Линейная алгебра.
Коллоквиум 2 семестр.
Основано на реальных событиях.
v0.0

26 мая 2017

Ченжлоги

v0.0 (20.05.2017) — *исходное: добавлены 1–10 вопросы (спасибо Соне, Даше, Лизе, Наташе, Алёне)*

Доказательства

1. Теорема о связи размерности суммы двух подпространств с размерностью их пересечения

Теорема. $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W)$
Доказательство. Пусть $p = \dim(U \cap W)$, $k = \dim U$, $m = \dim W$. Выберем базис $a = \{a_1, \dots, a_p\}$ в пересечении. Его можно дополнить до базиса U и до базиса W. Значит, $\exists b = \{b_1, \dots, b_{k-p}\}$ такой, что $a \cup b$ — базис в U и существует $\exists c = \{c_1, \dots, c_{m-p}\}$ такой, что $a \cup c$ — базис в W.

Докажем, что $a \cup b \cup c$ — базис в $U + W$.

1. Докажем, что $U + W$ порождается множеством $a \cup b \cup c$.
$$\left.\begin{aligned} & v \in U + W \Rightarrow \exists u \in U,\, w \in W : v = u + w \\ & u \in U = \langle a \cup b \rangle \subset \langle a \cup b \cup c \rangle \\ & w \in W = \langle a \cup c \rangle \subset \langle a \cup b \cup c \rangle \end{aligned}\right| \Rightarrow \begin{aligned} & v = u + w \in \langle a \cup b \cup c \rangle \Rightarrow \\ & \qquad \Rightarrow U + W = \langle a \cup b \cup c \rangle \end{aligned}$$

2. Докажем линейную независимость векторов из $a \cup b \cup c$.
Пусть скаляры $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_{k-p}, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-p}$ таковы, что
$$\underbrace{\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_p a_p}_{x} + \underbrace{\beta_1 b_1 + \ldots + \beta_{k-p} b_{k-p}}_{y} + \underbrace{\gamma_1 c_1 + \ldots + \gamma_{m-p} c_{m-p}}_{z} = 0$$
$$\left.\begin{aligned} & x + y + z = 0 \\ & z = -x - y \\ & z \in W \\ & -x - y \in U \cap W \end{aligned}\right| \Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in F : z = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_p a_p$$

Тогда $\lambda_1 a_1+\ldots+\lambda_p a_p-\gamma_1 c_1-\ldots-\gamma_{m-p} c_{m-p}=0$. Но $a \cup c$ — базис W. Следовательно, $\lambda_1=\ldots=\lambda_p=\gamma_1=\ldots=\gamma_{m-p}=0$. Но тогда $0=x+y=\alpha_1 a_1+\ldots+\alpha_p a_p+\beta_1 b_1+\ldots+\beta_{k-p} b_{k-p}$. Но $a \cup b$ — базис $U \Rightarrow \alpha_1=\ldots=\alpha_p=\beta_1=\ldots_{k-p}=0$. Итого, все коэффициенты равны нулю и линейная независимость тем самым доказана. Т.е. $a \cup b \cup c$ — базис $U+W$.

$$\begin{aligned}\dim(U+W)=|a \cup b \cup c|=|a|+|b|+|c|=p+k-p+m-p=k+m-p= \\ =\dim U+\dim W-\dim(U \cap W).\end{aligned}$$

2. Теорема о пяти эквивалентных условиях, определяющих набор линейно независимых подпространств векторного пространства

Определение. Сумма называется прямой, если из условия $u_1+\ldots+u_k=0$ следует, что $u_1=\ldots=u_k=0$. *Обозначение*: $U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$.

В этом случае, подпространства $U_1, \ldots, U_k$ называют линейно независимыми.

