Curbe Bézier

Mihai-Sorin Stupariu

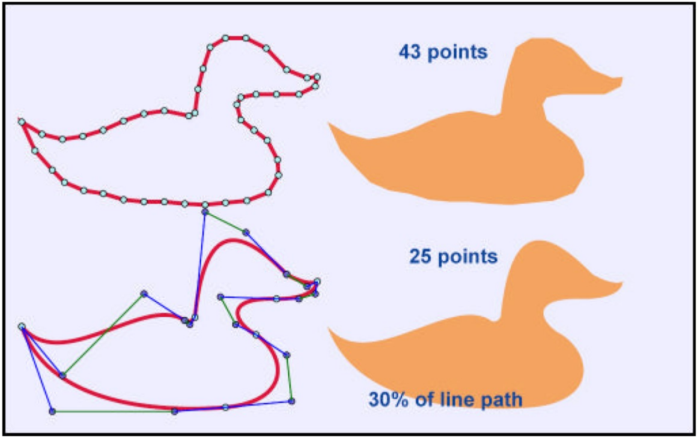
Sem. al II-lea, 2021 - 2022

Mecanism

Input: O mulțime de puncte (poligon de control)
Output: Curba reprezentată
Resurse online pentru curbele Bézier:
https://javascript.info/bezier-curve;
https://www.jasondavies.com/animated-bezier/

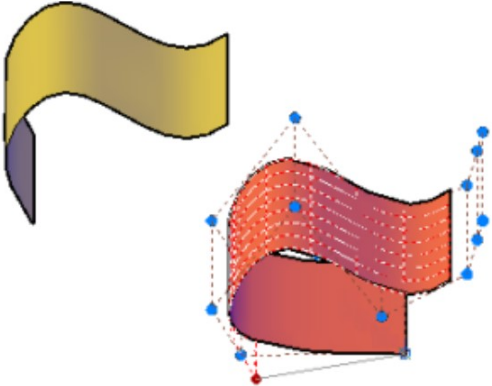
Mecanism

Input: O mulțime de puncte (poligon de control)
Output: Curba reprezentată



Sursa: Duce et al, SVG tutorial

Același principiu funcționează și pentru suprafețe



Sursa: Knowledge Autodesk

Exemple de curbe în planul $\mathbb{R}^2$

1. Curbe reprezentate folosind ecuații (reprezentări implicite)

(i) $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ (cerc)

(ii) $x_1^2 - x_2 = 0$ (parabolă)

(iii) $\cos(x_1) \cdot e^{\sin(x_2)} + \ln(e^{\cos(x_2)} + 1) = 0$

(o ecuaţie în care apare o 'legătură' între coordonate).

Exemple de curbe în planul $\mathbb{R}^2$

2. Curbe reprezentate folosind ecuații (reprezentări) parametrice

(i) $\underbrace{\begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = 4t + 2 \end{cases}}_{\text{dreaptă}}, \quad t \in \mathbb{R}$ $\quad$ (t = parametru)

(ii) $\underbrace{\begin{cases} x_1 = \cos(t) \\ x_2 = \sin(t) \end{cases}}_{\text{cerc}}, \quad t \in \mathbb{R}$

(iii) $\underbrace{\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t^2 \end{cases}}_{\text{parabolă}}, \quad t \in \mathbb{R}$

Exemple de curbe în planul $\mathbb{R}^2$

2. Curbe reprezentate folosind ecuații (reprezentări) parametrice

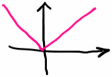
(iv) $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2;\quad c(t)=(t^3-5t^2+4,\ t^2-4t-1)$

$$\begin{cases} x_1 = t^3-5t^2+4 \\ x_2 = t^2-4t-1 \end{cases},\quad t\in\mathbb{R}$$

curbă polinomială

$\boxed{\text{curbă Bézier}}$

(v) $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\ c(t)=(t,|t|)=\begin{cases}(t,t), & t\geq 0\\ (t,-t), & t<0\end{cases}$



curbă polinomială pe porțiuni

$\boxed{\text{curbă spline}}$

(vi) $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\quad c(t)=\left(\dfrac{-t^2+1}{t^2+1},\ \dfrac{2t}{t^2+1}\right)$

curbă rațională

$\boxed{\text{curbă Bézier rațională}}$

Imaginea geometrică a acestei curbe este cercul de centru O și rază 1 din care este eliminat $(-1,0)$

NURBS

Definiție - curbă parametrizată

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval. **O curbă parametrizată** de clasă $\mathcal{C}^k$ este dată de o aplicație $\mathcal{C}^k$-diferențiabilă $c : I \to \mathbb{R}^n$. Aplicația c se numește **parametrizare**, iar mulțimea $M := \mathrm{im(c)}$ se numește **imagine geometrică a curbei**.
Dacă $n = 2$ curba se numește **plană** (**curbă 2D**), iar dacă $n = 3$ curba se numește **strâmbă** (**curbă 3D**).

Exemple

(i) Curbele

$$c_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad c_1(t) = (2 + 4t + 1, -2 - 4t);$$

$$c_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad c_2(t) = (4 - 3\cos t, 3 + 2\sin t);$$
$$c_2' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad c_2'(t) = (4 - 3\cos 3t, 3 + 2\sin 3t);$$
$$c_2'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad c_2''(t) = (4 - 3\cos(1 - t), 3 + 2\sin(1 - t));$$
$$c_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad c_3(t) = (2 - t + t^2 - t^3 + 6t^4, 1 + t + 2t^2 + 3t^3);$$
$$c_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \ c_4(t) = (t^2 - 2t + 2, 2t^2 - 6t + 4) =$$
$$= t^2(1,0) + 2t(1 - t)(1,1) + (1 - t)^2(2,4);$$

$$c_5 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad c_5(t) = (t^3 + 3t, -3t^2 + 3t) =$$
$$= t^3(4,0) + 3t^2(1 - t)(2,1) + 3t(1 - t)^2(1,1) + (1 - t)^3(0,0)$$

sunt curbe parametrizate plane de clasă $\mathcal{C}^\infty$.

Exemple

(ii) Curba $c_6 : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $c_6(t) = (t, t|t|)$ este de clasă $\mathcal{C}^1$, dar nu este de clasă $\mathcal{C}^2$, iar curba $c_6' : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $c_6'(t) = (t, |t|)$ este de clasă $\mathcal{C}^0$, dar nu este de clasă $\mathcal{C}^1$.

(iii) Curbele $c_7 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $c_7(t) = (2\cos t, 2\sin t, t)$ și

$$c_8 : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad c_8(t) = (-2t^3 + 3t^2, 4t^3 - 6t^2 + 3t, t^3) =$$
$$= t^3(1,1,1) + 3t^2(1-t)(1,0,0) + 3t(1-t)^2(0,1,0) + (1-t)^3(0,0,0)$$

sunt curbe strâmbe de clasă $\mathcal{C}^\infty$.

Definicție - curbe polinomiale / polinomiale pe porțiuni

1. O **curbă polinomială de grad** d este o curbă definită de o parametrizare polinomială, i.e. de o aplicație $c = (c_1, \ldots, c_n) : I \to \mathbb{R}^n$ cu proprietatea că $c_1, \ldots, c_n$ sunt funcții polinomiale de grad cel mult d și cel puțin una dintre ele are grad exact d.

2. O curbă dată de o aplicație $c : [u_0, u_L] \to \mathbb{R}^n$ se numește **polinomială pe porțiuni** dacă există o diviziune

$$u_0 < u_1 < \ldots < u_i < u_{i+1} < \ldots < u_L$$

a intervalului $[u_0, u_L]$ astfel ca pentru orice $i = 0, \ldots, L-1$, restricția $c|_{[u_i, u_{i+1}]}$ a aplicației c la intervalul $[u_i, u_{i+1}]$ să fie polinomială.

Exemple

(i) Curbele c_1, c_3, c_4 și c_5 din exemplul anterior sunt curbe polinomiale de grade 1, 4, 2, respectiv 3.

(ii) Orice curbă polinomială $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ este o curbă polinomială pe porțiuni.

