Линейная алгебра.
Коллоквиум 2 семестр.
Основано на реальных событиях.
v0.4

26 мая 2017

Ченжлоги

v0.0 (20.05.2017) — *исходное: добавлены 1–10 вопросы (спасибо Соне, Даше, Лизе, Наташе, Алёне)*
v0.1 (21.05.2017) — *поправил 1, 2, 6 (спасибо Борису, Соне, Александру Г. (Ц.))*
v0.2 (22.05.2017) — *добавил 11–15. Поправил 2, 7 (спасибо Александру Г. (Ц.), Борису, Наташе)*
v0.3 (23.05.2017) — *поправил 2 ($2 \Rightarrow 3$ и $3 \Rightarrow 4$), дополнил 3, (спасибо Наташе, Глебу, Соне), добавил 16–20*
v0.4 (24.05.2017) — *поправил 2, 3, 4, 6, 8 (спасибо Соне, Боре, Глебу), добавил 21–30*

Доказательства

1. Теорема о связи размерности суммы двух подпространств с размерностью их пересечения

Теорема. $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W)$
Доказательство. Пусть $p = \dim(U \cap W)$, $k = \dim U$, $m = \dim W$. Выберем базис $a = \{a_1, \ldots, a_p\}$ в пересечении. Его можно дополнить до базиса U и до базиса W. Значит, $\exists b = \{b_1, \ldots, b_{k-p}\}$ такой, что $a \cup b$ — базис в U и $\exists c = \{c_1, \ldots, c_{m-p}\}$ такой, что $a \cup c$ — базис в W.

Докажем, что $a \cup b \cup c$ — базис в $U + W$.

1. Докажем, что $U + W$ порождается множеством $a \cup b \cup c$.
$$\left.\begin{array}{l} v \in U + W \Rightarrow \exists u \in U,\, w \in W : v = u + w \\ u \in U = \langle a \cup b \rangle \subset \langle a \cup b \cup c \rangle \\ w \in W = \langle a \cup c \rangle \subset \langle a \cup b \cup c \rangle \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} v = u + w \in \langle a \cup b \cup c \rangle \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow U + W = \langle a \cup b \cup c \rangle \end{array}$$

2. Докажем линейную независимость векторов из $a \cup b \cup c$.
Пусть скаляры $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_{k-p}, \gamma_1, \ldots, \gamma_{m-p}$ таковы, что
$$\underbrace{\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_p a_p}_{x} + \underbrace{\beta_1 b_1 + \ldots + \beta_{k-p} b_{k-p}}_{y} + \underbrace{\gamma_1 c_1 + \ldots + \gamma_{m-p} c_{m-p}}_{z} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ z=-x-y \\ z\in W \\ -x-y\in U\cap W \end{array}\right| \Rightarrow \exists \lambda_1,\ldots,\lambda_p\in F : z=\lambda_1 a_1+\ldots+\lambda_p a_p$$

Тогда $\lambda_1 a_1+\ldots+\lambda_p a_p-\gamma_1 c_1-\ldots-\gamma_{m-p}c_{m-p}=0$. Но $a\cup c$ — базис W. Следовательно, $\lambda_1=\ldots=\lambda_p=\gamma_1=\ldots=\gamma_{m-p}=0$. Но тогда $0=x+y=\alpha_1 a_1+\ldots+\alpha_p a_p+\beta_1 b_1+\ldots+\beta_{k-p}b_{k-p}$. Но $a\cup b$ — базис $U \Rightarrow \alpha_1=\ldots=\alpha_p=\beta_1=\ldots=\beta_{k-p}=0$. Итого, все коэффициенты равны нулю и линейная независимость тем самым доказана. Т.е. $a\cup b\cup c$ — базис $U+W$.

$$\dim(U+W)=|a\cup b\cup c|=|a|+|b|+|c|=p+k-p+m-p=k+m-p= \\ =\dim U+\dim W-\dim(U\cap W).$$

2. Теорема о пяти эквивалентных условиях, определяющих набор линейно независимых подпространств векторного пространства

Теорема. Следующие 5 условий эквивалентны:

1. Если $u_1+\ldots+u_k=0\Rightarrow u_1=\ldots=u_k=0$ ($U_1,\ldots,U_k$ — линейно независимы)
2. Любой u единственным образом представим в виде $u=u_1+\ldots+u_k$, где $u_i\in U_i$
3. Если $\mathbb{e}_i$ — базис в U_i, то $\mathbb{e}_1\cup\ldots\cup\mathbb{e}_k$ — базис $U_1+\ldots+U_k$
4. $\dim(U_1+\ldots+U_k)=\dim U_1+\ldots+\dim U_k$
5. $U_i\cap(U_1+\ldots+U_{i-1}+U_{i+1}+\ldots+U_k)=\{0\}$

Доказательство.

$1\Rightarrow 2$ Пусть $u_1+\ldots+u_k=u_1'+\ldots+u_k'$, где $u_i,\ u_i'\in U_i$. Тогда

$$\underbrace{(u_1-u_1')}_{\in U_1}+\ldots+\underbrace{(u_k-u_k')}_{\in U_k}=\vec{0}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (u_1-u_1')=\ldots=(u_k-u_k')=\vec{0}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow u_1=u_1',\ldots,u_k=u_k'.$$

$2\Rightarrow 3$ Пусть $u\in U_1+\ldots+U_k$. Тогда u единственно представим в виде $u=u_1+\ldots+u_k$, где $u_i\in U_i$.

Каждый u единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов из $\mathbb{e}_1\cup\ldots\cup\mathbb{e}_k$ (так как каждый u_i представляется в базисе $\mathbb{e}_i$) $\Longrightarrow \mathbb{e}_1\cup\ldots\cup\mathbb{e}_k$ — базис.

$3\Rightarrow 4$ Пусть $\mathbb{e}_1\cup\ldots\cup\mathbb{e}_k$ — базис $U_1+\ldots+U_k$ и пусть наш базис — мультимножество (т.е. одинаковые векторы могут учитываться по нескольку раз). Тогда

$$\dim(U_1+\ldots+U_k)=|e_1^1+\ldots+e_{s_1}^1+\ldots+e_1^k+\ldots+e_{s_k}^k|= \\ =|e_1^1+\ldots+e_{s_1}^1|+\ldots+|e_1^k+\ldots+e_{s_k}^k|=\dim U_1+\ldots+\dim U_k.$$

$4\Rightarrow 5$ Пусть для краткости $\overline{U_i}=U_1+\ldots+U_{i-1}+U_{i+1}+\ldots+U_k$. Тогда

$$\dim(U_i\cap\overline{U_i})=\dim U_i+\dim\overline{U_i}-\dim\underbrace{(U_i+\overline{U_i})}_{U_1+\ldots+U_k}\leqslant$$

$$\leqslant\dim U_i+\dim U_1+\ldots+\dim U_{i-1}+\dim U_{i+1}+\ldots+\dim U_k-\dim U_1-\ldots-\dim U_k.$$

Итак, $\dim(U_i\cap\overline{U_i})\leqslant 0\Longrightarrow\dim(U_i\cap\overline{U_i})=0\Longrightarrow U_i\cap\overline{U_i}=\{\vec{0}\}$.

$5\Rightarrow 1$ Пусть $\vec{0}=u_1+\ldots+u_k$, где $u_i\in U_i$. Тогда для любого i имеем

$$u_i=-u_1-\ldots-u_{i-1}-u_{i+1}-\ldots-u_k\Rightarrow$$
$$\Rightarrow u_i\in U_i\cap\overline{U_i}=\{\vec{0}\}\Rightarrow u_i=\vec{0}.$$

3. Описание всех базисов n-мерного векторного пространства в терминах одного базиса и матриц координат. Формула преобразования координат вектора при замене базиса векторного пространства

Пусть V — векторное пространство, $\dim V = n$, $e_1, \dots, e_n$ — базис. То есть

$$\forall v \in V: \ \exists! \ v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n,$$

где $x_1, \dots, x_n \in F$ — координаты вектора v в базисе $(e_1, \dots, e_n)$. Пусть также есть базис $e'_1, \dots, e'_n$:

$$\begin{aligned} e'_1 &= c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \ldots + c_{n1}e_n \\ e'_2 &= c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + \ldots + c_{n2}e_n \\ &\vdots \\ e'_n &= c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \ldots + c_{nn}e_n \end{aligned}$$

Обозначим матрицу $C = (c_{ij})$. Тогда можно переписать $(e'_1, \dots, e'_n)$ как $(e_1, \dots, e_n) \cdot C$.

