Curbe Bézier

Mihai-Sorin Stupariu

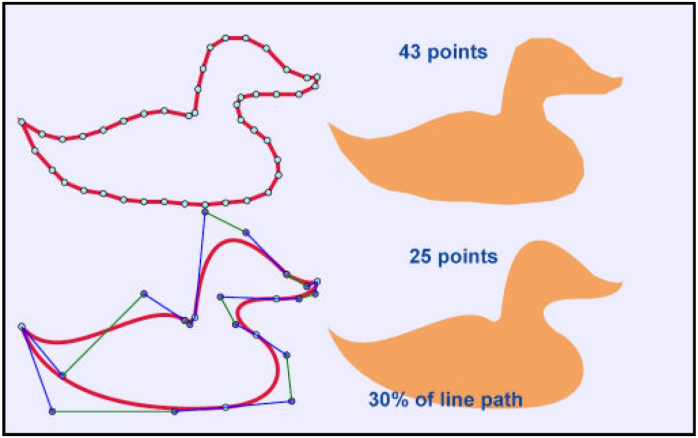
Sem. al II-lea, 2021 - 2022

Mecanism

Input: O mulțime de puncte (poligon de control)
Output: Curba reprezentată
Resurse online pentru curbele Bézier:
https://javascript.info/bezier-curve;
https://www.jasondavies.com/animated-bezier/

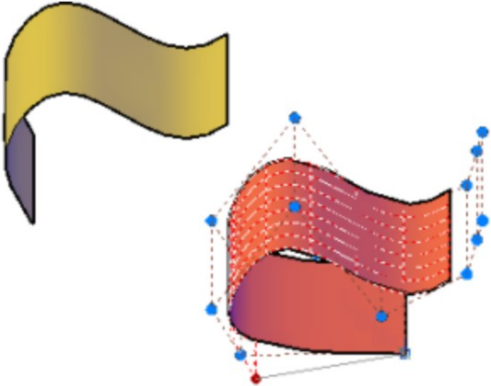
Mecanism

Input: O mulțime de puncte (poligon de control)
Output: Curba reprezentată



Sursa: Duce et al, SVG tutorial

Același principiu funcționează și pentru suprafețe



Sursa: Knowledge Autodesk

Exemple de curbe în planul $\mathbb{R}^2$

1. Curbe reprezentate folosind ecuații (reprezentări implicite)

(i) $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ (cerc)

(ii) $x_1^2 - x_2 = 0$ (parabolă)

(iii) $\cos(x_1) \cdot e^{\sin(x_2)} + \ln(e^{\cos(x_2)} + 1) = 0$

(o ecuație în care apare o 'legătură' între coordonate).

Exemple de curbe în planul $\mathbb{R}^2$

2. Curbe reprezentate folosind ecuații (reprezentări) parametrice

(i) $\begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = 4t + 2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ (t = parametru)

$\rightarrow$ dreaptă

(ii) $\begin{cases} x_1 = \cos(t) \\ x_2 = \sin(t) \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ cerc

(iii) $\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t^2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ parabolă

Exemple de curbe în planul $\mathbb{R}^2$

2. Curbe reprezentate folosind ecuații (reprezentări) parametrice

(iv) $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$; $c(t) = (t^3 - 5t^2 + 4,\ t^2 - 4t - 1)$

$$\begin{cases} x_1 = t^3 - 5t^2 + 4 \\ x_2 = t^2 - 4t - 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

curbă polinomială

$\boxed{\text{curbă Bézier}}$

(v) $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (t, |t|) = \begin{cases} (t, t), & t \geq 0 \\ (t, -t), & t < 0 \end{cases}$

curbă polinomială pe porțiuni

$\boxed{\text{curbă spline}}$

(vi) $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = \left(\dfrac{-t^2 + 1}{t^2 + 1}, \dfrac{2t}{t^2 + 1} \right)$

curbă rațională

$\boxed{\text{curbă Bézier rațională}}$

Imaginea geometrică a acestei curbe este cercul de centru O și rază 1 din care este eliminat $(-1, 0)$

NURBS

Definiție - curbă parametrizată

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval. **O curbă parametrizată** de clasă $\mathcal{C}^k$ este dată de o aplicație $\mathcal{C}^k$-diferențiabilă $c : I \to \mathbb{R}^n$. Aplicația c se numește **parametrizare**, iar mulțimea $M := \mathrm{im(c)}$ se numește **imagine geometrică a curbei**.

