Grafică rasterială – Procesarea imaginilor

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. al II-lea, 2021 - 2022

Motivație

- Trei imagini digitale: una originalul, celelalte utilizează tehnici de compresie.

Image A

Image B

Image C

Sursa: C. Bénéteau, C. Haddad, D. Ruch, P. Van Fleet, *Why Wavelets?*, IMA Wavelet Workshop, 2011

Motivație

- Trei imagini digitale: una originalul, celelalte utilizează tehnici de compresie.

Image A

Image B

Image C

Sursa: C. Bénéteau, C. Haddad, D. Ruch, P. Van Fleet, *Why Wavelets?*, IMA Wavelet Workshop, 2011

- Originalul, (149604 bytes - Image B); a doua și a treia utilizează tehnici de compresie și contin 12253 bytes (Image C), respectiv 4452 bytes (Image A) (8%, respectiv 3% din original).

Semnale discrete și semnale continue

- O imagine digitală poate fi privită ca un *semnal* (adică o funcție $s : A \to B$).

Semnale discrete și semnale continue

- O imagine digitală poate fi privită ca un *semnal* (adică o funcție $s : A \to B$).
- Semnalele pot fi clasificate ca fiind:
    - discrete / continue (depinzând de domeniul A)
    - 1D / 2D / .... (depinzând de domeniul A)
    - scalare / vectoriale (depinzând de codomeniul B)

Semnale discrete și semnale continue

- O imagine digitală poate fi privită ca un *semnal* (adică o funcție $s : A \to B$).
- Semnalele pot fi clasificate ca fiind:
  - discrete / continue (depinzând de domeniul A)
  - 1D / 2D / .... (depinzând de domeniul A)
  - scalare / vectoriale (depinzând de codomeniul B)
- Este necesară / utilă tranziția

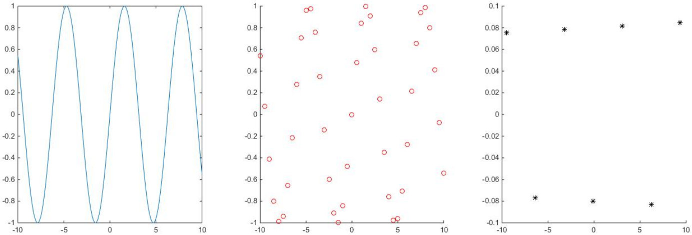
discret $\longleftrightarrow$ continuu ($\longleftarrow$ eșantionare / sampling; $\longrightarrow$ reconstrucție)

Semnale discrete și semnale continue

- O imagine digitală poate fi privită ca un *semnal* (adică o funcție $s : A \to B$).
- Semnalele pot fi clasificate ca fiind:
  - discrete / continue (depinzând de domeniul A)
  - 1D / 2D / .... (depinzând de domeniul A)
  - scalare / vectoriale (depinzând de codomeniul B)
- Este necesară / utilă tranziția

discret $\longleftrightarrow$ continuu ($\longleftarrow$ eșantionare / sampling; $\longrightarrow$ reconstrucție)

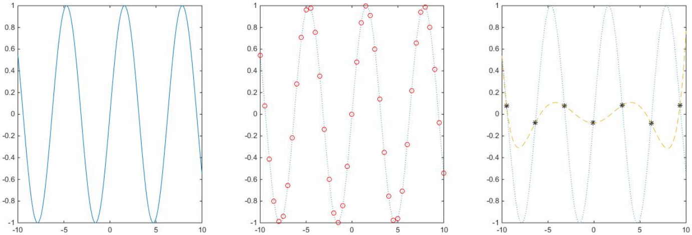
- Exemplu de semnal discret și eșantionarea acestuia.



Semnale discrete și semnale continue

- O imagine digitală este privită ca un *semnal* (adică o funcție $s : A \to B$).
- Semnalele pot fi clasificate ca fiind:
  - discrete / continue (depinzând de domeniul A)
  - 1D / 2D / .... (depinzând de domeniul A)
  - scalare / vectoriale (depinzând de codomeniul B)
- Este necesară / utilă tranziția

  discret $\longleftrightarrow$ continuu ($\longleftarrow$ eșantionare / sampling; $\longrightarrow$ reconstrucție)
- Exemplu de semnal discret și eșantionarea acestuia.



Imaginile ca semnale discrete

- O *imagine digitală* este un semnal discret, ce poate fi modelat cu ajutorul matricelor.

