$$\beta = \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \frac{6}{1-e^2} \end{vmatrix}, \quad \beta_1 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow U(t) = B^T e^{A^T(t_f - t)} [G(t_f)]^{-1} X_f = B^T e^{A^T(t_f - t)} \cdot \beta$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & e^{(1-t)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \frac{6}{1-e^2} \end{vmatrix} = 6 \cdot \frac{e^{(1-t)}}{1-e^2}$$

ESERCIZIO: DATO IL SISTEMA $X^\cdot(t) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} X(t) + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} U(t)$, IN CUI $X(0) = \begin{vmatrix} e \\ e^{-1} \end{vmatrix}$, VERIFICARE CHE È POSSIBILE TRASFERIRE LO STATO DA $X(0)$ A $X_f(\bar{t}) = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$, IN UN INTERVALLO $\bar{t} = 1$, E CALCOLARE LA FUNZIONE DI INGRESSO CORRISPONDENTE

$$\mathcal{R} = |B \quad AB| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad rk(\mathcal{R}) = 1 < 2 \Rightarrow$$ SISTEMA NON COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE

LA SOLUZIONE ESISTE SE $(X_f(\bar{t}) - e^{A\bar{t}} X(0)) \in Im(\mathcal{R})$

$$Im(\mathcal{R}) = \alpha \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R} \qquad e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}] = \begin{vmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{vmatrix}$$

$$e^{A\bar{t}} = \begin{vmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e \end{vmatrix} \Rightarrow (X_f(\bar{t}) - e^{A\bar{t}} \cdot X(0)) = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e \\ e^{-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow (X_f(\bar{t}) - e^{A\bar{t}} X(0)) \in Im(\mathcal{R})$$

$$U(\tau)=B^T e^{A^T(\bar t-\tau)}[G(t)]^{-1}(x_f(\bar t)-e^{A\bar t}\cdot x(0))$$

$$G(\bar t)=\int_0^{\bar t} e^{A\tau}BB^T e^{A^T\tau}\,d\tau=\int_0^{\bar t}\begin{vmatrix}0\\ e^{\tau}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0 & e^{\tau}\end{vmatrix}d\tau$$

$$\Rightarrow G(1)=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}(e^2-1)\end{vmatrix}$$ PONIAMO $\beta=[G(1)]^{-1}(x_f(\bar t)-e^{A\bar t}x(0))$

$$\Rightarrow (x_f(\bar t)-e^{A\bar t}\cdot x(0))=G(1)\beta \qquad \beta=\begin{vmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{vmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

DA CUI $\begin{vmatrix}0\\ 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\ \frac{1}{2}\beta_2(e^2-1)\end{vmatrix}$ $\beta=\begin{vmatrix}\beta_1\\ \frac{2}{e^2-1}\end{vmatrix}$

$$U(t)=B^T\cdot e^{A^T(t_f-t)}\cdot\beta=\begin{vmatrix}0 & e^{(1-t)}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\beta_1\\ \frac{2}{e^2-1}\end{vmatrix}=2\cdot\frac{e^{(1-t)}}{e^2-1},\ t\in[0,\bar t]$$

ESERCIZIO: DATO IL SISTEMA $\dot x(t)=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}x(t)+\begin{vmatrix}0\\ 1\end{vmatrix}u(t)$, IN CUI $x(0)=\begin{vmatrix}0\\ 0\end{vmatrix}$, DIRE SE È CONTROLLABILE E, IN CASO AFFERMATIVO, INDIVIDUARE LA LEGGE CHE PORTA DA $x(0)$ A $x_f(2)=\begin{vmatrix}3\\ 3\end{vmatrix}$

$\mathcal{R}=|B\quad AB|=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}$ $rk(\mathcal{R})=2=2\Rightarrow$ SISTEMA COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE

$\Rightarrow$ SISTEMA COMPLETAMENTE CONTROLLABILE

$U(\tau)=B^T\cdot e^{A^T(\bar t-\tau)}G[(t)]^{-1}\cdot(x_f(\bar t)-e^{A\bar t}\cdot x(0))$ $G(\bar t)=\int_0^{\bar t} e^{A\tau}BB^Te^{A^T\tau}d\tau$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}] = \mathcal{L}^{-1}\left(\begin{vmatrix} 1/s & 1/s^2 \\ 0 & 1/s \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$e^{At}B = \begin{vmatrix} t \\ 1 \end{vmatrix} \qquad B^T e^{A^T t} = \begin{vmatrix} t \\ 1 \end{vmatrix}^T = \begin{vmatrix} t & 1 \end{vmatrix}$$

$$G(\bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} \begin{vmatrix} \tau \\ 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \tau & 1 \end{vmatrix} d\tau = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}t^3 & \frac{1}{2}t^2 \\ \frac{1}{2}t^2 & t \end{vmatrix}$$

$$G(2) = \begin{vmatrix} 8/3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \qquad [G(2)]^{-1} = \begin{vmatrix} 3/2 & -3/2 \\ -3/2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$u(t) = B^T \cdot e^{A^T(\bar{t}-\tau)}[G(\bar{t})]^{-1}(x_f(\bar{t}) - e^{A\bar{t}}x(0)) =$$

$$= \begin{vmatrix} 2-t & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3/2 & -3/2 \\ -3/2 & 2 \end{vmatrix} \left(\begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \right) = \frac{3}{2}$$

FORMA CANONICA CONTROLLABILE DI KALMAN

È UNO STRUMENTO UTILE PER METTERE IN EVIDENZA LE PROPRIETÀ DI CONTROLLABILITÀ DI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO. INDICATO NELLA FORMA GENERICA $\hat{x}^\cdot(t) = \hat{A} \cdot \hat{x}(t) + \hat{B} \cdot u(t)$, NELLA FORMA CANONICA CONTROLLABILE DI KALMAN È COSÌ SCRITTO:

$$\hat{A} = \left|\begin{array}{c|c} \hat{A}_c & \hat{A}_{\lambda} \\ \hline 0 & \hat{A}_{nc} \end{array}\right|, \quad \hat{B} = \left|\begin{array}{c} \hat{B}_c \\ \hline 0 \end{array}\right| :$$

- $\hat{A}_c \rightarrow$ MATRICE QUADRATA DI GRADO n_c, CONTROLLABILITÀ

- $\hat{A}_{NC} \rightarrow$ MATRICE QUADRATA DI GRADO $n-n_c$, NON CONTROLLABILITÀ
- $\hat{B}_c \rightarrow$ MATRICE DI n_c RIGHE, CONTROLLABILITÀ
- $\hat{B}_{NC} \rightarrow$ MATRICE DI $n-n_c$ RIGHE, NON CONTROLLABILITÀ.

LA COPPIA $(\hat{A}_c, \hat{B}_c)$ È CONTROLLABILE $\Rightarrow \hat{X} = \begin{vmatrix} \hat{X}_c \\ \hline \hat{X}_{NC} \end{vmatrix}$, $\hat{X}_c \in \mathbb{R}^{n_c}$ E $\hat{X}_{NC} \in \mathbb{R}^{n-n_c}$ $\Rightarrow$ IL SISTEMA SI DECOMPONE IN DUE SOTTOSISTEMI:

— SOTTOSISTEMA CONTROLLABILE DI ORDINE n_c GOVERNATO DALL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE $\hat{X}_c^{\bullet}(t) = \hat{A}_c \cdot \hat{X}_c(t) + \hat{A}_1 \cdot \hat{X}_{NC}(t) + \hat{B}_c \cdot U(t)$

— SOTTOSISTEMA NON CONTROLLABILE DI ORDINE $n-n_c$ GOVERNATO DALL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE $\hat{X}_{NC}^{\bullet}(t) = \hat{A}_{NC} \cdot \hat{X}_{NC}(t)$

TEOREMA: DATO UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$$\begin{cases} X^{\bullet}(t) = A \cdot X(t) + B \cdot U(t) \\ Y(t) = C \cdot X(t) + D \cdot U(t) \end{cases}$$