Dacă $n = 2$ curba se numește **plană** (**curbă 2D**), iar dacă $n = 3$ curba se numește **strâmbă** (**curbă 3D**).

Exemple

(i) Curbele

$$c_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad c_1(t) = (2 + 4t + 1, -2 - 4t);$$

$$c_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad c_2(t) = (4 - 3\cos t, 3 + 2\sin t);$$
$$c_2' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad c_2'(t) = (4 - 3\cos 3t, 3 + 2\sin 3t);$$
$$c_2'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad c_2''(t) = (4 - 3\cos(1 - t), 3 + 2\sin(1 - t));$$
$$c_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad c_3(t) = (2 - t + t^2 - t^3 + 6t^4, 1 + t + 2t^2 + 3t^3);$$
$$c_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ c_4(t) = (t^2 - 2t + 2, 2t^2 - 6t + 4) =$$
$$= t^2(1,0) + 2t(1-t)(1,1) + (1-t)^2(2,4);$$

$$c_5 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad c_5(t) = (t^3 + 3t, -3t^2 + 3t) =$$
$$= t^3(4,0) + 3t^2(1-t)(2,1) + 3t(1-t)^2(1,1) + (1-t)^3(0,0)$$

sunt curbe parametrizate plane de clasă $\mathcal{C}^\infty$.

Exemple

(ii) Curba $c_6 : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $c_6(t) = (t, t|t|)$ este de clasă $\mathcal{C}^1$, dar nu este de clasă $\mathcal{C}^2$, iar curba $c_6' : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $c_6'(t) = (t, |t|)$ este de clasă $\mathcal{C}^0$, dar nu este de clasă $\mathcal{C}^1$.

(iii) Curbele $c_7 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $c_7(t) = (2\cos t, 2\sin t, t)$ și

$$c_8 : [0, 1] \to \mathbb{R}^3, \quad c_8(t) = (-2t^3 + 3t^2, 4t^3 - 6t^2 + 3t, t^3) =$$
$$= t^3(1, 1, 1) + 3t^2(1 - t)(1, 0, 0) + 3t(1 - t)^2(0, 1, 0) + (1 - t)^3(0, 0, 0)$$

sunt curbe strâmbe de clasă $\mathcal{C}^\infty$.

Definicție - curbe polinomiale / polinomiale pe porțiuni

1. O **curbă polinomială de grad** d este o curbă definită de o parametrizare polinomială, i.e. de o aplicație $c = (c_1, \ldots, c_n) : I \to \mathbb{R}^n$ cu proprietatea că $c_1, \ldots, c_n$ sunt funcții polinomiale de grad cel mult d și cel puțin una dintre ele are grad exact d.

2. O curbă dată de o aplicație $c : [u_0, u_L] \to \mathbb{R}^n$ se numește **polinomială pe porțiuni** dacă există o diviziune

$$u_0 < u_1 < \ldots < u_i < u_{i+1} < \ldots < u_L$$

a intervalului $[u_0, u_L]$ astfel ca pentru orice $i = 0, \ldots, L-1$, restricția $c|_{[u_i, u_{i+1}]}$ a aplicației c la intervalul $[u_i, u_{i+1}]$ să fie polinomială.

Exemple

(i) Curbele c_1, c_3, c_4 și c_5 din exemplul anterior sunt curbe polinomiale de grade 1, 4, 2, respectiv 3.

(ii) Orice curbă polinomială $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ este o curbă polinomială pe porțiuni.

(iii) Curbele c_6 și c_6' sunt curbe polinomiale pe porțiuni care nu sunt curbe polinomiale, deoarece avem

$$c_6(t) = \begin{cases} (t, -t^2), & \text{dacă } t \in [-1, 0] \\ (t, t^2), & \text{dacă } t \in [0, 1]. \end{cases}$$

$$c_6'(t) = \begin{cases} (t, -t), & \text{dacă } t \in [-1, 0] \\ (t, t), & \text{dacă } t \in [0, 1]. \end{cases}$$