Предложение. $e'_1, \dots, e'_n$ образуют базис тогда и только тогда, когда $\det C \neq 0$.
Доказательство.
$\Rightarrow$ $e'_1, \dots, e'_n$ — базис, а значит $\exists C' \in \mathrm{M}_n$:

$$\begin{gathered} (e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_n)C' = (e_1, \dots, e_n)CC' \\ E = CC' \\ C' = C^{-1} \Longleftrightarrow \exists C^{-1} \Longleftrightarrow \det C \neq 0 \end{gathered}$$

$\Leftarrow$ $\det C \neq 0 \Rightarrow \exists C^{-1}$. Покажем, что $e'_1, \dots, e'_n$ в таком случае линейно независимы. Пусть $\lambda_1 e'_1 + \ldots + \lambda_n e'_n = 0$. Тогда можно записать

$$(e'_1, \dots, e'_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (e_1, \dots, e_n)C\begin{pmatrix}\lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix} = 0$$

Так как $(e_1, \dots, e_n)$ — базис, то $C\begin{pmatrix}\lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix} = 0$. Умножая слева на обратную матрицу получаем $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Предложение. Формула преобразований координат вектора при переходе к новому базису:

$$\begin{pmatrix}x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = C\begin{pmatrix}x'_1 \\ \vdots \\ x'_n\end{pmatrix}.$$

Доказательство.

С одной стороны: $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = (e_1, \dots, e_n)\begin{pmatrix}x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$.

С другой стороны: $v = x'_1 e'_1 + \ldots + x'_n e'_n = (e'_1, \dots, e'_n)\begin{pmatrix}x'_1 \\ \vdots \\ x'_n\end{pmatrix} = (e_1, \dots, e_n)C\begin{pmatrix}x'_1 \\ \vdots \\ x'_n\end{pmatrix}$

Так как $e_1, \dots, e_n$ — линейно независимы, то $\begin{pmatrix}x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = C\begin{pmatrix}x'_1 \\ \vdots \\ x'_n\end{pmatrix}$

4. Докажите, что отношение изоморфности на множестве всех векторных пространств является отношением эквивалентности

Теорема. "Изоморфность" — отношение эквивалентности на множестве всех векторных пространств над фиксированным полем F.

Доказательство.

I. *Рефлексивность.* $\varphi : V \to V$ — изоморфизм.
$\mathrm{Id} : V \simeq V$

II. *Симметричность.* $\varphi : V \to W$ — изоморфизм $\Longrightarrow \varphi^{-1} : W \to V$ — тоже изоморфизм.
Т.к. отображение φ^{-1} также биективно, то осталось проверить, что оно линейно.
Пусть $w_1, w_2 \in W$. Тогда $\exists v_1, v_2 \in V$, такие что

$$w_1 = \varphi(v_1),\ w_2 = \varphi(v_2) \Rightarrow v_1 = \varphi^{-1}(w_1),\ v_2 = \varphi^{-1}(w_2).$$

Теперь $\varphi^{-1}(w_1 + w_2) = \varphi^{-1}(\varphi(v_1) + \varphi(v_2)) = \varphi^{-1}(\varphi(v_1 + v_2)) = v_1 + v_2 = \varphi^{-1}(w_1) + \varphi^{-1}(w_2)$.
$\varphi^{-1}(\alpha w) = \varphi^{-1}(\alpha\varphi(v)) = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha v)) = \alpha v = \alpha\varphi^{-1}(w)$.

III. *Транзитивность.* $\psi \circ \varphi : U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W$. Если φ и ψ — изоморфизм, то $\psi \circ \varphi$ — тоже изоморфизм.
Докажем, что если φ и ψ — линейны, то $\psi \circ \varphi$ — тоже линейна.

$$(\psi \circ \varphi)(v_1 + v_2) = \psi(\varphi(v_1 + v_2)) = \psi(\varphi(v_1) + \varphi(v_2)) =$$
$$= \psi(\varphi(v_1)) + \psi(\varphi(v_2)) = (\psi \circ \varphi)(v_1) + (\psi \circ \varphi)(v_2).$$
$$(\psi \circ \varphi)(\alpha v) = \psi(\varphi(\alpha v)) = \psi(\alpha\varphi(v)) =$$
$$= \alpha\psi(\varphi(v)) = \alpha(\psi \circ \varphi)(v).$$

Тогда очевидно, что транзитивность следует из линейности, так как композиция двух биективных отображений также биективна.

5. Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств

Теорема. V, W — конечномерные векторные пространства $\Longrightarrow V \simeq W \Longleftrightarrow \dim V = \dim W$. Докажем две леммы.

Лемма 1. $\dim V = n \Rightarrow V \simeq F^n$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varphi : V \to F^n$. Выберем базис $(e_1, \ldots, e_n)$ в V. Тогда

$$x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \ x_i \in F.$$

Отображение является изоморфизмом (т.к. линейно и биективно), а следовательно $V \simeq F^n$.

Лемма 2. Пусть $\varphi : V \simeq W$ — изоморфизм. $e_1, \ldots, e_n$ — базис V. Тогда $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ — базис W.

Доказательство. Пусть $w \in W$, тогда существует $v \in V : w = \varphi(v)$. Положим $v = \varphi^{-1}(w)$. Тогда

$$\Rightarrow v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n,\ \ x_i \in F$$
$$\Rightarrow w = \varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1\varphi(e_1) + \ldots + x_n\varphi(e_n)$$
$$\Rightarrow W = \langle \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n) \rangle$$

Теперь покажем, что $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ — линейно независимы.

Пусть $\alpha_1\varphi(e_1) + \ldots + \alpha_n\varphi(e_n) = 0$, где $\alpha_i \in F$. Тогда $\varphi(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n) = 0$. Применим φ^{-1}: $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = \varphi^{-1}(0) = 0$. Так как $e_1, \ldots, e_n$ — базис V, то $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Доказательство теоремы.

$\Leftarrow$ Пусть $\dim V = \dim W = n$. Тогда $V \simeq F^n$, $W \simeq F^n$ (по лемме 1), а следовательно $V \simeq W$.

$\Rightarrow$ Пусть $V \simeq W$ и $\dim V = n$. Пусть $\varphi : V \simeq W$ — изоморфизм. $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис V.

Тогда $\varphi(e_1), \ldots \varphi(e_n)$ — базис W (по лемме 2), а следовательно $\dim W = n = \dim V$.

6. Существование и единственность линейного отображения с заданными образами базисных векторов. Связь между координатами вектора и его образа при линейном отображении. Формула изменения матрицы линейного отображения при замене базисов.

Пусть V, W — векторные пространства. $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис V. $\varphi : V \to W$ — линейное отображение.

Предложение 1. φ однозначно определено векторами $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$.

Доказательство. $v \in V \Longrightarrow v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, где $x_i \in F$.

Тогда $\varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1\varphi(e_1) + \ldots + x_n\varphi(e_n)$.

Предложение 2. Для любого набора $f_1, \ldots, f_n \in W$ существует единственное линейное отображение $\varphi : V \to f$, такое что $(\varphi(e_1) = f_1), \ldots, (\varphi(e_n) = f_n)$.

Доказательство. $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$.

Положим $\varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n$. Тогда легко убедиться, что φ линейно (прямая проверка), а единственность следует из пункта 1.

Предложение 3. Если $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ и $\varphi(v) = y_1 f_1 + \ldots + y_m f_m$, то

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Доказательство.

С одной стороны:

$$\varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1\varphi(e_1) + \ldots + x_n\varphi(e_n) =$$
$$= (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (f_1, \ldots, f_m) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

С другой стороны:

$$\varphi(v) = (f_1, \ldots, f_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Так как $f_1, \ldots, f_m$ — линейно независимы, то $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$.

Предложение. Пусть V и W — векторные пространства, $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ и $\mathbb{e}' = (e_1', \ldots, e_n')$ — базисы V, $\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ и $\mathbb{f}' = (f_1', \ldots, f_m')$— базисы W, A — матрица линейного отображения $\varphi : V \to W$ по отношению к $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$, A' — матрица линейного отображения по отношению к базисам $\mathbb{e}'$ и $\mathbb{f}'$. $\mathbb{e}' = \mathbb{e}C$, $\mathbb{f}' = \mathbb{f}D$. Тогда

$$A' = D^{-1}AC \ (A = DA'C^{-1})$$

Доказательство.

$$(e_1', \ldots, e_n') = (e_1, \ldots, e_n)C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\varphi(e_1'), \ldots, \varphi(e_n'))}_{(f_1', \ldots, f_m')A' = (f_1, \ldots, f_m)DA'} = \underbrace{(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))}_{(f_1, \ldots, f_m)A} C = (f_1, \ldots, f_m)AC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DA' = AC \Rightarrow A' = D^{-1}AC.$$

7. Установите изоморфизм между пространствами $\mathrm{Hom}(V, W)$ и $\mathrm{Mat}_{m\times n}$, где V и W — векторные пространства размерностей n и m соответственно

Теорема. При фиксированных базисах $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$ отображение $\mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Mat}_{m\times n}(F) : \varphi \to A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$ является изоморфизмом векторных пространств V и W.

