COLONNE LINEARMENTE INDIPENDENTI TRA LORO E LE PRECEDENTI n_0.

LA TRASFORMAZIONE COSÌ OTTENUTA NON È UNICA

ESERCIZIO: SI CONSIDERI IL SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} \cdot x(t) \\ y(t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot x(t) \end{cases}$$

LA CUI MATRICE A HA AUTOVALORI REALI E DISTINTI $\lambda_1=2, \lambda_2=4$ E $\lambda_3=-5$. DETERMINARE T^{-1}

$$\mathcal{O} = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -15 \\ 4 & 0 & 75 \end{vmatrix} \quad rk(\mathcal{O}) = 2 < n = 3$$

$\Rightarrow$ SISTEMA NON COMPLETAMENTE OSSERVABILE $T = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix}$

SCEGLIAMO $t_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{vmatrix}$ E $t_2 = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ -15 \end{vmatrix}$. DAL TEOREMA ENUNCIATO, DEFINIAMO $t_3 = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$ LINEARMENTE INDIPENDENTE DA t_1 E t_2

$$\begin{cases} t_1^T \cdot t_3 = 0 \\ t_2^T \cdot t_3 = 0 \end{cases} \to t_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{vmatrix}, \; b \neq 0, \; b \in \mathbb{R}.$$

PER SEMPLICITÀ, SI DEFINISCE CON $b = 1 \Rightarrow T^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -15 & 0 \end{vmatrix}$

$\to T = \begin{vmatrix} 5/7 & 0 & 2/21 \\ 1/7 & 0 & -1/21 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. DALLA TRASFORMAZIONE $x(t) = T^{-1} \cdot \hat{x}(t)$

OTTENIAMO LA FORMA OSSERVABILE DI KALMAN $\hat{A} = T \cdot A \cdot T^{-1} =$

$$= \left|\begin{array}{c|c} \hat{A}_0 & 0 \\ \hline \hat{A}_1 & \hat{A}_{NO} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|c} 0 & 10 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

E $\hat{C} = C \cdot T^{-1} = \left|\begin{array}{c|c} \hat{C}_0 & 0 \end{array}\right| =$

$= \left|\begin{array}{cc|c} 10 & -43 & 0 \end{array}\right| \Rightarrow t_3$ NON INFLUENZA L'ANDAMENTO DEL SISTEMA. SI NOTI CHE $\hat{x}_0 = \begin{vmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{vmatrix}$ POICHÉ $\hat{A}_1 = |0 \quad 0|$

$\Rightarrow \hat{x}_0$ NON INFLUENZA LA PARTE NON OSSERVABILE

DUALITÀ OSSERVABILITÀ/CONTROLLABILITÀ

CONSIDERIAMO IL SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO $S: \begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) \end{cases}$

IL SISTEMA DUALE È $S_d: \begin{cases} \dot{z}(t) = A^T \cdot z(t) + C^T \cdot v(t) \\ s(t) = B^T \cdot z(t) \end{cases}$

TEOREMA (PRINCIPIO DI DUALITÀ): IL SISTEMA È CONTROLLABILE/OSSERVABILE

$\Leftrightarrow$ IL SUO SISTEMA DUALE È OSSERVABILE/CONTROLLABILE

ESEMPIO:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot x(t) + \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} \cdot u(t) \\ y(t) = |3 \quad 0| \cdot x(t) \end{cases}$$

VERIFICHIAMO CHE

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot z(t) + \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \end{vmatrix} \cdot v(t) \\ s(t) = |2 \quad 3| \cdot x(t) \end{cases}$$

- $\begin{cases} \mathcal{R}_1 = \mathcal{O}_2^T \\ \mathcal{O}_1 = \mathcal{R}_2^T \end{cases}$

