AD ESEMPIO, PRESI $P_1 = \begin{vmatrix}1\\0\\2\end{vmatrix}$, $P_2 = \begin{vmatrix}3\\1\\0\end{vmatrix}$, $P_3 = \begin{vmatrix}-1\\1\\-1\end{vmatrix}$

EQUAZIONE CARTESIANA

$$\det\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \boxed{\pi: -x+10y+4z-7=0}$$

$$\begin{cases} x = 10s+4t-7 \\ y = s \\ z = t \end{cases}$$

POSIZIONE RECIPROCA TRA DUE PIANI IN $\mathbb{R}^3$

$\pi_1 = \{P_1 + t v_1 + s w_1 \mid t,s \in \mathbb{R}\}$

$\pi_2 = \{P_2 + t v_2 + s w_2 \mid t,s \in \mathbb{R}\}$

- $\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \mathrm{span}(v_1, w_1) = \mathrm{span}(v_2, w_2) \Leftrightarrow n_1 (= v_1 \times w_1) // n_2 (= v_2 \times w_2)$

DETTI $n_1 = \begin{vmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{vmatrix}$ E $n_2 = \begin{vmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{vmatrix}$, $\mathrm{rk}\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix} = 1 \rightarrow \begin{cases} \mathrm{rk}\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1 & -d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -d_2\end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \pi_1 = \pi_2 \\ \mathrm{rk}\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1 & -d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -d_2\end{vmatrix} = 2 \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset \end{cases}$

DOVE $\pi_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$

$\pi_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$

EQUAZIONE CARTESIANA DI UNA RETTA

- $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathrm{rk}\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix} = \mathrm{rk}\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1 & -d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -d_2\end{vmatrix} = 2 \rightarrow \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}$

- ANGOLO TRA PIANI: DETTI n_1 E n_2 I VETTORI NORMALI A π_1 E π_2 RISPETTIVAMENTE,

$$\cos\theta = \frac{\langle n_1, n_2 \rangle}{\|n_1\| \cdot \|n_2\|}. \quad \text{Se } \cos\theta = 0,\ \pi_1 \perp \pi_2$$

POSIZIONE RECIPROCA TRA DUE RETTE NELLO SPAZIO

$r_1 = \left\{ \begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix} \;\middle|\; A_1 \cdot \begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix} = b_1 \right\}$ $\quad r_2 = \left\{ \begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix} \;\middle|\; A_2 \cdot \begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix} = b_2 \right\}$ $\quad A_1, A_2 \in M(2\times 3, \mathbb{R})$

$b_1, b_2 \in \mathbb{R}^2$

$A = \begin{vmatrix}A_1\\A_2\end{vmatrix} \in M(4\times 3, \mathbb{R}) \quad b = \begin{vmatrix}b_1\\b_2\end{vmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad A \cdot \begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix} = b$

$\mathrm{rk}(A\|b)$ \ $\mathrm{rk}A$	$\mathrm{rk}(A\|b) = \mathrm{rk}A$	$\mathrm{rk}(A\|b) \neq \mathrm{rk}A$
$\mathrm{rk}A = 2$	$r_1 = r_2$ RETTE COINCIDENTI	$r_1 \neq r_2$ RETTE PARALLELE
$\mathrm{rk}A = 3$	$r_1 \cap r_2 \neq \emptyset$	$r_1 \neq r_2$ RETTE SGHEMBE

$\mathrm{rk}(A|b) = 4$

- $r_1 // r_2 \Longleftrightarrow v_{r_1} // v_{r_2}$
- $r_1 \perp r_2 \Longleftrightarrow \langle v_{r_1}, v_{r_2} \rangle = 0$

POSIZIONE RECIPROCA RETTA-PIANO $r = \{P_1 + t v_1 \mid t \in \mathbb{R}\}$ $\pi = \{P_2 + t w_1 + s w_2 \mid t, s \in \mathbb{R}\}$