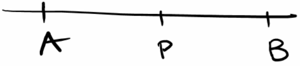
(iii) Curbele c_6 și c_6' sunt curbe polinomiale pe porțiuni care nu sunt curbe polinomiale, deoarece avem

$$c_6(t) = \begin{cases} (t, -t^2), & \text{dacă } t \in [-1, 0] \\ (t, t^2), & \text{dacă } t \in [0, 1]. \end{cases}$$

$$c_6'(t) = \begin{cases} (t, -t), & \text{dacă } t \in [-1, 0] \\ (t, t), & \text{dacă } t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Remember - raport, combinație afină

A, P, B puncte coliniare $(P \neq B)$



raportul punctelor A, P, B: acel scalar r pt. care

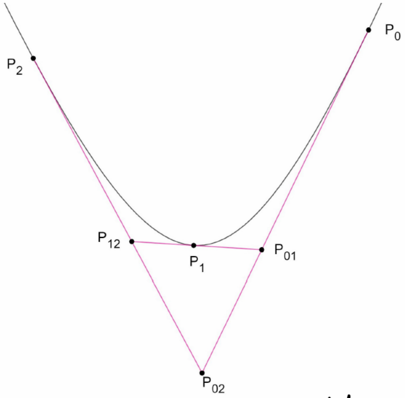
$$\boxed{\overrightarrow{AP} = r \cdot \overrightarrow{PB}} \qquad (r = r(A, P, B))$$

P se poate scrie ca o combinație afină (baricentrică)

$$\boxed{P = (1-\alpha)\cdot A + \alpha B}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

sunt echivalente

O proprietate geometrică

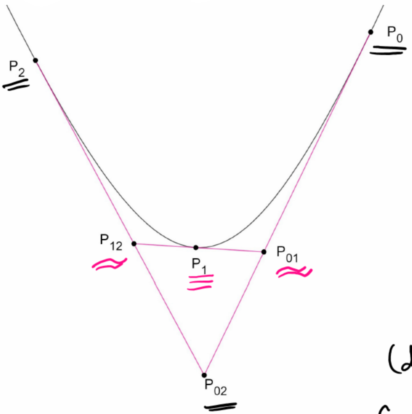


- P_0, P_1, P_2 puncte ale unei parabole
- tangentele la parabolă în aceste puncte
- pp. că aceste tangente se intersectează în punctele P_{01}, P_{02}, P_{12} (ca în figură)

Atunci:

$$\boxed{r(P_0, P_{01}, P_{02}) = r(P_{01}, P_1, P_{12}) = r(P_{02}, P_{12}, P_2)}$$

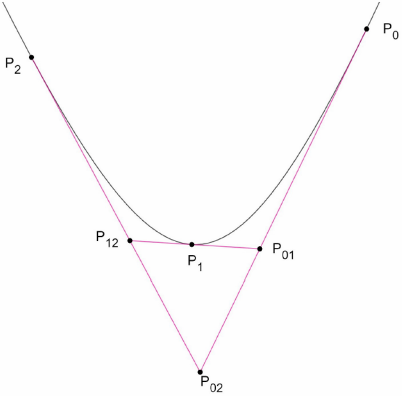
O proprietate geometrică

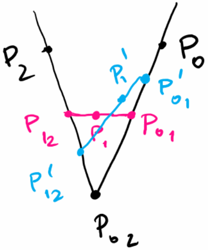


Reciproc: date două puncte ale unei parabole (P_0 și P_2) și tangentele la parabolă în aceste puncte (pp. că se intersectează în P_{02}) $\longrightarrow$ putem reconstitui parabola (determinăm P_{01}, P_{12}, apoi P_1).

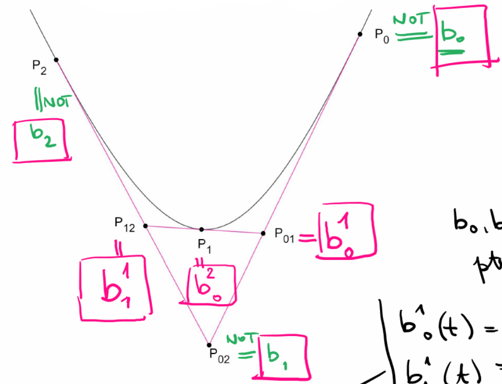
Când raportul variază, P_1 descrie parabola.

O proprietate geometrică





O proprietate geometrică - reformulare



⊛ schimbăm notațiile cf. figurii

⊛ înlocuim formularea cu "raport" cu cea folosind "combinații afine"

$b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^d$ ($\mathbb{R}^2$ ca în desen)

pt. $t \in [0,1]$ (eventual $t \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} b_0^1(t) = (1-t)\,b_0 + t\,b_1 \\ b_1^1(t) = (1-t)\,b_1 + t\,b_2 \\ b_0^2(t) = (1-t)\,b_0^1(t) + t\,b_1^1(t) \end{cases}$$

aceeași combinație afină, întrucât vrem să avem același raport

algoritmul de Casteljau pt. $n = 2$

Schema de Casteljau ($n = 2$)

$$b_0^1(t) = (1-t)\, b_0 + t\, b_1$$
$$b_1^1(t) = (1-t)\, b_1 + t\, b_2$$
$$b_0^2(t) = (1-t)\, b_0^1(t) + t\, b_1^1(t)$$

$$\begin{tikzcd}
(b_0^0) = b_0 \arrow[dr] & & \\
(b_1^0) = b_1 \arrow[r] \arrow[dr] & b_0^1(t) \arrow[dr] & \\
(b_2^0) = b_2 \arrow[r] & b_1^1(t) \arrow[r] & b_0^2(t)
\end{tikzcd}$$

Exemplu - schema de Casteljau ($n = 2$)

$b_0 = (2,4);\ b_1 = (6,8);\ b_2 = (10,4)$

$t = \frac{1}{2}$

Schema de Casteljau :

$$
\begin{tikzcd}
 & & \frac{1}{2}\cdot(2,4) + \frac{1}{2}\cdot(6,8) & \\
(2,4) \arrow[dr] & & & \\
(6,8) \arrow[r] \arrow[dr] & (4,6) \arrow[uur, bend left] \arrow[dr] & & \\
(10,4) \arrow[r] & (8,6) \arrow[r] & (6,6) &
\end{tikzcd}
$$

Schema de Casteljau - forma generală

Fie $b_0, b_1, \ldots, b_n$ poligon de control format din $(n+1)$ puncte. Fie $t \in [0, 1]$ $(t \in \mathbb{R})$ fixat.

$$
\begin{array}{lllll}
(b_0^0) = b_0 & \searrow & & & \\
(b_1^0) = b_1 & \rightarrow & b_0^1(t) & \searrow & \\
(b_2^0) = b_2 & \rightarrow & b_1^1(t) & \rightarrow & b_0^2(t) \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
(b_n^0) = b_n & & b_{n-1}^1(t) & & b_{n-2}^2(t) \quad \cdots\cdots
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
b_0^{n-1}(t) & \searrow & \\
b_1^{n-1}(t) & \rightarrow & b_0^n(t)
\end{array}
$$

$$
\boxed{\begin{array}{lll}
b_r^{m-1}(t) & \searrow & \\
b_{r+1}^{m-1}(t) & \rightarrow & b_r^m(t)
\end{array}}
$$

formula : $\boxed{b_r^m(t) = (1-t)\, b_r^{m-1}(t) + t\, b_{r+1}^{m-1}(t)}$

Algoritmul de Casteljau - Construcția generală

Fie $\mathrm{b}_0, \mathrm{b}_1, \ldots, \mathrm{b}_n \in \mathbb{R}^m$. Pentru $t \in [0,1]$ se notează $\mathrm{b}_i^0(t) := \mathrm{b}_i$ $(i = 0, \ldots, n)$ și se definesc inductiv punctele de Casteljau

$$\mathrm{b}_i^r(t) := (1-t)\mathrm{b}_i^{r-1}(t) + t\mathrm{b}_{i+1}^{r-1}(t), \quad \begin{cases} r = 1, \ldots, n \\ i = 0, \ldots, n-r \end{cases} \tag{1}$$

Variantă algebrică

Revenim la $\underline{n=2}$.

