ESAME DEL 19/01/2015

① SIA DATA LA RAPPRESENTAZIONE IN VARIABILI DI STATO DI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot u(t) \\ |y(t)| = |1 \quad 1 \quad 1| \cdot \begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{vmatrix} \end{cases}$$

- DIRE SE È CONTROLLABILE E OSSERVABILE
- STABILIRE SE È POSSIBILE DETERMINARE UNA OPPORTUNA LEGGE IN RETROAZIONE $u(t) = -K \cdot x(t)$ TALE PER CUI GLI AUTOVALORI DEL SISTEMA A CICLO CHIUSO SIANO ASSEGNABILI AD ARBITRIO. NEL CASO IN CUI QUESTO SIA POSSIBILE, SI DETERMINI LA MATRICE K TALE PER CUI GLI AUTOVALORI DEL SISTEMA A CICLO CHIUSO SIANO PARI A $\lambda_{1DES} = -1$; $\lambda_{2DES} = -3$; $\lambda_{3DES} = -5$
- DETERMINARE UNA TRASFORMAZIONE DI SIMILITUDINE CHE PORTI AD UNA RAPPRESENTAZIONE IN CUI LA MATRICE DI STATO È DIAGONALE, DETERMINANDO TUTTE LE MATRICI DELLA NUOVA RAPPRESENTAZIONE

② SIA DATA LA RAPPRESENTAZIONE IN VARIABILI DI STATO DI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -x_1(k) - x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) - \alpha x_2(k) + u(k) \\ y(k) = x_1(k) - x_2(k) \end{cases}$$

- STUDIARE LA STABILITÀ, LA CONTROLLABILITÀ E L'OSSERVABILITÀ DEL SISTEMA AL VARIARE DEL PARAMETRO $\alpha \in \mathbb{R}$
- POSTO $\alpha = -3$, DETERMINARE LA DECOMPOSIZIONE CANONICA OSSERVABILE DI KALMAN DEL SISTEMA, METTENDO IN EVIDENZA GLI EVENTUALI MODI OSSERVABILI E NON OSSERVABILI
- POSTO $\alpha = 1$, E DATO $x(0) = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$, DETERMINARE LA RISPOSTA LIBERA NELLO STATO E NELL'USCITA

① •

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad C = |1 \quad 1 \quad 1| \qquad D = |0|$$

$$A \cdot B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$A^2 \cdot B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17 & 18 & 18 \\ 42 & 43 & 48 \\ 14 & 18 & 22 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 \\ 48 \\ 22 \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{C} = |B \quad AB \quad A^2B| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 18 \\ 0 & 6 & 48 \\ 1 & 1 & 22 \end{vmatrix}$$

$$\det(\mathcal{C}) = \det \begin{vmatrix} 6 & 48 \\ 1 & 22 \end{vmatrix} = 84 \neq 0$$

$\Rightarrow rk(\mathcal{C}) = 3 \Rightarrow$ IL SISTEMA È CONTROLLABILE

$$C \cdot A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 9 & 10 \end{vmatrix}$$

$$C \cdot A^2 = \begin{vmatrix} 8 & 9 & 10 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 74 & 81 & 88 \end{vmatrix}$$

$$O = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 9 & 10 \\ 74 & 81 & 88 \end{vmatrix}$$

$$rk(O) = rk \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 9 & 10 \\ 74 & 81 & 88 \end{vmatrix} = rk \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 14 \end{vmatrix} = rk \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow$$ IL SISTEMA È NON OSSERVABILE

- $$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 \\ -4 & \lambda-5 & -6 \\ -3 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)((\lambda-5)(\lambda-1)-12) + 2(4-4\lambda-18) - 3(8+3\lambda-15)$$

$$= (\lambda-1)(\lambda^2-6\lambda-7) + 4(-7-2\lambda) - 3(3\lambda-7)$$

$$= \lambda^3 - 6\lambda^2 - 7\lambda - \lambda^2 + 6\lambda + 7 - 28 - 8\lambda - 9\lambda + 21$$

$$\Rightarrow P_A(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 - 18\lambda$$

$$P_A(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 7\lambda - 18) = (\lambda+2)(\lambda-9)\lambda \qquad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 9,\ \lambda_3 = -2$$ DIVERSI DAI λ_{DES}