- $r \parallel \pi \iff v_1 \in \mathrm{span}(w_1, w_2)$

$$rk\,|v_1 \mid w_1 \mid w_2| = 2 \Rightarrow rk\,|v_1 \mid w_1 \mid w_2 \mid P_1 - P_2| = \begin{cases} 2 \rightarrow r \subset \pi \\ 3 \rightarrow \begin{cases} r \cap \pi = \emptyset \rightarrow r \parallel \pi \\ r \cap \pi \neq \emptyset \rightarrow \text{incidenti} \end{cases} \end{cases}$$

FASCIO DI PIANI

$$r \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}$$

CON FASCIO DI PIANI SI INTENDE UN INSIEME DI PIANI PASSANTI PER LA RETTA $r \rightarrow \lambda(a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1) + \mu(a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2) = 0$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

ALTRE RELAZIONI

DISTANZA PUNTO-RETTA $\rightarrow$ $d_{P_0 r} = P_0 H$, CON H LA PROIEZIONE ORTOGONALE DI P_0 SU r E π IL PIANO PERPENDICOLARE A r E PASSANTE PER P_0

PRESO $P_1 \in r$, $v_r \parallel P_1 - H \parallel n_\pi$

$$d_{P_0 r} = \|P_0 - H\| = \|P_0 - P_1\| \sin\theta = \|P_0 - P_1\| \frac{\|(P_0 - P_1) \times n_\pi\|}{\|P_0 - P_1\| \, \|n_\pi\|} =$$

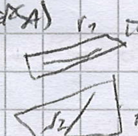
$$= \frac{\|(P_0 - P_1) \times n_\pi\|}{\|n_\pi\|}$$

DISTANZA PUNTO-PIANO $\rightarrow$ CON ANALOGA DIMOSTRAZIONE ALLA DISTANZA PUNTO-RETTA, NEL PIANO $d_{P_0 \pi} = \dfrac{|a x_0 + b y_0 + c z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

- DISTANZA RETTE PARALLELE $\rightarrow$ SI PRENDE UN $P_0 \in r_1$ E $d_{P_0 r_2}$ (O VICEVERSA)

- DISTANZA PIANI PARALLELI $\rightarrow$ SI PRENDE UN $P_0 \in \pi_1$ E $d_{P_0 \pi_2}$ (O VICEVERSA)

- DISTANZA RETTE SGHEMBE $\rightarrow$



$d(r_1, r_2) = d(\pi_1, \pi_2)$

$\pi_1 \parallel \pi_2$

ESERCIZIO DI VERIFICA RETTE SGHEMBE

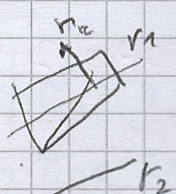
$$r_2 = \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2y - z + 1 = 0 \end{cases} \qquad r_1 = \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 2x - z + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \cancel{-1} & \cancel{-4} \\ 0 & 0 & \cancel{1} & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{array}{c|c} A & B \\ \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ 3 \end{matrix} \end{array}$$

$\Rightarrow rk(A|b) = 4$; $rk\,A = 3$ $\Rightarrow$ LE RETTE NON SI INTERSECANO E NON SONO PARALLELE

$\Rightarrow$ RETTE SGHEMBE

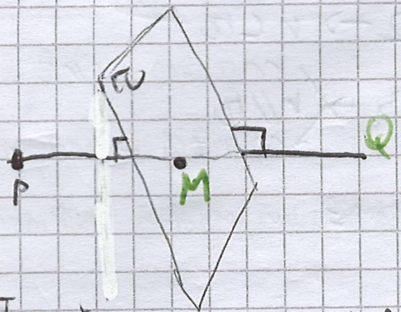
- DISTANZA DI UN PIANO PER r_1 PARALLELO AD r_2 ($r_1 \times r_2$!) $\rightarrow$



