

Линейная алгебра.  
Коллоквиум 2 семестр.  
Основано на реальных событиях.  
v0.7

26 мая 2017

## Ченжлоги

- v0.0 (20.05.2017) — исходное: добавлены 1–10 вопросы (спасибо Соне, Даше, Лизе, Наташе, Алёне)  
v0.1 (21.05.2017) — поправил 1, 2, 6 (спасибо Борису, Соне, Александру Г. (Ц.))  
v0.2 (22.05.2017) — добавил 11–15. Поправил 2, 7 (спасибо Александру Г. (Ц.), Борису, Наташе)  
v0.3 (23.05.2017) — поправил 2 ( $2 \Rightarrow 3$  и  $3 \Rightarrow 4$ ), дополнил 3, (спасибо Наташе, Глебу, Соне), добавил 16–20  
v0.4 (24.05.2017) — поправил 2, 3, 4, 6, 8 (спасибо Соне, Боре, Глебу), добавил 21–30  
v0.5 (24.05.2017) — добавил 31–40, поправил 7, 10, 11, 18, 20, 22, 24, 28 (спасибо Наташе, Глебу, Соне, Алексею, Лизе, Юле, Мовсесу, Борису)  
v0.6 (25.05.2017) — добавил 41, 42, 45 (спасибо Глебу)  
v0.7 (25.05.2017) — поправил 18, 19, 42, добавил 44 (спасибо Юле, Наташе, Артёму, Никите)

## Доказательства

### 1. Теорема о связи размерности суммы двух подпространств с размерностью их пересечения

**Теорема.**  $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W)$

**Доказательство.** Пусть  $p = \dim(U \cap W)$ ,  $k = \dim U$ ,  $m = \dim W$ . Выберем базис  $a = \{a_1, \dots, a_p\}$  в пересечении. Его можно дополнить до базиса  $U$  и до базиса  $W$ . Значит,  $\exists b = \{b_1, \dots, b_{k-p}\}$  такой, что  $a \cup b$  — базис в  $U$  и  $\exists c = \{c_1, \dots, c_{m-p}\}$  такой, что  $a \cup c$  — базис в  $W$ .

Докажем, что  $a \cup b \cup c$  — базис в  $U + W$ .

1. Докажем, что  $U + W$  порождается множеством  $a \cup b \cup c$ .

$$\left. \begin{array}{l} v \in U + W \Rightarrow \exists u \in U, w \in W : v = u + w \\ u \in U = \langle a \cup b \rangle \subset \langle a \cup b \cup c \rangle \\ w \in W = \langle a \cup c \rangle \subset \langle a \cup b \cup c \rangle \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{l} v = u + w \in \langle a \cup b \cup c \rangle \Rightarrow \\ \Rightarrow U + W = \langle a \cup b \cup c \rangle \end{array}$$

2. Докажем линейную независимость векторов из  $a \cup b \cup c$ .

Пусть скаляры  $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_{k-p}, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-p}$  таковы, что

$$\underbrace{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_p a_p}_x + \underbrace{\beta_1 b_1 + \dots + \beta_{k-p} b_{k-p}}_y + \underbrace{\gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_{m-p} c_{m-p}}_z = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ z = -x - y \\ z \in W \\ -x - y \in U \cap W \end{array} \right| \Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in F : z = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p$$

Тогда  $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p - \gamma_1 c_1 - \dots - \gamma_{m-p} c_{m-p} = 0$ . Но  $a \cup c$  — базис  $W$ . Следовательно,  $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = \gamma_1 = \dots = \gamma_{m-p} = 0$ . Но тогда  $0 = x + y = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_p a_p + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{k-p} b_{k-p}$ . Но  $a \cup b$  — базис  $U \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_p = \beta_1 = \dots = \beta_{k-p} = 0$ . Итого, все коэффициенты равны нулю и линейная независимость тем самым доказана. Т.е.  $a \cup b \cup c$  — базис  $U + W$ .

$$\dim(U + W) = |a \cup b \cup c| = |a| + |b| + |c| = p + k - p + m - p = k + m - p = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

## 2. Теорема о пяти эквивалентных условиях, определяющих набор линейно независимых подпространств векторного пространства

**Теорема.** Следующие 5 условий эквивалентны:

1. Если  $u_1 + \dots + u_k = 0 \Rightarrow u_1 = \dots = u_k = 0$  ( $U_1, \dots, U_k$  — линейно независимы)
2. Любой  $u$  единственным образом представим в виде  $u = u_1 + \dots + u_k$ , где  $u_i \in U_i$
3. Если  $e_i$  — базис в  $U_i$ , то  $e_1 \cup \dots \cup e_k$  — базис  $U_1 + \dots + U_k$
4.  $\dim(U_1 + \dots + U_k) = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$
5.  $U_i \cap (U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k) = \{0\}$

**Доказательство.**

(1  $\Rightarrow$  2) Пусть  $u_1 + \dots + u_k = u'_1 + \dots + u'_k$ , где  $u_i, u'_i \in U_i$ . Тогда

$$\underbrace{(u_1 - u'_1)}_{\in U_1} + \dots + \underbrace{(u_k - u'_k)}_{\in U_k} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (u_1 - u'_1) = \dots = (u_k - u'_k) = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_1 = u'_1, \dots, u_k = u'_k.$$

(2  $\Rightarrow$  3) Пусть  $u \in U_1 + \dots + U_k$ . Тогда  $u$  единственно представим в виде  $u = u_1 + \dots + u_k$ , где  $u_i \in U_i$ .

Каждый  $u$  единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов из  $e_1 \cup \dots \cup e_k$  (так как каждый  $u_i$  представляется в базисе  $e_i$ )  $\Rightarrow e_1 \cup \dots \cup e_k$  — базис.

(3  $\Rightarrow$  4) Пусть  $e_1 \cup \dots \cup e_k$  — базис  $U_1 + \dots + U_k$  и пусть наш базис — мультимножество (т.е. одинаковые векторы могут учитываться по несколько раз). Тогда

$$\dim(U_1 + \dots + U_k) = |e_1^1 + \dots + e_{s_1}^1 + \dots + e_1^k + \dots + e_{s_k}^k| =$$

$$= |e_1^1 + \dots + e_{s_1}^1| + \dots + |e_1^k + \dots + e_{s_k}^k| = \dim U_1 + \dots + \dim U_k.$$

(4  $\Rightarrow$  5) Пусть для краткости  $\overline{U_i} = U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k$ . Тогда

$$\dim(U_i \cap \overline{U_i}) = \dim U_i + \dim \overline{U_i} - \dim \underbrace{(U_i + \overline{U_i})}_{U_1 + \dots + U_k} \leq$$

$$\leq \dim U_i + \dim U_1 + \dots + \dim U_{i-1} + \dim U_{i+1} + \dots + \dim U_k - \dim U_1 - \dots - \dim U_k.$$

Итак,  $\dim(U_i \cap \overline{U_i}) \leq 0 \implies \dim(U_i \cap \overline{U_i}) = 0 \implies U_i \cap \overline{U_i} = \{\vec{0}\}$ .

(5  $\implies$  1) Пусть  $\vec{0} = u_1 + \dots + u_k$ , где  $u_i \in U_i$ . Тогда для любого  $i$  имеем

$$\begin{aligned} u_i &= -u_1 - \dots - u_{i-1} - u_{i+1} - \dots - u_k \Rightarrow \\ &\Rightarrow u_i \in U_i \cap \overline{U_i} = \{\vec{0}\} \Rightarrow u_i = \vec{0}. \end{aligned}$$

### 3. Описание всех базисов $n$ -мерного векторного пространства в терминах одного базиса и матриц координат. Формула преобразования координат вектора при замене базиса векторного пространства

Пусть  $V$  — векторное пространство,  $\dim V = n$ ,  $e_1, \dots, e_n$  — базис. То есть

$$\forall v \in V : \exists! v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n,$$

где  $x_1, \dots, x_n \in F$  — координаты вектора  $v$  в базисе  $(e_1, \dots, e_n)$ . Пусть также есть набор векторов  $e'_1, \dots, e'_n$ :

$$\begin{aligned} e'_1 &= c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \dots + c_{n1}e_n \\ e'_2 &= c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + \dots + c_{n2}e_n \\ &\vdots \\ e'_n &= c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \dots + c_{nn}e_n \end{aligned}$$

Обозначим матрицу  $C = (c_{ij})$ . Тогда можно переписать  $(e'_1, \dots, e'_n)$  как  $(e_1, \dots, e_n) \cdot C$ .

**Предложение.**  $e'_1, \dots, e'_n$  образуют базис тогда и только тогда, когда  $\det C \neq 0$ .

**Доказательство.**

( $\Rightarrow$ )  $e'_1, \dots, e'_n$  — базис, а значит  $\exists C' \in M_n$ :

$$\begin{aligned} (e_1, \dots, e_n) &= (e'_1, \dots, e'_n)C' = (e_1, \dots, e_n)CC' \\ E &= CC' \end{aligned}$$

$$C' = C^{-1} \iff \exists C^{-1} \iff \det C \neq 0$$

( $\Leftarrow$ )  $\det C \neq 0 \Rightarrow \exists C^{-1}$ . Покажем, что  $e'_1, \dots, e'_n$  в таком случае линейно независимы.

Пусть  $\lambda_1 e'_1 + \dots + \lambda_n e'_n = 0$ . Тогда можно записать

$$(e'_1, \dots, e'_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0 \iff (e_1, \dots, e_n)C \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0$$

Так как  $(e_1, \dots, e_n)$  — базис, то  $C \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0$ . Умножая слева на обратную матрицу

получаем  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ .

**Предложение.** Формула преобразований координат вектора при переходе к новому базису:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

**Доказательство.**

$C$  одной стороны:  $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$

$$C \text{ другой стороны: } v = x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n = (e'_1, \dots, e'_n) \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = (e_1, \dots, e_n) C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Так как } e_1, \dots, e_n \text{ — линейно независимы, то } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

#### 4. Докажите, что отношение изоморфности на множестве всех векторных пространств является отношением эквивалентности

**Теорема.** "Изоморфность" — отношение эквивалентности на множестве всех векторных пространств над фиксированным полем  $F$ .

**Доказательство.**

I. *Рефлексивность.*  $\varphi : V \rightarrow V$  — изоморфизм.

$$\text{Id} : V \simeq V$$

II. *Симметричность.*  $\varphi : V \rightarrow W$  — изоморфизм  $\implies \varphi^{-1} : W \rightarrow V$  — тоже изоморфизм.

Т.к. отображение  $\varphi^{-1}$  также биективно, то осталось проверить, что оно линейно.

Пусть  $w_1, w_2 \in W$ . Тогда  $\exists v_1, v_2 \in V$ , такие что

$$w_1 = \varphi(v_1), w_2 = \varphi(v_2) \Rightarrow v_1 = \varphi^{-1}(w_1), v_2 = \varphi^{-1}(w_2).$$

Теперь  $\varphi^{-1}(w_1 + w_2) = \varphi^{-1}(\varphi(v_1) + \varphi(v_2)) = \varphi^{-1}(\varphi(v_1 + v_2)) = v_1 + v_2 = \varphi^{-1}(w_1) + \varphi^{-1}(w_2)$ .

$$\varphi^{-1}(\alpha w) = \varphi^{-1}(\alpha \varphi(v)) = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha v)) = \alpha v = \alpha \varphi^{-1}(w).$$

III. *Транзитивность.*  $\psi \circ \varphi : U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W$ . Если  $\varphi$  и  $\psi$  — изоморфизм, то  $\psi \circ \varphi$  — тоже изоморфизм.

Докажем, что если  $\varphi$  и  $\psi$  — линейны, то  $\psi \circ \varphi$  — тоже линейна.

$$(\psi \circ \varphi)(v_1 + v_2) = \psi(\varphi(v_1 + v_2)) = \psi(\varphi(v_1) + \varphi(v_2)) =$$

$$= \psi(\varphi(v_1)) + \psi(\varphi(v_2)) = (\psi \circ \varphi)(v_1) + (\psi \circ \varphi)(v_2).$$

$$(\psi \circ \varphi)(\alpha v) = \psi(\varphi(\alpha v)) = \psi(\alpha \varphi(v)) =$$

$$= \alpha \psi(\varphi(v)) = \alpha (\psi \circ \varphi)(v).$$

Тогда очевидно, что транзитивность следует из линейности, так как композиция двух биективных отображений также биективна.

#### 5. Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств

**Теорема.**  $V, W$  — конечномерные векторные пространства  $\implies V \simeq W \iff \dim V = \dim W$ . Докажем две леммы.