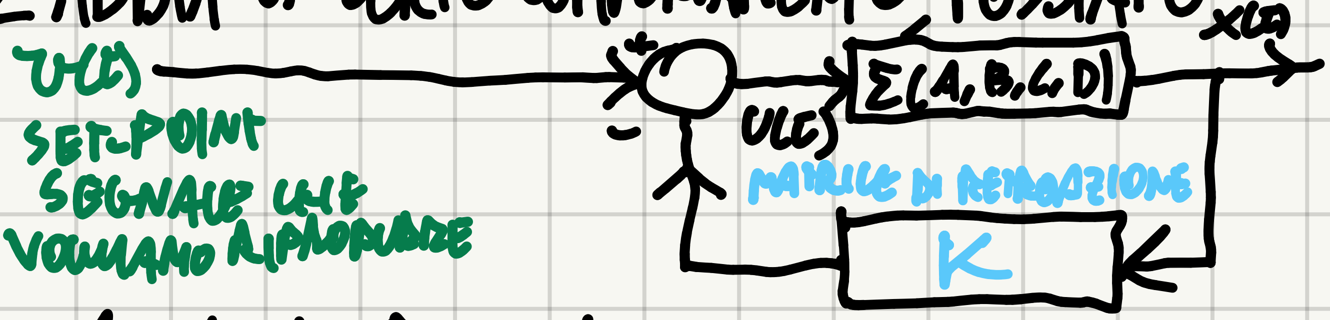
$$\mathcal{R}_1 = [B_1 \quad A_1 B_1] = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} ; \quad \mathcal{O}_2 = \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2 A_2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} \checkmark$$

$$\mathcal{O}_1 = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A_1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} ; \quad \mathcal{R}_2 = [B_2 \quad A_2 B_2] = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \checkmark$$

CONTROLLABILE $\Rightarrow$ DUALE OSSERVABILE; NON OSSERVABILE $\Rightarrow$ DUALE NON CONTROLLABILE

RETROAZIONE DELLO STATO

SE VOGLIAMO CHE UN SISTEMA Σ ABBIA UN CERTO COMPORTAMENTO POSSIAMO SOLO LAVORARE SUGLI INGRESSI



DATO UN SISTEMA $\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = I_n \cdot x(t) \end{cases}$ STATO DIRETTAMENTE MISURABILE

SOTTO LE CONDIZIONI CHE $\exists K \mid u(t) = v(t) - K \cdot x(t) \Rightarrow$ IL SISTEMA A CICLO CHIUSO $\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot (v(t) - K \cdot x(t)) \\ y(t) = x(t) \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = (A - B \cdot K) \cdot x(t) + B \cdot v(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

ABBIA GLI AUTOVALORI DESIDERATI.

TEOREMA: CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE AFFINCHÉ IL PROBLEMA ABBIA SOLUZIONE PER OGNI INSIEME DI AUTOVALORI ASSEGNATI È CHE IL SISTEMA DI PARTENZA SIA CONTROLLABILE.

POSSIAMO DISTINGUERE IL CASO SISO DAI CASI MISO/MIMO:

- LA MATRICE $K \in \mathbb{R}^n$ È UN VETTORE DI n ELEMENTI. ABBIAMO n GRADI DI LIBERTÀ E QUINDI UNA MAGGIOR LIBERTÀ DI MODIFICARE IL SISTEMA.
- CASO PIÙ COMPLESSO, ENTRANO IN GIOCO DIVERSI TEOREMI

TEOREMA: IL SISTEMA DINAMICO LINEARE E STAZIONARIO $\dot{x}(t)=A\cdot x(t)+B\cdot u(t)$ È CONTROLLABILE $\Leftrightarrow$ SCELTO UN INSIEME DI n NUMERI REALI E/O DI COPPIE DI NUMERI COMPLESSI CONIUGATI $(\lambda_{1DES},\dots,\lambda_{nDES})$ ESISTE UNA MATRICE DI RETROAZIONE $K\in\mathbb{R}^{r\times n}$ | GLI AUTOVALORI DI $A-B\cdot K$ SIANO $\lambda_{1DES},\lambda_{2DES},\dots,\lambda_{nDES}$.

OSSIA, LA CONTROLLABILITÀ COINCIDE CON LA POSSIBILITÀ DI POTER ASSEGNARE AD ARBITRIO GLI AUTOVALORI DEL SISTEMA A CICLO CHIUSO ATTRAVERSO UNA RETROAZIONE COSTANTE SULLO STATO. È NECESSARIO STUDIARE SEPARATAMENTE IL CASO DI INGRESSO SCALARE O DI VETTORE DI DIMENSIONE NON NOTA.

