Линейная алгебра.
Коллоквиум 2 семестр.
Основано на реальных событиях.
v0.3

26 мая 2017

Ченжлоги

v0.0 (20.05.2017) — *исходное: добавлены 1–10 вопросы (спасибо Соне, Даше, Лизе, Наташе, Алёне)*
v0.1 (21.05.2017) — *поправил 1, 2, 6 (спасибо Борису, Соне, Александру Г. (Ц.))*
v0.2 (22.05.2017) — *добавил 11–15. Поправил 2, 7 (спасибо Александру Г. (Ц.), Борису, Наташе)*
v0.3 (23.05.2017) — *поправил 2 ($2 \Rightarrow 3$ и $3 \Rightarrow 4$), дополнил 3, (спасибо Наташе, Глебу, Соне), добавил 16-20*

Доказательства

1. Теорема о связи размерности суммы двух подпространств с размерностью их пересечения

Теорема. $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W)$
Доказательство. Пусть $p = \dim(U \cap W)$, $k = \dim U$, $m = \dim W$. Выберем базис $a = \{a_1, \ldots, a_p\}$ в пересечении. Его можно дополнить до базиса U и до базиса W. Значит, $\exists b = \{b_1, \ldots, b_{k-p}\}$ такой, что $a \cup b$ — базис в U и $\exists c = \{c_1, \ldots, c_{m-p}\}$ такой, что $a \cup c$ — базис в W.

Докажем, что $a \cup b \cup c$ — базис в $U + W$.

1. Докажем, что $U + W$ порождается множеством $a \cup b \cup c$.
$$\left.\begin{array}{l} v \in U + W \Rightarrow \exists u \in U, w \in W : v = u + w \\ u \in U = \langle a \cup b \rangle \subset \langle a \cup b \cup c \rangle \\ w \in W = \langle a \cup c \rangle \subset \langle a \cup b \cup c \rangle \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} v = u + w \in \langle a \cup b \cup c \rangle \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow U + W = \langle a \cup b \cup c \rangle \end{array}$$

2. Докажем линейную независимость векторов из $a \cup b \cup c$.
Пусть скаляры $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_{k-p}, \gamma_1, \ldots, \gamma_{m-p}$ таковы, что
$$\underbrace{\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_p a_p}_{x} + \underbrace{\beta_1 b_1 + \ldots + \beta_{k-p} b_{k-p}}_{y} + \underbrace{\gamma_1 c_1 + \ldots + \gamma_{m-p} c_{m-p}}_{z} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &x+y+z=0 \\ &z=-x-y \\ &z \in W \\ &-x-y \in U \cap W \end{aligned}\right| \Rightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in F : z = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_p a_p$$

Тогда $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_p a_p - \gamma_1 c_1 - \ldots - \gamma_{m-p} c_{m-p} = 0$. Но $a \cup c$ — базис W. Следовательно, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = \gamma_1 = \ldots = \gamma_{m-p} = 0$. Но тогда $0 = x + y = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_p a_p + \beta_1 b_1 + \ldots + \beta_{k-p} b_{k-p}$. Но $a \cup b$ — базис $U \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_p = \beta_1 = \ldots = \beta_{k-p} = 0$. Итого, все коэффициенты равны нулю и линейная независимость тем самым доказана. Т.е. $a \cup b \cup c$ — базис $U + W$.

$$\begin{aligned} \dim(U+W) = |a \cup b \cup c| = |a| + |b| + |c| = p + k - p + m - p = k + m - p = \\ = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W). \end{aligned}$$

2. Теорема о пяти эквивалентных условиях, определяющих набор линейно независимых подпространств векторного пространства

Определение. Сумма $U_1 + \ldots + U_k = \{u_1 + \ldots + u_k \mid u_i \in U_i\}$ называется прямой, если из условия $u_1 + \ldots + u_k = 0$ следует, что $u_1 = \ldots = u_k = 0$. *Обозначение*: $U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$.

В этом случае, подпространства $U_1, \ldots, U_k$ называют линейно независимыми.

1. Если $u_1 + \ldots + u_k = 0 \Rightarrow u_1 = \ldots = u_k = 0$ ($U_1, \ldots, U_k$ — линейно независимы)
2. Любой u единственным образом представим в виде $u = u_1 + \ldots + u_k$, где $u_i \in U_i$
3. Если $\mathbb{e}_i$ — базис в U_i, то $\mathbb{e}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{e}_k$ — базис $U_1 + \ldots + U_k$
4. $\dim(U_1 + \ldots + U_k) = \dim U_1 + \ldots + \dim U_k$
5. $U_i \cap (U_1 + \ldots + U_{i-1} + U_{i+1} + \ldots + U_k) = \{0\}$

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$ Пусть $u_1 + \ldots + u_k = u'_1 + \ldots + u'_k$, где $u_i,\ u'_i \in U_i$. Тогда

$$\begin{gathered} \underbrace{(u_1 - u'_1)}_{\in U_1} + \ldots + \underbrace{(u_k - u'_k)}_{\in U_k} = \vec{0} \Rightarrow \\ \Rightarrow (u_1 - u'_1) = \ldots = (u_k - u'_k) = \vec{0} \Rightarrow \\ \Rightarrow u_1 = u'_1, \ldots, u_k = u'_k. \end{gathered}$$

$2 \Rightarrow 3$ Пусть $u \in U_1 + \ldots + U_k$. Тогда u единственно представим в виде $u = u_1 + \ldots + u_k$, где $u_i \in U_i$.

Каждый u единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов из $\mathbb{e}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{e}_k$ (так как каждый u_i представляется в базисе $\mathbb{e}_i$) $\Longrightarrow \mathbb{e}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{e}_k$ — базис.