È GIÀ STATA VERIFICATA LA CONTROLLABILITÀ

$\alpha_0 = 0$; $\alpha_1 = -18$; $\alpha_2 = -7$

$$q_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_{1DES})(\lambda - \lambda_{2DES})(\lambda - \lambda_{3DES})$$

$$= (\lambda+1)(\lambda+3)(\lambda+5) = (\lambda^2 + 4\lambda + 3)(\lambda+5)$$

$$\Rightarrow q_A(\lambda) = \lambda^3 + 9\lambda^2 + 23\lambda + 15$$

$\beta_0 = 15$; $\beta_1 = 23$; $\beta_2 = 9$

MATRICE DI TRASFORMAZIONE $\qquad T^{-1} = C \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$$T^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 18 \\ 0 & 6 & 48 \\ 1 & 1 & 22 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -18 & -7 & 1 \\ -7 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det T^{-1} = (-18 - 18) = -36 \neq 0$$

$\Rightarrow$ È POSSIBILE DEFINIRE $$T = \frac{1}{\det T^{-1}} \cdot \begin{vmatrix} \det\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} & -\det\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} & \det\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} \\ -\det\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} & \det\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} & -\det\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} \\ \det\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} & -\det\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} & \det\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} \end{vmatrix}^T$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{-36} \begin{vmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \\ -18 & -27 & -36 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1/6 & 1/12 & 0 \\ 1/6 & 1/12 & 0 \\ 1/2 & 3/4 & 1 \end{vmatrix}$$

$\rightarrow K = [(P_0 - \alpha_0) \quad (P_1 - \alpha_1) \quad (P_2 - \alpha_2)] \cdot T$

$$K = [15 \quad 41 \quad 16] \cdot \begin{vmatrix} -1/6 & 1/12 & 0 \\ 1/6 & 1/12 & 0 \\ 1/2 & 3/4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{37}{3} & \frac{50}{3} & 16 \end{vmatrix}$$

- SCELTA T LA MATRICE DIAGONALE, DETERMINIAMO $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$

$$\hat{A} = T \cdot A \cdot T^{-1} = \begin{vmatrix} -1/6 & 1/12 & 0 \\ 1/6 & 1/12 & 0 \\ 1/2 & 3/4 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/6 & 1/12 & 0 \\ 1/2 & 3/4 & 1 \\ 13/2 & 27/4 & 7 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -42 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\hat{B} = T \cdot B = \begin{vmatrix} -1/6 & 1/12 & 0 \\ 1/6 & 1/12 & 0 \\ 1/2 & 3/4 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\hat{C} = C \cdot T^{-1} = |1 \quad 1 \quad 1| \cdot \begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{vmatrix} = |0 \quad 15 \quad 1|$$

②

- $A = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad C = |1 \quad -1|$

STABILITÀ $\det(\lambda I - A) = \det \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 \\ -1 & -\alpha+\lambda \end{vmatrix} = -\alpha\lambda + \lambda^2 - \alpha - \lambda + 1 = +\lambda^2 + (-\alpha+1)\lambda + (1+\alpha)$

$$\lambda = \frac{(1-\alpha) \pm \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 1 - 4 + 4\alpha}}{-4} = \frac{(1-\alpha) \pm \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha + 3}}{-4}$$

CONVIENE UTILIZZARE IL CRITERIO DI JURY:

- $P(z=1) > 0 \rightarrow +1 - \alpha + 1 + 1 + \alpha > 0 \rightarrow -2\alpha > -3 \rightarrow \alpha < 3/2$
- $P(z=-1) \cdot (-1)^2 > 0 \rightarrow 1 + \alpha - 1 + 1 - \alpha > 0 \rightarrow 1 > 0$ ✓
- $a_n > a_0 \rightarrow 1 > 1 - \alpha \rightarrow \alpha > 0$

