w\Longrightarrow\lambda w=\lambda\varphi(v)=\varphi(\lambda v)\Longrightarrow\lambda w\in\mathrm{Im}\varphi$.

Таким образом, все условия подпространства выполнены.

**Предложение**. Отображение $\varphi$ инъективно тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ker}\varphi=\{0\}$.
**Доказательство**.
$\Rightarrow$ Очевидно, так как если $\mathrm{Ker}\varphi=\{0\}$, то это значит, что у 0 существует единственный прообраз.
$\Leftarrow$ Пусть $v_1,\ v_2\in V$ таковы, что $\varphi(v_1)=\varphi(v_2)$.
Тогда $\varphi(v_1-v_2)=0\Longrightarrow v_1-v_2\in\mathrm{Ker}\varphi\Longrightarrow v_1-v_2=0\Longleftrightarrow v_1=v_2$.

# 9. Связь между рангом матрицы линейного отображения и размерностью его образа

Для начала докажем одну лемму.

**Лемма**. $U \subseteq V$ — подпространство и $(e_1, \ldots, e_k)$ — его базис. Тогда $\varphi(U) = \langle \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k) \rangle$ — подпространство. В частности, $\dim \varphi(U) \leqslant \dim U$.

**Доказательство**. $u \in U \Longrightarrow u = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k \Longrightarrow \varphi(u) = \varphi(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k) = \lambda_1 \varphi(e_1) + \ldots + \lambda_k e \varphi(e_k) \in \langle \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k) \rangle$.

Пусть $V$, $W$ — векторные пространства, $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис $V$, $\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис $W$, $A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$ — матрица линейного отображения $\varphi$ по отношению к $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$.

**Теорема**. $\dim \mathrm{Im}\varphi = \mathrm{rk}A$

**Доказательство**. Воспользуемся леммой, доказанной выше: $\mathrm{Im}\varphi = \langle \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n) \rangle$.

Координаты вектора $\varphi(e_i)$ находятся в столбце $A^{(i)} \Longrightarrow \lambda_1 \varphi(e_1) + \ldots + \lambda_n \varphi(e_n) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 A^{(1)} + \ldots + \lambda_n A^{(n)} = 0 \Longrightarrow \mathrm{rk}\{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\} = \mathrm{rk}A$.

$\dim \langle \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k) \rangle = \dim \mathrm{Im}\varphi$.

# 10. Оценки на ранг произведения двух матриц

**Теорема**. Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{k \times m}$, $B \in \mathrm{Mat}_{m \times n}$. Тогда $\mathrm{rk}AB \leqslant \min(\mathrm{rk}A, \mathrm{rk}B)$.

**Доказательство**. Реализуем $A$ и $B$ как матрицы линейных отображений, то есть $\varphi_A : F^m \to F^k$, $\varphi_B : F^n \to F^m$. Тогда $AB$ будет матрицей отображения $\varphi_A \circ \varphi_B$.

$$\mathrm{rk}(AB) = \mathrm{rk}(\varphi_A \circ \varphi_B) = \begin{cases} \leqslant \dim \mathrm{Im}\varphi_A = \mathrm{rk}A \\ \leqslant \dim \mathrm{Im}\varphi_B = \mathrm{rk}B \end{cases}$$

Первое неравенство следует из того, что $\mathrm{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) \subset \mathrm{Im}\varphi_A$, откуда, в свою очередь следует, что $\dim \mathrm{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) \leqslant \dim \mathrm{Im}\varphi_A$.

Рассматривая второе неравенство, получим:

$$\mathrm{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) = \varphi_A(\mathrm{Im}\varphi_B) \Longrightarrow \dim \mathrm{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) = \dim(\varphi_A(\mathrm{Im}\varphi_B)) \leqslant \dim \mathrm{Im}\varphi_B.$$

# 11. Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения

Для начала докажем предложение.

**Предложение**. Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис $V$ такой, что $(e_1, \ldots, e_k)$ — базис $\mathrm{Ker}\varphi$, а $(\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)))$ — базис $\mathrm{Im}\varphi$.

*Замечание.* Базис с указанным свойством существует всегда, так как его можно получить путём дополнения базиса $\mathrm{Ker}\varphi$ до базиса всего пространства $V$.

**Доказательство**. Дополним базис $(e_1, \ldots, e_k)$ до базиса $V$ векторами $e_{k+1}, \ldots, e_n$. Тогда:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\varphi = \langle \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k), \ldots \varphi(e_n) \rangle = \\ = \langle 0, \ldots, 0, \varphi(e_{k+1}), \ldots + \varphi(e_n) \rangle = \\ = \langle \varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n) \rangle. \end{aligned}$$

$\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)$ — линейно независимы. Тогда пусть $\alpha_{k+1}\varphi(e_{k+1}) + \ldots + \alpha_n \varphi(e_n) = 0$, где $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n \in F$. Тогда:

$$\varphi(\alpha_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n \in \mathrm{Ker}\varphi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_k e_k, \text{ где } \beta_1, \ldots, \beta_k \in F.$$

Но так как $e_{k+1}, \ldots, e_n$ — базис $V$, то $\alpha_{k+1} = \ldots = \alpha_n = \beta_1 = \ldots = \beta_k = 0$. То есть векторы $\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)$ — линейно независимы, а значит они образуют базис $\mathrm{Im}\varphi$.

**Теорема**. $\dim \mathrm{Im}\varphi = \dim V - \dim \mathrm{Ker}\varphi$.

**Доказательство**. Выберем базис в $V$ такой же, как в предположении.

Тогда $\dim \mathrm{Im}\varphi = n - k = \dim V - \dim \mathrm{Ker}\varphi$.

# 12. Приведение матрицы линейного отображения к диагональному виду с единицами и нулями на диагонали

Пусть $\varphi : V \to W$ — линейное отображение. $\mathbb{e}$ — базис $V$, $\mathbb{f}$ — базис $W$.

$A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$, $\mathrm{rk}A = r$.

**Утверждение**. Существуют базис $\mathbb{e}'$ в $V$ и базис $\mathbb{f}'$ в $W$ такие, что $A(\varphi, \mathbb{e}', \mathbb{f}')$ имеет вид:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right), \ \mathrm{rk}A' = r$$

**Эквивалентное утверждение**. Существуют невырожденные матрицы $C \in \mathrm{M}_n$, $D \in \mathrm{M}_m$, такие что $A' = D^{-1}AC \iff A = DA'C^{-1}$.

**Доказательство**. Реализуем $A$ как матрицу линейного отображения $\varphi : F^n \to F^m$ в стандартных базисах.

Тогда существует базис $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ такой, что $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ — базис $\mathrm{Ker}\varphi$, а $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_r)$ — базис $\mathrm{Im}\varphi$.

Пусть $\mathbb{f}$ — базис $F^m$, дополняющий систему $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_r)$. Тогда $A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = A'$.

Результат следует из теоремы о замене базисов.

# 13. Докажите, что всякий базис сопряженного пространства двойственен к некоторому базису исходного векторного пространства

**Предложение**. Любой базис $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ пространства $V^*$ двойственен к некоторому базису пространства $V$.

**Доказательство**. Возьмём произвольный базис $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ пространства $V$.

Пусть $\varepsilon' = (\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n)$ двойственный к $\mathbb{e}'$ базис в $V^*$.

Тогда $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \vdots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix}$ для некоторой невырожденной матрицы $C \in \mathrm{M}_n$.

Положим $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n) = (e'_1, \ldots, e'_n)C^{-1}$ — некий (искомый) базис в $V^*$.

Зная, что $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1, \ldots, e_n) = E$, имеем $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1, \ldots, e_n) = C \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \vdots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix} (e'_1, \ldots, e'_n)C^{-1} = CEC^{-1} = E$.

# 14. Докажите, что всякое подпространство в $F^n$ является множеством решений некоторой однородной системы линейных уравнений

**Теорема**. Всякое подпространство $F^n$ есть множество решений некоторой ОСЛУ.

**Доказательство**. Пусть $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$.

$(a_1, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$ — значение линейной функции $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$ на векторе $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Пусть дано подпространство $U \subseteq F^n$. Выберем в нём базис $(v_1, \ldots, v_k)$.

Рассмотрим в $(F^n)^*$ подмножество $S := \{\alpha \in (F^n)^* \mid \alpha(v_1) = 0, \ldots, \alpha(v_k) = 0\}$. $S$ — подпространство в $(F^n)^*$.

$S$ — множество решений ОСЛУ $\begin{cases} \alpha(v_1) = 0, \\ \vdots \\ \alpha(v_k) = 0 \end{cases}$ на коэффициенты $\alpha$.

Так как $v_1, \ldots, v_k$ линейно независимы, то ранг матрицы коэффициентов равен $k \Longrightarrow \dim S = n - k$.

Выберем в $S$ базис $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-k}$ и рассмотрим ОСЛУ $\begin{cases} \alpha_1(x) = 0, \\ \vdots \\ \alpha_{n-k}(x) = 0 \end{cases}$ относительно неизвестного вектора $x \in F^n$.

Пусть $U' \subseteq F^n$ — подпространство решений этой ОСЛУ.

Ранг матрицы коэффициентов равен $n - k$, так как $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-k}$ линейно независимы $\Longrightarrow \dim U' = n - (n - k) = k$. Но $U \subseteq U'$ по построению.

