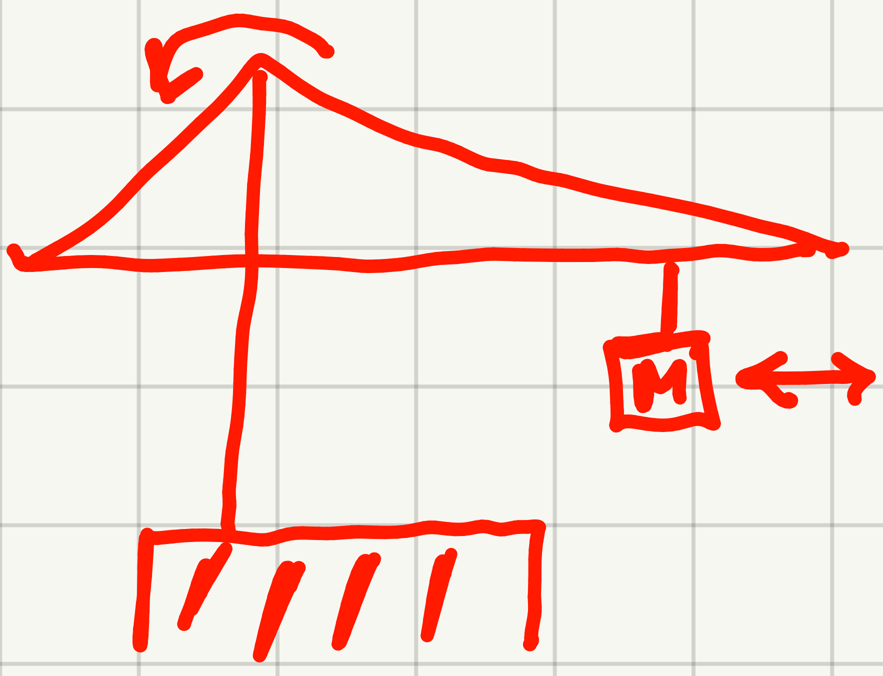
# CINEMATICA

(1) SI CONSIDERI UNA GRU A CUI È APPESA UNA MASSA M CHE PUÒ SPOSTARSI LUNGO L'ASSE DELLA GRU, CHE PUÒ RUOTARE IN SENSO ANTIORARIO. SAPENDO CHE $\rho_0 = 5\,m$, $v(t) = \dot{\rho}(t) = \sin(2t)\ m/s$,



$\theta_0 = 0\ rad$, $\dot{\theta}_0 = \omega_0 = 0\ rad/s$, $\ddot{\theta} = \dot{\omega}_0 = 0{,}5\ rad/s^2$, CALCOLARE $a(t=4s)$

STEP 1 ANALIZZO I DUE MOTI SINGOLARMENTE

ROTAZIONE GRU

$$\ddot{\theta}(t) = 0{,}5\ rad/s^2 \rightarrow \dot{\theta}(t) = \int_0^t \ddot{\theta}(t)\,dt = 0{,}5t + \dot{\theta}_0 = 0{,}5t\ \ rad/s$$

$$\rightarrow \theta(t) = \int_0^t \dot{\theta}(t)\,dt = \frac{0{,}5}{2}t^2 + \theta_0 = \frac{0{,}5}{2}t^2\ \ rad$$

TRASLAZIONE MASSA

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \ddot{\rho}(t) = 2\cos(2t)\ m/s$$

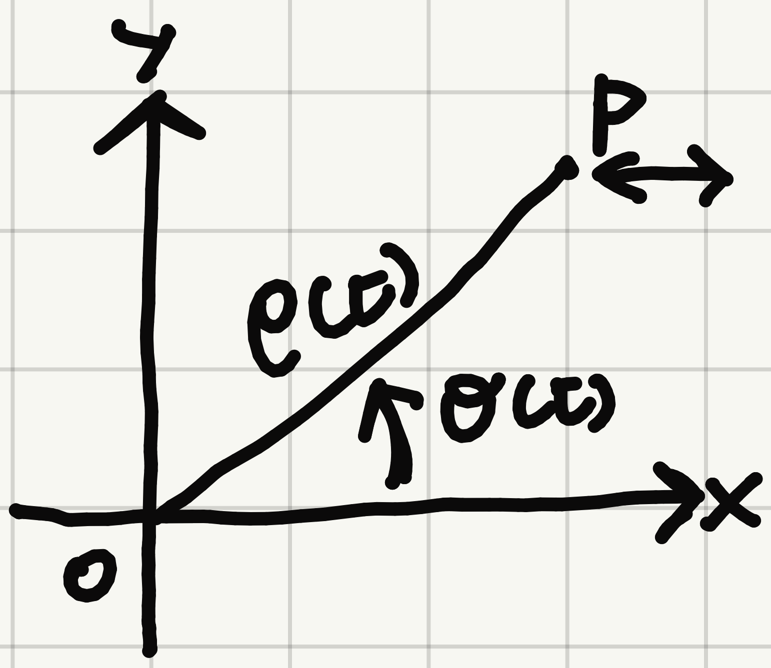
$$\rho(t) = \int_0^t v(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^t 2\sin(2t)\,dt = \quad U = 2t \rightarrow dU = 2dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{U/2} \sin(U)\,dU = -\frac{1}{2}[\cos(U)]_0^{U/2} + C = -\frac{1}{2}[\cos(2t) - 1] + \rho_0$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2} + 5\ \ m$$

## STEP 3 COMPOSIZIONE DEI MOTI E RISOLUZIONE

### APPROCCIO 1: COORDINATE CARTESIANE




$$\vec{P} = x_p(t)\,\hat{\imath} + y_p(t)\,\hat{\jmath}$$

$$\begin{cases} x_p(t) = \rho\cos(\theta) \\ y_p(t) = \rho\sin(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = \dot{\rho}\cos(\theta) - \rho\dot{\theta}\sin(\theta) \\ v_y = \dot{\rho}\sin(\theta) + \rho\dot{\theta}\cos(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = \ddot{\rho}\cos(\theta) - \dot{\rho}\dot{\theta}\sin(\theta) - \dot{\rho}\dot{\theta}\sin(\theta) - \rho\ddot{\theta}\sin(\theta) - \rho\dot{\theta}^2\cos(\theta) \\ a_y = \ddot{\rho}\sin(\theta) + \dot{\rho}\dot{\theta}\cos(\theta) + \dot{\rho}\dot{\theta}\cos(\theta) + \rho\ddot{\theta}\cos(\theta) - \rho\dot{\theta}^2\sin(\theta) \end{cases} =$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_x = \ddot{\rho}\cos(\theta) - 2\dot{\rho}\dot{\theta}\sin(\theta) - \rho\ddot{\theta}\sin(\theta) - \rho\dot{\theta}^2\cos(\theta) \\ a_y = \ddot{\rho}\sin(\theta) + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\cos(\theta) + \rho\ddot{\theta}\cos(\theta) - \rho\dot{\theta}^2\sin(\theta) \end{cases}$$

MOTO RETTILINEO LUNGO IL BRACCIO — ACCELERAZIONE DI CORIOLIS — $a_t$ — $a_n$ DEL MOTO ROTATORIO

DALLE PRECEDENTI FORMULE, $\ddot{\rho}(t=4) = -0{,}15\ m/s^2$ $\quad \theta(t=4) = 4\ rad$

$\dot{\rho}(t=4) = 0{,}99\ m/s$ $\quad \dot{\theta}(t=4) = 2\ rad/s$ $\quad \rho(t=4) = 5{,}58\ m$ $\quad \ddot{\theta}(t=4) = 0{,}5\ \frac{rad}{s^2}$

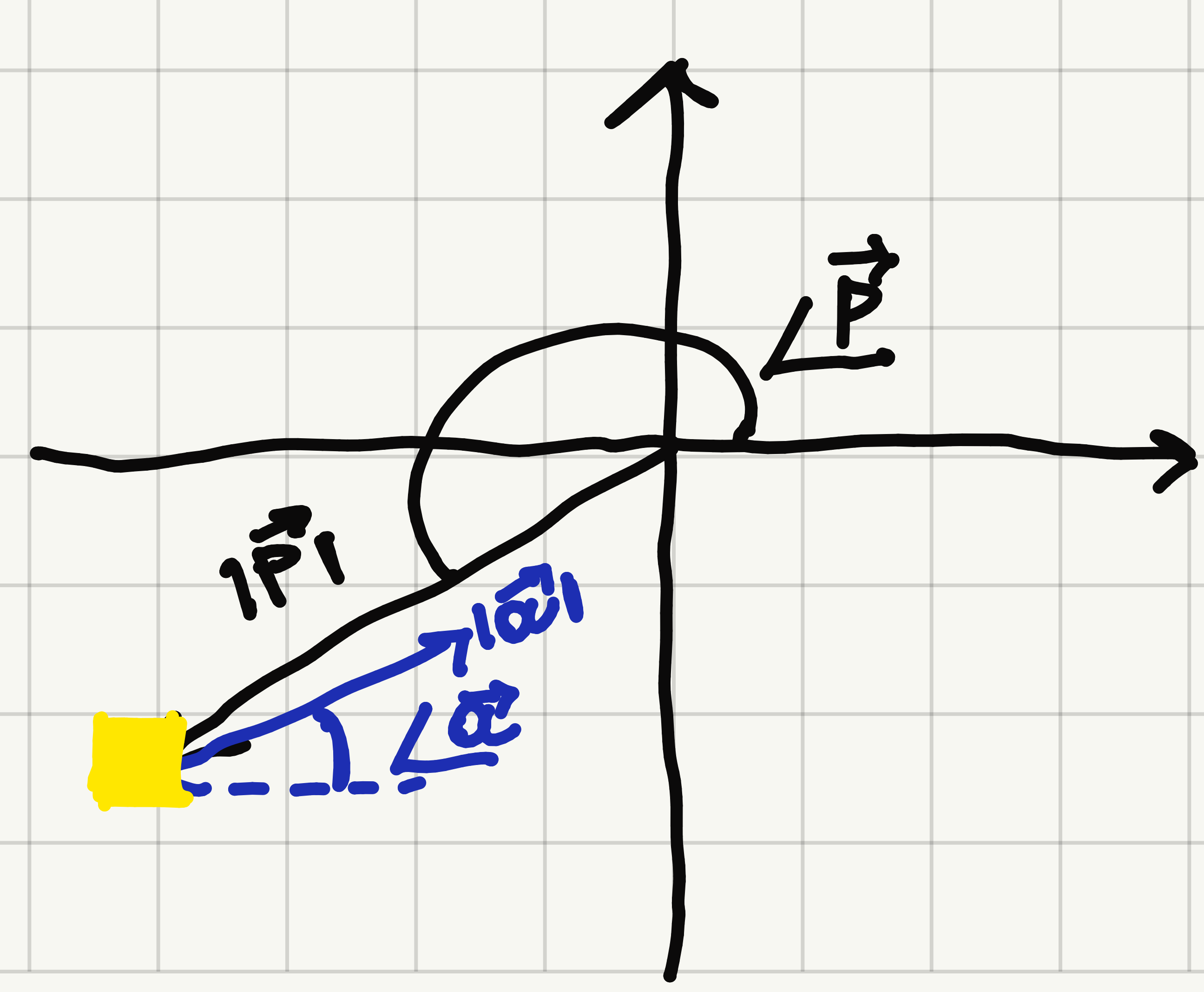
$$\Rightarrow \begin{cases} a_x(t=4s) = 19{,}01\ m/s^2 \\ a_y(t=4s) = 11{,}68\ m/s^2 \end{cases}$$