$\Rightarrow$ STABILITÀ PER $0 < \alpha < 3/2$

CONTROLLABILITÀ $\mathcal{C} = |B \quad AB| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} \qquad \det(\mathcal{C}) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ CONTROLLABILITÀ COMPLETA $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

OSSERVABILITÀ $\mathcal{O} = \begin{vmatrix} C \\ CA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1-\alpha \end{vmatrix} \qquad \det(\mathcal{O}) = -1 - \alpha - 2 = -\alpha - 3 \neq 0 \ \forall \alpha \neq -3 \Rightarrow$ OSSERVABILITÀ COMPLETA $\forall \alpha \neq -3$

- PER $\alpha = -3$, IL SISTEMA È NON OSSERVABILE $\Rightarrow$ NON SI PUÒ PROCEDERE CON LA DECOMPOSIZIONE OSSERVABILE

- PER $\alpha = 1 \quad A = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad C = |1 \quad -1|$

$X_\ell(z) = \Phi(z) \cdot X(0)$

$\Phi(z) = z \cdot (zI - A)^{-1} \qquad (zI - A) = \begin{vmatrix} z+1 & 1 \\ -1 & z-1 \end{vmatrix} \qquad \det(zI - A) = z^2$

$\Rightarrow$ PER $z \neq 0$, $(zI - A)^{-1} = \frac{1}{z^2} \begin{vmatrix} z-1 & -1 \\ 1 & z+1 \end{vmatrix} \Rightarrow \Phi(z) = \begin{vmatrix} \frac{z-1}{z} & -\frac{1}{z} \\ \frac{1}{z} & \frac{z+1}{z} \end{vmatrix}$

$\Rightarrow X_\ell(z) = \begin{vmatrix} \frac{z-1}{z} & -\frac{1}{z} \\ \frac{1}{z} & \frac{z+1}{z} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2z-1}{z} \\ \frac{2z+1}{z} \end{vmatrix} \Rightarrow X_\ell(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\left|\begin{matrix} 2 - \frac{1}{z} \\ 2 + \frac{1}{z} \end{matrix}\right|\right] = \begin{vmatrix} \delta(k) - 2\delta(k-1) \\ \delta(k) + 2\delta(k-1) \end{vmatrix}$

$Y_\ell(z) = \Psi(z) \cdot X(0)$

$\Psi(z) = C \cdot \Phi(z) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{z-1}{z} & -\frac{1}{z} \\ \frac{1}{z} & \frac{z+1}{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{z-2}{z} & \frac{-z-2}{z} \end{vmatrix}$

$Y_\ell(z) = \begin{vmatrix} \frac{z-2}{z} & \frac{-z-2}{z} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \frac{z-2}{z} - \frac{z+2}{z} = \frac{z-2-z-2}{z} = -\frac{4}{z}$

$\Longrightarrow Y_\ell(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[-\frac{4}{z}\right] = -4\delta(k+1)$

ESAME DEL 23/02/2015

① SIA DATA LA RAPPRESENTAZIONE IN VARIABILI DI STATO DI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ \alpha & 0 & -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{vmatrix} \end{cases}$$

- STUDIARE STABILITÀ, CONTROLLABILITÀ E OSSERVABILITÀ DEL SISTEMA AL VARIARE DI $\alpha \in \mathbb{R}$
- POSTO $\alpha = -10$, STABILIRE SE È POSSIBILE DETERMINARE UNA OPPORTUNA LEGGE IN RETROAZIONE $u(t) = -K \cdot x(t)$ TALE PER CUI GLI AUTOVALORI DEL SISTEMA A CICLO CHIUSO SIANO ASSEGNABILI AD ARBITRIO. NEL CASO IN CUI QUESTO SIA POSSIBILE, SI DETERMINI LA MATRICE K TALE PER CUI GLI AUTOVALORI DEL SISTEMA A CICLO CHIUSO SIANO PARI A $\lambda_{1DES} = -2; \lambda_{2DES} = -2; \lambda_{3DES} = -2$
- POSTO $\alpha = 0$, CALCOLARE LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DEL SISTEMA E VERIFICARE SE TALE FUNZIONE È IN FORMA MINIMA