1. Если $u_1+\ldots+u_k=0 \Rightarrow u_1=\ldots=u_k=0$ ($U_1, \ldots, U_k$ — линейно независимы)
2. Любой u единственным образом представим в виде $u=u_1+\ldots+u_k$, где $u_i \in U_i$
3. Если e_i — базис в U_i, то $e_1 \cup \ldots \cup e_k$ — базис $U_1+\ldots+U_k$
4. $\dim(U_1+\ldots U_k)=\dim U_1+\ldots+\dim U_k$
5. $U_i \cap(U_1+\ldots+U_{i-1}+U_{i+1}+\ldots+U_k)=\{0\}$

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$ Пусть $u_1, \ldots, u_k=u_1 \ldots u_k$, где $u_i,\, u_i' \in U_i$. Тогда

$$\underbrace{(u_1-u_1')}_{\in U_1}+\ldots+\underbrace{(u_k-u_k')}_{\in U_k}=\vec{0} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (u_1-u_1')=\ldots=(u_k-u_k')=\vec{0} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u_1=u_1', \ldots, u_k=u_k'.$$

$2 \Rightarrow 3$ Пусть $u \in U_1+\ldots+U_k$. Тогда u единственно представим в виде $u=u_1+\ldots+u_k$, где $u_i \in U_i$.

Каждый u_i единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов из $e_1 \cup \ldots \cup e_k \Longrightarrow e_1 \cup \ldots \cup e_k$ — базис.

$3 \Rightarrow 4$ Пусть $e_1 \cup \ldots \cup e_k$ — базис $U_1+\ldots+U_k$. Тогда

$$\begin{aligned}\dim(U_1+\ldots+U_k)=|e_1^1+\ldots+e_{s_1}^1+\ldots+e_1^k+\ldots+e_{s_k}^k|= \\ =|e_1^1+\ldots+e_{s_1}^1|+\ldots+|e_1^k+\ldots+e_{s_k}^k|=\dim U_1+\ldots+\dim U_k.\end{aligned}$$

$4 \Rightarrow 5$ Пусть для краткости $\overline{U_i}=U_1+\ldots+U_{i-1}+U_{i+1}+\ldots+U_k$. Тогда

$$\dim(U_i \cap \overline{U_i})=\dim U_i+\dim \overline{U_i}-\dim \underbrace{(U_i+\overline{U_i})}_{U_1+\ldots+U`_k} \leqslant$$

$$\leqslant \dim U_i+\dim U_1+\ldots+\dim U_{i-1}+\dim U_{i+1}+\ldots+\dim U_k-\dim U_1-\ldots-\dim U_k.$$

Итак, $\dim(U_i \cap \overline{U_i}) \leqslant 0 \Longrightarrow \dim(U_i \cap \overline{U_i})=0 \Longrightarrow U_i \cap \overline{U_i}=\{\vec{0}\}$.

$5 \Rightarrow 1$ Пусть $\vec{0}=u_1+\ldots+u_k$, где $u_i \in U_i$. Тогда для любого i имеем

$$u_i=-u_1-\ldots-u_{i-1}-u_{i+1}-\ldots-u_k \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u_i \in U_i \cap \overline{U_i}=\{\vec{0}\} \Rightarrow u_i=\vec{0}.$$

3. Описание всех базисов n-мерного векторного пространства в терминах одного базиса и матриц координат. Формула преобразования координат вектора при замене базиса векторного пространства

Пусть V — векторное пространство, $\dim V = n$, $e_1, \ldots, e_n$ — базис. То есть

$$\forall v \in V: \ \exists! \ v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n,$$

где $x_1, \ldots, x_n \in F$ — координаты вектора v в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$. Пусть также есть базис $e'_1, \ldots, e'_n$:

$$\begin{aligned} e'_1 &= c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \ldots + c_{n1}e_n \\ e'_2 &= c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + \ldots + c_{n2}e_n \\ &\vdots \\ e'_n &= c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \ldots + c_{nn}e_n \end{aligned}$$