Imaginile ca semnale discrete

- O *imagine digitală* este un semnal discret, ce poate fi modelat cu ajutorul matricelor.
- Folosind reprezentarea matriceală, pot fi efectuate diferite operații. De exemplu, dacă $c = 0.5$ și A este semnalul inițial, atunci $c \times A$ este o imagine cu un contrast mai redus; dacă T este matricea care are toate elementele 255 / 1 (valoarea maximă admisă), atunci $T - A$ este "negativul" imaginii inițiale A, etc.

Semnalul A și semnalul $c \cdot A$ ($c = 0.5$). Semnalul A și semnalul $T - A$, unde T este matricea care are toate elementele 255 / 1 (valoarea maximă admisă). Semnalul A și semnalul $V \cdot A \cdot W$, cu V, W convenabil alese.

Sursa: C. Bénéteau, C. Haddad, D. Ruch, P. Van Fleet, *Why Wavelets?*, IMA Wavelet Workshop, 2011

Produsul de convoluție - motivație

- Manevrarea / procesarea semnalelor se realizează cu ajutorul unei operații numite produs de convoluție.

Produsul de convoluție - motivație

- Manevrarea / procesarea semnalelor se realizează cu ajutorul unei operații numite produs de convoluție.
- În cazul 1D continuu, un semnal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este înlocuit cu un nou semnal,

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \int_{x-r}^{x+r} f(t)dt.$$

Produsul de convoluție - motivație

- Manevrarea / procesarea semnalelor se realizează cu ajutorul unei operații numite produs de convoluție.
- În cazul 1D continuu, un semnal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este înlocuit cu un nou semnal,
$$\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \int_{x-r}^{x+r} f(t)dt.$$
- Pentru un semnal discret $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, se generează un nou semnal $\tilde{a}$, având valoarea corespunzătoare unui număr i dat de media aritmetică a valorilor vecinilor:
$$\tilde{a} : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \quad \tilde{a}[i] = \frac{1}{2r+1} \sum_{j=i-r}^{i+r} a[j].$$

Produsul de convoluție - motivație

- Manevrarea / procesarea semnalelor se realizează cu ajutorul unei operații numite produs de convoluție.
- În cazul 1D continuu, un semnal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este înlocuit cu un nou semnal,

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \int_{x-r}^{x+r} f(t)dt.$$

- Pentru un semnal discret $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, se generează un nou semnal $\tilde{a}$, având valoarea corespunzătoare unui număr i dat de media aritmetică a valorilor vecinilor:

$$\tilde{a} : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \quad \tilde{a}[i] = \frac{1}{2r+1} \sum_{j=i-r}^{i+r} a[j].$$

- În loc de media aritmetică, poate fi considerată o medie ponderată.

Exemplu

Semnal $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ discret; se consideră un nou semnal $\tilde{a} : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, în care avem:

$$\tilde{a}[i] = \frac{1}{16} a[i-2] + \frac{4}{16} a[i-1] + \frac{6}{16} a[i] + \frac{4}{16} a[i+1] + \frac{1}{16} a[i+2]$$

$\forall i$

$$\underbrace{\frac{1}{16}, \frac{4}{16}, \frac{6}{16}, \frac{4}{16}, \frac{1}{16}}_{\text{coeficienții pot fi priviți ca termeni ai unui alt semnal, numit "filtru/kernel"}} \text{ (ponderi)}$$

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$; $f[0] = \frac{6}{16}$; $f[1] = f[-1] = \frac{4}{16}$; $f[2] = f[-2] = \frac{1}{16}$, restul 0

Exemplu

Cu noile notații: $\tilde{a}[i] = f[2]\,a[i-2] + f[1]\,a[i-1] + f[0]\,a[i] +$
$+ f[-1]\,a[i+1] + f[-2]\,a[i+2]$

$$\tilde{a}[i] = \underline{\frac{1}{16}}\,a[i-2] + \underline{\frac{4}{16}}\,a[i-1] + \underline{\frac{6}{16}}\,a[i] + \underline{\frac{4}{16}}\,a[i+1] + \underline{\frac{1}{16}}\,a[i+2],$$

$\forall i$

$$\underbrace{\frac{1}{16},\ \frac{4}{16},\ \frac{6}{16},\ \frac{4}{16},\ \frac{1}{16}}_{\text{coeficienții pot fi priviți ca termeni ai unui alt semnal, numit "filtru/kernel"}} \quad (\text{ponderi})$$

