$\hat{B} = T \cdot B$, $\hat{C} = C \cdot T^{-1}$, $\hat{D} = D$. Si noti che la nuova rappresentazione è equivalente a quello di partenza, cioè per un ingresso $u(k)$, $k \geq k_0$, e stati iniziali $x(k_0)$, $\hat{x}(k_0) = T \cdot x(k_0)$, i movimenti dello stato dei due sistemi sono legati dalla relazione $\hat{x}(t) = T \cdot x(t)$ e i movimenti dell'uscita sono identici. Quindi, le due rappresentazioni sono due descrizioni diverse dello stesso sistema. Inoltre A e $\hat{A}$ sono simili $\Rightarrow$ stessi autovalori

ANALISI MODALE

Le equazioni $\begin{cases} x_L(k) = A^{k-k_0} \cdot x(k_0) \\ x_F(k) = C \cdot A^{k-k_0} \cdot x(k_0) \end{cases}$, $k \geq 0$ permettono di determinare il movimento libero del sistema e nel caso:

- $\tau = 1 \rightarrow x_L$ e y_L dipendono da A^k
- $\tau > 1 \rightarrow$ analizzare la struttura della potenza della matrice A^k

Con ragionamenti analoghi al caso del tempo continuo, si analizzano separatamente i casi in cui A $\begin{cases} \text{diagonalizzabile, autovalori distinti} \\ \text{non diagonalizzabile, autovalori multipli} \end{cases}$

A DIAGONALIZZABILE

Si trova una matrice di similitudine per cui la matrice della dinamica

ASSUMA LA FORMA DIAGONALE $\hat{A} = diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\} \rightarrow \hat{X}_L(k) = \hat{A}^{k-k_0}\hat{X}(k_0)$
$= diag\{\lambda_1^{k-k_0}, \lambda_2^{k-k_0}, ..., \lambda_n^{k-k_0}\} \cdot \hat{X}(k_0) \rightarrow X_L(k) = T^{-1} \cdot \hat{A}^{k-k_0} \cdot T \cdot X(k_0) =$
$= T^{-1} \cdot diag\{\lambda_1^{k-k_0}, \lambda_2^{k-k_0}, ..., \lambda_n^{k-k_0}\} \cdot T \cdot X(k_0)$

$Y_L(k) = C \cdot (T^{-1} \cdot \hat{A} \cdot T) \cdot X(k_0) = C \cdot T^{-1} \cdot diag\{\lambda_1^{k-k_0}, \lambda_2^{k-k_0}, ..., \lambda_n^{k-k_0}\} \cdot T \cdot X(k_0)$

ESSE SONO COMBINAZIONI LINEARI CON COEFFICIENTI DIPENDENTI DA $C, T, X(k_0)$ DEI MODI DEL SISTEMA $\lambda_i^{k-k_0}$. SI NOTI CHE LE COPPIE DI AUTOVALORI COMPLESSI E CONIUGATI DI A, $\lambda_i = \rho_i e^{i\theta_i}$ E $\lambda_i^* = \rho_i e^{-i\theta_i}$, GENERANO TERMINI CHE, SOMMATI, DANNO LUOGO AD UN UNICO TERMINE REALE $\rho_i^k \sin(\theta_i k + \psi_i)$ CON ψ_i UNA FASE OPPORTUNAMENTE DEFINITA.

A NON DIAGONALIZZABILE

USARE LE TRASFORMAZIONI DI SIMILITUDINE PER RENDERE A DIAGONALE PUÒ RISULTARE MOLTO COMPLESSO. SI UTILIZZA, QUINDI, UNA SECONDA TRASFORMAZIONE PER PORTARE A NELLA FORMA DI JORDAN. PER SEMPLICITÀ, CONSIDERANDO $K_0 = 0$, OTTENIAMO I TRE POSSIBILI CASI:

- MODI NULLI PER $K < P-1$
- $K^{P-1} \lambda_i^{K-P+1}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $K \geq P-1$
- $K^{P-1} \rho_i^{K-P+1} \sin(\theta_i(K-P+1)+\psi_i)$, $\lambda_i = \rho_i e^{i\theta_i} \in \mathbb{C}$, $K \geq P-1$

DOVE p È UN INTERO COMPRESO TRA 1 E LA MASSIMA DIMENSIONE $\hat{p}_i$ DEI MINIBLOCCHI DI JORDAN ASSOCIATI A λ_i E φ_i UNA FASE OPPORTUNA.