$\pi \parallel r_1$
$\pi \parallel r_2$

$\Pi = \{P_1 + t v_1 + s v_2 \mid t, s \in \mathbb{R}\} \to n_\Pi = v_1 \times v_2$

- SIMMETRICO DI UN PUNTO RISPETTO AD UN PIANO



SE $\Pi \perp r_{PQ} \Rightarrow M \in \Pi$, CON M PUNTO MEDIO DI PQ

Π È L'INSIEME DEI PUNTI NELLO ~~PIANO~~ SPAZIO EQUIDISTANTI DA P E Q

PROVA D'ESAME

① SI DIA LA DEFINIZIONE DI MATRICE SIMMETRICA REALE DI ORDINE n. SI DIMOSTRI CHE L'INSIEME DELLE MATRICI SIMMETRICHE REALI DI ORDINE n FORMA UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DELLE MATRICI QUADRATE DI ORDINE n.

SIA L L'OPERATORE LINEARE SU $\mathbb{R}^3$ CUI VIENE ASSOCIATA, NELLE BASI CANONICHE, LA MATRICE

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

a) TROVARE LA CONTROIMMAGINE DEL VETTORE $\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix}$

b) TROVARE GLI AUTOVALORI DI L E, PER OGNI AUTOVALORE, IL RELATIVO AUTOSPAZIO

c) SI DICA SE L È DIAGONALIZZABILE E, IN CASO AFFERMATIVO, TROVARE UNA FORMA DIAGONALE E UNA BASE DI AUTOVETTORI

② SIA F L'APPLICAZIONE LINEARE DA $\mathbb{R}^4$ A $\mathbb{R}^3$ TALE CHE

$$F\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad F\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{vmatrix} \qquad F\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{vmatrix} \qquad F\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{vmatrix}$$

a) SCRIVERE LA MATRICE ASSOCIATA A F NELLE BASI CANONICHE

b) TROVARE UNA BASE DI Im(F)

c) TROVARE EQUAZIONI CARTESIANE DELL'IMMAGINE DI F

d) TROVARE 5 VETTORI APPARTENENTI A Im(F) CHE GENERINO Im(F)

e) TROVARE 2 VETTORI APPARTENENTI A Im F CHE SIANO LINEARMENTE DIPENDENTI

③ NEL PIANO, CON RIFERIMENTO CARTESIANO RC$(O, \hat{\imath}, \hat{\jmath})$, SI CONSIDERINO I QUATTRO PUNTI $P = (2,0)$; $Q = (1,0)$; $R = (0,1)$ ED $S(0,2)$

a) VERIFICARE CHE P, Q, R ED S APPARTENGONO AD UNA STESSA CIRCONFERENZA C E SCRIVERE L'EQUAZIONE CARTESIANA DI C

b) TROVARE IL CENTRO E IL RAGGIO DI C

c) TROVARE IL PERIMETRO E L'AREA DEL QUADRILATERO PQRS

2) NELLO SPAZIO, CON RIFERIMENTO CARTESIANO RC(O, i, j, k), SI CONSIDERINO LE RETTE

$$r: \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad \text{E} \quad s: \begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases}$$

a) VERIFICARE CHE LE RETTE r E s SONO SGHEMBE

b) DETERMINARE DEI VERSORI DIRETTORI DI r E s

c) SCRIVERE EQUAZIONI PARAMETRICHE DI r E s

d) TROVARE UN VETTORE PERPENDICOLARE SIA A r CHE A s

e) DETERMINARE LA DISTANZA TRA LE RETTE r E s

3) SI CONSIDERI IL SEGUENTE SISTEMA LINEARE:

$$\begin{cases} x + y + (3 - k)z = 1 \\ kx + y + kz = 2 \\ kx + kz = 2 \end{cases}$$