Avem b_0, b_1, b_2 : $b_0^1(t) = (1-t)b_0 + tb_1$

$b_1^1(t) = (1-t)b_1 + tb_2$

$b_0^2(t) = (1-t)\,b_0^1(t) + t\,b_1^1(t) =$

$= (1-t)\,[(1-t)b_0 + tb_1] +$

$t\,[(1-t)\,b_1 + tb_2] \Rightarrow$

$$\boxed{b_0^2(t) = \underbrace{(1-t)^2}_{B_0^2(t)} b_0 + \underbrace{2t(1-t)}_{B_1^2(t)} b_1 + \underbrace{t^2}_{B_2^2(t)} b_2}$$

polinoame Bernstein de grad 2

Exemplu

Fie poligonul de control (b_0, b_1, b_2), unde:

$$b_0 = (0,0); \quad b_1 = (1,3); \quad b_2 = (-3,6)$$

Curba asociată:

$$b^2_0(t) = \underline{(1-t)^2} \cdot b_0 + \underline{2t(1-t)}\, b_1 + \underline{t^2} \cdot b^2 =$$

$$= (1 - 2t + t^2) \cdot (0,0) +$$

$$(2t - 2t^2) \cdot (1,3) +$$

$$t^2 \cdot (-3,6) =$$

$$= (2t - 2t^2 - 3t^2, \; 6t - 6t^2 + 6t^2) =$$

$$= \underbrace{(2t - 5t^2, \; 6t)}_{\text{grad } 2} = \underline{1 \cdot (0,0) + t \cdot (2,6) + t^2 \cdot (-5,0)}$$

! suma polinoamelor Bernstein este 1 => apar combinații afine / baricentrice

Comentarii

- Polinoamele Bernstein de gradul 2 formează o **bază** în spațiul vectorial al polinoamelor de grad mai mic sau egal cu 2, deci **orice** curbă parametrizată polinomial (cu grad ≤ 2) poate fi scrisă folosind polinoame Bernstein.

Comentarii

- Polinoamele Bernstein de gradul 2 formează o **bază** în spațiul vectorial al polinoamelor de grad mai mic sau egal cu 2, deci **orice** curbă parametrizată polinomial (cu grad ≤ 2) poate fi scrisă folosind polinoame Bernstein.
- De fapt: curbele polinomiale de grad mai mic sau egal cu 2 sunt curbele construite folosind algoritmul de Casteljau (sau folosind forma Bernstein) pentru $n = 2$.

Forma algebrică a curbelor Bézier - cazul general

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ fixat. Polinoamele Bernstein de grad n:

$B^n_0(t), B^n_1(t), \ldots\ldots, B^n_n(t)$ sunt:

$$\boxed{B^n_k(t) = C^k_n (1-t)^{n-k} t^k}, \quad k \in \{0, \ldots, n\}$$

Fapt (Teoremă) Dat un poligon de control $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ și $b^n_0(t)$ punctul construit cu alg. de Casteljau, are loc relația:

$$\boxed{b^n_0(t) = \sum_{k=0}^{n} B^n_k(t) \cdot b_k}$$

forma Bernstein a curbei Bézier asociate poligonului $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$

Proprietăți elementare

Fie $(\mathrm{b}_0, \ldots, \mathrm{b}_n)$ un poligon de control din $\mathbb{R}^m$ și $\mathrm{b} : [0, 1] \to \mathbb{R}^m$ curba Bézier asociată.

Proprietăți elementare

Fie $(\mathrm{b}_0, \ldots, \mathrm{b}_n)$ un poligon de control din $\mathbb{R}^m$ și $\mathrm{b} : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ curba Bézier asociată.

(i) b este o curbă polinomială, având gradul mai mic sau egal cu n;

(ii) curba b interpolează extremitățile poligonului de control, i.e. $\mathrm{b}(0) = \mathrm{b}_0$, $\mathrm{b}(1) = \mathrm{b}_n$; în particular, dacă poligonul de control este închis, curba Bézier asociată este închisă;

(iii) **proprietatea acoperirii convexe**: punctele curbei Bézier b se află în acoperirea convexă a punctelor de control;

(iv) **invarianța la schimbări afine de parametru**: dacă $\varphi : [0,1] \to [\alpha, \beta]$, $\varphi(t) = \alpha + t(\beta - \alpha)$ este o schimbare afină de parametru și dacă $\mathrm{b}^{[\alpha,\beta]}$ este curba Bézier asociată poligonului de control $(\mathrm{b}_0, \ldots, \mathrm{b}_n)$, dar definită pe intervalul $[\alpha, \beta]$, atunci $\mathrm{b} = \mathrm{b}^{[\alpha,\beta]} \circ \varphi$;

Proprietăți elementare

Fie $(\mathrm{b}_0, \ldots, \mathrm{b}_n)$ un poligon de control din $\mathbb{R}^m$ și $\mathrm{b} : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ curba Bézier asociată.

(i) b este o curbă polinomială, având gradul mai mic sau egal cu n;

(ii) curba b interpolează extremitățile poligonului de control, i.e. $\mathrm{b}(0) = \mathrm{b}_0$, $\mathrm{b}(1) = \mathrm{b}_n$; în particular, dacă poligonul de control este închis, curba Bézier asociată este închisă;

(iii) **proprietatea acoperirii convexe**: punctele curbei Bézier b se află în acoperirea convexă a punctelor de control;

(iv) **invarianța la schimbări afine de parametru**: dacă $\varphi : [0,1] \to [\alpha, \beta]$, $\varphi(t) = \alpha + t(\beta - \alpha)$ este o schimbare afină de parametru și dacă $\mathrm{b}^{[\alpha,\beta]}$ este curba Bézier asociată poligonului de control $(\mathrm{b}_0, \ldots, \mathrm{b}_n)$, dar definită pe intervalul $[\alpha, \beta]$, atunci $\mathrm{b} = \mathrm{b}^{[\alpha,\beta]} \circ \varphi$;

(v) **invarianță afină**: dacă $\tau : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ este o aplicație afină, atunci curba Bézier asociată poligonului de control date de $(\tau(\mathrm{b}_0), \ldots, \tau(\mathrm{b}_n))$ este curba $\tau(\mathrm{b}^n)$;

(vi) **(Invarianța la combinații baricentrice)**: fie $(\mathrm{b}_0, \ldots, \mathrm{b}_n)$, respectiv $(\widetilde{\mathrm{b}}_0, \ldots, \widetilde{\mathrm{b}}_n)$ două poligoane de control și b, respectiv $\widetilde{\mathrm{b}}$ curbele Bézier corespunzătoare. Pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, curba Bézier asociată poligonului de control $((1-\alpha)\mathrm{b}_0 + \alpha\widetilde{\mathrm{b}}_0, \ldots, (1-\alpha)\mathrm{b}_n + \widetilde{\mathrm{b}}_n)$ este curba $(1-\alpha)\mathrm{b} + \alpha\widetilde{\mathrm{b}}$.

(vii) dacă $\widetilde{\mathrm{b}} : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ este curba Bézier asociată poligonului de control $(\mathrm{b}_n, \ldots, \mathrm{b}_0)$, atunci $\widetilde{\mathrm{b}}(t) = \mathrm{b}(1-t)$, în particular, aceste curbe au aceeași imagine geometrică.

De reținut!

- Orice curbă Bézier este definită/controlată de un poligon de control, acesta este ”memorat/stocat” și determină geometria curbei.

De reținut!

- Orice curbă Bézier este definită/controlată de un poligon de control, acesta este "memorat/stocat" și determină geometria curbei.
- Pentru construcția/randarea curbelor Bézier este folosit algoritmul de Casteljau sau reprezentarea cu polinoame Bernstein.

Motivație

Q: Cum putem genera curbe cât mai complexe?

Motivație

Q: Cum putem genera curbe cât mai complexe?

A:

Motivație

Q: Cum putem genera curbe cât mai complexe?

A:

- Folosind mai multe puncte de control (crește gradul curbei, deci calcule mai complexe).

Motivație

Q: Cum putem genera curbe cât mai complexe?

A:

- Folosind mai multe puncte de control (crește gradul curbei, deci calcule mai complexe).
- Racordând ("punând cap la cap") arce de curbă de grad mai mic. **În practică: curbe de gradul 3 (cubice).**

În continuare...

- **Elemente de avut în vedere:**

În continuare...

- **Elemente de avut în vedere:**
  - Ce înseamnă racordul unor curbe?

În continuare...

- **Elemente de avut în vedere:**
  - Ce înseamnă racordul unor curbe?
  - Cum definim o curbă Bézier pe un interval oarecare? (pas necesar pentru a vorbi despre racord)

În continuare...

- **Elemente de avut în vedere:**
  - Ce înseamnă racordul unor curbe?
  - Cum definim o curbă Bézier pe un interval oarecare? (pas necesar pentru a vorbi despre racord)
  - Ce înseamnă un "racord convenabil"? (astfel ca vectorii tangenți / accelerație să coincidă).

În continuare...

