PRESO UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE $V \subset \mathbb{R}^n$, IL SUO COMPLEMENTO ORTOGONALE $V^\perp$ È $\{w \in \mathbb{R}^n \mid \langle w, v \rangle = 0 \ \forall v \in V\}$ E SI PUÒ DIMOSTRARE CHE È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE. INFATTI, DATI $w_1, w_2 \in V^\perp$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $v \in V$

$$\langle \lambda w_1 + \mu w_2, v \rangle = \lambda \langle w_1, v \rangle + \mu \langle w_2, v \rangle = 0 + 0 = 0 \checkmark$$

AD ESEMPIO, DATI $v_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}$, $v_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix}$ $\quad E = \operatorname{span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix} \right)$

$$E^\perp = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, v_1 \rangle = \langle v, v_2 \rangle = 0\} = \left\{ \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0, \ y - 2z = 0 \right\}$$

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \longrightarrow E^\perp = \operatorname{span} \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

ORA POSSIAMO DIMOSTRARE CHE IN UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE V DI $\mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$ E $(V^\perp)^\perp = V$

INFATTI, PRESO UN $v_0 \in V \cap V^\perp \Rightarrow \langle \underset{\in V}{v_0}, \underset{\in V^\perp}{v_0} \rangle = 0 \Rightarrow v_0 = 0 \Rightarrow V \cap V^\perp = \emptyset$

CONSIDERIAMO UNA UNA BASE $\mathcal{B}$ DI V $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ E COMPLETATA CON $\{v_1, v_2, \dots, v_k, w_1, w_2, \dots, w_{n-k}\}$

COSTRUIAMO LA ORTONORMALE CON GRAM-SCHMIDT $\{\underbrace{z_1, z_2, \dots, z_k}_{\text{ORTONORMALE } V}, \underbrace{z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_n}_{\text{ORTONORMALE } V^\perp}\}$

OGNI $w \in \mathbb{R}^n$ SI PUÒ SCRIVERE UNIVOCAMENTE COME $w = v + v^\perp$ CON $v \in V$ E $v^\perp \in V^\perp$

DATA UNA BASE ORTONORMALE DI V $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, $\forall w \in \mathbb{R}^n$ VALE CHE:

1. $P_V(w) = \sum_{j=1}^{k} \langle w, v_j \rangle v_j$
2. $w = v + v^\perp \in V \oplus V^\perp \Rightarrow \|w\|^2 = \|v\|^2 + \|v^\perp\|^2$ TEOREMA DI PITAGORA

$\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp \Rightarrow w = v + v^\perp \quad \|w\|^2 = \langle w, w \rangle = \langle v + v^\perp, v + v^\perp \rangle = \langle v, v \rangle + \langle v^\perp, v^\perp \rangle = \|v\|^2 + \|v^\perp\|^2$

3. $\forall w \in \mathbb{R}^n \land \forall v \in V \Rightarrow \|w - v\| \geq \|w - P_V(w)\|$

PRESE $\mathcal{B}$ E $\mathcal{B}'$ COME BASI ORTONORMALI DI $\mathbb{R}^n$, LA MATRICE DI CAMBIO BASE DA $\mathcal{B}$ A $\mathcal{B}'$ È $A = [I_n]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$. INFATTI, PRESA $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ E $\mathcal{B}' = \{v_1', v_2', \dots, v_k'\}$, VALE CHE

$$A = \left| [I_n(v_1')]_{\mathcal{B}} \middle| [I_n(v_2')]_{\mathcal{B}} \middle| \cdots \middle| [I_n(v_k')]_{\mathcal{B}} \right| = \left| [v_1']_{\mathcal{B}} \middle| [v_2']_{\mathcal{B}} \middle| \cdots \middle| [v_k']_{\mathcal{B}} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} \langle v_1', v_1 \rangle & \langle v_2', v_1 \rangle & \cdots & \langle v_k', v_1 \rangle \\ \langle v_1', v_2 \rangle & \langle v_2', v_2 \rangle & \cdots & \langle v_k', v_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle v_1', v_k \rangle & \langle v_2', v_k \rangle & \cdots & \langle v_k', v_k \rangle \end{vmatrix}. \text{ ANALOGAMENTE } A^{-1} = \begin{vmatrix} \langle v_1, v_1' \rangle & \langle v_2, v_1' \rangle & \cdots & \langle v_k, v_1' \rangle \\ \langle v_1, v_2' \rangle & \langle v_2, v_2' \rangle & \cdots & \langle v_k, v_2' \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle v_1, v_k' \rangle & \langle v_2, v_k' \rangle & \cdots & \langle v_k, v_k' \rangle \end{vmatrix} = A^T$$

