STABILITÀ PARADOSSALE

Corrisponde a particolari sistemi per cui, fissato un valore K_1, il sistema risulta:

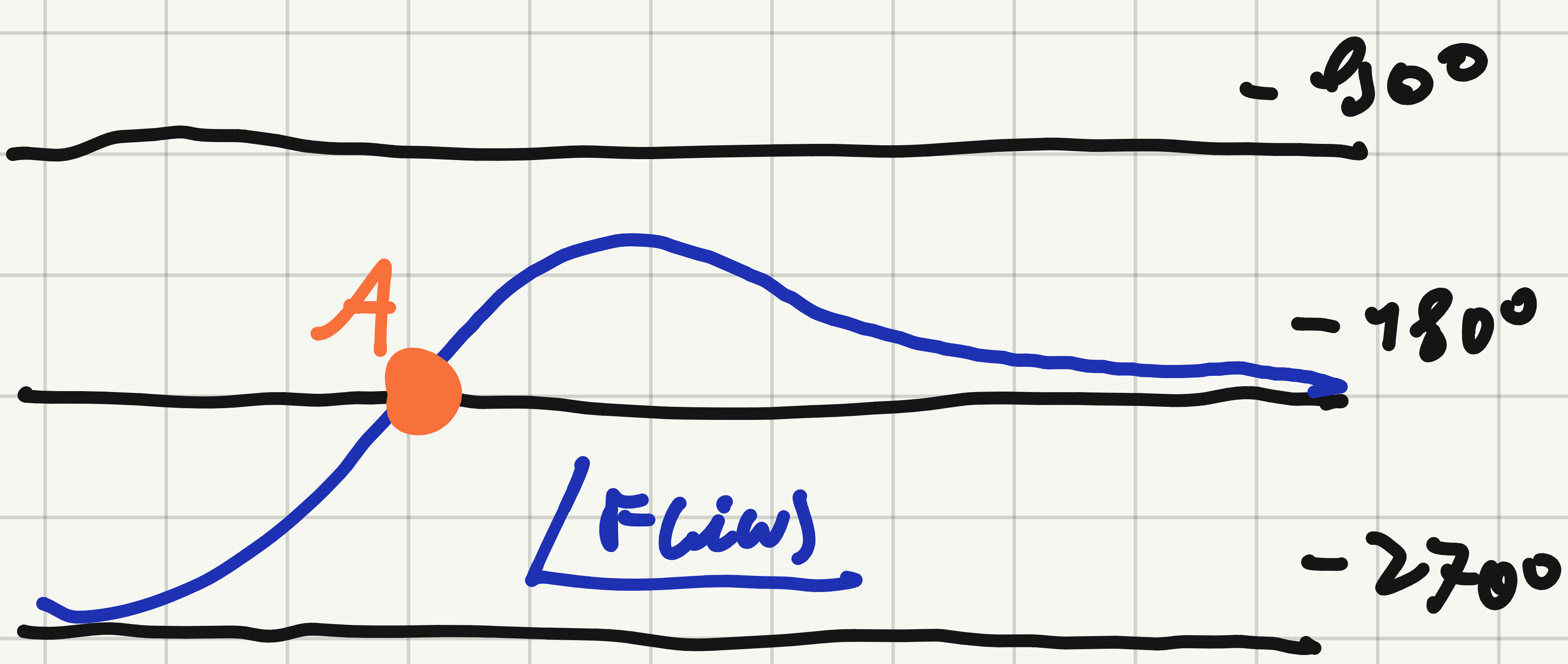
- instabile per $K < K_1$
- stabile per $K > K_1$

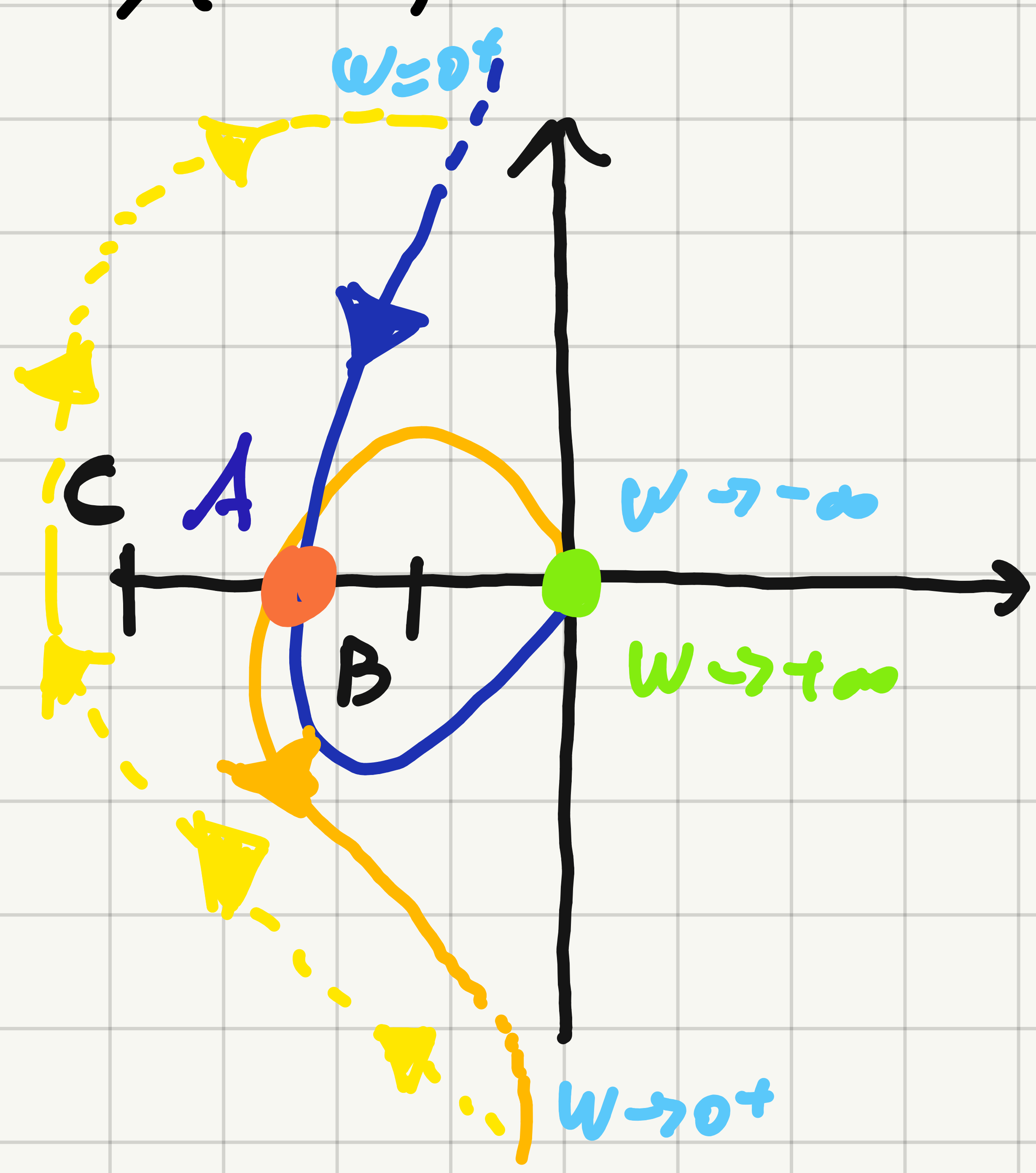
Esempio: $F(s) = 100K \cdot \dfrac{(s+0,5)}{s(s-1)(s+10)}$, $K>0$ $\quad P_+ = 1$

$$F(i\omega) = -5K \cdot \frac{\left(1+\frac{i\omega}{0,5}\right)}{i\omega(1-i\omega)\left(1+\frac{i\omega}{10}\right)}$$

$$\angle F(i\omega) = -270° + \arctan\left(\frac{\omega}{0,5}\right) + \arctan(\omega) - \arctan\left(\frac{\omega}{10}\right)$$

$M(0^+) = +\infty,\ \varphi(0^+) = -270°$ $\qquad$ $M(+\infty) = 0,\ \varphi(+\infty) = -180°$





B) $\overset{\curvearrowright}{N} = -1$ $\quad \overset{\curvearrowright}{N} = -P_+ \Rightarrow$ STABILE

C) $\overset{\curvearrowright}{N} = 1$ $\quad \overset{\curvearrowright}{N} \neq -P_+ \Rightarrow$ INSTABILE

MARGINI DI STABILITÀ

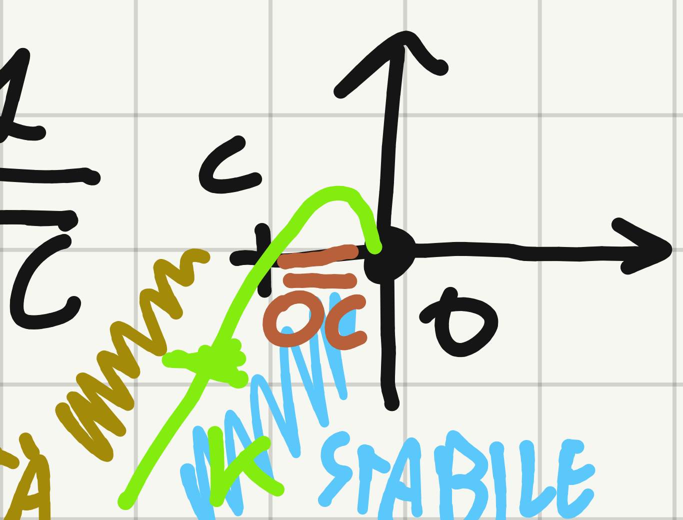
Sono quantificatori che misurano la **robustezza della stabilità nei confronti di perturbazioni e/o incertezze.**

Tali quantificatori sono:

- **Margine di guadagno** → limite K di stabilità

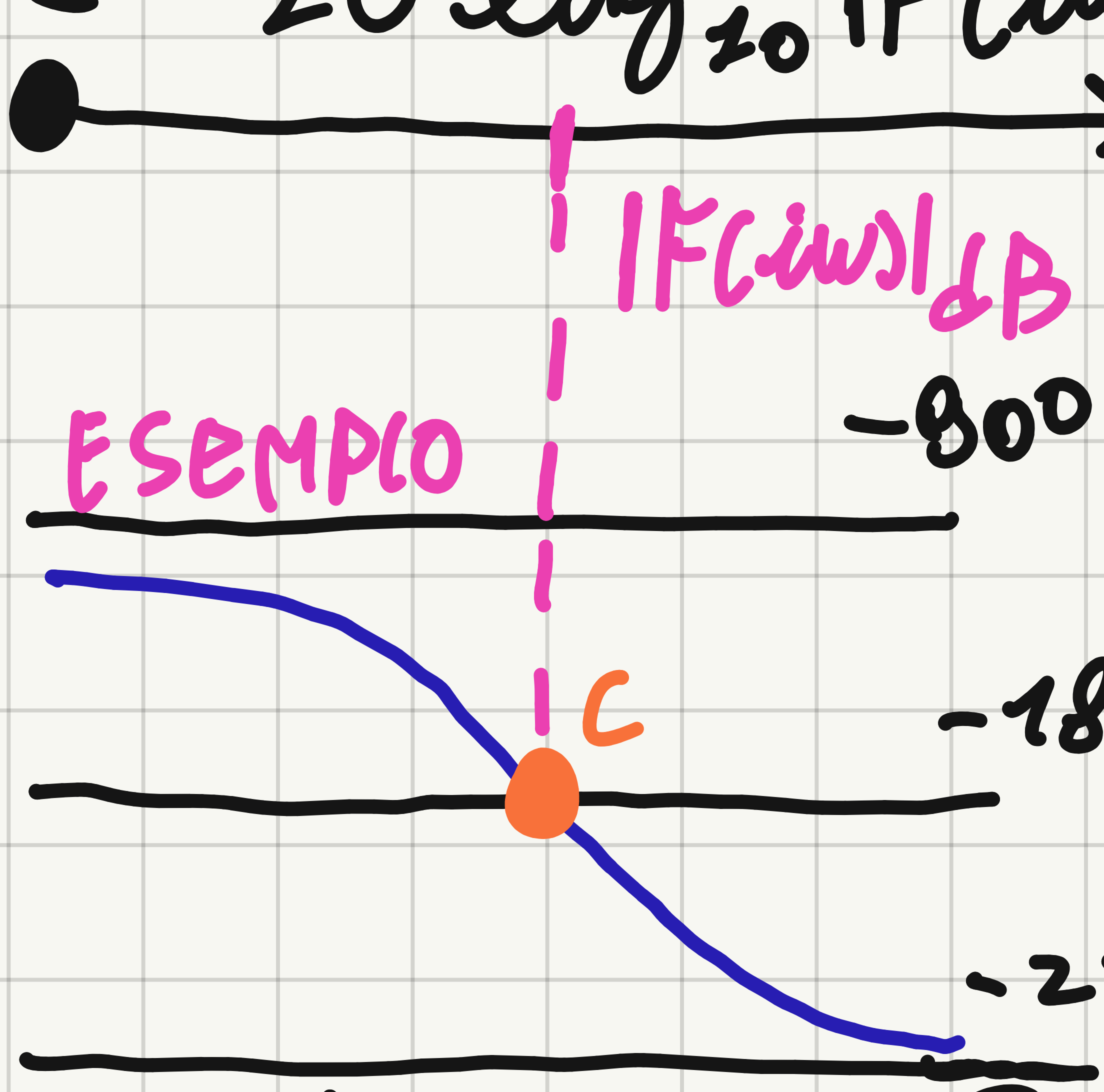
In dB { stabilità per $m_g > 0$; instabilità per $m_g < 0$

$$m_g = \frac{1}{\overline{OC}}$$



$$m_g = \frac{1}{|F(i\omega^*)|} \to m_g = 20\log_{10}\left|\frac{1}{F(i\omega^*)}\right| =$$