- **Elemente de avut în vedere:**
  - Ce înseamnă racordul unor curbe?
  - Cum definim o curbă Bézier pe un interval oarecare? (pas necesar pentru a vorbi despre racord)
  - Ce înseamnă un "racord convenabil"? (astfel ca vectorii tangenți / accelerație să coincidă).

Curba albastră, curba verde și curba roșie au racord. Curba neagră nu are racord cu niciuna dintre ele. Racordul dintre curba albastră și cea verde este "convenabil".

- **Ce ne așteptăm?**

În continuare...

- **Elemente de avut în vedere:**
  - Ce înseamnă racordul unor curbe?
  - Cum definim o curbă Bézier pe un interval oarecare? (pas necesar pentru a vorbi despre racord)
  - Ce înseamnă un “racord convenabil”? (astfel ca vectorii tangenți / accelerație să coincidă).

Curba albastră, curba verde și curba roșie au racord. Curba neagră nu are racord cu niciuna dintre ele. Racordul dintre curba albastră și cea verde este “convenabil”.

- **Ce ne așteptăm?**
  - Să caracterizăm racordul dintre curbe Bézier folosind poligoanele de control.

Schimbări de parametru

- **Remember:** O curbă parametrizată este dată de o funcție $c : I \to \mathbb{R}^n$ ($I \subset \mathbb{R}$ este un interval, c verifică anumite condiții).

Schimbări de parametru

- **Remember:** O curbă parametrizată este dată de o funcție $c : I \to \mathbb{R}^n$ ($I \subset \mathbb{R}$ este un interval, c verifică anumite condiții).
- **Definiție.** Fie $c : I \to \mathbb{R}^n$ și $\bar{c} : \bar{I} \to \mathbb{R}^n$ două curbe parametrizate. Spunem că c și $\bar{c}$ diferă printr-o **schimbare de parametru** (sau că $\bar{c}$ a fost obținută din c printr-o schimbare de parametru) dacă există un difeomorfism $\varphi : \bar{I} \to I$ (numit **reparametrizare**) astfel ca $\bar{c} = c \circ \varphi$. O reparametrizare φ **păstrează (schimbă) orientarea** dacă este strict crescătoare (respectiv strict descrescătoare).

Schimbări de parametru

- **Remember:** O curbă parametrizată este dată de o funcție $c : I \to \mathbb{R}^n$ ($I \subset \mathbb{R}$ este un interval, c verifică anumite condiții).
- **Definiție.** Fie $c : I \to \mathbb{R}^n$ și $\bar{c} : \bar{I} \to \mathbb{R}^n$ două curbe parametrizate. Spunem că c și $\bar{c}$ diferă printr-o **schimbare de parametru** (sau că $\bar{c}$ a fost obținută din c printr-o schimbare de parametru) dacă există un difeomorfism $\varphi : \bar{I} \to I$ (numit **reparametrizare**) astfel ca $\bar{c} = c \circ \varphi$. O reparametrizare φ **păstrează (schimbă) orientarea** dacă este strict crescătoare (respectiv strict descrescătoare).
- **Observație.** Printr-o reparametrizare imaginea geometrică a curbei considerate nu se modifică, se schimbă doar "modul" in care parcurgem curba.

Schimbări afine de parametru

- O **schimbare afină de parametru (reparametrizare afină)** este o aplicație de forma

$$\varphi : [c, d] \to [a, b], \quad \varphi(t) = \frac{b-a}{d-c} t + \frac{ad-bc}{d-c},$$

unde $[a, b], [c, d] \subset \mathbb{R}$ sunt două intervale (care nu se reduc la un punct).

Observație. Schimbările afine de parametru sunt singurele care mențin o curbă polinomială în clasa curbelor polinomiale de același grad.

Schimbări afine de parametru - Exemple

(i) Fie $c_1, c_2, c_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$c_1(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

$$c_2(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$$

$$c_3(t) = \left(\cos\left(\frac{t}{2}+1\right), \sin\left(\frac{t}{2}+1\right)\right)$$

Schimbări afine de parametru - Exemple

(ii) Aplicațiile c_2, c_2' și c_2'' din Exemplul (i) sunt parametrizări diferite ale elipsei de ecuație $\frac{(x_1-4)^2}{9} + \frac{(x_2-3)^2}{4} = 1$. Schimbările de parametru utilizate sunt $t \mapsto 3t$, respectiv $t \mapsto 1-t$.

Schimbări afine de parametru - Exemple

(ii) Aplicațiile c_2, c_2' și c_2'' din Exemplul (i) sunt parametrizări diferite ale elipsei de ecuație $\frac{(x_1-4)^2}{9} + \frac{(x_2-3)^2}{4} = 1$. Schimbările de parametru utilizate sunt $t \mapsto 3t$, respectiv $t \mapsto 1-t$.

(iii) Aplicația $\varphi : [0,1] \to [0,1]$, $\varphi(t) = 1-t$ este o schimbare afină de parametru care schimbă orientarea. Aplicând această schimbare de parametru curbei polinomiale de gradul 2 dată de $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (t^2 + 4t + 1, t+2)$ obținem curba parametizată $\bar{c} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\bar{c}(t) = (t^2 - 6t + 6, -t + 3)$. Imaginea geometrică a celor două curbe este un arc al parabolei $x_1 - x_2^2 + 3 = 0$, care unește punctele $A = (1,2)$ și $B = (6,3)$. Parametrizarea c "parcurge" acest arc de la A la B, în vreme ce $\bar{c}$ "parcurge" acest arc în sens invers.

Pregătire - extinderea intervalului de definire a unei curbe Bézier

Fie $(b_0, \dots, b_n)$ un poligon de $\underbrace{\text{control}}_{\text{din } \mathbb{R}^d}$. Am definit o curbă Bézier $b : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ (v. alg. de Casteljau / forma Bernstein)

Fie $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ un interval.

$$
\begin{tikzcd}
[\alpha, \beta] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "b \circ \varphi"'] & {[0,1]} \arrow[r, "b"] & \mathbb{R}^d
\end{tikzcd}
$$

φ: schimbare afină de parametru

b: curba Bézier asociată polig. control, definită pe $[0,1]$

Prin definiție $b \circ \varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^d$ este curba Bézier asociată poligonului de control $(b_0, \dots, b_n)$, definită pe $[\alpha, \beta]$.

Formalizare - extinderea intervalului de definire a unei curbe Bézier

Observație. Fie $(\mathrm{b}_0, \mathrm{b}_1, \ldots, \mathrm{b}_n)$ un poligon de control din $\mathbb{R}^m$ și fie $\mathrm{b} : [0, 1] \to \mathbb{R}^m$ curba Bézier asociată. Pentru un interval arbitrar $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ ($\alpha \neq \beta$), definim aplicația (numită **curbă Bézier** definită pe intervalul $[\alpha, \beta]$)

$$\mathrm{b}^{[\alpha,\beta]} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^m, \quad \mathrm{b}^{[\alpha,\beta]} := \mathrm{b} \circ \psi,$$

unde

$$\psi : [\alpha, \beta] \to [0, 1] \quad \psi(u) = \frac{u - \alpha}{\beta - \alpha}$$

este schimbarea afină de parametru de la intervalul $[\alpha, \beta]$ la intervalul $[0, 1]$. În cele ce urmează vom renunța la scrierea intervalului de definiție ca indice superior, acest interval rezultând din context.

Formalizare - extinderea intervalului de definire a unei curbe Bézier

Observație. Fie $(\mathrm{b}_0, \mathrm{b}_1, \ldots, \mathrm{b}_n)$ un poligon de control din $\mathbb{R}^m$ și fie $\mathrm{b} : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ curba Bézier asociată. Pentru un interval arbitrar $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ $(\alpha \neq \beta)$, definim aplicația (numită **curbă Bézier** definită pe intervalul $[\alpha, \beta]$)

$$\mathrm{b}^{[\alpha,\beta]} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^m, \quad \mathrm{b}^{[\alpha,\beta]} := \mathrm{b} \circ \psi,$$

unde

$$\psi : [\alpha, \beta] \to [0,1] \quad \psi(u) = \frac{u - \alpha}{\beta - \alpha}$$

este schimbarea afină de parametru de la intervalul $[\alpha, \beta]$ la intervalul $[0,1]$. În cele ce urmează vom renunța la scrierea intervalului de definiție ca indice superior, acest interval rezultând din context.