Так как $\dim U = k = \dim U'$, то $U = U' \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1(x) = 0, \\ \vdots \\ \alpha_{n-k}(x) = 0 \end{cases}$ — искомая ОСЛУ.

# 15. Формула для вычисления значений билинейной формы в координатах. Существование и единственность билинейной формы с заданной матрицей. Формула изменения матрицы билинейной формы при переходе к другому базису

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис $V$ $(\dim V = n < \infty)$.

**Определение**. Матрица $B = B(\beta, \mathbb{e})$, где $b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$, называется матрицей билинейной функции $\beta$ в базисе $\mathbb{e}$.

Пусть $B = B(\beta, \mathbb{e})$, $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис $V$, $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \in V$, $y = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n \in V$.

$$\beta(x, y) = \beta(\sum_{i=1}^{n} x_ie_i, \sum_{j=1}^{n} y_je_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \beta(e_i, \sum_{j=1}^{n} y_je_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot \underbrace{\beta(e_i, e_j)}_{b_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_ib_{ij}y_j =$$

$$= (x_1, \ldots, x_n)B \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (*)$$

$(*)$ — формула для вычисления значений б.ф. в координатах.

Пусть $\mathbb{e}$ — произвольный базис $V$. Тогда:

**Предложение 1**. Любая билинейная функция однозначно определяется своей матрицей в базисе $\mathbb{e}$.

**Доказательство 1**. Следует из $(*)$.

**Предложение 2**. Для любой матрицы $V \in \mathrm{M}_n(F)$ существует единственная билинейная функция $\beta$ на $V$, такая что $B(\beta, \mathbb{e}) = B$.

**Доказательство 2**. *Единственность* следует из 1.

*Существование*: зададим $\beta$ по формуле $(*)$. Тогда $\beta$ — билинейная функция на $V$ и её матрицей является $B$.

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ и $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ — два базиса $V$. $\beta$ — билинейная функция на $V$. $\mathbb{e}' = \mathbb{e}C$ — матрица перехода. $B = B(\beta, \mathbb{e})$ и $B' = B(\beta, \mathbb{e}')$.

**Предложение**. $B' = C^T BC$.

**Доказательство**. Рассмотрим $x$ в обоих базисах.

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = x'_1 e'_1 + \ldots + x'_n e'_n$$
$$y = y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n = y'_1 e'_1 + \ldots + y'_n e'_n$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

$$(x'_1, \ldots, x'_n)B' \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = \beta(x, y) = (x_1, \ldots, x_n)B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$
$$\beta(x, y) = (x'_1, \ldots, x'_n)C^T BC \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

Отсюда следует, что $B' = C^T BC$, так как для любого $p \in \mathrm{Mat}_n$ верно

$$p_{ij} = (0 \ldots i \ldots 0)p \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

# 16. Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами

Пусть в поле $F$ выполняется условие $1 + 1 \neq 0$ (т.е. $2 \neq 0$).

Тогда отображение $\beta \mapsto Q_\beta$ является биекцией между симметричными билинейными функциями на $V$ и квадратичными функциями на $V$.

**Доказательство**.

*Сюръективность*. Пусть $\beta$ — билинейная функция. Рассмотрим ассоциированную с ней квадратичную функцию $Q_\beta(x) = \beta(x, x)$. Пусть $\sigma(x, y) = \frac{1}{2}(\beta(x, y) + \beta(y, x))$ — симметричная билинейная функция на $V$. Тогда:

$$Q_\sigma(x) = \sigma(x, x) = \frac{1}{2}(\beta(x, x) + \beta(x, x)) = \beta(x, x) = Q_\beta(x)$$

*Инъективность*. Пусть $\beta(x, y)$ — симмитричная билинейная функция, $Q_\beta(x) = \beta(x, x)$ — соответствующая ей квадратичная функция.

$$Q_\beta(x + y) = \beta(x + y, x + y) = \beta(x, x) + \beta(x, y) + \beta(y, x) + \beta(y, y) =$$
$$= Q_\beta(x) + Q_\beta(y) + \underbrace{2\beta(x, y)}_{\beta(x, y) = \beta(y, x)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \beta(x, y) = \frac{1}{2}(Q_\beta(x + y) - Q_\beta(x) - Q_\beta(y)).$$

# 17. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду

Пусть $V$ — векторное пространство, $\dim V = n$, $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис $V$, $Q : V \to F$ — квадратичная функция на $V$.

**Теорема** (метод Лагранжа). Пусть в $F : 1 + 1 \neq 0$. Тогда для всякой квадратичной функции $Q$ существует такой базис, в котором $Q$ имеет канонический вид.

**Доказательство**.

Оформим *индукцию* по $n$.

$\underline{n = 1}$: тогда $Q(x) = b_{11}x_1^2$ — канонический вид, очевидно.

Предположим, что для всех $< n$, докажем для $n$. Пусть в исходном базисе $\mathbb{e}$:

$$Q(x) = Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 2b_{ij}x_ix_j,$$

где $B = (b_{ij})$ — матрица квадратичной функции $Q$.

<u>Случай 0</u>: $b_{ij} = 0$ для всех $i$, $j$. Тогда очевидно.

<u>Случай 1</u>: существует такое $i$, что $b_{ii} \neq 0$. Перенумеруем переменные так, что $b_{11} \neq 0$:

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + \ldots + 2b_{1n}x_1x_n + Q_1(x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{1}{b_{11}}(b_{11}^2x_1^2 + 2b_{11}b_{12}x_1x_2 + \ldots + 2b_{11}b_{1n}x_1x_n) + Q_1(x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{1}{b_{11}}(b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n)^2 \underbrace{- \frac{1}{b_{11}}(b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n)^2 + Q_1(x_2, \ldots, x_n)}_{Q_2(x_2, \ldots, x_n)} =$$

$$= \frac{1}{b_{11}}(b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n)^2 + Q_2(x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{1}{b_{11}}x_1'^2 + Q_2(x_2', \ldots, x_n'),$$

где $\begin{cases} x_1' = b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n, \\ x_2' = x_2, \\ \vdots \\ x_n' = x_n \end{cases}$, то есть замена координат $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{b_{11}}(x_1' - b_{12}x_2' - \ldots - b_{1n}x_n'), \\ x_2 = x_2', \\ \vdots \\ x_n = x_n' \end{cases}$.

Далее применяем предположение индукции к $Q_2(x_2', \ldots, x_n')$.

<u>Случай 2</u>: $b_{ii} = 0$ для всех $i$, но существует $b_{ij} \neq 0$ при $i < j$.

Б.о.о. считаем, что $b_{12} \neq 0$. Делаем замену:

$\begin{cases} x_1 = x_1' - x_2', \\ x_2 = x_1' + x_2', \\ x_3 = x_3', \\ \vdots \\ x_n = x_n' \end{cases}$ Тогда $Q(x') = \underbrace{2b_{12}x_1'^2 - 2b_{12}x_2'^2}_{2b_{12}x_1x_2} + \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 2b_{ij}x_i'x_j'$, что есть 1-й случай.

# 18. Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду

Вначале докажем лемму.

Пусть $\mathbb{e}'$ — базис $V$, имеющий вид $\begin{cases} e_1' = e_1, \\ e_2' \in e_2 + \langle e_1 \rangle, \\ e_3' \in e_3 + \langle e_1, e_2 \rangle, \\ \vdots \\ e_n' \in e_n + \langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle \end{cases}$ $(*)$,

$B' = B(Q, \mathbb{e}')$

$B'_k = B_k(Q, \mathbb{e}')$ — матрица $k$-го углового минора
$\delta'_k = \delta_k(Q, \mathbb{e}')$ — определитель матрицы $k$-го углового минора

**Лемма**. $\forall\ k = 1, \ldots, n : \delta_k = \delta'_k$.

**Доказательство**. При любом $k$ имеем $B'_k = C_k^T B_k C_k \Rightarrow \delta'_k = \det B'_k = \det(C_k^T B_k C_k) = (\underbrace{\det C_k^T}_{=1})(\det B_k)(\underbrace{\det C_k}_{=1}) = \det B_k = \delta_k$.

**Теорема** (метод Якоби лекционный). Положим, что $\delta_k \neq 0$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Тогда единственно существует базис $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ в $V$ такой, что

1. $\mathbb{e}'$ имеет вид $(*)$
2. В этом базисе $Q$ имеет канонический вид $Q(x) = \dfrac{\delta_1}{\delta_0} x_1'^2 + \dfrac{\delta_2}{\delta_1} x_2'^2 + \ldots + \dfrac{\delta_n}{\delta_{n-1}} x_n'^2$

   (то есть $B(Q, \mathbb{e}') = \operatorname{diag}(\dfrac{\delta_1}{\delta_0}, \dfrac{\delta_2}{\delta_1}, \ldots, \dfrac{\delta_n}{\delta_{n-1}})$).