**Лемма 1.**  $\dim V = n \implies V \simeq F^n$ .

**Доказательство.** Рассмотрим отображение  $\varphi : V \rightarrow F^n$ . Выберем базис  $(e_1, \dots, e_n)$  в  $V$ . Тогда

$$x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_i \in F.$$

Отображение является изоморфизмом (т.к. линейно и биективно), а следовательно  $V \simeq F^n$ .

**Лемма 2.** Пусть  $\varphi : V \simeq W$  — изоморфизм.  $e_1, \dots, e_n$  — базис  $V$ . Тогда  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  — базис  $W$ .

**Доказательство.** Пусть  $w \in W$ , тогда существует  $v \in V : w = \varphi(v)$ . Положим  $v = \varphi^{-1}(w)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \Rightarrow v &= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, \quad x_i \in F \\ \Rightarrow w &= \varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) \\ \Rightarrow W &= \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle \end{aligned}$$

Теперь покажем, что  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  — линейно независимы.

Пусть  $\alpha_1 \varphi(e_1) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n) = 0$ , где  $\alpha_i \in F$ . Тогда  $\varphi(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = 0$ . Применим  $\varphi^{-1}$ :  $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \varphi^{-1}(0) = 0$ . Так как  $e_1, \dots, e_n$  — базис  $V$ , то  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ .

**Доказательство теоремы.**

$(\Leftarrow)$  Пусть  $\dim V = \dim W = n$ . Тогда  $V \simeq F^n$ ,  $W \simeq F^n$  (по лемме 1), а следовательно  $V \simeq W$ .

$(\Rightarrow)$  Пусть  $V \simeq W$  и  $\dim V = n$ . Пусть  $\varphi : V \simeq W$  — изоморфизм.  $(e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ .

Тогда  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  — базис  $W$  (по лемме 2), а следовательно  $\dim W = n = \dim V$ .

## 6. Существование и единственность линейного отображения с заданными образами базисных векторов. Связь между координатами вектора и его образа при линейном отображении. Формула изменения матрицы линейного отображения при замене базисов.

Пусть  $V, W$  — векторные пространства.  $(e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ .  $\varphi : V \rightarrow W$  — линейное отображение.

**Предложение 1.**  $\varphi$  однозначно определено векторами  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ .

**Доказательство.**  $v \in V \Rightarrow v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ , где  $x_i \in F$ .

Тогда  $\varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n)$ .

**Предложение 2.** Для любого набора  $f_1, \dots, f_n \in W$  существует единственное линейное отображение  $\varphi : V \rightarrow W$ , такое что  $(\varphi(e_1) = f_1), \dots, (\varphi(e_n) = f_n)$ .

**Доказательство.**  $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ .

Положим  $\varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$ . Тогда легко убедиться, что  $\varphi$  линейно (прямая проверка), а единственность следует из пункта 1.

**Предложение 3.** Если  $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$  и  $\varphi(v) = y_1 f_1 + \dots + y_m f_m$ , то

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

**Доказательство.**

С одной стороны:

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) = \\ &= (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (f_1, \dots, f_m) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

С другой стороны:

$$\varphi(v) = (f_1, \dots, f_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$\text{Так как } f_1, \dots, f_m \text{ — линейно независимы, то } A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

**Предложение.** Пусть  $V$  и  $W$  — векторные пространства,  $e = (e_1, \dots, e_n)$  и  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$  — базисы  $V$ ,  $f = (f_1, \dots, f_m)$  и  $f' = (f'_1, \dots, f'_m)$  — базисы  $W$ ,  $A$  — матрица линейного отображения  $\varphi : V \rightarrow W$  по отношению к  $e$  и  $f$ ,  $A'$  — матрица линейного отображения по отношению к базисам  $e'$  и  $f'$ .  $e' = eC$ ,  $f' = fD$ . Тогда

$$A' = D^{-1}AC \quad (A = DA'C^{-1})$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} (e'_1, \dots, e'_n) &= (e_1, \dots, e_n)C \Rightarrow \\ \Rightarrow \underbrace{(\varphi(e'_1), \dots, \varphi(e'_n))}_{(f'_1, \dots, f'_m)A' = (f_1, \dots, f_m)DA'} &= \underbrace{(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))}_{(f_1, \dots, f_m)A} C = (f_1, \dots, f_m)AC \Rightarrow \\ &\Rightarrow DA' = AC \Rightarrow A' = D^{-1}AC. \end{aligned}$$

## 7. Установите изоморфизм между пространствами $\text{Hom}(V, W)$ и $\text{Mat}_{m \times n}$ , где $V$ и $W$ — векторные пространства размерностей $n$ и $m$ соответственно

**Теорема.** При фиксированных базисах  $e$  и  $f$  отображение  $\text{Hom}(V, W) \rightarrow \text{Mat}_{m \times n}(F) : \varphi \rightarrow A(\varphi, e, f)$  является изоморфизмом векторных пространств  $V$  и  $W$ .

Рассмотрим две вещи:

**Утверждение.**  $\text{Hom}(V, W) \rightarrow \text{Mat}_{m \times n}(F) : \varphi \mapsto A(\varphi, e, f)$  является биекцией.

**Вывод.** Задать линейное отображение  $V \rightarrow W$  — то же самое, что выбрать базис  $e$  в  $V$ , базис  $f$  в  $W$  и задать матрицу  $(m \times n)$ , где  $n = \dim V$ ,  $m = \dim W$ .

**Наглядный пример.**  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (x, y)$ .

$$\begin{aligned} e &= (e_1, e_2, e_3), f = (f_1, f_2). \text{ Тогда} \\ \varphi(e_1) &= f_1 \\ \varphi(e_2) &= f_2 \\ \varphi(e_3) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } A(\varphi, e, f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Предложение.** Положим

$$\begin{aligned} e &= (e_1, \dots, e_n) \text{ — базис } V \\ f &= (f_1, \dots, f_m) \text{ — базис } W \\ A_\varphi &= A(\varphi, e, f) \\ A_\psi &= A(\psi, e, f) \\ A_{\varphi+\psi} &= A(\varphi + \psi, e, f) \\ A_{\lambda\varphi} &= A(\lambda\varphi, e, f) \end{aligned}$$

$$1. A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi:$$

С одной стороны:  $((\varphi + \psi)e_1, \dots, (\varphi + \psi)e_n) = (f_1, \dots, f_m)A_{\varphi+\psi}$ .

С другой стороны:

$$\begin{aligned}
((\varphi + \psi)e_1, \dots, (\varphi + \psi)e_n) &= (\varphi(e_1) + \psi(e_1), \dots, \varphi(e_n) + \psi(e_n)) = \\
&= (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) + (\psi(e_1), \dots, \psi(e_n)) = \\
&= (f_1, \dots, f_m)A_\varphi + (f_1, \dots, f_m)A_\psi = (f_1, \dots, f_m)(A_\varphi + A_\psi) \Rightarrow \\
&\Rightarrow A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi.
\end{aligned}$$

2.  $A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi$

С одной стороны:  $((\lambda\varphi)e_1, \dots, (\lambda\varphi)e_n) = (f_1, \dots, f_m)A_{\lambda\varphi}$ .

С другой стороны:

$$\begin{aligned}
((\lambda\varphi)e_1, \dots, (\lambda\varphi)e_n) &= (\lambda\varphi(e_1), \dots, \lambda\varphi(e_n)) = \lambda(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = \\
&= \lambda(f_1, \dots, f_m)A_\varphi = (f_1, \dots, f_m)\lambda A_\varphi \Rightarrow \\
&\Rightarrow A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi.
\end{aligned}$$

Таким образом, очевидно, что так как отображение биективно и линейно, то оно является изоморфизмом.

## 8. Докажите, что ядро и образ линейного отображения являются подпространствами в соответствующих векторных пространствах. Сформулируйте и докажите критерий инъективности линейного отображения в терминах его ядра

**Предложение 1.**  $\text{Ker}\varphi$  — подпространство в  $V$ .

**Доказательство.** Проверим по определению.

1.  $0_v \in \text{Ker}\varphi$ , так как  $\varphi(0_v) = 0_w$ .
2.  $v_1, v_2 \in \text{Ker}\varphi \Rightarrow \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = 0_w + 0_w = 0_w \Rightarrow v_1 + v_2 \in \text{Ker}\varphi$ .
3.  $v \in \text{Ker}\varphi, \lambda \in F \Rightarrow \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v) = \lambda 0 = 0 \Rightarrow \lambda v \in \text{Ker}\varphi$ .

**Предложение 2.**  $\text{Im}\varphi$  — подпространство в  $W$ .

**Доказательство.** Проверим по определению.

1.  $0_w = \varphi(0_v) \Rightarrow 0_w \in \text{Im}\varphi$ .
2.  $w_1, w_2 \in \text{Im}\varphi \Rightarrow \exists v_1, v_2 \in V : w_1 = \varphi(v_1), w_2 = \varphi(v_2) \Rightarrow w_1 + w_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2) \Rightarrow w_1 + w_2 \in \text{Im}\varphi$ .
3.  $w \in \text{Im}\varphi, \lambda \in F \Rightarrow \exists v \in V : \varphi(v) = w \Rightarrow \lambda w = \lambda\varphi(v) = \varphi(\lambda v) \Rightarrow \lambda w \in \text{Im}\varphi$ .

Таким образом, все условия подпространства выполнены.

**Предложение.** Отображение  $\varphi$  инъективно тогда и только тогда, когда  $\text{Ker}\varphi = \{0\}$ .

**Доказательство.**

$(\Rightarrow)$  Очевидно, так как если  $\text{Ker}\varphi = \{0\}$ , то это значит, что у 0 существует единственный прообраз.

$(\Leftarrow)$  Пусть  $v_1, v_2 \in V$  таковы, что  $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$ .

Тогда  $\varphi(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 \in \text{Ker}\varphi \Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \Leftrightarrow v_1 = v_2$ .

## 9. Связь между рангом матрицы линейного отображения и размерностью его образа

Для начала докажем одну лемму.

**Лемма.**  $U \subseteq V$  — подпространство и  $(e_1, \dots, e_k)$  — его базис. Тогда  $\varphi(U) = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k) \rangle$  — подпространство. В частности,  $\dim \varphi(U) \leq \dim U$ .

**Доказательство.**  $u \in U \implies u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k \implies \varphi(u) = \varphi(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k) = \lambda_1 \varphi(e_1) + \dots + \lambda_k \varphi(e_k) \in \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k) \rangle$ .

Пусть  $V, W$  — векторные пространства,  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,  $f = (f_1, \dots, f_m)$  — базис  $W$ ,  $A = A(\varphi, e, f)$  — матрица линейного отображения  $\varphi$  по отношению к  $e$  и  $f$ .

**Теорема.**  $\dim \operatorname{Im} \varphi = \operatorname{rk} A$

**Доказательство.** Воспользуемся леммой, доказанной выше:  $\operatorname{Im} \varphi = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle$ .

Координаты вектора  $\varphi(e_i)$  находятся в столбце  $A^{(i)} \implies \lambda_1 \varphi(e_1) + \dots + \lambda_n \varphi(e_n) = 0 \iff \lambda_1 A^{(1)} + \dots + \lambda_n A^{(n)} = 0 \implies \operatorname{rk}\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\} = \operatorname{rk} A$ .

$\dim \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k) \rangle = \dim \operatorname{Im} \varphi$ .

## 10. Оценки на ранг произведения двух матриц

**Теорема.** Пусть  $A \in \operatorname{Mat}_{k \times m}$ ,  $B \in \operatorname{Mat}_{m \times n}$ . Тогда  $\operatorname{rk} AB \leq \min(\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B)$ .

**Доказательство.** Реализуем  $A$  и  $B$  как матрицы линейных отображений, то есть  $\varphi_A : F^m \rightarrow F^k$ ,  $\varphi_B : F^n \rightarrow F^m$ . Тогда  $AB$  будет матрицей отображения  $\varphi_A \circ \varphi_B$ .

$$\operatorname{rk}(AB) = \operatorname{rk}(\varphi_A \circ \varphi_B) = \begin{cases} \leq \dim \operatorname{Im} \varphi_A = \operatorname{rk} A \\ \leq \dim \operatorname{Im} \varphi_B = \operatorname{rk} B \end{cases}$$

Первое неравенство следует из того, что  $\operatorname{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) \subset \operatorname{Im} \varphi_A$ , откуда, в свою очередь следует, что  $\dim \operatorname{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) \leq \dim \operatorname{Im} \varphi_A$ .

