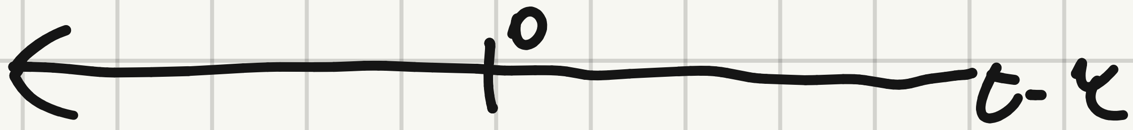
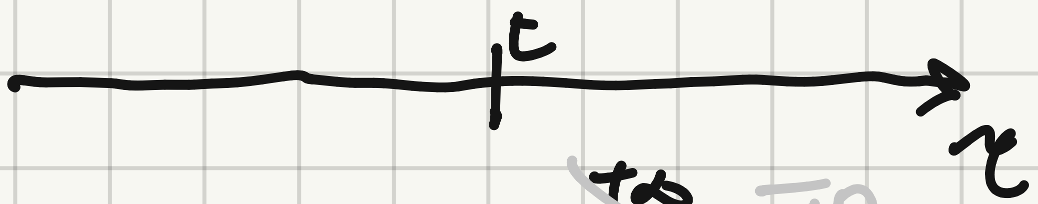
SOLUZIONE DELLA RISPOSTA FORZATA

PROPOSIZIONE: LA RISPOSTA FORZATA DI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO AD UN INGRESSO $u(t)$ È DATO DALL'INTEGRALE DI DUHAMEL $y_f(t)=\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\, y_\delta(t-\tau)\,d\tau$

INTERPRETAZIONE: $y(t)=(u*y_\delta)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\, y_\delta(t-\tau)\,d\tau$

$$\Rightarrow y(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ C(t)\cdot\delta_{-1}(t)+A_0\,\delta(t) & t\geq 0\end{cases}$$





$$=\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\cdot y_\delta(t-\tau)\,d\tau+\underbrace{\cancel{\int_{t}^{+\infty} u(\tau)\, y_\delta(t-\tau)\,d\tau}}_{=0}=\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\cdot y_\delta(t-\tau)\,d\tau$$

$$y(t)=(u*y_\delta)(t)=(y_\delta*u)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} y_\delta(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau$$

PERDITA DI MEMORIA: $t\to\tau \Rightarrow y(t)\to 0$, CIOÈ SISTEMI CON MODI NATURALI STABILI

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\, y_\delta(t-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} y_\delta(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau=\int_{0}^{+\infty} y_\delta(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau$$

PER DOMINIO DI MEMORIA

NOI SIAMO INTERESSATI A CALCOLARE $y_\delta(t)\ \forall t\geq 0$ $(y_F(t)\to 0)$

$$y(t)=(y_\delta*u)(t)=\int_{0}^{+\infty} y_\delta(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau=\int_{t}^{+\infty} y_\delta(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau \quad t_0\in(-\infty,t)$$

$$=\int_{-\infty}^{t_0} u(\tau)\, y_\delta(t-\tau)\,d\tau+\int_{t_0}^{t} u(\tau)\, y_\delta(t-\tau)\,d\tau=y_\ell(t)+y_R(t)$$

$$y_f(t) = \int_{t_0}^{t} u(\tau)\, y_\delta(t-\tau)\, d\tau = \int_{t-t_0}^{0} u(t-\rho)\, y_\delta(\rho)(-d\rho) = \int_{t_0}^{t-t_0} u(t-\rho)\, y_\delta(\rho)\, d\rho$$

$$t_0=0 \implies y_f(t) = \int_{0}^{t} u(t-\rho)\, y_\delta(\rho)\, d\rho$$

ESERCIZIO: DETERMINARE L'USCITA FORZATA DEL SISTEMA

$$2y''(t)+6y'(t)+4y(t) = 3u(t)+u'(t) \quad \text{E} \quad u(t)=4\delta_{-1}(t)$$

$$P(\lambda)=0 \to 2\lambda^2+6\lambda+4=0 \qquad (\lambda+1)(\lambda+2)=0$$

$$\begin{cases} \lambda_1=-1 & \mu_1=1 \\ \lambda_2=-2 & \mu_2=1 \end{cases} \implies c(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}$$

$$c'(t) = -A_1e^{-t}-2A_2e^{-2t}$$

$$\begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1+A_2 \\ -A_1-2A_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{vmatrix}$$