**Доказательство**.
Оформим *индукцию* по $n$.
$\underline{n = 1}$: $Q(x) = \delta_1 x_1'^2$ — очевидно, верно.
Докажем для $n - 1$. Пусть векторы $e'_1, \ldots, e'_n$ уже построены:

$$B(Q, (e'_1, \ldots, e'_{n-1}, e_n)) = \begin{pmatrix} \delta_1 & & & & * \\ & \frac{\delta_2}{\delta_1} & & 0 & * \\ & & \ddots & & * \\ & 0 & & \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Ищем $e'_n$ в виде $e_n + \langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle = e_n + \langle e'_1, \ldots, e'_{n-1} \rangle$,
т.е. в виде $e'_n = e_n + \lambda_1 e'_1 + \ldots + \lambda_{n-1} e'_{n-1}$.
Пусть $\beta : V \times V \to F$ — симметричная билинейная форма, соответствующая $Q$.

$$\underset{1 \leqslant k \leqslant n-1}{\beta(e'_k, e'_n)} = \beta(e'_k, e_n) + \lambda_1 \beta(e'_k, e'_1) + \ldots + \lambda_{k-1} \beta(e'_k, e'_{k-1}) = \beta(e'_k, e_n) + \lambda_k \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}}.$$

Значит $\beta(e'_k, e'_n) = 0 \iff \lambda_k = -\beta(e'_k, e_n) \dfrac{\delta_{k-1}}{\delta_k}$ — единственное значение.
В итоге построен базис $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ такой, что

$$B(Q, (e'_1, \ldots, e'_{n-1}, e_n)) = \begin{pmatrix} \delta_1 & & & & \\ & \frac{\delta_2}{\delta_1} & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} & \\ & & & & ? \end{pmatrix}$$

Но в силу доказанной выше леммы $\delta_n = \delta'_n = \delta_1 \cdot \dfrac{\delta_2}{\delta_1} \cdot \ldots \cdot \dfrac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} \cdot ? = \delta_{n-1} \cdot ? \Longrightarrow ? = \dfrac{\delta_n}{\delta_{n-1}}$.

# 19. Существование нормального вида для квадратичной формы над $\mathbb{R}$. Закон инерции

**Предложение**. Для любой квадратичной формы $Q$ над $\mathbb{R}$ существует базис, в котором $Q$ принимает нормальный вид.

**Доказательство**. Знаем, что существует базис, в котором $Q$ имеет канонический вид. $Q(x) = b_1 x_1^2 + \ldots + b_n x_n^2$.

Делаем невырожденную замену $x_i = \begin{cases} \dfrac{x'_i}{\sqrt{|b_i|}}, \text{ если } b_i \neq 0, \\ x'_i, \text{ если } b_i = 0 \end{cases}$

Тогда в новых координатах (= новом базисе) $Q$ имеет вид $Q(x') = \varepsilon_1 x_1'^2 + \ldots + \varepsilon_n x_n'^2$, где $\varepsilon_i = \mathrm{sgn} b_i = \begin{cases} 1,\ b_i > 0, \\ 0,\ b_i = 0, \\ -1,\ b_i < 0 \end{cases}$. Всё доказали.

Пусть $Q$ — квадратичная функция над $R$, которая в базисе $\mathbb{e}$ имеет нормальный вид:

$$Q(x_1,\ \ldots,\ x_n) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_{s+t}^2,$$

где $s$ — количество положительных слагаемых, $t$ — количество отрицательных слагаемых. Тогда

$i_+ := s$ — **положительный индекс инерции** квадратичной формы $Q$

$i_- := t$ — **отрицательный индекс инерции** квадратичной формы $Q$

**Теорема** (закон инерции). Числа $i_+ = s$ и $i_- = t$ не зависят от базиса, в котором $Q$ принимает нормальный вид.

**Доказательство**. $s + t = \mathrm{rk} Q$ — инвариантная величина $\Rightarrow$ достаточно доказать инвариантность $s$.

Пусть базис $\mathbb{e} = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ таков, что в нём $Q(x) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_{s+t}^2$

Пусть базис $\mathbb{e}' = \langle e'_1, \ldots, e'_n \rangle$ таков, что в нём $Q(x) = x_1'^2 + \ldots + x_s'^2 - x_{s'+1}'^2 - \ldots - x_{s'+t'}'^2$

Предположим, что $s \neq s'$. Можем считать, что $s > s'$.

Рассмотрим в $V$ подпространства $\begin{cases} L = \langle e_1, \ldots, e_s \rangle,\ \dim L = s, \\ L' = \langle e'_{s'+1}, \ldots, e'_{s'+t'} \rangle,\ \dim L' = s' \end{cases}$.

$L + L' \subseteq V \Rightarrow \dim(L + L') \leqslant \dim V = n$.

Тогда $\dim(L \cap L') = \dim L + \dim L' - \dim(L + L') \geqslant s + n - s' - n = s - s' > 0$.

Тогда $\exists v \in L \cap L',\ v \neq 0$.

Т.к. $v \in L$, то $Q(v) > 0$.

Т.к. $v \in L'$, то $Q(v) \leqslant 0$.

Противоречие!

# 20. Следствие метода Якоби о нахождении индексов инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$. Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы. Критерий отрицательной определённости квадратичной формы

$Q : V \to \mathbb{R}$ — квадратичная форма

$\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис

$B = B(Q,\ \mathbb{e})$

$B_k = B_k(Q,\ \mathbb{e})$

$\delta_k = \det B_k$ — $k$-й угловой минор

**Следствие** (метода Якоби). Пусть $\delta_k \neq 0$ для всех $k = 1, \ldots, n$.

Тогда $i_-$ равен числу перемен знака в последовательности $1, \delta_1, \ldots, \delta_n$.

**Доказательство**. Метод Якоби: существует базис, в котором $Q$ принимает вид

$$Q(x) = \frac{\delta}{1} x_1^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} x_2^2 + \ldots + \frac{\delta_n}{\delta_{n+1}} x_n^2.$$

Получаем, что если для некоторого $i$ выполняется $\dfrac{\delta_i}{\delta_{i-1}}$, значит $\mathrm{sgn}\delta_i \neq \mathrm{sgn}\delta_{i-1}$, что и означает, что отрицательный индекс $i_-$ равен числу перемен знака.

**Теорема** (Критерий Сильвестра). $Q > 0$ тогда и только тогда, когда $\delta_k > 0$ для всех $k = 1, \ldots, n$.

**Доказательство**.

$\Leftarrow$ Следует из следствия метода Якоби: $i_- = 0 \Longrightarrow i_+ = n \Longrightarrow Q > 0$.

$\Rightarrow$ $Q > 0 \Longrightarrow$ существует матрица $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\ \det C \neq 0$, такая что $C^TBC = E$. Тогда $\det C^T \cdot \det B \cdot \det C = 1 \Longrightarrow \delta_n = \det B = \dfrac{1}{(\det C)^2} > 0$.

$\forall k$ $B_k$ есть матрица ограничения квадратной функции $Q$ на подпространство $\langle e_1, \ldots, e_k\rangle$. На этом подпространстве будет также положительная определенность $\Longrightarrow \delta_k = \det B_k > 0$.

**Теорема** (критерий отрицательной определенности).

$$Q < 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \delta_i < 0,\ i \not\vdots\, 2 \\ \delta_i > 0,\ i \vdots 2 \end{cases}$$

**Доказательство**. $Q < 0 \Longleftrightarrow -Q > 0$. Далее применяем критерий Сильвестра.

# 21. Неравенство Коши-Буняковского, неравенство треугольника и теорема Пифагора в евклидовом пространстве

**Предложение** (неравенство К-Б). Пусть $x,\, y \in \mathbb{E}$. Тогда $|(x,\, y)| \leqslant |x||y|$, причём знак равенства возможен только в том случае, если $x,\, y$ — пропорциональны.

**Доказательство**.

1. $x,\, y$ — пропорциональны (можно считать, что $y = \alpha x,\ \alpha \in \mathbb{R}$)
   Тогда $|(x,\, y)| = |(x,\, \alpha x)| = |\alpha||(x,\, x)| = |\alpha||x|^2 = |x||\alpha x| = |x||y|$.
2. $x,\, y$ — не пропорциональны
   Тогда они линейно независимы $\Longrightarrow x,\, y$ — базис в $\langle x,\, y\rangle$. Ограничение квадратичной функции $Q(v) = (v, v)$ на $\langle x,\, y\rangle$ положительно определено; тогда по критерию Сильвестра $\det \begin{vmatrix} (x,\, x) & (x,\, y) \\ (x,\, y) & (y,\, y) \end{vmatrix} > 0$, то есть $(x,\, x)(y,\, y) - (x,\, y)^2 > 0 \Longrightarrow |x|^2|y|^2 > |(x,\, y)|^2$.

**Предложение** (неравенство треугольника).

$$\rho(a,\, b) + \rho(b,\, c) \geqslant \rho(a,\, c) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{E}.$$

**Доказательство**. Пусть $x := a - b$, $y := b - c$. Надо доказать $|x| + |y| \geqslant |x + y|$:
$|x+y|^2 = (x+y,\, x+y) = \underset{|x|^2}{(x,\, x)} + \underset{2|x||y| \text{ (по К-Б)}}{2(x,\, y)} + \underset{|y|^2}{(y,\, y)} \leqslant |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$.

**Предложение** (теорема Пифагора). Пусть $x,\, y \in \mathbb{E},\ x \perp y$ ($(x,\, y) = 0$). Тогда $|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.

**Доказательство**. $|x+y|^2 = (x+y,\, x+y) = \underset{|x|^2}{(x,\, x)} + \underset{0}{(x,\, y)} + \underset{0}{(y,\, x)} + \underset{|y|^2}{(y,\, y)} = |x|^2 + |y|^2$.

# 22. Свойства определителя матрицы Грама системы векторов евклидова пространства

Пусть $v_1, \ldots, v_k$ — система векторов в $\mathbb{E}$. $G = G(v_1, \ldots, v_k)$.

