$$\begin{matrix} s \\ 1 \end{matrix}\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-A \\ -2A=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{s^2-1}=\frac{1}{2(s-1)}-\frac{1}{2(s+1)}$$

$$-\frac{2}{s^2-1}=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1} \qquad \begin{matrix} s \\ 1 \end{matrix}\begin{cases} A+B=1 \\ A-B=2 \end{cases} \quad \begin{cases} B=1-A \\ 2A-1=2 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-\frac{1}{2} \\ A=\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\frac{s+2}{s^2-1}=\frac{3}{2(s-1)}-\frac{1}{2(s+1)}$$

$$X_L(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[X_L(s)\right]=\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{2}e^{-t} \\ -e^{t}+e^{-t} \\ \frac{3}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{-t} \end{vmatrix} \qquad Y_L(t)=-\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{2}e^{-t}$$

- $d=-2$

$$\rightarrow A=\begin{vmatrix} 0 & -4 & -4 \\ 0 & -8 & -8 \\ -4 & 2 & 2 \end{vmatrix} \quad B=\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad C=\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad D=\begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$$

$$p(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\det\begin{vmatrix} \lambda & 4 & 4 \\ 0 & \lambda+8 & 8 \\ 4 & -2 & \lambda-2 \end{vmatrix}=\lambda\left((\lambda+8)(\lambda-2)+16\right)+4\left(32-4\lambda-32\right)$$

$$=\lambda\left(\lambda^2+6\lambda-16+16\right)+4(-4\lambda)=\lambda^3+6\lambda^2-16\lambda$$ GIÀ AD OCCHIO $\lambda_1=6\neq\lambda_{DES}$

$\alpha_0=0$

$\alpha_1=-16$ GIÀ VERIFICATA LA CONTROLLABILITÀ $\Rightarrow$ NON È POSSIBILE DEFINIRE UNA LEGGE IN RETROAZIONE

$\alpha_2=6$

$$q(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda+4)(\lambda+6)=(\lambda^2+6\lambda+8)(\lambda+6)=\lambda^3+12\lambda^2+44\lambda+48$$

$\beta_0=48 \quad \beta_1=44 \quad \beta_2=12$

$$T^{-1}=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & -4 & 24 \\ 1 & -8 & 24 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} -16 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -40 & -2 & 1 \\ 16 & 2 & 0 \end{vmatrix} \qquad \det(T^{-1})=4(-80+32)=-192$$

$$T=\begin{vmatrix} -\frac{1}{96} & 0 & \frac{1}{48} \\ \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \end{vmatrix} \qquad K=\left[(\beta_0-\alpha_0)\quad(\beta_1-\alpha_1)\quad(\beta_2-\alpha_2)\right]\cdot T=\begin{vmatrix} 48 & 60 & 6 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} -\frac{1}{96} & 0 & \frac{1}{48} \\ \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \end{vmatrix}$$

$$K=\begin{vmatrix} -\frac{9}{8} & 4 & \frac{69}{2} \end{vmatrix}$$

② $A=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad B=\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad C=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad D=\begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$

- $Y_F(z)=C\cdot(zI-A)^{-1}\cdot B\cdot U(z) \qquad U(z)=1$

$$zI-A=\begin{vmatrix} z & -2 & -1 \\ 0 & z & -3 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} \qquad \det(z)=z^3 \Rightarrow (zI-A)^{-1}=-\frac{1}{z^3}\cdot\begin{vmatrix} z^2 & 2z & 6+z \\ 0 & z^2 & 3z \\ 0 & 0 & z^2 \end{vmatrix}$$

$$(zI-A)^{-1}=\begin{vmatrix} -\frac{1}{z} & -\frac{2}{z^2} & -\frac{6+z}{z^3} \\ 0 & -\frac{1}{z} & -\frac{3}{z^2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{z} \end{vmatrix} \qquad C\cdot(zI-A)^{-1}\cdot B=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\cdot(zI-A)^{-1}\cdot\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} -\frac{2}{z}-\frac{3}{z^2}-\frac{1}{z^3} & -\frac{1}{z}-\frac{3}{z^2} & -\frac{1}{z} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}=\cancel{-\frac{30}{z}-\frac{10}{z^2}} \quad -\frac{2}{z}-\frac{6}{z^2}-\frac{6}{z^3}$$