DA CUI $A_0=0,\ A_1=1,\ A_2=-\frac{1}{2}$

$$y_f(t) = \int_0^t \overbrace{u(t-\tau)}^{\delta(t)}\, y_\delta(\tau)\, d\tau = \int_0^t 4\,\delta_{-1}(\tau)\cdot\left(e^{-(t-\tau)} - \frac{1}{2} e^{-2(t-\tau)}\right) d\tau =$$

$$= \int_0^t \left(4e^{-\tau} - 2e^{-2\tau}\right) d\tau = 3 - 4e^{-t} + e^{-2t}$$

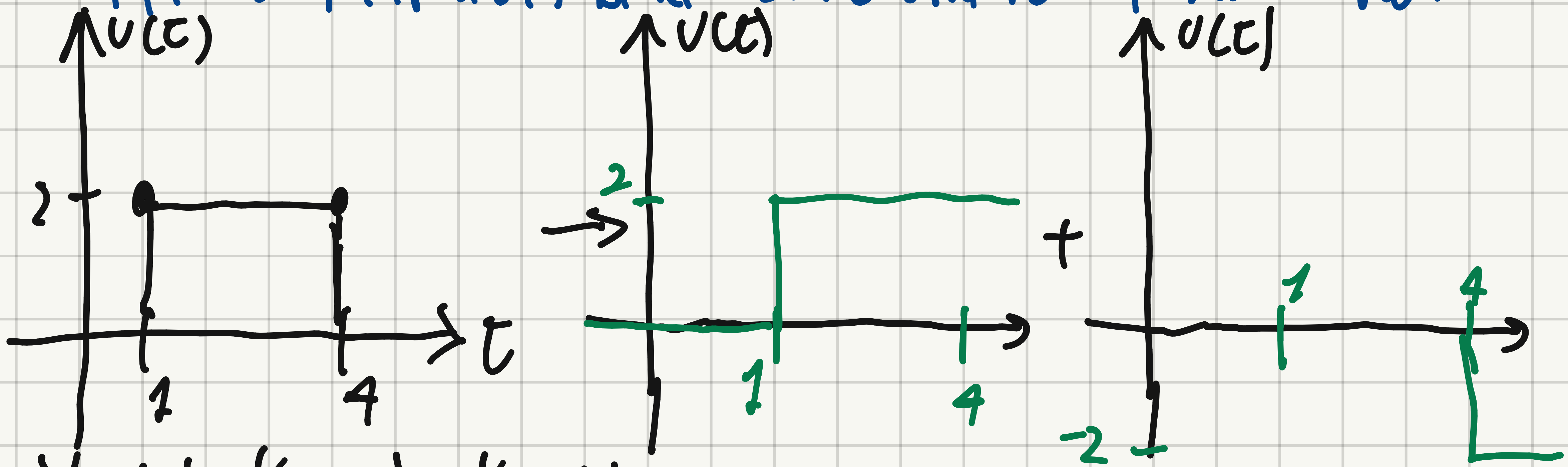
RISOLVERE LO STESSO ESERCIZIO SAPENDO CHE

$$u(t) = \begin{cases} 2 & t \in [1,4] \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$$y_f(t) = \int_0^t u(\tau)\, y_\delta(t-\tau)\, d\tau = \underbrace{\cancel{\int_0^1 u(\tau)\, y_\delta(t-\tau)\, d\tau}}_{=0} + \int_1^4 u(\tau)\, y_\delta(t-\tau)\, d\tau$$

$$+ \underbrace{\cancel{\int_4^{\infty} u(\tau)\, y_\delta(t-\tau)\, d\tau}}_{=0} = 2\int_1^4 \left(e^{-(t-\tau)} - \frac{1}{2} e^{(t-\tau)}\right) d\tau$$