**Предложение 1**. $\forall v_1, \ldots, v_k \in E, \quad \det G(v_1, \ldots, v_k) \geqslant 0$.

**Предложение 2**. $\det G(v_1, \ldots, v_k) = 0$ тогда и только тогда, когда $v_1, \ldots, v_k$ — линейно зависимы.

**Доказательство 1**. $v_1, \ldots, v_k$ — линейно независимы $\Longrightarrow v_1, \ldots, v_k$ — базис в $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle \Longrightarrow \det G > 0$ по критерию Сильвестра (т.к. $G$ есть матрица билинейной функции $(\cdot\ ,\ \cdot)$ на $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ в базисе $(v_1, \ldots, v_k)$.

**Доказательство 2**. $v_1, \ldots, v_k$ — линейно зависимы.

Тогда $\lambda_{(1)} v_1 + \ldots + \lambda_{(k)} v_k = 0$ для некоторого набора $(\lambda_{(1)}, \ldots, \lambda_{(k)}) \neq (0, \ldots, 0)$.

Тогда $\forall i = 1, \ldots, k$:

$$\lambda_{(1)}(v_1,\, v_i) + \ldots + \lambda_{(k)}(v_k,\, v_i) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda_{(k)} G_{(1)} + \ldots + \lambda_{(k)} G_{(k)} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{строки } G \text{ линейно зависимы} \Rightarrow \det G = 0.$$

# 23. Свойства ортогонального дополнения к подпространству в евклидовом пространстве

**Предложение**. Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство, $\dim \mathbb{E} = n$. Тогда:

1. $\dim S^{\perp} = n - \dim S$
2. $\mathbb{E} = S \oplus S^{\perp}$
3. $(S^{\perp})^{\perp} = S$

**Доказательство**.

1. Пусть $e_1, \ldots, e_k$ — базис в $S$. Дополним его до базиса всего пространства $\mathbb{E}$.
   Пусть $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, $x \in \mathbb{E}$.
   Если $x \in S^{\perp}$, то это то же самое, что $(x,\, e_i) = 0$ для всех $i = 1, \ldots, k$. Тогда:
   $$(x,\, e_i) = x_1(e_1,\, e_i) + x_2(e_2,\, e_i) + \ldots + x_n(e_n,\, e_i) = 0,\ \forall i = 1, \ldots, k.$$
   Тогда $x$ есть решение ОСЛУ: $G \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$ с матрицей $G \in \mathrm{Mat}_{k \times n}(\mathbb{R})$, где $g_{ij} = (e_i,\, e_j)$.
   Так как левый блок размера $k \times k$ матрицы $G$ есть $G(e_1, \ldots, e_k)$, где $e_1, \ldots, e_k$ — линейно независимы, то $\det G(e_1, \ldots, e_n) > 0$, следовательно $\mathrm{rk} G = k$. Тогда $\dim S^{\perp} = n - \mathrm{rk} G = n - k = n - \dim S$.
2. Из предыдущего пункта получили, что $\dim S + \dim S^{\perp} = n = \dim \mathbb{E}$.
   Если $s \in S \cap S^{\perp}$, то $(\underset{\in S}{v},\ \underset{\in S^{\perp}}{v}) = 0 \Longrightarrow v = 0 \Longrightarrow S \cap S^{\perp} = \{0\} \Longrightarrow S$ и $S^{\perp}$ линейно независимы $\Longrightarrow \mathbb{E} = S \oplus S^{\perp}$.
3. $\dim (S^{\perp})^{\perp} = \dim \mathbb{E} - \dim(S^{\perp}) = \dim \mathbb{E} - (\dim \mathbb{E} - \dim S) = \dim S$. Остаётся заметить, что $S \subseteq (S^{\perp})^{\perp} \Longrightarrow S = (S^{\perp})^{\perp}$.

# 24. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в $\mathbb{R}^n$, заданное своим базисом

Пусть $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением. $S \subseteq \mathbb{R}^n$ — подпространство, $a_1, \ldots, a_k$ — базис в $S$. Образуем матрицу $A \in \mathrm{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R})$, где $A^{(i)} = a_i$.

**Предложение**. $\forall v \in \mathbb{E} :\ pr_S v = A(A^T A)^{-1} A^T x$

**Доказательство**. *Корректность*: $A^T A = (a_i,\ a_j) = G(a_1, \ldots, a_k)$ — невырожденная матрица, так как $a_1, \ldots, a_k$ — линейно независимы, следовательно $(A^T A)^{-1}$ существует.

Пусть $v \in \mathbb{E}$, тогда $x = pr_S v \Rightarrow x \in S \Rightarrow x = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$.

$y = ort_S v \Rightarrow A^T y = 0$.

$$A(A^TA)^{-1}A^Tv = A(A^TA)^{-1}A^T(x+y) =$$

$$= A\underbrace{(A^TA)^{-1}(A^TA)}_{E}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} + A(A^TA)^{-1}\underbrace{A^Ty}_{0} =$$

$$= A\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = x = pr_S v.$$

# 25. Существование ортонормированного базиса в евклидовом пространстве. Описание всех ортонормированных базисов в терминах одного и матриц перехода. Дополнение ортогональной системы векторов до ортогонального базиса

**Теорема**. Во всяком (конечномерном) евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

**Доказательство**. Так как квадратичная функция $(v, v)$ положительно определена, то существует базис, в котором она принимает нормальный вид. Этот базис и есть то, что нам требуется.

Другими словами, всякую положительно определённую квадратичную форму можно привести к нормальному виду.

Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — ортонормированный базис в $\mathbb{E}$. Пусть также есть ещё один базис $(e'_1, \ldots, e'_n)$, причём $(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n) \cdot C$.

**Предложение**. $(e'_1, \ldots, e'_n)$ — **ортонормирован** $\iff C^TC = E$.

**Доказательство**. $\mathbb{e}'$ — ортонормированный базис $\implies G(\mathbb{e}') = E$ с одной стороны (по определению ортонормированного базиса), а с другой $G(\mathbb{e}') = C^T\underset{=E}{G(\mathbb{e})}C = C^TC$.

**Следствие**. Всякую ортогональную (соотв. ортонормированную) систему векторов можно дополнить до ортогонального (соотв. ортонормированного) базиса.

**Доказательство**. Если $(e_1, \ldots, e_k)$ — такая система, то искомым дополнением будет ортогональный (соотв. ортонормированный) базис в $\{e_1, \ldots, e_k\}^\perp$.

# 26. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в терминах его ортогонального базиса. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта, явные формулы для каждого шага

Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство. $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_k)$ — ортогональный базис в $S$.

**Предложение**. $\forall v \in \mathbb{E}: \ pr_S v = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{(v,\, e_i)}{(e_i,\, e_i)} e_i$.

**Доказательство**. Представим $v$ в виде суммы $v = pr_S v + ort_S v$. Тогда:

$$(v,\, e_i) = (pr_S v,\, e_i) + \underbrace{(ort_S v,\, e_i)}_{=0} = (pr_S v,\, e_i),\ \ \forall i = 1, \ldots, k.$$

Также $pr_S v = \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j e_j$. Следовательно, $(v,\, e_i) = \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j (e_j,\, e_i)$. Учитывая, что базис $\mathbb{e}$ — ортогональный, то все слагаемые кроме $j = i$ обнулятся, следовательно останется только $(v,\, e_i) = \lambda_i (e_i,\, e_i) \Longrightarrow \lambda_i = \dfrac{(v,\, e_i)}{(e_i,\, e_i)}$.

**Процесс ортогонализации Грама-Шмидта**.
Пусть $(e_1, \ldots, e_k)$ — линейно независимая система векторов.
Метод Якоби: $\det G(e_1, \ldots, e_k) > 0$, где $i$-й угловой минор — это $\det G(e_1, \ldots, e_i) > 0$.
Применим результат — ортогональный базис $(f_1, \ldots, f_k)$ в $\langle e_1, \ldots, e_k \rangle$ так, что $(*)$:

$$\begin{aligned} & f_1 = e_1 \\ & f_2 \in e_2 + \langle e_1 \rangle \\ & f_3 \in e_3 + \langle e_1,\, e_2 \rangle \\ & \ \vdots \\ & f_k \in e_k + \langle e_1, \ldots, e_{k-1} \rangle \end{aligned}$$

**Предложение**. $\forall i = 1, \ldots, k$:

1. $f_i = ort_{\langle e_1, \ldots, e_{i-1} \rangle} e_i$;
2. $f_i = e_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} \dfrac{(e_i,\, f_j)}{(f_j,\, f_j)} f_j$; $(**)$
3. $\det G(f_1, \ldots, f_i) = \det G(e_1, \ldots, e_i)$;

**Доказательство**. Помним, что при $(*)$ $\langle e_1, \ldots, e_i \rangle = \langle f_1, \ldots, f_i \rangle$ $\forall i$

1. Распишем:

$$\begin{gathered} f_i \in e_i + \langle e_1, \ldots, e_{i-1} \rangle = e_i + \langle f_1, \ldots, f_{i-1} \rangle \Rightarrow \\ \Rightarrow f_i = e_i + h_i, \text{ где } h_i \in \langle f_1, \ldots, f_{i-1} \rangle \Rightarrow \\ \Rightarrow e_i = \underset{ort}{f_i} - \underset{pr}{h_i} \end{gathered}$$

   Так как $f_i \in \langle f_1, \ldots, f_{i-1} \rangle^{\perp}$, то

$$f_i = ort_{\langle f_1, \ldots, f_{i-1} \rangle} e_i = ort_{\langle e_1, \ldots, e_{i-1} \rangle} e_i$$

2. $f_i = ort_{\langle f_1, \ldots, f_{i-1} \rangle} e_i = e_i - pr_{\langle f_1, \ldots, f_{i-1} \rangle} e_f = e_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} \dfrac{(e_i,\, f_j)}{(f_j,\, f_j)} f_j$ (по предыдущему)

3. Следует из того, что $G(f_1, \ldots, f_i) = C^T G(e_1, \ldots, e_i) C$, где $C$ — верхнетреугольная с единицами на диагонали, следоавтельно $\det C = 1$.