$$= -20\log_{10}|F(i\omega)|$$



$m_g = 20dB$

⇒ sistema stabile

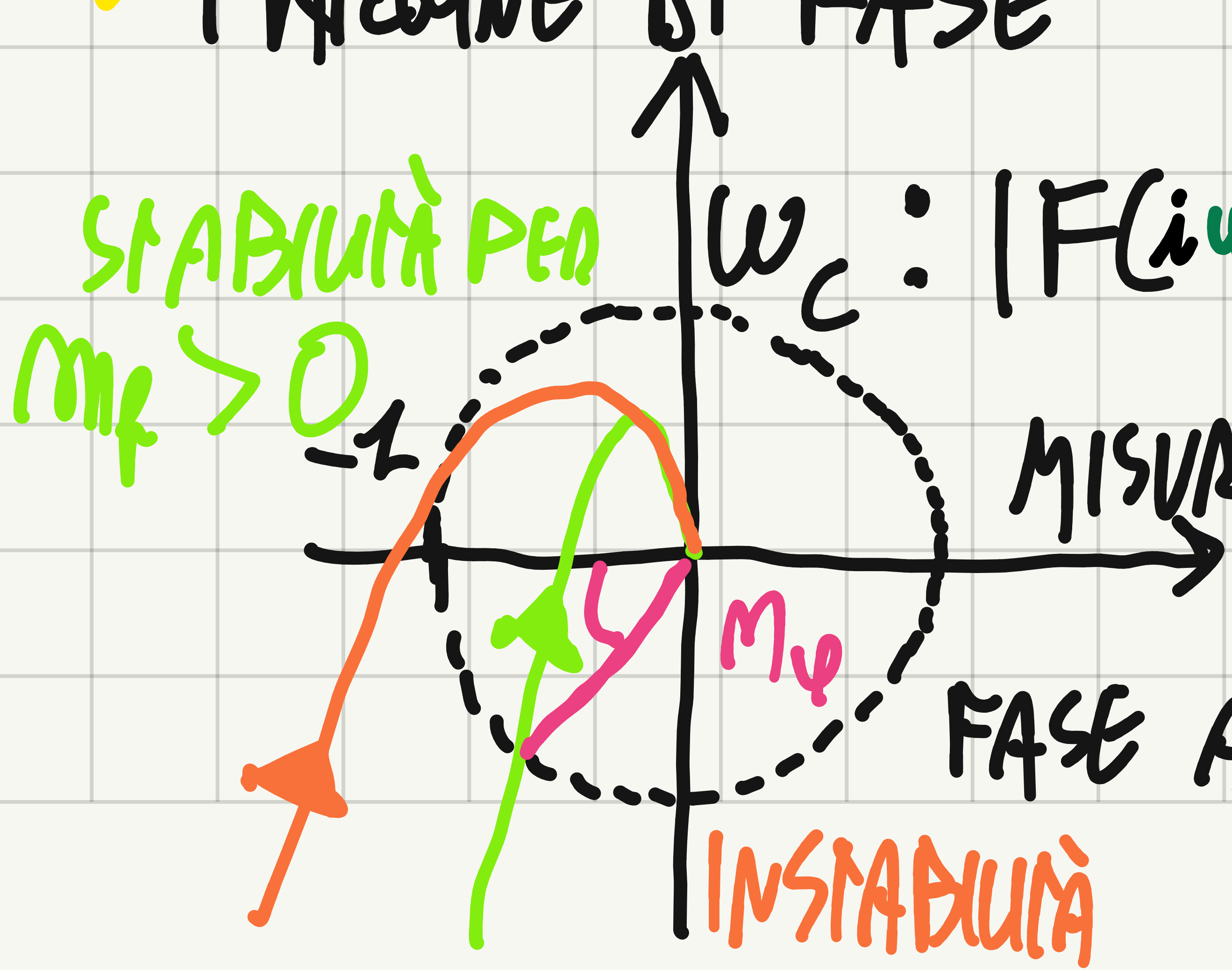
Il margine di guadagno è l'opposto del modulo della fase quando espressi in dB. $m_g \in \mathbb{R}$

$\omega^* : \omega \mid \angle F(i\omega) = -180°$

- **Margine di fase** → $m_\varphi = \angle F(i\omega_c) - 180°$

$\omega_c : |F(i\omega_c)| = 1$ pulsazione di attraversamento

Misura di quanti gradi si deve diminuire la fase affinché raggiunga $-180°$



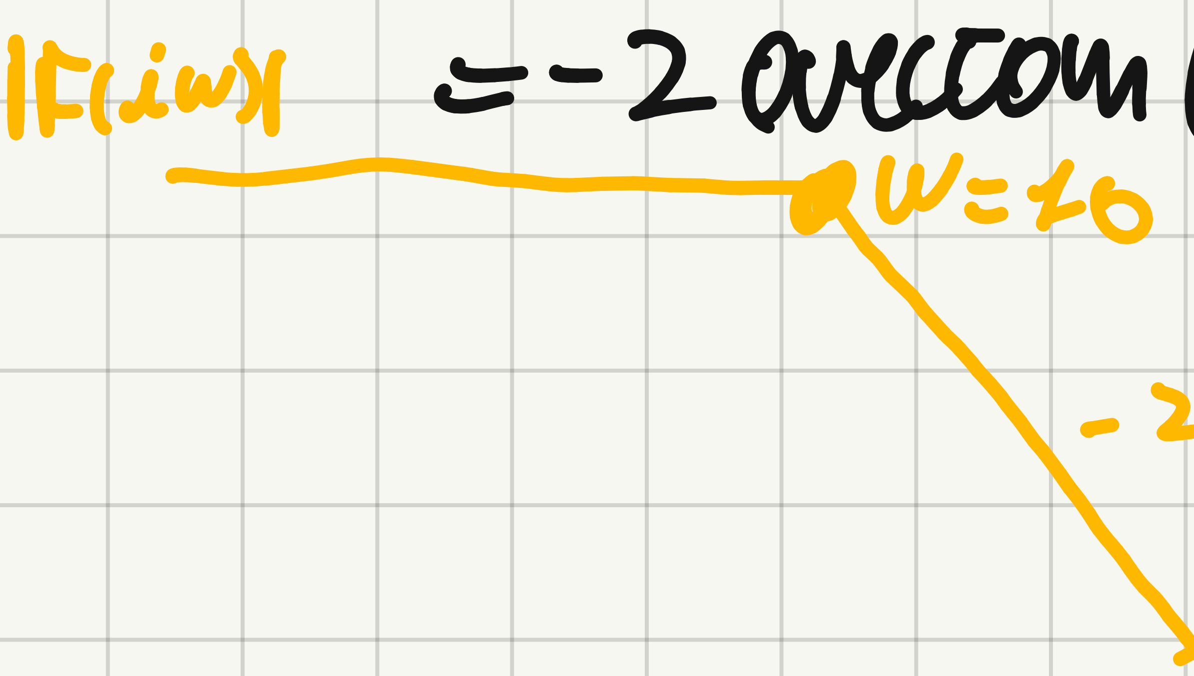
F(s) È IL SISTEMA A FASE MINIMA: TUTTI I POLI E GLI ZERI DI F(s) (ESCLUSI EVENTUALI POLI IN s=0) SONO A PARTE REALE NEGATIVA.

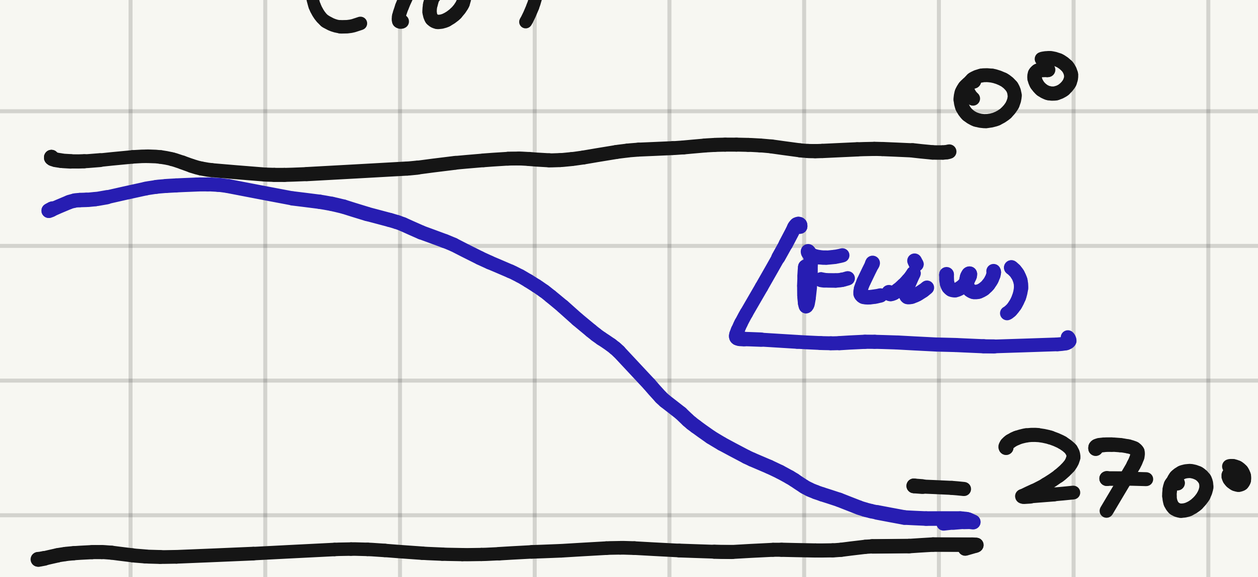
ESEMPIO: $F(i\omega) = \dfrac{\left(1-\frac{i\omega}{2}\right)}{\left(1+\frac{i\omega}{2}\right)\left(1+\frac{i\omega}{10}\right)}$

$$|F(i\omega)| = \left|\left|\frac{1}{1+\frac{i\omega}{10}}\right|\right|$$

$$\angle F(i\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{2}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{10}\right)$$

$$= -2\arctan\left(\frac{\omega}{2}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{10}\right)$$

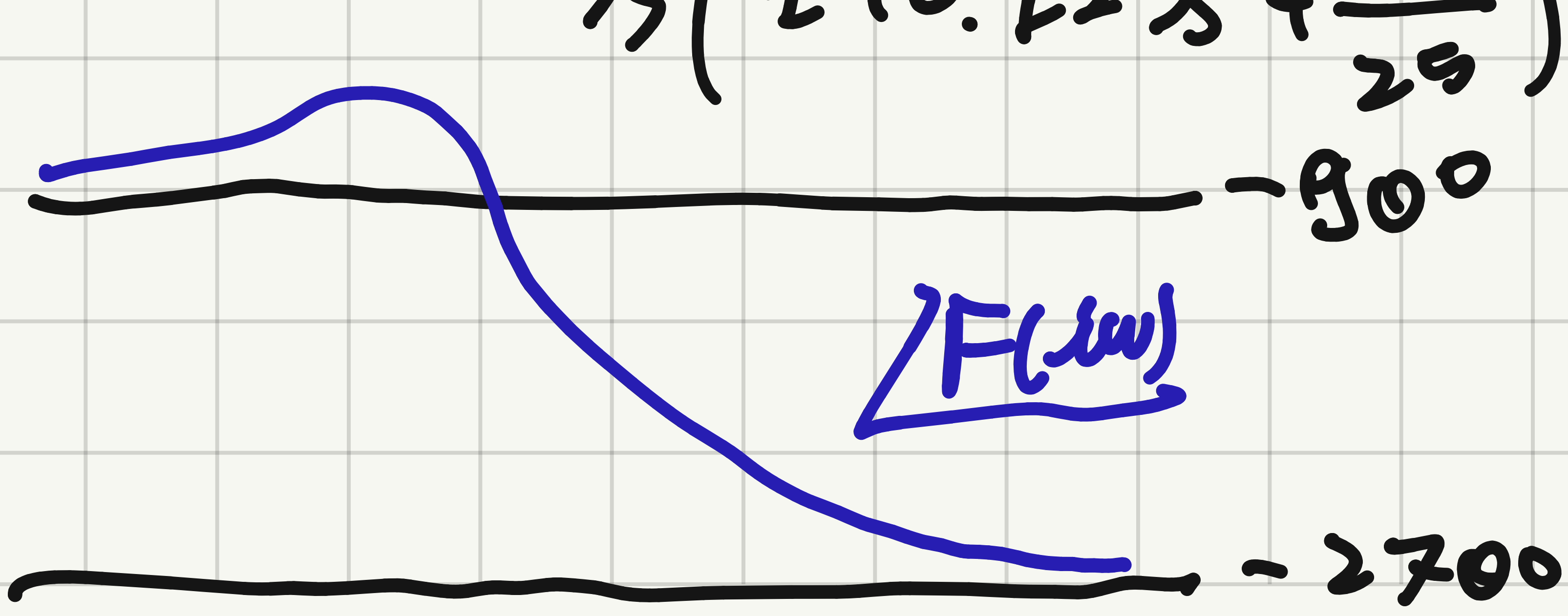


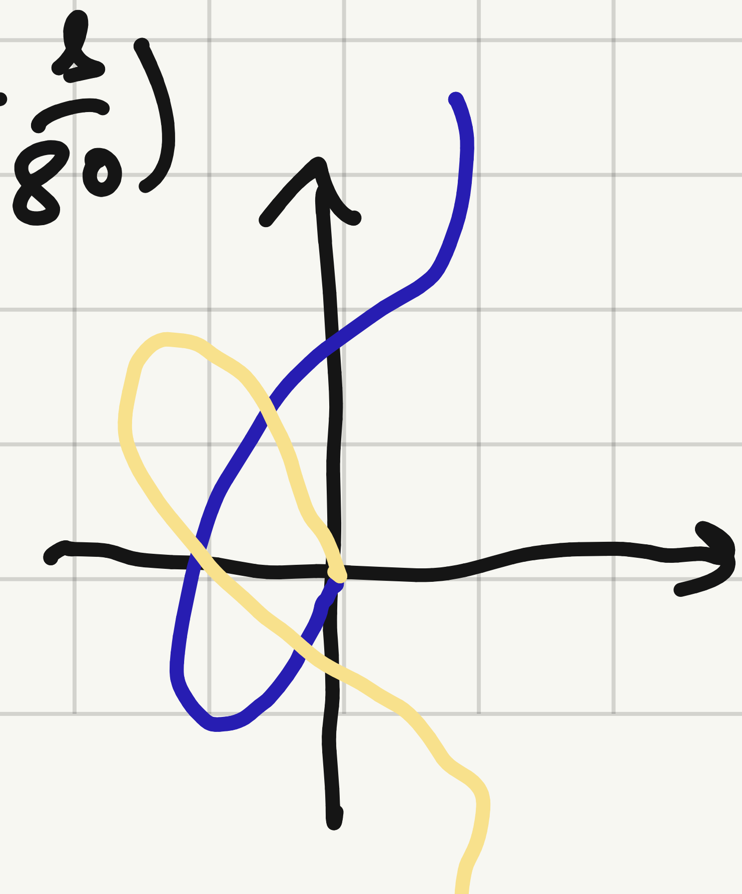


I DUE QUANTIFICATORI SONO FACILMENTE LEGGIBILI DAL DIAGRAMMA DI BODE

ESEMPIO: $F(s) = \dfrac{15(s+4)}{s(s^2+3s+25)\left(1+\frac{s}{80}\right)}$

$$F(s) = \frac{2.4\left(1+\frac{s}{4}\right)}{s\left(1+0.12s+\frac{s^2}{25}\right)\left(1+\frac{s}{80}\right)}$$





FEDELTÀ DI RISPOSTA

Studieremo SISTEMI DI CONTROLLO PROPORZIONALI, OSSIA SISTEMI PER CUI $\boxed{y_{des}(t) = K_d \cdot u(t)}$ $\xrightarrow{u} \bigcirc$.