Рассматривая второе неравенство, получим:

$$\operatorname{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) = \varphi_A(\operatorname{Im} \varphi_B) \implies \dim \operatorname{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) = \dim(\varphi_A(\operatorname{Im} \varphi_B)) \leq \dim \operatorname{Im} \varphi_B.$$

## 11. Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения

Для начала докажем предложение.

**Предложение.** Пусть  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$  такой, что  $(e_1, \dots, e_k)$  — базис  $\operatorname{Ker} \varphi$ , а  $(\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n))$  — базис  $\operatorname{Im} \varphi$ .

*Замечание.* Базис с указанным свойством существует всегда, так как его можно получить путём дополнения базиса  $\operatorname{Ker} \varphi$  до базиса всего пространства  $V$ .

**Доказательство.** Дополним базис  $(e_1, \dots, e_k)$  до базиса  $V$  векторами  $e_{k+1}, \dots, e_n$ . Тогда:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \varphi &= \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k), \dots, \varphi(e_n) \rangle = \\ &= \langle 0, \dots, 0, \varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n) \rangle = \\ &= \langle \varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n) \rangle. \end{aligned}$$

$\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$  — линейно независимы. Тогда пусть  $\alpha_{k+1} \varphi(e_{k+1}) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n) = 0$ , где  $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n \in F$ . Тогда:

$$\varphi(\alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n) = 0 \implies$$

$$\implies \alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n \in \operatorname{Ker} \varphi \implies$$

$$\implies \alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_k e_k, \text{ где } \beta_1, \dots, \beta_k \in F.$$

Но так как  $e_{k+1}, \dots, e_n$  — базис  $V$ , то  $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = \beta_1 = \dots = \beta_k = 0$ . То есть векторы  $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$  — линейно независимы, а значит они образуют базис  $\operatorname{Im} \varphi$ .

**Теорема.**  $\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim V - \dim \operatorname{Ker} \varphi$ .

**Доказательство.** Выберем базис в  $V$  такой же, как в предположении.

Тогда  $\dim \operatorname{Im} \varphi = n - k = \dim V - \dim \operatorname{Ker} \varphi$ .



## 12. Приведение матрицы линейного отображения к диагональному виду с единицами и нулями на диагонали

Пусть  $\varphi : V \rightarrow W$  — линейное отображение.  $e$  — базис  $V$ ,  $f$  — базис  $W$ .

$A = A(\varphi, e, f) \in \text{Mat}_{m \times n}$ ,  $\text{rk} A = r$ .

**Утверждение.** Существуют базис  $e'$  в  $V$  и базис  $f'$  в  $W$  такие, что  $A(\varphi, e', f')$  имеет вид:

$$A' = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right), \text{rk} A' = r$$

**Эквивалентное утверждение.** Существуют невырожденные матрицы  $C \in M_n$ ,  $D \in M_m$ , такие что  $A' = D^{-1}AC \iff A = DA'C^{-1}$ .

**Доказательство.** Реализуем  $A$  как матрицу линейного отображения  $\varphi : F^n \rightarrow F^m$  в стандартных базисах.

Тогда существует базис  $e = (e_1, \dots, e_n)$  такой, что  $(e_{r+1}, \dots, e_n)$  — базис  $\text{Ker} \varphi$ , а  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_r)$  — базис  $\text{Im} \varphi$ .

Пусть  $f$  — базис  $F^m$ , дополняющий систему  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_r)$ . Тогда  $A(\varphi, e, f) = A'$ .

Результат следует из теоремы о замене базисов.

## 13. Докажите, что всякий базис сопряженного пространства двойственен к некоторому базису исходного векторного пространства

**Предложение.** Любой базис  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  пространства  $V^*$  двойственен к некоторому базису пространства  $V$ .

**Доказательство.** Возьмём произвольный базис  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$  пространства  $V$ .

Пусть  $\varepsilon' = (\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n)$  двойственный к  $e'$  базис в  $V^*$ .

Тогда  $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \vdots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix}$  для некоторой невырожденной матрицы  $C \in M_n$ .

Положим  $e = (e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_n)C^{-1}$  — некий (искомый) базис в  $V^*$ .

Зная, что  $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1, \dots, e_n) = E$ , имеем  $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1, \dots, e_n) = C \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \vdots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix} (e'_1, \dots, e'_n)C^{-1} = CEC^{-1} = E$ .

## 14. Докажите, что всякое подпространство в $F^n$ является множеством решений некоторой однородной системы линейных уравнений

**Теорема.** Всякое подпространство  $F^n$  есть множество решений некоторой ОСЛУ.

**Доказательство.** Пусть  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ .

$$(a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \text{ — значение линейной функции } \alpha = (a_1, \dots, a_n) \text{ на векторе } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Пусть дано подпространство  $U \subseteq F^n$ . Выберем в нём базис  $(v_1, \dots, v_k)$ .

Рассмотрим в  $(F^n)^*$  подмножество  $S := \{\alpha \in (F^n)^* \mid \alpha(v_1) = 0, \dots, \alpha(v_k) = 0\}$ .  $S$  — подпространство в  $(F^n)^*$ .

$$S \text{ — множество решений ОСЛУ } \begin{cases} \alpha(v_1) = 0, \\ \vdots \\ \alpha(v_k) = 0 \end{cases} \text{ на коэффициенты } \alpha.$$

Так как  $v_1, \dots, v_k$  линейно независимы, то ранг матрицы коэффициентов равен  $k \implies \dim S = n - k$ .

$$\text{Выберем в } S \text{ базис } \alpha_1, \dots, \alpha_{n-k} \text{ и рассмотрим ОСЛУ } \begin{cases} \alpha_1(x) = 0, \\ \vdots \\ \alpha_{n-k}(x) = 0 \end{cases} \text{ относительно неиз-}$$

вестного вектора  $x \in F^n$ .

Пусть  $U' \subseteq F^n$  — подпространство решений этой ОСЛУ.

Ранг матрицы коэффициентов равен  $n - k$ , так как  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k}$  линейно независимы  $\implies \dim U' = n - (n - k) = k$ . Но  $U \subseteq U'$  по построению.

$$\text{Так как } \dim U = k = \dim U', \text{ то } U = U' \implies \begin{cases} \alpha_1(x) = 0, \\ \vdots \\ \alpha_{n-k}(x) = 0 \end{cases} \text{ — искомая ОСЛУ.}$$

## 15. Формула для вычисления значений билинейной формы в координатах. Существование и единственность билинейной формы с заданной матрицей. Формула изменения матрицы билинейной формы при переходе к другому базису

Пусть  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$  ( $\dim V = n < \infty$ ).

**Определение.** Матрица  $B = B(\beta, e)$ , где  $b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$ , называется матрицей билинейной функции  $\beta$  в базисе  $e$ .

Пусть  $B = B(\beta, e)$ ,  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in V$ ,  $y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \in V$ .

$$\begin{aligned} \beta(x, y) &= \beta\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \beta(e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j \cdot \underbrace{\beta(e_i, e_j)}_{b_{ij}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i b_{ij} y_j = \\ &= (x_1, \dots, x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (*) \end{aligned}$$

(\*) — формула для вычисления значений б.ф. в координатах.

Пусть  $e$  — произвольный базис  $V$ . Тогда:

**Предложение 1.** Любая билинейная функция однозначно определяется своей матрицей в базисе  $e$ .

**Доказательство 1.** Следует из (\*).

**Предложение 2.** Для любой матрицы  $V \in M_n(F)$  существует единственная билинейная функция  $\beta$  на  $V$ , такая что  $B(\beta, e) = V$ .

**Доказательство 2.** Единственность следует из 1.

*Существование:* зададим  $\beta$  по формуле (\*). Тогда  $\beta$  — билинейная функция на  $V$  и её матрицей является  $B$ .

Пусть  $e = (e_1, \dots, e_n)$  и  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$  — два базиса  $V$ .  $\beta$  — билинейная функция на  $V$ .  $e' = eC$  — матрица перехода.  $B = B(\beta, e)$  и  $B' = B(\beta, e')$ .

**Предложение.**  $B' = C^T B C$ .

**Доказательство.** Рассмотрим  $x$  в обоих базисах.

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n$$

$$y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n = y'_1 e'_1 + \dots + y'_n e'_n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

$$(x'_1, \dots, x'_n) B' \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = \beta(x, y) = (x_1, \dots, x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\beta(x, y) = (x'_1, \dots, x'_n) C^T B C \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

Отсюда следует, что  $B' = C^T B C$ , так как для любого  $p \in \text{Mat}_n$  верно

$$p_{ij} = (0 \dots i \dots 0) p \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

## 16. Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами

Пусть в поле  $F$  выполняется условие  $1 + 1 \neq 0$  (т.е.  $2 \neq 0$ ).

Тогда отображение  $\beta \mapsto Q_\beta$  является биекцией между симметричными билинейными функциями на  $V$  и квадратичными функциями на  $V$ .

**Доказательство.**

*Сюръективность.* Пусть  $\beta$  — билинейная функция. Рассмотрим ассоциированную с ней квадратичную функцию  $Q_\beta(x) = \beta(x, x)$ . Пусть  $\sigma(x, y) = \frac{1}{2}(\beta(x, y) + \beta(y, x))$  — симметричная билинейная функция на  $V$ . Тогда:

$$Q_\sigma(x) = \sigma(x, x) = \frac{1}{2}(\beta(x, x) + \beta(x, x)) = \beta(x, x) = Q_\beta(x)$$

*Инъективность.* Пусть  $\beta(x, y)$  — симметричная билинейная функция,  $Q_\beta(x) = \beta(x, x)$  — соответствующая ей квадратичная функция.

$$\begin{aligned} Q_\beta(x + y) &= \beta(x + y, x + y) = \beta(x, x) + \beta(x, y) + \beta(y, x) + \beta(y, y) = \\ &= Q_\beta(x) + Q_\beta(y) + \underbrace{2\beta(x, y)}_{\beta(x, y) = \beta(y, x)} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \beta(x, y) = \frac{1}{2}(Q_\beta(x + y) - Q_\beta(x) - Q_\beta(y)).$$

## 17. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду

Пусть  $V$  — векторное пространство,  $\dim V = n$ ,  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,  $Q : V \rightarrow F$  — квадратичная функция на  $V$ .

**Теорема** (метод Лагранжа). Пусть в  $F : 1 + 1 \neq 0$ . Тогда для всякой квадратичной функции  $Q$  существует такой базис, в котором  $Q$  имеет канонический вид.

**Доказательство.**

Оформим *индукцию* по  $n$ .

$n = 1$ : тогда  $Q(x) = b_{11}x_1^2$  — канонический вид, очевидно.

Предположим, что для всех  $< n$ , докажем для  $n$ . Пусть в исходном базисе  $e$ :

$$Q(x) = Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n b_{ii}x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2b_{ij}x_i x_j,$$

где  $B = (b_{ij})$  — матрица квадратичной функции  $Q$ .

Случай 0:  $b_{ij} = 0$  для всех  $i, j$ . Тогда очевидно.

Случай 1: существует такое  $i$ , что  $b_{ii} \neq 0$ . Перенумеруем переменные так, что  $b_{11} \neq 0$ :

$$\begin{aligned} Q(x_1, \dots, x_n) &= b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + \dots + 2b_{1n}x_1x_n + Q_1(x_2, \dots, x_n) = \\ &= \frac{1}{b_{11}}(b_{11}^2x_1^2 + 2b_{11}b_{12}x_1x_2 + \dots + 2b_{11}b_{1n}x_1x_n) + Q_1(x_2, \dots, x_n) = \\ &= \frac{1}{b_{11}}(b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n)^2 - \underbrace{\frac{1}{b_{11}}(b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n)^2}_{Q_2(x_2, \dots, x_n)} + Q_1(x_2, \dots, x_n) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{b_{11}}(b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n)^2 + Q_2(x_2, \dots, x_n) = \\ &= \frac{1}{b_{11}}x_1'^2 + Q_2(x_2', \dots, x_n'), \end{aligned}$$

$$\text{где } \begin{cases} x_1' = b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n, \\ x_2' = x_2, \\ \vdots \\ x_n' = x_n \end{cases}, \text{ то есть замена координат } \begin{cases} x_1 = \frac{1}{b_{11}}(x_1' - b_{12}x_2' - \dots - b_{1n}x_n'), \\ x_2 = x_2', \\ \vdots \\ x_n = x_n' \end{cases}.$$

Далее применяем предположение индукции к  $Q_2(x_2', \dots, x_n')$ .