! I MODI CORRISPONDENTI AGLI AUTOVALORI NELL'ORIGINE DEL PIANO COMPLESSO SONO NULLI ALMENO DALL'ISTANTE $k = \hat{p}_i$

STABILITÀ DEI SISTEMI A TEMPO DISCRETO

UN SISTEMA LINEARE A TEMPO DISCRETO $x(k+1) = A \cdot x(k) + B \cdot u(k)$ SI DICE SISTEMA AUTONOMO SE SOGGETTO AD INGRESSO NULLO $u(k)=0$. UNO STATO x_e È STATO DI EQUILIBRIO PER IL SISTEMA SE $x(\bar{k}) = x_e \Rightarrow x(k) = x_e \ \forall k \geq \bar{k}$, OVVERO SE OGNI TRAIETTORIA CHE PARTE DA x_e IN UN ISTANTE $\bar{k}$ RIMANE IN x_e IN OGNI ISTANTE SUCCESSIVO. MATEMATICAMENTE, $x(\bar{k}) = x_e \Rightarrow x(\bar{k}+1) = x_e \rightarrow A \cdot x(\bar{k}) = x(\bar{k})$

$\Rightarrow (I_n - A) \cdot x(k) = 0$
- NON SINGOLARE $\Rightarrow x_e$ UNICO STATO DI EQUILIBRIO
- SINGOLARE $\Rightarrow$ INFINITI STATI DI EQUILIBRIO CONTENUTI NEL $\ker(I_n - A)$

DATO UN SISTEMA LINEARE A TEMPO DISCRETO:

- CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE AFFINCHÈ RISULTI ASINTOTICAMENTE STABILE È CHE $\forall i, |\lambda_i| < 1 \Rightarrow$ IL SISTEMA È ANCHE G.A.S.

- CONDIZIONE SUFFICIENTE AFFINCHÈ RISULTI SEMPLICEMENTE STABILE È CHE

$$\forall i: \begin{cases} |\lambda_i| \leq 1 \\ |\lambda_i| = 1, \ i = 1 \end{cases}$$

– CONDIZIONE SUFFICIENTE AFFINCHÈ RISULTI SEMPLICEMENTE STABILE O INSTABILE È CHE: $\forall i \ |z_i| \leq 1$; $\exists i \ | \ |z_i| = 1, \lambda > 1$

– CONDIZIONE SUFFICIENTE AFFINCHÈ RISULTI INSTABILE È CHE $\exists i \ | \ |z_i| > 1$

CRITERIO DI JURY

PER I SISTEMI A TEMPO DISCRETO ESISTONO ANCHE CONDIZIONI NECESSARIE E SUFFICIENTI DI STABILITÀ ASINTOTICA CHE NON RICHIEDONO IL CALCOLO DIRETTO DEGLI AUTOVALORI MEDIANTE IL POLINOMIO CARATTERISTICO $P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, MA SI APPLICA UN SECONDO STRUMENTO. TRA I METODI PIÙ COMUNI IL CRITERIO DI JURY.

CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE AFFINCHÈ TUTTE LE n RADICI DEL POLINOMIO $P(z)$ A COEFFICIENTI REALI DI GRADO n SIANO IN MODULO MINORI DI 1 ($|z_i| < 1 \ \forall i = 1, \ldots, n$) È CHE:

– $n = 2 \rightarrow$ SODDISFARE LE 3 SEGUENTI DISEQUAZIONI:

- $P(z=1) > 0$
- $(-1)^n P(z=-1) > 0$
- $|a_n| > |a_0|$

– $n > 2 \rightarrow$ OLTRE ALLE 3 PRECEDENTI DISEQUAZIONI BISOGNA SODDISFARE ANCHE ALTRE $n-2$ TRA I MODULI DI ALCUNI ELEMENTI DELLA