Si ricorda come si definisce l'errore $e(t)$, rendendolo il più piccolo possibile a seconda del caso d'interesse

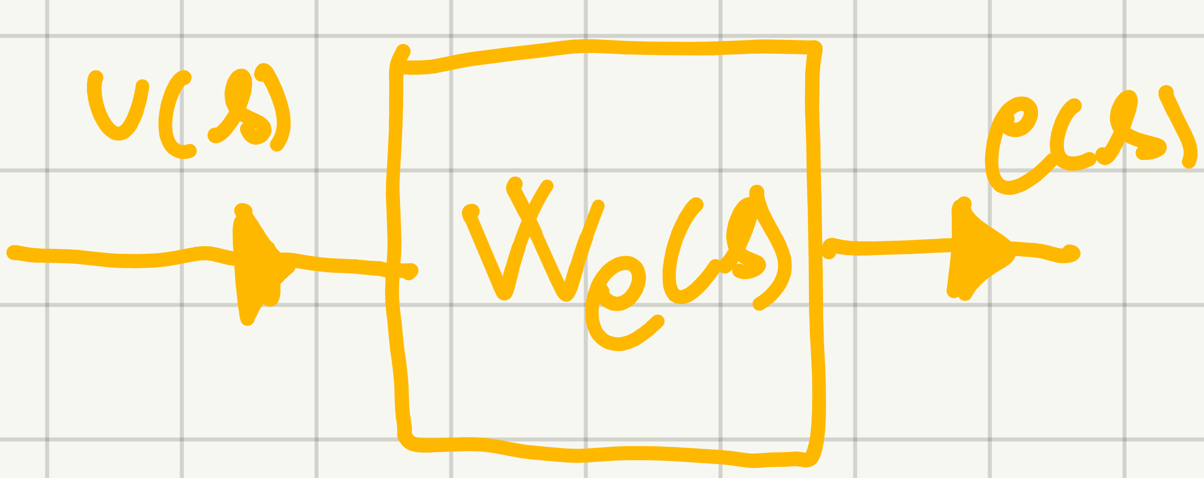
$$e(t) = K_d \cdot u(t) - y(t) \longrightarrow \text{LAPLACE}$$

$$e(s) = K_d \cdot U(s) - Y(s) = K_d \cdot U(s) - W(s) \cdot U(s)$$

$= [K_d - W(s)]\, U(s)$. Definiamo $W_e(s) = K_d - W(s)$ la funzione di trasferimento del sistema errore

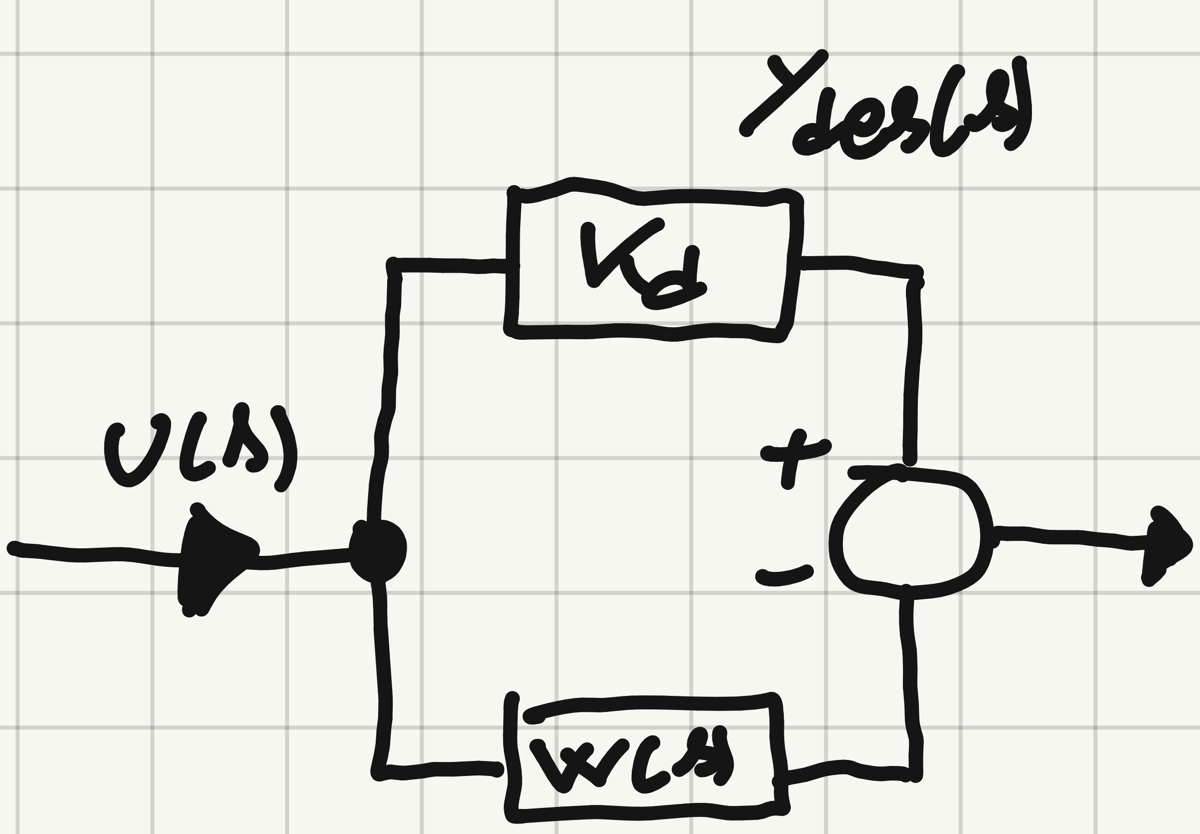
$$\Rightarrow e(s) = W_e(s) \cdot U(s)$$

SISTEMA FITTIZIO IN CUI $y = e$

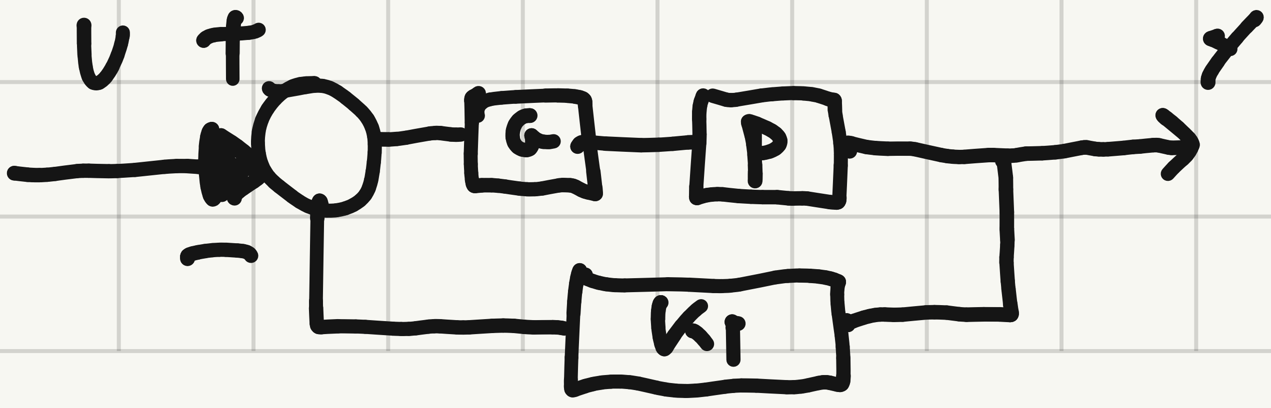


$$W_e(s) = \frac{e(s)}{U(s)}$$

OMAR THE BEST BUT NOT ALWAYS



$e(s) = W_e(s) \cdot U(s)$

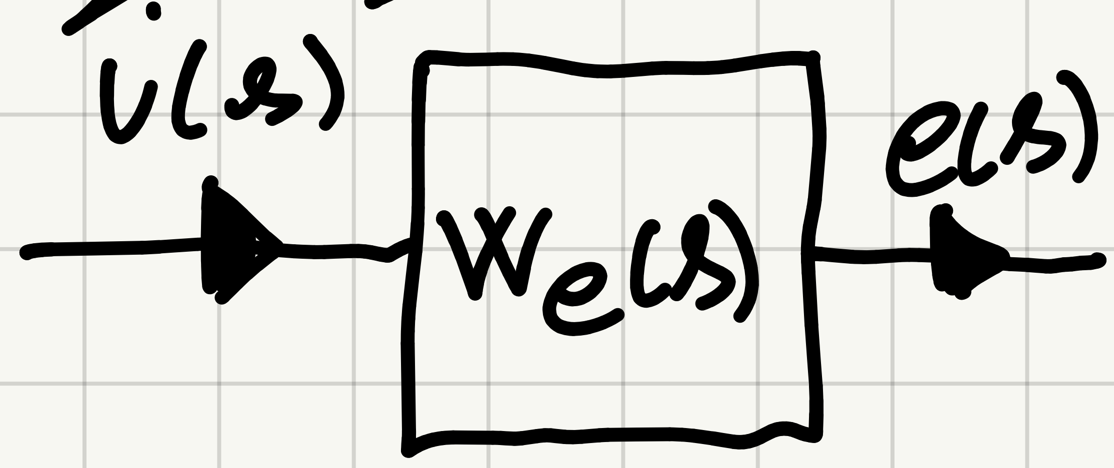


LAVORANDO IN REGIME PERMANENTE, SAPPIAMO CHE

$$u(t) = \frac{t^k}{k!}\,\delta_{-1}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{1}{s^{k+1}}.$$

AD ESEMPIO:

- $k=0 \Rightarrow \delta_{-1}(t) \rightarrow \frac{1}{s}$
- $k=1 \Rightarrow t\,\delta_{-1}(t) \rightarrow 1/s^2$
- $k=2 \Rightarrow \frac{t^2}{2!}\,\delta_{-1}(t) \rightarrow 1/s^3$



COEFFICIENTE DI ERRORE

$$W_e(s) = K_d - W(s) = K_d - \frac{N_W(s)}{D_W(s)} = \frac{K_d D_W(s) - N_W(s)}{D_W(s)}$$

$$\tilde{y}_r(t) = \sum_{i=0}^{k} c_i \cdot \frac{t^{k-i}}{(k-i)!} = c_0 \cdot \frac{t^k}{k!} + c_1 \cdot \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots + c_k$$

$$c_i = \frac{1}{i!} \cdot \left[\frac{d^i W(s)}{ds^i}\right]_{s=0} \Rightarrow \text{DIPENDE DA } W(s)$$

$$\Rightarrow \tilde{e}(t) = c_{e_0} \frac{t^k}{k!} + c_{e_1} \cdot \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots + c_{e_k}.$$

DA CUI SI OSSERVA CHE $\lim_{t \to +\infty} \tilde{e}(t) = +\infty \Rightarrow$ ERRORE ILLIMITATO

PER OVVIARE A CIÒ, DEFINIAMO IL SISTEMA DI CONTROLLO DI TIPO K SE L'ERRORE A REGIME PERMANENTE PER UN INGRESSO POLINOMIALE DI GRADO K È COSTANTE E DIVERSO DA ZERO. $\tilde{e}(t) = c_{e_0} \frac{t^k}{k!} + \dots + c_{e_{k-1}} t + c_{e_k}$

IL SISTEMA È DI TIPO K SE:
$$\begin{cases} c_{e_0} = c_{e_1}, \dots = c_{e_{k-1}} = 0 \Rightarrow \tilde{e}(t) = c_{e_k} \\ c_{e_k} \neq 0 \end{cases}$$