Случай 2:  $b_{ii} = 0$  для всех  $i$ , но существует  $b_{ij} \neq 0$  при  $i < j$ .

Б.о.о. считаем, что  $b_{12} \neq 0$ . Делаем замену:

$$\begin{cases} x_1 = x_1' - x_2', \\ x_2 = x_1' + x_2', \\ x_3 = x_3', \\ \vdots \\ x_n = x_n' \end{cases} \quad \text{Тогда } Q(x') = \underbrace{2b_{12}x_1'^2 - 2b_{12}x_2'^2}_{2b_{12}x_1x_2} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2b_{ij}x_i'x_j', \text{ что есть 1-й случай.}$$

## 18. Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду

Вначале докажем лемму.

$$\text{Пусть } e' \text{ — базис } V, \text{ имеющий вид } \begin{cases} e_1' = e_1, \\ e_2' \in e_2 + \langle e_1 \rangle, \\ e_3' \in e_3 + \langle e_1, e_2 \rangle, \\ \vdots \\ e_n' \in e_n + \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle \end{cases} \quad (*),$$

12

$B'_k = B_k(Q, e')$  — матрица  $k$ -го углового минора

$\delta'_k = \delta_k(Q, e')$  — определитель матрицы  $k$ -го углового минора

**Лемма.**  $\forall k = 1, \dots, n : \delta_k = \delta'_k$ .

**Доказательство.** При любом  $k$  имеем  $B'_k = C_k^T B_k C_k \Rightarrow \delta'_k = \det B'_k = \det(C_k^T B_k C_k) = (\det C_k^T)(\det B_k)(\det C_k) = \det B_k = \delta_k$ .

**Теорема** (метод Якоби лекционный). Положим, что  $\delta_k \neq 0$  для всех  $k = 1, \dots, n$ . Тогда единственно существует базис  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$  в  $V$  такой, что

1.  $e'$  имеет вид  $(*)$

2. В этом базисе  $Q$  имеет канонический вид  $Q(x) = \frac{\delta_1}{\delta_0} x_1'^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} x_2'^2 + \dots + \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} x_n'^2$

(то есть  $B(Q, e') = \text{diag}(\frac{\delta_1}{\delta_0}, \frac{\delta_2}{\delta_1}, \dots, \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}})$ ).

**Доказательство.**

Оформим *индукцию* по  $n$ .

$n = 1$ :  $Q(x) = \delta_1 x_1'^2$  — очевидно, верно.

Докажем для  $n - 1$ . Пусть векторы  $e'_1, \dots, e'_n$  уже построены:

$$B(Q, (e'_1, \dots, e'_{n-1}, e_n)) = \begin{pmatrix} \delta_1 & & & * \\ & \frac{\delta_2}{\delta_1} & & * \\ & & \ddots & * \\ & 0 & & \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Ищем  $e'_n$  в виде  $e_n + \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle = e_n + \langle e'_1, \dots, e'_{n-1} \rangle$ ,

т.е. в виде  $e'_n = e_n + \lambda_1 e'_1 + \dots + \lambda_{n-1} e'_{n-1}$ .

Пусть  $\beta : V \times V \rightarrow F$  — симметричная билинейная форма, соответствующая  $Q$ .

$$\begin{aligned} \beta(e'_k, e'_n) &= \beta(e'_k, e_n) + \lambda_1 \beta(e'_k, e'_1) + \dots + \lambda_{k-1} \beta(e'_k, e'_{k-1}) = \\ &= \beta(e'_k, e_n) + \beta(e'_k, e'_k) = \\ &= \beta(e'_k, e_n) + \lambda_k \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}}. \end{aligned}$$

Тогда  $\beta(e'_k, e'_n) = 0$  тогда и только тогда, когда  $\lambda_k = -\beta(e'_k, e_n) \frac{\delta_{k-1}}{\delta_k}$  — единственное значение.

В итоге построен базис  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$  такой, что

$$B(Q, (e'_1, \dots, e'_{n-1}, e_n)) = \begin{pmatrix} \delta_1 & & & 0 \\ & \frac{\delta_2}{\delta_1} & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} \\ & & & ? \end{pmatrix}$$

Но в силу доказанной выше леммы  $\delta_n = \delta'_n = \delta_1 \cdot \frac{\delta_2}{\delta_1} \cdot \dots \cdot \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} \cdot ? = \delta_{n-1} \cdot ? \Rightarrow ? = \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}$ .

## 19. Существование нормального вида для квадратичной формы над $\mathbb{R}$ . Закон инерции

**Предложение.** Для любой квадратичной формы  $Q$  над  $\mathbb{R}$  существует базис, в котором  $Q$  принимает нормальный вид.

**Доказательство.** Знаем, что существует базис, в котором  $Q$  имеет канонический вид.  
 $Q(x) = b_1 x_1^2 + \dots + b_n x_n^2$ .

Делаем невырожденную замену  $x_i = \begin{cases} \frac{x'_i}{\sqrt{|b_i|}}, & \text{если } b_i \neq 0, \\ x'_i, & \text{если } b_i = 0 \end{cases}$

Тогда в новых координатах (= новом базисе)  $Q$  имеет вид  $Q(x') = \varepsilon_1 x_1'^2 + \dots + \varepsilon_n x_n'^2$ ,  
 где  $\varepsilon_i = \operatorname{sgn} b_i = \begin{cases} 1, & b_i > 0, \\ 0, & b_i = 0, \\ -1, & b_i < 0 \end{cases}$ . Всё доказали.

Пусть  $Q$  — квадратичная функция над  $R$ , которая в базисе  $e$  имеет нормальный вид:

$$Q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2,$$

где  $s$  — количество положительных слагаемых,  $t$  — количество отрицательных слагаемых. Тогда

$i_+ := s$  — **положительный индекс инерции** квадратичной формы  $Q$

$i_- := t$  — **отрицательный индекс инерции** квадратичной формы  $Q$

**Теорема** (закон инерции). Числа  $i_+ = s$  и  $i_- = t$  не зависят от базиса, в котором  $Q$  принимает нормальный вид.

**Доказательство.**  $s + t = \operatorname{rk} Q$  — инвариантная величина  $\Rightarrow$  достаточно доказать инвариантность  $s$ .

Пусть базис  $e = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$  таков, что в нём  $Q(x) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2$

Пусть базис  $e' = \langle e'_1, \dots, e'_n \rangle$  таков, что в нём  $Q(x) = x_1'^2 + \dots + x_{s'}'^2 - x_{s'+1}'^2 - \dots - x_{s'+t'}'^2$

Предположим, что  $s \neq s'$ . Можем считать, что  $s > s'$ .

Рассмотрим в  $V$  подпространства  $\begin{cases} L = \langle e_1, \dots, e_s \rangle, & \dim L = s, \\ L' = \langle e'_{s'+1}, \dots, e'_{s'+t'} \rangle, & \dim L' = s' \end{cases}$

$$L + L' \subseteq V \Rightarrow \dim(L + L') \leq \dim V = n.$$

$$\text{Тогда } \dim(L \cap L') = \dim L + \dim L' - \dim(L + L') \geq s + n - s' - n = s - s' > 0.$$

Тогда  $\exists v \in L \cap L', v \neq 0$ .

Т.к.  $v \in L$ , то  $Q(v) > 0$ .

Т.к.  $v \in L'$ , то  $Q(v) \leq 0$ .

Противоречие!

## 20. Следствие метода Якоби о нахождении индексов инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$ . Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы. Критерий отрицательной определённости квадратичной формы

$Q : V \rightarrow \mathbb{R}$  — квадратичная форма

$e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис

$$B = B(Q, e)$$

$$B_k = B_k(Q, e)$$

$\delta_k = \det B_k$  —  $k$ -й угловой минор

**Следствие** (метода Якоби). Пусть  $\delta_k \neq 0$  для всех  $k = 1, \dots, n$ .

Тогда  $i_-$  равен числу перемен знака в последовательности  $1, \delta_1, \dots, \delta_n$ .

**Доказательство.** Метод Якоби: существует базис, в котором  $Q$  принимает вид

$$Q(x) = \frac{\delta}{1} x_1^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} x_2^2 + \dots + \frac{\delta_n}{\delta_{n+1}} x_n^2.$$

Получаем, что если для некоторого  $i$  выполняется  $\frac{\delta_i}{\delta_{i-1}}$ , значит  $\operatorname{sgn} \delta_i \neq \operatorname{sgn} \delta_{i-1}$ , что и означает, что отрицательный индекс  $i_-$  равен числу перемен знака.

**Теорема** (Критерий Сильвестра).  $Q > 0$  тогда и только тогда, когда  $\delta_k > 0$  для всех  $k = 1, \dots, n$ .

**Доказательство.**

$(\Leftarrow)$  Следует из следствия метода Якоби:  $i_- = 0 \implies i_+ = n \implies Q > 0$ .

$(\Rightarrow)$   $Q > 0 \implies$  существует матрица  $C \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $\det C \neq 0$ , такая что  $C^T B C = E$ . Тогда  $\det C^T \cdot \det B \cdot \det C = 1 \implies \delta_n = \det B = \frac{1}{(\det C)^2} > 0$ .

$\forall k$   $B_k$  есть матрица ограничения квадратной функции  $Q$  на подпространство  $\langle e_1, \dots, e_k \rangle$ . На этом подпространстве будет также положительная определенность  $\implies \delta_k = \det B_k > 0$ .

**Теорема** (критерий отрицательной определенности).

$$Q < 0 \iff \begin{cases} \delta_i < 0, i \not\equiv 2 \\ \delta_i > 0, i \equiv 2 \end{cases}$$

**Доказательство.**  $Q < 0 \iff -Q > 0$ . Далее применяем критерий Сильвестра.

## 21. Неравенство Коши-Буняковского, неравенство треугольника и теорема Пифагора в евклидовом пространстве

**Предложение** (неравенство К-Б). Пусть  $x, y \in \mathbb{E}$ . Тогда  $|(x, y)| \leq |x||y|$ , причём знак равенства возможен только в том случае, если  $x, y$  — пропорциональны.

**Доказательство.**

1.  $x, y$  — пропорциональны (можно считать, что  $y = \alpha x$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ )

Тогда  $|(x, y)| = |(x, \alpha x)| = |\alpha|(x, x) = |\alpha||x|^2 = |x||\alpha x| = |x||y|$ .

2.  $x, y$  — не пропорциональны

Тогда они линейно независимы  $\implies x, y$  — базис в  $\langle x, y \rangle$ . Ограничение квадратичной функции  $Q(v) = (v, v)$  на  $\langle x, y \rangle$  положительно определено; тогда по критерию Силь-

вестра  $\det \begin{vmatrix} (x, x) & (x, y) \\ (x, y) & (y, y) \end{vmatrix} > 0$ , то есть  $(x, x)(y, y) - (x, y)^2 > 0 \implies |x|^2|y|^2 > |(x, y)|^2$ .

**Предложение** (неравенство треугольника).

$$\rho(a, b) + \rho(b, c) \geq \rho(a, c) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{E}.$$

**Доказательство.** Пусть  $x := a - b$ ,  $y := b - c$ . Надо доказать  $|x| + |y| \geq |x + y|$ :

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y) = \underbrace{(x, x)}_{|x|^2} + \underbrace{2(x, y)}_{2|x||y| \text{ (по К-Б)}} + \underbrace{(y, y)}_{|y|^2} \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2.$$

**Предложение** (теорема Пифагора). Пусть  $x, y \in \mathbb{E}$ ,  $x \perp y$  ( $(x, y) = 0$ ). Тогда  $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$ .

**Доказательство.**  $|x + y|^2 = (x + y, x + y) = \underbrace{(x, x)}_{|x|^2} + \underbrace{(x, y)}_0 + \underbrace{(y, x)}_0 + \underbrace{(y, y)}_{|y|^2} = |x|^2 + |y|^2$ .

## 22. Свойства определителя матрицы Грама системы векторов евклидова пространства

Пусть  $v_1, \dots, v_k$  — система векторов в  $\mathbb{E}$ .  $G = G(v_1, \dots, v_k)$ .

**Предложение 1.**  $\forall v_1, \dots, v_k \in E, \det G(v_1, \dots, v_k) \geq 0$ .

**Предложение 2.**  $\det G(v_1, \dots, v_k) = 0$  тогда и только тогда, когда  $v_1, \dots, v_k$  — линейно зависимы.

**Доказательство 1.**  $v_1, \dots, v_k$  — линейно независимы  $\implies v_1, \dots, v_k$  — базис в  $\langle v_1, \dots, v_k \rangle \implies \det G > 0$  по критерию Сильвестра (т.к.  $G$  есть матрица билинейной функции  $(\cdot, \cdot)$  на  $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$  в базисе  $(v_1, \dots, v_k)$ ).