, SI RICONDUCE ALLA FORMA CONTROLLABILE DI KALMAN ATTRAVERSO LA TRASFORMAZIONE $X(t) = T^{-1} \cdot \hat{X}(t)$, DOVE T^{-1} È UNA MATRICE NON SINGOLARE IN CUI LE PRIME n_c COLONNE COINCIDONO CON LE n_c COLONNE DI C E LE ALTRE $n-n_c$ COLONNE SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI TRA LORO E TRA LE ALTRE n_c

ESERCIZIO: $\dot{X}(t) = A\cdot X(t) + B\cdot U(t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot X(t) + \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \cdot U(t)$

- AUTOVALORI DI A: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$
- $\mathcal{C} = |\ B \quad AB \quad A^2B\ | = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ $rk(\mathcal{C}) = n_c = 2$

$\Rightarrow t_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix},\ t_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad t_3 : \begin{cases} t_1^T \cdot t_3 = 0 \\ t_2^T \cdot t_3 = 0 \end{cases}$ $\quad t_3 \perp t_1,\ t_3 \perp t_2$

$\Rightarrow t_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ t_{3,3} \end{vmatrix};\ t_{3,3} \in \mathbb{R}.$ PONIAMOLO $= 1$

$\Rightarrow T^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad T = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$\hat{A} = T\cdot A\cdot T^{-1} = \left|\begin{array}{c|c} \hat{A}_c & \hat{A}_1 \\ \hline 0 & \hat{A}_{nc} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|c} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 \end{array}\right|$$

$$B \quad \hat{B} = T\cdot B = \left|\begin{array}{c} \hat{B}_c \\ \hline 0 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right|$$

OSSERVABILITÀ/DETERMINABILITÀ

QUESTE PROPRIETÀ CONSENTONO DI STIMARE LO STATO DEL SISTEMA $X(0)$ TRAMITE LA MISURA DEL MOVIMENTO DELL'USCITA $Y(\cdot)$ E DELL'

INGRESSO U(t). L'OSSERVABILITÀ DESCRIVE LA STIMA DELLO STATO INIZIALE E LA DETERMINABILITÀ CONSENTE DI STIMARE LO STATO FINALE

STATO OSSERVABILE

UNO STATO $x^* \neq 0$ DEL SISTEMA $\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$ SI

DICE NON OSSERVABILE IN $[t_0, t^*]$ SE $\forall t^* \in [t_0, +\infty)$ $\exists$ $y_e(t)$ CONSEGUENTE A $x(t_0)$ | $y_e(t) = 0$ $\forall t \in [t_0, t^*]$.

OSSIA L'ANALISI DI UN TRATTO QUALSIASI NON CONSENTA DI DISTINGUERE x^* DA $x=0$ CHE GENERA RISPOSTA LIBERA NULLA.

SI NOTI CHE B E D NON HANNO RUOLO NELL'OSSERVABILITÀ, DUNQUE ATTRIBUITA ALLA COPPIA A, C.

UN SISTEMA SI DICE OSSERVABILE SE $\exists$ $[t_0, t_R]$ | NOTI $u(\cdot)$ E $y(\cdot)$ SI DETERMINA SEMPRE E UNIVOCAMENTE IL VALORE DELLO STATO DI ESSO ALL'INIZIO DELL'ANALISI, OSSIA $x(t_0)$.

L'INSIEME DI TUTTI GLI STATI NON OSSERVABILI IN $[t_0, t^*]$ È DATO DALL'INSIEME DI NON OSSERVABILITÀ $\chi_{NO}(t^*)$ IN t^* E $\chi_{NO}(t^*) \subseteq \chi$.

Il sottospazio di non osservabilità è definito come l'insieme di non osservabilità di dimensione minima $\mathcal{X}_{NO} = \min_{t \in [t_0, \infty)} \mathcal{X}_{NO}(t)$.