② SIA DATA LA RAPPRESENTAZIONE IN VARIABILI DI STATO DI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_3(k) \\ x_2(k+1) = \alpha x_2(k) + \gamma u(k) \\ x_3(k+1) = -x_1(k) + u(k) \\ y(k) = \beta x_1(k) + x_3(k) \end{cases}$$

CON $x(0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \gamma \end{vmatrix}^T$

- DETERMINARE IL VALORE DELLA RISPOSTA LIBERA NELLO STATO AL TEMPO $K=9$
- DETERMINARE IL VALORE DELLA RISPOSTA FORZATA NELL'USCITA AL TEMPO $K=6$ RELATIVA ALL'INGRESSO AL GRADINO $u(k) = 1$ PER $K \geq 0$
- DETERMINARE IL VALORE DELLA RISPOSTA TOTALE NELL'USCITA AL TEMPO $K=3$ RELATIVA ALL'INGRESSO AL GRADINO $u(k) = \cos(k\pi)$ PER $K \geq 0$

① • STABILITÀ $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ \alpha & 0 & -2 \end{vmatrix}$ $B = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ $C = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$

$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) =$

$= \det \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-3 & 1 \\ -\alpha & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda+2) + (-\lambda-2+\alpha) = (\lambda^2-4)(\lambda-3) - \lambda - 2 + \alpha =$

$= \lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12 - \lambda - 2 + \alpha$ $\qquad P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 5\lambda + 10 + \alpha$

TABELLA DI ROUTH

3	1	-3
2	-3	$10+\alpha$
1		

$\rightarrow$ SENZA DOVER DETERMINARE L'ULTIMA RIGA, BASTA NOTARE CHE NON TUTTI I COEFFICIENTI HANNO LO STESSO SEGNO $\Rightarrow$ PER LA CONDIZIONE DI STODOLA, ALCUNE RADICI DI $P(\lambda)$ SONO POSITIVE $\Rightarrow$ SISTEMA INSTABILE $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

CONTROLLABILITÀ

$$\mathcal{C} = \begin{vmatrix} B & AB & A^2B \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad AB = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ \alpha & 0 & -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ \alpha \end{vmatrix}$$

$$A^2B = (A)(AB) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ \alpha & 0 & -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 \\ 5-\alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{C} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 5-\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{vmatrix} \qquad \det(\mathcal{C}) = \alpha(\alpha-5) \neq 0 \; \begin{cases} \alpha \neq 0 \\ \alpha \neq 5 \end{cases}$$

$\rightarrow$ SISTEMA COMPLETAMENTE CONTROLLABILE $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \{5\}$

OSSERVABILITÀ

$$\mathcal{O} = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad C \cdot A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ \alpha & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$C \cdot A^2 = (C \cdot A) \cdot A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ \alpha & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\alpha & 10 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{O} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 5-\alpha & 10 & -1 \end{vmatrix} \qquad \det(\mathcal{O}) = -(-1+5-\alpha) = \alpha - 4 \neq 0 \; — \; \alpha \neq 4$$

$\rightarrow$ SISTEMA COMPLETAMENTE CONTROLLABILE $\forall \alpha \neq 4$

- $\alpha = -10 \longrightarrow A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -10 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 5\lambda$

$\alpha_0 = 0;\ \alpha_1 = -5;\ \alpha_2 = -3$

	1	-3	-5	0
0		0	0	0
	1	-3	-5	0

1	-3	-5
1		

??