Построение ортогонального базиса $f_1, \ldots, f_k$ (по формулам $(**)$) называется методом (процессом) ортогонализации Грама-Шмидта.

# 27. Теорема о расстоянии от точки до подпространства в евклидовом пространстве. Явная формула для расстояния в терминах определителей матриц Грама

Пусть $x \in \mathbb{E}$, $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство.

**Теорема**. $\rho(x, S) = |ort_S x|$, причём $pr_S x$ является единственной ближайшей к $x$ точной из $S$.

**Доказательство**.

$y := pr_S x$, $z := ort_S x$, $x = y + z$.

Пусть теперь $y' \in S$, $y \neq 0$. Покажем, что $\rho(x, y + y') > \rho(x, y)$.

$\rho(x, y+y')^2 = |\underbrace{x-y}_{z} - y'|^2 = |\underset{\in S^\perp}{z} - \underset{\in S}{y'}|^2 \underset{\text{по т. Пифагора}}{=} |z|^2 + |y'|^2 > |z|^2 = \rho(x, y)^2$.

$S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство, $x \in S$, $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_k)$ — базис.

**Теорема**. $\rho(x, S)^2 = \dfrac{\det G(e_1, \ldots, e_k, x)}{\det G(e_1, \ldots, e_k)}$.

**Доказательство**.

(1) $x \in S \Longrightarrow \rho(x, S) = 0$ и $\det G(e_1, \ldots, e_k, x) = 0$, т.к. $e_1, \ldots, e_k, x$ — линейно зависимы

(2) $x \notin S \Longrightarrow$ Положим $z := ort_S x$.

Тогда $\rho(x, S) = |z|$ — уже знаем.

Применим ортогонализацию Грама–Шмидта к $e_1, \ldots, e_k, x$: получим систему $f_1, \ldots, f_k, z$.

Но при ортогонализации определитель матрицы Грама не меняется $\Longrightarrow \dfrac{\det G(e_1, \ldots, e_k, x)}{\det G(e_1, \ldots, e_k)} =$

$\dfrac{\det G(f_1, \ldots, f_k, z)}{\det G(f_1, \ldots, f_k)} = \dfrac{|f_1|^2 \ldots |f_k|^2 |z|^2}{|f_1^2| \ldots |f_k|^2} = |z|^2 = \rho(x, S)^2$.

# 28. Метод наименьших квадратов для несовместных систем линейных уравнений: постановка задачи и её решение. Единственность псевдорешения и явная формула для него в случае линейной независимости столбцов матрицы коэффициентов

*Метод наименьших квадратов*:

Имеем СЛУ($*$) $Ax = b$, где $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор неизвестных, $b \in \mathbb{R}^m$.

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ — решение СЛУ($*$) $\Leftrightarrow Ax_0 = b \Leftrightarrow Ax_0 - b = 0 \Leftrightarrow |Ax_0 - b| = 0$ (где $\mathbb{R}^n$ рассматривается как евклидово пространство со стандартным скалярным произведением) $\Leftrightarrow \rho(Ax_0, b) = 0$.

В случае, когда СЛУ(*) несовместна, набор $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (вектор-столбец) называется **псевдорешением**, если $\rho(Ax_0, b) = \min \rho(Ax, b)$.

Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ — подпространство, натянутое на столбцы матрицы $A$, то есть $S = \langle A^{(1)}, \ldots, A^{(n)} \rangle$.

**Предложение 1**. $x_0$ — псевдорешение для ($*$) тогда и только тогда, когда $x_0$ — решение для СЛУ $Ax = pr_S b$.

**Предложение 2**. Если столбцы матрицы $A$ — линейно независимы, то псевдорешение единственно и может быть найдено по формуле $x_0 = (A^T A)^{-1} A^T b$.

**Доказательство 1**. Так как $Ax = x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + \ldots + x_n A^{(n)}$, то $\{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\} = S$. Следовательно, $\rho(\{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}, b) = \rho(S, b)$.

По теореме о расстоянии о точки до плоскости искомый минимум достигается в точке $x_0$, для которой $A_{x_0} = or_S b$.

**Доказательство 2**. Так как столбцы $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ — линейно независимы, то они образуют базис в $S \Longrightarrow \exists! x_0 : A_{x_0} = pr_S b$.

Так как $pr_S b = A(A^T A)^{-1} A^T b$, то $x_0 = (A^T A)^{-1} A^T b$ является решением для СЛУ $Ax = pr_S b$.

# 29. Две формулы для объёма параллелепипеда: в терминах определителя матрицы Грама и в терминах координат в ортонормированном базисе

Пусть $a_1, \dots, a_k$ — базис пространства $\mathbb{E}$. $P$ — $k$-мерный параллелепипед.

**Теорема**. $vol P(a_1, \dots, a_k)^2 = \det G(a_1, \dots, a_n)$.

**Доказательство**. Индукция по $k$:

$\underline{k=1}$: $|a_1|^2 = (a_1, a_1)$ — верно. $\underline{k>1}$): имеем $vol P(a_1, \dots, a_k)^2 = vol P(a_1, \dots, a_{k-1})^2 |h|^2 = \det G(a_1, \dots, a_{k-1}) |h|^2 = (*)$.

- Если $a_1, \dots, a_{k-1}$ линейно независимы, то $|h|^2 = \dfrac{\det G(a_1, \dots, a_k)}{\det G(a_1, \dots, a_{k-1})} \Rightarrow$

  $\Rightarrow (*) = \det G(a_1, \dots, a_k)$.
- Если $a_1, \dots, a_{k-1}$ — линейно зависимы, то $\det G(a_1, \dots, a_{k-1}) = 0 \Rightarrow vol P(a_1, \dots, a_k) = 0 = (*)$. Но $\det G(a_1, \dots, a_k) = 0$, так как $a_1, \dots, a_k$ — линейно зависимы

**Теорема**. $vol P(a_1, \dots, a_n) = |\det A|$. Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — ортонормированный базис в $\mathbb{E}$.

$(a_1, \dots, a_n) = (e_1, \dots, e_n) A$, $a \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

**Доказательство**. $G(a_1, \dots, a_n) = A^T \underbrace{G(e_1, \dots, e_n)}_{E} A \Rightarrow vol P(a_1, \dots, a_n)^2$

$= \det G(a_1, \dots, a_n) = (\det A)^2$.

# 30. Связь смешанного произведения с векторным и скалярным в трёхмерном евклидовом пространстве. Антикоммутативность и билинейность векторного произведения. Формула для вычисления векторного произведения в терминах координат в правом ортонормированном базисе

**Теорема**. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^3 : \ (a, b, c) = (a, [b, c])$

**Доказательство**.

1. $b, c$ — пропорциональны $\Longrightarrow [b, c] = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \text{левая часть} = 0 \\ \text{правая часть} = 0 \end{cases}$
2. $b, c$ — не пропорциональны $\Longrightarrow$ положим $d = [b, c]$.

$$(a, [b, c]) = (a, d) = (pr_{\langle d \rangle} a, d) = (ort_{\langle b,\, c \rangle} a, d) = \begin{cases} |ort_{\langle b,\, c \rangle} a| \underbrace{|d|}_{vol P(b,\, c)}, \text{ если} (a, b, c) > 0, \\ -|ort_{\langle b,\, c \rangle} a| |d|, \text{ если} (a, b, c) < 0 \end{cases} =$$

$$= Vol(a, b, c) = (a, b, c).$$

**Предложение**.
1. $[a,\, b] = -[b,\, a]\ \forall a,\, b$ — антикоммутативность
2. $[\cdot,\, \cdot]$ линейна по каждому аргументу
   $[\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2,\, b] = \lambda_1[a_1,\, b] + \lambda_2[a_2,\, b]$
   $[a,\, \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2] = \mu_1[a,\, b_1] + \mu_2[a,\, b_2]$

**Доказательство**.
1. Ясно из определения
2. $$\forall x (x,\, [\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2,\, b]) = (x,\, \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2,\, b) =$$
$$= \lambda_1(x,\, a_1,\, b) + \lambda_2(x,\, a_2,\, b) = \lambda_1(x,\, [a_1,\, b]) + \lambda_2(x,\, [a_2,\, b]) =$$
$$= (x,\, \lambda_1[a_1,\, b] + \lambda_2[a_2,\, b]).$$

   Так как $\forall y = (e_1,\, y)e_1 + (e_2,\, y)e_2 + (e_3,\, y)e_3$ для $(e_1,\, e_2,\, e_3)$ — ортонормированного базиса $\Longrightarrow [\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2,\, b] = \lambda_1[a_1,\, b] + \lambda_2[a_2,\, b]$. Линейность по второму аргументу аналогична.