$3 \Rightarrow 4$ Пусть $\mathbb{e}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{e}_k$ — базис $U_1 + \ldots + U_k$ и пусть наш базис — мультимножество (т.е. одинаковые векторы могут учитываться по нескольку раз). Тогда

$$\begin{aligned} \dim(U_1 + \ldots + U_k) &= |e^1_1 + \ldots + e^1_{s_1} + \ldots + e^k_1 + \ldots + e^k_{s_k}| = \\ &= |e^1_1 + \ldots + e^1_{s_1}| + \ldots + |e^k_1 + \ldots + e^k_{s_k}| = \dim U_1 + \ldots + \dim U_k. \end{aligned}$$

$4 \Rightarrow 5$ Пусть для краткости $\overline{U_i} = U_1 + \ldots + U_{i-1} + U_{i+1} + \ldots + U_k$. Тогда

$$\dim(U_i \cap \overline{U_i}) = \dim U_i + \dim \overline{U_i} - \dim \underbrace{(U_i + \overline{U_i})}_{U_1 + \ldots + U_k} \leqslant$$

$$\leqslant \dim U_i + \dim U_1 + \ldots + \dim U_{i-1} + \dim U_{i+1} + \ldots + \dim U_k - \dim U_1 - \ldots - \dim U_k.$$

Итак, $\dim(U_i \cap \overline{U_i}) \leqslant 0 \Longrightarrow \dim(U_i \cap \overline{U_i}) = 0 \Longrightarrow U_i \cap \overline{U_i} = \{\vec{0}\}$.

$5 \Rightarrow 1$ Пусть $\vec{0} = u_1 + \ldots + u_k$, где $u_i \in U_i$. Тогда для любого i имеем

$$u_i = -u_1 - \ldots - u_{i-1} - u_{i+1} - \ldots - u_k \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u_i \in U_i \cap \overline{U_i} = \{\vec{0}\} \Rightarrow u_i = \vec{0}.$$

3. Описание всех базисов n-мерного векторного пространства в терминах одного базиса и матриц координат. Формула преобразования координат вектора при замене базиса векторного пространства

Пусть V — векторное пространство, $\dim V = n$, $e_1, \ldots, e_n$ — базис. То есть

$$\forall v \in V: \ \exists! \ v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n,$$

где $x_1, \ldots, x_n \in F$ — координаты вектора v в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$. Пусть также есть базис $e'_1, \ldots, e'_n$:

$$\begin{aligned}
e'_1 &= c_{11} e_1 + c_{21} e_2 + \ldots + c_{n1} e_n \\
e'_2 &= c_{12} e_1 + c_{22} e_2 + \ldots + c_{n2} e_n \\
&\vdots \\
e'_n &= c_{1n} e_1 + c_{2n} e_2 + \ldots + c_{nn} e_n
\end{aligned}$$

Обозначим матрицу $C = (c_{ij})$. Тогда можно переписать $(e'_1, \ldots, e'_n)$ как $(e_1, \ldots, e_n) \cdot C$.

Предложение. $e'_1, \ldots, e'_n$ образуют базис тогда и только тогда, когда $\det C \neq 0$.
Доказательство.
$\Rightarrow$ $e'_1, \ldots, e'_n$ — базис, а значит $\exists C' \in \mathrm{M}_n$:

$$(e_1, \ldots, e_n) = (e'_1, \ldots, e'_n) C' = (e_1, \ldots, e_n) C C'$$
$$E = CC'$$
$$C' = C^{-1} \Longleftrightarrow \exists C^{-1} \Longleftrightarrow \det C \neq 0$$

$\Leftarrow$ $\det C \neq 0 \Rightarrow \exists C^{-1}$. Покажем, что $e'_1, \ldots, e'_n$ в таком случае линейно независимы. Пусть $\lambda_1 e'_1 + \ldots + \lambda_n e'_n = 0$. Тогда можно записать

$$(e'_1, \ldots, e'_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (e_1, \ldots, e_n) C \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0$$

Так как $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис, то $C \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0$. Умножая слева на обратную матрицу получаем $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Предложение. Формула преобразований координат вектора при переходе к новому базису:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \left(x'_1 \ldots x'_n \right).$$

Доказательство.

С одной стороны: $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = (e_1, \ldots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

С другой стороны: $v = x_1'e_1' + \ldots + x_n'e_n' = (e_1', \ldots, e_n') \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = (e_1, \ldots, e_n)C \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$

Так как $e_1, \ldots, e_n$ — линейно независимы, то $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$

4. Докажите, что отношение изоморфности на множестве всех векторных пространств является отношением эквивалентности

Теорема. "Изоморфность" — отношение эквивалентности на множестве всех векторных пространств над фиксированным полем F.

Доказательство.

I. *Рефлексивность*. $\varphi : V \to V$ — изоморфизм.
   $\mathrm{Id} : V \simeq V$

II. *Симметричность*. $\varphi : V \to W$ — изоморфизм $\Longrightarrow \varphi^{-1} : W \to V$ — тоже изоморфизм.
   Т.к. отображение φ^{-1} также биективно, то осталось проверить, что оно линейно.
   Пусть w_1, $w_2 \in W$. Тогда $\exists v_1$, $v_2 \in V$, такие что
   $$w_1 = \varphi(v_1),\ w_2 = \varphi(v_2) \Rightarrow v_1 = \varphi^{-1}(w_1),\ v_2 = \varphi^{-1}(w_2).$$
   Теперь $\varphi^{-1}(w_1 + w_2) = \varphi^{-1}(\varphi(v_1) + \varphi(v_2)) = \varphi^{-1}(\varphi(v_1 + v_2)) = v_1 + v_2 = \varphi^{-1}(w_1) + \varphi^{-1}(w_2)$.
   $\varphi^{-1}(\alpha w) = \varphi^{-1}(\alpha\varphi(v)) = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha v)) = \alpha v = \alpha\varphi^{-1}(w)$.