$$\vec{a}(t=4s) = 19{,}01\,\hat{\imath} + 11{,}68\,\hat{\jmath}\ m/s^2$$

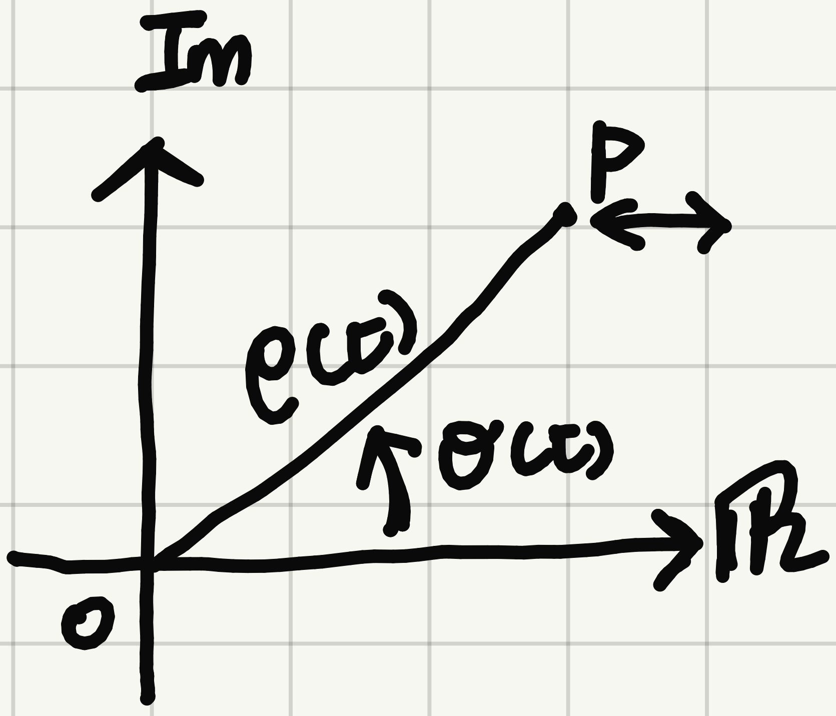
$|\vec{a}| = 22{,}32\ m/s^2$ $\quad \angle\vec{a} = 31{,}56^\circ$

$\vec{P}(t=4s) = -3{,}64\,\hat{\imath} - 4{,}22\,\hat{\jmath}\ m$

$|\vec{P}| = 5{,}57\ m$ $\quad \angle\vec{P} = 229^\circ$



# APPROCCIO 2: COORDINATE COMPLESSE




$$\vec{P} = \rho e^{i\theta}$$

$$\vec{v}_P = \dot{\rho} e^{i\theta} + \rho i e^{i\theta} \dot{\theta} = \dot{\rho} e^{i\theta} + \rho \dot{\theta} e^{i(\theta+\pi/2)}$$

$$\vec{a}_P = \ddot{\rho} e^{i\theta} + \dot{\rho} i \dot{\theta} e^{i\theta} + \dot{\rho} i \dot{\theta} e^{i\theta} + \rho i \ddot{\theta} e^{i\theta} +$$

$$+ \rho i^2 \dot{\theta}^2 e^{i\theta} = \ddot{\rho} e^{i\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} e^{i(\theta+\pi/2)} + \rho \ddot{\theta} e^{i(\theta+\pi/2)} - \rho \dot{\theta}^2 e^{i\theta} =$$

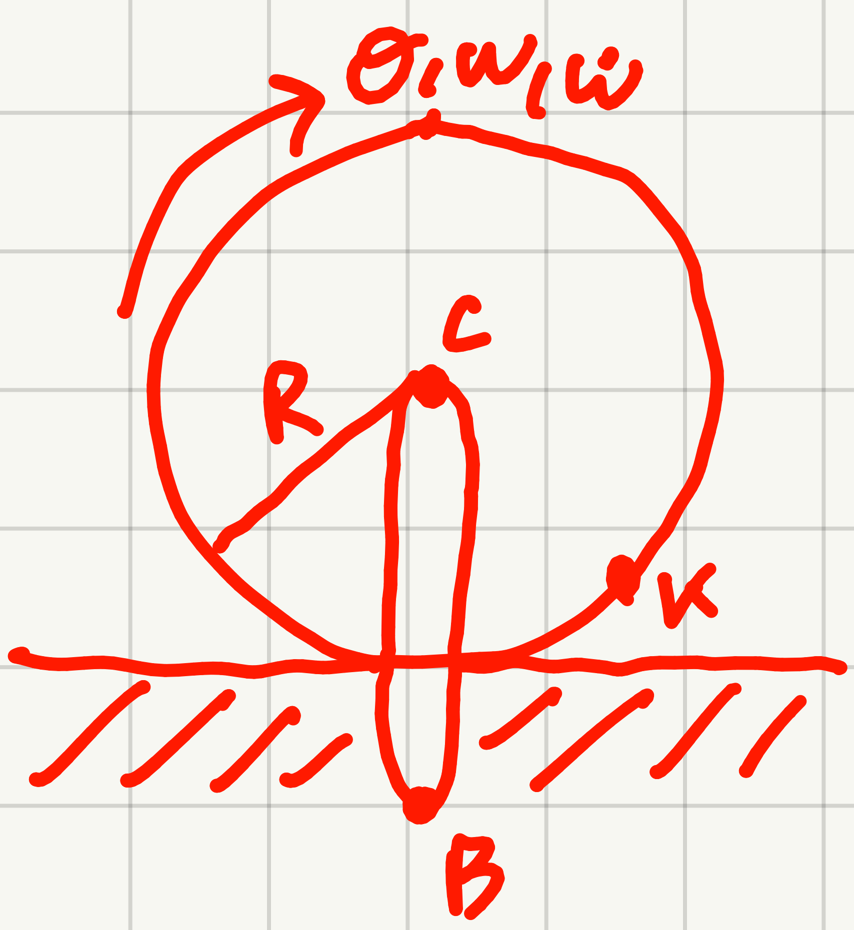
$$= \underbrace{e^{i\theta}(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)}_{\substack{\text{COMPONENTE LUNGO } \theta \\ \vec{a}_n}} + \underbrace{e^{i(\theta+\pi/2)}(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})}_{\substack{\text{COMPONENTE } \perp \text{ A } \theta \\ \vec{a}_\tau}}$$

$$\begin{cases} a_n(t=4s) = -22{,}47\, e^{i\theta} = -22{,}47\, \hat{n} \\ a_\tau(t=4s) = 3{,}89\, e^{i(\theta+\pi/2)} = 3{,}89\, \hat{\tau} \end{cases}$$

$\vec{a} = 3{,}89\, \hat{\tau} - 22{,}47\, \hat{n}$ m/s²  $\angle \vec{a} = 170{,}18°$

! $170{,}18° + 229° = 399{,}18° = 39{,}18° \simeq 31{,}56° = \angle \vec{a}_{\text{APPROCCIO 1}}$

② Si consideri un disco a cui è connessa, nel suo centro, un'asta rivolta verso il basso saldata rigidamente al disco con moto di puro rotolamento. Calcolare $\vec{v}_B$ e $\vec{a}_B$ sapendo che l'angolo dell'asta è perfettamente verticale e che $\overline{BC} = 2R$



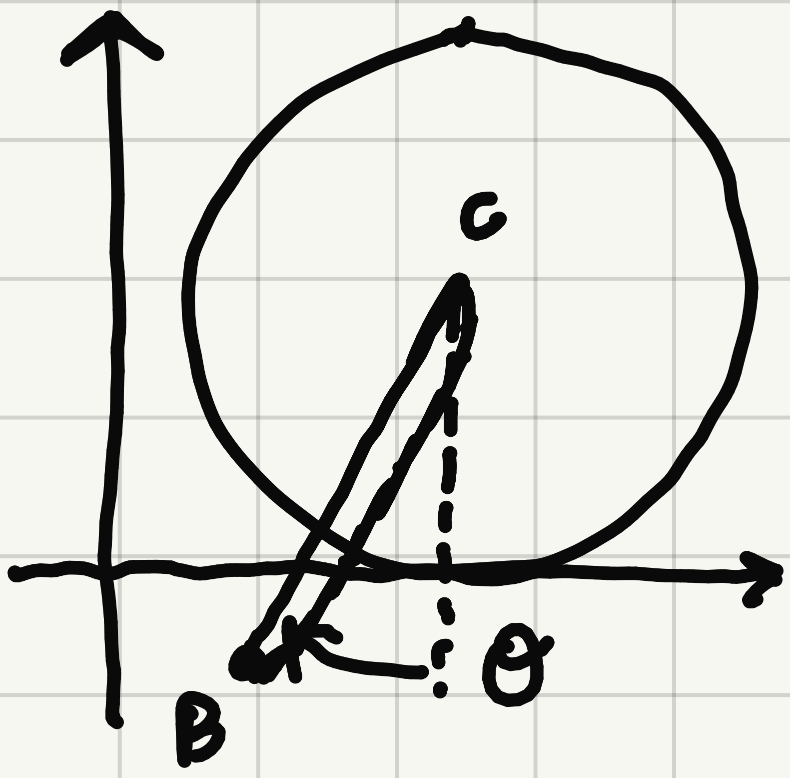

## STEP 1 CALCOLO DEL NUMERO DI GRADI DI LIBERTÀ

$$n = n_0 - n_v = (3 \cdot \underbrace{2}_{\text{*corpi}}) - (\underbrace{3}_{\text{incastro}} + \underbrace{1}_{\text{puro rotolamento}} + \underbrace{1}_{\text{vincolo verticale}}) = 1$$