**Доказательство 2.**  $v_1, \dots, v_k$  — линейно зависимы.

Тогда  $\lambda_{(1)}v_1 + \dots + \lambda_{(k)}v_k = 0$  для некоторого набора  $(\lambda_{(1)}, \dots, \lambda_{(k)}) \neq (0, \dots, 0)$ .

Тогда  $\forall i = 1, \dots, k$ :

$$\begin{aligned} \lambda_{(1)}(v_1, v_i) + \dots + \lambda_{(k)}(v_k, v_i) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda_{(1)}G_{(1)} + \dots + \lambda_{(k)}G_{(k)} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{строки } G \text{ линейно зависимы} &\Rightarrow \det G = 0. \end{aligned}$$

## 23. Свойства ортогонального дополнения к подпространству в евклидовом пространстве

**Предложение.** Пусть  $S \subseteq \mathbb{E}$  — подпространство,  $\dim \mathbb{E} = n$ . Тогда:

1.  $\dim S^\perp = n - \dim S$
2.  $\mathbb{E} = S \oplus S^\perp$
3.  $(S^\perp)^\perp = S$

**Доказательство.**

1. Пусть  $e_1, \dots, e_k$  — базис в  $S$ . Дополним его до базиса всего пространства  $\mathbb{E}$ .

Пусть  $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n, x \in \mathbb{E}$ .

Если  $x \in S^\perp$ , то это то же самое, что  $(x, e_i) = 0$  для всех  $i = 1, \dots, k$ . Тогда:

$$(x, e_i) = x_1(e_1, e_i) + x_2(e_2, e_i) + \dots + x_n(e_n, e_i) = 0, \forall i = 1, \dots, k.$$

Тогда  $x$  есть решение ОСЛУ:  $G \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$  с матрицей  $G \in \text{Mat}_{k \times n}(\mathbb{R})$ , где  $g_{ij} = (e_i, e_j)$ .

Так как левый блок размера  $k \times k$  матрицы  $G$  есть  $G(e_1, \dots, e_k)$ , где  $e_1, \dots, e_k$  — линейно независимы, то  $\det G(e_1, \dots, e_n) > 0$ , следовательно  $\text{rk} G = k$ . Тогда  $\dim S^\perp = n - \text{rk} G = n - k = n - \dim S$ .

2. Из предыдущего пункта получили, что  $\dim S + \dim S^\perp = n = \dim \mathbb{E}$ .

Если  $s \in S \cap S^\perp$ , то  $\begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix} \begin{smallmatrix} \in S \\ \in S^\perp \end{smallmatrix} = 0 \implies v = 0 \implies S \cap S^\perp = \{0\} \implies S$  и  $S^\perp$  линейно независимы  $\implies \mathbb{E} = S \oplus S^\perp$ .

3.  $\dim(S^\perp)^\perp = \dim \mathbb{E} - \dim(S^\perp) = \dim \mathbb{E} - (\dim \mathbb{E} - \dim S) = \dim S$ . Остаётся заметить, что  $S \subseteq (S^\perp)^\perp \implies S = (S^\perp)^\perp$ .

## 24. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в $\mathbb{R}^n$ , заданное своим базисом

Пусть  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$  со стандартным скалярным произведением.  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  — подпространство,  $a_1, \dots, a_k$  — базис в  $S$ . Образует матрицу  $A \in \text{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R})$ , где  $A^{(i)} = a_i$ .

**Предложение.**  $\forall v \in \mathbb{E} : pr_S v = A(A^T A)^{-1} A^T v$

**Доказательство.** *Корректность:*  $A^T A = (a_i, a_j) = G(a_1, \dots, a_k)$  — невырожденная матрица, так как  $a_1, \dots, a_k$  — линейно независимы, следовательно  $(A^T A)^{-1}$  существует.



Пусть  $v \in \mathbb{E}$ , тогда  $x = pr_S v \Rightarrow x \in S \Rightarrow x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$ .

$y = ort_S v \Rightarrow A^T y = 0$ .

$$\begin{aligned} A(A^T A)^{-1} A^T v &= A(A^T A)^{-1} A^T (x + y) = \\ &= A \underbrace{(A^T A)^{-1} (A^T A)}_E \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} + A(A^T A)^{-1} \underbrace{A^T y}_0 = \\ &= A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = x = pr_S v. \end{aligned}$$

## 25. Существование ортонормированного базиса в евклидовом пространстве. Описание всех ортонормированных базисов в терминах одного и матриц перехода. Дополнение ортогональной системы векторов до ортогонального базиса

**Теорема.** Во всяком (конечномерном) евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

**Доказательство.** Так как квадратичная функция  $(v, v)$  положительно определена, то существует базис, в котором она принимает нормальный вид. Этот базис и есть то, что нам требуется.

Другими словами, всякую положительно определённую квадратичную форму можно привести к нормальному виду.

Пусть  $(e_1, \dots, e_n)$  — ортонормированный базис в  $\mathbb{E}$ . Пусть также есть ещё один базис  $(e'_1, \dots, e'_n)$ , причём  $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C$ .

**Предложение.**  $(e'_1, \dots, e'_n)$  — ортонормирован  $\iff C^T C = E$ .

**Доказательство.**  $e'$  — ортонормированный базис  $\implies G(e') = E$  с одной стороны (по определению ортонормированного базиса), а с другой  $G(e') = C^T G(e) C = C^T C$ .  
 $\quad \quad \quad = E$

**Следствие.** Всякую ортогональную (соотв. ортонормированную) систему векторов можно дополнить до ортогонального (соотв. ортонормированного) базиса.

**Доказательство.** Если  $(e_1, \dots, e_k)$  — такая система, то искомым дополнением будет ортогональный (соотв. ортонормированный) базис в  $\{e_1, \dots, e_k\}^\perp$ .

## 26. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в терминах его ортогонального базиса. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта, явные формулы для каждого шага

Пусть  $S \subseteq \mathbb{E}$  — подпространство.  $e = (e_1, \dots, e_k)$  — ортогональный базис в  $S$ .

**Предложение.**  $\forall v \in \mathbb{E} : pr_S v = \sum_{i=1}^k \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$ .

**Доказательство.** Представим  $v$  в виде суммы  $v = pr_S v + ort_S v$ . Тогда:

$$(v, e_i) = (pr_S v, e_i) + \underset{=0}{(ort_S v, e_i)} = (pr_S v, e_i), \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Также  $pr_S v = \sum_{j=1}^k \lambda_j e_j$ . Следовательно,  $(v, e_i) = \sum_{j=1}^k \lambda_j (e_j, e_i)$ . Учитывая, что базис  $e$  — ортогональный, то все слагаемые кроме  $j = i$  обнулятся, следовательно останется только  $(v, e_i) = \lambda_i (e_i, e_i) \implies \lambda_i = \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)}$ .

### Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

Пусть  $(e_1, \dots, e_k)$  — линейно независимая система векторов.

Метод Якоби:  $\det G(e_1, \dots, e_k) > 0$ , где  $i$ -й угловой минор — это  $\det G(e_1, \dots, e_i) > 0$ .

Применим результат — ортогональный базис  $(f_1, \dots, f_k)$  в  $\langle e_1, \dots, e_k \rangle$  так, что  $(*)$ :

$$\begin{aligned} f_1 &= e_1 \\ f_2 &\in e_2 + \langle e_1 \rangle \\ f_3 &\in e_3 + \langle e_1, e_2 \rangle \\ &\vdots \\ f_k &\in e_k + \langle e_1, \dots, e_{k-1} \rangle \end{aligned}$$

**Предложение.**  $\forall i = 1, \dots, k$ :

1.  $f_i = ort_{\langle e_1, \dots, e_{i-1} \rangle} e_i$ ;
2.  $f_i = e_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(e_i, f_j)}{(f_j, f_j)} f_j$ ;  $(**)$
3.  $\det G(f_1, \dots, f_i) = \det G(e_1, \dots, e_i)$ ;

**Доказательство.** Помним, что при  $(*)$   $\langle e_1, \dots, e_i \rangle = \langle f_1, \dots, f_i \rangle \quad \forall i$

1. Распишем:

$$\begin{aligned} f_i &\in e_i + \langle e_1, \dots, e_{i-1} \rangle = e_i + \langle f_1, \dots, f_{i-1} \rangle \Rightarrow \\ &\Rightarrow f_i = e_i + h_i, \text{ где } h_i \in \langle f_1, \dots, f_{i-1} \rangle \Rightarrow \\ &\Rightarrow e_i = \underset{ort}{f_i} - \underset{pr}{h_i} \end{aligned}$$

Так как  $f_i \in \langle f_1, \dots, f_{i-1} \rangle^\perp$ , то

$$f_i = ort_{\langle f_1, \dots, f_{i-1} \rangle} e_i = ort_{\langle e_1, \dots, e_{i-1} \rangle} e_i$$

$$2. \quad f_i = ort_{\langle f_1, \dots, f_{i-1} \rangle} e_i = e_i - pr_{\langle f_1, \dots, f_{i-1} \rangle} e_i = e_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(e_i, f_j)}{(f_j, f_j)} f_j \quad (\text{по предыдущему})$$

3. Следует из того, что  $G(f_1, \dots, f_i) = C^T G(e_1, \dots, e_i) C$ , где  $C$  — верхнетреугольная с единицами на диагонали, следовательно  $\det C = 1$ .

Построение ортогонального базиса  $f_1, \dots, f_k$  (по формулам  $(**)$ ) называется методом (процессом) ортогонализации Грама-Шмидта.

## 27. Теорема о расстоянии от точки до подпространства в евклидовом пространстве. Явная формула для расстояния в терминах определителей матриц Грама

Пусть  $x \in \mathbb{E}$ ,  $S \subseteq \mathbb{E}$  — подпространство.

**Теорема.**  $\rho(x, S) = |\text{ort}_S x|$ , причём  $\text{pr}_S x$  является единственной ближайшей к  $x$  точкой из  $S$ .

**Доказательство.**

$y := \text{pr}_S x$ ,  $z := \text{ort}_S x$ ,  $x = y + z$ .

Пусть теперь  $y' \in S$ ,  $y' \neq 0$ . Покажем, что  $\rho(x, y + y') > \rho(x, y)$ .

$$\rho(x, y + y')^2 = \left| \underbrace{x - y}_{z} - y' \right|^2 = \left| \underbrace{z}_{\in S^\perp} - \underbrace{y'}_{\in S} \right|^2 \stackrel{\text{по т. Пифагора}}{=} |z|^2 + |y'|^2 > |z|^2 = \rho(x, y)^2.$$

$S \subseteq \mathbb{E}$  — подпространство,  $x \in S$ ,  $e = (e_1, \dots, e_k)$  — базис.

**Теорема.**  $\rho(x, S)^2 = \frac{\det G(e_1, \dots, e_k, x)}{\det G(e_1, \dots, e_k)}.$

**Доказательство.**

(1)  $x \in S \implies \rho(x, S) = 0$  и  $\det G(e_1, \dots, e_k, x) = 0$ , т.к.  $e_1, \dots, e_k, x$  — линейно зависимы

(2)  $x \notin S \implies$  Положим  $z := \text{ort}_S x$ .

Тогда  $\rho(x, S) = |z|$  — уже знаем.

Применим ортогонализацию Грама–Шмидта к  $e_1, \dots, e_k, x$ : получим систему  $f_1, \dots, f_k, z$ .

Но при ортогонализации определитель матрицы Грама не меняется  $\implies \frac{\det G(e_1, \dots, e_k, x)}{\det G(e_1, \dots, e_k)} =$

$$\frac{\det G(f_1, \dots, f_k, z)}{\det G(f_1, \dots, f_k)} = \frac{|f_1|^2 \dots |f_k|^2 |z|^2}{|f_1|^2 \dots |f_k|^2} = |z|^2 = \rho(x, S)^2.$$

## 28. Метод наименьших квадратов для несовместных систем линейных уравнений: постановка задачи и её решение. Единственность псевдорешения и явная формула для него в случае линейной независимости столбцов матрицы коэффициентов

*Метод наименьших квадратов:*

Имеем СЛУ(\*)  $Ax = b$ , где  $A \in \text{Mat}_{m \times n}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  — вектор неизвестных,  $b \in \mathbb{R}^m$ .