III. *Транзитивность*. $\psi \circ \varphi : U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W$. Если φ и ψ — изоморфизм, то $\psi \circ \varphi$ — тоже изоморфизм.
   Докажем, что если φ и ψ — линейны, то $\psi \circ \varphi$ — тоже линейна.
   $$(\psi \circ \varphi)(v_1 + v_2) = \psi(\varphi(v_1 + v_2)) = \psi(\varphi(v_1) + \varphi(v_2)) =$$
   $$= \psi(\varphi(v_1)) + \psi(\varphi(v_2)) = (\psi \circ \varphi)(v_1) + (\psi \circ \varphi)(v_2).$$
   $$(\psi \circ \varphi)(\alpha v) = \psi(\varphi(\alpha v)) = \psi(\alpha\varphi(v)) =$$
   $$= \alpha\psi(\varphi(v)) = \alpha(\psi \circ \varphi)(v).$$
   Тогда очевидно, что транзитивность следует из линейности, так как композиция двух биективных отображений также биективна.

5. Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств

Теорема. V, W — конечномерные векторные пространства $\Longrightarrow V \simeq W \Longleftrightarrow \dim V = \dim W$. Докажем две леммы.

Лемма 1. $\dim V = n \Rightarrow V \simeq F^n$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varphi : V \to F^n$. Выберем базис $(e_1, \ldots, e_n)$ в V. Тогда
$$x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \ x_i \in F.$$

Отображение является изоморфизмом (т.к. линейно и биективно), а следовательно $V \simeq F^n$.

Лемма 2. Пусть $\varphi : V \simeq W$ — изоморфизм. $e_1, \ldots, e_n$ — базис V. Тогда $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ — базис W.

Доказательство. Пусть $w \in W$, тогда существует $v \in V : w = \varphi(v)$. Положим $v = \varphi^{-1}(w)$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n, \;\; x_i \in F \\
&\Rightarrow w = \varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \ldots + x_n \varphi(e_n) \\
&\Rightarrow W = \langle \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n) \rangle
\end{aligned}
$$

Теперь покажем, что $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ — линейно независимы.

Пусть $\alpha_1 \varphi(e_1) + \ldots + \alpha_n \varphi(e_n) = 0$, где $\alpha_i \in F$. Тогда $\varphi(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n) = 0$. Применим φ^{-1}: $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = \varphi^{-1}(0) = 0$. Так как $e_1, \ldots, e_n$ — базис V, то $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Доказательство теоремы.

$\Leftarrow$ Пусть $\dim V = \dim W = n$. Тогда $V \simeq F^n$, $W \simeq F^n$ (по лемме 1), а следовательно $V \simeq W$.

$\Rightarrow$ Пусть $V \simeq W$ и $\dim V = n$. Пусть $\varphi : V \simeq W$ — изоморфизм. $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис V.

Тогда $\varphi(e_1), \ldots \varphi(e_n)$ — базис W (по лемме 2), а следовательно $\dim W = n = \dim V$.

6. Существование и единственность линейного отображения с заданными образами базисных векторов. Связь между координатами вектора и его образа при линейном отображении. Формула изменения матрицы линейного отображения при замене базисов.

Пусть V, W — векторные пространства. $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис V. $\varphi : V \to W$ — линейное отображение.

Предложение 1. φ однозначно определено векторами $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$.

Доказательство. $v \in V \Longrightarrow v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, где $x_i \in F$.

Тогда $\varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \ldots + x_n \varphi(e_n)$.

Предложение 2. Для любого набора $w_1, \ldots, w_n \in W$ существует единственное линейное отображение $\varphi : V \to W$, такое что $\varphi(e_1) = w_1, \ldots, \varphi(e_n) = w_n$.

Доказательство. $v \in V$, $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$.

Положим $\varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1 w_1 + \ldots + x_n w_n$. Тогда легко убедиться, что φ линейно (прямая проверка), а единственность следует из пункта 1.

Предложение 3. Если $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ и $\varphi(v) = y_1 w_1 + \ldots + y_n w_n$, то

$$
\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.
$$

Доказательство.

С одной стороны:

$$
\begin{aligned}
\varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \ldots + x_n \varphi(e_n) = \\
= (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (w_1, \ldots, w_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

С другой стороны:
$$\varphi(v) = (w_1, \ldots, w_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Так как $w_1, \ldots, w_n$ — линейно независимы, то $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Предложение. Пусть V и W — векторные пространства, $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ и $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ — базисы V, $\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ и $\mathbb{f}' = (f'_1, \ldots, f'_m)$— базисы W, A — матрица линейного отображения $\varphi : V \to W$ по отношению к $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$, A' — матрица линейного отображения по отношению к базисам $\mathbb{e}'$ и $\mathbb{f}'$. $\mathbb{e}' = \mathbb{e}C$, $\mathbb{f}' = \mathbb{f}D$. Тогда
$$A' = D^{-1}AC \ (A = DA'C^{-1})$$

Доказательство.
$$(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)C \Rightarrow \underbrace{(\varphi(e'_1), \ldots, \varphi(e'_n))}_{(f'_1,\ldots,f'_m)A'=(f_1,\ldots,f_m)DA^{-1}} =$$
$$= \underbrace{(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))}_{(f_1,\ldots,f_m)A} C = (f_1, \ldots, f_m)AC \Rightarrow$$
$$\Rightarrow DA' = AC \Rightarrow A' = D^{-1}AC.$$

7. Установите изоморфизм между пространствами Hom(V, W) и Mat$_{m\times n}$, где V и W — векторные пространства размерностей n и m соответственно

Теорема. При фиксированных базисах $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$ отображение $\mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Mat}_{m\times n}(F) : \varphi \to A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$ является изоморфизмом векторных пространств V и W.

Рассмотрим две вещи:

Утверждение. $\mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Mat}_{m\times n}(F) : \varphi \mapsto A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$ является биекцией.