! All'esame avremo sempre $n=1$ :-)

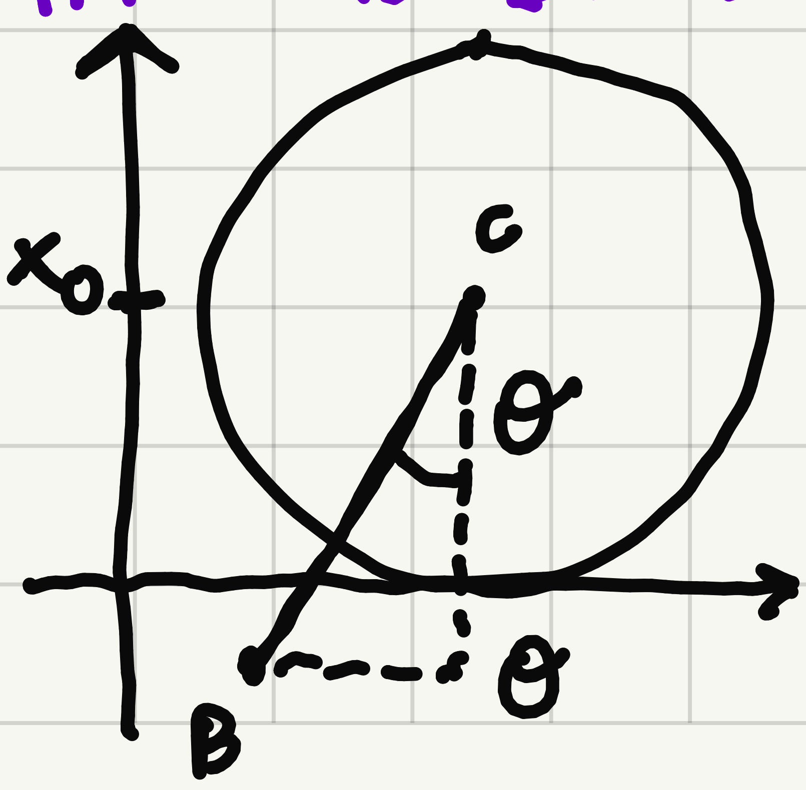
## STEP 2 GESTIRE EVENTUALI CASI PARTICOLARI

Avere l'asta "perfettamente verticale" può trarre in inganno e portare a "trascurare" dei valori ⇒ ridisegnare il sistema in modo da non considerare il caso specifico e, solo in un secondo momento, considerare il caso di "asta verticale rivolta verso il basso"




## STEP 3 RISOLUZIONE

### APPROCCIO 1: COORDINATE CARTESIANE




$$C \begin{cases} x_C = x_0 + R\theta \\ y_C = R \end{cases}$$

$$B \begin{cases} x_B = x_C - BC\sin\theta \\ y_B = y_C - BC\cos\theta \end{cases} = \begin{matrix} x_0 + R\theta - 2R\sin\theta \\ R - 2R\sin\theta \end{matrix}$$

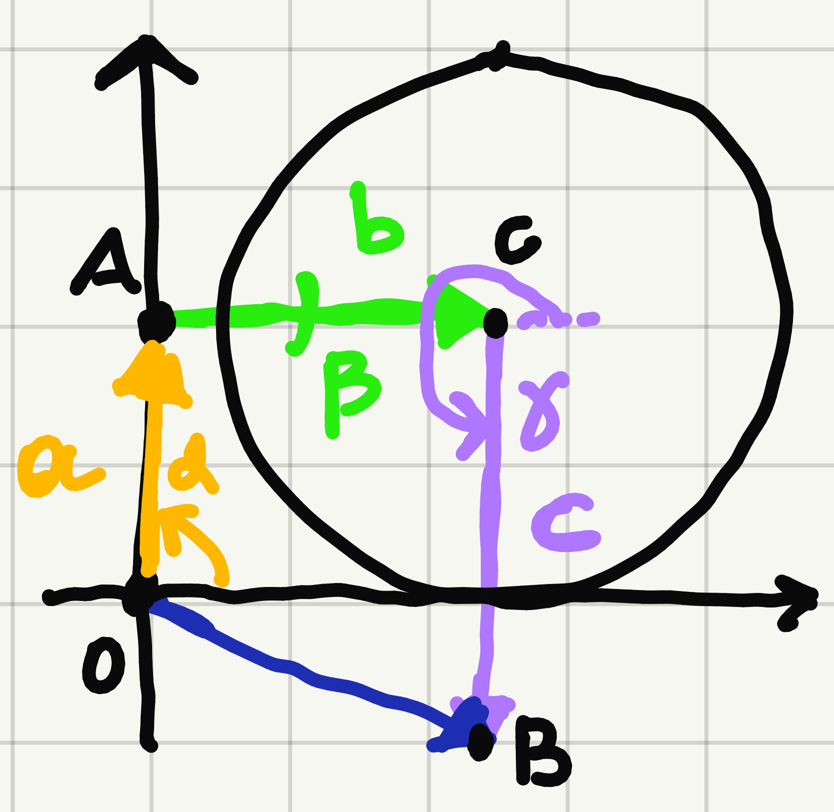
$$\rightarrow \vec{v}_B \begin{cases} \dot{x}_B = R\dot{\theta} - 2R\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_B = 2R\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

$$\vec{a}_B \begin{cases} \ddot{x}_B = R\ddot{\theta} - 2R\ddot{\theta}\cos\theta + 2R\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \ddot{y}_B = 2R\ddot{\theta}\sin\theta + 2R\dot{\theta}^2\cos\theta \end{cases}$$

ASTA PERFETTAMENTE VERTICALE $\Rightarrow \theta = 0$

$$\vec{v}_B \begin{cases} \dot{x}_B = R\omega - 2R\omega = -R\omega \\ \dot{y}_B = 0 \end{cases} \qquad \vec{a}_B \begin{cases} \ddot{x}_B = R\dot{\omega} - 2R\dot{\omega} = -R\dot{\omega} \\ \ddot{y}_B = 2R\omega^2 \end{cases}$$

## APPROCCIO 2: COORDINATE COMPLESSE




! CHIUSURA CINEMATICA

SCEGLIERE UN "POLIGONO FACILMENTE ANALIZZABILE", NON NECESSARIAMENTE CON MINOR NUMERO DI LATI

$a = R$ COSTANTE $\alpha = \pi/2$ COSTANTE

$b$ $\beta = 0$ COSTANTE

$c = 2R$ COSTANTE $\gamma$

$$(B-O) = (A-O) + (C-A) + (B-C)$$

$$(B-O) = a e^{i\alpha} + b e^{i\beta} + c e^{i\gamma}$$

$$\begin{cases} x_B = a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma = b + 2R\cos\gamma \\ y_B = a\sin\alpha + b\sin\beta + c\sin\gamma = R + 2R\sin\gamma \end{cases}$$