TABELLA DI JURY COSTITUITA DA $n-1$ COPPIE DI RIGHE:

$$|b_0|>|b_{n-1}|;\ |c_0|>|c_{n-2}|;\ \dots;\ |z_0|>|z_2|$$

STRUTTURA DELLA TABELLA DI JURY

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
n & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\
n & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\
n-1 & b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} & \\
n-1 & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_2 & b_1 & b_0 & \\
n-2 & c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-2} & & \\
n-2 & c_{n-2} & \dots & c_2 & c_1 & c_0 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
2 & z_0 & z_1 & z_2 & & & & \\
2 & z_2 & z_1 & z_0 & & & &
\end{array}
$$

$$b_0=\det\begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix}$$

$$b_1=\det\begin{vmatrix} a_0 & a_{n-1} \\ a_n & a_1 \end{vmatrix}$$

$\vdots$

$$b_{n-1}=\det\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

ESEMPIO: DATO $P(z)=2z^3+z^2+z+0.5$, ANALIZZARE LE RADICI MEDIANTE IL CRITERIO DI JURY $\quad n=2$

- $P(1)=4,5>0$ ✓
- $(-1)^3\cdot P(-1)=1,5>0$
- $|a_3|=2>|a_0|=0,5$ ✓

$$
\begin{array}{c|cccc}
3 & 0,5 & 1 & 1 & 2 \\
3 & 2 & 1 & 1 & 0,5 \\
2 & -3,75 & -1,5 & -1,5 & \\
2 & -1,5 & -1,5 & -3,75 &
\end{array}
$$

$$b_0=\det\begin{vmatrix} 0,5 & 2 \\ 2 & 0,5 \end{vmatrix}=-3,75$$

$$b_1=\det\begin{vmatrix} 0,5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1,5$$

$$b_2=\det\begin{vmatrix} 0,5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1,5$$

$|b_0|=3,75=|b_2|=1,5$ ✓

TRASFORMAZIONE BILINEARE

UNA CLASSICA TECNICA UTILE PER RICAVARE CONDIZIONI NECESSARIE

E SUFFICIENTI DI STABILITÀ ASINTOTICA CONSISTE NELL'EFFETTUARE CAMBI DI VARIABILE DEL TIPO $z=\eta(s)$ NEL POLINOMIO CARATTERISTICO $P(z)$ IN MODO CHE LA NUOVA EQUAZIONE $P(\eta(s))=0$ SIA ANCORA POLINOMIALE E LE SUE RADICI ABBIANO PARTE REALE NEGATIVA IN TUTTI E SOLI I CASI IN CUI LE RADICI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO $P(z)$ HANNO MODULO MINORE DI 1.

RICONDOTTI AL CASO DI SISTEMI A TEMPO CONTINUO, SI PUÒ APPLICARE UN QUALUNQUE CRITERIO DI STABILITÀ ASINTOTICA COME IL CRITERIO DI ROUTH. UN CAMBIO DI VARIABILE CHE LO CONSENTE È DEFINITO DALLA TRASFORMAZIONE BILINEARE $z=\frac{1+s}{1-s} \rightarrow s=\frac{z-1}{z+1}$. $P(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1 z+a_0$

$$\Rightarrow P(\eta(s))=a_n\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^{n-1}+\dots+a_1\left(\frac{1+s}{1-s}\right)+a_0=0$$

MOLTIPLICANDO PER $(1-s)^n$: $a_n(1+s)^n+a_{n-1}(1+s)^{n-1}(1-s)+\dots+a_1(1+s)(1-s)^{n-1}+$ $+a_0(1-s)^n=0$. SI OSSERVI CHE IL COEFFICIENTE DI s^n IN TALE EQUAZIONE È $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_{n-i}=a_n+(-1)^1 a_{n-1}+\dots+(-1)^{n-1}a_1+(-1)^n a_0=(-1)^n P(z=-1)$, E SI POSSONO PRESENTARE DUE CASISTICHE DIVERSE:

1) $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\cdot a_{n-i}=0 \rightarrow$ L'EQUAZIONE È DI GRADO $n-1$ E TRA GLI AUTOVALORI C'È $z=-1$. IN QUESTO CASO NON È DEFINIBILE LA

TRASFORMAZIONE BILINEARE $\Rightarrow$ SISTEMA NON ASINTOTICAMENTE STABILE

2) $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot a_{n-i} \neq 0 \rightarrow$ L'EQUAZIONE È DI GRADO n E $|z_i| < 1 \ \forall i$

$\Leftrightarrow$ LE n RADICI DI $P(s)=0$ HANNO PARTE REALE NEGATIVA

ESEMPIO: ANALIZZARE LA STABILITÀ DEL SISTEMA $P(z) = 8z^3 + 12z^2 + 6z + 1$

$$z = \frac{1+s}{1-s} \rightarrow P(s) = 8\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^3 + 12\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^2 + 6\left(\frac{1+s}{1-s}\right) + 1 = 0$$

$$8(1+s)^3 + 12(1+s)^2(1-s) + 6(1+s)(1-s)^2 + (1-s)^3 = 0 \Rightarrow (s+3)^3 = 0$$

$s_1 = s_2 = s_3 = -3 \Rightarrow z_1 = z_2 = z_3 = \frac{1-3}{1+3} = -0{,}5$ ASINTOTICAMENTE STABILE

RAGGIUNGIBILITÀ E CONTROLLABILITÀ

COME GIÀ VISTO, QUESTE PROPRIETÀ DESCRIVONO LE POSSIBILITÀ DI AZIONE DELLA FUNZIONE D'INGRESSO $u(\cdot)$ PER INFLUENZARE IL MOVIMENTO DELLO STATO.

STATO RAGGIUNGIBILE

UNO STATO x^* DEL SISTEMA $\begin{cases} x(k+1) = A \cdot x(k) + B \cdot u(k) \\ y(k) = C \cdot x(k) + D \cdot u(k) \end{cases}$ SI DICE RAGGIUNGIBILE DALLO STATO INIZIALE $x(k_0)$ AL TEMPO x^* SE:

- $\exists k^* \in [k_0, +\infty)$
- $\exists u^*(k) \ \forall k \in [k_0, k^*] \mid x(k), k \in [k_0, k^*] \Rightarrow x(k^*) = x^*$

OSSIA, UN PARTICOLARE STATO x^* È RAGGIUNGIBILE SE, CON UNA OPPORTUNA

SCELTA DELL'INGRESSO, È POSSIBILE PASSARE DA $x(t_0)$ A x^* IN UN TEMPO K ARBITRARIO AGENDO OPPORTUNAMENTE SULLA $u(k)$. LA RAGGIUNGIBILITÀ DIPENDE SOLO DALL'EQUAZIONE DI STATO, QUINDI DALLE SOLE MATRICI A E B. UN SISTEMA SI DICE RAGGIUNGIBILE SE TUTTI I SUOI STATI SONO RAGGIUNGIBILI. IN QUESTO CASO È ANCHE DETTO COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE.

STATO CONTROLLABILE

UNO STATO x^* DEL SISTEMA $\begin{cases} x(k+1) = A \cdot x(k) + B \cdot u(k) \\ y(k) = C \cdot x(k) + D \cdot u(k) \end{cases}$ SI DICE CONTROLLABILE ALLO STATO x_R AL TEMPO k_R SE:

- $\exists\, k^* \in [k_0, +\infty)$
- $\exists\, u^*(k)\ \forall k \in [k_0, k^*] \mid x(k),\ k \in [k_0, k^*] \Rightarrow x(k^*) = x_R$