TEOREMA: SI CONSIDERI $\dot{x}(t)=A\cdot x(t)+B\cdot u(t)$ UN SISTEMA IN FORMA CANONICA DI CONTROLLO, OSSIA $A=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{vmatrix}$ $B=\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{vmatrix}$, DOVE $\alpha_{i=0,1,\dots,n-1}$ SONO I COEFFICIENTI DI $p_A(\lambda)=\det(\lambda I_n-A)=$

$$=\lambda^n+\alpha_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+\alpha_1\lambda+\alpha_0.$$

SIANO $\lambda_{1DES},\lambda_{2DES},\dots,\lambda_{nDES}$ UN QUALUNQUE INSIEME DI n NUMERI REALI E/O DI COPPIE DI NUMERI COMPLESSI CONIUGATI. SIANO, ORA,

$\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ I COEFFICIENTI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO RELATIVO A TALI AUTOVALORI, OSSIA $q_{DES}(z) = q_{(A-B\cdot K)}(z) = (z - z_{1DES}) \cdot (z - z_{2DES}) \cdot \ldots \cdot (z - z_{nDES}) = z^n + \beta_{n-1} z^{n-1} + \beta_{n-2} z^{n-2} + \ldots + \beta_1 z + \beta_0$.

SCELTA $K = [(\beta_0 - \alpha_0) \ (\beta_1 - \alpha_1) \ \ldots \ (\beta_{n-1} - \alpha_{n-1})]$ COME LA MATRICE DI RETROAZIONE, IL SISTEMA A CICLO CHIUSO $A - B \cdot K$ HA COME AUTOVALORI $z_{1DES}, z_{2DES}, \ldots, z_{nDES}$. TALE RISULTATO FORNISCE UNA PROCEDURA PER DETERMINARE LA MATRICE IN RETROAZIONE DELLO STATO.

OGNI SISTEMA CONTROLLABILE PUÒ ESSERE POSTO MEDIANTE OPPORTUNA TRASFORMAZIONE DI SIMILITUDINE $X = T^{-1} \cdot \hat{X}$, CIOÈ NELLA FORMA CANONICA DI CONTROLLO PER LA QUALE È IMMEDIATO DETERMINARE LA MATRICE DI RETROAZIONE E, MOLTIPLICANDOLA A DESTRA PER LA MATRICE DI TRASFORMAZIONE, SI OTTIENE $K = [(\beta_0 - \alpha_0) \ (\beta_1 - \alpha_1) \ \ldots \ (\beta_{n-1} - \alpha_{n-1})]^T$

VEDIAMO TALE PROCEDURA NEL DETTAGLIO:

1) VERIFICARE CHE IL SISTEMA NON ABBIA GIÀ GLI AUTOVALORI DESIDERATI
2) VERIFICARE CHE IL SISTEMA SIA CONTROLLABILE
3) CALCOLARE IL POLINOMIO CARATTERISTICO DI A DA CUI SI OTTERRANNO

GLI α_i COEFFICIENTI $p_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\lambda^n+\alpha_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+\alpha_1\lambda+\alpha_0$

4) CALCOLARE IL POLINOMIO DESIDERATO DA CUI SI OTTENGONO I β_i COEFFICIENTI $q_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_{1DES})\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_{nDES})=\lambda^n+\beta_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots\beta_1\lambda+\beta_0$

5) DETERMINARE LA MATRICE DI TRASFORMAZIONE DI SIMILITUDINE CHE METTA LA NUOVA REALIZZAZIONE IN FORMA CANONICA DI CONTROLLO

$$T^{-1}=\mathcal{R}\cdot\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1\\ \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & 1 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \alpha_{n-1} & 1 & \cdots & & 0\\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\end{vmatrix},\ \mathcal{R}=[B\ AB\ A^2B\ldots A^{n-1}B]$$

DA CUI SI CALCOLA T

6) IL VETTORE $K=[(\beta_0-\alpha_0)\ (\beta_1-\alpha_1)\ \ldots\ (\beta_{n-1}-\alpha_{n-1})]^T$ RISOLVE IL PROBLEMA DI ALLOCARE GLI AUTOVALORI