Il sottospazio di osservabilità si definisce come il complementare di $\mathcal{X}_{NO} \Rightarrow \mathcal{X}_O = \overline{\mathcal{X}_{NO}}$. Un sistema è completamente osservabile se $\mathcal{X}_O = \mathcal{X}$

STATO DETERMINABILE

Uno stato $x^* \neq 0$ del sistema $\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$ si dice non determinabile in $[t_0, t^*]$ se $\forall t^* \in [t_0, +\infty)\ \exists\, y_e(t)$ con stato finale $x(t^*) = 0 \mid y_e(t) = 0\ \forall t \in [t_0, t^*]$.

Ossia l'analisi di un tratto qualsiasi con stato finale x^* non è distinguibile da $x = 0$

Si noti che B e D non hanno ruolo nella determinabilità, dunque attribuita alla coppia A, C.

Un sistema si dice determinabile se $\exists\, [t_0, t_f] \mid$ noti $u(\cdot)$ e $y(\cdot)$ si determina sempre e univocamente il valore dello stato finale $x(t_f)$

L'insieme di tutti gli stati non determinabili in $[t_0, t^*]$ è dato dall'insieme di non determinabilità $\mathcal{X}_{ND}(t^*)$ in t^* e $\mathcal{X}_{ND}(t^*) \subseteq \mathcal{X}$.

IL SOTTOSPAZIO DI NON DETERMINABILITÀ È DEFINITO COME L'INSIEME DI NON DETERMINABILITÀ DI DIMENSIONE MINIMA $\mathcal{X}_{ND} = \min_{t \in [t_0, t_f]} \mathcal{X}_{ND}(t)$.

IL SOTTOSPAZIO DI DETERMINABILITÀ SI DEFINISCE COME IL COMPLEMENTARE DI $\mathcal{X}_{ND} \Rightarrow \mathcal{X}_D = \overline{\mathcal{X}_{ND}}$. UN SISTEMA È COMPLETAMENTE DETERMINABILE SE $\mathcal{X}_D = \mathcal{X}$

IN GENERE, L'OSSERVABILITÀ IMPLICA LA DETERMINABILITÀ MA NON SEMPRE VALE IL VICEVERSA; VALE SOLO PER SISTEMI LINEARI E STAZIONARI A TEMPO CONTINUO. PER QUESTI SISTEMI, INFATTI, L'INVERSA DELLA MATRICE DI TRANSIZIONE DELLO STATO $e^{A(t-t_0)}$ CONSENTE DI RICAVARE LO STATO INIZIALE $x(t_f) = e^{A(t-t_0)} \cdot x(t_0)$. PER SISTEMI LINEARI E STAZIONARI, $\mathcal{X}_O \equiv \mathcal{X}_D$.

PER COMODITÀ, SI STUDIANO SEMPRE LE PROPRIETÀ DI OSSERVABILITÀ.

PROBLEMA DELL'OSSERVABILITÀ

DATA LA FUNZIONE DI INGRESSO $u(\cdot)$ E DI USCITA $y(\cdot)$ IN UN INTERVALLO DI TEMPO $[t_0, t_f]$, È POSSIBILE DETERMINARE $x(t_0)$?

TEOREMA: LO STATO INIZIALE $x(t_0)$ DI UN SISTEMA OSSERVABILE PUÒ ESSERE DETERMINATO CONOSCENDO $u(\cdot)$ E $y(\cdot)$ IN $[t_0, t_f]$. PRIMA SI DETERMINA $y_f(t) = \int_{t_0}^{t} C \cdot e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) d\tau + D \cdot u(t)$ E, NOTO $y(t)$, $y_e(t) = y(t) - y_f(t)$

DA CUI $x(t_0)=[V(t)]^{-1}\cdot\int_{t_0}^{t} e^{A^T(t-\tau)}\cdot C^T\cdot y_l(t)\,d\tau$, IN CUI

$V(t)=\int_{t_0}^{t} e^{A^T(t-\tau)}\cdot C^T\cdot C\cdot e^{A(t-\tau)}\,d\tau$ È IL GRAMIANO DI OSSERVABILITÀ, MATRICE $n\times n$ NON SINGOLARE $\forall t>t_0$.

