

Tema 1

Load Balance

1)

a)

Fie setul de date 80, 80, 40

Pentru acest exemplu, atat solutia optima, cat si cea propusa de student obtin incarcatura de 80 pe o masina si de 120 pe cealalta, astfel:

Masina 1: 80

Masina 2: 80, 40

Asadar, solutia studentului poate fi 1-aproximativa (adica optima), deci inclusiv 1.1 aproximativa.

b)

Cum una dintre masini are incarcatura de 120, pentru ca algoritmul sa fie 1.1 aproximativ, in solutia optima o masina ar trebui sa aiba incarcatura de minim $120/1.1 = 109.09 \approx 109$, asadar cealalta masina ar trebui sa aiba incarcatura de maxim $200 - 109 = 91$.

Presupunem prin absurd ca exista OPT o solutie optima cu incarcatura 109 pe masina 1 si 91 pe masina 2. Cum o activitate are timpul de lucru cel mult 10, daca extragem o activitate de pe masina 1 si o punem pe masina 2, in noua solutie pe masina 1 va fi o incarcatura cuprinsa intre 99 si 108, iar pe masina 2 o incarcatura cuprinsa intre 92 si 101, astfel obtinandu-se o solutie mai buna decat OPT ($108 < 109$; $101 < 109$). Absurd.

Daca presupunem ca exista o solutie optima cu o incarcatura mai mare decat 109 pe masina 1 si mai mica decat 91 pe masina 2, se va ajunge tot la o noua solutie optima, deoarece diferenta dintre incarcaturile masinilor va creste, astfel putandu-se obtine solutii din ce in ce mai bune decat cea din presupunere.

Deci, solutia optima nu poate contine o masina cu incarcatura de minim 109, astfel algoritmul propus de student nu poate fi 1.1 aproximativ.

3)

Fie k = indicele masinii cu load-ul maxim rezultat in urma executarii algoritmului

Deci solutia obtinuta de algoritm este $ALG = load(k)$

Fie j = ultima activitate adaugata pe masina k .

Fie $load'(i)$ = load-ul masinii i fix inainte ca activitatea j sa fie pusa pe masina k , adica load-ul masinii i dupa ce au fost distribuite primele $j-1$ activitati.

Asadar, $ALG = load(k) = load'(k) + t_j$

Cum algoritmul selecteaza masina cu load minim si pune pe ea urmatoarea activitate, $load'(k) \leq load'(i), \forall i \in \{1, \dots, m\}$

$$\text{Deci } load'(k) \leq \frac{1}{m} \sum_{1 \leq i \leq m} load'(i) = \frac{1}{m} \sum_{1 \leq i < j} t_i \leq \frac{1}{m} (\sum_{1 \leq i \leq n} t_i - t_j) \leq \frac{1}{m} \sum_{1 \leq i \leq n} t_i - \frac{t_j}{m} \Rightarrow load'(k) + t_j \leq \frac{1}{m} \sum_{1 \leq i \leq n} t_i + t_j(1 - \frac{1}{m})$$

- Daca $j \leq m$, atunci activitatea j va fi pusa pe o masina goala, deci $ALG = t_{\max} \leq OPT$, unde t_{\max} este activitatea cu timpul de lucru maxim. In acest caz, algoritmul este optim.
- Daca $j > m$, atunci:

$$load'(k) + t_j \leq \frac{1}{m} \sum_{1 \leq i \leq n} t_i + t_j \left(1 - \frac{1}{m}\right) \leq OPT + t_j \left(1 - \frac{1}{m}\right)$$

Cum activitatile sunt ordonate descrescator dupa timpul de lucru, iar $j > m$, atunci rezulta ca: $t_j \leq \frac{1}{2}(t_m + t_{m+1})$, de unde $\Rightarrow ALG \leq OPT + \left(1 - \frac{1}{m}\right) * \frac{1}{2}(t_m + t_{m+1})$

Din Lema 3(Curs 2, slide 43) avem $OPT \geq t_m + t_{m+1}$

$$\Rightarrow ALG \leq OPT + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2m}\right) * OPT = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2m}\right) * OPT$$

Deci, algoritmul dat este $\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2m}\right)$ aproximativ.