Exemplu. Considerăm poligonul de control $(\mathrm{b}_0, \mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2)$ cu $\mathrm{b}_0 = (0,0)$, $\mathrm{b}_1 = (2,0)$, $\mathrm{b}_2 = (2,4)$. Curba Bézier asociată definită pe intervalul $[0,1]$ este

$$\mathrm{b} : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{b}(t) = (4t - 2t^2, 4t^2)$$

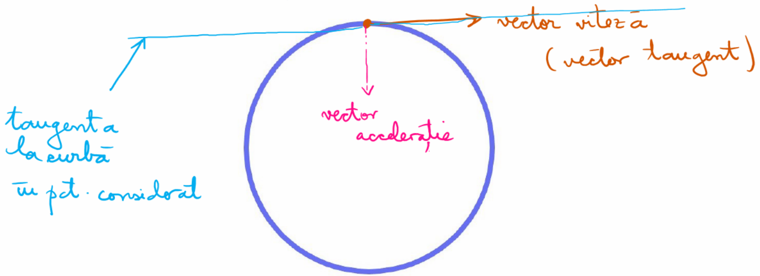
iar curba Bézier asociată aceluiași poligon, dar definită pe intervalul $[2,4]$ este

$$\widetilde{\mathrm{b}} : [2,4] \to \mathbb{R}^2, \quad \widetilde{\mathrm{b}}(u) = \mathrm{b} \circ \psi(u),$$

cu $\psi(u) = \frac{u-2}{4-2}$, deci

$$\widetilde{\mathrm{b}}(u) = \mathrm{b}\left(\frac{u-2}{2}\right) = \left(\frac{-u^2 + 8u - 12}{2}, (u-2)^2\right).$$

Intuiție - vector tangent/vector accelerație



$c(t) = (\cos t, \sin t)$, fixat t_0

vectorul viteză în $c(t_0)$: $c'(t_0) = (-\sin t_0, \cos t_0)$

vectorul accelerație în $c(t_0)$: $c''(t_0) = (-\cos t_0, -\sin t_0)$

Vector tangent, vector accelerație - formalizare

- **Definiție.** Fie $c : I \to \mathbb{R}^n$, $c = (c_1, \ldots, c_n)$ o parametrizare de clasă $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ a unei curbe și $t_0 \in I$ fixat.

  (i) Vectorul $c'(t_0) := (c_1'(t_0), \ldots, c_n'(t_0))$ se numește **vector tangent** (**vector viteză**) la curbă în punctul corespunzător lui $c(t_0)$. Dreapta care trece prin punctul $c(t_0)$ și are direcția dată de vectorul $c'(t_0)$ se numește **tangentă** la curba c în punctul $c(t_0)$.

  (ii) Dreapta care trece prin punctul $c(t_0)$ și este perpendiculară la tangenta la curbă în acest punct se numește **normală** la curba c în punctul $c(t_0)$.

Vector tangent, vector accelerație - formalizare

- **Definiție.** Fie $c : I \to \mathbb{R}^n$, $c = (c_1, \ldots, c_n)$ o parametrizare de clasă $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ a unei curbe și $t_0 \in I$ fixat.

  (i) Vectorul $c'(t_0) := (c_1'(t_0), \ldots, c_n'(t_0))$ se numește **vector tangent** (**vector viteză**) la curbă în punctul corespunzător lui $c(t_0)$. Dreapta care trece prin punctul $c(t_0)$ și are direcția dată de vectorul $c'(t_0)$ se numește **tangentă** la curba c în punctul $c(t_0)$.

  (ii) Dreapta care trece prin punctul $c(t_0)$ și este perpendiculară la tangenta la curbă în acest punct se numește **normală** la curba c în punctul $c(t_0)$.

- Fie $c : I \to \mathbb{R}^n$, $c = (c_1, \ldots, c_n)$ o parametrizare de clasă $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 2)$ a unei curbe și $t_0 \in I$ fixat. Vectorul $c''(t_0) := (c_1''(t_0), \ldots, c_n''(t_0))$ se numește **vector accelerație** la curbă în punctul corespunzător lui $c(t_0)$.

Vector tangent, vector accelerație - formalizare

- **Definiție.** Fie $c : I \to \mathbb{R}^n$, $c = (c_1, \ldots, c_n)$ o parametrizare de clasă $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ a unei curbe și $t_0 \in I$ fixat.

  (i) Vectorul $c'(t_0) := (c_1'(t_0), \ldots, c_n'(t_0))$ se numește **vector tangent** (**vector viteză**) la curbă în punctul corespunzător lui $c(t_0)$. Dreapta care trece prin punctul $c(t_0)$ și are direcția dată de vectorul $c'(t_0)$ se numește **tangentă** la curba c în punctul $c(t_0)$.

  (ii) Dreapta care trece prin punctul $c(t_0)$ și este perpendiculară la tangenta la curbă în acest punct se numește **normală** la curba c în punctul $c(t_0)$.

- Fie $c : I \to \mathbb{R}^n$, $c = (c_1, \ldots, c_n)$ o parametrizare de clasă $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 2)$ a unei curbe și $t_0 \in I$ fixat. Vectorul $c''(t_0) := (c_1''(t_0), \ldots, c_n''(t_0))$ se numește **vector accelerație** la curbă în punctul corespunzător lui $c(t_0)$.

- **Observație** Ecuațiile parametrice ale tangentei la curba c prin punctul $c(t_0)$ sunt

$$\begin{cases} x_1 = c_1(t_0) + s c_1'(t_0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = c_n(t_0) + s c_n'(t_0) \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Alte concepte

- **Definiție.** Fie $c : I \to \mathbb{R}^n$, $c = (c_1, \ldots, c_n)$ o parametrizare de clasă $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ a unei curbe

  (i) Punctul $c(t_0)$ se numește **punct regulat** dacă $c'(t_0) \neq 0$.

  (ii) Punctul $c(t_0)$ se numește **punct singular** dacă $c'(t_0) = 0$.

  (iii) O curbă se numește **regulată** dacă toate punctele sale sunt regulate.

Alte concepte

- **Definiție.** Fie $c : I \to \mathbb{R}^n$, $c = (c_1, \ldots, c_n)$ o parametrizare de clasă $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ a unei curbe

  (i) Punctul $c(t_0)$ se numește **punct regulat** dacă $c'(t_0) \neq 0$.

  (ii) Punctul $c(t_0)$ se numește **punct singular** dacă $c'(t_0) = 0$.

  (iii) O curbă se numește **regulată** dacă toate punctele sale sunt regulate.

- **Definiție.** Fie $c : I \to \mathbb{R}^n$, $c = (c_1, \ldots, c_n)$ o parametrizare de clasă $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ a unei curbe și $[a, b] \subset I$ un interval.
  (i) $c_{|_{[a,b]}} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ se numește **arc al curbei** c;
  (ii) **lungimea arcului de curbă** $c_{|_{[a,b]}}$ este $L(c_{|_{[a,b]}}) = \int_a^b \|c'(t)\| dt$.

Modificarea vectorului tangent/accelerație la schimbări de parametru

- **Propoziție.** Fie $c : I \to \mathbb{R}^n$ și $\bar{c} : \bar{I} \to \mathbb{R}^n$ două parametrizări de clasă $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 2)$ ale unei curbe, astfel ca $\bar{c} = c \circ \varphi$, unde $\varphi : \bar{I} \to I$ este o schimbare de parametru. Pentru orice $s \in \bar{I}$ au loc relațiile

$$\bar{c}'(s) = \varphi'(s) \cdot c'(\varphi(s)),$$

$$\bar{c}''(s) = \varphi'(s)^2 \cdot c''(\varphi(s)) + \varphi''(s) \cdot c'(\varphi(s)).$$

  În particular, regularitatea unei curbe este o proprietate intrinsecă a acesteia, în sensul că nu depinde de parametrizarea aleasă.

Modificarea vectorului tangent/accelerație la schimbări de parametru

- **Propoziție.** Fie $c : I \to \mathbb{R}^n$ și $\bar{c} : \bar{I} \to \mathbb{R}^n$ două parametrizări de clasă $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 2)$ ale unei curbe, astfel ca $\bar{c} = c \circ \varphi$, unde $\varphi : \bar{I} \to I$ este o schimbare de parametru. Pentru orice $s \in \bar{I}$ au loc relațiile

$$\bar{c}'(s) = \varphi'(s) \cdot c'(\varphi(s)),$$

$$\bar{c}''(s) = \varphi'(s)^2 \cdot c''(\varphi(s)) + \varphi''(s) \cdot c'(\varphi(s)).$$

  În particular, regularitatea unei curbe este o proprietate intrinsecă a acesteia, în sensul că nu depinde de parametrizarea aleasă.
- **Propoziție.** Lungimea unui arc de curbă este invariantă la schimbări de parametru.