7) PER VERIFICA, SI CALCOLANO GLI AUTOVALORI DEL NUOVO SISTEMA RETROAZIONATO $\det(\lambda I-(A-B\cdot K))=0$ E SI VERIFICA CHE COINCIDANO CON QUELLI DESIDERATI

ESERCIZIO: SI CONSIDERI IL SISTEMA $\dot{x}(t)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{vmatrix}\cdot x(t)+\begin{vmatrix}1\\1\\1\end{vmatrix}\cdot u(t)$. SI DETERMINI, SE POSSIBILE, UNA MATRICE DI RETROAZIONE K PER CUI IL SISTEMA A CICLO CHIUSO SIA STABILE E DI AUTOVALORI

$\lambda_{1DES}=-1,\ \lambda_{2DES}=-1-i,\ \lambda_{3DES}=-1+i$

① $P_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$

$\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=3$

② $\mathcal{R}=[B\quad A\cdot B\quad A^2\cdot B]=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}$ $\quad rk(\mathcal{R})=3$

$\Rightarrow$ SISTEMA CONTROLLABILE

③ $P_A(\lambda)=\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6$ $\quad \alpha_0=-6,\ \alpha_1=11,\ \alpha_2=-6$

④ $q_{A-B\cdot K}(\lambda)=(\lambda-\lambda_{1DES})(\lambda-\lambda_{2DES})(\lambda-\lambda_{3DES})=$

$$=(\lambda+1)(\lambda+1+i)(\lambda+1-i)=\lambda^3+3\lambda^2+4\lambda+2$$

$\beta_0=2,\ \beta_1=4,\ \beta_2=3$

⑤ $T^{-1}=\mathcal{R}\cdot\begin{vmatrix}\alpha_1&\alpha_2&1\\\alpha_2&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}11&-6&1\\-6&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=$

$=\begin{vmatrix}6&-5&1\\3&-4&1\\2&-3&1\end{vmatrix}\Rightarrow T=\begin{vmatrix}1/2&-1&1/2\\1/2&-2&3/2\\1/2&-4&9/2\end{vmatrix}$

$\hat{A}=T\cdot A\cdot T^{-1}=\begin{vmatrix}0&1&0\\0&0&1\\6&-11&6\end{vmatrix}$ $\quad \hat{B}=T\cdot B=\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}$

⑥ $K=[(\beta_0-\alpha_0)\quad(\beta_1-\alpha_1)\quad(\beta_2-\alpha_2)]\cdot T=|8\quad -7\quad 9|\cdot\begin{vmatrix}1/2&-1&1/2\\1/2&-2&3/2\\1/2&-4&9/2\end{vmatrix}=$

$=|5\quad -30\quad 34|$

⑦ $\det(\lambda I-(A-B\cdot K))=\det\begin{vmatrix}\lambda+4&-30&34\\5&\lambda-32&34\\5&-30&\lambda+31\end{vmatrix}=\lambda^3+3\lambda^2+4\lambda+2=0$

$\lambda_1=-1;\ \lambda_2=-1-i;\ \lambda_3=-1+i$ ✓

ESERCIZIO: SI CONSIDERI IL SISTEMA $x'(t) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot x(t) + \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot u(t)$

SE POSSIBILE, SI DETERMINI LA MATRICE DI RETROAZIONE K TALE PER CUI IL SISTEMA A CICLO CHIUSO SIA STABILE E I SUOI AUTOVALORI SIANO

$\lambda_{1DES} = -1,\ \lambda_{2DES} = -2-i,\ \lambda_{3DES} = -2+i$

$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 - \lambda^2 + 2 = 0 \quad (\lambda+1)(\lambda^2+2\lambda+2) = 0$

$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1-i,\ \lambda_3 = 1+i \qquad \mathcal{R} = [B\ \ A\cdot B\ \ A^2\cdot B] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$rk(\mathcal{R}) = 3 \Rightarrow$ SISTEMA CONTROLLABILE $\qquad \alpha_0 = 2,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = -1$

$q_{(A-B\cdot K)}(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+2+i)(\lambda+2-i) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 9\lambda + 5 \qquad \beta_0 = 5,\ \beta_1 = 9,\ \beta_2 = 5$