Пусть $(e_1, e_2, e_3)$ — ортонормированный базис.

$$a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$$
$$b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$$

Тогда формула для вычисления векторного произведения выглядит так:

$$[a,\, b] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$
$$= (a_2b_3 - b_2a_3)e_1 - (a_1b_3 - b_1a_3)e_2 + (a_1b_2 - b_1a_2)e_3 =$$
$$= \underline{((a_2b_3 - b_2a_3),\, (b_1a_3 - a_1b_3),\, (a_1b_2 - b_1a_2))}$$

**Доказательство**.

$$[a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3,\, b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3] =$$
$$= a_1[e_1,\, b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3] + a_2[e_2,\, b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3] + a_3[e_1,\, b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3] =$$
$$= a_1(b_1[e_1,\, e_2] + b_2[e_1,\, e_2] + b_3[e_1,\, e_3]) +$$
$$+ a_2(b_1[e_2,\, e_1] + b_2[e_2,\, e_2] + b_3[e_2,\, e_3]) +$$
$$+ a_3(b_1[e_3,\, e_1] + b_2[e_3,\, e_2] + b_3[e_3,\, e_3]) =$$
$$a_1b_1[e_1,\, e_1] + a_1b_2[e_1,\, e_2] + a_1b_3[e_3,\, e_3] +$$
$$+ a_2b_1[e_2,\, e_1] + a_2b_2[e_2,\, e_2] + a_2b_3[e_2,\, e_3] +$$
$$+ a_3b_1[e_3,\, e_1] + a_3b_2[e_3,\, e_2] + a_3b_3[e_3,\, e_3]$$

В результате, подставив вычисления $[e_2,\, e_3] = e_1$ и $[e_3,\, e_2] = -e_1$, получим искомую формулу.

# 31. Формула для двойного векторного произведения в трехмерном евклидовом пространстве

**Предложение**. $[a,\, [b,\, c]] = (a,\, c)b - (a,\, b)c$.
**Доказательство**.
1. $b,\, c$ — пропорциональны $\Longrightarrow$ можем считать $c = \lambda b$
   Правая часть $= (a,\, \lambda b)b - (a,\, b)\lambda b = 0$

2. $b$, $c$ — не пропорциональны
   Выберем правый ортонормированный базис $e_1$, $e_2$, $e_3$ так, чтобы
   (a) $b$ пропорционален $e_1$
   (b) $\langle b, c\rangle = \langle e_1, e_2\rangle$
   Тогда $b = \beta e_1$, $c = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$, $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$.
   $[b, c] = [\beta e_1, \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2] = \beta\gamma_2 e_3$
   Левая часть $= [a, [b, c]] = [\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \beta\gamma_2 e_3] = -\alpha_1\beta\gamma_2 e_2 + \alpha_2\beta\gamma_2 e_1$
   Правая часть $= (\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2)\beta e_1 - \alpha_1\beta(\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2) = \alpha_2\gamma_2\beta e_1 - \alpha_1\beta\gamma_2 e_2 =$ левая часть.

# 32. Линейные многообразия как сдвиги подпространств. Критерий равенства двух линейных многообразий

**Предложение**. $L \subseteq \mathbb{R}^n$ — непустое множество $\Rightarrow L$ — линейное многообразие $\Rightarrow L = v_0 + S$ для некоторых $v_0 \in L$ и подпространства $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

*Замечание.* Из предложения следует, что линейные многообразия — в точности сдвиги подпространств в $\mathbb{R}^n$.

**Доказательство**.

$\Rightarrow$ Ясно и очевидно

$\Leftarrow$ $L = v_0 + S$.

Так как $S$ — подпространство, то существует ОСЛУ $Ax = 0$, такая что $S$ есть ее множество решений.

Тогда $L$ есть множество решений СЛУ $Ax = A_{v_0}$.

Пусть $L_1 = v_1 + S_1$ и $L_2 = v_2 + S_2$ — два линейных многообразия.

**Предложение**. $L_1 = L_2 \iff \begin{cases} S_1 = S_2\ (= S) \\ v_1 - v_2 \in S \end{cases}$

**Доказательство**.

$\Leftarrow$ Очевидно

$\Rightarrow$ $L_1 = L_2$: $v_1 = v_1 + 0 \in v_2 + S_2 \Rightarrow v_1 - v_2 \in S_2$.

Аналогично $v_1 - v_2 \in S_1 \Rightarrow v_1 - v_2 \in S_1 \cap S_2$.

$v \in S_1 \Rightarrow v_1 + v \in v_2 + S_2 \Rightarrow v \in (v_2 - v_1) + S_2 \subseteq S_2$.

Отсюда $S_1 \cap S_2$. Аналогично $S_2 \subseteq S_1 \Longrightarrow S_1 = S_2\ (= S)$ и $v_1 - v_2 \in S$.

# 33. Теорема о плоскости, проходящей через $k + 1$ точку в $\mathbb{R}^n$

**Теорема**.

1. Через любые $k + 1$ точек в $\mathbb{R}^n$ проходит плоскость размерности $\leqslant k$.
2. Если $k+1$ точек не лежат в плоскости размерности $< k$, то через них проходит ровно одна плоскость размерности $k$.

**Доказательство**.

1. Пусть $v_0, \ldots, v_k$ — наши точки.
   Тогда они все лежат в плоскости $P = v_0 + \langle (v_1 - v_0), (v_2 - v_0), \ldots, (v_k - v_0)\rangle$, $\dim P = \dim S \leqslant k$.
2. В этом случае $\dim P = k \Longrightarrow \dim S = k \Longrightarrow v_1 - v_0, \ldots, v_k - v_0$ линейно независимы. $(v_1 - v_0), \ldots, (v_k - v_0)$ лежат в направляющем подпространстве любой плоскости, проходящей через $v_0, \ldots, v_k \Longrightarrow P$ — единственная плоскость размерности $k$ с требуемым свойством.

# 34. Инвариантность определителя матрицы линейного оператора относительно замены базиса. Критерий обратимости линейного оператора в терминах его ядра, образа и определителя. Связь спектра линейного оператора с его характеристическим многочленом

Пусть $\varphi$ — линейный оператор.
**Следствие**. $\det A(\varphi,\ e)$ не зависит от выбора базиса $\mathbb{e}$.
**Доказательство**. $\det A' = \det(C^{-1}AC)$ — очевидно, так как $\det C^{-1} = \det C = 1$.

**Теорема** (критерий обратимости). Для $\varphi \in L(V)$ следующие условия эквивалентны:

1. $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$
2. $\mathrm{Im}\varphi = V$
3. $\varphi$ обратим (т.е. $\varphi$ — изоморфизм $V$ на себя)
4. $\det\varphi \neq 0$

**Доказательство**.
$1 \Leftrightarrow 2$ Так как $\dim V = \dim \mathrm{Ker}\varphi + \dim \mathrm{Im}\varphi$.
$1\&2 \Leftrightarrow 3$ Очевидно
$2 \Leftrightarrow 4$ $\mathrm{Im}\varphi = V \Leftrightarrow \mathrm{rk}\varphi = \dim V \Leftrightarrow \det\varphi \neq 0$.

**Утверждение**. $\lambda \in \mathrm{Spec}\varphi \Leftrightarrow \chi_\psi\varphi(\lambda) = 0$, то есть $\lambda$ — корень характеристического многочлена.
**Доказательство**. Докажем аналогичное утверждение, из которого следует текущее:
$\lambda \in \mathrm{Spec}\varphi \Leftrightarrow \det(\varphi - \lambda\mathrm{Id}) = 0$.
$\lambda \in \mathrm{Spec}\varphi \Leftrightarrow V_\lambda(\varphi) \neq \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\mathrm{Id}) \neq \{0\} \Leftrightarrow \det(\varphi - \lambda\mathrm{Id}) = 0$.

# 35. Связь между алгебраической и геометрической кратностями собственного значения линейного оператора

**Предложение**. Пусть $\lambda \in \mathrm{Spec}\varphi \Longrightarrow$ (геом. кратность $\lambda$) $\leqslant$ (алг. кратность $\lambda$)
**Доказательство**. Пусть $d_\lambda$ — геометрическая кратность $= \dim V_\lambda(\varphi)$.
Выберем базис $(e_1, \ldots, e_{d_\lambda})$ в $V_\lambda(\varphi)$ и дополним его до базиса $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ всего пространства $V$. Тогда $A(\varphi,\ \mathbb{e})$ имеет вид:

$$A(\varphi,\ \mathbb{e}) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & 0 & B \\ 0 & \cdots & \lambda & \\ \hline & & & \\ & 0 & & D \\ & & & \end{array}\right),\ \text{количество } \lambda = d_\lambda$$

Тогда

$$\chi_\varphi(t) = \left|\begin{array}{ccc|c} \lambda - t & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & 0 & B \\ 0 & \cdots & \lambda - t & \\ \hline & & & \\ & 0 & & D - tE \\ & & & \end{array}\right| =$$

$$= (-1)^n(\lambda - t)^{d_\lambda}\det(D - tE) = (-1)^{n-d_\lambda}(t-\lambda)^{d_\lambda}\det(D - tE)$$

Отсюда, (алг. кратн.) $\geqslant d_\lambda =$ (геом. кратн.).