VEDIAMO UNA METODOLOGIA DI RISOLUZIONE UTILE PER CASI PIÙ COMPLESSI



$$y_{fu}(t) = y_{fu_1}(t) + y_{fu_2}(t)$$

$$u^*(t) = \delta_{-1}(t)$$

$$y_{fu^*}(t) = \frac{1}{4}\left[3 - 4e^{-t} + e^{-2t}\right]\delta_{-1}(t)$$

$$y_{fu}(t) = 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\left[3 - 4e^{-(t-1)} + e^{-(t-1)}\right]\delta_{-1}(t-1) + 2\cdot\frac{1}{4}\left[3 - 4e^{-(t-4)} + e^{-(t-4)}\right]\delta_{-1}(t-4)$$

ANALISI NEL DOMINIO DI LAPLACE

INTRODUZIONE

ABBIAMO FINORA LAVORATO CON SISTEMI DEL TIPO $a_n y^n(t)+\dots+a_1 y'(t)+a_0 y(t)=b_0 u(t)+\dots+b_m u^m(t)$, NOTI $u(t)\ \forall t \geq t_0$ E LE CONDIZIONI INIZIALI.

INOLTRE, SAPPIAMO CHE $y(t)=y_L(t)+y_F(t)$; $y_L(t)=c(t)\big|_{y(t_0),\dots,y^{n-1}(t_0)}$; $y_F(t)=\int_{t_0}^{t} y_\delta(t-\tau)\cdot u(\tau)\,d\tau$; $y_\delta(t)=c(t)\cdot\delta_{-1}(t)+A_0\cdot\delta(t)$. IN ALCUNI CASI, CALCOLARE y_L E y_F NEL DOMINIO t RISULTA DIFFICILE. CI SI APPOGGIA DUNQUE ALLA TRASFORMATA DI LAPLACE, LAVORANDO SU FUNZIONI ALGEBRICHE PIÙ SEMPLICI

PROBLEMA IN t $\xrightarrow{\mathcal{L}[\cdot]}$ PROBLEMA IN s $\longrightarrow$ SOLUZIONE IN s $\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}[\cdot]}$ SOLUZIONE IN t

RICHIAMI

DATA LA VARIABILE REALE t ED UNA FUNZIONE $f(t)$, LA SUA TRASFORMATA DI LAPLACE È UNA FUNZIONE IN VARIABILE COMPLESSA s COSÌ DEFINITA: $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty} f(t)\cdot e^{-st}\,dt$. IL PROCESSO INVERSO È DETTO ANTITRASFORMATA DI LAPLACE, DEFINITA COME $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)\cdot e^{st}\,ds$, DOVE $c\in\mathbb{R}$ È L'ASCISSA DI CONVERGENZA. LA SI SCEGLIE CALCOLANDO I PUNTI SINGOLARI DI $F(s)$ E $c>\max(Re[s])$

PROPRIETÀ FONDAMENTALI

- **LINEARITÀ**: DATE LE COSTANTI REALI c_1, c_2 E LE FUNZIONI REALI $f_1(t), f_2(t) \mid \mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$ E $\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$, ALLORA

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

- **1ª PROPRIETÀ DI TRASLAZIONE**: DATA LA FUNZIONE REALE $f(t) \mid \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, ALLORA $\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a)$

- **2ª PROPRIETÀ DI TRASLAZIONE**: DATE LE FUNZIONI REALI $f(t) \mid \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ E $g(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ f(t-a) & t \geq a \end{cases}$, ALLORA

$$\mathcal{L}[g(t)] = e^{-as} F(s)$$

- **CAMBIO SCALA**: DATA LA FUNZIONE REALE $f(t) \mid \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, ALLORA

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

- **TRASFORMATA DI DERIVATE**: SIA $f(t)$ UNA FUNZIONE REALE $\mid \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. ALLORA

$$\begin{cases} \mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0) \\ \mathcal{L}[f''(t)] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(t) \\ \vdots \\ \mathcal{L}[f^n(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{n-2}(0) - f^{n-1}(0) \end{cases}$$

- **TRASFORMATA DI INTEGRALI**: SIA $f(t)$ UNA FUNZIONE REALE $\mid \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. ALLORA