$T^{-1} = \mathcal{R} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow T = \begin{vmatrix} 1/5 & -2/5 & 1/5 \\ 4/5 & -3/5 & -1/5 \\ 6/5 & -2/5 & 1/5 \end{vmatrix}$

POICHÉ $\lambda_1 = \lambda_{1DES}$

$K = [(\beta_0 - \alpha_0)\ \ (\beta_1 - \alpha_1)\ \ (\beta_2 - \alpha_2)] \cdot T = |3\ \ 9\ \ 6| \cdot T = |15\ \ -9\ \ 0|$

VERIFICA $\det(\lambda I - (A - B\cdot K)) = 0$

$$\det\left(\lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot |15\ \ -9\ \ 0|\right)\right) =$$

$= \lambda^3 + 5\lambda^2 + 9\lambda + 5 = 0 \qquad \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2-i,\ \lambda_3 = -2+i$ ✓

OSSERVATORE DELLO STATO

LA RETROAZIONE DELLO STATO PUÒ RISULTARE MOLTO UTILE,

MA PRESUPPONE LA POSSIBILITÀ DI POTER MISURARE IN OGNI ISTANTE DI TEMPO IL VALORE DI TUTTE LE COMPONENTI DELLO STATO, COSA IN GENERALE NON POSSIBILE. NASCE, QUINDI, LA NECESSITÀ DI REALIZZARE UN DISPOSITIVO IN GRADO DI FORNIRE IN OGNI ISTANTE UNA STIMA DELLO STATO DEL SISTEMA NOTI INGRESSI ED USCITE.

QUALORA IL SISTEMA DI PARTENZA SIA OSSERVABILE, UNA SEMPLICE SOLUZIONE AL PROBLEMA ESISTE PURCHÈ CI SI LIMITI AD IMPORRE CHE LA COINCIDENZA TRA IL VETTORE DI STATO E LA SUA STIMA SI ABBIA INDIPENDENTEMENTE DALLO STATO INIZIALE INCOGNITO PER $t \to +\infty$. SI PARLA QUINDI, IN GENERALE, DI STIMA ASINTOTICA DELLO STATO. IL SISTEMA DINAMICO CHE FORNISCE TALE APPROSSIMAZIONE DELLO STATO PRENDE IL NOME DI OSSERVATORE ASINTOTICO DELLO STATO. FORMALMENTE, DETTA $\hat{x}(t)$ LA STIMA DI $x(t)$, UN OSSERVATORE ASINTOTICO DELLO STATO GODE DELLA PROPRIETÀ CHE $\lim_{t \to +\infty} \|x(t) - \hat{x}(t)\| = 0$.

OSSERVATORE DI LUENBERGER

SI CONSIDERI IL SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO $\begin{cases} x'(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) \end{cases}$

IL RISPETTIVO SISTEMA DINAMICO LINEARE E STAZIONARIO

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\cdot\hat{x}(t) + B\cdot u(t) + K_o\cdot(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\cdot\hat{x}(t) \end{cases}$$

, DOVE $K_o \in \mathbb{R}^{n\times p}$

È UNA QUALUNQUE MATRICE TALE PER CUI GLI AUTOVALORI DELLA MATRICE $A - K_o\cdot C$ SIANO TUTTI A PARTE REALE NEGATIVA È DETTO OSSERVATORE DI LUENBERGER RELATIVO AL SISTEMA DI PARTENZA. DA CIÒ SI EVINCE CHE, DATO UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO, GLI SI POSSONO ASSOCIARE INFINITI OSSERVATORI.