## 36. Линейная независимость собственных подпространств линейного оператора, отвечающих попарно различным собственным значениям. Диагонализуемость линейного оператора, у которого число корней характеристического многочлена равно размерности пространства

**Определение**. $v_1, \ldots, v_s$ — линейно независимы $\iff \forall v_1 \in V_1, \ldots, v_s \in V_s$ из условия $v_1 + \ldots + v_s = 0$ следует $v_1 = \ldots = v_s = 0$.

Пусть $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\} \subseteq \mathrm{Spec}\varphi$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ $\forall i, j$.

**Предложение**. Подпространства $V_{\lambda_1}(\varphi), \ldots, V_{\lambda_s}(\varphi)$ — линейно независимы.

**Доказательство**.

$\underline{s=1}$: очевидно.

Пусть доказано для всех $< s$, докажем для $\underline{s}$:

Пусть $v_1 \in V_{\lambda_1}(\varphi), \ldots, v_s \in V_{\lambda_s}(\varphi)$ и $v_1 + \ldots + v_s = 0$ $(*)$ $\Longrightarrow \varphi(v_1) + \ldots + \varphi(v_s) = \varphi(0) = 0$ $\Longrightarrow \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_s v_s = 0$

Вычтем $(*)$, умноженное на $\lambda_s$: $(\lambda_1 - \lambda_s)v_1 + \ldots + (\lambda_{s-1} - \lambda_s)v_{s-1} = 0$.

Так как $\lambda_i \neq \lambda_s$ при $i \neq s$, то по предположению индукции получаем: $v_1 = \ldots = v_{s-1} = 0$. Тогда $(*)$ влечет $v_s = 0$.

**Следствие**. Если $\chi_\varphi(t)$ имеет ровно $n$ попарно различных корней, то $\varphi$ — диагонализуем.

**Доказательство**. Пусть $\mathrm{Spec}\varphi = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. В каждом $V_{\lambda_i}(\varphi)$ возьмем ненулевой вектор $v_i$, тогда по предыдущему предложению векторы $v_1, \ldots, v_n$ — линейно независимы $\Longrightarrow v_1, \ldots, v_n$ — базис из собственных векторов $\Longrightarrow \varphi$ — диагонализуем.

## 37. Два критерия диагонализуемости линейного оператора

**Теорема**. Линейный оператор $\varphi$ диагонализуем $\iff$ выполнены следующие два условия:

1. $\chi_\varphi(t)$ разлагается на линейные множители
2. $\forall \lambda \in \mathrm{Spec}\varphi$ (геом. кратн.) = (алг. кратн.)

**Доказательство**.

$\Rightarrow$ $\varphi$ диагонализуем $\to$ существует базис $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ такой, что

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$$

Тогда $\chi_\varphi(t) = (-1)^n \begin{vmatrix} \mu_1 - t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n - t \end{vmatrix} = (t - \mu_1)(t - \mu_2) \ldots (t - \mu_n) \Rightarrow$ условие 1.

Теперь перепишем $\chi_\varphi(t)$ в виде $\chi_\varphi(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \ldots (t - \lambda_s)^{k_s}$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$ и $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\} = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$.

Тогда $\forall i = 1, \ldots, s:\ V_{\lambda_i}(\varphi) \equiv \langle e_i \mid \mu_i = \lambda_i \rangle \Rightarrow \underset{\text{геом. кр.}}{\dim V_{\lambda_i}(\varphi)} \geqslant \underset{\text{алг. кр.}}{k_i} \Rightarrow$ (геом. кр.) = (алг. кр.) $\Rightarrow$ условие 2.

$\Leftarrow$ Пусть $\chi_\varphi(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \ldots (t - \lambda_s)^{k_s}$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$.

Из условия 2 получаем, что $\dim V_{\lambda_i}(\varphi) = k$. Так как $V_{\lambda_i}(\varphi), \ldots, V_{\lambda_s}(\varphi)$ — линейно независимы, то $\dim(V_{\lambda_1}(\varphi) + \ldots + V_{\lambda_s}(\varphi)) = \dim V_{\lambda_1}(\varphi) + \ldots + V_{\lambda_s}(\varphi) = k_1 + \ldots + k_s = n \Rightarrow V_{\lambda_1}(\varphi) + \ldots + V_{\lambda_s}(\varphi) = V \Rightarrow V = V_{\lambda_1}(\varphi) \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_s}(\varphi)$.

$\forall i = 1, \ldots, s$ пусть $\mathbb{e}_i$ — базис в $V_{\lambda_i}(\varphi)$, тогда $\mathbb{e}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{e}_s$ — базис $V$ — он состоит из собственных векторов $\Rightarrow \varphi$ — диагонализуем.

# 38. Существование одномерного или двумерного инвариантного подпространства для линейного оператора в векторном пространстве над $\mathbb{R}$

**Теорема**. Если $F = \mathbb{R}$, то $\forall \varphi \in L(V)$ существует либо одномерное, либо двумерное $\varphi$-инвариантное подпространство.

**Доказательство**.

1. $\chi_\varphi(t)$ имеет действительные корни $\Rightarrow$ есть собственные векторы $\Rightarrow$ есть одномерное $\varphi$-инвариантное подпространство.
2. $\chi_\varphi(t)$ не имеет действительных корней.
   Пусть $\lambda + i\mu$ — комплексный корень $\chi_\varphi(t)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$.
   Выберем базис $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ в $V$. Пусть $A = A(\varphi, \mathbb{e})$. Над $\mathbb{e}$ у $\varphi$ есть собственный вектор $\Rightarrow$ существует $u \in \mathbb{R}^n$ и $v \in \mathbb{R}^n$, такие что $A(u + iv) = (\lambda + i\mu)(u + iv) = (\lambda u - \mu v) + i(\mu u + \lambda v)$.
   Также $A(u + iv) = Au + iAv$.
   Отделив действительные и мнимые части, получаем: $\begin{cases} Au = \lambda u - \mu v, \\ Av = \mu u + \lambda v \end{cases}$.
   Пусть $x \in V$ — вектор с координатами $u$, а $u \in V$ — вектор с координатами $v$.
   Тогда $\begin{cases} \varphi(x) = \lambda x - \mu y, \\ \varphi(y) = \mu x + \lambda y \end{cases} \Rightarrow U = \langle x, y \rangle$ — $\varphi$-инвар. подпространство и $\dim U \leqslant 2$.

# 39. Линейный оператор в евклидовом пространстве, сопряжённый к данному: определение, существование, единственность. Матрица сопряженного оператора в произвольном и ортонормированном базисах

**Определение**. Линейный оператор $\psi \in L(\mathbb{E})$ называется **сопряженным** к $\varphi$, если $(x, \varphi(y)) = (\psi(x), y)\ \forall x, y \in \mathbb{E}$.

$\beta_\varphi = \beta_\psi^T$

**Предложение**.

1. $\psi$ существует, причём единственно.
2. если $\mathbb{e}$ — ортонормированный базис в $\mathbb{E}$, то $A_\psi = A_\varphi^T$, где $A_\varphi = A(\varphi, \mathbb{e})$, $A_\psi = A(\psi, \mathbb{e})$.

**Доказательство**. Пусть $\mathbb{e}$ — базис в $\mathbb{E}$. $G = G(e_1, \ldots, e_n)$.

$B(\beta_\varphi^T, \mathbb{e}) = A_\psi^T G$

$B(\beta_\varphi, \mathbb{e}) = G A_\psi$

$A_\psi^T G = G A_\varphi \Leftrightarrow G A_\psi = A_\varphi^T G\ (G = G^T) \Leftrightarrow A_\psi = G^{-1} A_\varphi^T G$. Отсюда следует существование и единственность $\psi$.

Если $\mathbb{e}$ — ортонормированный базис, то $G = E \Rightarrow A_\varphi = A_\varphi^T$.

# 40. Самосопряженный линейный оператор в евклидовом пространстве: инвариантность ортогонального дополнения к инвариантному подпространству и существование собственного вектора

**Предложение**. $\varphi = \varphi^*$, $U \in \mathbb{E}$ — $\varphi$-инвариантное подпространство $\Rightarrow U^\perp$ — тоже $\varphi$-инвариантное подпространство.

**Доказательство**.

Имеем $\varphi(U) \in U$.

Хотим $\varphi(U^\perp) \in U^\perp$.

$$\forall x \in U, \forall y \in U^\perp : (\underset{\in U}{x}, \varphi(y)) = (\underset{\in U}{\varphi(x)}, \underset{\in U^T}{y}) = 0$$

**Предложение**. $\varphi = \varphi^* \Rightarrow$ в $\mathbb{E}$ существует собственный вектор.

**Доказательство**. Знаем существование либо $\begin{cases} \text{1-мерного } \varphi\text{-инвариантного подпространства,} \\ \text{2-мерного } \varphi\text{-инвариантного подпространства} \end{cases}$

1. Ок
2. $U \in \mathbb{E}$ — $\varphi$-инвариантное подпространство, $\dim U = 2$.
   Фиксируем $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — ортонормированный базис в $U$.
   $\psi := \varphi|_U$, $\psi = \psi^*$.
   $\triangle = \triangle(\varphi, \mathbb{e}) \Rightarrow \triangle = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.
   $\chi_\psi(t) = (-1)^2 \begin{vmatrix} a-t & b \\ b & c-t \end{vmatrix} = t^2 - (a+c)t + ac - b^2$.
   $D = (a+c)^2 - 4(ac - b^2) = (a-c)^2 + ab^2 \geqslant 0 \Rightarrow \chi_\psi(t)$ имеет действительные корни $\Rightarrow$ у $\psi$ есть собственный вектор $\Rightarrow$ у $\varphi$ также есть собственный вектор.