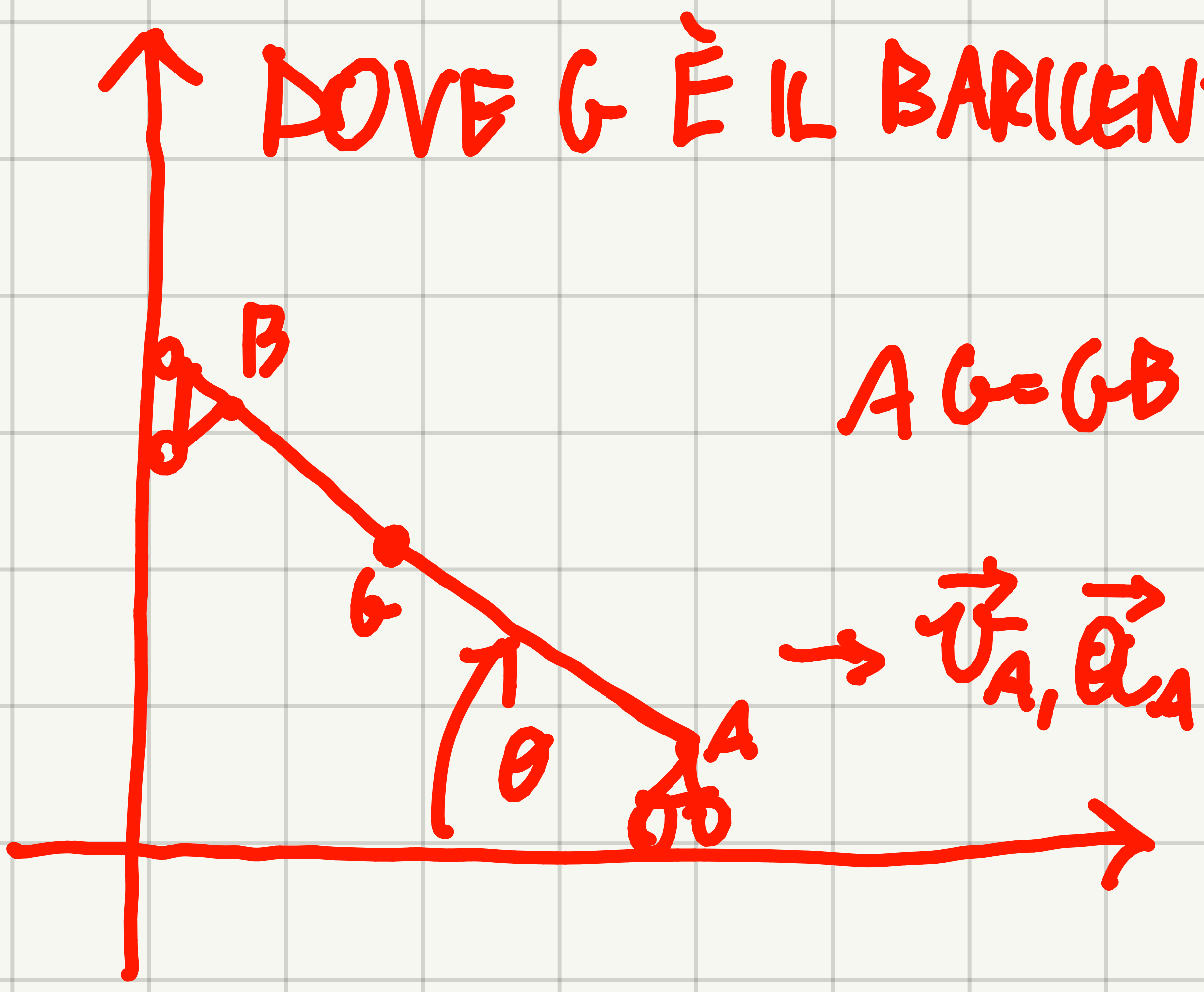
TEOREMA DI RIVALS

$$\begin{cases} \dot{x}_B = \dot{b} - 2R\dot{\gamma}\sin\gamma = \dot{b} - 2R\omega\sin\gamma = (\dot{a} + R\omega) - 2R\omega = -R\omega \\ \quad \gamma = \tfrac{3}{2}\pi \\ \dot{y}_B = 2R\dot{\gamma}\cos\gamma = 2R\omega\cos\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_B = R\dot{\omega} - 2R\ddot{\gamma}\sin\gamma - 2R\dot{\gamma}^2\cos\gamma = R\dot{\omega} - 2R\dot{\omega} = -R\dot{\omega} \\ \quad \gamma = \tfrac{3}{2}\pi \\ \ddot{y}_B = 2R\ddot{\gamma}\cos\gamma - 2R\dot{\gamma}^2\sin\gamma = 2R\dot{\omega}\cos\gamma + 2R\omega^2 = 2R\omega^2 \end{cases}$$

③ Si consideri una scala alle cui estremità sono posti dei carrelli. Il moto è tale per cui la scala scivola in verticale lungo B e in orizzontale lungo A. Noti $AB = 700\,mm$, $x_A = 606.2\,mm$, $\theta = 30°$, $\vec{v}_A = 5\,m/s\,\hat{i}$ e $\vec{a}_A = 0{,}3\,m/s^2\,\hat{i}$, calcolare $\vec{v}_B, \vec{v}_G, \vec{a}_B, \vec{a}_G$

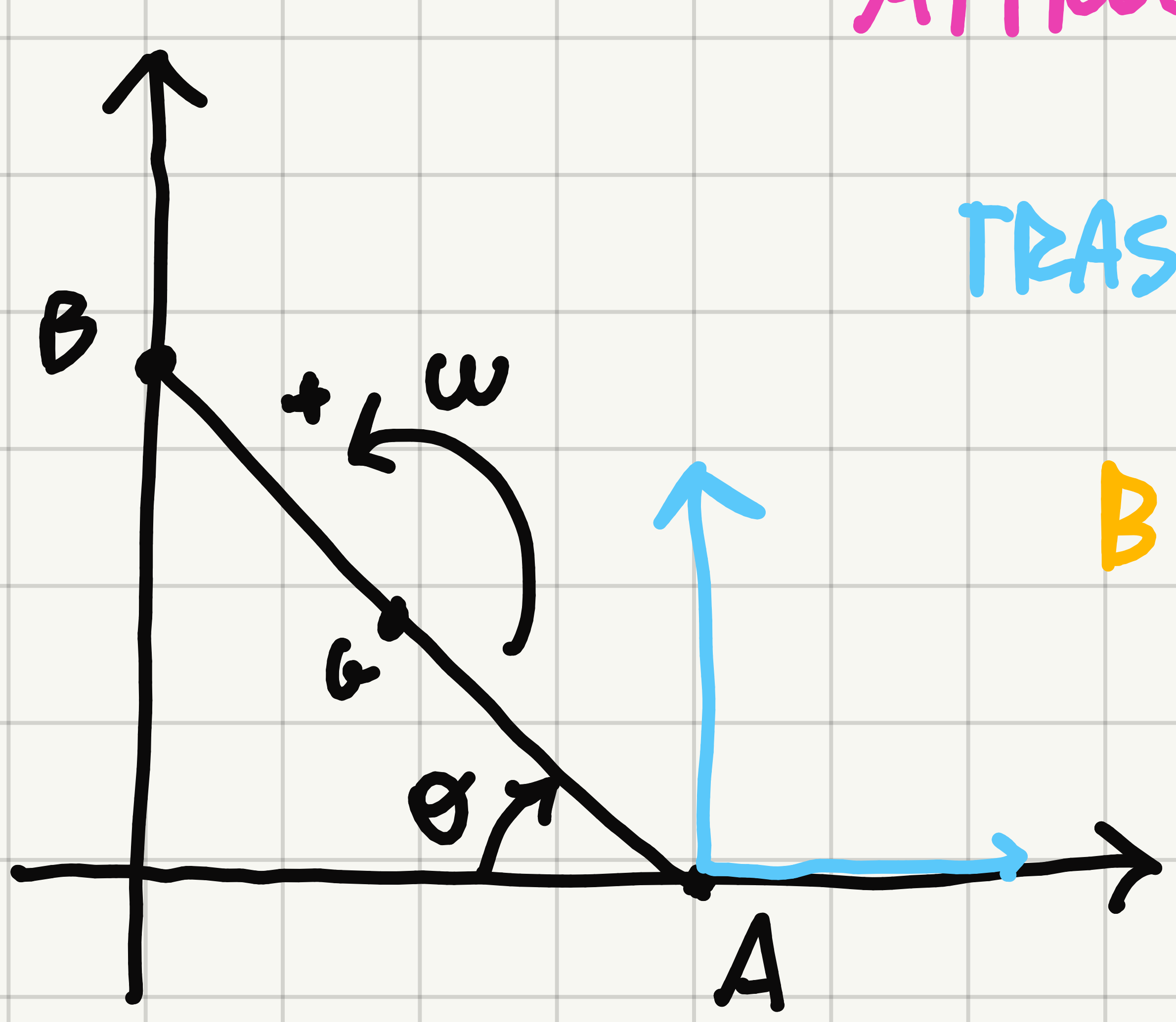
dove G è il baricentro ⇒ AG=GB




REGOLA DI GRÜBLER

$$n = n_0 - n_v = 3n_c - (1+1) =$$
$$= 3 - 2 = 1 \text{ G.D.L. } \quad x_A$$

APPROCCIO 1: MOTI RELATIVI




TRASLANTE CON A

B IN ROTAZIONE RISPETTO AD A

$$\vec{\omega} = -\dot{\theta}\,\hat{k}$$
$$\vec{v}_B = \vec{v}_{trB} + \vec{v}_{rotB}$$

L'approccio migliore per risolvere questi esercizi è contestualizzando tutti i termini che compaiono nell'equazione

| | $\vec{v}_B$ | = | $\vec{v}_{trB}$ | + | $\vec{v}_{rotB}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| MODULO | ? | | $v_A$ | | $\vec{\omega} \times \overrightarrow{(B-A)}$ ? |
| DIREZIONE | $\hat{j}$ | | $\hat{i}$ | | $\perp (AB)$ |

$v_B \hat{j} = v_A \hat{i} + \omega \hat{k} \times (AB\cos(180-\theta)\hat{i} + AB\sin(180-\theta)\hat{j}) =$

$= (v_A - AB\,\omega\sin(180-\theta))\hat{i} + (AB\,\omega\cos(180-\theta))\hat{j}$

$v_A - AB\,\omega\sin(180-\theta) = 0 \Rightarrow \omega = 14{,}3\ rad/s$

$\vec{v}_B = (AB\,\omega\cos(180-\theta))\hat{j} = 10\hat{j}\ m/s$

ANALOGAMENTE, SI PROCEDE PER CALCOLARE L'ACCELERAZIONE

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^{TR} + \vec{a}^{REL}_{B(t)} + \vec{a}^{REL}_{B(n)} + \cancel{\vec{a}_{co}}$$

| | $\vec{a}_B$ | $\vec{a}_B^{TR}$ | $\vec{a}^{REL}_{B(t)}$ | $\vec{a}^{REL}_{B(n)}$ | $\vec{a}_{co}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| MODULO | ? | $a_A$ | $\dot{\omega}_{AB}$ ? | $\omega_{AB}^2$ | $\cancel{0}$ |
| DIREZIONE | $\hat{j}$ | $\hat{i}$ | $\hat{k}$ | $//(\vec{AB})-$ | $\cancel{0}$ |

TERNA TRASLANTE

$\hat{i})\quad a_a + \omega_{Ab}^2 AB\cos(30) - \dot{\omega}_{AB} AB\sin(30) = 0 \to \dot{\omega}_{AB} = 355\ rad/s^2$

$\hat{j})\quad -a_B = -\omega_{AB}^2 AB\sin(30) - \dot{\omega}_{AB} AB\cos(30) \to \vec{a}_B = -286{,}8\ m/s^2$

ALLO STESSO MODO, SI PROCEDE PER CALCOLARE $\vec{v}_G$ E $\vec{a}_G$

$$\vec{v}_G = \vec{v}_{tr_G} + \vec{v}_{rot_G}$$

| | $\vec{v}_G$ | $\vec{v}_{tr_G}$ | $\vec{v}_{rot_G}$ |
|---|---|---|---|
| MODULO | ? | $v_A$ | $\vec{\omega} \times (\vec{G-A})$ ? |
| DIREZIONE | ? | $\hat{i}$ | $\hat{k}$ |