$\Rightarrow P_A(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 3\lambda - 5)$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 5 = 0 \qquad \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9+20}}{} = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{} \Rightarrow \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} \neq \{\lambda_{1DES}, \lambda_{2DES}, \lambda_{3DES}\}$$

È GIÀ STATA VERIFICATA LA CONTROLLABILITÀ

$$q_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_{1DES})(\lambda - \lambda_{2DES})(\lambda - \lambda_{3DES}) = (\lambda+2)(\lambda+2)(\lambda+2) = (\lambda+2)^3 = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8$$

$\beta_0 = 8;\ \beta_1 = 12;\ \beta_2 = 6$

MATRICE DI TRASFORMAZIONE $\qquad T^{-1} = \mathcal{C} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$$T^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & -10 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & -1 & 1 \\ 12 & 1 & 0 \\ 30 & -10 & 0 \end{vmatrix} \qquad \det(T^{-1}) = -120 - 30 = -150 \neq 0$$

$\Rightarrow$ È POSSIBILE DEFINIRE $T = \frac{1}{\det T^{-1}} \cdot \widehat{T^{-1}}$, DOVE $\widehat{T^{-1}}$ È LA MATRICE DEI COMPLEMENTI ALGEBRICI

$$T=\frac{1}{-150}\begin{vmatrix} \det\begin{vmatrix}1 & 0\\ -10 & 0\end{vmatrix} & -\det\begin{vmatrix}12 & 0\\ 10 & 0\end{vmatrix} & \det\begin{vmatrix}12 & 1\\ 30 & -10\end{vmatrix} \\ -\det\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 10 & 0\end{vmatrix} & \det\begin{vmatrix}-6 & 1\\ 30 & 0\end{vmatrix} & -\det\begin{vmatrix}-6 & -1\\ 30 & -10\end{vmatrix} \\ \det\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix} & -\det\begin{vmatrix}-6 & 1\\ 12 & 0\end{vmatrix} & \det\begin{vmatrix}-6 & -1\\ 12 & 1\end{vmatrix}\end{vmatrix}^T$$

$$T=\frac{1}{-150}\begin{vmatrix}0 & 0 & -150\\ -10 & -30 & -30\\ -1 & 12 & 6\end{vmatrix}^T=\begin{vmatrix}0 & 1/15 & 1/150\\ 0 & 1/5 & -2/25\\ 1 & 3/5 & -1/25\end{vmatrix}$$

$$\rightarrow K=\left[(\beta_0-\alpha_0)\quad(\beta_1-\alpha_1)\quad(\beta_2-\alpha_2)\right]\cdot T$$

$$=\begin{vmatrix}8 & 17 & 9\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1/15 & 1/150\\ 0 & 1/5 & -2/25\\ 1 & 3/5 & -1/25\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}9 & \frac{28}{3} & -\frac{5}{3}\end{vmatrix}$$

- $\alpha=0 \rightarrow A=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & -1\\ 0 & 0 & -2\end{vmatrix}$

CONVIENE LAVORARE NEL DOMINIO $s \rightarrow W=\left[C\cdot(sI-A)^{-1}\cdot B+D\right]$

$$(sI-A)=\begin{vmatrix}s-2 & -1 & 0\\ -1 & s-3 & 1\\ 0 & 0 & s+2\end{vmatrix}\qquad \det(sI-A)=(s+2)\big((s-2)(s-3)-1\big)=(s+2)(s^2-5s+5)$$
$$=s^3-5s^2+5s+2s^2-10s+10=s^3-3s^2-5s+10$$

$(s^3-3s^2-5s+10)\neq 0$

	1	-3	-5	10
-2		-2	10	-10
	1	-5	5	0

$$(s+2)(s^2-5s+5)\neq 0 \begin{cases} s\neq -2\\ s\neq \frac{5\pm\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{(s+2)(s^2-5s+5)}\cdot\begin{vmatrix}(s-3)(s+2) & s+2 & -1\\ s+2 & (s-2)(s+2) & 2-s\\ 0 & 0 & (s-2)(s-3)-1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\frac{s-3}{s^2-5s+5} & \frac{1}{s^2-5s+5} & -\frac{1}{s^3-3s^2-5s+10}\\ \frac{1}{s^2-5s+5} & \frac{s-2}{s^2-5s+5} & \frac{2-s}{s^3-3s^2-5s+10}\\ 0 & 0 & \frac{1}{s+2}\end{vmatrix}$$

$$W=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\end{vmatrix}\cdot\left|(sI-A)^{-1}\right|\cdot\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0\end{vmatrix}$$

$$W=\begin{vmatrix}\frac{1}{s^2-5s+5} & \frac{s-2}{s^2-5s} & -\frac{s-2}{s^3-3s^2-5s+10}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}=\frac{1}{s^2-5s+5}\Rightarrow v(t)=y''(t)-5y'(t)+5y(t)$$