- $\mathcal{C}=\begin{vmatrix} B & AB & A^2B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad rk(\mathcal{C})=2<3$

$$t_1=\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad t_2=\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad t_3=\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \quad \begin{cases} \langle t_1, t_3\rangle=0 \\ \langle t_2, t_3\rangle=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases} (c\in\mathbb{R}) \Rightarrow T^{-1}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(T^{-1})=2 \Rightarrow T=-\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\hat{A}=T\cdot A\cdot T^{-1}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \hat{A}_c \quad \hat{A}_{12} \\ \hat{A}=\left|\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \\ 0 \quad \hat{A}_{nc} \end{array}$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{C} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$\det(\mathcal{C}) = 0 \Rightarrow$ SISTEMA NON COMPLETAMENTE CONTROLLABILE $\forall \gamma \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{O} = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4+\gamma \\ 0 & 0 & \gamma^2+4\gamma+6 \end{vmatrix}$$

$\det(\mathcal{O}) = 2(\gamma^2+4\gamma+6) \neq 0 \quad \gamma^2+4\gamma+6 \neq 0 \ \forall \gamma \in \mathbb{R} \Rightarrow$ SISTEMA COMPLETAMENTE OSSERVABILE $\forall \gamma \in \mathbb{R}$

ESAME DEL 17/09/2020

① Sia data la rappresentazione in variabili di stato di un sistema lineare e stazionario

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2\alpha \cdot x_1(t) + 2\alpha \cdot x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = 4\alpha \cdot x_1(t) + 4\alpha \cdot x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = 2x_1(t) + 2x_2(t) + 2\alpha \cdot x_3(t) \\ y(t) = 2x_2(t) - 2\alpha \cdot x_3(t) \end{cases}$$

- Studiare la stabilità, la controllabilità e l'osservabilità del sistema
- Posto $\alpha = 0$ e $x(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$, calcolare la risposta libera nello stato e nell'uscita
- Nel caso $\alpha = -2$, si stabilisca se è possibile determinare una opportuna legge in retroazione $u(t) = -K \cdot x(t)$ tale per cui gli autovalori del sistema a ciclo chiuso siano assegnabili ad arbitrio. Nel caso in cui questo sia possibile, si determini la matrice K tale per cui gli autovalori del sistema a ciclo chiuso siano pari a $\lambda_{1DES} = -1$, $\lambda_{2DES} = -4$, $\lambda_{3DES} = -10$

② Sia data la rappresentazione in variabili di stato di un sistema lineare e stazionario

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 2x_1(k) + \gamma u(k) \\ x_2(k+1) = 2x_2(k) + 2u(k) \\ x_3(k+1) = -2\alpha x_3(k) \\ y(k) = 2x_2(k) - 2\beta x_3(k) \end{cases} \quad \text{con } x(0) = \begin{vmatrix} 1 \\ \gamma \\ 1 \end{vmatrix}$$

- Determinare il valore della risposta libera nello stato e nell'uscita al tempo $k = 4$
- Determinare il valore della risposta forzata nell'uscita al tempo $k=4$ relativa all'ingresso al gradino $u(k) = 1$ per $k \geq 0$
- Determinare il valore della risposta totale nell'uscita al tempo $k = 4$ relativa all'ingresso $u(k) = \cos(k\frac{\pi}{2})$ per $k \geq 0$

①
$$A = \begin{vmatrix} 2\alpha & 2\alpha & 0 \\ 4\alpha & 4\alpha & 0 \\ 2 & 2 & 2\alpha \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2\alpha \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$$

- STABILITÀ: $P(\lambda) = 0$ $\quad \det(\lambda I - A) = \det \begin{vmatrix} \lambda-2\alpha & -2\alpha & 0 \\ -4\alpha & \lambda-4\alpha & 0 \\ -2 & -2 & \lambda-2\alpha \end{vmatrix} = (\lambda-2\alpha)(\lambda^2 - 6\alpha\lambda + 8\alpha^2 - 8\alpha^2)$

$P(\lambda) = \lambda(\lambda-2\alpha)(\lambda-6\alpha)$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0, \ \nu_1 = 1 \ \checkmark \\ \lambda_2 = 2\alpha \ \nu_2 = 1 \\ \lambda_3 = 6\alpha \ \nu_3 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2\alpha < 0 \\ 6\alpha < 0 \end{cases} \quad \text{STABILITÀ } \forall \alpha < 0$$