$\omega_{GA}$ È GIÀ NOTO IN QUANTO $GA = \frac{AB}{2}$ $\Rightarrow \omega = 28{,}6$ rad/s

$\vec{v}_G = (v_a - \omega_{GA} GA\cos(60))\hat{i} + (-\omega_{GA} GA\sin(60))\hat{j} = 2{,}5\hat{i} - 4{,}3\hat{j}\ m/s$

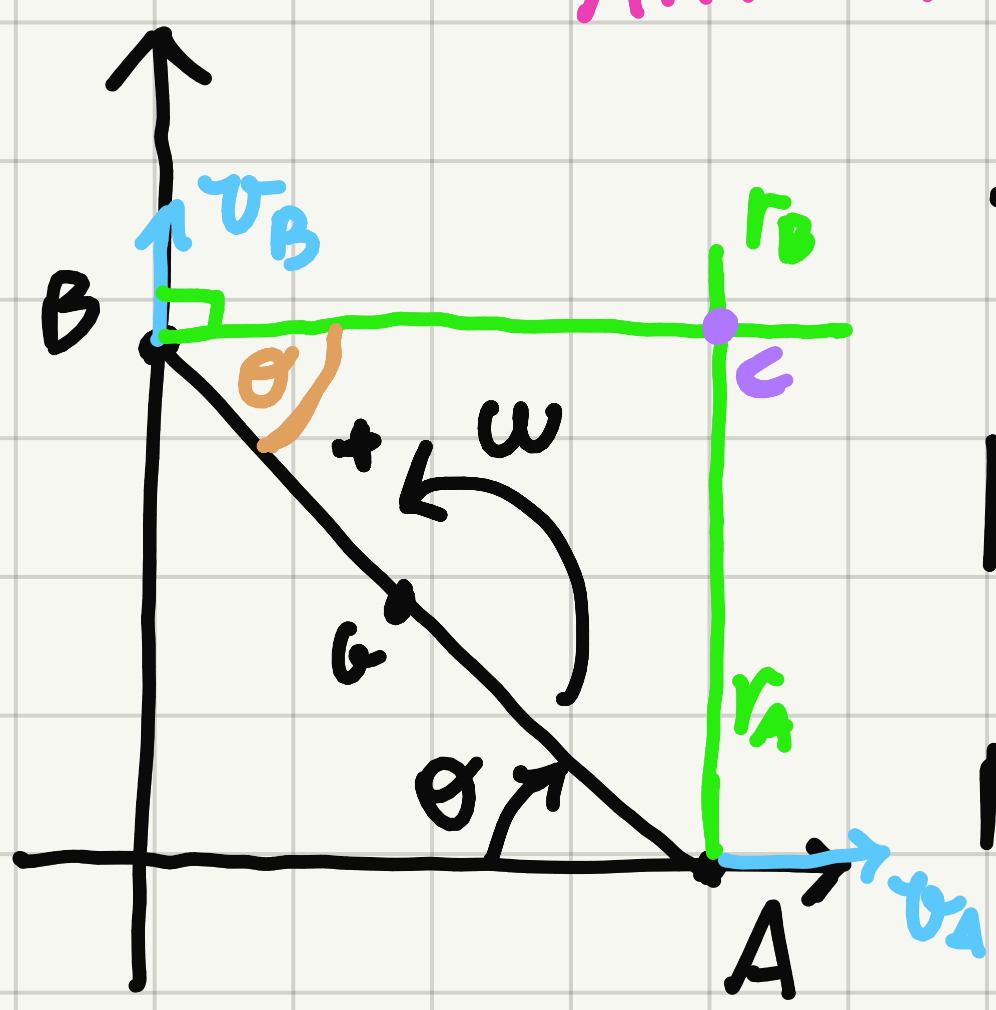
$$\vec{v}_G = \vec{a}^{TR}_G + \vec{a}^{REL}_{G(t)} + \vec{a}^{REL}_{G(n)}$$

| | $\vec{v}_G$ | $\vec{a}^{TR}_G$ | $\vec{a}^{REL}_{G(t)}$ | $\vec{a}^{REL}_{G(n)}$ |
|---|---|---|---|---|
| MODULO | ? | $a_a$ | $\dot{\omega}_{GA}$ | $\omega^2 GA$ |
| DIREZIONE | ? | $\hat{i}$ | $\hat{k}$ | $//\vec{GA}(-)$ |

$$\vec{a}_G = (a_a + \omega_{GA}^2 GA\cos(30) - \dot{\omega}_{GA} GA\cos(60))\hat{\imath} + (-\omega_{GA}^2 \sin(30) \dot{\omega}_{GA} \cdot$$

$$\cdot \sin(60))\hat{\jmath} = 0{,}16\,\hat{\imath} - 143{,}4\,\hat{\jmath} \ m/s^2$$

## APPROCCIO 2: TEOREMA DI RIVALS




$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{(B-A)}$ MA NON CONOSCO $\omega$

LO SI PUÒ DETERMINARE VALUTANDO L'ATTO DI MOTO E DETERMINANDO IL CIR

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \overrightarrow{(A-C)} = \omega\hat{k} \times AB\sin\theta\,\hat{\jmath} = \omega AB\sin\theta\,\hat{\imath}$$

$$\Rightarrow \omega = 14{,}3 \ rad/s \quad \Rightarrow \vec{v}_B = 10\,\hat{\jmath} \ m/s$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \overrightarrow{(B-A)} - \omega^2(B-A) = a_A\hat{\imath} - \dot{\omega}AB\sin\theta\,\hat{\imath} - \dot{\omega}AB\cos\theta\,\hat{\jmath}$$

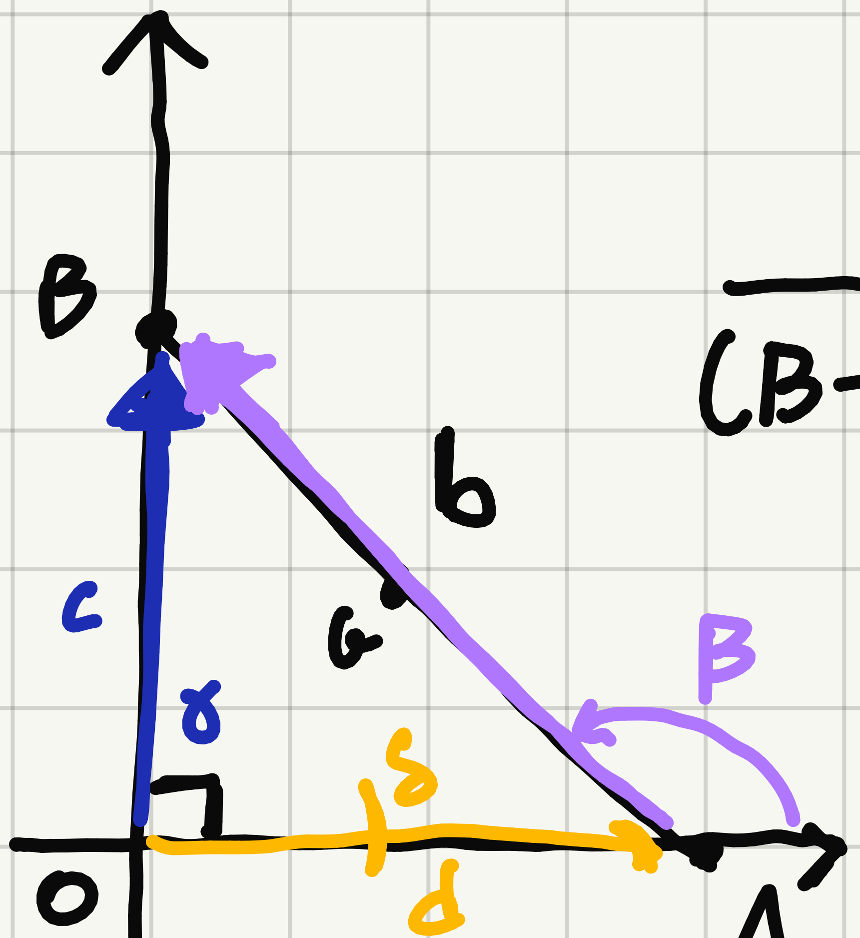
$$-\omega^2 AB\cos\theta\,\hat{\imath} - \omega^2 AB\sin\theta\,\hat{\jmath} = (a_A - \dot{\omega}AB\sin\theta - \omega^2 AB\cos\theta)\hat{\imath} +$$

$$+(-\dot{\omega}AB\cos\theta - \omega^2 AB\sin\theta)\hat{\jmath} \qquad a_B\hat{\imath} = 0 \Rightarrow \dot{\omega} = 355 \ rad/s^2$$