Рассмотрим две вещи:

Утверждение. $\mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Mat}_{m\times n}(F) : \varphi \mapsto A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$ является биекцией.

Вывод. Задать линейное отображение $V \to W$ — то же самое, что выбрать базис $\mathbb{e}$ в V, базис $\mathbb{f}$ в W и задать матрицу $(m \times n)$, где $n = \dim V$, $m = \dim W$.

Наглядный пример. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (x, y)$.

$\mathbb{e} = (e_1, e_2, e_3)$, $\mathbb{f} = (f_1, f_2)$. Тогда

$$\varphi(e_1) = f_1$$
$$\varphi(e_2) = f_2$$
$$\varphi(e_3) = 0$$

Следовательно, $A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Предложение. Положим

$$\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n) \text{ — базис } V$$
$$\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)\text{— базис } W$$
$$A_\varphi = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$$
$$A_\psi = A(\psi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$$
$$A_{\varphi+\psi} = A(\varphi + \psi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$$
$$A_{\lambda\varphi} = A(\lambda\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$$

1. $A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$:
   С одной стороны: $((\varphi + \psi)e_1, \ldots, (\varphi + \psi)e_n) = (f_1, \ldots, f_m)A_{\varphi+\psi}$.
   С другой стороны:
   $$((\varphi + \psi)e_1, \ldots, (\varphi + \psi)e_n) = (\varphi(e_1) + \psi(e_1), \ldots, \varphi(e_n) + \psi(e_n)) =$$
   $$= (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) + (\psi(e_1), \ldots, \psi(e_n)) =$$
   $$= (f_1, \ldots, f_m)A_\varphi + (f_1, \ldots, f_m)A_\psi = (f_1, \ldots, f_m)(A_\varphi + A_\psi) \Rightarrow$$
   $$\Rightarrow A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi.$$
2. $A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi$
   С одной стороны: $((\lambda\varphi)e_1, \ldots, (\lambda\varphi)e_n) = (f_1, \ldots, f_m)A_{\lambda\varphi}$.
   С другой стороны:
   $$((\lambda\varphi)e_1, \ldots, (\lambda\varphi)e_n) = (\lambda\varphi(e_1), \ldots, \lambda\varphi(e_n)) = \lambda(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) =$$
   $$= \lambda(f_1, \ldots, f_m)A_\varphi = (f_1, \ldots, f_m)\lambda A_\varphi \Rightarrow$$
   $$\Rightarrow A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi.$$

Таким образом, очевидно, что так как отображение биективно и линейно, то оно является изоморфизмом.

8. Докажите, что ядро и образ линейного отображения являются подпространствами в соответствующих векторных пространствах. Сформулируйте и докажите критерий инъективности линейного отображения в терминах его ядра

Предложение 1. $\mathrm{Ker}\varphi$ — подпространство в V.
Доказательство. Проверим по определению.

1. $0_v \in \mathrm{Ker}\varphi$, так как $\varphi(0_v) = 0_w$.
2. $v_1, v_2 \in \mathrm{Ker}\varphi \Longrightarrow \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = 0_w + 0_w = 0_w \Longrightarrow v_1 + v_2 \in \mathrm{Ker}\varphi$.
3. $v \in \mathrm{Ker}\varphi$, $\lambda \in F \Longrightarrow \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v) = \lambda 0 = 0 \Longrightarrow \lambda v \in \mathrm{Ket}\varphi$.

Предложение 2. $\mathrm{Im}\varphi$ — подпространство в W.
Доказательство. Проверим по определению.

1. $0_w = \varphi(0_v) \Longrightarrow 0_w \in \mathrm{Im}\varphi$.
2. $w_1, w_2 \in \mathrm{Im}\varphi \Longrightarrow \exists v_1, v_2 \in V : w_1 = \varphi(v_1), w_2 = \varphi(v_2) \Longrightarrow w_1 + w_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2) \Longrightarrow w_1 + w_2 \in \mathrm{Im}\varphi$.
3. $w \in \mathrm{Im}\varphi, \lambda \in F \Longrightarrow \exists v \in V : \varphi(v) = w \Longrightarrow \lambda w = \lambda\varphi(v) = \varphi(\lambda v) \Longrightarrow \lambda w \in \mathrm{Im}\varphi$.

Таким образом, все условия подпространства выполнены.

Предложение. Отображение φ инъективно тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$.
Доказательство.
$\Rightarrow$ Очевидно, так как если $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$, то это значит, что у 0 существует единственный прообраз.
$\Leftarrow$ Пусть $v_1, v_2 \in V$ таковы, что $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$.
Тогда $\varphi(v_1 - v_2) = 0 \Longrightarrow v_1 - v_2 \in \mathrm{Ker}\varphi \Longrightarrow v_1 - v_2 = 0 \Longleftrightarrow v_1 = v_2$.

9. Связь между рангом матрицы линейного отображения и размерностью его образа

Для начала докажем одну лемму.
Лемма. $U \subseteq V$ — подпространство и $(e_1, \ldots, e_k)$ — его базис. Тогда $\varphi(U) = \langle\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k)\rangle$ — подпространство. В частности, $\dim\varphi(U) \leqslant \dim U$.
Доказательство. $u \in U \Longrightarrow u = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k \Longrightarrow \varphi(u) = \varphi(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k) = \lambda_1\varphi(e_1) + \ldots + \lambda_k e\varphi(e_k) \in \langle\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k)\rangle$.

Пусть V, W — векторные пространства, $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V, $\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис W, $A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$ — матрица линейного отображения φ по отношению к $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$.
Теорема. $\dim \mathrm{Im}\varphi = \mathrm{rk}A$
Доказательство. Воспользуемся леммой, доказанной выше: $\mathrm{Im}\varphi = \langle\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\rangle$.
Координаты вектора $\varphi(e_i)$ находятся в столбце $A^{(i)} \Longrightarrow \lambda_1\varphi(e_1) + \ldots + \lambda_n\varphi(e_n) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 A^{(1)} + \ldots + \lambda_n A^{(n)} = 0 \Longrightarrow \mathrm{rk}\{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\} = \mathrm{rk}A$.
$\dim\langle\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k)\rangle = \dim \mathrm{Im}\varphi$.

10. Оценки на ранг произведения двух матриц

Теорема. Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{k\times m}$, $B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$. Тогда $\mathrm{rk}AB \leqslant \min(\mathrm{rk}A, \mathrm{rk}B)$.

Доказательство. Реализуем A и B как матрицы линейных отображений, то есть $\varphi_A : F^m \to F^k,\ \ \varphi_B : F^n \to F^m$. Тогда AB будет матрицей отображения $\varphi_A \circ \varphi_B$.

$$\mathrm{rk}(AB) = \mathrm{rk}(\varphi_A \circ \varphi_B) = \begin{cases} \leqslant \mathrm{Im}\varphi_A = \mathrm{rk}A \\ \leqslant \mathrm{Im}\varphi_B = \mathrm{rk}B \end{cases}$$

Первое неравенство следует из того, что $\mathrm{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) \subset \mathrm{Im}\varphi_A$, откуда, в свою очередь следует, что $\dim \mathrm{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) \leqslant \dim \mathrm{Im}\varphi_A$.

Рассматривая второе неравенство, получим:

$$\mathrm{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) = \varphi_A(\mathrm{Im}\varphi_B) \Longrightarrow \dim \mathrm{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) = \dim(\varphi_A(\mathrm{Im}\varphi_B)) \leqslant \dim \mathrm{Im}\varphi_B.$$

11. Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения

Для начала докажем предложение.

Предложение. Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V такой, что $(e_1, \ldots, e_k)$ — базис $\mathrm{Ker}\varphi$, а $(\varphi(e_{k+1}, \ldots, \varphi(e_n)))$ — базис $\mathrm{Im}\varphi$.