CONTROLLABILITÀ $\quad C = \begin{vmatrix} B & AB & A^2B \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad AB = \begin{vmatrix} 2\alpha \\ 4\alpha \\ 2 \end{vmatrix} \quad A^2B = \begin{vmatrix} 12\alpha^2 \\ 24\alpha^2 \\ 16\alpha \end{vmatrix}$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 2\alpha & 12\alpha^2 \\ 0 & 4\alpha & 24\alpha^2 \\ 0 & 2 & 16\alpha \end{vmatrix} \qquad \det(C) = 64\alpha^2 - 48\alpha^2 \neq 0 \text{ PER } \alpha \neq 0 \quad \text{CONTROLLABILITÀ } \forall \alpha \neq 0$$

OSSERVABILITÀ $\quad O = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2\alpha \end{vmatrix} \quad CA = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -4\alpha^2 \end{vmatrix} \quad CA^2 = \begin{vmatrix} -8\alpha^2 & -8\alpha^2 & -8\alpha^3 \end{vmatrix}$

$$O = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2\alpha \\ 0 & 0 & -4\alpha^2 \\ -8\alpha^2 & -8\alpha^2 & -8\alpha^3 \end{vmatrix} \qquad \det(O) = 4\alpha^2 \cdot 16\alpha^2 = 64\alpha^2 \neq 0 \text{ PER } \alpha \neq 0 \quad \text{OSSERVABILITÀ } \forall \alpha \neq 0$$

- $\alpha = 0 \implies A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix} \quad X(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$

$$X_L(s) = (sI-A)^{-1} \cdot X(0) \implies X_L(t) = \mathcal{L}^{-1}[X_L(s)] \qquad Y_L(t) = C \cdot X_L(t)$$

$$sI - A = \begin{vmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ -2 & -2 & s \end{vmatrix} \quad \det(sI-A) = s^3 \quad (sI-A)^{-1} = -\frac{1}{s^3} \cdot \begin{vmatrix} s^2 & 0 & 0 \\ 0 & s^2 & 0 \\ 2s & 2s & s^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{s} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{s} & 0 \\ -\frac{2}{s^2} & -\frac{2}{s^2} & -\frac{1}{s} \end{vmatrix}$$

$$X_L(s) = \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{1}{s} \\ -\frac{2}{s^2} \end{vmatrix} \implies X_L(t) = \begin{vmatrix} 0 \\ -\varepsilon(t) \\ -2t \end{vmatrix} \implies Y_L(t) = -2\varepsilon(t)$$

- $\alpha = -2 \implies A = \begin{vmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -8 & -8 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda+4)(\lambda^2+12\lambda+32-32) = \lambda(\lambda+4)(\lambda+12) \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -4 \\ \lambda_3 = -12 \end{matrix} \quad \neq \lambda_{DES}$$

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 16\lambda^2 + 48\lambda \qquad \alpha_0 = 0 \quad \alpha_1 = 48 \quad \alpha_2 = 16 \quad \text{GIÀ VERIFICATA LA CONTROLLABILITÀ}$$

$$q(\lambda) = (\lambda - \lambda_{1DES})(\lambda - \lambda_{2DES})(\lambda - \lambda_{3DES}) = (\lambda+1)(\lambda+4)(\lambda+20)$$

$$q(\lambda) = \lambda^3 + 25\lambda^2 + 104\lambda + 80 \qquad \beta_0 = 80 \quad \beta_1 = 104 \quad \beta_2 = 25$$

$$T^{-1} = C \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 48 \\ 0 & -8 & 96 \\ 0 & 2 & -32 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 48 & 16 & 1 \\ 16 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 32 & 12 & 1 \\ -32 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad \det(T^{-1}) = -64$$

$$T = -\frac{1}{-64} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -32 \\ -64 & 64 & 128 \end{vmatrix} \qquad K = \begin{vmatrix} (\beta_0 - \alpha_0) & (\beta_1 - \alpha_1) & (\beta_2 - \alpha_2) \end{vmatrix} \cdot T =$$

$$= \begin{vmatrix} 80 & 56 & 9 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{32} & -8 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \rightarrow K = \begin{vmatrix} 9 & -\frac{23}{2} & -346 \end{vmatrix}$$

② $A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha \end{vmatrix}$ $B = \begin{vmatrix} \gamma \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}$ $C = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2\beta \end{vmatrix}$ $D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$ $X(0) = \begin{vmatrix} 1 \\ \gamma \\ 1 \end{vmatrix}$