$$\Rightarrow \vec{a}_B = -286{,}8 \ m/s^2$$

## APPROCCIO 3: COORDINATE POLARI

$$\overrightarrow{(B-O)} = \overrightarrow{(A-O)} + \overrightarrow{(B-A)}$$



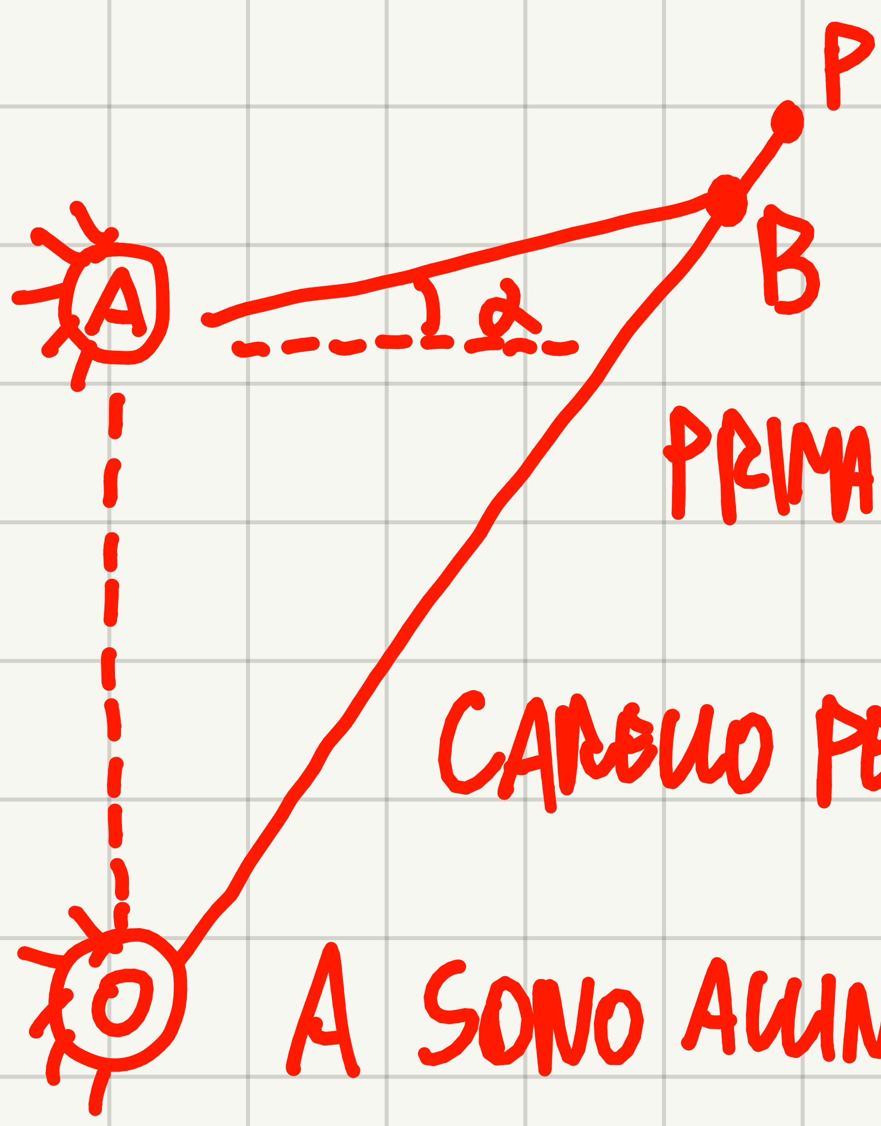

$$\overrightarrow{(B-O)} = c e^{i\gamma} \qquad \overrightarrow{(A-O)} = d e^{i\delta} \qquad \overrightarrow{(B-A)} = b e^{i\beta}$$

COSTANTI
$b, \delta = 0, \gamma = 90^\circ$

$$\Rightarrow b e^{i\beta} = c e^{i\gamma} + d e^{i\delta}$$

VARIABILI
$c, d, \beta$

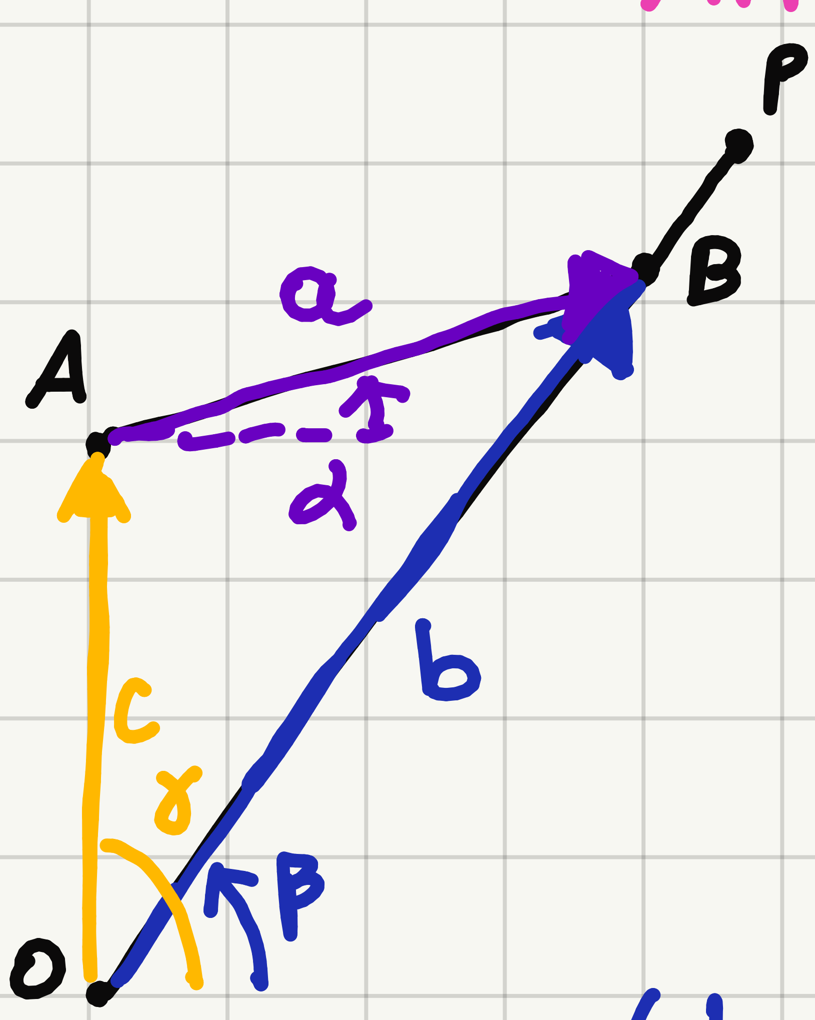
④ CONSIDERARE IL SISTEMA COMPOSTO DALLE ASTE PO, CON CERNIERA IN O,




E AB CON CERNIERA IN A VINCOLATA IN B SULLA PRIMA ASTA COME VINCOLO DI MANICOTTO (APPROSSIMABILE A CARRELLO PER QUANTO VISTO NELLE LEZIONI TEORICHE). I PUNTI O E A SONO ALLINEATI E SAPPIAMO CHE $OA=1{,}732\,m$, $AB=1\,m$, $OP=3\,m$, $\alpha=0$, $\dot{\alpha}=2\,rad/s$, $\ddot{\alpha}=0$. DETERMINARE $\vec{\omega}_{OP}$, $\vec{\omega}_{OP}$, $\vec{v}_P$, $\vec{a}_P$

$n=6-(2+2+1)=1 \Rightarrow$ 1 GRADO DI LIBERTÀ $\alpha$

## APPROCCIO 1: CHIUSURA COMPLESSA




$$b e^{i\beta} = c e^{i\gamma} + a e^{i\alpha}$$

$c = 1{,}732\,m$ $\quad \gamma = 90^0$ FISSO

$a = 1\,m$ $\quad \alpha = 0$ NON FISSO

($b$ NON FISSO, $\beta$ NON FISSO) INCOGNITE

$$\begin{cases} b\cos\beta = a\cos\alpha + c\cos\gamma \\ b\sin\beta = a\sin\alpha + c\sin\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b\cos\beta = a\cos\alpha \\ b\sin\beta = a\sin\alpha + c \end{cases}$$

CON $\alpha=0$, $\begin{cases} b\cos\beta = a \\ b\sin\beta = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = a/\cos\beta \\ a\tan\beta = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 60^0 \\ b = 2m \end{cases}$

PUR NON ESSENDO RICHIESTI ESPLICITAMENTE, VANNO CALCOLATI

POICHÈ SERVIRANNO IN UN SECONDO MOMENTO

$$\begin{cases} \dot b\cos\beta - b\dot\beta\sin\beta = -a\dot\alpha\sin\alpha \\ \dot b\sin\beta + b\dot\beta\cos\beta = a\dot\alpha\cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \cos\beta & -b\sin\beta \\ \sin\beta & b\cos\beta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot b \\ \dot\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a\dot\alpha\sin\alpha \\ a\dot\alpha\cos\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ a\dot\alpha \end{vmatrix} \qquad \det A = 2$$

$$\dot b = \frac{\det\begin{vmatrix} 0 & -b\sin\beta \\ a\dot\alpha & b\cos\beta \end{vmatrix}}{2} = 1{,}732\,m/s \qquad \dot\beta = \frac{\det\begin{vmatrix} \cos\beta & 0 \\ \sin\beta & a\dot\alpha \end{vmatrix}}{2} = 0{,}5\,rad/s$$

$$\Rightarrow \vec\omega_{op} = 0{,}5\hat k\ rad/s$$

$$\begin{cases} \ddot b\cos\beta - b\ddot\beta\sin\beta - 2\dot b\dot\beta\sin\beta - b\dot\beta^2\cos\beta = -\dot\alpha^2 a \\ \ddot b\sin\beta + b\ddot\beta\cos\beta + 2\dot b\dot\beta\cos\beta - b\dot\beta^2\sin\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \cos\beta & -b\sin\beta \\ \sin\beta & b\cos\beta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \ddot b \\ \ddot\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dot\alpha^2 a + 2\dot b\dot\beta\sin\beta + b\dot\beta^2\cos\beta \\ -2\dot b\dot\beta\cos\beta + b\dot\beta^2\sin\alpha \end{vmatrix}$$

SI NOTI CHE LE MATRICI DEI COEFFICIENTI DEVONO ESSERE UGUALI

$$\Rightarrow \ddot b = -1{,}5\,m/s^2,\ \ddot\beta = 0{,}87\,rad/s^2 \Rightarrow \dot{\vec\omega}_{op} = 0{,}87\hat k\ rad/s^2$$