Замечание. Базис с указанным свойством существует всегда, так как его можно получить путём дополнения базиса $\mathrm{Ker}\varphi$ до базиса всего пространства V.

Доказательство. Дополним базис $(e_1, \ldots, e_k)$ до базиса V векторами $e_{k+1}, \ldots, e_n$. Тогда:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\varphi = \langle \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k), \ldots \varphi(e_n) \rangle = \\ = \langle 0, \ldots, 0, \varphi(e_{k+1}), \ldots + \varphi(e_n) \rangle = \\ = \langle \varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n) \rangle. \end{aligned}$$

$\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)$ — линейно независимы. Тогда пусть $\alpha_{k+1}\varphi(e_{k+1}) + \ldots + \alpha_n\varphi(e_n) = 0$, где $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n \in F$. Тогда:

$$\varphi(\alpha_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n \in \mathrm{Ker}\varphi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n = \beta_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \beta_n e_n, \text{ где } \beta_{k+1}, \ldots, \beta_n \in F.$$

Но так как $e_1,\ \ldots, e_n$ — базис V, то $\alpha_{k+1} = \ldots = \alpha_n = \beta_{k+1} = \ldots = \beta_n = 0$. То есть векторы $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ — линейно независимы, а значит они образуют базис $\mathrm{Im}\varphi$.

Теорема. $\dim \mathrm{Im}\varphi = \dim V - \dim \mathrm{Ker}\varphi$.

Доказательство. Выберем базис в V такой же, как в предположении.

Тогда $\dim \mathrm{Im}\varphi = n - k = \dim V - \dim \mathrm{Ker}\varphi$.

12. Приведение матрицы линейного отображения к диагональному виду с единицами и нулями на диагонали

Пусть $\varphi : V \to W$ — линейное отображение. $\mathbb{e}$ — базис V, $\mathbb{f}$ — базис W.

$A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$, $\mathrm{rk}A = r$.

Утверждение. Существуют базис $\mathbb{e}'$ в V и базис $\mathbb{f}'$ в W такие, что $A(\varphi, \mathbb{e}', \mathbb{f}')$ имеет вид:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right), \mathrm{rk}A' = r$$

Эквивалентное утверждение. Существуют невырожденные матрицы $C \in \mathrm{M}_n$, $D \in \mathrm{M}_m$, такие что $A' = D^{-1}AC \iff A = DA'C^{-1}$.

Доказательство. Реализуем A как матрицу линейного отображения $\varphi : F^n \to F^m$ в стандартных базисах.

Тогда существует базис $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ такой, что $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ — базис $\mathrm{Ker}\varphi$, а $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_r)$ — базис $\mathrm{Im}\varphi$.

Пусть $\mathbb{f}$ — базис F^m, дополняющий систему $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_r)$. Тогда $A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = A'$.

Результат следует из теоремы о замене базисов.

13. Докажите, что всякий базис сопряженного пространства двойственен к некоторому базису исходного векторного пространства

Предложение. Любой базис $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ пространства V^* двойственен к некоторому базису пространства V.

Доказательство. Возьмём произвольный базис $\mathbb{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ пространства V.

Пусть $\varepsilon' = (\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n)$ двойственный к $\mathbb{e}'$ базис в V^*.

Тогда $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \vdots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix}$ для некоторой невырожденной матрицы $C \in \mathrm{M}_n$.

Положим $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_n)C^{-1}$ — некий (искомый) базис в V^*.

Зная, что $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1, \dots, e_n) = E$, имеем $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1, \dots, e_n) = C \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \vdots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix} (e'_1, \dots, e'_n)C^{-1} = CEC^{-1} = E$.

14. Докажите, что всякое подпространство в F^n является множеством решений некоторой однородной системы линейных уравнений

Теорема. Всякое подпространство F^n есть множество решений некоторой ОСЛУ.

Доказательство. Пусть $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$.

$(a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$ — значение линейной функции $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ на векторе $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Пусть дано подпространство $U \subseteq F^n$. Выберем в нём базис $(v_1, \dots, v_k)$.

Рассмотрим в $(F^n)^*$ подмножество $S := \{\alpha \in (F^n)^* \mid \alpha(v_1) = 0, \dots, \alpha(v_k) = 0\}$. S — подпространство в $(F^n)^*$.

S — множество решений ОСЛУ $\begin{cases} \alpha(v_1) = 0, \\ \vdots \\ \alpha(v_k) = 0 \end{cases}$ на коэффициенты α.

Так как $v_1, \dots, v_k$ линейно независимы, то ранг матрицы коэффициентов равен $k \Longrightarrow \dim S = n - k$.

Выберем в S базис $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k}$ и рассмотрим ОСЛУ $\begin{cases} \alpha_1(x) = 0, \\ \vdots \\ \alpha_{n-k}(x) = 0 \end{cases}$ относительно неизвестного вектора $x \in F^n$.

Пусть $U' \subseteq F^n$ — подпространство решений этой ОСЛУ.

Ранг матрицы коэффициентов равен $n-k$, так как $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k}$ линейно независимы $\Longrightarrow \dim U' = n-(n-k) = k$. Но $U \subseteq U'$ по построению.

Так как $\dim U = k = \dim U'$, то $U = U' \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1(x) = 0, \\ \vdots \\ \alpha_{n-k}(x) = 0 \end{cases}$ — искомая ОСЛУ.

15. Формула для вычисления значений билинейной формы в координатах. Существование и единственность билинейной формы с заданной матрицей. Формула изменения матрицы билинейной формы при переходе к другому базису

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V $(\dim V = n < \infty)$.

Определение. Матрица $B = B(\beta, \mathbb{e})$, где $b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$, называется матрицей билинейной функции β в базисе $\mathbb{e}$.

Пусть $B = B(\beta, \mathbb{e})$, $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V, $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n \in V$, $y = y_1e_1 + \dots + y_ne_n \in V$.

$$\beta(x, y) = \beta(\sum_{i=1}^n x_ie_i, \sum_{j=1}^n y_je_j) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \beta(e_i, \sum_{j=1}^n y_je_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j \cdot \underbrace{\beta(e_i, e_j)}_{b_{ij}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_ib_{ij}y_j =$$

$$= (x_1, \dots, x_n)B \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (*)$$

$(*)$ — формула для вычисления значений б.ф. в координатах.

Пусть $\mathbb{e}$ — произвольный базис V. Тогда:

Предложение 1. Любая билинейная функция однозначно определяется своей матрицей в базисе $\mathbb{e}$.

Доказательство 1. Следует из $(*)$.

Предложение 2. Для любой матрицы $V \in \mathrm{M}_n(F)$ существует единственная билинейная функция β на V, такая что $B(\beta, \mathbb{e}) = B$.

Доказательство 2. *Единственность* следует из 1.

Существование: зададим β по формуле $(*)$. Тогда β — билинейная функция на V и её матрицей является B.

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ и $\mathbb{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ — два базиса V. β — билинейная функция на V. $\mathbb{e}' = \mathbb{e}C$ — матрица перехода. $B = B(\beta, \mathbb{e})$ и $B' = B(\beta, \mathbb{e}')$.

Предложение. $B' = C^TBC$.

Доказательство. Рассмотрим x в обоих базисах.

$$x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n = x'_1e'_1 + \dots + x'_ne'_n$$
$$y = y_1e_1 + \dots + y_ne_n = y'_1e'_1 + \dots + y'_ne'_n$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

$$(x'_1, \dots, x'_n)B' \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = \beta(x,\, y) = (x_1, \dots, x_n)B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\beta(x,\, y) = (x'_1, \dots, x'_n)C^T BC \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

Отсюда следует, что $B' = C^T BC$, так как для любого $p \in \mathrm{Mat}_n$ верно

$$p_{ij} = (0 \dots i \dots 0)p \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

16. Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами

Пусть в поле F выполняется условие $1 + 1 \neq 0$ (т.е. $2 \neq 0$).

Тогда отображение $\beta \mapsto Q_\beta$ является биекцией между симметричными билинейными функциями на V и квадратичными функциями на V.

Доказательство.

