

## Subiectul 1

Se dă un graf neorientat conex cu  $n > 3$  vârfuri și  $m > n$  muchii. Să se afișeze punctele critice în care sunt incidente muchii critice. Pentru fiecare astfel de punct se va afișa numărul de muchii critice care sunt incidente în el și numărul de componente biconexe care îl conțin, fără a memora componentele biconexe ale grafului și fără a memora muchiile critice.

### Complexitate $O(m)$

Informațiile despre graf se citesc din fișierul graf.in cu structura:

- pe prima linie sunt  $n$  și  $m$
- pe următoarele  $m$  linii sunt câte 2 numere naturale reprezentând extremitățile unei muchii

graf.in	lesire pe ecran (nu neaparat in aceasta ordine)
9 10 1 2 1 3 2 4 2 7 4 7 4 5 4 6 5 6 7 8 7 9	Puncte critice cerute: 1: incidente 2 muchii critice este in 2 componente biconexe 2: incidente 1 muchii critice este in 2 componente biconexe 7: incidente 2 muchii critice este in 3 componente biconexe



## Subiectul 2

Se citesc informații despre un graf **orientat fără circuite**  $G$  din fișierul `graf.in`.

Fișierul are următoarea structură:

- Pe prima linie sunt două numere reprezentând numărul de vârfuri  $n$  ( $n > 4$ ) și numărul de arce  $m$  ale grafului
- Pe următoarele  $m$  linii sunt câte 3 numere întregi reprezentând extremitatea inițială, extremitatea finală și costul unui arc din graf (costul unui arc poate fi și **negativ**).
- Pe penultima linie este un nod sursa  $s$
- Pe ultima linie sunt un număr natural  $k$  ( $0 < k < n$ ) reprezentând numărul de vârfuri destinație și  $k$  numere naturale  $t_1, t_2, \dots, t_k$  reprezentând vârfuri destinație din  $G$ .

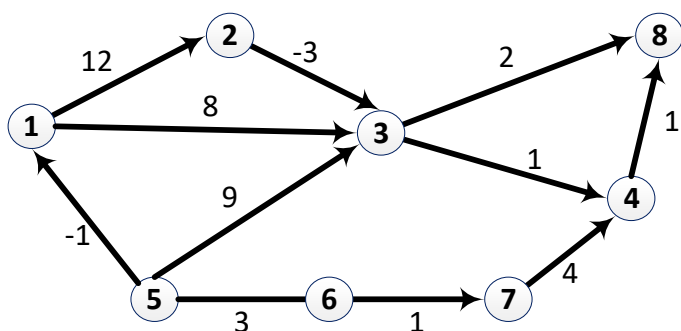
Spunem că un vârf  $y$  este accesibil din  $x$  în  $G$  dacă există un drum de la  $x$  la  $y$ . Presupunem că există cel puțin un vârf destinație care este accesibil din vârful sursă  $s$ .

- a) Să se determine un vârf destinație care este cel mai depărtat de  $s$ , dar care este accesibil din  $s$  (un vârf destinație  $t$  pentru care  $d(s, t) = \max \{d(s, t_i) \mid i = 1, \dots, k, t_i \text{ accesibil din } s\}$ ).

**Complexitate  $O(n+m)$**

- b) Pentru vârfurile  $s$  și  $t$  de la a) să se determine dacă există mai multe drumuri minime de la  $s$  la  $t$ . Dacă există doar unul, se va afișa acest drum, dacă nu se vor afișa două dintre drumurile minime de la  $s$  la  $t$ . **Complexitate  $O(n+m)$**

graf.in	iesire pe ecran (nu este unică)
8 11 1 2 12 2 3 -3 1 3 8 3 8 2 3 4 1 4 8 1 5 1 -1 5 3 9 5 6 3 6 7 1 7 4 4 5 2 8 4	a) 8 b) 5 6 7 4 8 5 1 3 8



Explicații:

Sursa este 5, destinațiile sunt 8 și 4

$d(5, 8) = 9$

$d(5, 4) = 8 \Rightarrow$  cea mai depărtată destinație de 5 este 8

### Subiectul 3

Fișierul graf.in conține următoarele informații despre un graf **bipartit** conex:

- pe prima linie sunt 2 numere naturale  $n$  și  $m$  reprezentând numărul de vârfuri și numărul de muchii
- pe următoarele  $m$  linii sunt perechi de numere  $x$   $y$  (separate prin spațiu) reprezentând extremitățile unei muchii

Se consideră graful  $G$  dat în fișierul graf.in. Notăm cu  $k$  numărul de vârfuri de grad impar din graf.

a) Folosind un algoritm de determinare a unui flux maxim într-o rețea de transport, determinați un cuplaj maxim în subgraful indus de mulțimea vârfurilor de grad impar din  $G$ .

b) Folosind punctul a) determinați dacă există  $k/2$  muchii care se pot elimina din  $G$  astfel încât să se obțină un graf cu următoarele proprietăți:

- gradul fiecărui vârf din  $G'$  este egal cu cel din  $G$  sau cu unu mai mic.
- în  $G'$  în fiecare componentă conexă există câte un ciclu care conține toate muchiile din componentă (o singura dată) **Complexitate  $O(nm^2)$**

graf.in	lesire pe ecran (solutia nu este unica)
8 9 1 5 1 6 1 7 2 5 3 5 3 7 3 4 8 7 8 4	1 6 2 5 3 7