Обозначим матрицу $C = (c_{ij})$. Тогда можно переписать $(e'_1, \ldots, e'_n)$ как $(e_1, \ldots, e_n) \cdot C$.
Предложение. $e'_1, \ldots, e'_n$ образуют базис тогда и только тогда, когда $\det C \neq 0$.
Доказательство.
$\Rightarrow$ $e'_1, \ldots, e'_n$ — базис, а значит $\exists C' \in \mathrm{M}_n$:

$$(e_1, \ldots, e_n) = (e'_1, \ldots, e'_n)C' = (e_1, \ldots, e_n)CC'$$
$$E = CC'$$
$$C' = C^{-1} \Longleftrightarrow \exists C^{-1} \Longleftrightarrow \det C \neq 0$$

$\Leftarrow$ $\det C \neq 0 \Rightarrow \exists C^{-1}$. Покажем, что $e'_1, \ldots, e'_n$ в таком случае линейно независимы. Пусть $x_1e'_1 + \ldots + x_ne'_n = 0$. Тогда можно записать

$$(e'_1, \ldots, e'_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

$$(e_1, \ldots, e_n)C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

Так как $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис, то $C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$. Умножая слева на обратную матрицу получаем $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

4. Докажите, что отношение изоморфности на множестве всех векторных пространств является отношением эквивалентности

Теорема. "Изоморфность" — отношение эквивалентности на множестве всех векторных пространств над фиксированным полем F.
Доказательство.

I. *Рефлексивность*. $\varphi : V \simeq V$ — изоморфизм.
$\mathrm{Id} : V \simeq V$

II. *Симметричность.* $\varphi : V \simeq W$ — изоморфизм $\Longrightarrow \varphi^{-1} : W \simeq V$ — тоже изоморфизм. Т.к. отображение φ^{-1} также биективно, то осталось проверить, что оно линейно. Пусть $w_1,\, w_2 \in W$. Тогда $\exists v_1,\, v_2 \in V$, такие что

$$w_1 = \varphi(v_1),\, w_2 = \varphi(v_2) \Rightarrow v_1 = \varphi^{-1}(w_1),\, v_2 = \varphi^{-1}(w_2).$$

Теперь $\varphi^{-1}(w_1 + w_2) = \varphi^{-1}(\varphi(v_1) + \varphi(v_2)) = \varphi^{-1}(\varphi(v_1 + v_2)) = v_1 + v_2 = \varphi^{-1}(w_1) + \varphi^{-1}(w_2)$.
$\varphi^{-1}(\alpha w) = \varphi^{-1}(\alpha\varphi(v)) = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha v)) = \alpha v = \alpha\varphi^{-1}(w)$.

III. *Транзитивность.* $\psi \circ \varphi : U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W$. Если φ и ψ — изоморфизм, то $\psi \circ \varphi$ — тоже изоморфизм.
Докажем, что если φ и ψ — линейны, то $\psi \circ \varphi$ — тоже линейна.

$$(\psi \circ \varphi)(v_1 + v_2) = \psi(\varphi(v_1 + v_2)) = \psi(\varphi(v_1) + \varphi(v_2)) =$$
$$= \psi(\varphi(v_1)) + \psi(\varphi(v_2)) = (\psi \circ \varphi)(v_1) + (\psi \circ \varphi)(v_2).$$
$$(\psi \circ \varphi)(\alpha v) = \psi(\varphi(\alpha v)) = \psi(\alpha\varphi(v)) =$$
$$= \alpha\psi(\varphi(v)) = \alpha(\psi \circ \varphi)(v).$$

Тогда очевидно, что транзитивность следует из линейности, так как композиция двух биективных отображений также биективна.

5. Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств

Теорема. V, W — конечномерные векторные пространства $\Longrightarrow V \simeq W \Longleftrightarrow \dim V = \dim W$. Докажем две леммы.

Лемма 1. $\dim V = n \Rightarrow V \simeq F^n$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varphi : V \to F^n$. Выберем базис $(e_1, \ldots, e_n)$ в V. Тогда

$$x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \ x_i \in F.$$

Отображение является изоморфизмом (т.к. линейно и биективно), а следовательно $V \simeq F^n$.