Сюръективность. Пусть β — билинейная функция. Рассмотрим ассоциированную с ней квадратичную функцию $Q_\beta(x) = \beta(x,\, x)$. Пусть $\sigma(x,\, y) = \frac{1}{2}(\beta(x,\, y) + \beta(y,\, x))$ — симметричная билинейная функция на V. Тогда:

$$Q_\sigma(x) = \sigma(x,\, x) = \frac{1}{2}(\beta(x,\, x) + \beta(x,\, x)) = \beta(x,\, x) = Q_\beta(x)$$

Инъективность. Пусть $\beta(x, y)$ — симмитричная билинейная функция, $Q_\beta(x) = \beta(x, x)$ — соответствующая ей квадратичная функция.

$$\begin{aligned} Q_\beta(x + y) = \beta(x + y,\, x + y) = \beta(x,\, x) + \beta(x,\, y) + \beta(y,\, x) + \beta(y,\, y) = \\ = Q_\beta(x) + Q_\beta(y) + \underbrace{2\beta(x,\, y)}_{\beta(x,\, y) = \beta(y,\, x)} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \beta(x,\, y) = \frac{1}{2}(Q_\beta(x + y) - Q_\beta(x) - Q_\beta(y)).$$

17. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду

Пусть V — векторное пространство, $\dim V = n$, $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V, $Q : V \to F$ — квадратичная функция на V.

Теорема (метод Лагранжа). Пусть в $F : 1 + 1 \neq 0$. Тогда для всякой квадратичной функции Q существует такой базис, в котором Q имеет канонический вид.

Доказательство.

Оформим *индукцию* по n.

$\underline{n = 1}$: тогда $Q(x) = b_{11}x_1^2$ — канонический вид, очевидно.

Предположим, что для всех $< n$, докажем для n. Пусть в исходном базисе $\mathbb{e}$:

$$Q(x) = Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 2b_{ij}x_ix_j,$$

где $B = (b_{ij})$ — матрица квадратичной функции Q.

Случай 0: $b_{ij} = 0$ для всех i, j. Тогда очевидно.

Случай 1: существует такое i, что $b_{ii} \neq 0$. Перенумеруем переменные так, что $b_{11} \neq 0$:

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + \ldots + 2b_{1n}x_1x_n + Q_1(x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= \frac{1}{b_{11}}(b_{11}^2x_1^2 + 2b_{11}b_{12}x_1x_2 + \ldots + 2b_{11}b_{1n}x_1x_n) + Q_1(x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= \frac{1}{b_{11}}(b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n)^2 \underbrace{- \frac{1}{b_{11}}(b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n)^2 + Q_1(x_2, \ldots, x_n)}_{Q_2(x_2, \ldots, x_n)} =$$
$$= \frac{1}{b_{11}}(b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n)^2 + Q_2(x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= \frac{1}{b_{11}}x_1'^2 + Q_2(x_2', \ldots, x_n'),$$

где $\begin{cases} x_1' = b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n, \\ x_2' = x_2, \\ \vdots \\ x_n' = x_n \end{cases}$, то есть замена координат $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{b_{11}}(x_1' - b_{12}x_2' - \ldots - b_{1n}x_n'), \\ x_2 = x_2', \\ \vdots \\ x_n = x_n' \end{cases}$.

Далее применяем предположение индукции к $Q_2(x_2', \ldots, x_n')$.

Случай 2: $b_{ii} = 0$ для всех i, но существует $b_{ij} \neq 0$ при $i < j$.
Б.о.о. считаем, что $b_{12} \neq 0$. Делаем замену:

$\begin{cases} x_1 = x_1' - x_2', \\ x_2 = x_1' + x_2', \\ x_3 = x_3', \\ \vdots \\ x_n = x_n' \end{cases}$ Тогда $Q(x') = \underbrace{2b_{12}x_1'^2 - 2b_{12}x_2'^2}_{2b_{12}x_1x_2} + \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 2b_{ij}x_i'x_j'$, что есть 1-й случай.

18. Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду

Вначале докажем лемму.

Пусть $\mathbb{e}'$ — базис V, имеющий вид $\begin{cases} e_1' = e_1, \\ e_2' \in e_2 + \langle e_1 \rangle, \\ e_3' \in e_3 + \langle e_1,\, e_2 \rangle, \\ \vdots \\ e_n' \in e_n + \langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle \end{cases}$ $(*)$,
$B' = B(Q,\, \mathbb{e}')$
$B_k' = B_k(Q,\, \mathbb{e}')$
$\delta_k' = \delta_k(Q,\, \mathbb{e}')$

Лемма. $\forall\ k = 1, \ldots, n : \delta_k = \delta_k'$.

Доказательство. При любом k имеем $B_k' = C_k^T B_k C_k \Rightarrow \delta_k' = \det B_k' = \det(C_k^T B_k C_k) = (\underset{=1}{\det C_k^T})(\det B_k)(\underset{=1}{\det C_k}) = \det B_k = \delta_k$.

Теорема (метод Якоби). Положим, что $\delta_k = 0$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Тогда единственно существует базис $\mathbb{e}' = (e_1', \ldots, e_n')$ в V такой, что

1. $\mathbb{e}'$ имеет вид $(*)$
2. В этом базисе Q имеет канонический вид $Q(x) = \dfrac{\delta_1}{\delta_0}x_1'^2 + \dfrac{\delta_2}{\delta_1}x_2'^2 + \ldots + \dfrac{\delta_n}{\delta_{n-1}}x_n'^2$

   (то есть $B(Q,\, \mathbb{e}') = \operatorname{diag}(\dfrac{\delta_1}{\delta_0}, \dfrac{\delta_2}{\delta_1}, \ldots, \dfrac{\delta_n}{\delta_{n-1}})$).

Доказательство.
Оформим *индукцию* по n.
$\underline{n=1}$: $Q(x)=\delta_1 x_1'^2$ — очевидно, верно.
Докажем для $n-1$. Пусть векторы $e_1',\ldots,e_n'$ уже построены:

$$B(Q,\,(e_1',\ldots,e_{n-1}',e_n))=\begin{pmatrix}\delta_1 & & & & *\\ & \frac{\delta_2}{\delta_1} & & 0 & *\\ & & \ddots & & *\\ & 0 & & \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} & *\\ * & * & * & * & *\end{pmatrix}$$

Ищем e_n' в виде $e_n+\langle e_1,\ldots,e_{n-1}\rangle=e_n+\langle e_1',\ldots,e_{n-1}'\rangle$,
т.е. в виде $e_n'=e_n+\lambda_1 e_1'+\ldots+\lambda_{n-1}e_{n-1}'$.
Пусть $\beta: V\times V\to F$ — симметричная билинейная функция, соответствующая Q

$\underset{1\leqslant k\leqslant n-1}{\beta(e_n',\,e_k')}=\beta(e_n',\,e_n)+\lambda_k\beta(e_k',\,e_k')=\beta(e_n',\,e_n)+\lambda_k\dfrac{\delta_k}{\delta_{k-1}}$.

Значит $\beta(e_n',\,e_k')=0\iff\lambda_k=-\beta(e_n,\,e_n')\dfrac{\delta_k}{\delta_{k-1}}$ — единственное значение.

В итоге построен базис $\mathbb{e}'=(e_1',\ldots,e_n')$ такой, что

$$B(Q,\,(e_1',\ldots,e_{n-1}',e_n))=\begin{pmatrix}\delta_1 & & & & \\ & \frac{\delta_2}{\delta_1} & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} & \\ & & & & ?\end{pmatrix}$$

Но в силу доказанной выше леммы $\delta_n=\delta_n'=\delta_1\cdot\dfrac{\delta_2}{\delta_1}\cdot\ldots\cdot\dfrac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}}\cdot ?=\delta_{n-1}\cdot ?\Longrightarrow ?=\dfrac{\delta_n}{\delta_{n-1}}$.

19. Существование нормального вида для квадратичной формы над $\mathbb{R}$. Закон инерции

Предложение. Для любой квадратичной формы Q над $\mathbb{R}$ существует базис, в котором Q принимает нормальный вид.

Доказательство. Знаем, что существует базис, в котором Q имеет канонический вид. $Q(x)=b_1x_1^2+\ldots+b_nx_n^2$.

Делаем невырожденную замену $x_i=\begin{cases}\dfrac{x_i'}{\sqrt{|b_i|}},\text{ если } b_i\neq 0,\\ x_i',\text{ если } b_i=0\end{cases}$

Тогда в новых координатах (= новом базисе) Q имеет вид $Q(x')=\varepsilon_1x_1'^2+\ldots+\varepsilon_nx_n'^2$,
где $\varepsilon_i=\mathrm{sgn} b_i=\begin{cases}1,\ b_i>0,\\ 0,\ b_i=0,\\ -1,\ b_i<0\end{cases}$. Всё доказали.