DA QUESTO NE CONCLUDIAMO CHE LA MATRICE QUADRATA $M \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$ È ORTOGONALE SE $\exists M^{-1} \mid M^{-1} = M^T$

POSSIAMO DIMOSTRARE CHE UNA MATRICE QUADRATA M DI ORDINE n È ORTOGONALE $\Leftrightarrow$ LE SUE COLONNE FORMANO UNA BASE ORTONORMALE. INFATTI, $M^T \cdot M \Leftrightarrow \begin{vmatrix} - v_1 - \\ - v_2 - \\ \vdots \\ - v_n - \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \langle v_i, v_j \rangle = \dots$ $\langle v_i, v_i \rangle = 1$

$\Leftrightarrow \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ È UNA BASE ORTONORMALE

Una particolare matrice $M \in \mathcal{M}(2\times2,\mathbb{R})$ ortogonale è $M=\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$ V $M=\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{vmatrix}$

Data l'applicazione lineare $T:V\to V$, due base $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V, se $A=[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ e $C=[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}$, si può dimostrare che $A=[I_n]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}\,C\,[I_n]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ $M=[I_n]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \Rightarrow [I_n]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}=M^{-1} \Rightarrow A=M^{-1}CM$

Due matrici $A, C \in \mathcal{M}(n\times n,\mathbb{R})$ si dicono simili se $\exists M^{-1}\in\mathcal{M}(n\times n,\mathbb{R}) \mid A=M^{-1}CM$. Inoltre

DIAGONALIZZAZIONE, AUTOVETTORI E AUTOVALORI

l'applicazione lineare $T:V\to V$ è diagonalizzabile se $\exists\,\mathcal{B}$ di $V \mid [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ è diagonale. Una matrice quadrata di ordine n A è diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale.

Dato l'endomorfismo $T:V\to V$, se $\exists\, v\in V\neq 0_V \wedge \exists\,\lambda\in\mathbb{R} \mid T(v)=\lambda v$, λ prende il nome di autovalore di T e v è l'autovettore di T associato a λ

Ad esempio, dati $\begin{vmatrix} 4&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}$, 4 è l'autovalore e $\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}$ l'autovettore

Si può dimostrare che l'applicazione lineare $T:V\to V$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ V ammette una base costituita da autovettori di T.

$\Longrightarrow$ $\exists\,\mathcal{B}$ di $V \mid [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ diagonale e $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}=\begin{array}{c} [T(v_1)]_{\mathcal{B}} \\ \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} \\ [T(v_n)]_{\mathcal{B}} \end{array}$. $\mathcal{B}=\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \Rightarrow T(v_1)=\lambda_1 v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n$

$\to T(v_1)=\lambda v_1;\ T(v_2)=\lambda v_2;\ \dots;\ T(v_n)=\lambda v_n$

$\Longleftarrow$ $\exists\,\mathcal{B}$ di autovettori $\to T(v_i)=\lambda_i v_i\ \forall i\in[1,n]$. Detta $T=L_A$, con $A\in\mathcal{M}_{n\times n}$

$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}=\begin{vmatrix} \lambda & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & & \vdots \\ \vdots & & \lambda & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}$

Se $T=L_A$, con $A\in\mathcal{M}(n\times n,\mathbb{R})$ $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n \Rightarrow v\to A\cdot v$, diremo che λ è un autovalore di A se λ è un autovalore di T e v è un autovettore di A se è anche autovettore di T

Data $T:V\to V$ con λ autovalore di T, l'autospazio associato a λ è $E_\lambda=\{v\in V \mid T(v)=\lambda v\}$ e tale autospazio è un sottospazio vettoriale di V. Si noti che $v\in E_\lambda \Leftrightarrow T(v)=\lambda v \Longrightarrow T(v)-\lambda v=0_V \to T(v)-\lambda I_d v=0_V \Leftrightarrow (T-\lambda I_n)(v)=0_V \Rightarrow v\in \mathrm{Ker}(T-\lambda I_n)$

Si può dimostrare che, dato l'endomorfismo $T:V\to V$ e considerata la matrice associata A T rispetto alla base $\mathcal{B}$ di V ($A=[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$). λ_0 è un autovalore reale di $T \Leftrightarrow \lambda_0$ è una radice reale di $\det(A-\lambda I_n)$ (= polinomio caratteristico. $\det(A-\lambda I_n)=0 \to$ equazione caratteristica)