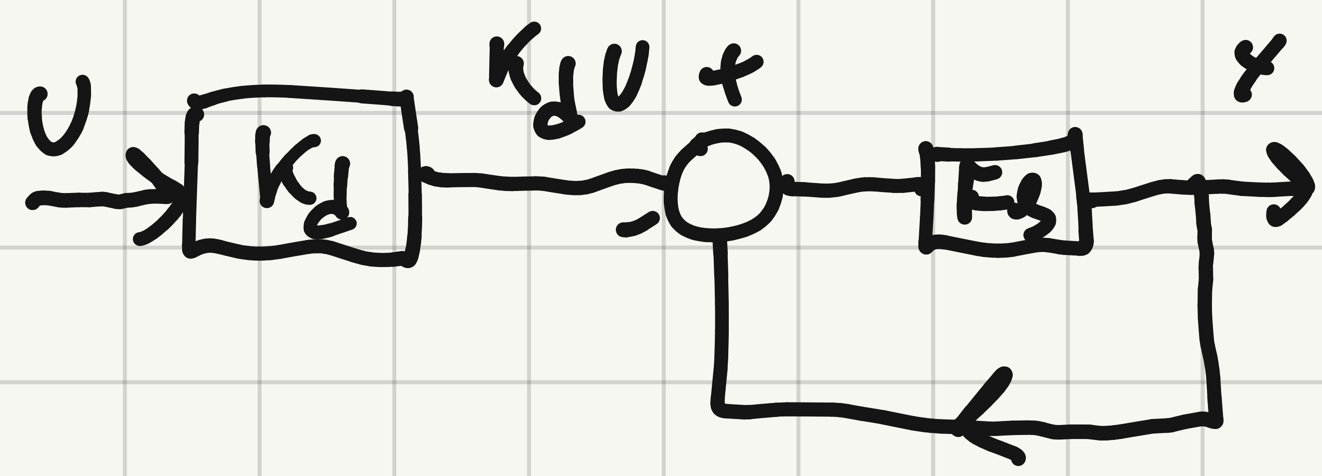
QUINDI, PER SISTEMI DI TIPO K, DATO $u(t)=\frac{t^h}{h!}$, $e(t) \begin{cases} +\infty & h>k \\ c_{e,k} & h=k \\ 0 & h<k \end{cases}$

IN GENERALE, $c_{e_k} = \tilde{e}(t) = \lim_{t\to+\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot e(s) =$

$$= \lim_{s\to 0} s\cdot W_e(s)\cdot U(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot W_e(s)\cdot \frac{1}{s^{k+1}} = \lim_{s\to 0} W_e(s)\cdot \frac{1}{s^k} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{N_{W_e}(s)}{D_{W_e}(s)\, s^k}$$

$W_e(s)$ DEVE AVERE K ZERI IN $s=0$, O UNO ZERO IN $s=0$ DI MOLTEPLICITÀ K



$$e(s) = K_d U - y = K_d U - \left(\frac{F(s)}{1+F(s)}\cdot K_d U\right) = \frac{K_d U + \cancel{K_d U F(s)} - \cancel{K_d U F(s)}}{1+F(s)}$$

$$= \frac{K_d}{1+F(s)}\cdot U \qquad e(s) = \frac{K_d}{1+F(s)}\cdot U(s) \qquad F(s) = \frac{N_F(s)}{D_F(s)}$$

$$W_e(s) = \frac{e(s)}{U(s)} = \frac{K_d}{1+F(s)} = \frac{K_d}{1+\frac{N_F(s)}{D_F(s)}} = \frac{K_d\cdot D_F(s)}{D_F(s)+N_F(s)}$$

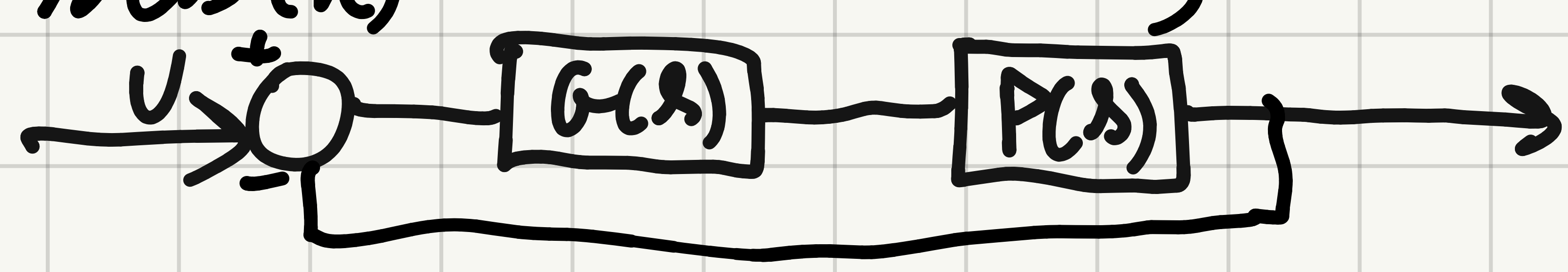
AL NUMERATORE ABBIAMO IL DENOMINATORE DELLA CATENA DIRETTA

$\Rightarrow$ $W_e(s)$ HA K ZERI IN $s=0$ $\Longleftrightarrow$ $F(s)$ HA K POLI IN $s=0$ (CONDIZIONE DI TIPO). AD ESEMPIO, SE $P(s)=\frac{1}{s(s+5)}$, SE VOGLIAMO UN SISTEMA DI TIPO DUE OCCORRE CHE LA

F(s) ABBIA UN POLO IN $s=0$ DI MOLTEPLICITÀ DUE.

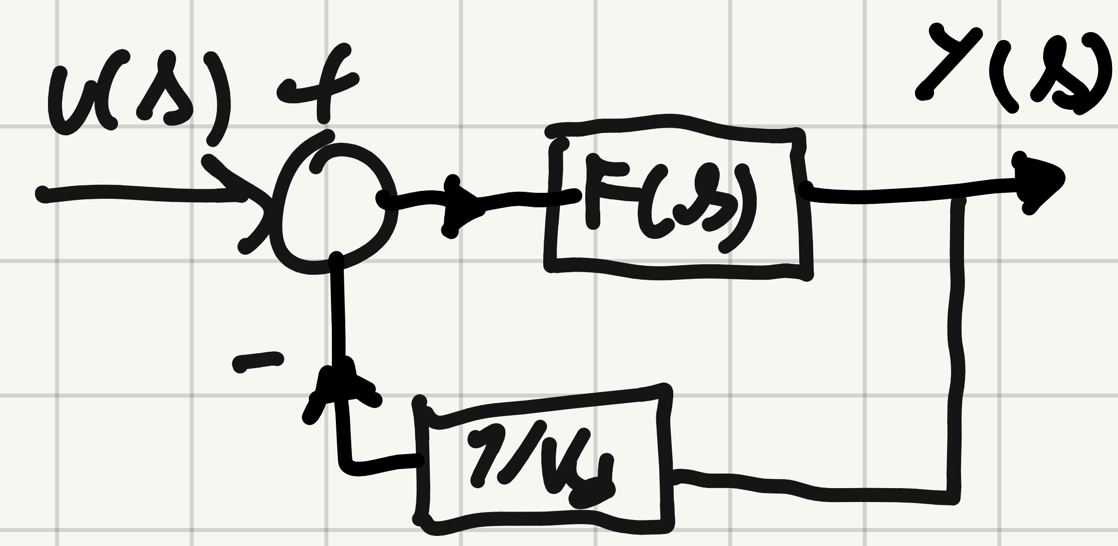
$$F(s) = G(s)\cdot P(s) = G(s)\cdot \frac{1}{s(s+k)} \Rightarrow G(s) = \frac{K_G}{s}$$

$$\Rightarrow F(s) = K_G \cdot \frac{1}{s^2(s+5)}$$



$$W(s) = K_d \cdot \frac{F(s)}{1+F(s)} = \frac{K_d \cdot F(s)}{1 + \frac{K_d F(s)}{K_d}}.$$

DEFINIAMO L'ERRORE NORMALIZZATO $\tilde{e}(s) = U(s) - \frac{Y(s)}{K_d}$



$$W_e(s) = K_d - W(s) = K_d - \frac{F(s)}{\frac{1+F(s)}{K_d}} = \frac{K_d + F(s) - F(s)}{1 + \frac{F(s)}{K_d}} = \frac{F(s)}{1 + \frac{K_d}{F(s)}}.$$

CALCOLIAMO L'ERRORE A REGIME PERMANENTE

IN UN SISTEMA DI TIPO K PER UN INGRESSO DI GRADO K:

$$u(t) = \frac{t^k}{k!}, \quad \tilde{e}(t) = C_{ek} = \tilde{e}_k$$

1) SISTEMI DI TIPO 0 $\rightarrow W_e(s)$ NON HA ZERI IN $s=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ F(s) NON HA POLI PER $s=0$

$$\tilde{e}_0 = \lim_{s\to 0} W_e(s) = \lim_{s\to 0} \frac{K_d}{1+\frac{F(s)}{K_d}} = \frac{K_d}{1+\frac{K_F}{K_d}} = \frac{K_d^2}{K_d + K_F}$$

$$F(s) = G(s)\cdot P(s) \rightarrow K_F = K_G \cdot K_P$$

2) $\tilde{e}_k,\ k \geq 1 \Rightarrow F(s) = \frac{\bar{F}(s)}{s^k}$

$$\tilde{e}_k = C_{e,k} = \lim_{s\to 0} \frac{W_e(s)}{s^k} = \lim_{s\to 0} \frac{K_d}{1 + \frac{F(s)}{K_d}} \cdot \frac{1}{s^k} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{K_d}{1+\frac{\tilde{F}(s)}{K_d \cdot \tilde{F}(s)}} \cdot \frac{1}{s^k} = \lim_{s\to 0} \frac{K_d \cancel{s^k}}{K_d s^k + F(s)} \cdot \frac{1}{\cancel{s^k}} = \frac{K_d^2}{K_F}$$

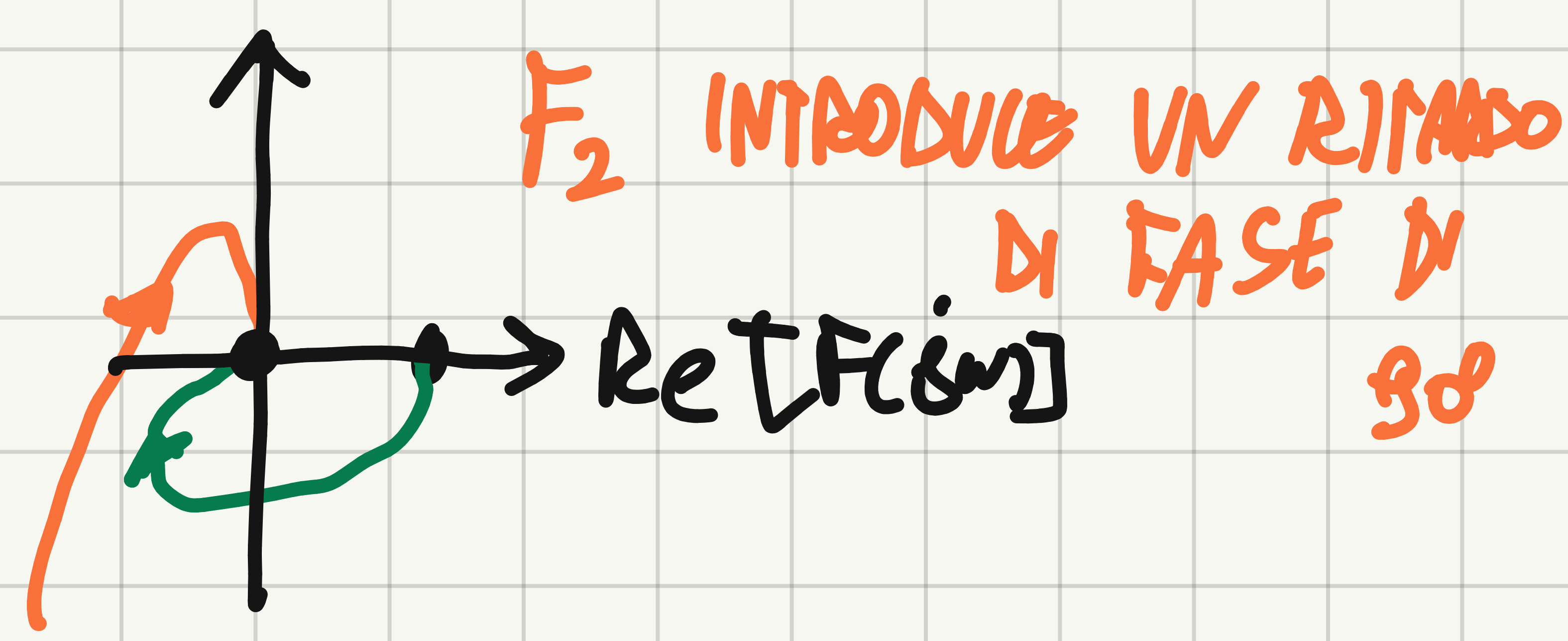
IN SINTESI:

- $\tilde{e} = \dfrac{K_d^2}{K_d + K_G \cdot K_p}$ PER SISTEMI DI TIPO 0
- $\tilde{e} = \dfrac{K_d^2}{K_G \cdot K_p}$ PER SISTEMI DI TIPO $K \geq 1$