Лемма 2. Пусть $\varphi : V \simeq W$ — изоморфизм. $e_1, \ldots, e_n$ — базис V. Тогда $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ — базис W.

Доказательство. Пусть $w \in W$, тогда существует $v \in V : w = \varphi(v)$. Положим $v = \varphi^{-1}(w)$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n,\ \ x_i \in F \\
&\Rightarrow w = \varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1\varphi(e_1) + \ldots + x_n\varphi(e_n) \\
&\Rightarrow W = \langle \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n) \rangle
\end{aligned}$$

Теперь покажем, что $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ — линейно независимы.

Пусть $\alpha_1\varphi(e_1) + \ldots + \alpha_n\varphi(e_n) = 0$, где $\alpha_i \in F$. Тогда $\varphi(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n) = 0$. Применим φ^{-1}: $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = \varphi^{-1}(0) = 0$. Так как $e_1, \ldots, e_n$ — базис V, то $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Доказательство теоремы.

$\Leftarrow$ Пусть $\dim V = \dim W = n$. Тогда $V \simeq F^n$, $W \simeq F^n$ (по лемме 1), а следовательно $V \simeq W$.

$\Rightarrow$ Пусть $V \simeq W$ и $\dim V = n$. Пусть $\varphi : V \simeq W$ — изоморфизм. $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис V.

Тогда $\varphi(e_1), \ldots \varphi(e_n)$ — базис W (по лемме 2), а следовательно $\dim W = n = \dim V$.

6. Существование и единственность линейного отображения с заданными образами базисных векторов. Связь между координатами вектора и его образа при линейном отображении. Формула изменения матрицы линейного отображения при замене базисов.

Пусть V, W — векторные пространства. $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис V. $\varphi : V \to W$ — линейное отображение.

Предложение 1. φ однозначно определено векторами $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$.

Доказательство. $v \in V \Longrightarrow v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, где $x_i \in F$.

Тогда $\varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \ldots + x_n \varphi(e_n)$.

Предложение 2. Для любого набора $w_1, \ldots, w_n \in W$ существует единственное линейное отображение $\varphi : V \to W$, такое что $\varphi(e_1) = w_1, \ldots, \varphi(e_n) = w_n$.

Доказательство. $v \in V$, $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$.

Положим $\varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1 w_1 + \ldots + x_n w_n$. Тогда легко убедиться, что φ линейно (прямая проверка), а единственность следует из пункта 1.

Предложение 3. Если $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ и $\varphi(v) = y_1 w_1 + \ldots + y_n w_n$, то

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Доказательство.

С одной стороны:

$$\varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \ldots + x_n \varphi(e_n) =$$
$$= (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (w_1, \ldots, w_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

С другой стороны:

$$\varphi(v) = (w_1, \ldots, w_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Так как $w_1, \ldots, w_n$ — линейно независимы, то $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Предложение. Пусть V и W — векторные пространства, $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ и $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ — базисы V, $\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ и $\mathbb{f}' = (f'_1, \ldots, f'_m)$— базисы W, A — матрица линейного отображения $\varphi : V \to W$ по отношению к $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$, A' — матрица линейного отображения по отношению к базисам $\mathbb{e}'$ и $\mathbb{f}'$. $\mathbb{e}' = \mathbb{e}C$, $\mathbb{f}' = \mathbb{f}D$. Тогда

$$A' = D^{-1}AC \ (A = DA'C^{-1})$$

Доказательство.

$$(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)C \Rightarrow \underbrace{(\varphi(e'_1), \ldots, \varphi(e'_n))}_{(f'_1,\ldots,f'_m)A' = (f_1,\ldots,f_m)DA^{-1}} =$$
$$= \underbrace{(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))}_{(f_1,\ldots,f_m)A} C = (f_1, \ldots, f_m)AC \Rightarrow$$
$$\Rightarrow DA' = AC \Rightarrow A' = D^{-1}AC.$$

7. Установите изоморфизм между пространствами $\mathrm{Hom}(V, W)$ и $\mathrm{Mat}_{m\times n}$, где V и W — векторные пространства размерностей n и m соответственно

Теорема. При фиксированных базисах $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$ отображение $\mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$: $\varphi \to A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$ является изоморфизмом векторных пространств V и W.