TEOREMA: SI CONSIDERI IL SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\cdot x(t) + B\cdot u(t) \\ y(t) = C\cdot x(t) \end{cases}$$

. L'OSSERVATORE DI LUENBERGER

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\cdot\hat{x}(t) + B\cdot u(t) + K_o\cdot(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\cdot\hat{x}(t) \end{cases}$$

È UN OSSERVATORE ASINTOTICO PER TALE SISTEMA. IN EFFETTI, SE DEFINIAMO $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ L'ERRORE, LA SUA DINAMICITÀ È DATA DA $\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) =$

$$= A\cdot x(t) + \cancel{B\cdot u(t)} - A\cdot\hat{x}(t) - \cancel{B\cdot u(t)} - K_o\cdot(y(t) - \hat{y}(t)) =$$

$$= A\cdot(x(t) - \hat{x}(t)) - K_o\cdot C\cdot(x(t) - \hat{x}(t)) \Rightarrow \dot{e}(t) = (A - K_o C)\cdot e(t).$$

LA DINAMICITÀ DELL'ERRORE È DUNQUE REGOLATA DAL SISTEMA AUTONOMO.

DA CUI $\lim_{t \to +\infty} \|e(t)\| = \lim_{t \to +\infty} \|x(t) - \hat{x}(t)\| = 0 \ \forall u(t), x(t_0), \hat{x}(t_0)$.

IL CRITERIO PIÙ SEMPLICE PER LA SCELTA DI UNA OPPORTUNA MATRICE CHE DEFINISCA L'OSSERVATORE ASINTOTICO CONSISTE NELL'IMPORRE CHE AUTOVALORI DESIDERATI ASSEGNATI AL SISTEMA AUTONOMO CHE REGOLA LA DINAMICITÀ DELL'ERRORE. SE IL SISTEMA È OSSERVABILE, IL CRITERIO È SEMPRE APPLICABILE.

TEOREMA: IL SISTEMA $\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) \end{cases}$ È OSSERVABILE $\Leftrightarrow$ SCELTO COMUNQUE UN INSIEME DI n NUMERI REALI E/O DI COPPIE DI NUMERI COMPLESSI CONIUGATI $\lambda_{1DES}, \lambda_{2DES}, \dots, \lambda_{nDES}$, ESISTE UNA MATRICE DI RETROAZIONE $K_0 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ | GLI AUTOVALORI DELLA MATRICE $A - K_0 \cdot C$ SIANO PARI A $\lambda_{1DES}, \lambda_{2DES}, \dots, \lambda_{nDES}$. IN ALTRE PAROLE, LA PROPRIETÀ DI OSSERVABILITÀ COINCIDE CON LA POSSIBILITÀ DI POTER ASSEGNARE AD ARBITRIO GLI AUTOVALORI DEL SISTEMA AUTONOMO CHE REGOLA LA DINAMICA DELL'ERRORE DI STIMA.

LA PROCEDURA VISTA PER DETERMINARE UNA OPPORTUNA MATRICE IN RETROAZIONE K CHE PERMETTA DI ASSEGNARE GLI AUTOVALORI DESIDERATI ALLA MATRICE $(A - B \cdot K)$ PUÒ ESSERE USATA ANCHE PER DETERMINARE K_0

AL FINE DI ASSEGNARE GLI AUTOVALORI DESIDERATI ALLA MATRICE $(A-K_o \cdot C)$.
ASSEGNARE GLI AUTOVALORI DESIDERATI ALLA MATRICE COINCIDE CON L'ASSEGNARE GLI AUTOVALORI DESIDERATI ALLA MATRICE $(A-K_o C)^T = A^T - C^T \cdot K_o^T$. LE CONSIDERAZIONI SI RIPETONO IDENTICAMENTE CONSIDERANDO SOLO IL CASO IN CUI L'USCITA SIA SCALARE A PATTO DI CONSIDERARE, IN LUOGO DI A, LA RISPETTIVA A^T E, IN LUOGO DI B, LA RISPETTIVA C^T.

TEOREMA: SI CONSIDERI IL SISTEMA $\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) \end{cases}$ IN FORMA CANONICA DI OSSERVAZIONE, OSSIA $A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & -\alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{vmatrix}$