LE CARATTERISTICHE DI P POSSONO ESSERE CALCOLATE USANDO IL TEOREMA DI RIVALS

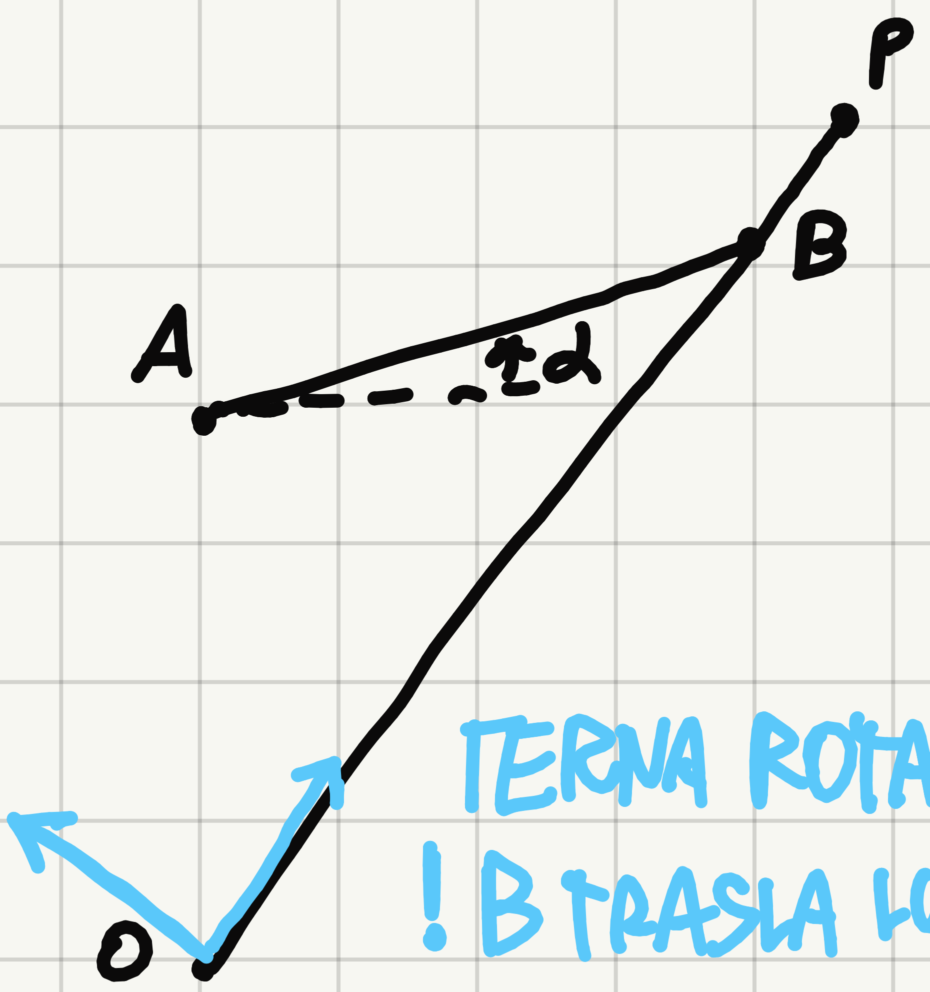
$$\vec v_p = \vec v_o + \vec\omega_{op} \times (P-O) = \dot\beta\,\overline{OP}\cdot\hat k \times (\cos\beta\hat\imath + \sin\beta\hat\jmath) =$$

$$= \dot\beta\,OP(-\sin\beta\hat\imath + \cos\beta\hat\jmath) = (-1{,}29\hat\imath + 0{,}75\hat\jmath)\,m/s$$

$$\vec a_p = \vec a_o + \dot{\vec\omega}_{op} \times (P-O) - \omega^2(P-O) = \ddot\beta\,OP(-\sin\beta\hat\imath + \cos\beta\hat\jmath) -$$

$$-\dot\beta^2 OP(\cos\beta\hat\imath + \sin\beta\hat\jmath) = (-2{,}64\hat\imath - 1{,}95\hat\jmath)\,m/s^2$$

# APPROCCIO 2: MOTI RELATIVI




TERNA ROTANTE IN O

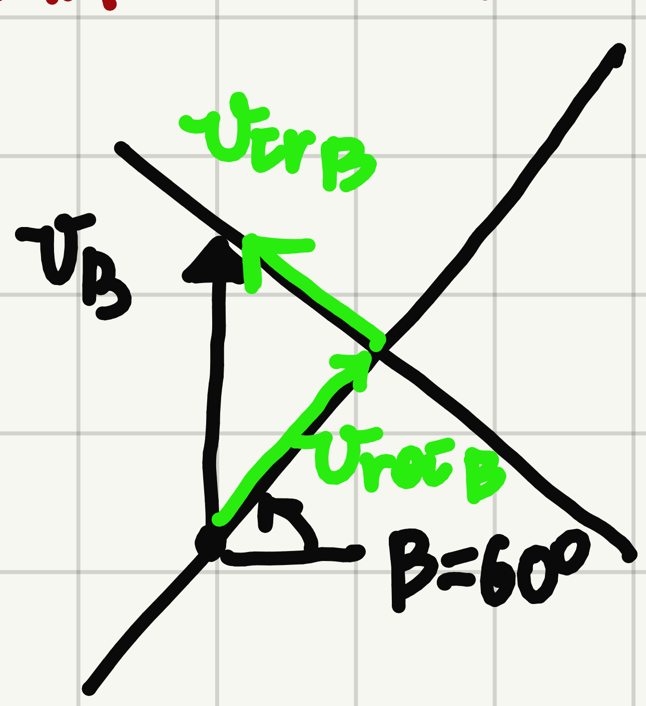
! B TRASLA LUNGO L'ASTA

CONSIGLI:

- MAI PIAZZARE LA TERNA NEL PUNTO P DI CUI SI È INTERESSATI
- LE TERNE SCELTE DEVONO PERMETTERE DI SCOMPORRE IL MOTO ASSOLUTO IN UNO SEMPLICE (ROTAZIONE O TRASLAZIONE)

| | $\vec{v}_B$ = | $\vec{v}_{trB}$ + | $\vec{v}_{rotB}$ |
|---|---|---|---|
| MODULO | $\dot{\alpha}$ | ? $\omega_{OB}\,OB$ | ? |
| DIREZIONE | $\perp(AB)$ | $\perp(AB)$ | $/\!/ OB$ |

TRIANGOLO DELLE VELOCITÀ



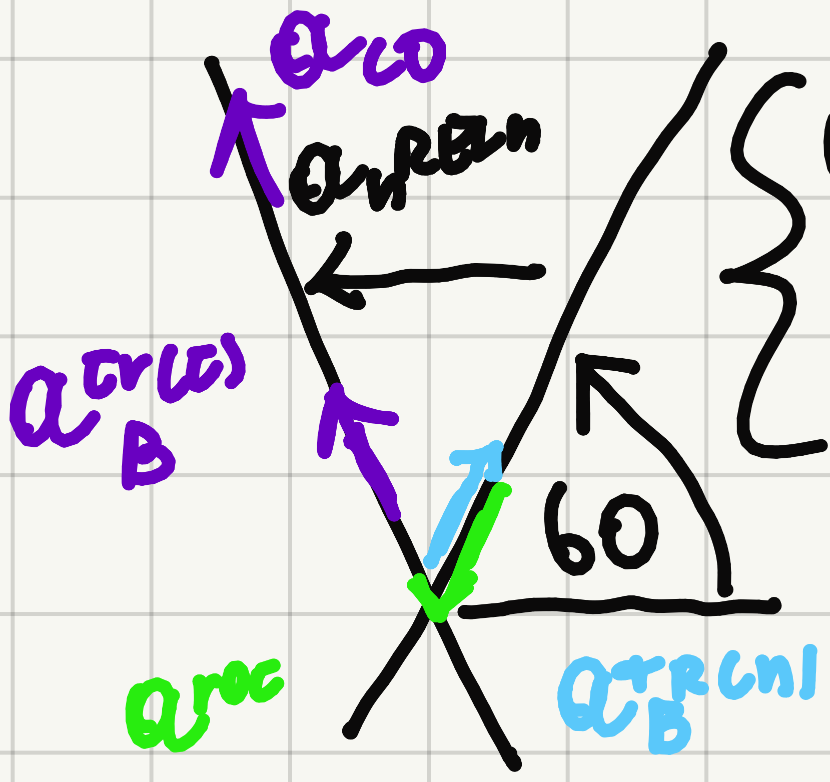

$$\begin{cases} v_{rotB}\cos\beta + v_{trB}\cos(\beta + \pi/2) = 0 \\ v_{rotB}\sin\beta + v_{trB}\sin(\beta + \pi/2) = v_B \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_{rotB} = \frac{v_{trB}\sin\beta}{\cos\beta}$$

$$v_{trB} = \frac{\dot{\alpha}\cdot AB}{\frac{\sin^2\beta}{\cos\beta} + \cos\beta} = 1\,m/s \qquad v_{rotB} = 1{,}732\,m/s$$