$x_0 \in \mathbb{R}^n$  — решение СЛУ(\*)  $\Leftrightarrow Ax_0 = b \Leftrightarrow Ax_0 - b = 0 \Leftrightarrow |Ax_0 - b| = 0$  (где  $\mathbb{R}^n$  рассматривается как евклидово пространство со стандартным скалярным произведением)  $\Leftrightarrow \rho(Ax_0, b) = 0$ .

В случае, когда СЛУ(\*) несовместна, набор  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  (вектор-столбец) называется **псевдорешением**, если  $\rho(Ax_0, b) = \min \rho(Ax, b)$ .

Пусть  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  — подпространство, натянутое на столбцы матрицы  $A$ , то есть  $S = \langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle$ .

**Предложение 1.**  $x_0$  — псевдорешение для (\*) тогда и только тогда, когда  $x_0$  — решение для СЛУ  $Ax = \text{pr}_S b$ .

**Предложение 2.** Если столбцы матрицы  $A$  — линейно независимы, то псевдорешение единственно и может быть найдено по формуле  $x_0 = (A^T A)^{-1} A^T b$ .

**Доказательство 1.** Так как  $Ax = x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + \dots + x_n A^{(n)}$ , то  $\{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\} = S$ . Следовательно,  $\rho(\{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}, b) = \rho(S, b)$ .

По теореме о расстоянии от точки до плоскости искомый минимум достигается в точке  $x_0$ , для которой  $A_{x_0} = or_S b$ .

**Доказательство 2.** Так как столбцы  $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$  — линейно независимы, то они образуют базис в  $S \implies \exists! x_0 : A_{x_0} = pr_S b$ .

Так как  $pr_S b = A(A^T A)^{-1} A^T b$ , то  $x_0 = (A^T A)^{-1} A^T b$  является решением для СЛУ  $Ax = pr_S b$ .

## 29. Две формулы для объёма параллелепипеда: в терминах определителя матрицы Грама и в терминах координат в ортонормированном базисе

Пусть  $a_1, \dots, a_k$  — базис пространства  $\mathbb{E}$ .  $P$  —  $k$ -мерный параллелепипед.

**Теорема.**  $vol P(a_1, \dots, a_k)^2 = \det G(a_1, \dots, a_k)$ .

**Доказательство.** Индукция по  $k$ :

$\underline{k=1}$ :  $|a_1|^2 = (a_1, a_1)$  — верно.  $\underline{k > 1}$ : имеем  $vol P(a_1, \dots, a_k)^2 = vol P(a_1, \dots, a_{k-1})^2 |h|^2 = \det G(a_1, \dots, a_{k-1}) |h|^2 = (*)$ .

- Если  $a_1, \dots, a_{k-1}$  линейно независимы, то  $|h|^2 = \frac{\det G(a_1, \dots, a_k)}{\det G(a_1, \dots, a_{k-1})} \implies \Rightarrow (*) = \det G(a_1, \dots, a_k)$ .
- Если  $a_1, \dots, a_{k-1}$  — линейно зависимы, то  $\det G(a_1, \dots, a_{k-1}) = 0 \implies vol P(a_1, \dots, a_k) = 0 = (*)$ . Но  $\det G(a_1, \dots, a_k) = 0$ , так как  $a_1, \dots, a_k$  — линейно зависимы

**Теорема.**  $vol P(a_1, \dots, a_n) = |\det A|$ . Пусть  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — ортонормированный базис в  $\mathbb{E}$ .

$(a_1, \dots, a_n) = (e_1, \dots, e_n)A$ ,  $a \in M_n(\mathbb{R})$ .

**Доказательство.**  $G(a_1, \dots, a_n) = A^T \underbrace{G(e_1, \dots, e_n)}_E A \implies vol P(a_1, \dots, a_n)^2$

$= \det G(a_1, \dots, a_n) = (\det A)^2$ .

## 30. Связь смешанного произведения с векторным и скалярным в трёхмерном евклидовом пространстве. Антикоммутативность и билинейность векторного произведения. Формула для вычисления векторного произведения в терминах координат в правом ортонормированном базисе

**Теорема.**  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^3 : (a, b, c) = (a, [b, c])$

**Доказательство.**

1.  $b, c$  — пропорциональны  $\implies [b, c] = 0 \implies \begin{cases} \text{левая часть} = 0 \\ \text{правая часть} = 0 \end{cases}$
2.  $b, c$  — не пропорциональны  $\implies$  положим  $d = [b, c]$ .

$$\begin{aligned} (a, [b, c]) &= (a, d) = (pr_{\langle d \rangle} a, d) = (ort_{\langle b, c \rangle} a, d) = \begin{cases} |ort_{\langle b, c \rangle} a| \frac{|d|}{vol P(b, c)}, & \text{если } (a, b, c) > 0, \\ -|ort_{\langle b, c \rangle} a| |d|, & \text{если } (a, b, c) < 0 \end{cases} = \\ &= Vol(a, b, c) = (a, b, c). \end{aligned}$$

**Предложение.**

1.  $[a, b] = -[b, a] \forall a, b$  — антикоммутативность
2.  $[\cdot, \cdot]$  линейна по каждому аргументу  
 $[\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b] = \lambda_1 [a_1, b] + \lambda_2 [a_2, b]$   
 $[a, \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2] = \mu_1 [a, b_1] + \mu_2 [a, b_2]$

**Доказательство.**

1. Ясно из определения
- 2.

$$\begin{aligned} \forall x(x, [\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b]) &= (x, \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b) = \\ &= \lambda_1 (x, a_1, b) + \lambda_2 (x, a_2, b) = \lambda_1 (x, [a_1, b]) + \lambda_2 (x, [a_2, b]) = \\ &= (x, \lambda_1 [a_1, b] + \lambda_2 [a_2, b]). \end{aligned}$$

Так как  $\forall y = (e_1, y)e_1 + (e_2, y)e_2 + (e_3, y)e_3$  для  $(e_1, e_2, e_3)$  — ортонормированного базиса  $\Rightarrow [\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b] = \lambda_1 [a_1, b] + \lambda_2 [a_2, b]$ . Линейность по второму аргументу аналогична.

Пусть  $(e_1, e_2, e_3)$  — ортонормированный базис.

$$\begin{aligned} a &= a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \\ b &= b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 \end{aligned}$$

Тогда формула для вычисления векторного произведения выглядит так:

$$\begin{aligned} [a, b] &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \\ &= (a_2 b_3 - b_2 a_3) e_1 - (a_1 b_3 - b_1 a_3) e_2 + (a_1 b_2 - b_1 a_2) e_3 = \\ &= \underline{((a_2 b_3 - b_2 a_3), (b_1 a_3 - a_1 b_3), (a_1 b_2 - b_1 a_2))} \end{aligned}$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} [a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3] &= \\ &= a_1 [e_1, b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3] + a_2 [e_2, b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3] + a_3 [e_3, b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3] = \\ &= a_1 (b_1 [e_1, e_1] + b_2 [e_1, e_2] + b_3 [e_1, e_3]) + \\ &\quad + a_2 (b_1 [e_2, e_1] + b_2 [e_2, e_2] + b_3 [e_2, e_3]) + \\ &\quad + a_3 (b_1 [e_3, e_1] + b_2 [e_3, e_2] + b_3 [e_3, e_3]) = \\ &= a_1 b_1 [e_1, e_1] + a_1 b_2 [e_1, e_2] + a_1 b_3 [e_1, e_3] + \\ &\quad + a_2 b_1 [e_2, e_1] + a_2 b_2 [e_2, e_2] + a_2 b_3 [e_2, e_3] + \\ &\quad + a_3 b_1 [e_3, e_1] + a_3 b_2 [e_3, e_2] + a_3 b_3 [e_3, e_3] \end{aligned}$$

В результате, подставив вычисления  $[e_2, e_3] = e_1$  и  $[e_3, e_2] = -e_1$ , получим искомую формулу.

## 31. Формула для двойного векторного произведения в трехмерном евклидовом пространстве

**Предложение.**  $[a, [b, c]] = (a, c)b - (a, b)c$ .

**Доказательство.**

1.  $b, c$  — пропорциональны  $\Rightarrow$  можем считать  $c = \lambda b$   
Правая часть  $= (a, \lambda b)b - (a, b)\lambda b = 0$

2.  $b, c$  — не пропорциональны

Выберем правый ортонормированный базис  $e_1, e_2, e_3$  так, чтобы

(а)  $b$  пропорционален  $e_1$

(б)  $\langle b, c \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle$

Тогда  $b = \beta e_1, c = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2, a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ .

$[b, c] = [\beta e_1, \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2] = \beta \gamma_2 e_3$

Левая часть  $= [a, [b, c]] = [\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \beta \gamma_2 e_3] = -\alpha_1 \beta \gamma_2 e_2 + \alpha_2 \beta \gamma_2 e_1$

Правая часть  $= (\alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2) \beta e_1 - \alpha_1 \beta (\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2) = \alpha_2 \gamma_2 \beta e_1 - \alpha_1 \beta \gamma_2 e_2 =$  левая часть.

## 32. Линейные многообразия как сдвиги подпространств. Критерий равенства двух линейных многообразий

**Предложение.**  $L \subseteq \mathbb{R}^n$  — непустое множество  $\Rightarrow L$  — линейное многообразие  $\Rightarrow L = v_0 + S$  для некоторых  $v_0 \in L$  и подпространства  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ .

*Замечание.* Из предложения следует, что линейные многообразия — в точности сдвиги подпространств в  $\mathbb{R}^n$ .

**Доказательство.**

$\Rightarrow$  Ясно и очевидно

$\Leftarrow L = v_0 + S$ .

Так как  $S$  — подпространство, то существует ОСЛУ  $Ax = 0$ , такая что  $S$  есть ее множество решений.

Тогда  $L$  есть множество решений СЛУ  $Ax = A_{v_0}$ .

Пусть  $L_1 = v_1 + S_1$  и  $L_2 = v_2 + S_2$  — два линейных многообразия.

**Предложение.**  $L_1 = L_2 \iff \begin{cases} S_1 = S_2 (= S) \\ v_1 - v_2 \in S \end{cases}$

**Доказательство.**

$\Leftarrow$  Очевидно

$\Rightarrow L_1 = L_2$ :  $v_1 = v_1 + 0 \in v_2 + S_2 \Rightarrow v_1 - v_2 \in S_2$ .

Аналогично  $v_1 - v_2 \in S_1 \Rightarrow v_1 - v_2 \in S_1 \cap S_2$ .

$v \in S_1 \Rightarrow v_1 + v \in v_2 + S_2 \Rightarrow v \in (v_2 - v_1) + S_2 \subseteq S_2$ .

Отсюда  $S_1 \cap S_2$ . Аналогично  $S_2 \subseteq S_1 \Rightarrow S_1 = S_2 (= S)$  и  $v_1 - v_2 \in S$ .

## 33. Теорема о плоскости, проходящей через $k + 1$ точку в $\mathbb{R}^n$

**Теорема.**

1. Через любые  $k + 1$  точек в  $\mathbb{R}^n$  проходит плоскость размерности  $\leq k$ .
2. Если  $k + 1$  точек не лежат в плоскости размерности  $< k$ , то через них проходит ровно одна плоскость размерности  $k$ .

**Доказательство.**

1. Пусть  $v_0, \dots, v_k$  — наши точки.

Тогда они все лежат в плоскости  $P = v_0 + \langle (v_1 - v_0), (v_2 - v_0), \dots, (v_k - v_0) \rangle$ ,  $\dim P = \dim S \leq k$ .

2. В этом случае  $\dim P = k \Rightarrow \dim S = k \Rightarrow v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0$  линейно независимы.  $(v_1 - v_0), \dots, (v_k - v_0)$  лежат в направляющем подпространстве любой плоскости, проходящей через  $v_0, \dots, v_k \Rightarrow P$  — единственная плоскость размерности  $k$  с требуемым свойством.

### 34. Инвариантность определителя матрицы линейного оператора относительно замены базиса. Критерий обратимости линейного оператора в терминах его ядра, образа и определителя. Связь спектра линейного оператора с его характеристическим многочленом

Пусть  $\varphi$  — линейный оператор.

**Следствие.**  $\det A(\varphi, e)$  не зависит от выбора базиса  $e$ .

**Доказательство.**  $\det A' = \det(C^{-1}AC)$  — очевидно, так как  $\det C^{-1} = \det C = 1$ .

**Теорема** (критерий обратимости). Для  $\varphi \in L(V)$  следующие условия эквивалентны:

1.  $\text{Ker} \varphi = \{0\}$
2.  $\text{Im} \varphi = V$
3.  $\varphi$  обратим (т.е.  $\varphi$  — изоморфизм  $V$  на себя)
4.  $\det \varphi \neq 0$

**Доказательство.**

$(1 \Leftrightarrow 2)$  Так как  $\dim V = \dim \text{Ker} \varphi + \dim \text{Im} \varphi$ .