$\Rightarrow W$ È IN FORMA MINIMA

② $X(0)=\begin{vmatrix}0\\1\\ \gamma\end{vmatrix}$ $\quad A=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & \alpha & 0\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix}$ $\quad B=\begin{vmatrix}0\\ \gamma\\ 1\end{vmatrix}$ $\quad C=\begin{vmatrix}\beta & 0 & 1\end{vmatrix}$ $\quad D=\begin{vmatrix}0\end{vmatrix}$

- $X_L(k)=A^k\cdot X(0)$ ESSENDO DIAGONALE, $A^k=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1^k\\ 0 & \alpha^k & 0\\ -1^k & 0 & 0\end{vmatrix}$

$$X_L(9)=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & \alpha^9 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0\\1\\ \gamma\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\gamma\\ \alpha^9\\ 0\end{vmatrix}$$

- $X_F(k) = \sum_{l=0}^{k-1} A^{k-l+1} \cdot B \cdot U(k)$

$$X_F(k) = \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ \gamma \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ \gamma \\ 1 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha^3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ \gamma \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha^4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ \gamma \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha^5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ \gamma \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 \\ \alpha\gamma \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ \alpha^2\gamma \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ \alpha^3\gamma \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ \alpha^4\gamma \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ \alpha^5\gamma \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 \\ \alpha\gamma(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$Y_F(k) = C \cdot X_F(k) + D \cdot U(k)$

$$X_F(k) = \begin{vmatrix} \beta & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 \\ \alpha\gamma(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4) \\ 0 \end{vmatrix} = 5\beta$$

- $X_L(k) = A^k \cdot X(0)$ $\quad Y_L(k) = C \cdot X_L(k)$ $\quad X_F(k) = \sum_{l=0}^{k-1} A^{k-l+1} \cdot B \cdot U(k)$ $\quad Y_F(k) = C \cdot X_F(k)$

$X_{tot}(k) = X_L(k) + X_F(k)$ $\quad Y_{tot}(k) = Y_L(k) + Y_F(k)$

$$X_L(3) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha^3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma \\ \alpha^3 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad Y_L(3) = \begin{vmatrix} \beta & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \gamma \\ \alpha^3 \\ 0 \end{vmatrix} = \gamma\beta$$

$$X_F(3) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ \gamma \\ 1 \end{vmatrix} \cdot \cos(k\pi) + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ \gamma \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha^3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ \gamma \\ 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 \\ \alpha\gamma \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ \alpha^2\gamma \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ \alpha^3\gamma \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ \alpha\gamma(-1+\alpha+\alpha^2) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$Y_F(k) = \begin{vmatrix} \beta & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ \alpha\gamma(-1+\alpha+\alpha^2) \\ 0 \end{vmatrix} = \beta$$

$$\longrightarrow X_{tot}(k) = \begin{vmatrix} \gamma + 1 \\ \alpha^3 + \alpha\gamma(-1+\alpha+\alpha^2) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$Y_{tot}(k) = \gamma\beta + \beta = \beta(\gamma + 1)$$

ESAME DEL 04/05/2015

① SIA DATA LA RAPPRESENTAZIONE IN VARIABILI DI STATO DI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha x_1(t) + \alpha x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2\alpha x_1(t) + 2\alpha x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t) + x_2(t) + \alpha x_3(t) \\ y(t) = x_2(t) - \alpha x_3(t) \end{cases}$$