DI TRE EQUAZIONI NELLE INCOGNITE x, y, z E DIPENDENTE DAL PARAMETRO k

a) SCRIVERE LA MATRICE DEI COEFFICIENTI E LA MATRICE COMPLETA DEL SISTEMA

b) CALCOLARE IL DETERMINANTE DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI IN FUNZIONE DI k

c) DIRE PER QUALI VALORI DI k IL SISTEMA AMMETTE UNA, NESSUNA O INFINITE SOLUZIONI

d) PER OGNI VALORE DEL PARAMETRO k DETERMINARE LE SOLUZIONI DEL SISTEMA

1) UNA MATRICE QUADRATA DI ORDINE n SI DICE SIMMETRICA QUANDO, SE INDICATA CON A, VALE CHE $A = A^T$, OSSIA DATI $a_{i,j} \in A$ E $a_{j,i} \in A^T$, $a_{i,j} = a_{j,i}$ $\forall i,j = 1, 2, \dots, n$

VERIFICA CHE $S = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid A = A^T\}$ È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE

- $a_{i,j} = 0 \ \forall i,j = 1,2,\dots,n \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \in S$ ✓

- $A, B \in S \ \forall A, B \in S$. INDICATI $a_{i,j} \in A$ E $b_{j,i} \in B \mid a_{i,j} = a_{j,i} \wedge b_{i,j} = b_{j,i}$

$a_{i,j} + b_{i,j} = a_{j,i} + b_{j,i} \Leftrightarrow a_{i,j} - a_{j,i} = b_{j,i} - b_{i,j} \Rightarrow 0 = 0$ ✓

• $\forall A \in M \wedge \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda A \in S$

$$\lambda \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & \cdots & \lambda a_{n,1} \\ \lambda a_{1,2} & \lambda a_{2,2} & \cdots & \lambda a_{2,n} \\ \lambda a_{n,1} & \lambda a_{2,n} & \cdots & \lambda a_{n,n} \end{vmatrix} \in S \checkmark$$

a) $\mathrm{Im}\, L: \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + 2x_3 \\ 5x_2 \\ 2x_1 + 4x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix}$

$$\begin{matrix} 1 \\ 1=3 \\ 3 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + 2x_3 = -1 \\ 5x_2 = 1 \\ 2x_1 + 4x_3 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -1 - 2x_3 \\ x_2 = 1/5 \\ x_3 = t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 - 2t \\ x_2 = 1/5 \\ x_3 = t \end{cases}$$

$$C\,\mathrm{Im} = \left\{ \begin{vmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} t + \begin{vmatrix} -1 \\ 1/5 \\ 0 \end{vmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

b) $\det(A - \lambda I_3) = 0$

$$\det \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (5-\lambda) \det \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(\cancel{4} - 5\lambda + \lambda^2 - \cancel{4}) = 0$$

$$\lambda(\lambda-5)(5-\lambda) = 0 \longrightarrow -\lambda(\lambda-5)^2 = 0$$

• $\lambda_1 = 0 \rightarrow A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

• $\lambda_2 = 5 \rightarrow A_2 = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

c) È DIAGONALIZZABILE SE $\forall \lambda$ AUTOVALORE, I λ SONO REALI E DISTINTI

$\wedge$ $ma(\lambda) = mg(\lambda)$ $\forall \lambda$ AUTOVALORE

• $\lambda_1 = 0$ $\quad ma(0) = 1 \quad 1 \leq mg(0) \leq ma(0) = 1 \Rightarrow mg(0) = 1$ ✓

• $\lambda_2 = 5$ $\quad ma(5) = 2 \quad \dim A_2 = \dim \begin{vmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \dim \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$mg(5) = n - \dim A_2$ $\quad$ n = NUMERO DI COLONNE = 3

$mg(5) = 3 - 1 = 2$ ✓

• $\lambda_1 \neq \lambda_2 \rightarrow 0 \neq 5$ ✓ $\Rightarrow$ L È DIAGONALIZZABILE