Вывод. Задать линейное отображение $V \to W$ — то же самое, что выбрать базис $\mathbb{e}$ в V, базис $\mathbb{f}$ в W и задать матрицу $(m \times n)$, где $n = \dim V$, $m = \dim W$.

Наглядный пример. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (x, y)$.

$\mathbb{e} = (e_1, e_2, e_3)$, $\mathbb{f} = (f_1, f_2)$. Тогда
$$\varphi(e_1) = e_1$$
$$\varphi(e_2) = e_2$$
$$\varphi(e_3) = 0$$

Следовательно, $A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Предложение. Положим
$$\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n) \text{ — базис } V$$
$$\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m) \text{— базис } W$$
$$A_\varphi = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$$
$$A_\psi = A(\psi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$$
$$A_{\varphi+\psi} = A(\varphi + \psi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$$
$$A_{\lambda\varphi} = A(\lambda\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$$

1. $A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$:
   С одной стороны: $((\varphi + \psi)e_1, \ldots, (\varphi + \psi)e_n) = (f_1, \ldots, f_m)A_{\varphi+\psi}$.
   С другой стороны:

$$((\varphi+\psi)e_1,\dots,(\varphi+\psi)e_n)=(\varphi(e_1)+\psi(e_1),\dots,\varphi(e_n)+\psi(e_n))=$$
$$=(\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n))+(\psi(e_1),\dots,\psi(e_n))=$$
$$=(f_1,\dots,f_m)A_\varphi+(f_1,\dots,f_m)A_\psi=(f_1,\dots,f_m)(A_\varphi+A_\psi)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow A_{\varphi+\psi}=A_\varphi+A_\psi.$$

2. $A_{\lambda\varphi}=\lambda A_\varphi$
   С одной стороны: $((\lambda\varphi)e_1,\dots,(\lambda\varphi)e_n)=(f_1,\dots,f_m)A_{\lambda\varphi}$.
   С другой стороны:
$$((\lambda\varphi)e_1,\dots,(\lambda\varphi)e_n)=(\lambda\varphi(e_1),\dots,\lambda\varphi(e_n))=\lambda(\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n))=$$
$$=\lambda(f_1,\dots,f_m)A_\varphi=(f_1,\dots,f_m)\lambda A_\varphi\Rightarrow$$
$$\Rightarrow A_{\lambda\varphi}=\lambda A_\varphi.$$

Таким образом, очевидно, что так как отображение биективно и линейно, то оно является изоморфизмом.

8. Докажите, что ядро и образ линейного отображения являются подпространствами в соответствующих векторных пространствах. Сформулируйте и докажите критерий инъективности линейного отображения в терминах его ядра

Предложение 1. $\mathrm{Ker}\varphi$ — подпространство в V.
Доказательство. Проверим по определению.
1. $0_v\in\mathrm{Ker}\varphi$, так как $\varphi(0_v)=0_w$.
2. $v_1,\ v_2\in\mathrm{Ker}\varphi\Longrightarrow\varphi(v_1+v_2)=\varphi(v_1)+\varphi(v_2)=0_w+0_w=0_w\Longrightarrow v_1+v_2\in\mathrm{Ker}\varphi$.
3. $v\in\mathrm{Ker}\varphi,\ \lambda\in F\Longrightarrow\varphi(\lambda v)=\lambda\varphi(v)=\lambda 0=0\Longrightarrow\lambda v\in\mathrm{Ket}\varphi$.

Предложение 2. $\mathrm{Im}\varphi$ — подпространство в W.
Доказательство. Проверим по определению.
1. $0_w=\varphi(0_v)\Longrightarrow 0_w\in\mathrm{Im}\varphi$.
2. $w_1,\ w_2\in\mathrm{Im}\varphi\Longrightarrow\exists v_1,\ v_2\in V:w_1=\varphi(v_1),\ w_2=\varphi(v_2)\Longrightarrow w_1+w_2=\varphi(v_1)+\varphi(v_2)=\varphi(v_1+v_2)\Longrightarrow w_1+w_2\in\mathrm{Im}\varphi$.
3. $w\in\mathrm{Im}\varphi,\lambda\in F\Longrightarrow\exists v\in V:\varphi(v)=w\Longrightarrow\lambda w=\lambda\varphi(v)=\varphi(\lambda v)\Longrightarrow\lambda w\in\mathrm{Im}\varphi$.

Таким образом, все условия подпространства выполнены.

Предложение. Отображение φ инъективно тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ker}\varphi=\{0\}$.
Доказательство.
$\Rightarrow$ Очевидно, так как если $\mathrm{Ker}\varphi=\{0\}$, то это значит, что все векторы переходят в W.
$\Leftarrow$ Пусть $v_1,\ v_2\in V$ таковы, что $\varphi(v_1)=\varphi(v_2)$.
Тогда $\varphi(v_1-v_2)=0\Longrightarrow v_1-v_2\in\mathrm{Ker}\varphi\Longrightarrow v_1-v_2=0\Longleftrightarrow v_1=v_2$.

9. Связь между рангом матрицы линейного отображения и размерностью его образа

Для начала докажем одну лемму.

Лемма. $U\subseteq V$ — подпространство и $(e_1,\dots,e_k$ — его базис. Тогда $\varphi(U)=\langle\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_k)\rangle$ — подпространство. В частности, $\dim\varphi(U)\leqslant\dim U$.

Доказательство. $u \in U \Longrightarrow u = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k \Longrightarrow \varphi(u) = \varphi(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k) = \lambda_1\varphi(e_1) + \ldots + \lambda_k e\varphi(e_k) \in \langle\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k)\rangle$.

Пусть V, W — векторные пространства, $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V, $\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис W, $A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$ — матрица линейного отображения φ по отношению к $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$.