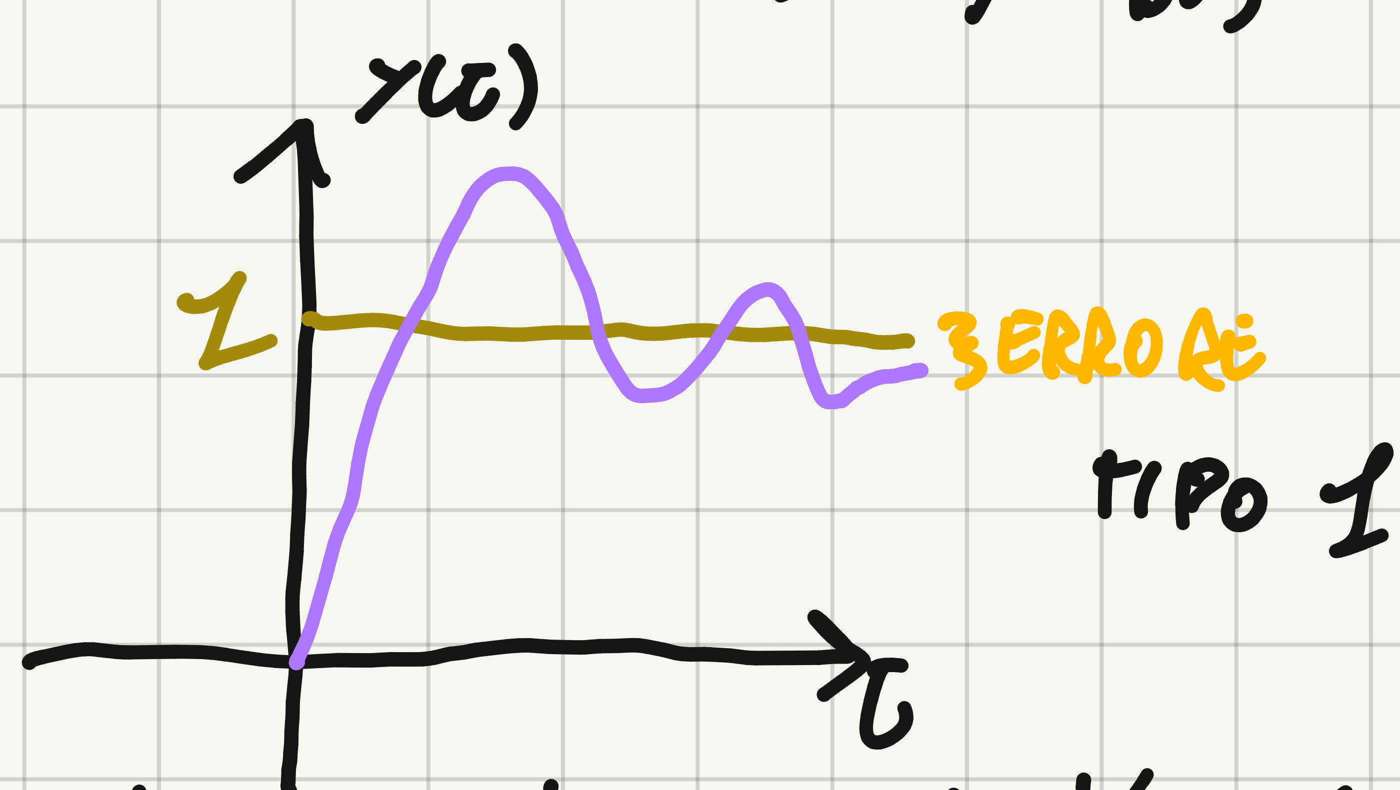
SI NOTI CHE AUMENTARE IL TIPO, OLTRE A MIGLIORARE IL REGIME, PEGGIORA LA STABILITÀ. VEDIAMO UN ESEMPIO:

$$F_1(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)}$$

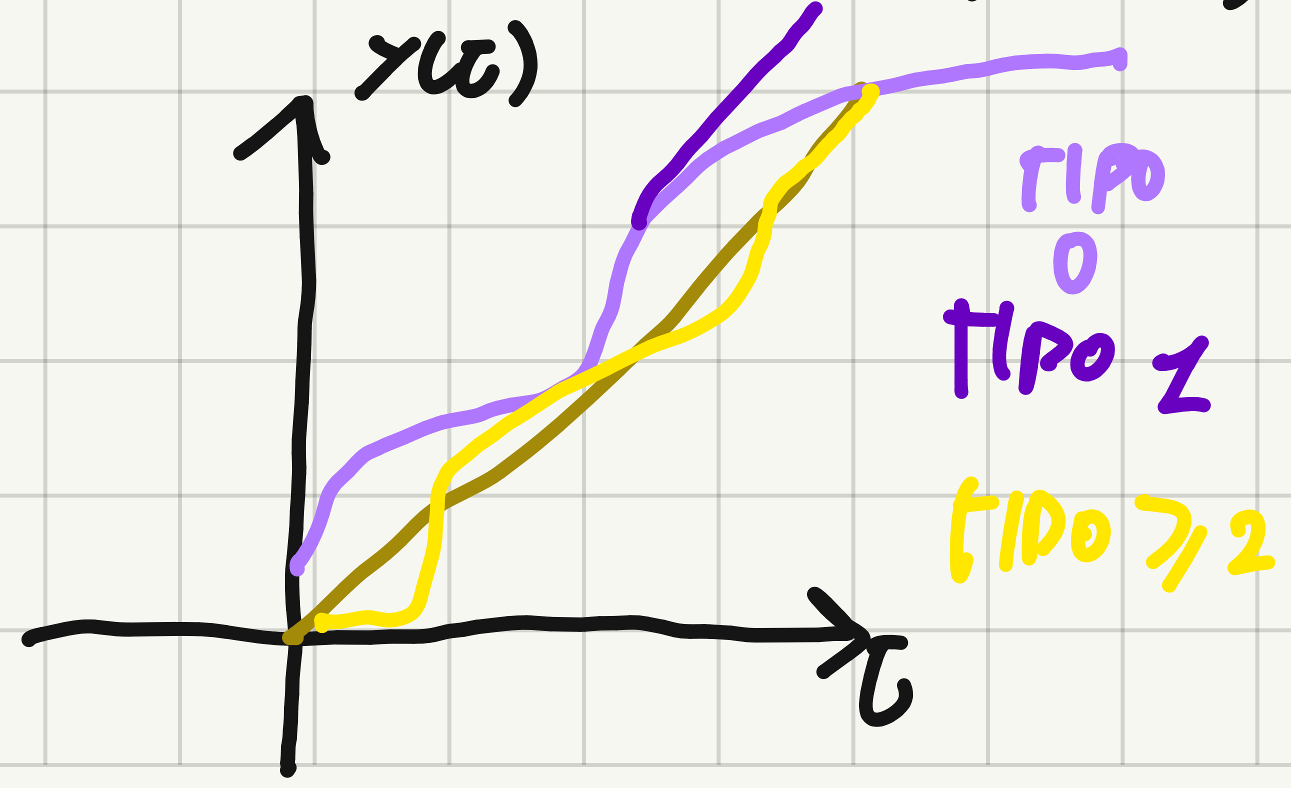
$$F_2(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+2)}$$



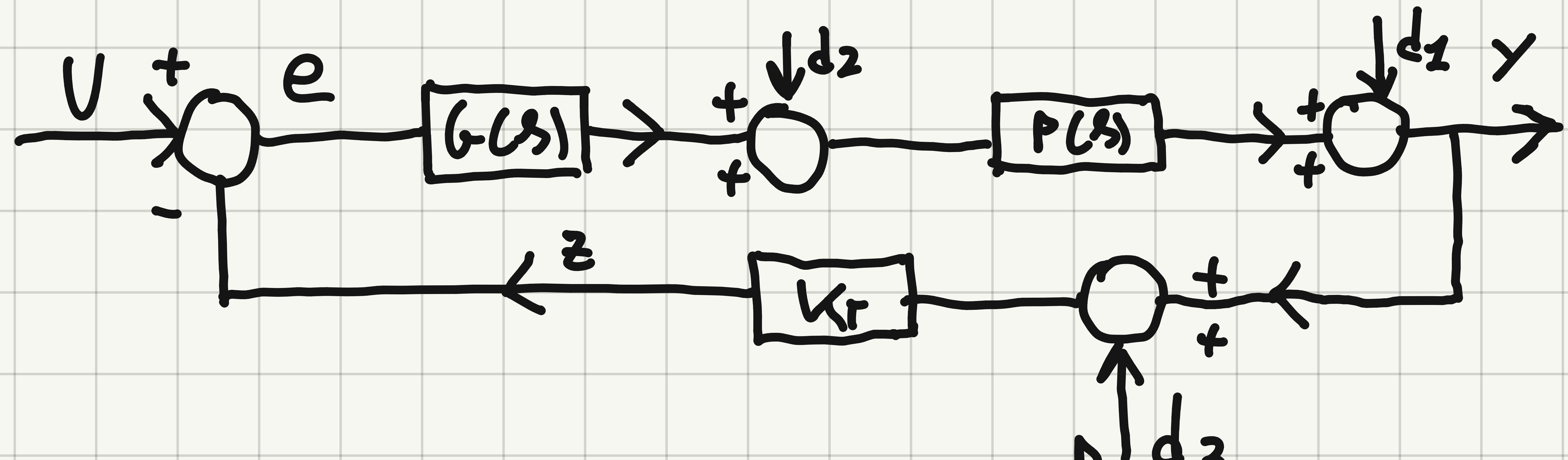
$K_d = 1$; $U(t) = \delta_{-1}(t)$; $Y_{DES}(t) = \delta_{-1}(t)$



$K_d = 1$; $M(t) = t \cdot \delta_{-1}(t)$; $Y_{DES}(t) = U(t)$



RISPOSTA A REGIME PERMANENTE PER DISTURBI COSTANTI $d(t)=\delta_{-1}(t)$



$y(t)=y_U(t)+y_{d_1}(t)+y_{d_2}(t)+y_{d_3}(t)$. PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

$y_U(t): \begin{cases} U(t)\neq 0 \\ d_1(t)=d_2(t)=d_3(t)=0 \end{cases}$

$y_{d_i}(t): \begin{cases} d_i(t)\neq 0 \\ U(t)=d_j(t)=0 \quad j\neq i \end{cases}$

$$Y(s)=Y_U(s)+Y_{d_1}(s)+Y_{d_2}(s)+Y_{d_3}(s)=$$

$$=W_U(s)\cdot U(s)+W_{d_1}(s)\cdot d_1(s)+W_{d_2}(s)\cdot d_2(s)+W_{d_3}(s)\cdot d_3(s)$$

$d_1(t)=d_2(t)=d_3(t)=\delta_{-1}(t)$

$$\tilde{y}(t)=\tilde{y}_U(t)+\tilde{y}_{d_1}(t)+\tilde{y}_{d_2}(t)+\tilde{y}_{d_3}(t)$$

$$\tilde{y}_{d_i}(t)=\lim_{t\to+\infty} y_{d_i}(t)=\lim_{s\to 0} s\cdot Y_{d_i}(s)=\lim_{s\to 0} s\cdot W_{d_i}(s)\cdot d_i(s)$$

$$=\lim_{s\to 0} s\cdot W_{d_i}(s)\cdot\frac{1}{s}=W_{d_i}(s)\Big|_{s=0}$$

1) $$\tilde{y}_{d_1}(t)=W_{d_1}(s)\Big|_{s=0}=\frac{1}{1+K_r\cdot G(s)\cdot P(s)\big|_{s=0}}=$$

$$G(s)=\frac{N_G(s)}{D_G(s)} \qquad P(s)=\frac{N_P(s)}{D_P(s)} \qquad F(s)=\frac{N_F(s)}{D_F(s)}=\frac{N_G(s)N_P(s)}{D_G(s)D_P(s)}$$

$$=\frac{D_F(s)}{D_F(s)+K_r N_F(s)}$$

SI INTRODUCE IL CONCETTO DI ASTATISMO: IL SISTEMA IN CATENA CHIUSA È ASTATICO RISPETTO AL DISTURBO $d_i(t)$ SE $\tilde{y}_{d_i}(t)=0$. IN QUESTO CASO, SI HA ASTATISMO SE $F(s)$ HA ALMENO UN POLO IN $s=0$

$$\frac{D_F(s)}{D_F(s)+K_T N_P(s)}=0 \iff \exists\ s=0 \text{ IN } D_F(s) \Rightarrow F(s)=\frac{1}{s^k}\cdot\ldots,\ K\geq 1$$

SE IL SISTEMA NON È ASTATICO, $\tilde{y}_{d_1}(t)=W_{d_1}(s)=$

$$=\left.\frac{1}{1+K_T F(s)}\right|_{s=0}=\frac{1}{1+K_T K_F}=\frac{1}{1+K_T K_G K_P}$$

2. $\tilde{y}_{d_2}(t)=W_{d_2}(s)\big|_{s=0}=\left.\frac{P(s)}{1+K_T\cdot G(s)\cdot P(s)}\right|_{s=0}=$

$$=\frac{\frac{N_P(s)}{\cancel{D_P(s)}}\cdot D_G(s)\cdot\cancel{D_P(s)}}{D_G(s)D_P(s)+K_T N_G(s)N_P(s)}=\frac{N_P(s)\cdot D_G(s)}{D_G(s)D_P(s)+K_T N_G(s)N_P(s)}$$

CONDIZIONE DI ASTATISMO: $\tilde{y}_{d_2}(t)=0$

$\Longrightarrow N_P(s)\cdot D_G(s)=0 \iff G(s)$ HA ALMENO UN POLO IN $s=0$. $N_P(s)=0$ È INAMMISSIBILE POICHÈ CADREBBE LA CONDIZIONE DI CONTROLLO PROPORZIONALE.

NEL CASO NON CI SIA ASTATISMO, $\tilde{y}_{d_2}(t)\neq 0$

$$\Longrightarrow \tilde{y}_{d_2}(t)=\left.\frac{P(s)}{1+K_T\cdot G(s)\cdot P(s)}\right|_{s=0}$$

- P(s) NON HA POLI IN $s=0 \Rightarrow \tilde{Y}_{d_2}(t) = \dfrac{K_P}{1+K_T K_G K_P}$
- P(s) HA ALMENO UN POLO IN $s=0$

$$\tilde{Y}_{d_2}(t) = \frac{\bar{P}(s)\cdot\frac{1}{s^K}}{1+K_T\cdot K_G\cdot\bar{P}(s)\cdot\frac{1}{s^K}} = \frac{\bar{P}(s)}{s^K+K_T K_G \bar{P}(s)}\Bigg|_{s=0} = \frac{1}{K_T K_G}$$

E RIDUCIAMO L'ERRORE AUMENTANDO K_G

③ $$\tilde{Y}_{d_3}(t) = W_{d_3}(s)\Big|_{s=0} = \frac{-K_T G(s) P(s)}{1+K_T G(s) P(s)}\Bigg|_{s=0} =$$

$$= \frac{-K_T\cdot F(s)}{1+K_T F(s)}\Bigg|_{s=0} = -K_T W_U(s)\Big|_{s=0}$$

$$\tilde{Y}_{d_3}(t) = -K_T\cdot\frac{N_F(s)}{D_F(s)+K_T N_F(s)}\Bigg|_{s=0}$$

$$\tilde{Y}_U(t) = C_0\cdot\frac{t^K}{K!} + C_1\frac{t^{K-1}}{(K-1)!} + \dots + C_K \qquad C_0 = W_U(0) = 0$$

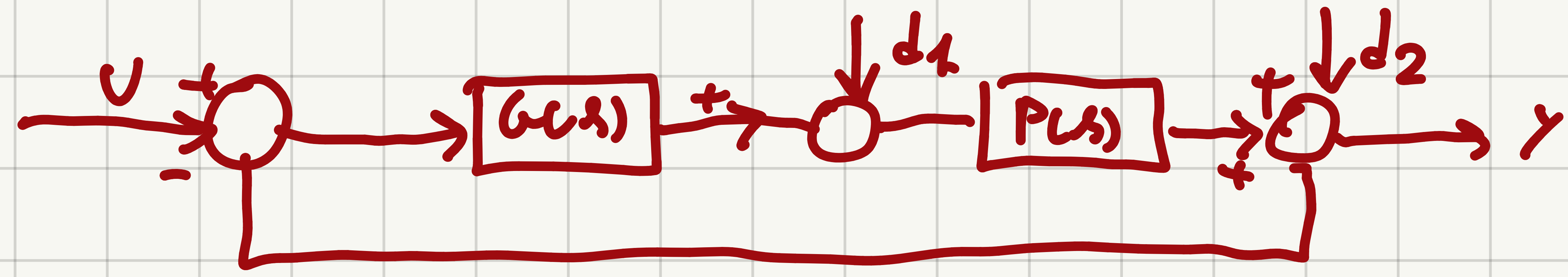
$\Rightarrow \nexists$ ZERI IN $s=0$ PER $F(s) \Rightarrow$ IL DISTURBO

d_3 NON PUÒ MAI ESSERE ASTATICO.