TEOREMA: UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO È OSSERVABILE $\Leftrightarrow$ $V(t)$ È NON SINGOLARE $\forall t>t_0$.

TALE TEOREMA FORNISCE UN CRITERIO, SEPPUR MOLTO LABORIOSO, PER VERIFICARE L'OSSERVABILITÀ. SE SI È INTERESSATI SOLO AD ESSA, PUÒ AIUTARCI IL SEGUENTE CRITERIO: DATO UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=A\cdot x(t)+B\cdot u(t) \\ y(t)=C\cdot x(t)+D\cdot u(t) \end{cases},$$

DOVE $x\in\mathbb{R}^n$ E $y\in\mathbb{R}^p$, DEFINIAMO LA MATRICE DI OSSERVABILITÀ $p\cdot n\times n$ $\mathcal{O}=\begin{vmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{vmatrix}$. CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE AFFINCHÈ IL SISTEMA SIA COMPLETAMENTE OSSERVABILE È CHE $n_o=rk(\mathcal{O})=n$

SI CONSIDERI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO COSÌ DESCRITTO:

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}\cdot x(t) \\ y(t)=\begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots & c_{n,n} \end{vmatrix}\cdot y(t) \end{cases}$$

A IN FORMA DIAGONALE, AUTOVALORI REALI E DISTINTI

CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE AFFINCHÈ UN SISTEMA SIA OSSERVABILE È CHE $\mathcal{O}$ NON ABBIA COLONNE IDENTICAMENTE NULLE.

L'OSSERVABILITÀ SI CONSERVA IN TUTTE LE DIVERSE RAPPRESENTAZIONI

TEOREMA: SI CONSIDERINO LE DUE RAPPRESENTAZIONI SEGUENTI:

$\dot{x}(t)=A\cdot x(t)+B\cdot u(t)$, $\dot{\hat{x}}(t)=\hat{A}\cdot\hat{x}(t)+\hat{B}\cdot u(t)$; $\hat{x}(t)=T\cdot x(t)$,

$\hat{A}=T\cdot A\cdot T^{-1}$, $\hat{B}=T\cdot B$, $T\in\mathbb{R}^{n\times n}$. LA PRIMA REALIZZAZIONE È OSSERVABILE $\Longleftrightarrow$ LA SECONDA REALIZZAZIONE È OSSERVABILE

E $$\hat{\mathcal{O}}=\begin{vmatrix}\hat{C}\\ \hat{C}\cdot\hat{A}\\ \vdots\\ \hat{C}\cdot\hat{A}^{n-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}C\cdot T^{-1}\\ C\cdot T^{-1}\cdot T\cdot A\cdot T^{-1}\\ \vdots\\ C\cdot T^{-1}\cdot\underbrace{T\cdot A\cdot T^{-1}\cdots T\cdot A\cdot T^{-1}}_{n-1\text{ VOLTE}}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}C\cdot T^{-1}\\ C\cdot A\cdot T^{-1}\\ \vdots\\ C\cdot T^{-1}\cdot A^{n-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}C\\ CA\\ \vdots\\ CA^{n-1}\end{vmatrix}\cdot T^{-1}=\mathcal{O}\cdot T^{-1}$$

ESEMPIO:
$$\begin{cases}\dot{x}(t)=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}\cdot x(t)+\begin{vmatrix}0\\ 1\\ 1\end{vmatrix}\cdot u(t)\\ y(t)=\begin{vmatrix}0 & 1 & -1\end{vmatrix}\cdot x(t)\end{cases}$$

① DIRE SE LO STATO È COMPLETAMENTE OSSERVABILE

② OSSERVATO CHE $u(t)=0$ PER $t\in[0,2]$ E, CONSIDERANDO CHE $y_e(t)=2e^{-t}+3$, DETERMINARE SE È POSSIBILE LO STATO INIZIALE (O GLI INFINITI STATI INIZIALI) CHE POSSONO DAR LUOGO A $y_e(t)$