- $X_L(K) = A^K \cdot X(0)$ $\quad Y_L(K) = C \cdot X_L(K)$ ESSENDO DIAGONALE, $A^K = \begin{vmatrix} 2^K & 0 & 0 \\ 0 & 2^K & 0 \\ 0 & 0 & (-2\alpha)^K \end{vmatrix}$ $K=4$

$$X_L(4) = \begin{vmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16\alpha^4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ \gamma \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 \\ 16\gamma \\ 16\alpha^4 \end{vmatrix} \qquad Y_L(4) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2\beta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 16 \\ 16\gamma \\ 16\alpha^4 \end{vmatrix} = 32(1-\alpha^4\beta)$$

- $X_F(K) = \sum_{i=0}^{K-1} A^{K-i+1} \cdot B \cdot U(K)$ $\quad U(K) = \cancel{0}\,1$

$$X_F(4) = \sum_{i=0}^{3} A^{5-i} \cdot B = \begin{vmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & -32\alpha^5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \gamma \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16\alpha^4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \gamma \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -8\alpha^3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \gamma \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4\alpha^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \gamma \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 60\gamma \\ 120 \\ 0 \end{vmatrix}$$

- $X_{tot}(4) = X_L(4) + X_F(4)$ $\quad U(4) = \cos(2\pi) = 1$

$$X_{tot}(4) = \begin{vmatrix} 16 \\ 16\gamma \\ 16\gamma^4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 60\gamma \\ 120 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16+60\gamma \\ 120+16\gamma \\ 16\gamma^4 \end{vmatrix}$$

ESAME DEL 12/11/2020

① SIA DATA LA RAPPRESENTAZIONE IN VARIABILI DI STATO DI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+3 & \alpha-1 \\ \alpha+2 & \alpha+1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{vmatrix} \end{cases}$$

- STUDIARE LA STABILITÀ, LA CONTROLLABILITÀ E L'OSSERVABILITÀ AL VARIARE DI $\alpha \in \mathbb{R}$
- POSTO $\alpha = 0$, CALCOLARE LA RISPOSTA LIBERA NELLO STATO E NELL'USCITA, TENENDO CONTO CHE $x(0) = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}$
- POSTO $\alpha = 2$, STABILIRE SE È POSSIBILE DETERMINARE UNA OPPORTUNA LEGGE IN RETROAZIONE $u(t) = -K \cdot x(t)$ TALE PER CUI GLI AUTOVALORI DEL SISTEMA A CICLO CHIUSO SIANO ASSEGNABILI AD ARBITRIO. NEL CASO IN CUI QUESTO SIA POSSIBILE, SI DETERMINI LA MATRICE K TALE PER CUI GLI AUTOVALORI DEL SISTEMA A CICLO CHIUSO SIANO PARI A $\lambda_{1DES} = -3$, $\lambda_{2DES} = -3$

② SIA DATA LA RAPPRESENTAZIONE IN VARIABILI DI STATO DI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 2x_2(k) + x_3(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = 3x_3(k) + u(k) \\ x_3(k+1) = 0 \\ y(k) = x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) \end{cases}$$

- DETERMINARE LA RISPOSTA FORZATA IN USCITA DEL SISTEMA SOLLECITATO DA UN INGRESSO A GRADINO UNITARIO
- SCOMPORRE IL SISTEMA NELLA FORMA CANONICA CONTROLLABILE DI KALMAN
- POSTO $x_3(k+1) = \gamma x_3(k)$, DETERMINARE PER QUALI VALORI DI $\gamma \in \mathbb{R}$ IL SISTEMA DUALE RISULTA CONTROLLABILE E/O OSSERVABILE

② $A = \begin{vmatrix} \alpha+3 & \alpha-1 \\ \alpha+2 & \alpha+1 \end{vmatrix}$ $B = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix}$ $C = \begin{vmatrix} 2 & 1 \end{vmatrix}$ $D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$

STABILITÀ

- $P(z) = \det(zI - A) = 0 \quad \det \begin{vmatrix} z-\alpha-3 & -\alpha+1 \\ -\alpha-2 & z-\alpha-1 \end{vmatrix} =$

$= \left(z^2 - z\alpha - z - z\alpha + \alpha^2 + \alpha - 3z + 3\alpha + 3\right) + (\alpha+2)(-\alpha+1) =$

$= z^2 + (-\alpha - 1 - \alpha - 3)z + (\quad + \alpha + 3\alpha + 2) \quad P(z) = z^2 + (-2\alpha-5)z + (4\alpha+3)$