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$$

- **Prodotto per t^n**: data la funzione reale $f(t) \mid \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, allora $\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n F^n(s)$
- **Divisione per t**: data la funzione reale $f(t) \mid \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, allora $\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{+\infty} F(u)\,du$
- **Trasformata di funzioni periodiche**: Sia $f(t)$ una funzione periodica di periodo T. Allora $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt}{1 - e^{-sT}}$
- $\lim_{s \to +\infty} F(s) = 0$
- **Teorema del valore iniziale**: data la funzione reale $f(t) \mid \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, $\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to +\infty} s \cdot F(s)$
- **Teorema del valore finale**: data la funzione reale $f(t) \mid \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, $\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot F(s)$

RISOLUZIONE DEL SISTEMA

$a_n y^n(t) + \ldots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) + \ldots + b_m u^m(t)$. Utilizzando la trasformata di Laplace per le derivate, diremo che

$\mathcal{L}[a_n y^n(t) + \ldots + a_1 y'(t) + a_0 y(t)] = a_n \mathcal{L}[y^n(t)] + \ldots + a_1 \mathcal{L}[y'(t)] + a_0 \mathcal{L}[y(t)]$ $\mathcal{L}[b_0 u(t) + \ldots + b_m u^m(t)] = b_0 \mathcal{L}[u(t)] + \ldots + b_m \mathcal{L}[u^m(t)]$

$$\Rightarrow a_n[s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - \dots - s y^{n-2}(0) - y^{n-1}(0)] + a_{n-1}[s^{n-1}Y(s) -$$
$$- s^{n-2}y(0) - \dots - s y^{n-3}(0) - y^{n-2}(0)] + \dots + a_1[sY(s) - y(0)] + a_0 Y(s) =$$
$$b_m[s^m U(s) - s^{m-1}u(0) - \dots - s u^{m-2}(0) - u^{m-1}(0)] + b_{m-1}[s^{m-1}U(s) - s^{m-2}u(0)$$
$$- \dots - s u^{m-3}(0) - u^{m-2}(0)] + \dots + b_1[sU(s) - u(0)] + b_0 U(s)$$

SCRITTURA IN FORMA COMPATTA: DEFINIAMO:

$I_y(s) = a_n[s^{n-1}y(0) + \dots + s y^{n-2}(0) + y^{n-1}(0)] + a_{n-1}[s^{n-2}y(0) + \dots + s y^{n-3}(0) + y^{n-2}(0)] + \dots + a_1 y(0)$ E $I_u(s) = b_m[s^{m-1}u(0) + \dots + s u^{m-2}(0) + u^{m-1}(0)] + b_{m-1}[s^{m-2}u(0) + \dots + s u^{m-3}(0) + u^{m-2}(0)] + \dots + b_1 u(0)$

$$\Rightarrow [a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0] \cdot Y(s) - I_y(s) = [b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0] \cdot U(s) - I_u(s).$$

DEFINIAMO:

$P(s) = [a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0]$ E $b(s) = [b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0]$ $\Rightarrow P(s) \cdot Y(s) - I_y(s) = b(s) \cdot U(s) - I_u(s)$

$$Y(s) = \frac{I_y(s) - I_u(s)}{P(s)} + \frac{b(s)}{P(s)} \cdot U(s).$$

DEFINIAMO $I_y(s) - I_u(s) = I(s)$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{I(s)}{P(s)} + \frac{b(s)}{P(s)} U(s).$$

SI OSSERVI CHE LA PRIMA PARTE NON DIPENDE DALL'INGRESSO, A DIFFERENZA DELLA SECONDA. PER CUI, DETTO $Y_L(s) = \frac{I(s)}{P(s)}$ E $Y_F(s) = \frac{b(s)}{P(s)}$, ABBIAMO FINALMENTE

UN'ESPRESSIONE DEL TIPO $Y(s)=Y_L(s)+Y_F(s)$

NEL DETTAGLIO, POSSIAMO DEFINIRE LE MATRICI $H(s)=\dfrac{I(s)}{P(s)}$ E LA MATRICE DI TRASFERIMENTO $W(s)=\dfrac{b(s)}{P(s)}$. INFATTI,