$(1 \& 2 \Leftrightarrow 3)$  Очевидно

$(2 \Leftrightarrow 4)$   $\text{Im} \varphi = V \Leftrightarrow \text{rk} \varphi = \dim V \Leftrightarrow \det \varphi \neq 0$ .

**Утверждение.**  $\lambda \in \text{Spec} \varphi \Leftrightarrow \chi_\varphi(\lambda) = 0$ , то есть  $\lambda$  — корень характеристического многочлена.

**Доказательство.** Докажем аналогичное утверждение, из которого следует текущее:

$\lambda \in \text{Spec} \varphi \Leftrightarrow \det(\varphi - \lambda \text{Id}) = 0$ .

$\lambda \in \text{Spec} \varphi \Leftrightarrow V_\lambda(\varphi) \neq \{0\} \Leftrightarrow \text{Ker}(\varphi - \lambda \text{Id}) \neq \{0\} \Leftrightarrow \det(\varphi - \lambda \text{Id}) = 0$ .

### 35. Связь между алгебраической и геометрической кратностями собственного значения линейного оператора

**Предложение.** Пусть  $\lambda \in \text{Spec} \varphi \Rightarrow (\text{геом. кратность } \lambda) \leq (\text{алг. кратность } \lambda)$

**Доказательство.** Пусть  $d_\lambda$  — геометрическая кратность  $= \dim V_\lambda(\varphi)$ .

Выберем базис  $(e_1, \dots, e_{d_\lambda})$  в  $V_\lambda(\varphi)$  и дополним его до базиса  $e = (e_1, \dots, e_n)$  всего пространства  $V$ . Тогда  $A(\varphi, e)$  имеет вид:

$$A(\varphi, e) = \left( \begin{array}{ccc|c} \lambda & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & 0 & B \\ 0 & \cdots & \lambda & \\ \hline & 0 & & D \end{array} \right), \text{ количество } \lambda = d_\lambda$$

Тогда

$$\begin{aligned} \chi_\varphi(t) &= \left| \begin{array}{ccc|c} \lambda - t & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & 0 & B \\ 0 & \cdots & \lambda - t & \\ \hline & 0 & & D - tE \end{array} \right| = \\ &= (-1)^n (\lambda - t)^{d_\lambda} \det(D - tE) = (-1)^{n-d_\lambda} (t - \lambda)^{d_\lambda} \det(D - tE) \end{aligned}$$

Отсюда,  $(\text{алг. кратн.}) \geq d_\lambda = (\text{геом. кратн.})$ .

### 36. Линейная независимость собственных подпространств линейного оператора, отвечающих попарно различным собственным значениям. Диагонализуемость линейного оператора, у которого число корней характеристического многочлена равно размерности пространства

**Определение.**  $v_1, \dots, v_s$  — линейно независимы  $\iff \forall v_1 \in V_1, \dots, v_s \in V_s$  из условия  $v_1 + \dots + v_s = 0$  следует  $v_1 = \dots = v_s = 0$ .

Пусть  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\} \subseteq \text{Срес}\varphi$ ,  $\lambda_i \neq \lambda_j \forall i, j$ .

**Предложение.** Подпространства  $V_{\lambda_1}(\varphi), \dots, V_{\lambda_s}(\varphi)$  — линейно независимы.

**Доказательство.**

$s = 1$ : очевидно.

Пусть доказано для всех  $< s$ , докажем для  $s$ :

Пусть  $v_1 \in V_{\lambda_1}(\varphi), \dots, v_s \in V_{\lambda_s}(\varphi)$  и  $v_1 + \dots + v_s = 0$  (\*)  $\implies \varphi(v_1) + \dots + \varphi(v_s) = \varphi(0) = 0$   
 $\implies \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_s v_s = 0$

Вычтем (\*), умноженное на  $\lambda_s$ :  $(\lambda_1 - \lambda_s)v_1 + \dots + (\lambda_{s-1} - \lambda_s)v_{s-1} = 0$ .

Так как  $\lambda_i \neq \lambda_s$  при  $i \neq s$ , то по предположению индукции получаем:  $v_1 = \dots = v_{s-1} = 0$ . Тогда (\*) влечет  $v_s = 0$ .

**Следствие.** Если  $\chi_\varphi(t)$  имеет ровно  $n$  попарно различных корней, то  $\varphi$  — диагонализуем.

**Доказательство.** Пусть  $\text{Срес}\varphi = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ ,  $\lambda_i \neq \lambda_j$  при  $i \neq j$ . В каждом  $V_{\lambda_i}(\varphi)$  возьмем ненулевой вектор  $v_i$ , тогда по предыдущему предложению векторы  $v_1, \dots, v_n$  — линейно независимы  $\implies v_1, \dots, v_n$  — базис из собственных векторов  $\implies \varphi$  — диагонализуем.

### 37. Два критерия диагонализуемости линейного оператора

**Теорема.** Линейный оператор  $\varphi$  диагонализуем  $\iff$  выполнены следующие два условия:

1.  $\chi_\varphi(t)$  разлагается на линейные множители
2.  $\forall \lambda \in \text{Срес}\varphi$  (геом. кратн.) = (алг. кратн.)

**Доказательство.**

$(\Rightarrow)$   $\varphi$  диагонализуем  $\rightarrow$  существует базис  $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  такой, что

$$A(\varphi, \mathfrak{e}) = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Тогда } \chi_\varphi(t) = (-1)^n \begin{vmatrix} \mu_1 - t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n - t \end{vmatrix} = (t - \mu_1)(t - \mu_2) \dots (t - \mu_n) \Rightarrow \text{условие 1.}$$

Теперь перепишем  $\chi_\varphi(t)$  в виде  $\chi_\varphi(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \dots (t - \lambda_s)^{k_s}$ , где  $\lambda_i \neq \lambda_j$  при  $i \neq j$  и  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\} = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ .

Тогда  $\forall i = 1, \dots, s$ :  $V_{\lambda_i}(\varphi) \equiv \langle e_i \mid \mu_i = \lambda_i \rangle \Rightarrow \dim V_{\lambda_i}(\varphi) \geq \underset{\text{геом. кр.}}{k_i} \Rightarrow (\text{геом. кр.}) = (\text{алг. кр.}) \Rightarrow \text{условие 2.}$

$(\Leftarrow)$  Пусть  $\chi_\varphi(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \dots (t - \lambda_s)^{k_s}$ , где  $\lambda_i \neq \lambda_j$  при  $i \neq j$ .



Из условия 2 получаем, что  $\dim V_{\lambda_i}(\varphi) = k$ . Так как  $V_{\lambda_1}(\varphi), \dots, V_{\lambda_s}(\varphi)$  — линейно независимы, то  $\dim(V_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V_{\lambda_s}(\varphi)) = \dim V_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + \dim V_{\lambda_s}(\varphi) = k_1 + \dots + k_s = n \Rightarrow V_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V_{\lambda_s}(\varphi) = V \Rightarrow V = V_{\lambda_1}(\varphi) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_s}(\varphi)$ .

$\forall i = 1, \dots, s$  пусть  $e_i$  — базис в  $V_{\lambda_i}(\varphi)$ , тогда  $e_1 \cup \dots \cup e_s$  — базис  $V$  — он состоит из собственных векторов  $\Rightarrow \varphi$  — диагонализуем.

### 38. Существование одномерного или двумерного инвариантного подпространства для линейного оператора в векторном пространстве над $\mathbb{R}$

**Теорема.** Если  $F = \mathbb{R}$ , то  $\forall \varphi \in L(V)$  существует либо одномерное, либо двумерное  $\varphi$ -инвариантное подпространство.

**Доказательство.**

1.  $\chi_\varphi(t)$  имеет действительные корни  $\Rightarrow$  есть собственные векторы  $\Rightarrow$  есть одномерное  $\varphi$ -инвариантное подпространство.
2.  $\chi_\varphi(t)$  не имеет действительных корней.

Пусть  $\lambda + i\mu$  — комплексный корень  $\chi_\varphi(t)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\mu \neq 0$ .

Выберем базис  $e = (e_1, \dots, e_n)$  в  $V$ . Пусть  $A = A(\varphi, e)$ . Над  $e$  у  $\varphi$  есть собственный вектор  $\Rightarrow$  существует  $u \in \mathbb{R}^n$  и  $v \in \mathbb{R}^n$ , такие что  $A(u + iv) = (\lambda + i\mu)(u + iv) = (\lambda u - \mu v) + i(\mu u + \lambda v)$ .

Также  $A(u + iv) = Au + iAv$ .

Отделив действительные и мнимые части, получаем: 
$$\begin{cases} Au = \lambda u - \mu v, \\ Av = \mu u + \lambda v \end{cases}$$

Пусть  $x \in V$  — вектор с координатами  $u$ , а  $y \in V$  — вектор с координатами  $v$ .

Тогда  $\begin{cases} \varphi(x) = \lambda x - \mu y, \\ \varphi(y) = \mu x + \lambda y \end{cases} \Rightarrow U = \langle x, y \rangle$  —  $\varphi$ -инвар. подпространство и  $\dim U \leq 2$ .

### 39. Линейный оператор в евклидовом пространстве, сопряжённый к данному: определение, существование, единственность. Матрица сопряженного оператора в произвольном и ортонормированном базисах

**Определение.** Линейный оператор  $\psi \in L(\mathbb{E})$  называется **сопряженным** к  $\varphi$ , если  $(x, \varphi(y)) = (\psi(x), y) \quad \forall x, y \in \mathbb{E}$ .

$$\beta_\varphi = \beta_\psi^T$$

**Предложение.**

1.  $\psi$  существует, причём единственно.
2. если  $e$  — ортонормированный базис в  $\mathbb{E}$ , то  $A_\psi = A_\varphi^T$ , где  $A_\varphi = A(\varphi, e)$ ,  $A_\psi = A(\psi, e)$ .

**Доказательство.** Пусть  $e$  — базис в  $\mathbb{E}$ .  $G = G(e_1, \dots, e_n)$ .

$$B(\beta_\varphi^T, e) = A_\psi^T G$$

$$B(\beta_\varphi, e) = G A_\psi$$

$A_\psi^T G = G A_\psi \Leftrightarrow G A_\psi = A_\varphi^T G \quad (G = G^T) \Leftrightarrow A_\psi = G^{-1} A_\varphi^T G$ . Отсюда следует существование и единственность  $\psi$ .

Если  $e$  — ортонормированный базис, то  $G = E \Rightarrow A_\varphi = A_\varphi^T$ .

## 40. Самосопряженный линейный оператор в евклидовом пространстве: инвариантность ортогонального дополнения к инвариантному подпространству и существование собственного вектора

**Предложение.**  $\varphi = \varphi^*$ ,  $U \in \mathbb{E}$  —  $\varphi$ -инвариантное подпространство  $\Rightarrow U^\perp$  — тоже  $\varphi$ -инвариантное подпространство.

**Доказательство.**

Имеем  $\varphi(U) \in U$ .

Хотим  $\varphi(U^\perp) \in U^\perp$ .

$$\forall x \in U, \forall y \in U^\perp : \left( \underset{\in U}{x}, \varphi(y) \right) = \left( \varphi(x), \underset{\in U^\perp}{y} \right) = 0$$

**Предложение.**  $\varphi = \varphi^* \Rightarrow$  в  $\mathbb{E}$  существует собственный вектор.

**Доказательство.** Знаем существование либо  $\begin{cases} 1\text{-мерного } \varphi\text{-инвариантного подпространства,} \\ 2\text{-мерного } \varphi\text{-инвариантного подпространства} \end{cases}$

1. Ок

2.  $U \in \mathbb{E}$  —  $\varphi$ -инвариантное подпространство,  $\dim U = 2$ .

Фиксируем  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — ортонормированный базис в  $U$ .

$\psi := \varphi|_U$ ,  $\psi = \psi^*$ .

$$\Delta = \Delta(\varphi, e) \Rightarrow \Delta = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

$$\chi_\psi(t) = (-1)^2 \begin{vmatrix} a-t & b \\ b & c-t \end{vmatrix} = t^2 - (a+c)t + ac - b^2.$$

$D = (a+c)^2 - 4(ac - b^2) = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0 \Rightarrow \chi_\psi(t)$  имеет действительные корни  $\Rightarrow$  у  $\psi$  есть собственный вектор  $\Rightarrow$  у  $\varphi$  также есть собственный вектор.