CRITERIO DI JURY

- $P(z=1) = 1 - 2\alpha - 5 + 4\alpha + 3 > 0 \quad \alpha > \frac{1}{2}$
- $P(z=-1)\cdot(-1)^2 = 1 + 2\alpha + 5 + 4\alpha + 3 > 0 \quad \alpha > \frac{3}{2} \implies$ SISTEMA INSTABILE $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
- $a_n > a_0 \quad 1 > 4\alpha + 3 \quad \alpha < \frac{1}{2}$

CONTROLLABILITÀ $\mathcal{C} = \begin{vmatrix} B & AB \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4\alpha \\ 3 & 4\alpha+5 \end{vmatrix}$ $\det(\mathcal{C}) = 5 - 8\alpha \neq 0 \implies$ SISTEMA CONTROLLABILE $\forall \alpha \neq 8/5$

OSSERVABILITÀ $\mathcal{O} = \begin{vmatrix} C \\ CA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3\alpha+8 & 3\alpha+1 \end{vmatrix}$ $\det(\mathcal{O}) = 3\alpha - 10 \neq 0 \implies$ SISTEMA OSSERVABILE $\forall \alpha \neq \frac{10}{3}$

- $\alpha = 0 \implies A = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ $B = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix}$ $C = \begin{vmatrix} 2 & 1 \end{vmatrix}$ $D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$ $X(0) = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$

$X_L(s) = (sI-A)^{-1} \cdot X(0) \longrightarrow X_L(t) = \mathcal{L}^{-1}[X_L(s)] \longrightarrow Y_L(t) = C \cdot X_L(t)$

$sI - A = \begin{vmatrix} s-3 & 1 \\ -2 & s-1 \end{vmatrix}$ $\det(sI-A) = s^2 - 4s + 6 \quad s = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}\,i$

$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{s^2-4s+6} \cdot \begin{vmatrix} s-1 & 2 \\ -1 & s-3 \end{vmatrix}$ $X_L(s) = \frac{1}{s^2-4s+6} \cdot \begin{vmatrix} s-3 \\ 4-s \end{vmatrix}$

$\frac{s-3}{s^2-4s+6} = \frac{A}{(s-(2+\sqrt{2}i))} + \frac{B}{(s-(2-\sqrt{2}i))} = \frac{(s-(2-\sqrt{2}i))A + (s-(2+\sqrt{2}i))B}{s^2-4s+6} \rightarrow \begin{cases} -A + B = 1 \\ 2A + 2B = 3 \end{cases} \begin{cases} A = -B - 1 \\ -2 = -3 !! \end{cases}$

$Y_L(s) = \frac{2s-2}{s^2-4s+6}$

- $\alpha = 2 \longrightarrow A = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ $B = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix}$ $C = \begin{vmatrix} 2 & 1 \end{vmatrix}$ $D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$

$P(z) = \det \begin{vmatrix} z-5 & -1 \\ -4 & z-3 \end{vmatrix} = z^2 - 8z + 11 \quad z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3} \neq z_{DES} \quad \alpha_0 = 11 \quad \alpha_1 = -8$

GIÀ VERIFICATA LA CONTROLLABILITÀ

$q(z) = (z - z_{1DES})(z - z_{2DES}) = (z+3)^2 = z^2 + 6z + 9 \quad \beta_0 = 9 \quad \beta_1 = 6$

$T^{-1} = \mathcal{C} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 13 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -8 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -11 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow T = \frac{1}{-11} \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$

$K = [(\beta_0 - \alpha_0) \; (\beta_1 - \alpha_1)] \cdot T = \frac{1}{-11} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 14 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ $K = \begin{vmatrix} \frac{20}{11} & 2 \end{vmatrix}$

② $A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$

- $Y_F(z) = C \cdot (zI - A)^{-1} \cdot B \cdot U(z) \qquad U(z) = 1 \qquad zI - A = \begin{vmatrix} z & -2 & -1 \\ 0 & z & -3 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} \qquad \det(zI - A) = z^3$

$Y_F(k) = \mathcal{Z}^{-1}[Y_F(z)]$

$(zI-A)^{-1} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{z} & -\frac{2}{z^2} & -\frac{6+z^2}{z^3} \\ 0 & -\frac{1}{z} & -\frac{3}{z^2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{z} \end{vmatrix} \qquad C \cdot (zI-A)^{-1} \cdot B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot (zI-A)^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad Y_F(z) = -\frac{2}{z} - \frac{6}{z^2} - \frac{6}{z^3}$