- STUDIARE LA STABILITÀ, LA CONTROLLABILITÀ E L'OSSERVABILITÀ DEL SISTEMA AL VARIARE DEL PARAMETRO $\alpha \in \mathbb{R}$
- POSTO $\alpha = -1$ E $x(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$, CALCOLARE LA RISPOSTA LIBERA NELLO STATO E NELL'USCITA
- POSTO $\alpha = -1$, SI STABILISCA SE È POSSIBILE DETERMINARE UNA OPPORTUNA LEGGE IN RETROAZIONE $u(t) = -Kx(t)$ TALE PER CUI GLI AUTOVALORI DEL SISTEMA A CICLO CHIUSO SIANO ASSEGNABILI AD ARBITRIO. NEL CASO IN CUI QUESTO SIA POSSIBILE, SI DETERMINI LA MATRICE K TALE PER CUI GLI AUTOVALORI DEL SISTEMA A CICLO CHIUSO SIANO PARI A $\lambda_{1DES} = 0, \lambda_{2DES} = -1, \lambda_{3DES} = -3$

② SIA DATA LA RAPPRESENTAZIONE IN VARIABILI DI STATO DI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 2x_2(k) + x_3(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = 3x_3(k) + u(k) \\ x_3(k+1) = 0 \\ y(k) = x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) \end{cases}$$

- DETERMINARE LA RISPOSTA FORZATA IN USCITA DEL SISTEMA SOLLECITATO DA UN INGRESSO A GRADINO UNITARIO
- SCOMPORRE IL SISTEMA NELLA FORMA CANONICA CONTROLLABILE DI KALMAN
- POSTO NEL SISTEMA $x_3(k+1) = \gamma x_3(k)$, DETERMINARE PER QUALI VALORI DI $\gamma \in \mathbb{R}$ IL SISTEMA DUALE RISULTA CONTROLLABILE E/O OSSERVABILE

①

$$A = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ 2\alpha & 2\alpha & 0 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\alpha \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$$

- STABILITÀ

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{vmatrix} \lambda-\alpha & -\alpha & 0 \\ -2\alpha & \lambda-2\alpha & 0 \\ -1 & -1 & \lambda-\alpha \end{vmatrix} = (\lambda-\alpha)\left((\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha) - 2\alpha^2\right)$$

$$= (\lambda-\alpha)(\lambda^2 - 2\alpha\lambda - \alpha\lambda + 2\alpha^2 - 2\alpha^2) = (\lambda-\alpha)(\lambda^2 - 2\alpha\lambda - \alpha\lambda)$$

$$\Longrightarrow P(\lambda) = \lambda^3 - 2\alpha\lambda^2 - \alpha\lambda^2 - \alpha\lambda^2 + 2\alpha^2\lambda + \alpha^2\lambda$$

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 4\alpha\lambda^2 + 3\alpha^2\lambda = \lambda(\lambda^2 - 4\alpha\lambda + 3\alpha^2)$$

TABELLA DI ROUTH

3	1	$3\alpha^2$
2	-4α	0
1	$3\alpha^2$	
0	0	

$$-\frac{1}{-4\alpha} \det \begin{vmatrix} 1 & 3\alpha^2 \\ -4\alpha & 0 \end{vmatrix} = 3\alpha^2 \qquad -\frac{1}{3\alpha^2} \det \begin{vmatrix} -4\alpha & 0 \\ 3\alpha^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

PER $\alpha < 0$ NO VARIAZIONE SEGNO $\Longrightarrow$ STABILITÀ PER $\alpha < 0$

CONTROLLABILITÀ $\quad \mathcal{C} = [\,B \;\; AB \;\; A^2B\,]$

$$B = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad AB = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ 2\alpha & 2\alpha & 0 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$A^2B = A \cdot (AB) = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ 2\alpha & 2\alpha & 0 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\alpha^2 \\ 6\alpha^2 \\ 4\alpha \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{C} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 3\alpha^2 \\ 0 & 2\alpha & 6\alpha^2 \\ 0 & 1 & 4\alpha \end{vmatrix} \qquad \det(\mathcal{C}) = 2\alpha^2 \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 0 \Rightarrow \text{CONTROLLABILITÀ COMPLETA PER } \alpha \neq 0$$