Derivatele unei curbe Bézier

Propoziție. Fie $b : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ o curbă Bézier.

(i) Derivatele de orice ordin calculate pentru $t = 0$ și $t = 1$ depind doar de poligonul de control. Mai mult, $b'(0) = n(b_1 - b_0)$, $b'(1) = n(b_n - b_{n-1})$, cu alte cuvinte, vectorii tangenți la curba Bézier în punctele b_0 (respectiv b_n) sunt coliniari și au același sens cu vectorii $\overrightarrow{b_0 b_1}$ (respectiv $\overrightarrow{b_{n-1} b_n}$). În cazul în care acești vectori sunt nenuli, ei reprezintă direcția tangentelor la curbă în punctele respective.

(ii) Pentru orice $t \in [0,1]$ are loc egalitatea

$$b'(t) = n(b_1^{n-1}(t) - b_0^{n-1}(t)),$$

cu alte cuvinte, punctele construite în etapa $(n-1)$ a algoritmului de Casteljau determină vectorul tangent la curba Bézier în punctul $b(t)$.

Exemplu

Considerăm punctele

$$b_0 = (1, -2), \quad b_1 = (3, 2), \quad b_2 = (3, -2), \quad b_3 = (-3, -2).$$

Schema de Casteljau corespunzătoare acestor puncte și valorii $t_0 = \frac{1}{2}$ a parametrului este

$$\begin{array}{llll}
(1, -2) & & & \\
(3, 2) & (2, 0) & & \\
(3, -2) & (3, 0) & (\frac{5}{2}, 0) & \\
(-3, -2) & (0, -2) & (\frac{3}{2}, -1) & (2, -\frac{1}{2}).
\end{array}$$

Vectorul tangent la curbă corespunzător valorii $t = \frac{1}{2}$ a parametrului este $(-3, -3)$.

Condiții de racord între curbe Bézier

Fie $b : [u_0, u_1] \to \mathbb{R}^d$ și $\tilde{b} : [u_1, u_2] \to \mathbb{R}^d$ curbe Bézier asociate unor poligoane de control $(b_0, b_1, \dots, \underline{\underline{b_n}})$ și $(\underline{\underline{b_n}}, b_{n+1}, \dots, b_{n+m})$.

Curbele b și $\tilde{b}$ au în punctul b_n:

(i) racord de clasă GC^1 (continuitate geometrică), i.e. curbele au <u>aceeași tangentă</u> în punctul b_n $\Longleftrightarrow$

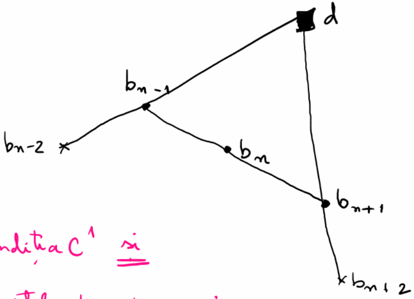
b_{n-1}, b_n, b_{n+1} sunt coliniare

(ii) racord de clasă C^1 (<u>vectorii tangenți</u> la cele două curbe în punctul de racord coincid) $\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} b_{n-1}, b_n, b_{n+1} \text{ sunt coliniare } \underline{\underline{\text{și}}} \\ r(b_{n-1}, b_n, b_{n+1}) = r(u_0, u_1, u_2) \end{cases}$$

Condiții de racord între curbe Bézier

(iii) racord de clasă C^2 (și vectorii tangenți și vectorii accelerație coincid)



condiția C^1 și

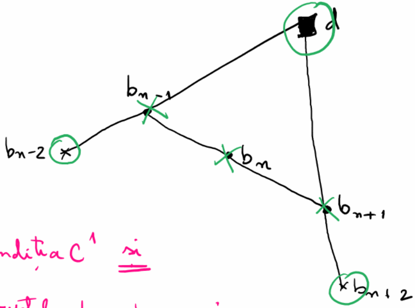
dreptele $b_{n-2}b_{n-1}$ și

$b_{n+1}b_{n+2}$ sunt concurente într-un punct d și

$$r(b_{n-2}, b_{n-1}, d) = r(d, b_{n+1}, b_{n+2}) = r(b_{n-1}, b_n, b_{n+1}) = r(u_0, u_1, u_2)$$

Condiții de racord între curbe Bézier

(iii) racord de clasă C^2 (și vectorii tangenți și vectorii accelerație coincid)



u_0, u_1, u_2

condiția C^1 și

dreptele $b_{n-2}b_{n-1}$ și $b_{n+1}b_{n+2}$ sunt concurente într-un punct d și

$$r(b_{n-2}, b_{n-1}, d) = r(d, b_{n+1}, b_{n+2}) = r(b_{n-1}, b_n, b_{n+1}) = r(u_0, u_1, u_2)$$

Condiții de racord între curbe Bézier

Propoziție. Fie $(\mathrm{b}_0, \ldots, \mathrm{b}_{n-1}, \mathrm{b}_n)$ și $(\mathrm{b}_n, \mathrm{b}_{n+1}, \ldots, \mathrm{b}_{2n})$ două poligoane de control și $\mathrm{b} : [u_0, u_1] \to \mathbb{R}^m$, respectiv $\widetilde{\mathrm{b}} : [u_1, u_2] \to \mathbb{R}^m$ curbele Bézier asociate ($u_0 < u_1 < u_2$; această condiție va fi subînțeleasă în cele ce urmează).

(i) Cele două curbe au un racord de clasă $G\mathcal{C}^1$ în punctul b_n dacă și numai dacă punctele $\mathrm{b}_{n-1}, \mathrm{b}_n, \mathrm{b}_{n+1}$ sunt coliniare.

(ii) Cele două curbe au un racord de clasă $\mathcal{C}^1$ în punctul b_n dacă și numai dacă punctele $\mathrm{b}_{n-1}, \mathrm{b}_n, \mathrm{b}_{n+1}$ sunt coliniare și are loc egalitatea de rapoarte $r(\mathrm{b}_{n-1}, \mathrm{b}_n, \mathrm{b}_{n+1}) = r(u_0, u_1, u_2)$.

(iii) Cele două curbe au un racord de clasă $\mathcal{C}^2$ în punctul b_n dacă și numai dacă sunt verificate condițiile:

• punctele $\mathrm{b}_{n-1}, \mathrm{b}_n, \mathrm{b}_{n+1}$ sunt coliniare și are loc egalitatea de rapoarte $r(\mathrm{b}_{n-1}, \mathrm{b}_n, \mathrm{b}_{n+1}) = r(u_0, u_1, u_2)$;

• există un punct d cu proprietatea că $\mathrm{b}_{n-2}, \mathrm{b}_{n-1}, \mathrm{d}$, respectiv $\mathrm{d}, \mathrm{b}_{n+1}, \mathrm{b}_{n+2}$ sunt triplete de puncte coliniare și, în plus, au loc egalitățile

$$r(\mathrm{b}_{n-2}, \mathrm{b}_{n-1}, \mathrm{d}) = r(\mathrm{d}, \mathrm{b}_{n+1}, \mathrm{b}_{n+2}) = r(u_0, u_1, u_2).$$

Punctul d se numește **punct de Boor** asociat racordului celor două curbe.

