

# Tema 1

## Vertex Cover

a)

Algoritmul descris poate face maxim  $m$  iteratii prin multimea  $C$ , unde  $m$  este lungimea multii  $C$ . Acest caz se intampla atunci cand se alege aleator din  $C_j$  un  $x_i$  care nu se mai afla in niciun alt predicat din  $C$ .

Algoritmul optim poate face cel putin 1 iteratie prin multimea  $C$ . Acest caz se intampla atunci cand se alege un  $x_i$  din multimea  $X$  pentru a fi true, acest  $x_i$  facand parte din toate predicatele din  $C$ .

Worst-case-ul factorului de aproximare al algoritmului este dat de cazul in care in multimea  $X$  exista un singur  $x_i$  care se afla in toate predicatele din  $C$ , iar algoritmul Greedy-3CNF ( $C, X$ ) nu-l va alege la nicio iteratie prin multimea  $C$  pe  $x_i$ . In acest caz, algoritmul Greedy va face numarul maxim de  $m$  iteratii, iar cel optim o singura iteratie.

Astfel, factorul de aproximare al algoritmului este  $m$ , deci algoritmul este  $m$ -aproximativ.

b)

1:  $C = \{C_1, \dots, C_m\}$  mulțimea de predicate,  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  - mulțime de variabile

2: cât timp  $C \neq \emptyset$  execută

3: Alegem aleator  $C_j \in C$ .

4: Fie  $a_1, a_2, a_3$  variabilele din  $C_j$ .

5:  $a_1 \leftarrow \text{true}$ ;  $a_2 \leftarrow \text{true}$ ;  $a_3 \leftarrow \text{true}$ .

6: Eliminăm din  $C$  toate predicatele care conțin una dintre variabilele  $a_1, a_2, a_3$ .

7: return  $X$

Fie  $T = \{x_i \mid x_i = \text{true}\}$  dupa executarea algoritmului propus mai sus

Trebuie sa aratam ca  $|T| \leq 3\text{OPT}$ , unde  $\text{OPT}$  este numarul de elemente din  $X$  care au valoarea *true*, rezultat in urma executarii algoritmului optim.

Fie  $C^*$  multimea de predicate selectate la pasul 3 al algoritmului (*Alegem aleator*  $C_j \in C$ ). Cum la pasul 6 eliminam din  $C$  toate predicatele ce contin pe oricare dintre variabilele  $a_1, a_2, a_3$  extrase la pasul 5, in multimea  $C^*$  vor fi numai predicate ce contin variabile diferite.

Fie  $S = \{x_i \mid x_i = \text{true}\}$  dupa executarea algoritmului optim. Cum in multimea  $C^*$  vor fi numai predicate ce contin variabile diferite, atunci fiecare variabila din  $S$  este continuta in cel mult un predicat din  $C^*$ , de unde rezulta ca  $|S| = \text{OPT} \geq |C^*|$

$$|C^*| = \frac{1}{3} * |T|$$

Deci:

$$\text{OPT} \geq |C^*| = \frac{1}{3} * |T|$$

$$\text{OPT} \geq \frac{1}{3} * |T|$$

$$3\text{OPT} \geq |T|$$

Deci algoritmul propus mai sus este 3-aproximativ.

c)

Fie  $f(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{daca } x_i = \text{true in multimea } X \text{ aleasa de mine} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

Trebuie sa minimizam  $\sum_{1 \leq i \leq n} f(x_i)$

Constrangeri:

$f(x_j) + f(x_k) + f(x_l) \geq 1$ , pentru oricare  $C_i(x_j, x_k, x_l) \in C$ ;

$0 \leq f(x_i) \leq 1$ , pentru orice  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$