$Y(s)=H(s)\cdot 1+W(s)\cdot U(s)$, RICORDANDO CHE $\mathcal{L}^{-1}[1]=\delta_{-1}(t)$

- $$W(s)=\frac{b(s)}{P(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0}=$$

$$=\frac{b_m}{a_n}\cdot\frac{s^m+\frac{b_{m-1}}{b_m}\cdot s^{m-1}+\ldots+\frac{b_1}{b_m}\cdot s+\frac{b_0}{b_m}}{s^n+\frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot s^{n-1}+\ldots+\frac{a_1}{a_n}\cdot s+\frac{a_0}{a_n}}$$ $\frac{b_m}{a_n}=K$ GUADAGNO STATICO

$$=K\cdot\frac{(s-z_1)^{t_1}\cdot(s-z_2)^{t_2}\cdot\ldots\cdot(s-z_q)^{t_q}}{(s-p_1)^{v_1}\cdot(s-p_2)^{v_2}\cdot\ldots\cdot(s-p_r)^{v_r}}$$

- $(s-z_1)^{t_1}\cdot(s-z_2)^{t_2}\cdot\ldots\cdot(s-z_q)^{t_q}$ PERMETTE IL CALCOLO DEGLI ZERI DI W
- $(s-p_1)^{v_1}\cdot(s-p_2)^{v_2}\cdot\ldots\cdot(s-p_r)^{v_r}$ PERMETTE IL CALCOLO DEI POLI DI W

$$Y_F(s)=W(s)\cdot U(s);\quad W(s)=\begin{vmatrix} W_{1,1}(s) & W_{1,2}(s) & \cdots & W_{1,n}(s)\\ W_{2,1}(s) & W_{2,2}(s) & \cdots & W_{2,n}(s)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ W_{n,1}(s) & W_{n,2}(s) & \cdots & W_{n,n}(s)\end{vmatrix}$$

CALCOLATA LA SOLUZIONE IN s, OCCORRE COMPLETARE IL PROBLEMA RITORNANDO NEL DOMINIO t. $Y(s)=\dfrac{I(s)}{P(s)}+\dfrac{b(s)}{P(s)}\cdot U(s)$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{I(s)}{P(s)}+\frac{b(s)}{P(s)}\cdot U(s)\right]=$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{I(s)}{P(s)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{b(s)}{P(s)} \cdot U(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] + \mathcal{L}^{-1}[W(s) \cdot U(s)]$$

ANTITRASFORMATA DI FUNZIONI RAZIONALI

DATA UNA GENERICA FUNZIONE RAZIONALE $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} =$

$$= \frac{n_m s^m + n_{m-1} s^{m-1} + \ldots + n_1 s + n_0}{d_n s^n + d_{n-1} s^{n-1} + \ldots + d_1 s + d_0} = \left(\frac{n_m}{d_n}\right) \cdot \frac{(s-z_1)^{r_1} (s-z_2)^{r_2} \ldots (s-z_q)^{r_q}}{(s-p_1)^{\nu_1} (s-p_2)^{\nu_2} \ldots (s-p_n)^{\nu_n}}$$

$$= K \cdot \frac{(s-z_1)^{r_1} (s-z_2)^{r_2} \ldots (s-z_q)^{r_q}}{(s-p_1)^{\nu_1} (s-p_2)^{\nu_2} \ldots (s-p_n)^{\nu_n}}.$$

NELL'IPOTESI CHE LA FRAZIONE SIA GIÀ IN FORMA MINIMA, OSSIA $\forall i, j \begin{cases} z_i \neq z_j \\ p_i \neq p_j \\ z_i \neq p_j \end{cases}$, VOGLIAMO ANTITRASFORMARE LA FRAZIONE DAL DOMINIO s AL DOMINIO t.