Exemplu

În $\mathbb{R}^2$ *considerăm punctele* $\mathrm{b}_0 = (0,2)$, $\mathrm{b}_1 = (1,3)$, $\mathrm{b}_2 = (3,3)$, $\mathrm{b}_3 = (4,2)$, $\mathrm{b}_4 = (6,0)$, $\mathrm{b}_5 = (4,-6)$, $\mathrm{b}_6 = (1,-1)$. *Fie* $u_0 = 1$, $u_1 = 4$, $u_2 = 7$. *Ce racord au cubicele Bézier* $\mathrm{b} : [1,4] \to \mathbb{R}^2$ *și* $\widetilde{\mathrm{b}} : [4,7] \to \mathbb{R}^2$ *asociate poligoanelor de control* $(\mathrm{b}_0, \mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \mathrm{b}_3)$, *respectiv* $(\mathrm{b}_3, \mathrm{b}_4, \mathrm{b}_5, \mathrm{b}_6)$*?*

Racordul este de clasă $\mathcal{GC}^1$**.** Avem:

$$\overrightarrow{\mathrm{b}_2\mathrm{b}_3} = \mathrm{b}_3 - \mathrm{b}_2 = (1,-1), \qquad \overrightarrow{\mathrm{b}_2\mathrm{b}_4} = \mathrm{b}_4 - \mathrm{b}_2 = (3,-3),$$

deci vectorii $\overrightarrow{\mathrm{b}_2\mathrm{b}_3}$ și $\overrightarrow{\mathrm{b}_2\mathrm{b}_4}$ sunt liniar dependenți, adică punctele $\mathrm{b}_2, \mathrm{b}_3, \mathrm{b}_4$ sunt coliniare; în particular cubicele Bézier $\mathrm{b} : [1,4] \to \mathbb{R}^2$ și $\widetilde{\mathrm{b}} : [4,7] \to \mathbb{R}^2$ asociate poligoanelor de control $(\mathrm{b}_0, \mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \mathrm{b}_3)$, respectiv $(\mathrm{b}_3, \mathrm{b}_4, \mathrm{b}_5, \mathrm{b}_6)$ au un racord de clasă $\mathcal{GC}^1$ în b_3.

Exemplu

În $\mathbb{R}^2$ *considerăm punctele* $\mathrm{b}_0 = (0,2)$, $\mathrm{b}_1 = (1,3)$, $\mathrm{b}_2 = (3,3)$, $\mathrm{b}_3 = (4,2)$, $\mathrm{b}_4 = (6,0)$, $\mathrm{b}_5 = (4,-6)$, $\mathrm{b}_6 = (1,-1)$. *Fie* $u_0 = 1$, $u_1 = 4$, $u_2 = 7$. *Ce racord au cubicele Bézier* $\mathrm{b} : [1,4] \to \mathbb{R}^2$ *și* $\widetilde{\mathrm{b}} : [4,7] \to \mathbb{R}^2$ *asociate poligoanelor de control* $(\mathrm{b}_0, \mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \mathrm{b}_3)$, *respectiv* $(\mathrm{b}_3, \mathrm{b}_4, \mathrm{b}_5, \mathrm{b}_6)$*?*

Racordul nu este de clasă $\mathcal{C}^1$. Pe de altă parte,

$$\overrightarrow{\mathrm{b}_2\mathrm{b}_3} = \mathrm{b}_3 - \mathrm{b}_2 = (1,-1), \qquad \overrightarrow{\mathrm{b}_3\mathrm{b}_4} = \mathrm{b}_4 - \mathrm{b}_3 = (2,-2),$$

adică $r(\mathrm{b}_2, \mathrm{b}_3, \mathrm{b}_4) = \frac{1}{2}$, iar $r(u_0, u_1, u_2) = \frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_1} = 1$, așadar

$$r(\mathrm{b}_2, \mathrm{b}_3, \mathrm{b}_4) \neq r(u_0, u_1, u_2),$$

ceea ce arată că racordul nu este de clasă $\mathcal{C}^1$.

Exemplu

În $\mathbb{R}^2$ *considerăm punctele* $b_0 = (0,2)$, $b_1 = (1,3)$, $b_2 = (3,3)$, $b_3 = (4,2)$, $b_4 = (6,0)$, $b_5 = (4,-6)$, $b_6 = (1,-1)$. *Fie* $u_0 = 1$, $u_1 = 4$, $u_2 = 7$. *Ce racord au cubicele Bézier* $b : [1,4] \to \mathbb{R}^2$ *și* $\widetilde{b} : [4,7] \to \mathbb{R}^2$ *asociate poligoanelor de control* (b_0, b_1, b_2, b_3), *respectiv* (b_3, b_4, b_5, b_6)*?*

Fiind un racord GC^1, se pot modifica intervalele astfel ca raportul să fie de clasă $\mathcal{C}^1$. Alegând în schimb $u_0' = 1$, $u_1' = 4$ și $u_2' = 10$, avem

$$r(u_0', u_1', u_2') = \frac{u_1' - u_0'}{u_2' - u_1'} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = r(b_2, b_3, b_4),$$

cu alte cuvinte curbele Bézier $c : [1,4] \to \mathbb{R}^2$, respectiv $\widetilde{c} : [4,10] \to \mathbb{R}^2$ asociate celor două poligoane de control au un racord de clasă $\mathcal{C}^1$ în b_3.

Exemplu

În $\mathbb{R}^2$ *considerăm punctele* $\mathrm{b}_0 = (0, 2)$, $\mathrm{b}_1 = (1, 3)$, $\mathrm{b}_2 = (3, 3)$, $\mathrm{b}_3 = (4, 2)$, $\mathrm{b}_4 = (6, 0)$, $\mathrm{b}_5 = (4, -6)$, $\mathrm{b}_6 = (1, -1)$. *Fie* $u_0 = 1$, $u_1 = 4$, $u_2 = 7$. *Ce racord au cubicele Bézier* $\mathrm{b} : [1, 4] \to \mathbb{R}^2$ *și* $\widetilde{\mathrm{b}} : [4, 7] \to \mathbb{R}^2$ *asociate poligoanelor de control* $(\mathrm{b}_0, \mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \mathrm{b}_3)$, *respectiv* $(\mathrm{b}_3, \mathrm{b}_4, \mathrm{b}_5, \mathrm{b}_6)$*?*

Comentariu. Este de remarcat faptul că $\mathrm{b} = \mathrm{c}$ (ca funcții), în vreme ce parametrizările $\widetilde{\mathrm{b}}$ și $\widetilde{c}$ au aceeași imagine geometrică, dar sunt diferite ca aplicații. Acest exemplu arată că un racord care are doar continuitate geometrică $G\mathcal{C}^1$ poate deveni, prin alegerea convenabilă a intervalelor pe care este definită parametrizarea (este suficient să modificăm unul din capete!) de clasă $\mathcal{C}^1$. Cu alte cuvinte, continuitatea geometrică $G\mathcal{C}^1$ este legată numai de forma poligonului de control, iar faptul că un racord are clasă $\mathcal{C}^1$ este legat atât de poligonul de control, cât și de intervalele pe care sunt definite parametrizările.

Exemplu

În $\mathbb{R}^2$ *considerăm punctele* $\mathrm{b}_0 = (0,2)$, $\mathrm{b}_1 = (1,3)$, $\mathrm{b}_2 = (3,3)$, $\mathrm{b}_3 = (4,2)$, $\mathrm{b}_4 = (6,0)$, $\mathrm{b}_5 = (4,-6)$, $\mathrm{b}_6 = (1,-1)$. *Fie* $u_0 = 1$, $u_1 = 4$, $u_2 = 7$. *Ce racord au cubicele Bézier* $\mathrm{b} : [1,4] \to \mathbb{R}^2$ *și* $\widetilde{\mathrm{b}} : [4,7] \to \mathbb{R}^2$ *asociate poligoanelor de control* $(\mathrm{b}_0, \mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \mathrm{b}_3)$, *respectiv* $(\mathrm{b}_3, \mathrm{b}_4, \mathrm{b}_5, \mathrm{b}_6)$*?*

Racordul este de clasă $\mathcal{C}^2$. Să analizăm în continuare dacă acest racord este și de clasă $\mathcal{C}^2$. Pentru aceasta trebuie să determinăm punctul d de intersecție a dreptelor $\mathrm{b}_1\mathrm{b}_2$ și $\mathrm{b}_4\mathrm{b}_5$: dreapta $\mathrm{b}_1\mathrm{b}_2$ are ecuația implicită $x_2 = 3$, iar dreapta $\mathrm{b}_4\mathrm{b}_5$ are ecuația $3x_1 - x_2 - 18 = 0$ și punctul lor de intersecție este $\mathrm{d} = (7,3)$. Avem:

$$\overrightarrow{\mathrm{b}_1\mathrm{b}_2} = (2,0), \qquad \overrightarrow{\mathrm{b}_2\mathrm{d}} = (4,0), \qquad r(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \mathrm{d}) = \frac{1}{2},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\mathrm{b}_4} = (-1,-3), \qquad \overrightarrow{\mathrm{b}_4\mathrm{b}_5} = (-2,-6), \qquad r(\mathrm{d}, \mathrm{b}_4, \mathrm{b}_5) = \frac{1}{2},$$

deci au loc egalitățile

$$r(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \mathrm{d}) = r(\mathrm{d}, \mathrm{b}_4, \mathrm{b}_5) = r(u_0', u_1', u_2'),$$

ceea ce arată că racordul curbelor c și $\widetilde{\mathrm{c}}$ este de clasă $\mathcal{C}^2$.