Пусть Q — квадратичная функция над R, которая в базисе $\mathbb{e}$ имеет нормальный вид:

$$Q(x_1,\ \ldots,\ x_n)=x_1^2+\ldots+x_s^2-x_{s+1}^2-\ldots-x_{s+t}^2,$$

где s — количество положительных слагаемых, t — количество отрицательных слагаемых. Тогда

$i_+:=s$ — **положительный индекс инерции** квадратичной формы Q

$i_-:=t$ — **отрицательный индекс инерции** квадратичной формы Q

Теорема (закон инерции). Числа $i_+=s$ и $i_-=t$ не зависят от базиса, в котором Q принимает нормальный вид.

Доказательство. $s + t = \mathrm{rk}Q$ — инвариантная величина $\Rightarrow$ достаточно доказать инвариантность s.

Пусть базис $\mathbb{e} = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ таков, что в нём $Q(x) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_{s+t}^2$

Пусть базис $\mathbb{e}' = \langle e'_1, \ldots, e'_n \rangle$ таков, что в нём $Q(x) = x_1'^2 + \ldots + x_s'^2 - x_{s+1}'^2 - \ldots - x_{s+t}'^2$

Предположим, что $s \neq s'$. Можем считать, что $s > s'$.

Рассмотрим в V подпространства $\begin{cases} L = \langle e_1, \ldots, e_s \rangle, \ \dim L = s, \\ L' = \langle e'_{s+1}, \ldots, e'_{s+t} \rangle, \ \dim L' = s' \end{cases}$.

$L + L' \subseteq V \Rightarrow \dim(L + L') \leqslant \dim V = n$.

Тогда $\dim(L \cap L') = \dim L + \dim L' - \dim(L + L') \geqslant s + n - s' - n = s - s' > 0$.

Тогда $\exists v \in L \cap L'$, $v \neq 0$.

Т.к. $v \in L$, то $Q(v) > 0$.

Т.к. $v \in L'$, то $Q(v) \leqslant 0$.

Противоречие!

20. Следствие метода Якоби о нахождении индексов инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$. Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы. Критерий отрицательной определённости квадратичной формы

$Q : V \to \mathbb{R}$ — квадратичная форма

$\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис

$B = B(Q, \mathbb{e})$

$B_k = B_k(Q, \mathbb{e})$

$\delta_k = \det B_k$ — k-й угловой минор

Следствие (метода Якоби). Пусть $\delta_k \neq 0$ для всех $k = 1, \ldots, n$.

Тогда i_- равен числу перемен знака в последовательности $1, \delta_1, \ldots, \delta_n$.

Доказательство. Метод Якоби: существует базис, в котором Q принимает вид

$$Q(x) = \frac{\delta}{1} x_1^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} + \ldots + \frac{\delta_n}{\delta_{n+1}}.$$

Получаем, что если для некоторого i выполняется $\dfrac{\delta_i}{\delta_{i-1}}$, значит $\mathrm{sgn}\delta_i \neq \mathrm{sgn}\delta_{i-1}$, что и означает, что отрицательный индекс i_- равен числу перемен знака.

Теорема (Критерий Сильвестра). $Q > 0$ тогда и только тогда, когда $\delta_k > 0$ для всех $k = 1, \ldots, n$.

Доказательство.

$\Leftarrow$ Следует из следствия метода Якоби: $i_- = 0 \Longrightarrow i_+ = n \Longrightarrow Q > 0$.

$\Rightarrow$ $Q > 0 \Longrightarrow$ существует матрица $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \ \det C \neq 0$, такая что $C^T B C = E$. Тогда $\det C^T \cdot \det B \cdot \det C = 1 \Longrightarrow \delta_n = \det B = \dfrac{1}{(\det C)^2} > 0$.

$\forall k$ B_k есть матрица ограничения квадратной функции Q на подпространство $\langle e_1, \ldots, e_k \rangle$. На этом подпространстве будет также положительная определенность $\Longrightarrow \delta_k = \det B_k > 0$.

Теорема (критерий отрицательной определенности).

$$Q < 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \delta_i > 0, \ i \not\vdots\, 2 \\ \delta_i < 0, \ i \,\vdots\, 2 \end{cases}$$

Доказательство. $Q < 0 \Longleftrightarrow -Q > 0$. Далее применяем критерий Сильвестра.

21. Неравенство Коши-Буняковского, неравенство треугольника и теорема Пифагора в евклидовом пространстве

Предложение (неравенство К-Б). Пусть $x,\, y \in \mathbb{E}$. Тогда $|(x,\, y)| \leqslant |x||y|$, причём знак равенства возможен только в том случае, если $x,\, y$ — пропорциональны.

Доказательство.

1. $x,\, y$ — пропорциональны (можно считать, что $y = \alpha x,\ \alpha \in \mathbb{R}$)
   Тогда $|(x,\, y)| = |(x,\, \alpha x)| = |\alpha||(x,\, x)| = |\alpha||x|^2 = |x||\alpha x| = |x||y|$.
2. $x,\, y$ — не пропорциональны
   Тогда они линейно независимы $\Longrightarrow x,\, y$ — базис в $\langle x,\, y\rangle$. Ограничение квадратичной функции $(v,\, x)$ на $\langle x,\, y\rangle$ положительно определено по критерию Сильвестра.
   $\det\begin{vmatrix}(x,\, x) & (x,\, y)\\ (x,\, y) & (y,\, y)\end{vmatrix} > 0$, то есть $(x,\, x)(y,\, y) - (x,\, y)^2 > 0 \Longrightarrow |x|^2|y|^2 > |(x,\, y)|^2$.

Предложение (неравенство треугольника).

$$\rho(a,\, b) + \rho(b,\, c) \geqslant \rho(a,\, c)\ \ \forall a, b, c \in \mathbb{E}.$$

Доказательство. Пусть $x := a - b$, $y := b - c$. Надо доказать $|x| + |y| \geqslant |x + y|$:
$|x+y|^2 = (x+y,\, x+y) = \underset{|x|^2}{(x,\, x)} + \underset{2|x||y|\text{ (по К-Б)}}{2(x,\, y)} + \underset{|y|^2}{(y,\, y)} \leqslant |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$.

Предложение (теорема Пифагора). Пусть $x,\, y \in \mathbb{E},\ \ x \perp y$ $((x,\, y) = 0)$. Тогда $|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.

Доказательство. $|x+y|^2 = (x+y,\, x+y) = \underset{|x|^2}{(x,\, x)} + \underset{0}{(x,\, y)} + \underset{0}{(y,\, x)} + \underset{|y|^2}{(y,\, y)} = |x|^2 + |y|^2$.

22. Свойства определителя матрицы Грама системы векторов евклидова пространства

Пусть $v_1, \ldots, v_k$ — система векторов в $\mathbb{E}$. $G = G(v_1, \ldots, v_k)$.

Предложение 1. $\forall v_1, \ldots, v_k \in E,\quad \det G(v_1, \ldots, v_k) > 0$.

Предложение 2. $\det G(v_1, \ldots, v_k) = 0$ тогда и только тогда, когда $v_1, \ldots, v_k$ — линейно независимы.

Доказательство 1. $v_1, \ldots, v_k$ — линейно независимы $\Longrightarrow v_1, \ldots, v_k$ — Базис в $\langle v_1, \ldots, v_k\rangle \Longrightarrow$ $\det G > 0$ по критерию Сильвестра (т.к. G есть матрица билинейной функции $(\cdot\ ,\ \cdot)$ на $\langle v_1, \ldots, v_k\rangle$ в базисе $v_1, \ldots, v_k$).

Доказательство 2. $v_1, \ldots, v_k$ — линейно зависимы.

Тогда $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = 0$ для некоторого набора $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k \backslash \{0\}$.

Тогда $\forall i = 1, \ldots, k$:

$$\lambda_1(v_1,\, v_i) + \ldots + \lambda_k(v_k,\, v_i) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda_1 G_{(1)} + \ldots + \lambda_k G_{(k)} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{строки } G \text{ линейно зависимы} \Rightarrow \det G = 0.$$

23. Свойства ортогонального дополнения к подпространству в евклидовом пространстве

Предложение. Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство, $\dim \mathbb{E} = n$. Тогда:

1. $\dim S^{\perp} = n - \dim S$
2. $\mathbb{E} = S \oplus S^{\perp}$
3. $(S^{\perp})^{\perp} = S$

Доказательство.