# 41. Самосопряженный линейный оператор в евклидовом пространстве: существование ортонормированного базиса из собственных векторов, ортогональность собственных подпространств, отвечающих различным собственным значениям. Приведение квадратичной формы к главным осям

**Теорема**. $\varphi = \varphi*$ $\Rightarrow$ в $\mathbb{E}$ есть ортонормированный базис из собственных векторов. В частности, $\varphi$ диагонализуем над $\mathbb{R}$ и $\chi_\psi \varphi(t)$ разлагается на линейные множители.

**Доказательство**. Индукция по $n$.

$\underline{n = 1}$: ясно.

$\underline{n > 1}$: существует собственный вектор $v$.

Предположим $e_1 = \dfrac{v}{|v|}$, $U = \langle e_1 \rangle$. $U$ — $\varphi$-инвариантное подпространство $U^\perp$ — тоже $\varphi$-инвариантно.

$\dim U^\perp = n - 1 \Rightarrow$ по предположению индукции в $U^\perp$ существует ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$ из собственных векторов. Тогда $(e_1, \ldots, e_n)$ — искомый ортонормированный базис.

**Следствие**. $\varphi = \varphi^*$, $\lambda, \mu \in \mathrm{Spec}\varphi$, $\lambda \neq \mu \Rightarrow \mathbb{E}_\lambda(\varphi) \perp \mathbb{E}_\mu(\varphi)$.

**Доказательство**. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис из собственных векторов: $\varphi(e_i) = \lambda e_i$.
$v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \Rightarrow \varphi(v) = x_1 \lambda_1 e_1 + \ldots + x_n \lambda_n e_n$.
$\varphi(v) = \lambda v \Leftrightarrow v \in \langle x_i \lambda_i e_i = \lambda \rangle \Rightarrow \mathbb{E}_\lambda(\varphi) \perp \mathbb{E}_\mu(\varphi)$ при $\lambda \neq \mu$.

**Следствие** (приведение кв. ф. к главным осям). Для любой квадратичной формы $Q : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ существует ортонормированный базис $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$, такой что в нём $Q$ имеет канонический вид $Q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$ (главные оси — это $\langle e_1 \rangle, \ldots, \langle e_n \rangle$).

**Доказательство**. Существует единственный самосопряжённый линейный оператор $\varphi \in L(\mathbb{E})$, такой что $Q(x) = (x, \varphi(x))$, для любого ортонормированного базиса $\mathbb{e} : B(Q, \mathbb{e}) = A(\varphi, \mathbb{e})$, где $A$ — диагонализуема.

## 42. Ортогональный линейный оператор в евклидовом пространстве: определение, пять эквивалентных условий

**Определение**. Линейный оператор $\varphi \in L(\mathbb{E})$ называется **ортогональным**, если $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)\ \forall x, y \in \mathbb{E}$ (то есть $\varphi$ сохраняет скалярное произведение).

**Предложение**. Для $\varphi \in L(\mathbb{E})$ следующие условия эквивалентны:

1. $\varphi$ — ортогональный линейный оператор
2. $\varphi$ сохраняет длину, то есть $|\varphi(x)| = |x|$, $\forall x \in \mathbb{E}$
3. $\exists \varphi^{-1}$, причём $\varphi^{-1} = \varphi^*$ (т.е. $\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi = \mathrm{Id}$)
4. Для любого ортонормированного базиса $\mathbb{e}$ матрица $A(\varphi, \mathbb{e})$ диагональна
5. Для любого ортонормированного базиса $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n) : (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ — тоже ортонормированный базис.

**Доказательство** (из Каина).

$1 \Rightarrow 2$ $|\varphi(x)| = \sqrt{(\varphi(x), \varphi(x))} = \sqrt{(x, x)} = |x|$

$1\&2 \Rightarrow 3$ Найдём ядро $\varphi$: $\varphi(x) = 0 \Rightarrow |\varphi(x)| = 0 \Rightarrow |x| = 0 \Rightarrow x = 0$.
Получаем $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$, следовательно, существует $\varphi^{-1}$. Докажем, что $\varphi^{-1} = \varphi$:

$$(\varphi(x)^{-1}, y) = (\varphi(\varphi(x)^{-1}), \varphi(y)) = (x, \varphi(y))$$

$3 \Leftrightarrow 4$ Пусть $\mathbb{e}$ — Ортонормированный базис, $C = A(\varphi, \mathbb{e})$. Тогда $A(\varphi^*, \mathbb{e}) = C^T \iff \varphi \cdot \varphi = \mathrm{Id}$ равносильно $CC^T = E$, то есть $C$ — ортогональная матрица.

$4 \Rightarrow 5$ Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — ортонормированный базис. Тогда верно, что

$$(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = (e_1, \ldots, e_n)C,\ C = A(\varphi, \mathbb{e})$$

Матрица $C$ ортогональна тогда и только тогда, когда $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ — ортонормированный базис.

## 43. Классификация ортогональных линейных операторов в одномерном и двумерном евклидовых пространствах

Нет записей.

## 44. Ортогональный линейный оператор в евклидовом пространстве: инвариантность ортогонального дополнения к инвариантному подпространству, теорема о каноническом виде. Классификация ортогональных линейных операторов в трёхмерном евклидовом пространстве

Нет записей.

## 45. Теорема о сингулярных базисах для линейного отображения евклидовых пространств. Сингулярные значения линейного отображения. Сингулярное разложение матрицы и её сингулярные значения

**Теорема**. Существуют ортонормированные базисы $\mathbb{e}$ в $\mathbb{E}$ и $\mathbb{f}$ в $\mathbb{E}'$ такие что

$$A(\varphi,\, \mathbb{e},\, \mathbb{f}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \sigma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \sigma_r & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array}\right),\quad \underbrace{\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_r}_{\text{определены однозначно}} > 0.$$

**Доказательство**. $\mathbb{E} = \mathrm{Ker}\varphi \oplus (\mathrm{Ker}\varphi)^{\perp}$.

$\dim(\mathrm{Ker}\varphi)^{\perp} = r = \dim \mathrm{Im}$.

$\forall x, y \in ((\mathrm{Ker}\varphi)^{\perp})$ положим $\beta(x,\, y) = (\varphi(x),\, \varphi(y))'$. Тогда $\beta(x,\, y)$ — симметричная билинейная форма на $(\mathrm{Ker}\varphi)^{\perp}$. Более того, квадратичная форма $Q(x) = \beta(x,\, x)$ — положительно определена: $Q(x) = (\varphi(x),\, \varphi(x))' \geqslant 0$. Если $Q(x) = 0$, то $\varphi(x) = 0 \Rightarrow x \in (\mathrm{Ker}\varphi \cap (\mathrm{Ker}\varphi)^{\perp}) \Rightarrow x = 0$.

Приведём квадратичную форму к главным осям.

Существует ортонормированный базис $\mathbb{e}_0 = (e_1, \ldots, e_r)$ в $(\mathrm{Ker}\varphi)^{\perp}$, такой что матрица $B(Q,\, \mathbb{e}_0) = \mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_r)$. Так как $Q > 0$, то все $s_i > 0$.

Без ограничения общности можно считать, что $s_1 \geqslant \ldots \geqslant s_n > 0$. Положим $\sigma_i = \sqrt{s_i}$, $i = 1, \ldots, r$. $f_i = \dfrac{1}{\sigma_i}\varphi(e_i)$.

Тогда $(f_i,\, f_j)' = (\dfrac{1}{\sigma_i}\varphi(e_i),\, \dfrac{1}{\sigma_j}\varphi(e_j))' = \dfrac{1}{\sigma_i\sigma_j}(\varphi(e_i), \varphi(e_j))' = \dfrac{1}{\sigma_i\sigma_j}\beta(e_i, e_j) = \left[\begin{array}{l} 0, \text{при } i \neq j, \\ \frac{s_i}{\sigma_i^2} = 1, \text{при } i = j \end{array}\right.$

Получили, что $f_1, \ldots, f_r$ — это ортонормированный базис в $\mathrm{Im}\varphi$. Теперь дополним $e_0$ до ортонормированного базиса $\mathbb{e}$ в $\mathbb{E}$ и дополним $f_1, \ldots, f_n$ до ортонормированного базиса $\mathbb{f}$ в $\mathbb{E}$. Тогда

$$A(\varphi,\, \mathbb{e},\, \mathbb{f}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \sigma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \sigma_r & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array}\right),$$

Числа $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_r^2$ — собственные значения в матрице квадратичной формы $Q$ в любом ортонормированном базисе $\Rightarrow \sigma_1, \ldots, \sigma_r$ определены однозначно.

**Следствие** (сингулярное разложение матрицы). *SVD = "singular value decomposition"*

$\forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ существует ортогональные матрицы $U \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ и $V \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, такие что

$$A = U\Sigma V^T, \text{ где } \Sigma = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \sigma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \sigma_r & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array}\right),\quad \sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_r > 0.$$

Более того, числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ определены однозначно.

**Доказательство**. Применим Теорему о сингулярных базисах к линейному отображению $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax$.

Тогда $\exists$ орт. и $U \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ и $V \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, такие что

$$U^{-1}AV = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \sigma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \sigma_r & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array}\right) = \Sigma$$

$\Leftrightarrow A = U\Sigma V^{-1} = U\Sigma V^T$.