CASO 1: MOLTEPLICITÀ DEI POLI = MOLTEPLICITÀ DEGLI ZERI = 1

SVILUPPO DI HEAVISIDE:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = K \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_q)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}\right] = K \cdot \mathcal{L}^{-1}[\overline{F(s)}]$$

$$\overline{F(s)} = \frac{(s-z_1)\cdot(s-z_2)\cdot\ldots\cdot(s-z_n)}{(s-p_1)\cdot(s-p_2)\cdot\ldots\cdot(s-p_n)} = \frac{R_1}{s-p_1} + \frac{R_2}{s-p_2} + \ldots + \frac{R_n}{s-p_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{s-p_i}.$$

$$R_i = \lim_{s \to p_i} (s-p_i) \cdot \overline{F(s)} \qquad \overline{f(t)} = \mathcal{L}^{-1}[\overline{F(s)}] = \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{s-p_i}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{R_i}{s-p_i}\right] = \sum_{i=1}^{n} R_i \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\underbrace{\frac{1}{s-p_i}}_{}\right] = \sum_{i=1}^{n} R_i e^{p_i(t)} \delta_{-1}(t)$$

$1/_{s-a}$

$$\Rightarrow f(t) = K \cdot \overline{f(t)} = K \cdot \sum_{i=1}^{n} R_i e^{p_i t} \delta_{-1}(t)$$

ESERCIZIO: CALCOLARE L'ANTITRASFORMATA DELLA FUNZIONE $F(s) = \frac{s+8}{s^2+2s}$

$$\frac{s+8}{s(s+2)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+2} \qquad R_1 = \lim_{s \to 0} s \cdot F(s) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \frac{s+8}{\cancel{s}(s+2)} = 4$$

$$R_2 = \lim_{s \to -2} \cancel{(s+2)} \cdot \frac{s+8}{s\cancel{(s+2)}} = -3 \Rightarrow F(s) = \frac{4}{s} - \frac{3}{s+2}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s+2}\right] = 4\delta_{-1}(t) - 3e^{-2t}\delta_{-1}(t) = (4 - 3e^{-2t})\delta_{-1}(t)$$

LO SVILUPPO DI HEAVISYDE VALE ANCHE PER RADICI COMPLESSE, IN CUI $P(s)=0$ SI SCOMPONE IN

$$\begin{cases} p_e = \alpha_e + i\omega_e & \gamma_e = 1 \\ p_e^* = \alpha_e - i\omega_e & \gamma_e^* = \gamma_e = 1 \end{cases}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{R_e}{s-p_e} + \frac{R_e^*}{s-p_e^*}\right] = R_e \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-p_e}\right] + R_e^* \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-p_e^*}\right] =$$

$$= R_e \cdot e^{p_e t}\delta_{-1}(t) + R_e^* \cdot e^{p_e^* t}\delta_{-1}(t) = [R_e e^{p_e t} + R_e^* e^{p_e^* t}]\delta_{-1}(t)$$

MODI NATURALI SCRITTI NELLA PRIMA FORMA, SAPENDO CHE $R_e, R_e^* \in \mathbb{C}$

E $R_e = Re[R_e] + i Im[R_e]$, $R_e^* = Re[R_e] - i Im[R_e]$

2^a FORMA $\rightarrow$ $f(t) = \left[B_e e^{\alpha_e t}\cos(\omega_e t) + C_e e^{\alpha_e t}\sin(\omega_e t)\right]\delta_{-1}(t)$

3^a FORMA $\xrightarrow{1}$ $f(t) = \left[M_\ell \, e^{a_\ell t} \cos(\omega_\ell t + \Phi_\ell) \right] \delta_{-1}(t)$

CASO 2: MOLTEPLICITÀ DEI POLI ≥ 1; MOLTEPLICITÀ DEGLI ZERI ≥ 1

SVILUPPO DI HEAVISIDE:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = K \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s-z_1)^{z_1} + (s-z_2)^{z_2} + \dots + (s-z_q)^{z_q}}{(s-p_1)^{\nu_1} + (s-p_2)^{\nu_2} + \dots + (s-p_r)^{\nu_r}} \right] = K \cdot \mathcal{L}^{-1}[\overline{F(s)}]$$

$$\overline{F(s)} = \overline{F_1(s)} + \overline{F_2(s)} + \dots + \overline{F_r(s)} = \sum_{i=1}^{r} \overline{F_i(s)}$$

$$F_i(s) = \frac{R_{i,0}}{s-p_i} + \frac{R_{i,1}}{(s-p_i)^2} + \dots + \frac{R_{i,\nu_i-1}}{(s-p_i)^{\nu_i}} = \sum_{k=0}^{\nu_i-1} \frac{R_{i,k}}{(s-p_i)^{k+1}}$$