1. Пусть $e_1, \ldots, e_k$ — базис в S. Дополним его до базиса всего пространства $\mathbb{E}$.
   Пусть $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, $x \in \mathbb{E}$.
   Если $x \in S^{\perp}$, то это то же самое, что $(x,\, e_i) = 0$ для всех $i = 1, \ldots, k$. Тогда:
   $$(x,\, e_i) = x_1(e_1,\, e_i) + x_2(e_2,\, e_i) + \ldots + x_n(e_n,\, e_i) = 0,\ \forall i = 1, \ldots, k.$$
   Тогда x есть решение ОСЛУ: $G \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$ с матрицей $G \in \mathrm{Mat}_{k \times n}(\mathbb{R})$, где $g_{ij} = (e_i,\, e_j)$.
   Так как левый блок размера $k \times k$ матрицы G есть $G(e_1, \ldots, e_k)$, где $e_1, \ldots, e_k$ — линейно независимы, то $\det G(e_1, \ldots, e_n) > 0$, следовательно $\mathrm{rk} G = k$. Тогда $\dim S^{\perp} = n - \mathrm{rk} G = n - k = n - \dim S$.
2. Из предыдущего пункта получили, что $\dim S + \dim S^{\perp} = n = \dim \mathbb{E}$.
   Если $s \in S \cap S^{\perp}$, то $(\underset{\in S}{v},\ \underset{\in S^{\perp}}{v}) = 0 \Longrightarrow v = 0 \Longrightarrow S \cap S^{\perp} = \{0\} \Longrightarrow S$ и $S^{\perp}$ линейно независимы $\Longrightarrow \mathbb{E} = S \oplus S^{\perp}$.
3. $\dim (S^{\perp})^{\perp} = \dim \mathbb{E} - \dim (S^{\perp}) = \dim \mathbb{E} - (\dim \mathbb{E} - \dim S) = \dim S$. Остаётся заметить, что $S \subseteq (S^{\perp})^{\perp} \Longrightarrow S = (S^{\perp})^{\perp}$.

24. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в $\mathbb{R}^n$, заданное своим базисом

Пусть $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением. $S \subseteq \mathbb{R}^n$ — подпространство, $a_1, \ldots, a_k$ — базис в S. Образуем матрицу $A \in \mathrm{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R})$, где $A^{(i)} = a_i$.

Предложение. $\forall v \in \mathbb{E}:\ pr_S v = A(A^T A)^{-1} A^T x$

Доказательство. *Корректность*: $A^T A = (a_i,\, a_j) = G(a_1, \ldots, a_k)$ — невырожденная матрица, так как $a_1, \ldots, a_k$ — линейно независимы, следовательно $(A^T A)^{-1}$ существует.

Пусть $v \in \mathbb{E}$, тогда $x = ort_S v \Rightarrow x \in S \Rightarrow x = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$. $y = ort_S v \Rightarrow A^T y = 0$.

$$A(A^T A)^{-1} A^T v = A(A^T A)^{-1} A^T (x + y) =$$
$$= A \underbrace{(A^T A)^{-1} (A^T A)}_{E} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} + A(A^T A)^{-1} \underbrace{A^T y}_{0} =$$
$$= A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = x = pr_S v.$$

25. Существование ортонормированного базиса в евклидовом пространстве. Описание всех ортонормированных базисов в терминах одного и матриц перехода. Дополнение ортогональной системы векторов до ортогонального базиса

Теорема. Во всяком (конечномерном) евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Доказательство. Так как квадратичная функция (v, v) положительно определена, то существует базис, в котором она принимает нормальный вид. Этот базис и есть то, что нам требуется.

Другими словами, всякую положительно определённую квадратичную форму можно привести к нормальному виду.

Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — ортонормированный базис в $\mathbb{E}$. Пусть также есть ещё один базис $(e'_1, \ldots, e'_n)$, причём $(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n) \cdot C$.

Предложение. $(e'_1, \ldots, e'_n)$ — **ортонормирован** $\iff C^T C = E$.

Доказательство. $\mathbb{e}'$ — ортонормированный базис $\Longrightarrow G(\mathbb{e}') = E$ с одной стороны (по определению ортонормированного базиса), а с другой $G(\mathbb{e}') = C^T \underbrace{G(\mathbb{e})}_{=E} C = C^T C$.

Следствие. Всякую ортогональную (соотв. ортонормированную) систему векторов можно дополнить до ортогонального (соотв. ортонормированного) базиса.

Доказательство. Если $(e_1, \ldots, e_k)$ — такая система, то искомым дополнением будет ортогональный (соотв. ортонормированный) базис в $\{e_1, \ldots, e_k\}^\perp$.

26. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в терминах его ортогонального базиса. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта, явные формулы для каждого шага

Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство. $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_k)$ — ортогональный базис в S.

Предложение. $\forall v \in \mathbb{E}: \; pr_S v = \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{(v,\, e_i)}{(e_i,\, e_i)} e_i$.

Доказательство. Представим v в виде суммы $v = pr_S v + ort_S v$. Тогда:

$$(v,\, e_i) = (pr_S v,\, e_i) + \underbrace{(ort_S v,\, e_i)}_{=0} = (pr_S v,\, e_i), \;\; \forall i = 1, \ldots, k.$$

Также $pr_S v = \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j e_j$. Следовательно, $(v,\, e_i) = \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j (e_j,\, e_i)$. Учитывая, что базис $\mathbb{e}$ — ортогональный, то все слагаемые кроме $j = i$ обнулятся, следовательно останется только $(v,\, e_i) = \lambda_i (e_i,\, e_i) \Longrightarrow \lambda_i = \dfrac{(v,\, e_i)}{(e_i,\, e_i)}$.

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

Пусть $(e_1, \ldots, e_k)$ — линейно независимая система векторов.

Метод Якоби: $\det G(e_1, \ldots, e_k) > 0$, где i-й угловой минор — это $\det G(e_1, \ldots, e_i) > 0$.

Применим результат — ортогональный базис $(f_1, \ldots, f_k)$ в $\langle e_1, \ldots, e_k \rangle$ так, что $(*)$:

$$\begin{aligned}
&f_1 = e_1\\
&f_2 \in e_2 + \langle e_1\rangle\\
&f_3 \in e_3 + \langle e_1,\, e_2\rangle\\
&\ \vdots\\
&f_k \in e_k + \langle e_1, \dots, e_{k-1}\rangle
\end{aligned}$$

Предложение. $\forall i = 1, \dots, k$:

1. $f_i = ort_{\langle e_1, \dots, e_{i-1}\rangle} e_i$;
2. $f_i = e_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} \dfrac{(e_i,\, f_j)}{(f_j,\, f_j)} f_j$; $(**)$
3. $\det G(f_1, \dots, f_i) = \det G(e_1, \dots, e_i)$;

Доказательство. Помним, что при $(*)$ $\langle e_1, \dots, e_i\rangle = \langle f_1, \dots, f_i\rangle$ $\forall i$

1. Распишем:

$$\begin{gathered}
f_i \in e_i + \langle e_1, \dots, e_{i-1}\rangle = e_i + \langle f_1, \dots, f_{i-1}\rangle \Rightarrow\\
\Rightarrow f_i = e_i + h_i, \text{ где } h_i \in \langle f_1, \dots, f_{i-1}\rangle \Rightarrow\\
\Rightarrow e_i = \underset{ort}{f_i} - \underset{pr}{h_i}
\end{gathered}$$

Так как $f_i \in \langle f_1, \dots, f_{i-1}\rangle^{\perp}$, то

$$f_i = ort_{\langle f_1, \dots, f_{i-1}\rangle} e_i = ort_{\langle e_1, \dots, e_{i-1}\rangle} e_i$$

2. $f_i = ort_{\langle f_1, \dots, f_{i-1}\rangle} e_i = e_i - pr_{\langle f_1, \dots, f_{i-1}\rangle} e_f = e_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} \dfrac{(e_i,\, f_j)}{(f_j,\, f_j)} f_j$ (по предыдущему)
3. Следует из того, что $G(f_1, \dots, f_i) = C^T G(e_1, \dots, e_i) C$, где C — верхнетреугольная с единицами на диагонали, следоавтельно $\det C = 1$.

Построение ортогонального базиса $f_1, \dots, f_k$ (по формулам $(**)$) называется методом (процессом) ортогонализации Грама-Шмидта.

27. Теорема о расстоянии от точки до подпространства в евклидовом пространстве. Явная формула для расстояния в терминах определителей матриц Грама

Пусть $x \in \mathbb{E}$, $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство.

Теорема. $\rho(x, S) = |ort_S x|$, причём $pr_S x$ является единственной ближайшей к x точной из S.

Доказательство.

$y := pr_S x$, $z := ort_S x$, $x = y + z$.