Теорема. $\dim \mathrm{Im}\varphi = \mathrm{rk}A$

Доказательство. Воспользуемся леммой, доказанной выше: $\mathrm{Im}\varphi = \langle\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\rangle$.

Координаты вектора $\varphi(e_i)$ находятся в столбце $A^{(i)} \Longrightarrow \lambda_1\varphi(e_1) + \ldots + \lambda_n\varphi(e_n) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 A^{(1)} + \ldots + \lambda_n A^{(n)} = 0 \Longrightarrow \mathrm{rk}\{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\} = \mathrm{rk}A$.

$\dim\langle\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k)\rangle = \dim \mathrm{Im}\varphi$.

10. Оценки на ранг произведения двух матриц

Теорема. Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{k\times m}$, $B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$. Тогда $\mathrm{rk}AB \leqslant \min(\mathrm{rk}A, \mathrm{rk}B)$.

Доказательство. Реализуем A и B как матрицы линейных отображений, то есть $\varphi_A : F^m \to F^k$, $\varphi_B : F^n \to F^m$. Тогда AB будет матрицей отображения $\varphi_A \circ \varphi_B$.

$$\mathrm{rk}(AB) = \mathrm{rk}(\varphi_A \circ \varphi_B) = \begin{cases} \leqslant \mathrm{Im}\varphi_A = \mathrm{rk}A \\ \leqslant \mathrm{Im}\varphi_B = \mathrm{rk}B \end{cases}$$

Первое неравенство следует из того, что $\mathrm{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) \subset \mathrm{Im}\varphi_A$, откуда, в свою очередь следует, что $\dim \mathrm{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) \leqslant \dim \mathrm{Im}\varphi_A$.

Рассматривая второе неравенство, получим:

$$\mathrm{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) = \varphi_A(\mathrm{Im}\varphi_B) \Longrightarrow \dim \mathrm{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) = \dim(\varphi_A(\mathrm{Im}\varphi_B)) \leqslant \dim \mathrm{Im}\varphi_B.$$

11. Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения

Для начала докажем предложение.

Предложение. Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V такой, что $(e_1, \ldots, e_k)$ — базис $\mathrm{Ker}\varphi$, а $(\varphi(e_{k+1}, \ldots, \varphi(e_n)))$ — базис $\mathrm{Im}\varphi$.

Замечание. Базис с указанным свойством существует всегда, так как его можно получить путём дополнения базиса $\mathrm{Ker}\varphi$ до базиса всего пространства V.

Доказательство. Дополним базис $(e_1, \ldots, e_k)$ до базиса V векторами $e_{k+1}, \ldots, e_n$. Тогда:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\varphi = \langle\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k), \ldots \varphi(e_n)\rangle = \\ = \langle 0, \ldots, 0, \varphi(e_{k+1}), \ldots + \varphi(e_n)\rangle = \\ = \langle\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)\rangle. \end{aligned}$$

$\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)$ — линейно независимы. Тогда пусть $\alpha_{k+1}\varphi(e_{k+1}) + \ldots + \alpha_n\varphi(e_n) = 0$, где $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n \in F$. Тогда:

$$\varphi(\alpha_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n \in \mathrm{Ker}\varphi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n = \beta_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \beta_n e_n, \text{ где } \beta_{k+1}, \ldots, \beta_n \in F.$$

Но так как $e_1, \ldots, e_n$ — базис V, то $\alpha_{k+1} = \ldots = \alpha_n = \beta_{k+1} = \ldots = \beta_n = 0$. То есть векторы $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ — линейно независимы, а значит они образуют базис $\mathrm{Im}\varphi$.

Теорема. $\dim \mathrm{Im}\varphi = \dim V - \dim \mathrm{Ker}\varphi$.

Доказательство. Выберем базис в V такой же, как в предположении.

Тогда $\dim \mathrm{Im}\varphi = n - k = \dim V - \dim \mathrm{Ker}\varphi$.

12. Приведение матрицы линейного отображения к диагональному виду с единицами и нулями на диагонали

Пусть $\varphi : V \to W$ — линейное отображение. $\mathbb{e}$ — базис V, $\mathbb{f}$ — базис W.

$A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$, $\mathrm{rk}A = r$.

Утверждение. Существуют базис $\mathbb{e}'$ в V и базис $\mathbb{f}'$ в W такие, что $A(\varphi, \mathbb{e}', \mathbb{f}')$ имеет вид:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right), \ \mathrm{rk}A' = r$$

Эквивалентное утверждение. Существуют невырожденные матрицы $C \in \mathrm{M}_n$, $D \in \mathrm{M}_m$, такие что $A' = D^{-1}AC \iff A = DA'C^{-1}$.

Доказательство. Реализуем A как матрицу линейного отображения $\varphi : F^n \to F^m$ в стандартных базисах.

Тогда существует базис $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ такой, что $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ — базис $\mathrm{Ker}\varphi$, а $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_r)$ — базис $\mathrm{Im}\varphi$.

Пусть $\mathbb{f}$ — базис F^m, дополняющий систему $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_r)$. Тогда $A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = A'$.

Результат следует из теоремы о замене базисов.

13. Докажите, что всякий базис сопряженного пространства двойственен к некоторому базису исходного векторного пространства

Предложение. Любой базис $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ пространства V^* двойственен к некоторому базису пространства V.

Доказательство. Возьмём произвольный базис $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ пространства V.

Пусть $\varepsilon' = (\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n)$ двойственный к $\mathbb{e}'$ базис в V^*.

Тогда $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \vdots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix}$ для некоторой невырожденной матрицы $C \in \mathrm{M}_n$.

Положим $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n) = (e'_1, \ldots, e'_n)C^{-1}$ — некий (искомый) базис в V^*.

Зная, что $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1, \ldots, e_n) = E$, имеем $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1, \ldots, e_n) = C \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \vdots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix} (e'_1, \ldots, e'_n)C^{-1} = CEC^{-1} = E$.