Infatti λ_0 è un autovalore di $T \Leftrightarrow \exists\, v\neq 0_V \mid T(v)=\lambda_0 v$. Detto $X\in\mathbb{R}^n$ il vettore delle coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$, $T(v)=\lambda_0 v \Rightarrow A\cdot X=\lambda_0\cdot X \Rightarrow \underbrace{(A-\lambda_0 I_n)X}_{=0}$

$\Longrightarrow X\in\mathrm{Ker}(A-\lambda_0 I_n)$, $X\neq 0_V \Longrightarrow A-\lambda_0 I_n$ rappresenta una matrice singolare, e quindi $\det(A-\lambda_0 I_n)$

È IMPORTANTE NOTARE CHE $P(\lambda)$ NON DIPENDE DALLA BASE. INFATTI, PRESA UN'ALTRA BASE $\mathcal{B}'$ E PRESA LA MATRICE C ASSOCIATA A T RISPETTO A $\mathcal{B}'$, RISULTA $C = [I_n]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} \cdot [I_n]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} \cdot [\;]_{\mathcal{B}}$ $= M^{-1} \cdot A \cdot M$, CON $M = [I_n]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} \Rightarrow \det(C - \lambda I_n) = \det(M^{-1} A M - \lambda I_n) = \det(M^{-1} \cdot A \cdot M - \lambda$ $= \det(M^{-1} A M - M^{-1} \cdot \lambda I_n \cdot M) = \det(M^{-1}(A - \lambda I_n) M) = \cancel{\det} M^{-1} \cdot \det(A - \lambda I_n) \cdot \cancel{\det} M = \det(A - \lambda$

$A, C \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$ SONO MATRICI SIMILI SE $\exists M \in GL(n, \mathbb{R})$ INVERTIBILE $| A = M^{-1} C M \Leftrightarrow C =$

DATO UN AUTOVALORE λ_0 DI $T: V \to V$:

- LA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA $ma(\lambda_0)$ DI λ_0 È LA MOLTEPLICITÀ DI λ_0 COME RADICE DEL POLINOMIO CARATTERISTICO
- LA MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA $mg(\lambda_0)$ DI λ_0 È LA $\dim E_{\lambda_0}$ COME SPAZIO VETTORIALE.

DATO L'ENDOMORFISMO SULLO SPAZIO VETTORIALE V $(T: V \to V)$ E PRESI DUE AUTOVALORI DIVERSI DI V E INDICATI COME λ_1, λ_2, SE v_1 E v_2 SONO I CORRISPONDENTI AUTOVETTORI, v_1 E v_2 SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI. INFATTI, INDICANDO L'APPLICAZIONE LINEARE CON $T(v_1) = \lambda_1 v_1$ E $T(v_2) = \lambda_2 v_2$, PRESA $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$ $(\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R})$ VALE CHE $T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = 0$

INOLTRE, $T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2$

$$\to \begin{cases} * (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0_V) \cdot \lambda_1 \\ \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 = 0_V \end{cases}$$ SOTTRAGGO MEMBRO A MEMBRO

$\Rightarrow \cancel{\lambda_1 \alpha_1 v_1} + \lambda_1 \alpha_2 v_2 - \cancel{\alpha_1 \lambda_1 v_1} - \alpha_2 \lambda_2 v_2 = 0_V \quad \alpha_2 (\lambda_1 v_2 - \lambda_2 v_2) = 0_V$

$\alpha_2 (\cancel{\lambda_1 - \lambda_2}) v_2 = 0_V \qquad \alpha_2 v_2 = 0_V \Rightarrow \alpha_2 = 0 \Rightarrow * \ \alpha_1 v_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$

SI PUÒ INOLTRE DIMOSTRARE CHE DATO L'ENDOMORFISMO $T: V \to V$ DI DIMENSIONE FINITA n, SE T HA n AUTOVALORI REALI E DISTINTI ALLORA È DIAGONALIZZABILE. INFATTI I CORRISPONDENTI AUTOVETTORI SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI E DUNQUE COSTITUISCONO UNA BASE DI V

SI CONSIDERI, AD ESEMPIO, LA MATRICE $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ E $T = L_A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\Rightarrow n = 3$