## 41. Самосопряженный линейный оператор в евклидовом пространстве: существование ортонормированного базиса из собственных векторов, ортогональность собственных подпространств, отвечающих различным собственным значениям. Приведение квадратичной формы к главным осям

**Теорема.**  $\varphi = \varphi^* \Rightarrow$  в  $\mathbb{E}$  есть ортонормированный базис из собственных векторов. В частности,  $\varphi$  диагонализуем над  $\mathbb{R}$  и  $\chi_\psi \varphi(t)$  разлагается на линейные множители.

**Доказательство.** Индукция по  $n$ .

$n = 1$ : ясно.

$n > 1$ : существует собственный вектор  $v$ .

Предположим  $e_1 = \frac{v}{|v|}$ ,  $U = \langle e_1 \rangle$ .  $U$  —  $\varphi$ -инвариантное подпространство  $U^\perp$  — тоже  $\varphi$ -инвариантно.

$\dim U^\perp = n - 1 \Rightarrow$  по предположению индукции в  $U^\perp$  существует ортонормированный базис  $e_1, \dots, e_n$  из собственных векторов. Тогда  $(e_1, \dots, e_n)$  — искомый ортонормированный базис.

**Следствие.**  $\varphi = \varphi^*$ ,  $\lambda, \mu \in \text{Spes } \varphi$ ,  $\lambda \neq \mu \Rightarrow \mathbb{E}_\lambda(\varphi) \perp \mathbb{E}_\mu(\varphi)$ .

**Доказательство.** Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — ортонормированный базис из собственных векторов:  $\varphi(e_i) = \lambda e_i$ .

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \Rightarrow \varphi(v) = x_1 \lambda_1 e_1 + \dots + x_n \lambda_n e_n.$$

$$\varphi(v) = \lambda v \Leftrightarrow v \in \langle x_i \lambda_i e_i = \lambda \rangle \Rightarrow \mathbb{E}_\lambda(\varphi) \perp \mathbb{E}_\mu(\varphi) \text{ при } \lambda \neq \mu.$$

**Следствие** (приведение кв. ф. к главным осям). Для любой квадратичной формы  $Q : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$  существует ортонормированный базис  $e = (e_1, \dots, e_n)$ , такой что в нём  $Q$  имеет канонический вид  $Q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$  (главные оси — это  $\langle e_1 \rangle, \dots, \langle e_n \rangle$ ).

**Доказательство.** Существует единственный самосопряжённый линейный оператор  $\varphi \in L(\mathbb{E})$ , такой что  $Q(x) = (x, \varphi(x))$ , для любого ортонормированного базиса  $e : B(Q, e) = A(\varphi, e)$ , где  $A$  — диагонализуема.

## 42. Ортогональный линейный оператор в евклидовом пространстве: определение, пять эквивалентных условий

**Определение.** Линейный оператор  $\varphi \in L(\mathbb{E})$  называется **ортогональным**, если  $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y) \forall x, y \in \mathbb{E}$  (то есть  $\varphi$  сохраняет скалярное произведение).

**Предложение.** Для  $\varphi \in L(\mathbb{E})$  следующие условия эквивалентны:

1.  $\varphi$  — ортогональный линейный оператор
2.  $\varphi$  сохраняет длину, то есть  $|\varphi(x)| = |x|, \forall x \in \mathbb{E}$
3.  $\exists \varphi^{-1}$ , причём  $\varphi^{-1} = \varphi^*$  (т.е.  $\varphi \varphi^* = \varphi^* \varphi = \text{Id}$ )
4. Для любого ортонормированного базиса  $e$  матрица  $A(\varphi, e)$  диагональна
5. Для любого ортонормированного базиса  $e = (e_1, \dots, e_n) : (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$  — тоже ортонормированный базис.

**Доказательство** (из Каина).

$$(1 \Rightarrow 2) \quad |\varphi(x)| = \sqrt{(\varphi(x), \varphi(x))} = \sqrt{(x, x)} = |x|$$

$$(1 \& 2 \Rightarrow 3) \quad \text{Найдём ядро } \varphi: \varphi(x) = 0 \Rightarrow |\varphi(x)| = 0 \Rightarrow |x| = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Получаем  $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ , следовательно, существует  $\varphi^{-1}$ . Докажем, что  $\varphi^{-1} = \varphi$ :

$$(\varphi(x)^{-1}, y) = (\varphi(\varphi(x)^{-1}), \varphi(y)) = (x, \varphi(y))$$

$$(3 \Leftrightarrow 4) \quad \text{Пусть } e \text{ — ортонормированный базис, } A = A(\varphi, e). \text{ Тогда } \begin{cases} A(\varphi^{-1}, e) = A^{-1}, \\ A(\varphi^*, e) = A^T \end{cases} \Rightarrow$$

$A^T = A^{-1} \Rightarrow A$  — ортогональная матрица.

$$(4 \Rightarrow 5) \quad \text{Пусть } e = (e_1, \dots, e_n) \text{ — ортонормированный базис. Тогда верно, что}$$

$$(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (e_1, \dots, e_n)A, \quad A = A(\varphi, e)$$

Так как  $A$  — ортонормированная матрица, то  $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$  — ортонормированный базис.

$$(5 \Rightarrow 1) \quad e \text{ — ортонормированный базис, } x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, \quad y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n.$$

$$\begin{aligned} (\varphi(x), \varphi(y)) &= (\varphi(\sum_{i=1}^n x_i e_i), \varphi(\sum_{j=1}^n y_j e_j)) = \\ &= (\varphi(\sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i)), \varphi(\sum_{j=1}^n y_j \varphi(e_j))) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (\varphi(e_i), \varphi(e_j)) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (e_i, e_j) = (x, y). \end{aligned}$$

## 43. Классификация ортогональных линейных операторов в одномерном и двумерном евклидовых пространствах

Нет записей

## 44. Ортогональный линейный оператор в евклидовом пространстве: инвариантность ортогонального дополнения к инвариантному подпространству, теорема о каноническом виде. Классификация ортогональных линейных операторов в трёхмерном евклидовом пространстве

**Предложение.**  $\varphi \in L(\mathbb{E})$  — ортогональный оператор.  $\varphi \subseteq \mathbb{E}$  —  $\varphi$ -инвариантное подпространство  $\implies U^\perp$  — тоже  $\varphi$ -инвариантно

**Доказательство.**

Имеем  $\varphi(U) \subseteq U$ .

Хотим  $\varphi(U^\perp) \subseteq U^\perp$ .

Положим  $\psi = \varphi|_U$ . Тогда  $\psi$  — ортогональный линейный оператор на  $U \Rightarrow \exists \psi^{-1}$ . Тогда

$$\forall x \in U, \forall y \in U^\perp : \underset{\in U}{(x, \varphi(y))} = (\varphi^*(x), y) = (\varphi^{-1}(x), y) = (\underset{\in U}{\psi^{-1}(x)}, \underset{\in U^\perp}{y}) = 0$$

**Теорема.** Для любого ортогонального оператора  $\varphi \in L(\mathbb{E})$  существует ортонормированный базис, в котором

$$A(\varphi, \mathfrak{e}) = \begin{pmatrix} \Pi(\alpha_1) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \Pi(\alpha_k) & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} (*), \text{ где } \Pi(\alpha_i) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{pmatrix}$$

**Доказательство.** Индукция по  $n$ .

$n = 1, 2$  было разобрано на лекциях.

Для  $n > 2$ : существует либо одномерное, либо двумерное  $\varphi$ -инвариантное подпространство  $U$ . Тогда  $\mathbb{E} = U \oplus U^\perp$  и  $U^\perp$  —  $\varphi$ -инвариантно.

Так как  $\dim U < n$ ,  $\dim U^\perp < n$ , то по предположению индукции в  $U$ ,  $U^\perp$  существуют ортонормированные базисы с требуемым свойством.

Объединение этих базисов даёт требуемый базис в  $\mathbb{E}$  с точностью до перестановки блоков.

**Следствие.** Для любого ортогонального линейного оператора  $\varphi$  в  $\mathbb{R}^3$  существует ортонормированный базис  $\mathfrak{e}$ , такой что либо  $A(\varphi, \mathfrak{e}) = \begin{pmatrix} \Pi(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  (поворот), либо  $A(\varphi, \mathfrak{e}) = \begin{pmatrix} \Pi(\alpha) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  (зеркальный поворот).

**Доказательство.** По теореме существует такой базис, в котором матрица  $\varphi$  имеет  $(*)$  вид. Если в  $(*)$  есть блок  $\Pi(\alpha)$ , то всё хорошо. Иначе матрица имеет вид  $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ , но  $\Pi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\Pi(1) = \Pi(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

## 45. Теорема о сингулярных базисах для линейного отображения евклидовых пространств. Сингулярные значения линейного отображения. Сингулярное разложение матрицы и её сингулярные значения

**Теорема.** Существуют ортонормированные базисы  $e$  в  $E$  и  $f$  в  $E'$  такие что

$$A(\varphi, e, f) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \sigma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_r & & 0 & \\ \hline & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array} \right), \quad \underbrace{\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r}_{\text{определены однозначно}} > 0.$$

**Доказательство.**  $E = \text{Ker} \varphi \oplus (\text{Ker} \varphi)^\perp$ .

$\dim(\text{Ker} \varphi)^\perp = r = \dim \text{Im}.$

$\forall x, y \in ((\text{Ker} \varphi)^\perp)$  положим  $\beta(x, y) = (\varphi(x), \varphi(y))'$ . Тогда  $\beta(x, y)$  — симметричная билинейная форма на  $(\text{Ker} \varphi)^\perp$ . Более того, квадратичная форма  $Q(x) = \beta(x, x)$  — положительно определена:  $Q(x) = (\varphi(x), \varphi(x))' \geq 0$ . Если  $Q(x) = 0$ , то  $\varphi(x) = 0 \Rightarrow x \in (\text{Ker} \varphi \cap (\text{Ker} \varphi)^\perp) \Rightarrow x = 0$ .

Приведём квадратичную форму к главным осям.

Существует ортонормированный базис  $e_0 = (e_1, \dots, e_r)$  в  $(\text{Ker} \varphi)^\perp$ , такой что матрица  $B(Q, e_0) = \text{diag}(s_1, \dots, s_r)$ . Так как  $Q > 0$ , то все  $s_i > 0$ .

Без ограничения общности можно считать, что  $s_1 \geq \dots \geq s_r > 0$ . Положим  $\sigma_i = \sqrt{s_i}$ ,  $i = 1, \dots, r$ .  $f_i = \frac{1}{\sigma_i} \varphi(e_i)$ .

Тогда  $(f_i, f_j)' = \left( \frac{1}{\sigma_i} \varphi(e_i), \frac{1}{\sigma_j} \varphi(e_j) \right)' = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} (\varphi(e_i), \varphi(e_j))' = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \beta(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq j, \\ \frac{s_i}{\sigma_i^2} = 1, & \text{при } i = j \end{cases}$

Получили, что  $f_1, \dots, f_r$  — это ортонормированный базис в  $\text{Im} \varphi$ . Теперь дополним  $e_0$  до ортонормированного базиса  $e$  в  $E$  и дополним  $f_1, \dots, f_r$  до ортонормированного базиса  $f$  в  $E$ . Тогда

$$A(\varphi, e, f) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \sigma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_r & & 0 & \\ \hline & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array} \right),$$

Числа  $\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2$  — собственные значения в матрице квадратичной формы  $Q$  в любом ортонормированном базисе  $\Rightarrow \sigma_1, \dots, \sigma_r$  определены однозначно.

**Следствие** (сингулярное разложение матрицы).  $SVD = \text{"singular value decomposition"}$

$\forall A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$  существует ортогональные матрицы  $U \in M_m(\mathbb{R})$  и  $V \in M_n(\mathbb{R})$ , такие что

$$A = U\Sigma V^T, \text{ где } \Sigma = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \sigma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_r & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & 0 & & & & 0 \end{array} \right), \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0.$$

Более того, числа  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  определены однозначно.

**Доказательство.** Применим Теорему о сингулярных базисах к линейному отображению  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $x \mapsto Ax$ .

Тогда  $\exists$  орт. и  $U \in M_m(\mathbb{R})$  и  $V \in M_n(\mathbb{R})$ , такие что

$$U^{-1}AV = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \sigma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_r & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & 0 & & & & 0 \end{array} \right) = \Sigma$$

$$\Leftrightarrow A = U\Sigma V^{-1} = U\Sigma V^T.$$