① $O = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{vmatrix}$ $C = |0 \quad 1 \quad -1|$ $A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$CA = |0+0+0 \quad 0-1+0 \quad 0+0+0| = |0 \quad -1 \quad 0|$

$CA^2 = |0+0+0 \quad 0+1+0 \quad 0+0+0| = |0 \quad 1 \quad 0|$

$\Rightarrow O = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $rK(O) = 2 < 3 \Rightarrow$ NON COMPLETAMENTE OSSERVABILE

② ESSENDO NON OSSERVABILE, NON SI PUÒ DETERMINARE UNIVOCAMENTE

$X(t_0) \Rightarrow \exists$ INFINITI STATI INIZIALI CHE DANNO LUOGO A $Y_\ell(t)$

$$X(t_0) = V^{-1}(t_f) \cdot \int_0^{t_f} e^{A^T\tau} \cdot C^T \cdot Y_\ell(\tau) d\tau$$

$$V(t_f) = \int_0^{t_f} e^{A^T\tau} \cdot C^T \cdot C \cdot e^{A\tau} d\tau$$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}] = \mathcal{L}^{-1}\left[\begin{vmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)^2} & 0 \\ 0 & 1/(s+1) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s} \end{vmatrix}\right] = \begin{vmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$C \cdot e^{At} = |0 \quad e^{-t} \quad -1|$$

$$e^{A^Tt} \cdot C^T = \begin{vmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$V(t_f) = \int_0^{t_f} \begin{vmatrix} 0 \\ e^{-\tau} \\ -1 \end{vmatrix} \cdot |0 \quad e^{-\tau} \quad -1| d\tau = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-e^{-2t_f}) & e^{-t_f}-1 \\ 0 & e^{-t_f}-1 & t_f \end{vmatrix}$$

$$V(2) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-e^{-4}) & e^{-2}-1 \\ 0 & e^{-2}-1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$X(t_0) = V^{-1}(t_f) \cdot \int_0^{t_f} e^{A^T\tau} \cdot C^T \cdot Y_\ell(\tau) d\tau$$

PONIAMO $V(t_f)\cdot X(t_0)=\int_0^{t_f} e^{A^T\tau}\cdot C^T\cdot Y_\ell(\tau)\,d\tau \qquad t_0=0$

$$\Rightarrow V(2)\cdot X(0)=\int_0^{2} e^{A^T\tau}\cdot C^T\cdot Y_\ell(\tau)\,d\tau \qquad X(0)=\begin{vmatrix} X_1(0)\\ X_2(0)\\ X_3(0)\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}(1-e^{-4}) & e^{-2}-1\\ 0 & e^{-2}-1 & 2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} X_1(0)\\ X_2(0)\\ X_3(0)\end{vmatrix}=\int_0^2\begin{vmatrix} 0\\ e^{-\tau}\\ -1\end{vmatrix}\cdot|2e^{-\tau}+3|\,d\tau$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}(1-e^{-4}) & e^{-2}-1\\ 0 & e^{-2}-1 & 2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} X_1(0)\\ X_2(0)\\ X_3(0)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0\\ 4-e^{-4}-3e^{-2}\\ 2e^{-2}-8\end{vmatrix}$$

DA CUI $\begin{vmatrix} X_1(0)\\ X_2(0)\\ X_3(0)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \alpha\\ 2\\ -3\end{vmatrix},\ \alpha\in\mathbb{R}$

ESERCIZIO: $\begin{cases} \dot{X}(t)=\begin{vmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}\cdot X(t)\\ Y(t)=|1 \quad 0|\cdot X(t)\end{cases}$

① DIRE SE LO STATO È COMPLETAMENTE OSSERVABILE

② OSSERVATO CHE $U(t)=0$ PER $t\in[0,1]$ E, CONSIDERANDO CHE $Y_\ell(t)=1+2t$, DETERMINARE LO STATO INIZIALE $X(t_0)$, $t_0=0$