Пусть теперь $y' \in S$, $y \neq 0$. Покажем, что $\rho(x,\, y + y') > \rho(x,\, y)$.

$\rho(x,\, y + y')^2 = |\underbrace{x - y}_{z} - y'|^2 = |\underset{\in S^{\perp}}{z} - \underset{\in S}{y'}|^2 \underset{\text{по т. Пифагора}}{=} |z|^2 + |y'|^2 > |z|^2 = \rho(x,\, y)^2$.

$S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство, $x \in S$, $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_k)$ — базис.

Теорема. $\rho(x,\, S)^2 = \dfrac{\det G(e_1, \dots, e_k, x)}{\det G(e_1, \dots, e_k)}$.

Доказательство.

(1) $x \in S \Longrightarrow \rho(x, S) = 0$ и $\det G(e_1, \ldots, e_k) = 0$, т.к. $e_1, \ldots, e_k$ — линейно зависимы

(2) $x \notin S \Longrightarrow$ Положим $z := ort_S x$.
Тогда $\rho(x, S) = |z|$ — уже знаем.

Применим ортогонализацию Грама–Шмидта к $e_1, \ldots, e_k, x$: получим систему $f_1, \ldots, f_k, z$.

Но при ортогонализации определитель матрицы Грама не меняется $\Longrightarrow \dfrac{\det G(e_1, \ldots, e_k, x)}{\det G(e_1, \ldots, e_k)} =$
$\dfrac{\det G(f_1, \ldots, f_k, z)}{\det G(f_1, \ldots, f_k)} = \dfrac{|f_1|^2 \ldots |f_k|^2 |z|^2}{|f_1^2| \ldots |f_k|^2} = |z|^2 = \rho(x, S)^2$.

28. Метод наименьших квадратов для несовместных систем линейных уравнений: постановка задачи и её решение. Единственность псевдорешения и явная формула для него в случае линейной независимости столбцов матрицы коэффициентов

Метод наименьших квадратов:

Имеем СЛУ($*$) $Ax = b$, где $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор неизвестных, $b \in \mathbb{R}^m$.

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ — решение СЛУ($*$) $\Leftrightarrow Ax_0 = b \Leftrightarrow Ax_0 - b = 0 \Leftrightarrow |Ax_0 - b| = 0$ (где $\mathbb{R}^n$ рассматривается как евклидово пространство со стандартным скалярным произведением) $\Leftrightarrow \rho(Ax_0, b) = 0$.

В случае, когда СЛУ(*) несовместна, набор $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (вектор-столбец) называется **псевдорешением**, если $\rho(Ax_0, b) = \min \rho(Ax, b)$.

Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ — подпространство, натянутое на столбцы матрицы A, то есть $S = \langle A^{(1)}, \ldots, A^{(n)} \rangle$.

Предложение 1. x_0 — псевдорешение для ($*$) тогда и только тогда, когда x_0 — решение для СЛУ $Ax = pr_S b$.

Предложение 2. Если столбцы матрицы A — линейно независимы, то псевдорешение единственно и может быть найдено по формуле $x_0 = (A^T A)^{-1} A^T b$.

Доказательство 1. Так как $Ax = x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + \ldots + x_n A^{(n)}$, то $\{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\} = S$. Следовательно, $\rho(\{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}, b) = \rho(S, b)$.

По теореме о расстоянии о точки до плоскости искомый минимум достигается в точке x_0, для которой $A_{x_0} = or_S b$.

Доказательство 2. Так как столбцы $A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}$ — линейно независимы, то они образуют базис в $S \Longrightarrow \exists! x_0 : A_{x_0} = pr_S b$.

Так как $pr_S b = A(A^T A)^{-1} A^T b$, то $x_0 = (A^T A)^{-1} A^T b$ является решением для СЛУ $Ax = pr_S b$.

29. Две формулы для объёма параллелепипеда: в терминах определителя матрицы Грама и в терминах координат в ортонормированном базисе

Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — базис пространства $\mathbb{E}$. P — k-мерный параллелепипед.

Теорема. $vol P(a_1, \ldots, a_k)^2 = \det G(a_1, \ldots, a_n)$.

Доказательство. Индукция по k:

$\underline{k = 1}$: $|a_1|^2 = (a_1, a_1)$ — верно. $\underline{k > 1}$): имеем $vol P(a_1, \ldots, a_k)^2 = vol P(a_1, \ldots, a_{k-1})^2 |h|^2 = \det G(a_1, \ldots, a_{k-1}) |h|^2 = (*)$.

- Если $a_1, \dots, a_{k-1}$ линейно независимы, то $|h|^2 = \dfrac{\det G(a_1, \dots, a_k)}{\det G(a_1, \dots, a_{k-1})} \Rightarrow$
$\Rightarrow (*) = \det G(a_1, \dots, a_k)$.
- Если $a_1, \dots, a_{k-1}$ — линейно зависимы, то $\det G(a_1, \dots, a_{k-1}) = 0 \Rightarrow volP(a_1, \dots, a_k) = 0 = (*)$. Но $\det G(a_1, \dots, a_k) = 0$, так как $a_1, \dots, a_k$ — линейно зависимы

Теорема. $volP(a_1, \dots, a_n) = |\det A|$. Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — ортонормированный базис в $\mathbb{E}$.
$(a_1, \dots, a_n) = (e_1, \dots, e_n)A$, $a \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
Доказательство. $G(a_1, \dots, a_n) = A^T \underbrace{G(e_1, \dots, e_n)}_{E} A \Rightarrow volP(a_1, \dots, a_n)^2$
$= \det G(a_1, \dots, a_n) = (\det A)^2$.

30. Связь смешанного произведения с векторным и скалярным в трёхмерном евклидовом пространстве. Антикоммутативность и билинейность векторного произведения. Формула для вычисления векторного произведения в терминах координат в правом ортонормированном базисе

Теорема. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^3 : \ (a, b, c) = (a, [b, c])$
Доказательство.

1. b, c — пропорциональны $\Longrightarrow [b,\, c] = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \text{левая часть} = 0 \\ \text{правая часть} = 0 \end{cases}$
2. b, c — не пропорциональны $\Longrightarrow$ положим $d = [b,\, c]$.
$$(a,\, [b,\, c]) = (a,\, d) = (pr_{\langle d\rangle}a,\, d) = (ort_{\langle b,\, c\rangle}a,\, d) = \begin{cases} |ort_{\langle b,\, c\rangle}a| \underbrace{|d|}_{volP(b,\, c)}, \text{ если}(a,\, b,\, c) > 0, \\ -|ort_{\langle b,\, c\rangle}a||d|, \text{ если}(a,\, b,\, c) < 0 \end{cases} =$$
$$= Vol(a,\, b,\, c) = (a,\, b,\, c).$$

Предложение.
1. $[a,\, b] = -[b,\, a]$ $\forall a,\, b$ — антикоммутативность
2. $[\cdot,\, \cdot]$ линейна по каждому аргументу
$[\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2,\, b] = \lambda_1[a_1,\, b] + \lambda_2[a_2,\, b]$
$[a,\, \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2] = \mu_1[a,\, b_1] + \mu_2[a,\, b_2]$

Доказательство.
1. Ясно из определения
2.
$$\forall x (x,\, [\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2,\, b]) = (x,\, \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2,\, b) =$$
$$= \lambda_1(x,\, a_1,\, b) + \lambda_2(x,\, a_2,\, b) = \lambda_1(x,\, [a_1,\, b]) + \lambda_2(x,\, [a_2,\, b]) =$$
$$= (x,\, \lambda_1[a_1,\, b] + \lambda_2[a_2,\, b]).$$

Так как $\forall y = (e_1,\, y)e_1 + (e_2,\, y)e_2 + (e_3,\, y)e_3$ для $(e_1,\, e_2,\, e_3)$ — ортонормированного базиса $\Longrightarrow [\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2,\, b] = \lambda_1[a_1,\, b] + \lambda_2[a_2,\, b]$. Линейность по второму аргументу аналогична.

Пусть (e_1, e_2, e_3) — ортонормированный базис.

$$a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$$
$$b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$$

Тогда формула для вычисления векторного произведения выглядит так:

$$\begin{aligned}[a,\, b] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \\ = (a_2b_3 - b_2a_3)e_1 - (a_1b_3 - b_1a_3)e_2 + (a_1b_2 - b_1a_2)e_3 = \\ = \underline{((a_2b_3 - b_2a_3),\, (b_1a_3 - a_1b_3),\, (a_1b_2 - b_1a_2))}\end{aligned}$$