Рассмотрим две вещи:

Утверждение. $\mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Mat}_{m\times n}(F) : \varphi \mapsto A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$ является биекцией.

Вывод. Задать линейное отображение $V \to W$ — то же самое, что выбрать базис $\mathbb{e}$ в V, базис $\mathbb{f}$ в W и задать матрицу $(m \times n)$, где $n = \dim V$, $m = \dim W$.

Наглядный пример. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (x, y)$.

$\mathbb{e} = (e_1, e_2, e_3)$, $\mathbb{f} = (f_1, f_2)$. Тогда
$$\varphi(e_1) = e_1$$
$$\varphi(e_2) = e_2$$
$$\varphi(e_3) = 0$$

Следовательно, $A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Предложение. Положим
$$\begin{aligned} &\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n) \text{ — базис } V \\ &\mathbb{f} = (f_1, \dots, f_n)\text{— базис } W \\ &A_\varphi = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) \\ &A_\psi = A(\psi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) \\ &A_{\varphi+\psi} = A(\varphi+\psi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) \\ &A_{\lambda\varphi} = A(\lambda\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) \end{aligned}$$

1. $A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$:
   С одной стороны: $((\varphi+\psi)e_1, \dots, (\varphi+\psi)e_n) = (f_1, \dots, f_m)A_{\varphi+\psi}$.
   С другой стороны:
$$\begin{gathered} ((\varphi+\psi)e_1, \dots, (\varphi+\psi)e_n) = (\varphi(e_1)+\psi(e_1), \dots, \varphi(e_n)+\psi(e_n)) = \\ = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) + (\psi(e_1), \dots, \psi(e_n)) = \\ = (f_1, \dots, f_m)A_\varphi + (f_1, \dots, f_m)A_\psi = (f_1, \dots, f_m)(A_\varphi + A_\psi) \Rightarrow \\ \Rightarrow A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi. \end{gathered}$$

2. $A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi$
   С одной стороны: $((\varphi)e_1, \dots, (\varphi)e_n) = (f_1, \dots, f_m)A_\varphi$.
   С другой стороны:
$$\begin{gathered} ((\varphi)\lambda e_1, \dots, (\varphi)\lambda e_n) = (\varphi(\lambda e_1), \dots, \varphi(\lambda e_n)) = (\lambda\varphi(e_1), \dots, \lambda\varphi(e_n)) = \\ = \lambda(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = \lambda(f_1, \dots, f_m)A_\varphi \Rightarrow \\ \Rightarrow A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi. \end{gathered}$$

Таким образом, очевидно, что так как отображение биективно и линейно, то оно является изоморфизмом.

8. Докажите, что ядро и образ линейного отображения являются подпространствами в соответствующих векторных пространствах. Сформулируйте и докажите критерий инъективности линейного отображения в терминах его ядра

Предложение 1. $\mathrm{Ker}\varphi$ — подпространство в V.

Доказательство. Проверим по определению.

1. $0_v \in \mathrm{Ker}\varphi$, так как $\varphi(0_v) = 0_w$.
2. $v_1,\, v_2 \in \mathrm{Ker}\varphi \Longrightarrow \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = 0_w + 0_w = 0_w \Longrightarrow v_1 + v_2 \in \mathrm{Ker}\varphi$.
3. $v \in \mathrm{Ker}\varphi,\, \lambda \in F \Longrightarrow \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v) = \lambda 0 = 0 \Longrightarrow \lambda v \in \mathrm{Ket}\varphi$.

Предложение 2. $\mathrm{Im}\varphi$ — подпространство в W.

Доказательство. Проверим по определению.

