Tudorache Alexandru-Theodor
Grupa 342

Examen Calculabilitate și Complexitate

I

1.

a) P;
while $x_i \neq 0$ do P end

b) if $x_i = 0$ do end
else do P until $x_i = 0$ end

2. Fie funcțiile min și max definite astfel:

~~$min : N \times N \to N$, $min(x, y) = sub(add(x, y), m$~~

$max : N \times N \to N$, $max(x, y) = add(x, sub(y, x))$

$min : N \times N \to N$, $min(x, y) = sub(add(x, y), max(x, y))$,

unde add și sub sunt funcțiile primitiv recursive definite în curs. Deci max și min sunt funcții primitiv recursive.

Funcția f cerută va fi:

$f : N \times N \to N$

$f(m, 0) = m$

$f(0, m) = m$

$f(m, n) = f(max(m, n) - min(m, n), min(m, n))$,

care este primitiv recursivă.

II

4)

a) Cum graful G_1 este conex, numărul minim n_1 a.î. G_1 are o colorare cu n_1 culori trebuie să fie ≥ 2.

Fie $c : V \to \{1, \dots, n_1\}$ funcția de colorare.

Cum $n_1 \geq 2$, mulțimea ~~pe care~~ în care ia valori funcția c are minim 2 valori, deci este minim $\{1, 2\}$

Având funcția c definită astfel:

$c : V \to \{1, 2\}$, $c(A) = 1$, $c(B) = 2$, $c(C) = 2$, $c(D) = 2$, $c(E) = 1$, $c(F) = 1$, $c(G) = 1$, $c(H) = 1$, $c(I) = 1$, $c(J) = 1$, $c(K) = 1$, $c(L) = 1$, $c(M) = 1$, $c(N) = 2$, $c(O) = 2$, $c(P) = 2$, $c(Q) = 1$

obținem o colorare cu 2 culori.

Deci $n_1 = 2$

b) Graful G_2 prezintă următorul ciclu de lungime impară:

$A - C - I - O - Q - A$, de lungime 5.

Din cauza acestui ciclu, graful nu poate fi bipartit, deci nu poate ~~fi colora~~ avea o colorare în 2 culori.

Deci, numărul minim ~~nr~~ n_2 a.î. G_2 are o colorare cu n_2 culori trebuie să fie ≥ 3.

Având funcția c definită astfel:

$c: V \to \{1,2,3\}$, $c(A)=1$, $c(B)=2$, $c(C)=2$, $c(D)=2$, $c(E)=1$, $c(F)=1$, $c(G)=1$, $c(H)=1$, $c(I)=1$, $c(J)=1$, $c(K)=1$, $c(L)=1$, $c(M)=1$, $c(N)=2$, $c(O)=2$, $c(P)=2$, $c(Q)=3$

Obținem o colorare cu 3 culori.

Deci $n_2 = 3$

6.

$$\forall x \forall y \exists z \forall v (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg z \vee x) \wedge (\neg z \vee y) \wedge (\neg z \vee v)$$

Alegând $x=1, y=1, v=0$, pentru orice z, ~~propoziția~~ formula de mai sus este falsă.

Dacă $z=0$, avem:

$$(0 \vee 0 \vee 0) \wedge (1 \vee 1) \wedge (1 \vee 1) \wedge (1 \vee 0) =$$

$$0 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 = 0$$

Dacă $z=1$, avem:

$$(0 \vee 0 \vee 1) \wedge (0 \vee 1) \wedge (0 \vee 1) \wedge (0 \vee 0) =$$

$$1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0 = 0$$

Astfel, am produs o demonstrație a faptului că formula este falsă, deci propoziția nu este în mulțimea TQBF.