14. Докажите, что всякое подпространство в F^n является множеством решений некоторой однородной системы линейных уравнений

Теорема. Всякое подпространство F^n есть множество решений некоторой ОСЛУ.

Доказательство. Пусть $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$.

$(a_1, \ldots, a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$ — значение линейной функции $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$ на векторе $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Пусть дано подпространство $U \subseteq F^n$. Выберем в нём базис $(v_1, \ldots, v_k)$.

Рассмотрим в $(F^n)^*$ подмножество $S := \{\alpha \in (F^n)^* \mid \alpha(v_1) = 0, \ldots, \alpha(v_k) = 0\}$. S — подпространство в $(F^n)^*$.

S — множество решений ОСЛУ $\begin{cases} \alpha(v_1) = 0, \\ \vdots \\ \alpha(v_k) = 0 \end{cases}$ на коэффициенты α.

Так как $v_1, \ldots, v_k$ линейно независимы, то ранг матрицы коэффициентов равен $k \Longrightarrow \dim S = n - k$.

Выберем в S базис $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-k}$ и рассмотрим ОСЛУ $\begin{cases} \alpha_1(x) = 0, \\ \vdots \\ \alpha_{n-k}(x) = 0 \end{cases}$ относительно неизвестного вектора $x \in F^n$.

Пусть $U' \subseteq F^n$ — подпространство решений этой ОСЛУ.

Ранг матрицы коэффициентов равен $n - k$, так как $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-k}$ линейно независимы $\Longrightarrow \dim U' = n - (n - k) = k$. Но $U \subseteq U'$ по построению.

Так как $\dim U = k = \dim U'$, то $U = U' \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1(x) = 0, \\ \vdots \\ \alpha_{n-k}(x) = 0 \end{cases}$ — искомая ОСЛУ.

15. Формула для вычисления значений билинейной формы в координатах. Существование и единственность билинейной формы с заданной матрицей. Формула изменения матрицы билинейной формы при переходе к другому базису

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V $(\dim V = n < \infty)$.

Определение. Матрица $B = B(\beta, \mathbb{e})$, где $b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$, называется матрицей билинейной функции β в базисе $\mathbb{e}$.

Пусть $B = B(\beta, \mathbb{e})$, $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V, $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \in V$, $y = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n \in V$.

$$\beta(x, y) = \beta(\sum_{i=1}^n x_ie_i, \sum_{j=1}^n y_je_j) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \beta(e_i, \sum_{j=1}^n y_je_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j \cdot \underbrace{\beta(e_i, e_j)}_{b_{ij}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_ib_{ij}y_j =$$

$$= (x_1, \ldots, x_n)B\begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (*)$$

$(*)$ — формула для вычисления значений б.ф. в координатах.

Пусть $\mathbb{e}$ — произвольный базис V. Тогда:

Предложение 1. Любая билинейная функция однозначно определяется своей матрицей в базисе $\mathbb{e}$.

Доказательство 1. Следует из $(*)$.

Предложение 2. Для любой матрицы $V \in \mathrm{M}_n(F)$ существует единственная билинейная функция β на V, такая что $B(\beta, \mathbb{e}) = B$.

Доказательство 2. *Единственность* следует из 1.

Существование: зададим β по формуле $(*)$. Тогда β — билинейная функция на V и её матрицей является B.

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ и $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ — два базиса V. β — билинейная функция на V. $\mathbb{e}' = \mathbb{e}C$ — матрица перехода. $B = B(\beta, \mathbb{e})$ и $B' = B(\beta, \mathbb{e}')$.

Предложение. $B' = C^T BC$.

Доказательство. Рассмотрим x в обоих базисах.

$$x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n = x'_1e'_1 + \ldots + x'_ne'_n$$
$$y = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n = y'_1e'_1 + \ldots + y'_ne'_n$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

$$(x'_1, \ldots, x'_n)B' \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = \beta(x, y) = (x_1, \ldots, x_n)B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$
$$\beta(x, y) = (x'_1, \ldots, x'_n)C^T BC \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

Отсюда следует, что $B' = C^T BC$, так как для любого $p \in \mathrm{Mat}_n$ верно

$$p_{ij} = (0 \ldots i \ldots 0)p \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

16. Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами

Пусть в поле F выполняется условие $1 + 1 \neq 0$ (т.е. $2 \neq 0$).

Тогда отображение $\beta \mapsto Q_\beta$ является биекцией между симметричными билинейными функциями на V и квадратичными функциями на V.

Доказательство.

Сюръективность. Пусть β — билинейная функция. Рассмотрим ассоциированную с ней квадратичную функцию $Q_\beta(x) = \beta(x, x)$. Пусть $\sigma(x, y) = \frac{1}{2}(\beta(x, y) + \beta(y, x))$ — симметричная билинейная функция на V. Тогда:

$$Q_\sigma(x) = \sigma(x, x) = \frac{1}{2}(\beta(x, x) + \beta(x, x)) = \beta(x, x) = Q_\beta(x)$$

Инъективность. Пусть $\beta(x, y)$ — симмитричная билинейная функция, $Q_\beta(x) = \beta(x, x)$ — соответствующая ей квадратичная функция.

$$Q_\beta(x + y) = \beta(x + y, x + y) = \beta(x, x) + \beta(x, y) + \beta(y, x) + \beta(y, y) =$$
$$= Q_\beta(x) + Q_\beta(y) + \underbrace{2\beta(x, y)}_{\beta(x,\, y)=\beta(y,\, x)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \beta(x, y) = \frac{1}{2}(Q_\beta(x + y) - Q_\beta(x) - Q_\beta(y)).$$

17. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду

Пусть V — векторное пространство, $\dim V = n$, $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V, $Q : V \to F$ — квадратичная функция на V.