ANALIZZIAMO L'EQUAZIONE CARATTERISTICA $\to \det(A - \lambda I_3) = 0$

$\det \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda) = 0$ ABBIAMO 3 AUTOVALORI REALI E DISTINTI $(\lambda = 1; \lambda = -1; \lambda = 2) \Rightarrow$ LA MATRICE È DIAGONALIZZABILE

UN'ALTRA RELAZIONE IMPORTANTE DA TENERE A MENTE RIGUARDO AD UN ENDOMORFISMO $T: V \to V$ CON AUTOVALORE λ È CHE $1 \leq mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$

SUPPONIAMO, PER ASSURDO, CHE $\dim(V_\lambda) = h$, CON $h > ma(\lambda)$. PRENDIAMO UNA BASE PER

$V = (w_1, w_2, \dots, w_h)$ E LA SI COMPLETI CON UNA BASE DI V. DETTA A LA MATRICE ASSOCIATA ALL'ENDOMORFISMO, AVREMO CHE $A = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & \lambda & & & * \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \Delta \end{vmatrix}$ IL CUI POLINOMIO CARATTERISTICO SARÀ

$P_A(\alpha) = (\lambda - \alpha)^h P_\Delta(\alpha) \Rightarrow m_a(\lambda) \geq h$ MA PER IPOTESI $m_a(\lambda) < h \Rightarrow$ CONTRADDIZIONE

DATO $T: V \to V$ UN ENDOMORFISMO SULLO SPAZIO VETTORIALE V E DIMENSIONE FINITA, T RISULTERÀ DIAGONALIZZABILE SE E SOLO SE:

1. TUTTI GLI AUTOVALORI SONO REALI
2. PER OGNI AUTOVALORE SI VERIFICA CHE LE RISPETTIVE MOLTEPLICITÀ (ALGEBRICA E GEOMETRICA) SONO UGUALI

$\Rightarrow$ ESISTE UNA BASE DI $V \mid A = [T]_B^B = \begin{vmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & d_n \end{vmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I_n) = (d_1 - \lambda)(d_2 - \lambda) \dots (d_n - \lambda)$

$\rightarrow d_1, d_2, \dots, d_n \in \mathbb{R}$ E, SUPPONENDO $d_1 = d_2 = \dots = d_k = d \ (k \leq n) = d_{k+1} = d_{k+2} = \dots = d_n$

$P_A(\lambda) = (d - \lambda)^k Q(\lambda)$

$A = \left|\begin{matrix} d & & 0 \\ & d & \\ 0 & & d_k \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} & 0 & \\ d_{k+1} & & \\ 0 & d_{k+2} & d \end{matrix}\right| \Rightarrow T(v_1) = d \cdot v_1;\ T(v_2) = d \cdot v_2, \dots, T(v_k) = d \cdot v_k$

ESSENDO I v_k VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI E APPARTENENTI ALL'AUTOSPAZIO E_d, VALE CHE

$k \geq \dim E_d \geq k = m_a(d) \Rightarrow \dim E_d = m_a d \Rightarrow m_g(d) = m_a(d)$ ✓

$\Leftarrow$ $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)\ \forall$ AUTOVALORE $\lambda \Rightarrow \sum_\lambda m_g(\lambda) = \sum_\lambda m_a(\lambda) = n$

DETTA B UNA BASE DI E_λ, VALE CHE $B = B_{\lambda_1} \cup B_{\lambda_2} \cup \dots \cup B_{\lambda_k}$ È ANCHE UNA BASE DI $V \Rightarrow k = n \Rightarrow T$ È DIAGONALIZZABILE. PER CONCLUDERE LA DIMOSTRAZIONE, ANDIAMO A VERIFICARE CHE DUE VETTORI $v, w \in B$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI. IL CHE È OVVIAMENTE CERTO IN QUANTO VETTORI DI UNA STESSA BASE $\Rightarrow v \in B_i;\ w \in B_j\ (i \neq j)$

$\Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow$ I VETTORI SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI E T È DIAGONALIZZABILE ✓

VERIFICHIAMO, AD ESEMPIO, SE $T: \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x + y \\ x - z \\ y + 2z \end{vmatrix}$ È DIAGONALIZZABILE. DEFINIAMO LA MATRICE ASSOCIATA $[A]_{\mathbb{R}^3}^{\mathbb{R}^3} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}^{\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3}$

$\det(A - \lambda I_3) = \det \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)[-\lambda(2-\lambda)+1] - (2-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + \cancel{1} \cancel{-1})$

$= (2-\lambda)\lambda(\lambda-2) = -\lambda^{1}(\lambda-2)^{\boxed{2}}$.