OSSIA, UN PARTICOLARE STATO x^* È CONTROLLABILE SE, A PARTIRE DA UNO STATO INIZIALE x^*, IN UN TEMPO FINITO k^*, AGENDO OPPORTUNAMENTE SU $u(\cdot)$ POSSO ARRIVARE ALLO STATO FINALE $x_R = x(k^*)$ DETTO STATO OBIETTIVO. SE TUTTI GLI STATI SONO CONTROLLABILI, IL SISTEMA È COMPLETAMENTE CONTROLLABILE. LA CONTROLLABILITÀ DIPENDE DA A E B. PER I SISTEMI A TEMPO DISCRETO, IN GENERALE $\mathcal{X}_R \subseteq \mathcal{X}_C$, OSSIA RAGGIUNGIBILITÀ $\Rightarrow$ CONTROLLABILITÀ. SE

A RISULTA NON SINGOLARE, INOLTRE, $\mathcal{X}_R = \mathcal{X}_C \Rightarrow$ CONTROLLABILITÀ $\Leftrightarrow$ RAGGIUNGIBILITÀ.

IN UN SISTEMA LINEARE CON DIMENSIONE FINITA n E NON COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE SI HA CHE:

- IL SOTTOSPAZIO DI RAGGIUNGIBILITÀ ($\dim \mathcal{X}_R = n_R < n$) RISULTA LA PARTE RAGGIUNGIBILE
- IL SOTTOSPAZIO DI NON RAGGIUNGIBILITÀ ($\dim \mathcal{X}_{NR} = n - n_R$) RISULTA LA PARTE NON RAGGIUNGIBILE
- AL SOTTOSPAZIO DI RAGGIUNGIBILITÀ SONO ASSOCIATI n_R DEGLI n AUTOVALORI DI A
- AL SOTTOSPAZIO DI NON RAGGIUNGIBILITÀ SONO ASSOCIATI $n - n_R$ DEGLI n AUTOVALORI DI A

- L'INGRESSO $u(\cdot)$ AGISCE SULLA SOLA PARTE RAGGIUNGIBILE
- GLI STATI RAGGIUNGIBILI NON INFLUENZANO LA PARTE NON RAGGIUNGIBILE
- GLI STATI NON RAGGIUNGIBILI NON INFLUENZANO LA PARTE RAGGIUNGIBILE

DETERMINAZIONE DI $\mathcal{X}_R$

SI CONSIDERI IL SISTEMA LINEARE A TEMPO DISCRETO

$$\begin{cases} x(k+1) = A \cdot x(k) + B \cdot u(k) \\ y(k) = C \cdot x(k) + D \cdot u(k) \end{cases}$$

. SI VUOLE DETERMINARE:

- L'INSIEME DI RAGGIUNGIBILITÀ $\mathcal{X}_R(K^*)$ AL TEMPO K^*
- IL SOTTOSPAZIO DI RAGGIUNGIBILITÀ
- UNA CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PER LA COMPLETA RAGGIUNGIBILITÀ DEL SISTEMA

PER SEMPLICITÀ, CONSIDERIAMO IL CASO IN CUI:

— IL SISTEMA ABBIA UN SOLO INGRESSO

— LA CONDIZIONE INIZIALE SIA NULLA $\Rightarrow x(k_0)=0 \rightarrow$ CI FOCALIZZIAMO SOLO SU X_R

$$
\begin{cases}
x(k_0+1) = A\cdot x(k_0) + B\cdot u(k_0) = B\cdot u(k_0) \\
x(k_0+2) = A\cdot x(k_0+1) + B\cdot u(k_0+1) = A\cdot B\cdot u(k_0) + B\cdot u(k_0+1) \\
x(k_0+3) = A\cdot x(k_0+2) + B\cdot u(k_0+2) = A^2\cdot B\cdot u(k_0) + A\cdot B\cdot u(k_0+1) + B\cdot u(k_0+2) \\
\vdots \\
x(k_0+k^*) = A\cdot x(k_0+k^*) + B\cdot u(k_0+k^*) = A^{k^*-1}\cdot B\cdot u(k_0) + \dots + A\cdot B\cdot u(k_0+k^*-2) + B\cdot u(k_0+k^*-1)
\end{cases}
$$