E $C = |0 \quad 0 \quad \ldots \quad 1|$, IN CUI $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ SONO I COEFFICIENTI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$
SIANO $\lambda_{1DES}, \lambda_{2DES}, \ldots, \lambda_{nDES}$ UN INSIEME QUALUNQUE DI n NUMERI REALI E/O DI COPPIE DI NUMERI COMPLESSI CONIUGATI. SIANO $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ I COEFFICIENTI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO DI TALI AUTOVALORI, OSSIA $q_{DES}(\lambda) = q_{(A-B \cdot K)}(\lambda) = (\lambda - \lambda_{1DES})(\lambda - \lambda_{2DES}) \ldots (\lambda - \lambda_{nDES}) = \lambda^n + \beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \beta_1 \lambda + \beta_0$. SCELTA COME MATRICE DI ALLOCAZIONE $K_o^T = [(\beta_0 - \alpha_0) \ (\beta_1 - \alpha_1) \ \ldots \ (\beta_{n-1} - \alpha_{n-1})]$,

IL SISTEMA ERRORE $A-K_o \cdot C$ HA COME AUTOVALORI $\lambda_{1DES}, \lambda_{2DES}, \dots, \lambda_{nDES}$.

SI OSSERVI CHE TALE RISULTATO FORNISCE UNA PROCEDURA COSTRUTTIVA PER LA DETERMINAZIONE DELLA MATRICE DI ALLOCAZIONE ANCHE QUANDO IL SISTEMA NON È IN FORMA CANONICA DI OSSERVAZIONE.

ESERCIZIO: SI CONSIDERI IL SISTEMA

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} \cdot x(t) + \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot u(t) \\ y(t) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot x(t) \end{cases}$$

DETERMINARE, SE POSSIBILE, UNA MATRICE K_o TALE PER CUI GLI AUTOVALORI CHE REGOLANO LA DINAMICITÀ DELL'ERRORE, OSSIA GLI AUTOVALORI DELLA MATRICE $A-K_o \cdot C$, SIANO PARI A $\lambda_{1DES} = -3$; $\lambda_{2DES} = -3-2i$; $\lambda_{3DES} = -3+2i$

① $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3 \Rightarrow$ SISTEMA STABILE MA AUTOVALORI NON DESIDERATI

② $$\Theta = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \\ -1 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$r_K(\Theta) = 3 \Rightarrow$ SISTEMA COMPLETAMENTE OSSERVABILE

③ $P_A(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$ $\quad \alpha_0 = 6, \alpha_1 = 11, \alpha_2 = 6$

④ $q_{(A-K_o \cdot C)}(\lambda) = (\lambda - \lambda_{1DES})(\lambda - \lambda_{2DES})(\lambda - \lambda_{3DES}) =$

$= (\lambda+3)(\lambda+3+2i)(\lambda+3-2i) = \lambda^3 + 9\lambda^2 + 31\lambda + 39$

$\beta_0 = 39, \beta_1 = 31, \beta_2 = 9$

⑤ $T^{-1} = [C^T \quad A^T C^T \quad (A^T)^2 C^T] \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & -8 \\ 1 & -3 & 9 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 11 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & -5 & -1 \\ 6 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow T = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 & \frac{9}{2} \end{vmatrix} \rightarrow$ NUOVA REALIZZAZIONE $\hat{x}(t)$

$\hat{A} = T \cdot A \cdot T^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{vmatrix} \qquad \hat{B} = T \cdot C^T = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$

IL DUALE È $\hat{\hat{A}} = \hat{A}^T = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{vmatrix} \quad \hat{\hat{C}} = \hat{B}^T = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

⑥ $K_0^T = [(\beta_0 - \alpha_0) \quad (\beta_1 - \alpha_1) \quad (\beta_2 - \alpha_2)] \cdot T = [(39-6) \quad (31-11) \quad (9-6)] \cdot$

$\cdot \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 & \frac{9}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & -\frac{5}{2} & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow K_0 = \begin{vmatrix} -8 \\ -5/2 \\ 0 \end{vmatrix}$

⑦ VERIFICA $\det(\lambda I - (A - K_0 C)) = \det\left(\lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \right.$

$\left. - \left(\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -8 \\ -5/2 \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \right) \right) = \lambda^3 + 9\lambda^2 + 31\lambda + 39 = 0$

$\cdot\ \lambda_1 = -3 = \lambda_{1DES}$ ✓ $\quad \cdot\ \lambda_2 = -3 - 2i = \lambda_{2DES}$ ✓ $\quad \cdot\ \lambda_3 = -3 + 2i = \lambda_{3DES}$ ✓