1. $0_w = \varphi(0_v) \Longrightarrow 0_w \in \mathrm{Im}\varphi$.
2. $w_1,\, w_2 \in \mathrm{Im}\varphi \Longrightarrow \exists v_1,\, v_2 \in V : w_1 = \varphi(v_1),\, w_2 = \varphi(v_2) \Longrightarrow w_1 + w_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2) \Longrightarrow w_1 + w_2 \in \mathrm{Im}\varphi$.
3. $w \in \mathrm{Im}\varphi, \lambda \in F \Longrightarrow \exists v \in V : \varphi(v) = w \Longrightarrow \lambda w = \lambda\varphi(v) = \varphi(\lambda v) \Longrightarrow \lambda w \in \mathrm{Im}\varphi$.

Таким образом, все условия подпространства выполнены.

Предложение. Отображение φ инъективно тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$.

Доказательство.

$\Rightarrow$ Очевидно, так как если $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$, то это значит, что все векторы переходят в W.

$\Leftarrow$ Пусть $v_1,\, v_2 \in V$ таковы, что $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$.

Тогда $\varphi(v_1 - v_2) = 0 \Longrightarrow v_1 - v_2 \in \mathrm{Ker}\varphi \Longrightarrow v_1 - v_2 = 0 \Longleftrightarrow v_1 = v_2$.

9. Связь между рангом матрицы линейного отображения и размерностью его образа

Для начала докажем одну лемму.

Лемма. $U \subseteq V$ — подпространство и $(e_1, \ldots, e_k$ — его базис. Тогда $\varphi(U) = \langle\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k)\rangle$ — подпространство. В частности, $\dim\varphi(U) \leqslant \dim U$.

Доказательство. $u \in U \Longrightarrow u = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k \Longrightarrow \varphi(u) = \varphi(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k) = \lambda_1\varphi(e_1) + \ldots + \lambda_k e\varphi(e_k) \in \langle\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k)\rangle$.

Пусть V, W — векторные пространства, $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V, $\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис W, $A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$ — матрица линейного отображения φ по отношению к $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$.

Теорема. $\dim\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{rk}A$

Доказательство. Воспользуемся леммой, доказанной выше: $\mathrm{Im}\varphi = \langle\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\rangle$.

Координаты вектора $\varphi(e_i)$ находятся в столбце $A^{(i)} \Longrightarrow \lambda_1\varphi(e_1) + \ldots + \lambda_n\varphi(e_n) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 A^{(1)} + \ldots + \lambda_n A^{(n)} = 0 \Longrightarrow \mathrm{rk}\{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\} = \mathrm{rk}A$.

$\dim\langle\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k)\rangle = \dim\mathrm{Im}\varphi$.

10. Оценки на ранг произведения двух матриц

Теорема. Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{k\times m}$, $B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$. Тогда $\mathrm{rk}AB \leqslant \min(\mathrm{rk}A, \mathrm{rk}B)$.

Доказательство. Реализуем A и B как матрицы линейных отображений, то есть $\varphi_A : F^m \to F^k$, $\varphi_B : F^n \to F^m$. Тогда AB будет матрицей отображения $\varphi_A \circ \varphi_B$.

$$\mathrm{rk}(AB) = \mathrm{rk}(\varphi_A \circ \varphi_B) = \begin{cases} \leqslant \mathrm{Im}\varphi_A = \mathrm{rk}A \\ \leqslant \mathrm{Im}\varphi_B = \mathrm{rk}B \end{cases}$$

Первое неравенство следует из того, что $\mathrm{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) \subset \mathrm{Im}\varphi_A$, откуда, в свою очередь следует, что $\dim \mathrm{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) \leqslant \dim \mathrm{Im}\varphi_A$.

Рассматривая второе неравенство, получим:

$$\mathrm{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) = \varphi_A(\mathrm{Im}\varphi_B) \Longrightarrow \dim \mathrm{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) = \dim(\varphi_A(\mathrm{Im}\varphi_B)) \leqslant \dim \mathrm{Im}\varphi_B.$$