① $\mathcal{O}=\begin{vmatrix} C\\ CA\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}$ $rk(\mathcal{O})=2=n\Rightarrow$ COMPLETAMENTE OSSERVABILE

② $X(0)=V^{-1}(t_f)\cdot\int_0^{t_f} e^{A^T\tau}\cdot C^T\cdot Y_\ell(\tau)\,d\tau$

$$V(t_k) = \int_0^{t_k} e^{A^T\tau} \cdot C^T \cdot C \cdot e^{A\tau}\, d\tau$$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\begin{vmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{vmatrix}\right] = \begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$C \cdot e^{At} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t \end{vmatrix} \Rightarrow e^{A^T t} \cdot C^T = \begin{vmatrix} 1 \\ t \end{vmatrix}$$

$$V(t_k) = \int_0^{t_k} \begin{vmatrix} 1 \\ \tau \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{vmatrix} d\tau = \int_0^{t_k} \begin{vmatrix} 1 & \tau \\ L & \tau^2 \end{vmatrix} d\tau = \begin{vmatrix} t_k & \frac{1}{2}t_k^2 \\ \frac{1}{2}t_k^2 & \frac{1}{3}t_k^3 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow V(1) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} \Rightarrow V^{-1}(1) = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{vmatrix}$$

$$X(0) = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{vmatrix} \cdot \int_0^{t_k} \begin{vmatrix} 1 \\ \tau \end{vmatrix} \cdot (1+2\tau)\, d\tau =$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{vmatrix} \cdot \int_0^{t_k} \begin{vmatrix} 1+2\tau \\ \tau+2\tau^2 \end{vmatrix} d\tau = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow X(t_k) = e^{At_k} \cdot X(0) + \int_0^{t_k} e^{A(t_k-\tau)} \cdot B \cdot U(\tau)\, d\tau =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & t_k \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2t_k + 1 \\ 2 \end{vmatrix} \qquad X(1) = \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix}$$

ESERCIZIO:

$$
\begin{cases}
\dot{x}(t) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot x(t) + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot u(t) \\[2ex]
y(t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot x(t) + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot u(t)
\end{cases}
$$

1. STUDIARE CONTROLLABILITÀ ED OSSERVABILITÀ
2. CALCOLARE IL GRAMIANO DI CONTROLLABILITÀ E QUELLO DI OSSERVABILITÀ

① $\mathcal{R} = \begin{vmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{vmatrix} =$

$$
\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =
$$

$$
\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad rk(\mathcal{R}) = 2 < 4
$$

$\Longrightarrow$ SISTEMA NON COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE

$\Longrightarrow$ SISTEMA NON COMPLETAMENTE CONTROLLABILE

$$\mathcal{O} = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$rk(\mathcal{O}) = 4 \Rightarrow$ SISTEMA COMPLETAMENTE OSSERVABILE

② $G(t) = \int_0^t e^{A\tau} \cdot B \cdot B^T \cdot e^{A^T\tau} \, d\tau \qquad V(t) = \int_0^t e^{A^T\tau} \cdot C^T \cdot C \, e^{A\tau} \, d\tau$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\begin{vmatrix} 1/s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/s & 0 & 0 \\ 0 & 1/s^2 & 1/s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s+1} \end{vmatrix}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{vmatrix}$$

$$e^{At} \cdot B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -2 \\ e^{-t} & 0 \end{vmatrix}$$

$$B^T \cdot e^{A^Tt} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{-t} \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$G(t) = \int_0^t \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ e^{-\tau} & -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{-\tau} \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} d\tau = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} \end{vmatrix}$$