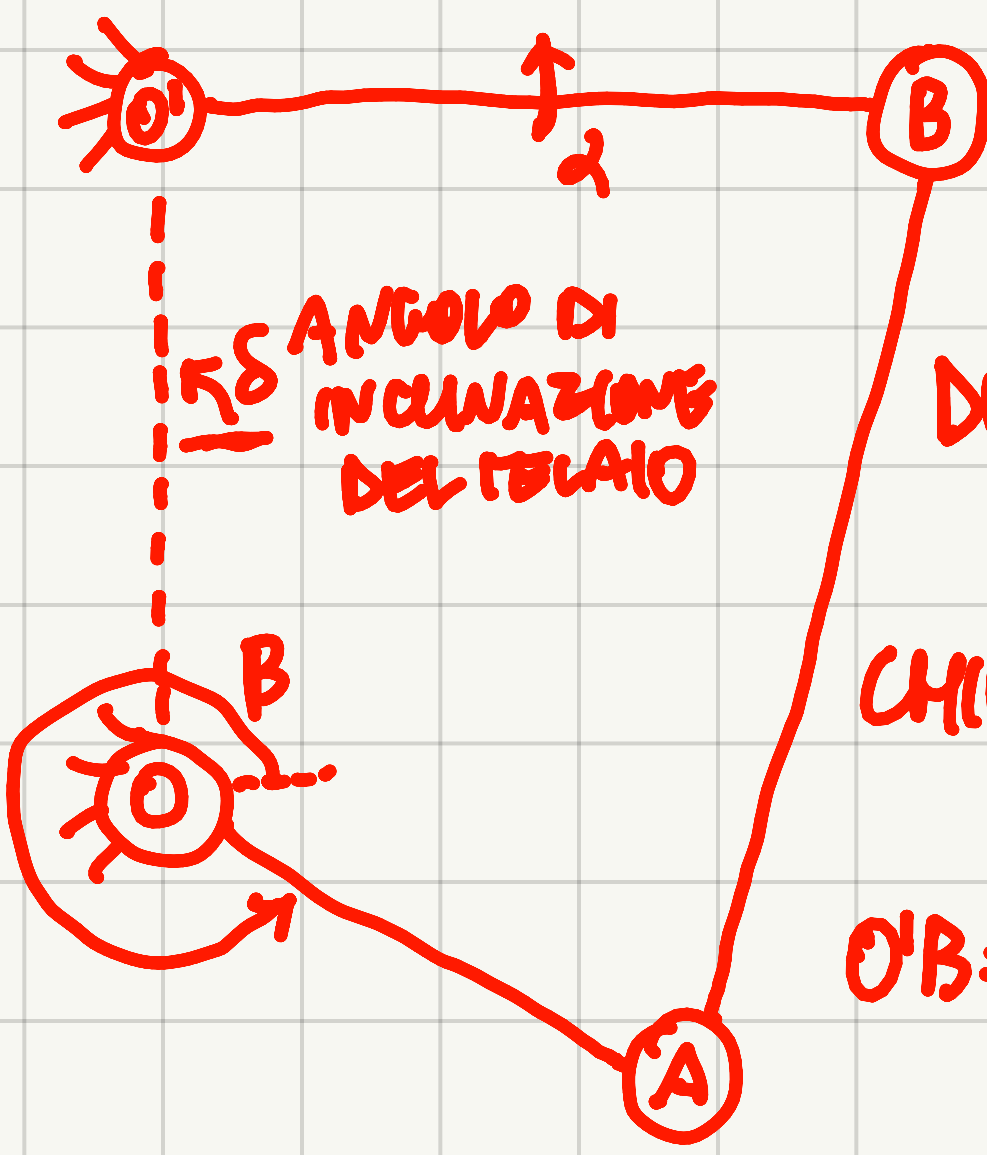
$$\omega_{OB} = \frac{v_{trB}}{OB} = 0{,}5\,rad/s \Rightarrow \vec{\omega}_{OP} = 0{,}5\,\hat{k}\ rad/s$$

| | $\vec{a}_B^{(t)}$ + | $\vec{a}_B^{(n)}$ = | $\vec{a}_B^{TR}$ + | $\vec{a}_{B(t)}^{REL}$ + | $\vec{a}_{B(n)}^{REL}$ + | $\vec{a}_{co}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| MODULO | $\cancel{\ddot{\alpha}AB}$ | $\dot{\alpha}^2 AB$ | ? $\dot{\omega}_{OB}\,OB$ | $\omega_{OB}^2\,OB$ | ? | $2\omega_B v_{rotB}$ |
| DIREZIONE | $\perp(AB)$ | $/\!/ -AB$ | $\perp(OB)$ | $/\!/ -OB$ | $/\!/ OB$ | $\perp(OB)$ |



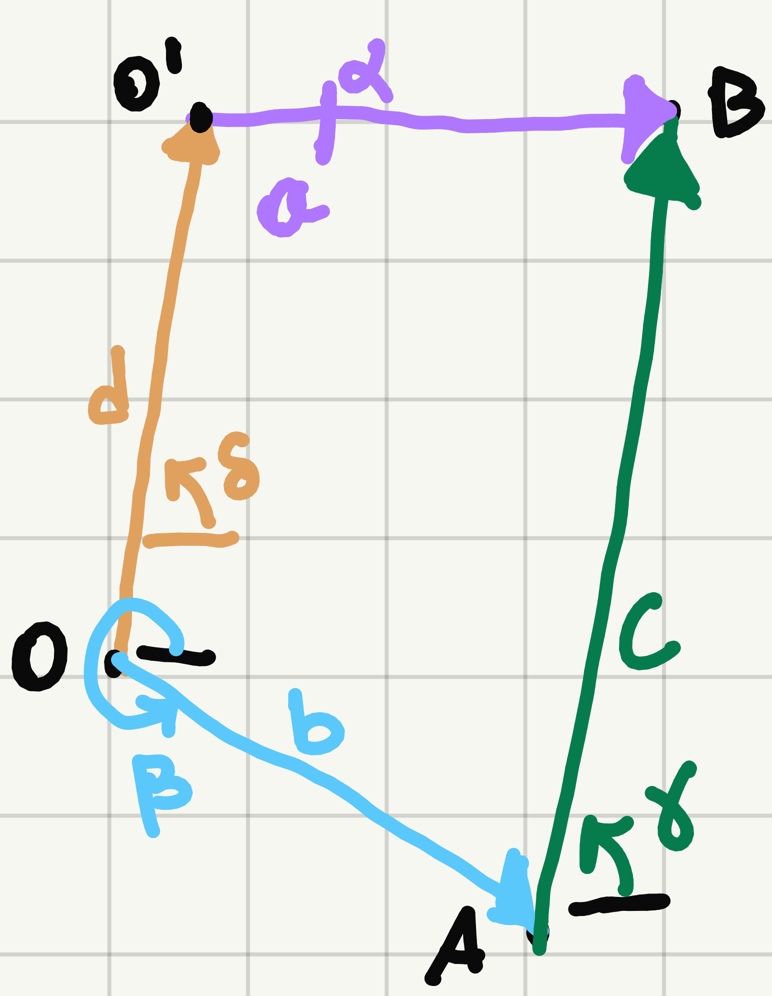

$$\begin{cases} a_P^{tr(n)}\cos(\beta+\pi)+a_B^{rel}\cos\beta+a^{roc}\cos(\beta+\pi/2)+a_B^{tr(t)}\cos(\beta+\pi/2) = -a_B \\ a_P^{tr(n)}\sin(\beta+\pi)+a_B^{rel}\sin\beta+a^{roc}\sin(\beta+\pi/2)+a_B^{tr(t)}\sin(\beta+\pi/2) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \dot\omega = 0{,}87\,rad/s^2 \Rightarrow \vec{\dot\omega}_{OP} = 0{,}87\,\hat{k}\ rad/s^2$




⑤ Considerare il seguente sistema composto da due cerniere e tale per cui si abbia, a seguito della chiusura, un quadrilatero come in figura. Sono noti $O'B = 2m$, $OA = 1m$, $AB = 2{,}35m$, $OO' = 1{,}41m$, $\beta(t) = 5{,}28+0{,}3t+0{,}05t^2$, $\alpha(t=2s)=0$, $\delta = 0{,}785\,rad$ fisso.

Calcolare $\vec{\omega}_{AB}$, $\vec{\dot\omega}_{AB}$, $\vec{\omega}_{O'B}$, $\vec{\dot\omega}_{O'B}$ in $t=2s$




$$n = 9-(2+2\overset{OO'}{+}4) = 1 \qquad \alpha = 0$$

$$(B-A)+(A-O) = (B-O')+(O'-O)$$

$\beta(2) = 6{,}08\,rad \qquad \dot\beta(t) = 0{,}3+0{,}1t \Rightarrow \dot\beta(2) = 0{,}5\,rad/s^2$

$\ddot\beta(t) = 0{,}1 \Rightarrow \ddot\beta(2) = 0{,}1\,rad/s^2$

$b,\beta$ noto; $c$ noto, $\gamma$ non noto; $d,\delta$ noto; $a,\alpha$ noto

$$c e^{i\gamma} + b e^{i\beta} = a e^{i\alpha} + d e^{i\delta}$$

$$\begin{cases} c\cos\gamma + b\cos\beta = a\cancel{\cos\alpha} + d\cos\delta \\ c\sin\gamma + b\sin\beta = \cancel{a\sin\alpha} + d\sin\delta \end{cases} \Rightarrow \gamma = \arcsin\left(\frac{d\sin\delta - b\sin\beta}{c}\right) = 0{,}535\,rad$$

$$\begin{cases} -c\dot{\gamma}\sin\gamma - b\dot{\beta}\sin\beta = \cancel{-a\dot{\alpha}\sin\alpha} - \cancel{d\dot{\delta}\sin\delta} \\ c\dot{\gamma}\cos\gamma + b\dot{\beta}\cos\beta = a\dot{\alpha}\,\cancel{\cos}\alpha + \cancel{d\dot{\delta}\cos\delta} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & c\sin\gamma \\ a & -c\cos\gamma \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\gamma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -b\dot{\beta}\sin\beta \\ b\dot{\beta}\cos\beta \end{vmatrix} \Rightarrow \dot{\alpha} = 0{,}33\,\text{rad/s},\ \dot{\gamma} = 0{,}083\,\text{rad/s}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}_{AB} = 0{,}083\hat{k}\ \text{rad/s} \quad \vec{\omega}_{dB} = 0{,}33\hat{k}\ \text{rad/s}$$

$$\begin{cases} -c\ddot{\gamma}\sin\gamma - c\dot{\gamma}^2\cos\gamma - b\ddot{\beta}\sin\beta - b\dot{\beta}^2\cos\beta = \cancel{-a\ddot{\alpha}\sin\alpha} - a\dot{\alpha}^2\cancel{\cos\alpha} \\ c\ddot{\gamma}\cos\gamma - c\dot{\gamma}^2\sin\gamma + b\ddot{\beta}\cos\beta - b\dot{\beta}^2\sin\beta = a\ddot{\alpha}\,\cancel{\cos}\alpha - \cancel{a\dot{\alpha}^2\sin\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & c\sin\gamma \\ a & -c\cos\gamma \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\gamma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -c\dot{\gamma}^2\cos\gamma - b\ddot{\beta}\sin\beta - b\dot{\beta}^2\cos\beta + a\dot{\alpha}^2 \\ -c\dot{\gamma}^2\sin\gamma + b\ddot{\beta}\cos\beta - b\dot{\beta}^2\sin\beta \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \ddot{\alpha} = 0{,}056\,\text{rad/s}^2,\ \ddot{\gamma} = -0{,}014\,\text{rad/s}^2 \Rightarrow \dot{\vec{\omega}}_{AB} = -0{,}014\hat{k}\ \text{rad/s}^2 \quad \dot{\vec{\omega}}_{dB} = 0{,}056\hat{k}\ \text{rad/s}^2$$