L'ULTIMA EQUAZIONE PUÒ ESSERE RISCRITTA IN FORMA MATRICIALE

$$
x(k_0+k^*) = [B\ AB \dots A^2 B] \cdot \begin{vmatrix} u(k_0+k^*-2) \\ u(k_0+k^*-1) \\ \vdots \\ u(k_0) \end{vmatrix} = \mathcal{R}(k^*) \cdot u(k_0+k^*)
$$

. LA MATRICE $\mathcal{R}(k^*)$ RAPPRESENTA LA SEQUENZA DI INGRESSO $[u(k_0)\ u(k_0+1) \dots u(k_0+k^*-1)]$ E LO STATO $x(k_0+k^*)$ RAGGIUNTO AL TEMPO K^*. QUINDI, L'INSIEME DI RAGGIUNGIBILITÀ $\mathcal{X}_R(K_0+K^*)$ AL TEMPO K_0+K^* CORRISPONDE ALLO SPAZIO IMMAGINE GENERATO DALLE COLONNE DI $\mathcal{R}(K^*) \Rightarrow \mathcal{X}_R(K_0+K^*) = Im(\mathcal{R}(K^*)) = Im([B\ AB \dots A^{K^*-1}B])$

PER DETERMINARE IL SOTTOSPAZIO DI RAGGIUNGIBILITÀ $\mathcal{X}_R$ BISOGNA TROVARE L'INSIEME DI RAGGIUNGIBILITÀ $\mathcal{X}_R(k_0+k^*)$ AVENTE DIMENSIONE MASSIMA $\mathcal{X}_R = \max_{k^* \in [0,\infty]} \mathcal{X}_R(k_0+k^*)$.
QUESTO CORRISPONDE A DETERMINARE PER QUALE ISTANTE k_0+k^* LA MATRICE $\mathcal{R}(k^*)$ HA RANGO MASSIMO. RICORDIAMO CHE $\mathcal{R}(k^*)=[B \ AB \ \dots \ A^{k^*-1}B]$ E OGNI VOLTA CHE SI AGGIUNGE UNA COLONNA DEL TIPO $A^{i-1}B$, $i=1,\dots,k^*$, IL RANGO PUÒ AUMENTARE DI 1 O NON CAMBIARE. EVENTUALI AUMENTI POSSONO AVVENIRE SOLO FINO A QUANDO IL NUMERO DELLE COLONNE AGGIUNTE k^* EGUAGLIA IL NUMERO n DI RIGHE DI $\mathcal{R}(k^*) \Longrightarrow \mathcal{X}_R = \mathcal{X}_R(n)$. DEFINIAMO LA MATRICE DI RAGGIUNGIBILITÀ $R=[B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$, IL CUI SOTTOSPAZIO È DEFINITO COME $\mathcal{X}_R = \mathrm{Im}(\mathcal{R})$ $\Longrightarrow \dim(\mathcal{X}_R)=n_R=\mathrm{rk}(\mathcal{R})$. UN SISTEMA DINAMICO LINEARE A TEMPO DISCRETO È COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE $\Longleftrightarrow n_R=n=\mathrm{rk}(\mathcal{R})$. !! IL RISULTATO VALE ANCHE PER SISTEMI A PIÙ INGRESSI, IN CUI $\mathcal{R}=[B \ AB \ \dots \ A^{n-b}B]$, $b=\mathrm{rk}(B)$

PROBLEMA DELLA CONTROLLABILITÀ

DATO UNO STATO INIZIALE $x(k_0)$ E UNO STATO FINALE $x(k_f)$ DEL SISTEMA, ESISTE E SOTTO QUALI CONDIZIONI UNA FUNZIONE D'INGRESSO $u(\cdot)$ TALE CHE IL SISTEMA, CON STATO INIZIALE $x(k_0)$ E INGRESSO $u(\cdot)$, RAGGIUNGA LO STATO $x(k_f)$ IN UN INTERVALLO

DI TEMPO FINITO OPPURE AD UN ISTANTE PREFISSATO K? E, OVE ESISTE COME CALCOLARLA?