$$R_{i,\nu_i-\bar{k}} = \lim_{s\to p_i} \frac{1}{(\bar{k}-1)!} \cdot \frac{d^{\bar{k}-1}}{ds^{\bar{k}-1}} \cdot \left[(s-p_i)^{\nu_i} \cdot \overline{F_i(s)} \right]$$

$$\begin{cases} \bar{K} = 1 \to R_{i,\nu_i-1} = \lim_{s\to p_i} (s-p_i)^{\nu_i} \cdot \overline{F_i(s)} \\ \bar{k} = 2 \to R_{i,\nu_i-2} = \lim_{s\to p_i} \frac{d}{ds}\left[(s-p_i)^{\nu_i} \cdot \overline{F_i(s)} \right] \\ \bar{k} = 3 \to R_{i,\nu_i-3} = \lim_{s\to p_i} \frac{d^2}{ds^2}\left[(s-p_i)^{\nu_i} \cdot \overline{F_i(s)} \right] \\ \vdots \\ \bar{k} = i \to R_{i,0} = \lim_{s\to p_i} \frac{d^{\nu_i-1}}{ds^{\nu_i-1}}\left[(s-p_i)^{\nu_i} \cdot \overline{F_i(s)} \right] \end{cases}$$

$$\overline{f(t)} = \mathcal{L}^{-1}\left[\overline{F(s)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{r} \overline{F(s)} \right] = \sum_{i=1}^{r} \mathcal{L}^{-1}\left[\overline{F_i(s)} \right] = \sum_{i=1}^{r} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{R_{i,k}}{(s-p_i)^{k+1}} \right]$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\cdot\sum_{k=0}^{r_i-1}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{R_{i,k}}{(s-p_i)^{k+1}}\right]=\sum_{i=1}^{r}\cdot\sum_{k=0}^{r_i-1}R_{i,k}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-p_i)^{k+1}}\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=0}^{r_i-1}\cdot R_{i,k}\cdot\frac{t^k}{k!}e^{p_i t}\delta_{-1}(t)\Rightarrow f(t)=K\cdot\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]=$$

$$=K\cdot\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=0}^{r_i-1}\cdot R_{i,k}\cdot\frac{t^k}{k!}e^{p_i t}\delta_{-1}(t)$$

LO SVILUPPO DI HEAVISYDE VALE ANCHE PER RADICI COMPLESSE, IN CUI $P(s)=0$ SI SCOMPONE IN $\begin{cases} p_e=\alpha_e+i\omega_e & r_e>1 \\ p_e^*=\alpha_e-i\omega_e & r_e^*=r_e>1 \end{cases}$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{R_{e,k}}{(s-p_e)^{k+1}}+\frac{R_{e,k}^*}{(s-p_e^*)^{k+1}}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{R_{e,k}}{(s-p_e)^{k+1}}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{R_{e,k}^*}{(s-p_e^*)^{k+1}}\right]=$$

$$=R_{e,k}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-p_e)^{k+1}}\right]+R_{e,k}^*\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-p_e^*)^{k+1}}\right]=R_{e,k}\cdot\frac{t^k}{k!}e^{p_e t}\delta_{-1}(t)+$$

$$+R_{e,k}^*\cdot\frac{t^k}{k!}e^{p_e^* t}\delta_{-1}(t)=\frac{t^k}{k!}\left[R_{e,k}e^{p_e t}+R_{e,k}^*e^{p_e^* t}\right]\delta_{-1}(t)\quad 1^a \text{ FORMA}$$

2^a FORMA $\rightarrow y(t)=\dfrac{t^k}{k!}\cdot\left[B_{e,k}e^{\alpha_e t}\cos(\omega_e t)+C_{e,k}e^{\alpha_e t}\sin(\omega_e t)\right]\delta_{-1}(t)$

3^a FORMA $\rightarrow y(t)=\dfrac{t^k}{k!}\left[M_{e,k}e^{\alpha_e t}\cos(\omega_e t+\Phi_{e,k})\right]\delta_{-1}(t)$