

## Subiectul 1

Se dă un graf neorientat conex  $G$  cu  $n > 3$  vârfuri,  $m$  muchii,  $m > n$ . Să se determine doi arbori parțiali  $T$  și  $T'$  ai lui  $G$  cu proprietățile:

- $T$  este arbore de distanțe față de vârful 1:  $d_T(1, v) = d_G(1, v)$  pentru orice vârf  $v$  din  $G$
- În  $T'$  există cel puțin un vârf  $v$  cu  $d_{T'}(1, v) \neq d_G(1, v)$ .

Se vor afișa muchiile celor doi arbori parțiali determinați și, în plus, se vor afișa toate vârfurile  $v$  pentru care  $d_{T'}(1, v) \neq d_G(1, v)$ . **Complexitate  $O(m)$**

Informațiile despre graf se citesc din fișierul graf.in cu structura:

- pe prima linie sunt  $n$  și  $m$
- pe următoarele  $m$  linii sunt câte 2 numere naturale reprezentând extremitățile unei muchii

( $d_G(x, y)$  = distanța de la  $x$  la  $y$  în  $G$ )

graf.in	Iesire pe ecran (solutia nu este unica)
5 7 1 2 1 3 2 3 2 4 3 4 3 5 4 5	T: 1 2 1 3 2 4 3 5 T': 1 2 2 4 4 5 3 4 v: 3 5

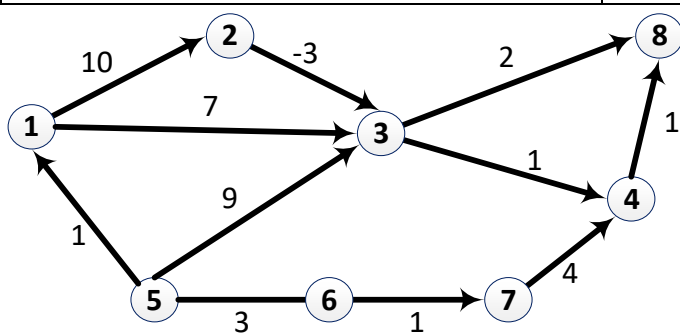
## Subiectul 2

Se citesc informații despre un graf **orientat fără circuite**  $G$  din fișierul `graf.in`.

Fișierul are următoarea structură:

- Pe prima linie sunt două numere reprezentând numărul de vârfuri  $n$  ( $n > 4$ ) și numărul de arce  $m$  ale grafului,  $m \geq n$
- Pe următoarele  $m$  linii sunt câte 3 numere întregi reprezentând extremitatea inițială, extremitatea finală și costul unui arc din graf (costul unui arc poate fi și **negativ**).
- Pe ultima linie sunt două noduri sursa  $s_1$  și  $s_2$ 
  - a) Să se determine dacă există un vârf din graf  $v$  egal depărtat de  $s_1$  și  $s_2$ :  $d(s_1, v) = d(s_2, v)$ . Dacă există mai multe astfel de vârfuri se va afișa cel mai apropiat de cele două surse (cel cu  $d(s_1, v)$  cea mai mică). **Complexitate  $O(m)$**
  - b) Pentru vârful  $v$  determinat la a) (dacă există) să se determine dacă există mai multe drumuri minime de la  $s_1$  la  $v$ . Dacă există doar unul, se va afișa acest drum, dacă nu se vor afișa două dintre drumurile minime de la  $s_1$  la  $v$ . **Complexitate  $O(m)$**

graf.in	iesire pe ecran
8 11 1 2 10 2 3 -3 1 3 7 3 8 2 3 4 1 4 8 1 5 1 1 5 3 9 5 6 3 6 7 1 7 4 4 1 5	a) $v=4$ b) 1 2 3 4 1 3 4  Explicații: $d(1,4) = d(5,4) = 8$



### Subiectul 3

Fișierul graf.in conține următoarele informații despre un graf **bipartit** conex:

- pe prima linie sunt 2 numere naturale  $n$  și  $m$  reprezentând numărul de vârfuri și numărul de muchii
- pe următoarele  $m$  linii sunt perechi de numere  $x$   $y$  (separate prin spațiu) reprezentând extremitățile unei muchii

Se consideră graful  $G$  dat în fișierul graf.in. Notăm cu  $k$  numărul de vârfuri de grad impar din graf.

a) Folosind un algoritm de determinare a unui flux maxim într-o rețea de transport, determinați un cuplaj maxim în subgraful indus de mulțimea vârfurilor de grad impar din  $G$ .

b) Folosind punctul a) determinați dacă există  $k/2$  muchii care se pot elimina din  $G$  astfel încât să se obțină un graf cu următoarele proprietăți:

- gradul fiecărui vârf din  $G'$  este egal cu cel din  $G$  sau cu unu mai mic.
- în  $G'$  în fiecare componentă conexă există câte un ciclu care conține toate muchiile din componentă (o singură dată) **Complexitate  $O(nm^2)$**

graf.in	lesire pe ecran (solutia nu este unica)
8 9 1 5 1 6 1 7 2 5 3 5 3 7 3 4 8 7 8 4	1 6 2 5 3 7