Теорема (метод Лагранжа). Пусть в $F : 1 + 1 \neq 0$. Тогда для всякой квадратичной функции Q существует такой базис, в котором Q имеет канонический вид.

Доказательство.

Оформим *индукцию* по n.

$\underline{n = 1}$: тогда $Q(x) = b_{11}x_1^2$ — канонический вид, очевидно.

Предположим, что для всех $< n$, докажем для n. Пусть в исходном базисе $\mathbb{e}$:

$$Q(x) = Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 2b_{ij}x_ix_j,$$

где $B = (b_{ij})$ — матрица квадратичной функции Q.

<u>Случай 0</u>: $b_{ij} = 0$ для всех i, j. Тогда очевидно.

<u>Случай 1</u>: существует такое i, что $b_{ii} \neq 0$. Перенумеруем переменные так, что $b_{11} \neq 0$:

$$Q(x_1, \dots, x_n) = b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + \dots + 2b_{1n}x_1x_n + Q_1(x_2, \dots, x_n) =$$
$$= \frac{1}{b_{11}}(b_{11}^2x_1^2 + 2b_{11}b_{12}x_1x_2 + \dots + 2b_{11}b_{1n}x_1x_n) + Q_1(x_2, \dots, x_n) =$$
$$= \frac{1}{b_{11}}(b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n)^2 - \underbrace{\frac{1}{b_{11}}(b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n)^2 + Q_1(x_2, \dots, x_n)}_{Q_2(x_2, \dots, x_n)} =$$
$$= \frac{1}{b_{11}}(b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n)^2 + Q_2(x_2, \dots, x_n) =$$
$$= \frac{1}{b_{11}}x_1'^2 + Q_2(x_2', \dots, x_n'),$$

где $\begin{cases} x_1' = b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n, \\ x_2' = x_2, \\ \vdots \\ x_n' = x_n \end{cases}$, то есть замена координат $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{b_{11}}(x_1' - b_{12}x_2' - \dots - b_{1n}x_n'), \\ x_2 = x_2', \\ \vdots \\ x_n = x_n' \end{cases}$.

Далее применяем предположение индукции к $Q_2(x_2', \dots, x_n')$.

<u>Случай 2</u>: $b_{ii} = 0$ для всех i, но существует $b_{ij} \neq 0$ при $i < j$.

Б.о.о. считаем, что $b_{12} \neq 0$. Делаем замену:

$\begin{cases} x_1 = x_1' - x_2', \\ x_2 = x_1' + x_2', \\ x_3 = x_3', \\ \vdots \\ x_n = x_n' \end{cases}$ Тогда $Q(x') = \underbrace{2b_{12}x_1'^2 - 2b_{12}x_2'^2}_{2b_{12}x_1x_2} + \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 2b_{ij}x_i'x_j'$, что есть 1-й случай.

18. Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду

Вначале докажем леммочку.

Пусть $\mathbb{e}'$ — базис V, имеющий вид $\begin{cases} e'_1 = e_1, \\ e'_2 \in e_2 + \langle e_1 \rangle, \\ e'_3 \in e_3 + \langle e_1, e_2 \rangle, \\ \vdots \\ e'_n \in e_n + \langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle \end{cases}$ $(*)$,
$B' = B(Q, \mathbb{e}')$
$B'_k = B_k(Q, \mathbb{e}')$
$\delta'_k = \delta_k(Q, \mathbb{e}')$

Лемма. $\forall\, k = 1, \ldots, n : \delta_k = \delta'_k$.

Доказательство. При любом k имеем $B'_k = C_k^T B_k C_k \Rightarrow \delta'_k = \det B'_k = \det(C_k^T B_k C_k) = (\underbrace{\det C_k^T}_{=1})(\det B_k)(\underbrace{\det C_k}_{=1}) = \det B_k = \delta_k$.

Теорема (метод Якоби). Положим, что $\delta_k = 0$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Тогда единственно существует базис $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ в V такой, что

1. $\mathbb{e}'$ имеет вид $(*)$
2. В этом базисе Q имеет канонический вид $Q(x) = \dfrac{\delta_1}{\delta_0}x_1'^2 + \dfrac{\delta_2}{\delta_1}x_2'^2 + \ldots + \dfrac{\delta_n}{\delta_{n-1}}x_n'^2$

   (то есть $B(Q, \mathbb{e}') = \operatorname{diag}(\dfrac{\delta_1}{\delta_0}, \dfrac{\delta_2}{\delta_1}, \ldots, \dfrac{\delta_n}{\delta_{n-1}})$).

Доказательство.
Оформим *индукцию* по n.
$\underline{n = 1}$: $Q(x) = \delta_1 x_1'^2$ — очевидно, верно.
Докажем для $n - 1$. Пусть векторы $e'_1, \ldots, e'_n$ уже построены:

$$B(Q, (e'_1, \ldots, e'_{n-1}, e_n)) = \begin{pmatrix} \delta_1 & & & & * \\ & \frac{\delta_2}{\delta_1} & & 0 & * \\ & & \ddots & & * \\ & 0 & & \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Ищем e'_n в виде $e_n + \langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle = e_n + \langle e'_1, \ldots, e'_{n-1} \rangle$,
т.е. в виде $e'_n = e_n + \lambda_1 e'_1 + \ldots + \lambda_{n-1} e'_{n-1}$.
Пусть $\beta : V \times V \to F$ — симметричная билинейная функция, соответствующая Q

$\underset{1 \leqslant k \leqslant n-1}{\beta(e'_n, e'_k)} = \beta(e'_n, e_n) + \lambda_k \beta(e'_k, e'_k) = \beta(e'_n, e_n) + \lambda_k \dfrac{\delta_k}{\delta_{k-1}}$.

Значит $\beta(e'_n, e'_k) = 0 \iff \lambda_k = -\beta(e_n, e'_n)\dfrac{\delta_k}{\delta_{k-1}}$ — единственное значение.