ANALISI AUTOVALORI

- $\lambda = 0 \longrightarrow m_a(0) = 1$ $\quad 1 \leq m_g(0) \leq m_a(0) \leq 1 \Rightarrow m_g(0) = 1$ ✓
- $\lambda = 2 \longrightarrow m_a(2) = \boxed{2}$

$mg(2) = \dim E_2$

$$E_2 = \ker(A - 2I_3) = \ker\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} y=0 \\ x-2y-z=0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{vmatrix} x \\ 0 \\ x \end{vmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathrm{span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}\right) \Rightarrow \dim E_2 = 1 = mg(2) \neq ma(2) \Longrightarrow T$$ NON È DIAGONALIZZABILE

PRESO L'ENDOMORFISMO $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid \mathbb{R}^n$ SIA MUNITO DEL PRODOTTO SCALARE CANONICO, T RISULTA SIMMETRICO/AUTOAGGIUNTO SE $\langle T(v_i), v_{i+1} \rangle = \langle v_i, T(v_{i+1}) \rangle \ \forall i \in [1; n]$ E QUINDI DEVE ESSERE SIMMETRICA ANCHE LA MATRICE ASSOCIATA A T RISPETTO ALLA BASE CANONICA $[T]^e_e$

INFATTI, $\begin{cases} \langle T(v_1)\, v_2 \rangle = \langle A v_1, v_2 \rangle = v_2^T A v_1 \\ \langle v_1, T(v_2) \rangle = \langle v_1, A v_2 \rangle = (A v_2)^T v_1 = v_2^T A^T v_1 \end{cases}$ $\checkmark \Leftrightarrow A = A^T \Rightarrow A$ SIMMETRICA

È IMPORTANTE NOTARE CHE L'ENDOMORFISMO $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ È SIMMETRICO $\Longleftrightarrow$ LA MATRICE ASSOCIATA A T RISPETTO AD UNA QUALUNQUE BASE ORTONORMALE È SIMMETRICA. QUESTO È VERIFICATO SIA DALLA PRECEDENTE PROPRIETÀ E SIA DAL FATTO CHE LE MATRICI DI CAMBIO DI BASE TRA BASI ORTONORMALI SONO MATRICI ORTOGONALI E QUINDI $A^{-1} = A^T$

UN ENDOMORFISMO SIMMETRICO $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ PUÒ ESSERE ASSOCIATO AD UNA FORMA QUADRATICA $Q_T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

SE A È LA MATRICE $A = [T]^e_e$ VALE CHE $Q_T(v) = v^T A v$

AD ESEMPIO, PRESA $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ COME $T\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - y \\ -x + 2y \end{vmatrix}$, $A = [T]^e_e = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ È UNA MATRICE SIMMETRICA E SI PUÒ DEFINIRE LA FORMA QUADRATICA $Q_T\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} =$

$$= \left\langle \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}, T\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x - y \\ -x + 2y \end{vmatrix} \right\rangle = x^2 - xy - xy + 2x^2 = x^2 + 2y^2 - 2xy = \underbrace{|x, y|}_{v^T} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}}_{v}$$

POSSIAMO DIMOSTRARE CHE GLI AUTOSPAZI DI UN ENDOMORFISMO SIMMETRICO SONO TRA LORO ORTOGONALI. INFATTI, CONSIDERATI DUE AUTOVALORI DIVERSI DELL'ENDOMORFISMO T, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, E DETTI $u_1 \in E_{\lambda_1} \wedge u_2 \in E_{\lambda_2}$ DUE AUTOVETTORI, $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$?

$T(u_1) = \lambda_1 u_1,\ T(u_2) = \lambda_2 u_2 \rightarrow \langle T(u_1), u_2 \rangle = \langle \lambda_1 u_1, u_2 \rangle = \lambda_1 \langle u_1, u_2 \rangle$

$\rightarrow \langle T(u_2), u_1 \rangle = \langle \lambda_2 u_2, u_1 \rangle = \lambda_2 \langle u_1, u_2 \rangle$

$\Longrightarrow \langle u_1, T(u_2) \rangle = \langle u_2, T(u_1) \rangle \Longrightarrow \lambda_1 \langle u_1, u_2 \rangle - \lambda_2 \langle u_1, u_2 \rangle = 0 \Rightarrow \langle u_1, u_2 \rangle (\lambda_1 - \lambda_2) = 0$

$\Longrightarrow \langle u_1, u_2 \rangle = 0 \ \checkmark$