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$; $f[0] = \frac{6}{16}$; $f[1] = f[-1] = \frac{4}{16}$; $f[2] = f[-2] = \frac{1}{16}$, restul 0

Cazul 1D (discret)

- **Notații.** Semnale discrete și continue
  - **Semnal discret:**

$$a : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}; \quad i \mapsto a[i]$$

  - **Semnal continuu:**

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ (cu suport compact)}; \quad x \mapsto f(x)$$

- **Convoluție 1D – cazul discret**
  Definiție. Fie $a, b : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ semnale discrete. **Convoluția (produsul de convoluție)** este semnalul $a \star b : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ dat de formula

$$(a \star b)[i] = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a[j]\, b[i-j].$$

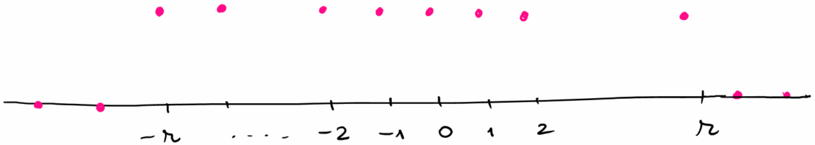
$\delta : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}; \ \delta[a] = \begin{cases} 1, & a = 0 \\ 0, & a \neq 0 \end{cases}$

- **Proprietăți ale produsului de convoluție – cazul discret:** asociativitate, comutativitate, element neutru (semnalul δ), distributivitate față de adunarea funcțiilor.

Exemplu: filtrul constant și convoluția cu un semnal

Filtrul constant (box filter)

fixăm $r \geq 0$.



$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$; $f[i] = \begin{cases} \frac{1}{2r+1}, & \text{dacă } i = -r, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, r \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

⚠ Suma tuturor valorilor este 1.

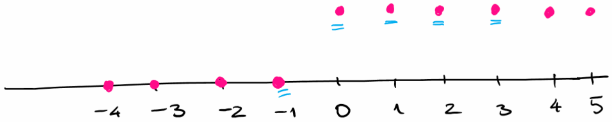
⚠ $r = 0 \Rightarrow$ se obține δ

Exemplu: filtrul constant și convoluția cu un semnal

Concret: $n=2$; deci $f[j] = \begin{cases} \frac{1}{5}, & j=-2,-1,0,1,2 \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$

(filtrul)

Semnal: a : $a[i] = \begin{cases} 1, & i \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$



Fixăm de exemplu $i=1$.

$$(f*a)[1] = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f[j]\,a[1-j] \overset{\text{! restul } f[j]=0}{=} \underbrace{f[-2]}_{=\frac{1}{5}} \cdot \overbrace{a[\overbrace{1-(-2)}^{3}]}^{1} +$$

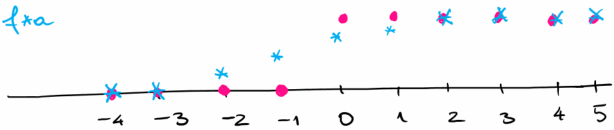
$$+ \underbrace{f[-1]}_{=\frac{1}{5}} \underbrace{a[\underbrace{1-(-1)}_{2}]}_{=1} + \underbrace{f[0]}_{=\frac{1}{5}} \underbrace{a[1-0]}_{=1} + \underbrace{f[1]}_{\frac{1}{5}} \underbrace{a[1-1]}_{1} + \underbrace{f[2]}_{\frac{1}{5}} \underbrace{a[1-2]}_{0} = \frac{4}{5}$$

Exemplu: filtrul constant și convoluția cu un semnal

Concret: $n=2$: deci $f[j] = \begin{cases} \frac{1}{5}, & j = -2, -1, 0, 1, 2 \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$

(filtrul)

Semnal: a : $a[i] = \begin{cases} 1, & i \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$



$(f*a)[1] = 0.8 \left(= \frac{4}{5}\right)$; $(f*a)[0] = 0.6 \left(= \frac{3}{5}\right)$ etc.

$$(f*a)[i] = \begin{cases} \frac{i+3}{5}, & i = -2, -1, 0, 1, 2 \\ 0, & i \leq -3 \\ 1, & i \geq 3 \end{cases}$$