$\det(G(t)) = 0 \Rightarrow$ NON RAGGIUNGIBILE $\Rightarrow$ NON CONTROLLABILE

$$C \cdot e^{At} = \left[\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{vmatrix}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -e^{-t} \\ 0 & t & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$e^{A^T t} \cdot C^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \\ 0 & 1 \\ -e^{-t} & 0 \end{vmatrix}$$

$$V(t) = \int_0^t e^{A^T \tau} \cdot C^T \cdot C \cdot e^{A\tau}\, d\tau = \int_0^t \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -e^{-\tau} \\ 0 & \tau & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau \\ 0 & 1 \\ -e^{-\tau} & 0 \end{vmatrix} d\tau =$$

$$= \int_0^t \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -e^{-\tau} \\ 0 & \tau^2 & \tau & 0 \\ 0 & \tau & 1 & 0 \\ -e^{-\tau} & 0 & 0 & e^{-2\tau} \end{vmatrix} d\tau = \begin{vmatrix} t & 0 & 0 & e^{-t}-1 \\ 0 & \frac{1}{3}t^3 & \frac{1}{2}t^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}t^2 & t & 0 \\ e^{-t}-1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t} \end{vmatrix}$$

$\det(V(t)) \neq 0 \Rightarrow$ SISTEMA OSSERVABILE $\Rightarrow$ SISTEMA DETERMINABILE

FORMA CANONICA OSSERVABILE DI KALMAN

È UNO STRUMENTO UTILE PER METTERE IN EVIDENZA LE PROPRIETÀ DI OSSERVABILITÀ DI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO. INDICATO NELLA FORMA GENERICA $\begin{cases} \hat{x}'(t) = \hat{A} \cdot \hat{x}(t) \\ \hat{y}(t) = \hat{C} \cdot \hat{x}(t) \end{cases}$, NELLA FORMA CANONICA OSSERVABILE DI KALMAN È COSÌ SCRITTO:

$$\hat{A} = \left|\begin{array}{c|c} \hat{A}_0 & 0 \\ \hline \hat{A}_1 & \hat{A}_{no} \end{array}\right|, \quad \hat{C} = \left|\begin{array}{c|c} \hat{C}_0 & 0 \end{array}\right|:$$

- $\hat{A}_0 \rightarrow$ MATRICE QUADRATA DI GRADO n_c, OSSERVABILITÀ
- $\hat{C}_0 \rightarrow n_c$ COLONNE

LA COPPIA $(\hat{A}_0, \hat{C}_0)$ È OSSERVABILE

$\Rightarrow \hat{x} = \begin{vmatrix} \hat{x}_0 \\ ---- \\ \hat{x}_{NO} \end{vmatrix}$, $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^{n_0}$; $\hat{x}_{NO} \in \mathbb{R}^{n-n_0}$ $\Rightarrow$ IL SISTEMA SI SCOMPONE:

- SOTTOSISTEMA OSSERVABILE DI ORDINE n_0 GOVERNATO DALL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE $\dot{\hat{x}}_0(t) = \hat{A}_0 \cdot \hat{x}_0(t)$
- SOTTOSISTEMA NON OSSERVABILE DI ORDINE $n-n_0$ GOVERNATO DALL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE $\dot{\hat{x}}_{NO}(t) = \hat{A}_{NO} \cdot \hat{x}_{NO}(t) + \hat{A}_1 \cdot \hat{x}_0(t)$

$\rightarrow y(t) = \hat{C}_0 \cdot \hat{x}_0(t)$ L'USCITA NON È INFLUENZATA DA $\hat{x}_{NO}$

OGNI SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO PUÒ ESSERE RICONDOTTO ALLA FORMA CANONICA OSSERVABILE DI KALMAN

TEOREMA: DATO UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) \end{cases}$$

, PUÒ ESSERE RICONDOTTO ALLA FORMA CANONICA OSSERVABILE DI KALMAN ATTRAVERSO UNA TRASFORMAZIONE DI SIMILITUDINE $x(t) = T^{-1} \cdot \hat{x}(t)$, DOVE T^{-1} È UNA MATRICE NON SINGOLARE LE CUI PRIME n_0 COLONNE COINCIDONO CON n_0 RIGHE LINEARMENTE INDIPENDENTI DELLA MATRICE DI OSSERVABILITÀ $\mathcal{O}$ E LE RIMANENTI SONO PARI A $n-n_0$