В итоге построен базис $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ такой, что

$$B(Q, (e'_1, \ldots, e'_{n-1}, e_n)) = \begin{pmatrix} \delta_1 & & & & \\ & \frac{\delta_2}{\delta_1} & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} & \\ & & & & ? \end{pmatrix}$$

Но в силу доказанной выше леммы $\delta_n = \delta'_n = \delta_1 \cdot \dfrac{\delta_2}{\delta_1} \cdot \ldots \cdot \dfrac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} \cdot ? = \delta_{n-1} \cdot ? \Longrightarrow ? = \dfrac{\delta_n}{\delta_{n-1}}$.

19. Существование нормального вида для квадратичной формы над $\mathbb{R}$. Закон инерции

Предложение. Для любой квадратичной формы Q над $\mathbb{R}$ существует базис, в котором Q принимает нормальный вид.

Доказательство. Знаем, что существует базис, в котором Q имеет канонический вид. $Q(x) = b_1 x_1^2 + \ldots + b_n x_n^2$.

Делаем невырожденную замену $x_i = \begin{cases} \dfrac{x_i'}{\sqrt{|b_i|}}, \text{ если } b_i \neq 0, \\ x_i', \text{ если } b_i = 0 \end{cases}$

Тогда в новых координатах (= новом базисе) Q имеет вид $Q(x') = \varepsilon_1 x_1'^2 + \ldots + \varepsilon_n x_n'^2$, где $\varepsilon_i = \operatorname{sgn} b_i = \begin{cases} 1, \ b_i > 0, \\ 0, \ b_i = 0, \\ -1, \ b_i < 0 \end{cases}$. Всё доказали.

Пусть Q — квадратичная функция над R, которая в базисе $\mathbb{e}$ имеет нормальный вид:

$$Q(x_1, \ \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_{s+t}^2,$$

где s — количество положительных слагаемых, t — количество отрицательных слагаемых. Тогда

$i_+ := s$ — **положительный индекс инерции** квадратичной формы Q

$i_- := t$ — **отрицательный индекс инерции** квадратичной формы Q

Теорема (закон инерции). Числа $i_+ = s$ и $i_- = t$ не зависят от базиса, в котором Q принимает нормальный вид.

Доказательство. $s + t = \operatorname{rk} Q$ — инвариантная величина $\Rightarrow$ достаточно доказать инвариантность s.

Пусть базис $\mathbb{e} = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ таков, что в нём $Q(x) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_{s+t}^2$

Пусть базис $\mathbb{e}' = \langle e_1', \ldots, e_n' \rangle$ таков, что в нём $Q(x) = x_1'^2 + \ldots + x_s'^2 - x_{s+1}'^2 - \ldots - x_{s+t}'^2$

Предположим, что $s \neq s'$. Можем считать, что $s > s'$.

Рассмотрим в V подпространства $\begin{cases} L = \langle e_1, \ldots, e_s \rangle, \ \dim L = s, \\ L' = \langle e_{s+1}', \ldots, e_{s+t}' \rangle, \ \dim L' = s' \end{cases}$.

$L + L' \subseteq V \Rightarrow \dim(L + L') \leqslant \dim V = n$.

Тогда $\dim(L \cap L') = \dim L + \dim L' - \dim(L + L') \geqslant s + n - s' - n = s - s' > 0$.

Тогда $\exists v \in L \cap L'$, $v \neq 0$.

Т.к. $v \in L$, то $Q(v) > 0$.

Т.к. $v \in L'$, то $Q(v) \leqslant 0$.

Противоречие!

20. Следствие метода Якоби о нахождении индексов инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$. Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы. Критерий отрицательной определённости квадратичной формы

$Q : V \to \mathbb{R}$ — квадратичная форма

$\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис

$B = B(Q, \mathbb{e})$

$B_k = B_k(Q, \mathbb{e})$

$\delta_k = \det B_k$ — k-й угловой минор

Следствие (метода Якоби). Пусть $\delta_k \neq 0$ для всех $k = 1, \ldots, n$.

Тогда i_- равен числу перемен знака в последовательности $1, \delta_1, \ldots, \delta_n$.

Доказательство. Метод Якоби: существует базис, в котором Q принимает вид

$$Q(x) = \frac{\delta}{1}x_1^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} + \ldots + \frac{\delta_n}{\delta_{n+1}}.$$

Получаем, что если для некоторого i выполняется $\dfrac{\delta_i}{\delta_{i-1}}$, значит $\operatorname{sgn}\delta_i \neq \operatorname{sgn}\delta_{i-1}$, что и означает, что отрицательный индекс i_- равен числу перемен знака.

Теорема (Критерий Сильвестра). $Q > 0$ тогда и только тогда, когда $\delta_k > 0$ для всех $k = 1, \ldots, n$.

Доказательство.

$\Leftarrow$ Следует из следствия метода Якоби: $i_- = 0 \Longrightarrow i_+ = n \Longrightarrow Q > 0$.

$\Rightarrow$ $Q > 0 \Longrightarrow$ существует матрица $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\ \det C \neq 0$, такая что $C^T BC = E$. Тогда $\det C^T \cdot \det B \cdot \det C = 1 \Longrightarrow \delta_n = \det B = \dfrac{1}{(\det C)^2} > 0$.

$\forall k$ B_k есть матрица ограничения квадратной функции Q на подпространство $\langle e_1, \ldots, e_k\rangle$. На этом подпространстве будет также положительная определенность $\Longrightarrow \delta_k = \det B_k > 0$.

Теорема (критерий отрицательной определенности).

$$Q < 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \delta_i < 0,\ i \not\vdots\ 2 \\ \delta_i > 0,\ i \vdots 2 \end{cases}$$

Доказательство. $Q < 0 \Longleftrightarrow -Q > 0$. Далее применяем критерий Сильвестра.