PER NON ASTATISMO SI DISTINGUONO DUE CASI:

- F(s) NON HA POLI IN $s=0 \Rightarrow \tilde{Y}_{d_3}(t) = \dfrac{-K_T K_F}{1+K_T K_F}$
- F(s) HA ALMENO UN POLO IN $s=0$

$$\tilde{Y}_{d_3}(t) = \frac{-K_T F(s)}{1+K_T F(s)}\Bigg|_{s=0} = \frac{-K_T\cdot\frac{F(s)}{s^K}}{1+K_T\frac{F(s)}{s^K}}\Bigg|_{s=0} = -1$$

ESEMPIO: 

$$P(s) = \frac{1}{s(1+0,1s)} \qquad G(s) = 20 \cdot \frac{1+10s}{1+5s} \implies K_G = 20$$

$$u(t) = (3t+0,5)\delta_{-1}(t), \quad d_1 = \delta_{-1}(t), \quad d_2 = -\delta_{-1}(t)$$

$$\tilde{y}(t) = \tilde{y}_u(t) + \tilde{y}_{d_1}(t) + \tilde{y}_{d_2}(t) \qquad \tilde{y}(t)\ ?$$

$$u_1(t) = t\cdot\delta_{-1}(t), \quad u_2(t) = \delta_{-1}(t)$$

$$\implies u(t) = 3u_1(t) + 0,5u_2(t) \rightarrow 3y_1(t) + 0,5\cdot y_2(t) = y_u(t)$$

$$\tilde{y}_u(t) = 3\tilde{y}_1(t) + 0,5\,\tilde{y}_2(t)$$

$$\tilde{y}_2(t) = \delta_{-1}(t) \qquad \tilde{e}(t) = K_d u(t) - \tilde{y}(t)$$

$$\tilde{y}(t) = K_d u(t) - \tilde{e}(t) \qquad \tilde{y}_r(t) = u(t) - \tilde{e}(t)$$

$$\delta_{-1}(t) - 0 = \delta_{-1}(t)$$

$$\tilde{y}_1(t) = K_d u(t) - \tilde{e}(t) = u(t) - \frac{K_d^2}{K_F} = \left(t - \frac{1}{20}\right)\delta_{-1}(t)$$

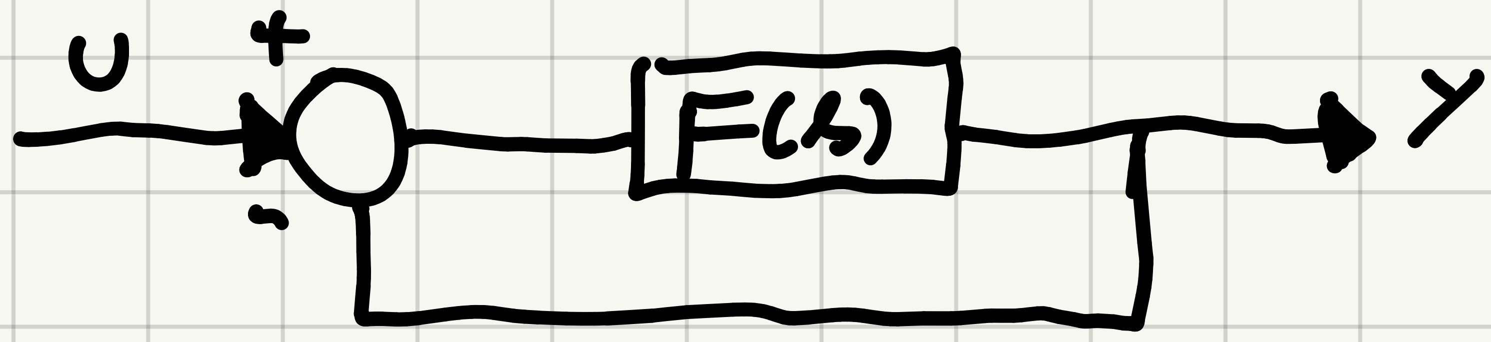
$$\tilde{y}_u(t) = \Big[3\underbrace{\left(t - \frac{1}{20}\right)}_{\tilde{e}_1} + \underbrace{0,5}_{\tilde{e}=0}\Big]\delta_{-1}(t)$$

$\tilde{y}_{d_1}(t) = 0$ (C'È UN POLO IN $s=0$ IN $P(s)$, CIOÈ UN POLO IN $s=0$ A MONTE DI d_1)

$$\tilde{y}_{d_2}(t) = \frac{1}{K_G} = \frac{1}{20}$$

$$y(t) = \left[3\left(t - \frac{1}{20}\right) + 0,5\right]\delta_{-1}(t) + \frac{1}{20}\delta_{-1}(t)$$

RISPOSTA A REGIME PERMANENTE PER DISTURBI SINUSOIDALI $d(t) = \sin(\tilde{\omega} t)$



$$u(t) = \sin(\tilde{\omega} t) \Rightarrow \tilde{y}_u(t) = |W(i\tilde{\omega})| \cdot \sin(\tilde{\omega} t + \angle W(i\tilde{\omega}))$$

$$e(t) = K_d\, u(t) - y(t) \rightarrow e(s) = [K_d - W(s)]\, u(s) = W_e(s)\, u(s)$$

$$\tilde{e}(t) = |W(i\tilde{\omega})| \cdot \sin(\tilde{\omega} t + \angle W(i\tilde{\omega}))$$

$$\tilde{y}_d(t) = |W_d(i\tilde{\omega})| \cdot \sin(\tilde{\omega} t + \angle W_d(i\tilde{\omega}))$$

SI STUDIA SOLO $\tilde{e}(t)$, ANALOGO SARÀ PER $\tilde{y}_d(t)$.

NON POTENDO LAVORARE SUL TERMINE PERIODICO, CI MUOVIAMO AL FINE DI MINIMIZZARE $|W_e(i\tilde{\omega})|$

$$\tilde{e}(t) = |W(i\tilde{\omega})| \cdot \sin(\tilde{\omega} t + \angle W(i\tilde{\omega}))$$

$$W_e(s) = \frac{K_d^2}{K_d + F(s)} \qquad W_e(i\omega) = \frac{K_d^2}{K_d + F(i\omega)}$$

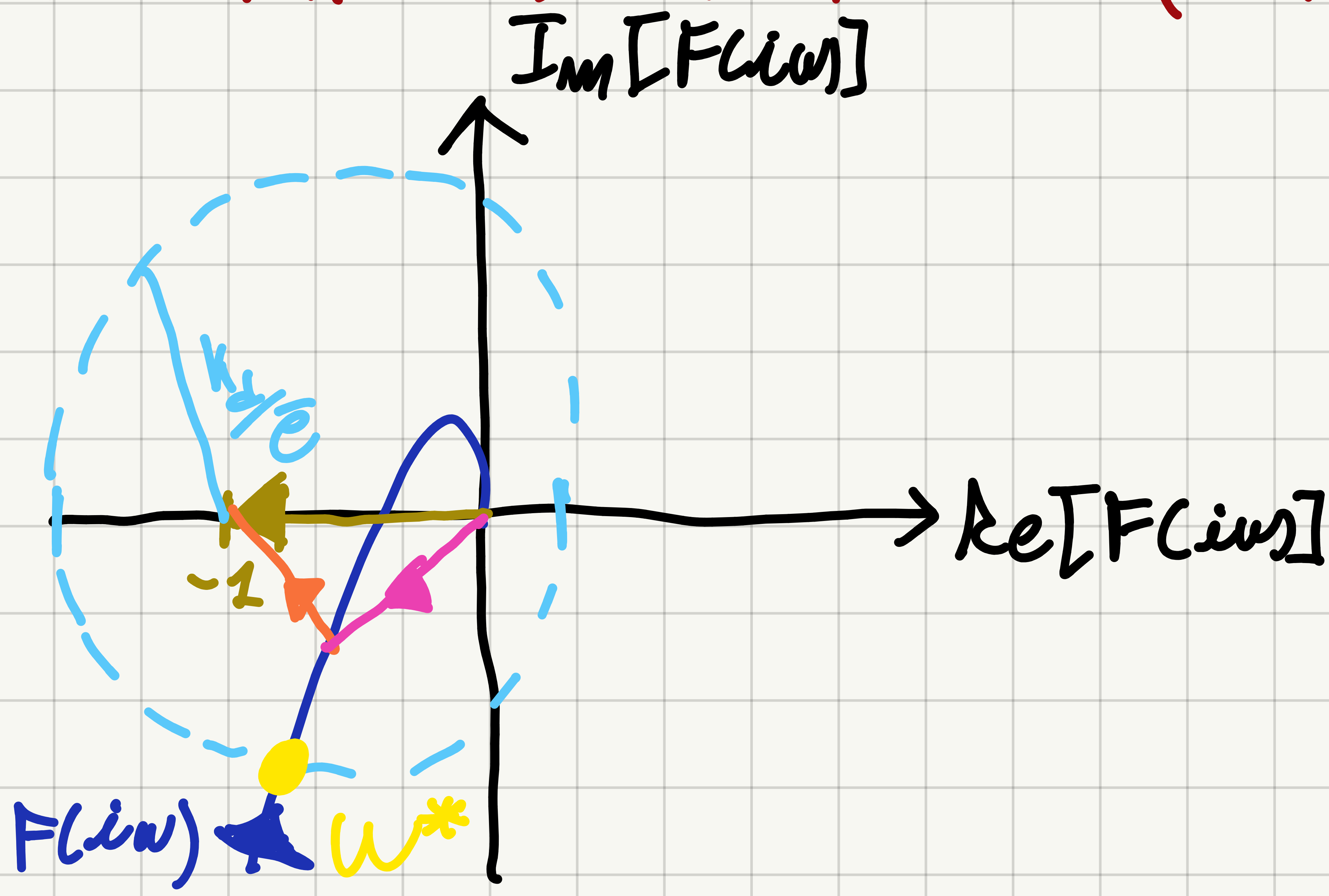
$$|W_e(i\tilde{\omega})| = \left| \frac{K_d^2}{K_d + F(i\tilde{\omega})} \right| = \left| \frac{K_d}{1 + \frac{F(i\tilde{\omega})}{K_d}} \right|$$

$$\Rightarrow |\tilde{e}(t)| \leq |W_e(i\tilde{\omega})| = \left| \frac{K_d^2}{K_d + F(i\omega)} \right| \leq \bar{e}$$

$$\frac{1}{\left| 1 + \frac{F(i\tilde{\omega})}{K_d} \right|} \leq \frac{\bar{e}}{K_d},$$ DOVE $\bar{e}$ È UN VALORE PREFISSATO.

$$\Rightarrow \left|1+\frac{F(i\tilde{\omega})}{K_d}\right| \geq \frac{K_d}{\bar{e}}$$

INTERPRETAZIONE GRAFICA: DIAGRAMMA DI NYQUIST



IN UN GENERICO PUNTO, $(-1,0) + \vec{x} = \vec{F}(i\omega)$

$\Rightarrow \vec{x} = 1 + F(i\omega)$

CIRCONFERENZA DI RAGGIO $\frac{K_d}{\bar{e}}$. LA CONDIZIONE È VERIFICATA ALL'ESTERNO DELLA CIRCONFERENZA

$\Rightarrow$ PER $F(i\tilde{\omega})$, QUANDO $\omega \leq \omega^*$

$|\tilde{e}(t)| \leq \bar{e}$ PER $\omega \leq \omega^*$, $u(t) = \sin(\tilde{\omega} t)$

$|\tilde{y}_d(t)| \leq \bar{y}_d$ PER $\omega \leq \omega^*$, $d(t) = \sin(\tilde{\omega} t)$

SI PUÒ ANNULLARE L'ERRORE $\tilde{e}(t)$ PER UN INGRESSO $u(t) = \sin(\tilde{\omega} t)$ PONENDO CHE IN $F(s)$ SIA PRESENTE $\frac{1}{s^2+\tilde{\omega}^2}$