IL PROBLEMA, PER ASSEGNATI VALORI DI $x(k_0)$, $x(k_f)$, $k = k_f$, CONSISTE NEL TROVARE, SE ESISTE, UNA FUNZIONE $u(\cdot)$ TALE CHE $A^{k_f-k_0} \cdot x(k_0) + \sum_{h=k_0}^{k_f-1} A^{k_f-h-1} \cdot B \cdot u(h) = x(k_f)$.

NEL CASO IN CUI LO STATO FINALE NON SIA RAGGIUNGIBILE E QUELLO FINALE NON SIA CONTROLLABILE, TALE PROBLEMA PUÒ RISULTARE ANCORA RISOLVIBILE MA CIÒ È MOLTO INFLUENZATO DALL'ISTANTE k_f. IL PROBLEMA È RISOLTO, IN GENERE, DAL

TEOREMA: DATI DUE STATI DEL SISTEMA $x(k_0)$ E $x(k_f)$ E UN INTERO $k_f > 0$, ESISTE UNA FUNZIONE $u(\cdot)$ TALE CHE $A^{k_f-k_0} \cdot x(k_0) + \sum_{h=k_0}^{k_f-1} A^{k_f-h-1} \cdot B \cdot u(h) = x(k_f) \Leftrightarrow$ DETTO $\mu = \min(k_f, n)$, SI HA $\underbrace{x(k_f) - A^{k_f-k_0} \cdot x(k_0)}_{\text{RISPOSTA COMPLETA - LIBERA}} \in \operatorname{Im}[B \; AB \ldots A^{\mu-1}B]$

COROLLARIO: LA PROPRIETÀ CHE PER TUTTE LE COPPIE $x(k_0)$ E $x(k_f)$ ESISTONO UNA FUNZIONE $u(\cdot)$ E UN INTERO $k_f > 0$ TALI CHE $A^{k_f-k_0} \cdot x(k_0) + \sum_{h=k_0}^{k_f-1} A^{k_f-h-1} \cdot B \cdot u(h) = x(k_f)$ SUSSISTE SE E SOLO SE IL SISTEMA È RAGGIUNGIBILE. IN TAL CASO, PER QUALUNQUE $k_f \geq n$ ESISTE UNA FUNZIONE $u(\cdot)$

OSSERVABILITÀ E DETERMINABILITÀ

CONSENTONO DI STIMARE LO STATO DEL SISTEMA $x(\cdot)$ TRAMITE LA MISURA DEL MOVIMENTO DELL'USCITA $y(\cdot)$ E DELL'INGRESSO $u(\cdot)$.

Uno stato $x^* \neq 0$ del sistema $\begin{cases} x(k+1) = A \cdot x(k) + B \cdot u(k) \\ y(k) = C \cdot x(k) + D \cdot u(k) \end{cases}$ si

dice non osservabile in $[k_0, k^*]$ se $\forall k^* \in [k_0, +\infty)\ \exists\ y_e(k)$ conseguente a $x(k_0) \mid y_e(k) = 0\ \forall k \in [k_0, k^*]$.

Ossia l'analisi di un tratto qualsiasi non consenta di distinguere x^* da $x=0$ che genera risposta libera nulla.

Si noti che B e D non hanno ruolo nell'osservabilità, dunque attribuita alla coppia A, C.

Un sistema si dice osservabile se $\exists [k_0, k_e] \mid$ noti $u(\cdot)$ e $y(\cdot)$ si determina sempre e univocamente il valore dello stato di esso all'inizio dell'analisi, ossia $x(k_0)$.

Uno stato $x^* \neq 0$ del sistema $\begin{cases} x(k+1) = A \cdot x(k) + B \cdot u(k) \\ y(k) = C \cdot x(k) + D \cdot u(k) \end{cases}$ si

dice non determinabile in $[k_0, k^*]$ se $\forall t^* \in [k_0, +\infty)\ \exists\ y_e(k)$ con stato finale $x(k^*) = 0 \mid y_e(k) = 0\ \forall t \in [k_0, k^*]$.

Ossia l'analisi di un tratto qualsiasi con stato finale x^* non è distinguibile da $x=0$