Exemplu

În $\mathbb{R}^2$ *considerăm punctele* $\mathrm{b}_0 = (0,2)$, $\mathrm{b}_1 = (1,3)$, $\mathrm{b}_2 = (3,3)$, $\mathrm{b}_3 = (4,2)$, $\mathrm{b}_4 = (6,0)$, $\mathrm{b}_5 = (4,-6)$, $\mathrm{b}_6 = (1,-1)$. *Fie* $u_0 = 1$, $u_1 = 4$, $u_2 = 7$. *Ce racord au cubicele Bézier* $\mathrm{b} : [1,4] \to \mathbb{R}^2$ *și* $\widetilde{\mathrm{b}} : [4,7] \to \mathbb{R}^2$ *asociate poligoanelor de control* $(\mathrm{b}_0, \mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \mathrm{b}_3)$, *respectiv* $(\mathrm{b}_3, \mathrm{b}_4, \mathrm{b}_5, \mathrm{b}_6)$*?*

Comentariu. Dacă raportul $r(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \mathrm{d})$ (respectiv $r(\mathrm{d}, \mathrm{b}_4, \mathrm{b}_5)$) nu ar fi fost egal cu $\frac{1}{2}$, am fi putut modifica punctul b_1 pe dreapta $\mathrm{b}_2\mathrm{d}$ (respectiv punctul b_5 pe dreapta $\mathrm{d}\mathrm{b}_4$), astfel ca raportul respectiv să fie $\frac{1}{2}$; altfel spus, prin modificarea poligonului de control se poate obține un racord de clasă $\mathcal{C}^2$.

Ce date sunt necesare pentru a putea construi două cubice Bézier care au un racord de clasă $\mathcal{C}^1$? Dar un racord de clasă $\mathcal{C}^2$?

- ptr. racord C^2:
  - se indică u_0, u_1, u_2
  - se iau b_0, b_1, d, b_5, b_6 → poligon de Boor pentru cubice spline
  - se construiesc b_2 şi b_4

(se poate generaliza pt. n oarecare)

(în general: b_{n-1} şi b_{n+1})

a.î. $r(u_0, u_1, u_2) = r(b_1, b_2, d) = r(d, b_4, b_5)$

(în general: $r(u_0, u_1, u_2) = r(b_{n-2}, b_{n-1}, d) = r(d, b_{n+1}, b_{n+2})$)

- se construieşte b_3 (în general b_n)

a.î. $r(b_2, b_3, b_4) = r(u_0, u_1, u_2)$ (în gen.: $r(b_{n-1}, b_n, b_{n+1}) = r(u_0, u_1, u_2)$)

Exemplu

Considerăm punctele:

$$b_0 = (100, 100),\ b_1 = (200, 200),\ d = (600, 200),\ b_5 = (300, -300), b_6 = (100, -300)$$

și numerele reale

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 2.$$

Pornind de la aceste date putem construi poligoane de control (b_0, b_1, b_2, b_3) și (b_3, b_4, b_5, b_6) astfel încât curbele Bézier asociate b și $\widetilde{b}$ definite pe intervalele $[0, 1]$, respectiv $[1, 2]$ să aibă un racord de clasă $\mathcal{C}^2$.

Avem $r(u_0, u_1, u_2) = \dfrac{u_1 - u_0}{u_2 - u_1} = 1$

- b_2 a.î. $r(b_1, b_2, d) = r(u_0, u_1, u_2) = 1 \Rightarrow \underline{b_2 = (400, 200)}$
- b_4 a.î. $r(d, b_4, b_5) = r(u_0, u_1, u_2) = 1 \Rightarrow \underline{b_4 = (450, -50)}$
- b_3 a.î. $r(b_2, b_3, b_4) = r(u_0, u_1, u_2) = 1 \Rightarrow \underline{b_3 = (425, 75)}$

Exerciții

1. Considerăm poligonul de control $(\mathsf{b}_0, \mathsf{b}_1, \mathsf{b}_2, \mathsf{b}_3)$, unde

$$\mathsf{b}_0 = (2,3), \quad \mathsf{b}_1 = (4,3), \quad \mathsf{b}_2 = (4,5), \quad \mathsf{b}_3 = (-2,9).$$

Scrieţi schema de Casteljau corespunzătoare acestui poligon de control şi valorii $t = \frac{1}{2}$ a parametrului.

2. Scrieţi forma Bernstein a curbei Bézier asociate poligonului de control $\mathsf{b}_0 = (-2,1), \quad \mathsf{b}_1 = (1,5), \quad \mathsf{b}_2 = (3,0).$

3. În $\mathbb{R}^2$ considerăm poligoanele de control $P = (\mathsf{b}_0, \mathsf{b}_1, \mathsf{b}_2)$ respectiv $\widetilde{P} = (\mathsf{b}_2, \mathsf{b}_3, \mathsf{b}_4)$, unde

$$\mathsf{b}_0 = (-6,-4),\ \mathsf{b}_1 = (3,3),\ \mathsf{b}_2 = (\lambda - 1, 3),\ \mathsf{b}_3 = (7, \mu + 1),\ \mathsf{b}_4 = (-3,-1).$$

Fie $\mathsf{b} : [2,5] \to \mathbb{R}^2$, respectiv $\widetilde{\mathsf{b}} : [5,8] \to \mathbb{R}^2$ curbele Bézier asociate lui P, respectiv $\widetilde{P}$. Discutaţi dacă b şi $\widetilde{\mathsf{b}}$ au un racord de clasă $G\mathcal{C}^1$ sau $\mathcal{C}^1$ în b_2.

Exerciții

4. Considerăm poligonul de control

$$b_0 = (1,1), \quad b_2 = (2,0), \quad b_3 = (0,0)$$

şi fie $b : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ curba Bézier asociată. Calculaţi $b(\frac{1}{3})$ şi stabiliţi dacă punctul $(1, \frac{1}{3})$ aparţine imaginii lui b.

5. Pentru o curbă Bézier b, calculaţi vectorii $b'(0)$ şi $b'(1)$ direct, folosind forma Bernstein.

6. Considerăm punctele $b_0 = (4,2), b_1 = (4,4), b_2 = (2,4)$ şi fie $b : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ curba Bézier asociată poligonului de control (b_0, b_1, b_2). Determinaţi vectorii tangenţi la această curbă în punctele $b(0), b(\frac{1}{2}), b(1)$.

7. Dacă punctele b_0, b_1, b_2, b_3 sunt vârfurile unui pătrat, stabiliţi care este punctul obţinut aplicând algoritmul de Casteljau pentru valoarea parametrului $t = \frac{1}{2}$ şi care este tangenta la curbă în acest punct.

Exerciții

8. În $\mathbb{R}^2$ considerăm punctele

$$\mathsf{b}_0 = (0,0), \quad \mathsf{b}_1 = (2,2), \quad \mathsf{b}_2 = (2,4), \quad \mathsf{b}_3 = (3,3),$$

$$\mathsf{b}_4 = (5,1), \quad \mathsf{b}_5 = (4,0), \quad \mathsf{b}_6 = (2,-1)$$

şi numerele reale

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 3.$$

Fie $\mathsf{b} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ şi $\widetilde{\mathsf{b}} : [1,3] \to \mathbb{R}^2$ curbele Bézier asociate. Stabiliţi ce clasă are racordul celor două curbe în punctul b_3.

9. Considerăm punctele:

$$\mathsf{b}_0 = (0,2), \quad \mathsf{b}_1 = (0,4), \quad \mathsf{d} = (4,2), \quad \mathsf{b}_5 = (4,-2), \quad \mathsf{b}_6 = (0,-3)$$

şi numerele reale

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 2, \quad u_2 = 3.$$

Determinaţi poligoanele de control $(\mathsf{b}_0, \mathsf{b}_1, \mathsf{b}_2, \mathsf{b}_3)$ şi $(\mathsf{b}_3, \mathsf{b}_4, \mathsf{b}_5, \mathsf{b}_6)$ astfel încât curbele Bézier asociate b şi $\widetilde{\mathsf{b}}$ definite pe intervalele $[1,2]$, respectiv $[2,3]$ să aibă un racord de clasă $\mathcal{C}^2$.