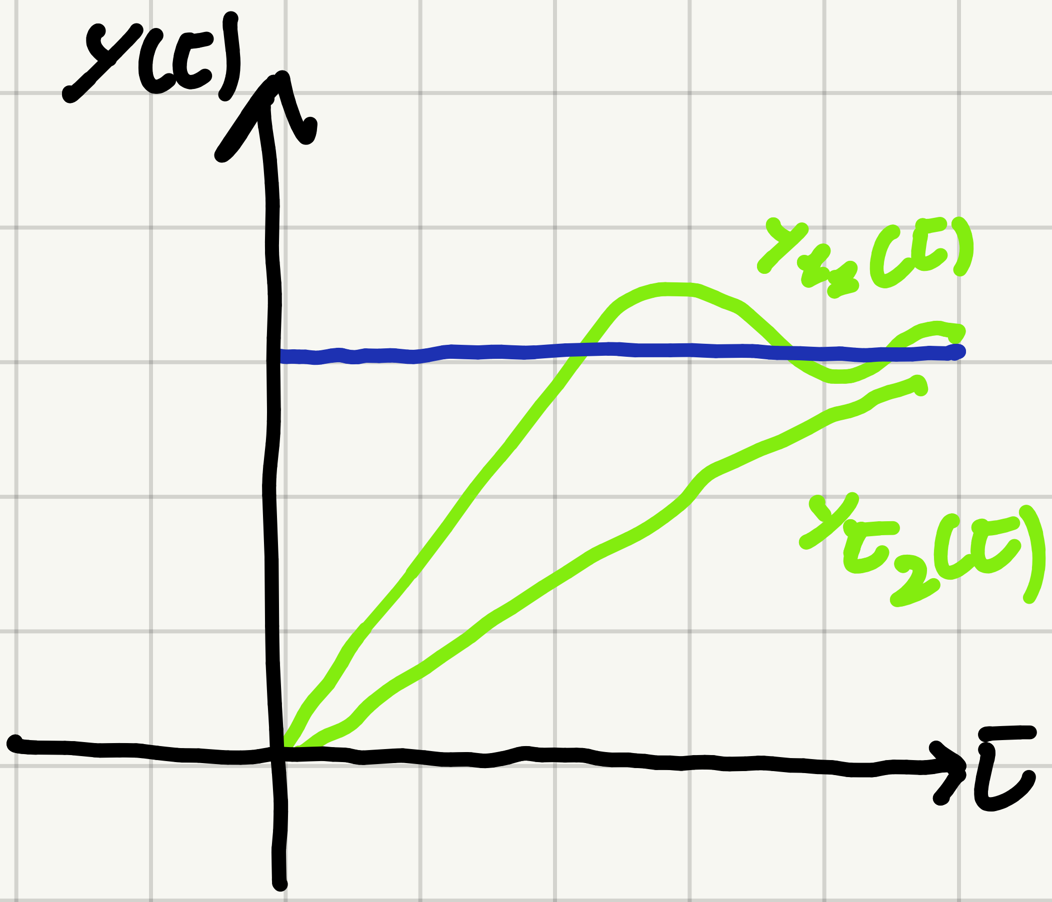
$\Rightarrow W_e(s) = s^2 + \tilde{\omega}^2 \qquad W_e(i\tilde{\omega}) = -\tilde{\omega}^2 + \tilde{\omega}^2 = 0$ ✓

SI NOTI CHE QUESTO VALE PER UNO SPECIFICO VALORE

$\tilde{\omega}$, RARAMENTE NOTO A PRIORI. È QUINDI PREFERIBILE, IN UN INTERVALLO ACCETTABILE, PORRE $|\tilde{e}(t)| \le \bar{e}$ ATTENUANDO IL DISTURBO E NON ELIMINANDOLO.

RISPOSTA TRANSITORIA

DEFINITA COME $y_t(t) = y(t) - \tilde{y}(t)$ (SI RICORDI CHE LA RISPOSTA A REGIME PERMANENTE È UNA CONDIZIONE ASINTOTICA), SE ESISTE UNA RISPOSTA A REGIME PERMANENTE. DIPENDE DA $u(t)$ E $x(t_0)$.



INGRESSO A GRADINO

LO SI PUÒ DEFINIRE PONENDO: $\begin{cases} u(t) = \delta_{-1}(t) \\ x(t_0) = 0 \end{cases}$. NEL DOMINIO s, $Y_t(s) = Y(s) - \mathcal{L}[\tilde{y}(t)]$

$$\tilde{y}(t) = C_0 = W(0) \Rightarrow Y_t(s) = Y(s) - \frac{W(0)}{s} =$$

$$= W(s) \cdot U(s) - \frac{W(0)}{s} = \frac{W(s)}{s} - \frac{W(0)}{s}.$$

$$Y_t(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{s - p_i} + \cancel{\frac{R_0}{s}} - \cancel{\frac{W(0)}{s}} \qquad R_0 = W(0)$$

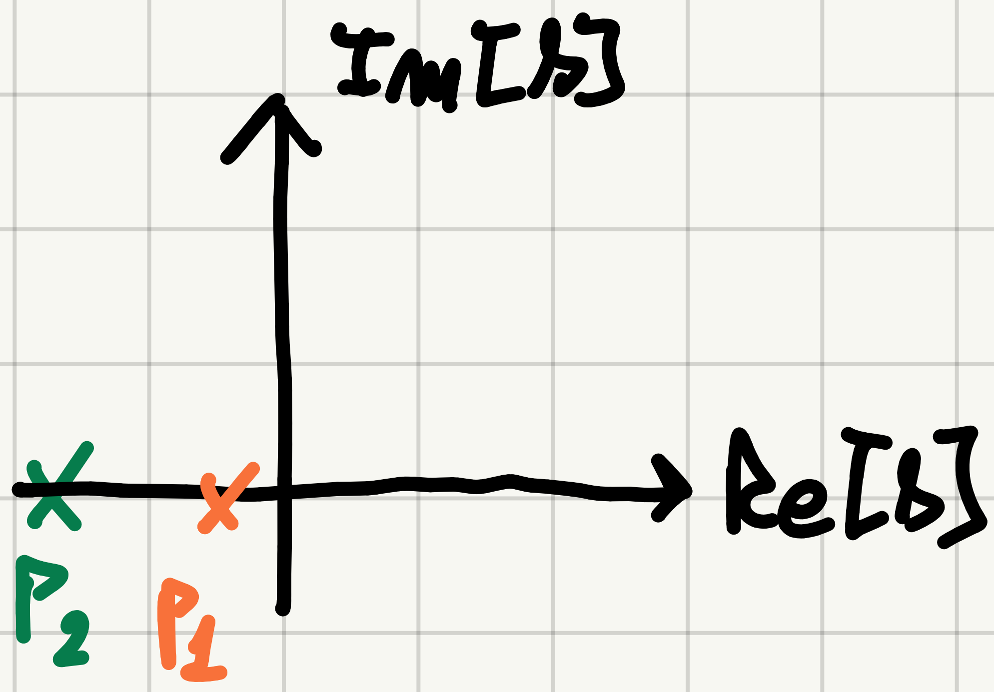
$$\Rightarrow Y_t(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{s - p_i}, \text{ DOVE } R_i = \lim_{s \to p_i} (s - p_i) \cdot \frac{W(s)}{s}$$

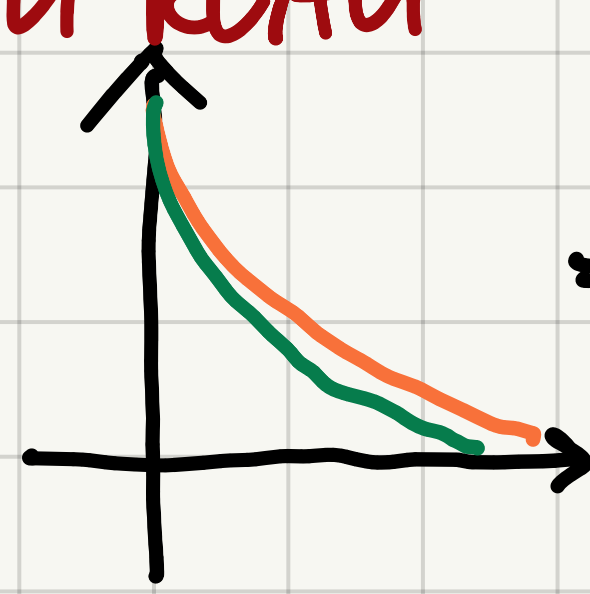
⇒ LA RISPOSTA TRANSITORIA DIPENDE FORTEMENTE DAI POLI DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO IN CATENA CHIUSA

⇒ $y_t(t) = \sum_{i=1}^{n} R_i \cdot e^{p_i t}$, DOVE: $e^{p_i t} \rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}}$

- $p_i \in \mathbb{R} \rightarrow$ ANDAMENTO APERIODICO
- $p_i \in \mathbb{C} \rightarrow$ ANDAMENTO PSEUDOPERIODICO $e^{-\xi \omega_n t} \cdot \cos(\sqrt{1-\xi_n^2}\,\omega_n t)$

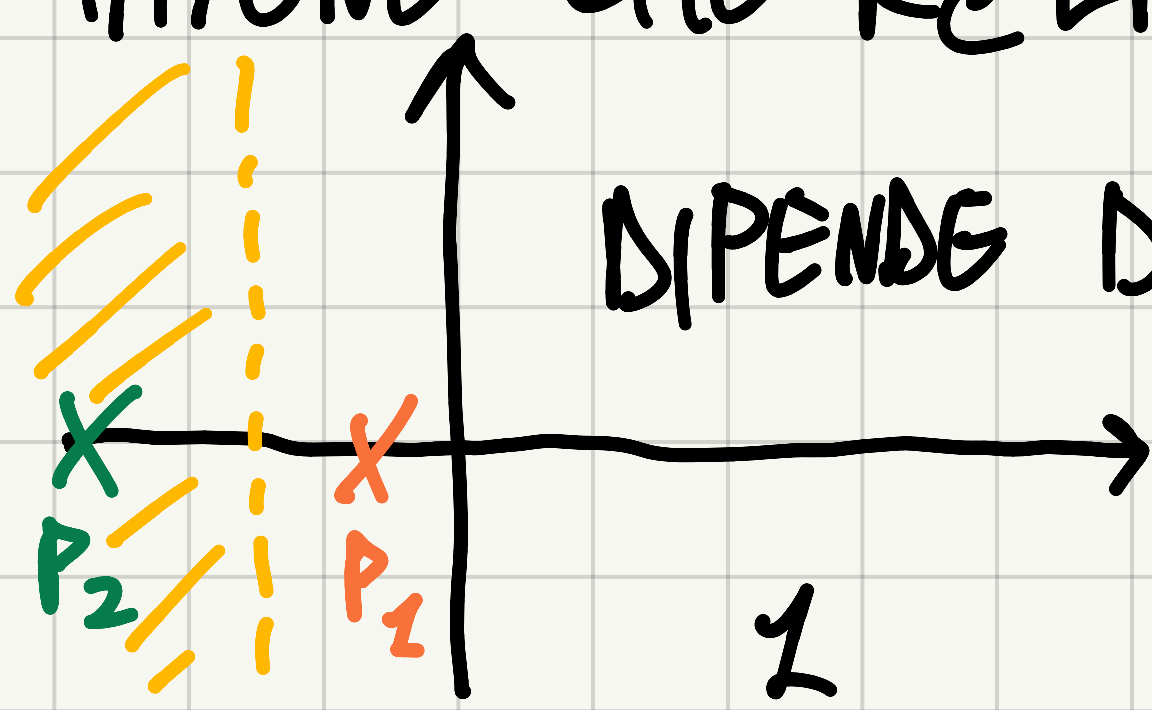
POLI REALI





⇒ L'ESPONENZIALE SI ESTINGUE PIÙ RAPIDAMENTE PER $p \rightarrow -\infty$

⇒ SI IMPONE CHE $Re[p_i] < K \;\; \forall p$, DOVE K

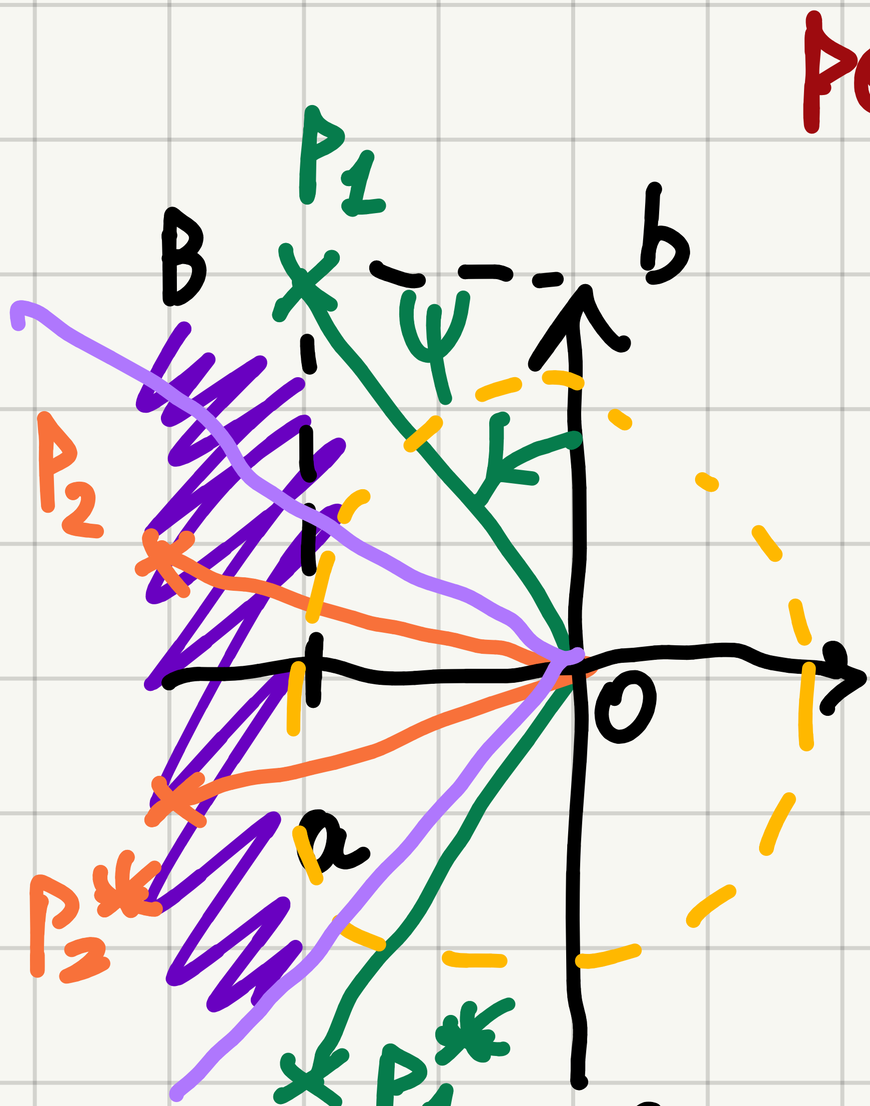


DIPENDE DALLA DINAMICA DI UN SISTEMA.

