

Nume și prenume: TUDORACHE ALEXANDRU-THEODOR
Grupa: 242

Nota: _____

Examen

6 Februarie 2021

Timpul de rezolvare al problemelor este de 3h. Pentru transmiterea soluțiilor în format PDF¹ în folderul vostru de pe Dropbox aveți 30 de minute timp suplimentar. Astfel, pentru dumneavoastră examenul începe la **ora 13 și 6 minute** și se termină la **ora 16 și 36 minute**.



Toate documentele, computerele personale, telefoanele mobile și/sau calculatoarele electronice de mână sunt autorizate. Orice modalitate de comunicare între voi este **strict interzisă**. Fiecare subiect valorează 10 puncte. Mult succes !

Exercițiul 1

10p

Se consideră variabilele aleatoare independente X și Y având repartițiile:

$$X \sim \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 0.39 & 0.35 & 0.26 \end{pmatrix}; Y \sim \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0.92 & 0.05 & 0.03 \end{pmatrix}$$

Să se determine repartițiile variabilelor aleatoare $X + Y$, $X - Y$, $4X^2 + 4Y^2$ și să se afle $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $Var(X)$, $Var(Y)$, $Var(7X - 7Y + 8)$, $Var(2XY + 3)$, $Cov(X, Y)$ și $\rho(X, Y)$ (coeficientul de corelație).

Exercițiul 2

10p

O instanță de judecată formată din trei judecători găsește că o persoană este vinovată atunci când cel puțin doi dintre cei trei judecători consideră că această decizie este fondată. Admitem faptul că în cazul în care acuzatul este în adevăr vinovat, fiecare judecător se va pronunța în acest sens cu probabilitatea 0.75, independent de ceilalți doi. Această probabilitate scade la 0.18 în cazul în care acuzatul este nevinovat. Știm că 68% dintre acuzați sunt vinovați. Determinați care este probabilitatea ca cel de-al treilea judecător să voteze vinovat în fiecare din situațiile următoare:

- primii doi judecători au făcut acest lucru
- cel puțin unul dintre primii doi judecători au votat vinovat
- primii doi judecători nu au votat vinovat.

Exercițiul 3

10p

La un adăpost de câini sunt 4 câini din rasa Labrador Retriever și 18 câini din rasa Rottweiler. O familie se duce la adăpost și alege doi câini pentru a-i adopta din care cel puțin unul este Labrador Retriever. Care este probabilitatea ca și celălalt să fie tot Labrador Retriever ?

Exercițiul 4

10p

Știm că într-un lot de 7 telefoane mobile Huawei două prezintă defecte de fabricație. Telefoanele sunt testate unul după celălalt până când cele două telefoane defecte sunt depistate. Fie X numărul de teste efectuate

¹Pentru a transforma pozele în format PDF puteți folosi, de exemplu, programul CamScanner

pentru identificarea primului telefon defect și Y numărul de teste suplimentare pentru identificarea celui de-al doilea telefon defect.

- Determinați repartiția comună a cuplului (X, Y) și repartițiile marginale.
- Găsiți media și varianța lui X și respectiv Y și coeficientul de corelație dintre X și Y .
- Calculați media și varianța repartiției condiționate a lui X la $Y = 2$.

Exercițiul 5

10p

La o petrecere de final de an participă $n = 106$ perechi - prieten și prietenă - care dansează și se presupune că formarea perechilor la dans este egal probabilă. Care este probabilitatea ca la un moment dat fiecare bărbat să nu danseze cu partenera sa? Calculați limita acestei probabilități atunci când $n \rightarrow \infty$.

Exercițiul 6

10p

Se dă variabila aleatoare X care are densitatea de repartiție

$$f(x) = \frac{x}{100} e^{-\frac{x^2}{200}} \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}}.$$

Să se calculeze raportul $\frac{F^{-1}(0.75) - F^{-1}(0.25)}{\sqrt{\text{Var}(X)}}$, unde F este funcția de repartiție a lui X .

Exercițiul 7

10p

Fie X_1, X_2, \dots, X_n un eșantion de volum n dintr-o populație $\mathcal{U}([0, \theta])$ cu $\theta > 0$ necunoscut.

- Determinați estimatorul obținut prin metoda momentelor.
- Arătați că $\hat{\theta}_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ este estimatorul obținut prin metoda verosimilității maxime. Determinați funcția de repartiție a lui $\hat{\theta}_n$.
- Arătați că $\hat{\theta}_n$ este un estimator consistent pentru θ .
- Arătați că $\hat{\theta}_n$ nu este un estimator nedeplasat pentru θ și construiți un asemenea estimator.