OSSERVABILITÀ $\quad \mathcal{O} = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\alpha \end{vmatrix} \qquad CA = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\alpha \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ 2\alpha & 2\alpha & 0 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & -\alpha^2 \end{vmatrix}$

$$CA^2 = (CA)\cdot A = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & -\alpha^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ 2\alpha & 2\alpha & 0 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\alpha^2 & 2\alpha^2 & -\alpha^3 \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{O} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\alpha \\ \alpha & \alpha & -\alpha^2 \\ 2\alpha^2 & 2\alpha^2 & -\alpha^3 \end{vmatrix} \qquad \det(\mathcal{O}) = -(-\alpha^4 + 2\alpha^4) - \alpha(2\alpha^3 - 2\alpha^3) = -\alpha^4 \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 0$$

$\longrightarrow$ OSSERVABILITÀ COMPLETA PER $\alpha \neq 0$

- $\alpha = -1$

$$A = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix} \quad X(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda = \lambda(\lambda+1)(\lambda+3)$$

$$\lambda = 0 \qquad \begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + 2b = 0 \\ -a - b + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\lambda = -1 \qquad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c \in \mathbb{R} (=1) \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\lambda = -3 \qquad \begin{cases} -2a + b = 0 \\ 2a - b = 0 \\ -a - b - 2c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -\frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ -3/2 \end{vmatrix}$$

DA CUI $\quad T^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} \qquad \det(T^{-1}) = -3 \Rightarrow$ POSSO DEFINIRE T

$$T = \frac{1}{-3} \begin{vmatrix} \det\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} & -\det\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} & \det\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\det\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3/2 \end{vmatrix} & \det\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3/2 \end{vmatrix} & -\det\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \det\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\det\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \det\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{vmatrix}^T = \frac{1}{-3} \begin{vmatrix} -1 & -3/2 & -1 \\ 2 & -3/2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}^T \Rightarrow T = \begin{vmatrix} 1/3 & -2/3 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\hat{X} = \Gamma \cdot B = \begin{vmatrix} 1/3 & -2/3 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/3 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{vmatrix}$$

$$\hat{X}_L = \begin{vmatrix} e^{0} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1/3 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1/3 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/3 \\ \frac{1}{2} e^{-t} \\ \frac{1}{3} e^{-3t} \end{vmatrix}$$

$$X_L = T^{-1} \cdot \hat{X}_L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} e^{-t} \\ \frac{1}{3} e^{-3t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} e^{-3t} \\ -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} e^{-3t} \\ \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-3t} \end{vmatrix}$$

$$Y_L = C \cdot X_L = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} e^{-3t} \\ -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} e^{-3t} \\ \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-3t} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} e^{-3t} + \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-3t} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{6} e^{-3t}$$

- $\lambda = -1$

$$\Rightarrow P(\lambda) = \lambda(\lambda+1)(\lambda+3) \quad \left.\begin{matrix} \lambda_1 = 0 = \lambda_{1DES} \\ \lambda_2 = -1 = \lambda_{2DES} \\ \lambda_3 = -3 = \lambda_{3DES} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$ ABBIAMO GIÀ GLI AUTOVALORI DESIDERATI

②

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$$

- $Y_F(z) = \begin{vmatrix} C(zI-A)^{-1}B + D \end{vmatrix} U(z)$

$$(zI-A) = \begin{vmatrix} z & -2 & -1 \\ 0 & z & -3 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} \qquad \det(zI-A) = z^3$$

$$(zI-A)^{-1} = \frac{1}{z^3} \begin{vmatrix} z^2 & 2z & z+6 \\ 0 & z^2 & 3z \\ 0 & 0 & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/z & 2/z^2 & \frac{z+6}{z^3} \\ 0 & 1/z & 3/z^2 \\ 0 & 0 & 1/z \end{vmatrix}$$

$$Y_F(z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1/z & 2/z^2 & \frac{z+6}{z^3} \\ 0 & 1/z & 3/z^2 \\ 0 & 0 & 1/z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{z} & \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z} & \frac{z+6}{z^3} + \frac{3}{z^2} + \frac{1}{z} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{z} & \frac{2+z}{z^2} & \frac{z^2+4z+6}{z^3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{z} + \frac{2+z}{z^2} = \frac{2+2z}{z^2}$$

- $\mathcal{C} = \begin{vmatrix} B & AB & A^2B \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad AB = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$