CHIAMIAMO $K = -\frac{1}{\tau_{max}}$

$|p_i| > |p_{min}| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|p_i|} < \frac{1}{|p_{min}|} = \tau_{max}$

POLI COMPLESSI CONIUGATI



COEFFICIENTE DI SMORZAMENTO $\xi = \sin\psi$

PULSAZIONE NATURALE $\omega_n = \overline{OB} = \sqrt{a^2+b^2}$

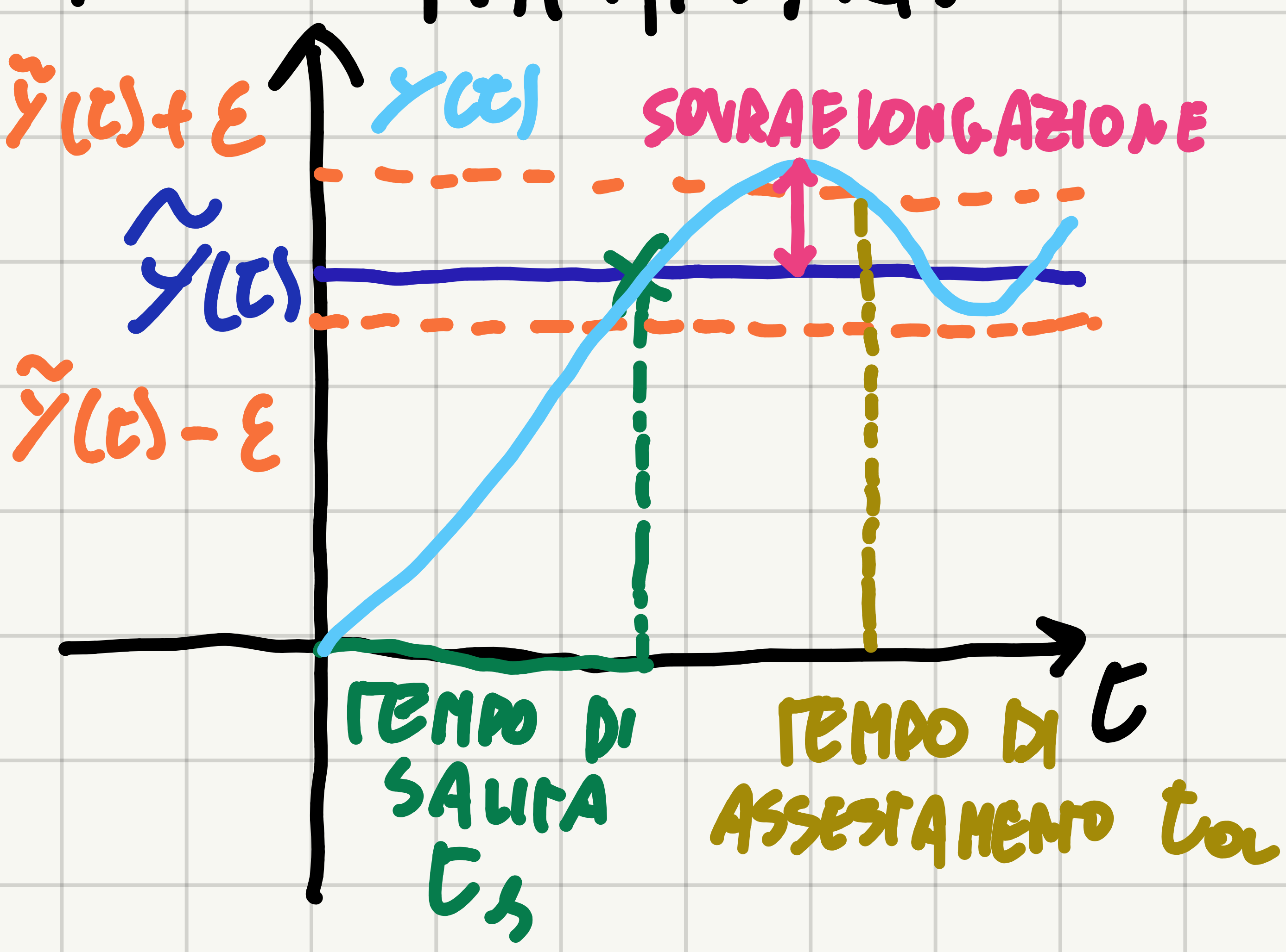
HA $\xi >$, A PARITÀ DI ω_n

⇒ SI IMPONGONO ξ E ω_n SUFFICIENTEMENTE ALTE. IN PARTICOLARE, $\omega_n \geq \omega^*$ E $\xi \geq \sin(\frac{\pi}{4}) \simeq 0,707$

REGIONE DI FUNZIONAMENTO

PARAMETRI GLOBALI NEL DOMINIO DEL TEMPO

In generale, il calcolo della risposta transitoria e l'imposizione di limiti non è banale e, dunque, si introducono nuovi parametri:

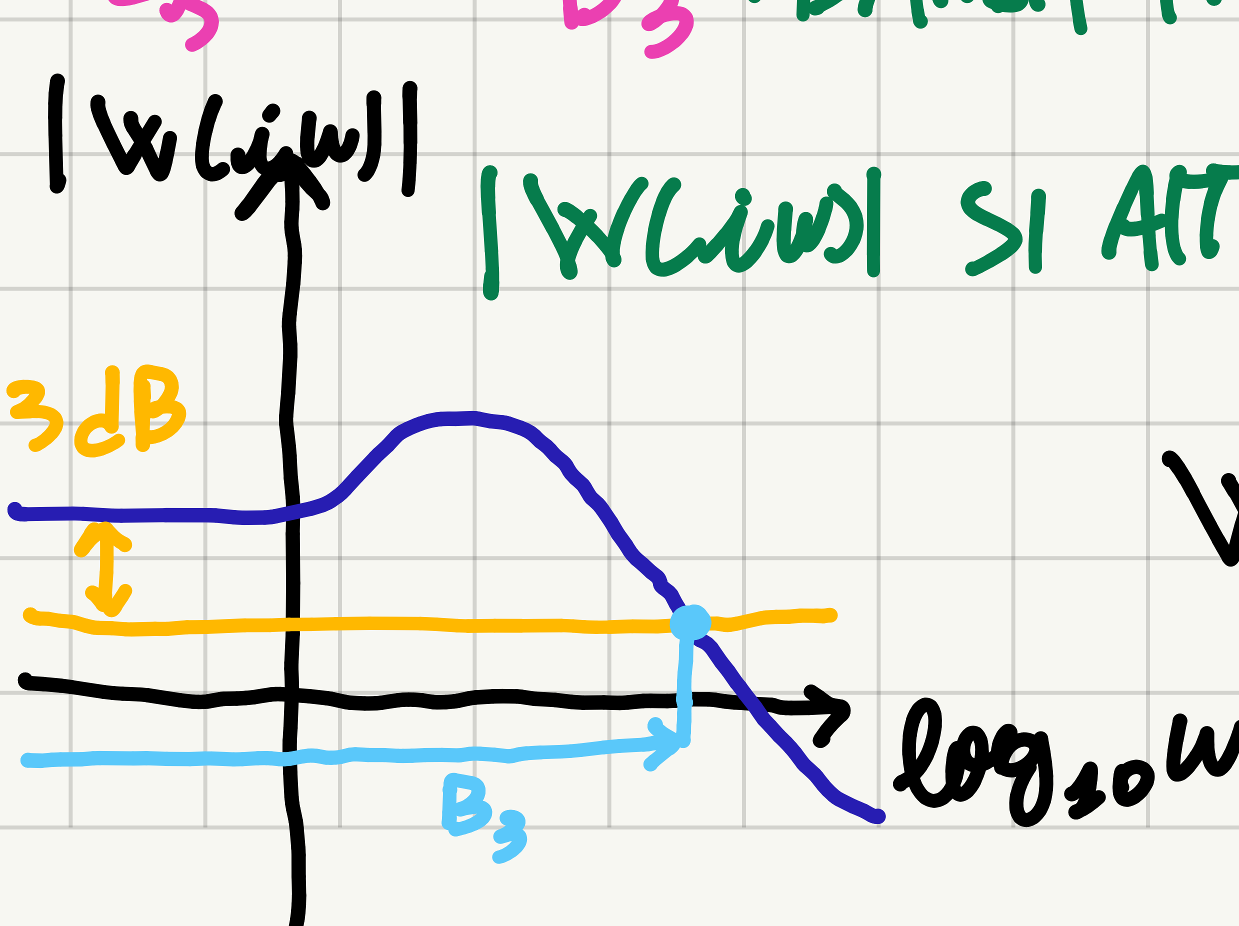


- t_s → tempo che $y(t)$ impiega per raggiungere, per la prima volta, lo stato di regime
- $\hat{s} = \dfrac{[y(t)]_{max} - \tilde{y}(t)}{\tilde{y}(t)}$
- t_a → tempo a partire dal quale $y(t)$ si discosta da $\tilde{y}(t)$ per un massimo di ε: $\tilde{y}(t)-\varepsilon \le y(t) \le \tilde{y}(t)+\varepsilon$

Si accettano $t_s, \hat{s}, t_a$ quanto più piccoli possibile e t_s e $\hat{s}$ dipendono dalla dinamica del sistema.

Cerchiamo una corrispondenza dai parametri in catena chiusa nel tempo alla catena diretta passando per la catena chiusa in frequenza.

$t_s \to B_3$: banda passante, pulsazione per cui $|W(i\omega)|$ si attenua di 3dB rispetto $|W(i0)|$



$$W(i\omega) = \frac{F(i\omega)}{1+F(i\omega)}.$$

Se $F(i\omega)$ ha almeno un polo in $\omega=0$, $|W(i0)|=0$

$$W(i\omega)\big|_{\omega=0} = \frac{F(i0)}{1+F(i0)} = \frac{K_F}{1+K_F} \simeq 1.$$ EMPIRICAMENTE, SI VERIFICA CHE $B_3 \cdot t_s = K$. QUESTO PERCHÉ, PER UNA ELEVATA BANDA PASSANTE, SI HA UN INFERIORE TEMPO DI SALITA E SI AGISCE IN MODO CHE $B_3 >> 0$

$\hat{s} \rightarrow M_r$: MODULO ALLA RISONANZA, $M_r = \frac{|W(i\omega)|_{max}}{|W(i0)|}$.

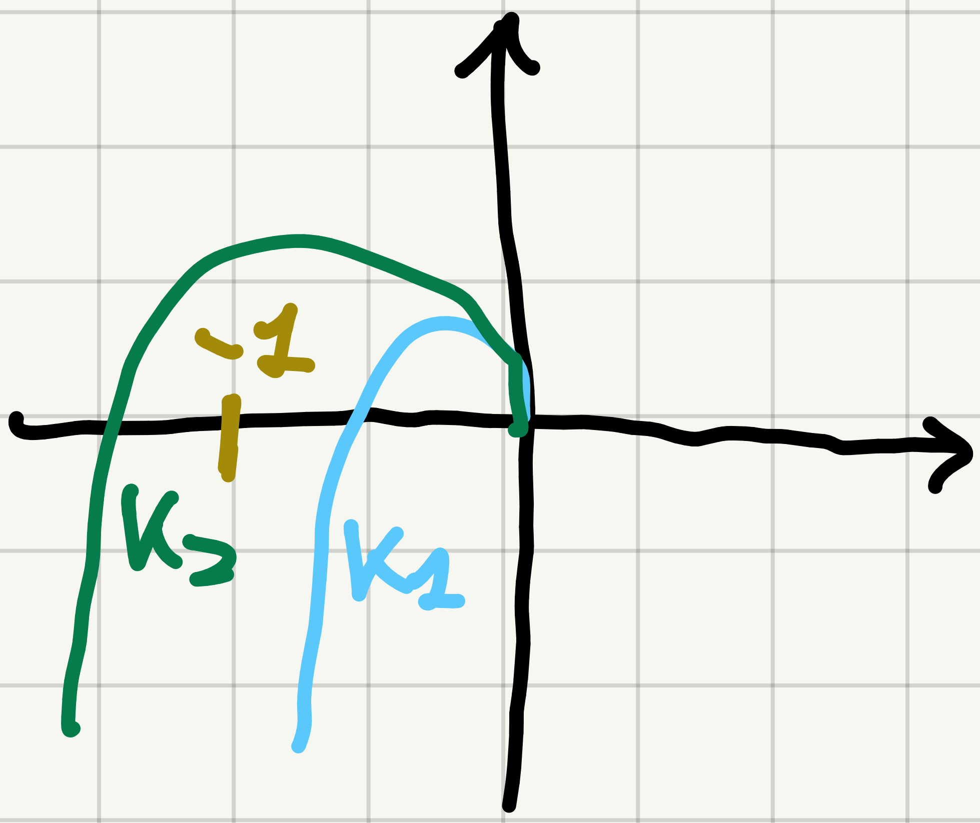
EMPIRICAMENTE, $\frac{1+\hat{s}}{M_r} = 0{,}85$. ALL'AUMENTARE DELLA SOVRAELONGAZIONE AUMENTA IL MODULO ALLA RISONANZA

CATENA CHIUSA NEL TEMPO	CATENA CHIUSA IN FREQUENZA	CATENA DIRETTA IN FREQUENZA
t_s	B_3	ω_t $\quad |F(i\omega_t)|=0$
$\hat{s}$	M_r	M_φ $\quad M_\varphi = 180° + \angle F(i\omega_t)$

SENSIBILITÀ ALLE VARIAZIONI PARAMETRICHE

STABILITÀ

ESEMPIO: $F(s) = \frac{K}{s(s+3)(s+5)}$



$\Rightarrow$ IL GUADAGNO K INFLUENZA LA STABILITÀ. MARGINE DI GUADAGNO E DI FASE DEFINISCONO I LIMITI DI ACCETTABILITÀ DI K