- $\mathcal{C} = \begin{vmatrix} B & AB & A^2B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad rk(\mathcal{C}) = 2 < 3 \qquad t_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad t_2 = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \begin{cases} \langle t_3, t_1 \rangle = 0 \\ \langle t_3, t_2 \rangle = 0 \end{cases}$

$t_3 = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ 2a = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 1 \quad (c \in \mathbb{R}) \end{cases} \Rightarrow t_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow T = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$\hat{A} = T \cdot A \cdot T^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \hat{A} = \left|\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$

$\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$, $\hat{A}_{NC}$, 0

- $A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix} \quad \mathcal{C} = \begin{vmatrix} B & AB & A^2B \end{vmatrix} \quad \mathcal{O} = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{vmatrix}$

$\mathcal{C} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \det(\mathcal{C}) = 0 \Rightarrow$ SISTEMA NON COMPLETAMENTE CONTROLLABILE $\forall \gamma \in \mathbb{R}$

$\mathcal{O} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4+\gamma \\ 0 & 0 & \gamma^2+4\gamma+6 \end{vmatrix} \qquad \det(\mathcal{O}) = 2\,(\underbrace{\gamma^2+4\gamma+6}_{\Delta < 0}) \neq 0 \Rightarrow$ SISTEMA COMPLETAMENTE OSSERVABILE $\forall \gamma \in \mathbb{R}$

ESAME DEL 14/01/2021

1) SIA DATA LA RAPPRESENTAZIONE INGRESSO USCITA DI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$y'''(t) + 4y''(t) + 6y'(t) + 4y(t) = 4u(t) + 4u'(t)$

- STUDIARE I MODI DEL SISTEMA E DISEGNARNE IL LORO ANDAMENTO TEMPORALE
- DETERMINARE L'EVOLUZIONE LIBERA A PARTIRE DALL'ISTANTE INIZIALE $t_0 = 0$ DATE LE SEGUENTI CONDIZIONI INIZIALI: $y(t_0) = 0,\ y'(t_0) = 2,\ y''(t_0) = 4$
- DETERMINARE LA RISPOSTA IMPULSIVA DEL SISTEMA
- DETERMINARE LE MATRICI (A, B, C, D) DEL SISTEMA IN VARIABILI DI STATO

2) SIA DATA LA RAPPRESENTAZIONE IN VARIABILI DI STATO DI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \cdot x(k) + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot u(k) \\ y(k) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot x(k) \end{cases}$$

- STUDIARE LA STABILITÀ, LA CONTROLLABILITÀ E L'OSSERVABILITÀ DEL SISTEMA
- DATO LO STATO INIZIALE $X(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$, DETERMINARE LA RISPOSTA LIBERA NELLO STATO E NE...
- STABILIRE SE È POSSIBILE DETERMINARE UNA OPPORTUNA LEGGE IN RETROAZIONE $U(t) = -K \cdot X(t)$ TALE CHE GLI AUTOVALORI DEL SISTEMA A CICLO CHIUSO SIANO ASSEGNABILI AD ARBITRIO. NEL CASO IN CUI QUESTO SIA ... SI DETERMINI LA MATRICE K TALE PER CUI GLI AUTOVALORI DEL SISTEMA A CICLO CHIUSO SIANO PARI A $\lambda_{1DES} = -3, \ldots$

1

- $P(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4 = (\lambda+2)(\lambda^2+2\lambda+2)$

  - $\lambda_1 = -2, \; \xrightarrow{\gamma_1 = 1} C_1(t) = A_1 e^{-2t}$
  - $\lambda_{2,1} = -1-i, \gamma_{2,1} = 1 \rightarrow C_{2,1}(t) = A_{2,1} e^{(-1-i)t}$ $\quad$ $\lambda^*_{2,1} = -1+i, \gamma^*_{2,1} = 1 \rightarrow C_{2,1}(t) = A^*_{2,1} e^{(-1+i)t}$

- $C(t) = A_1 e^{-2t} + A_{2,1} e^{(-1-i)t} + A^*_{2,1} e^{(-1+i)t}$ $\quad$ $C'(t) = -2A_1 e^{-2t} + (-1-i)A_{2,1} e^{(-1-i)t} + (-1+i)A^*_{2,1} \ldots$

  $C''(t) = 4A_1 e^{-2t} + 2iA_{2,1} e^{(-1-i)t} - 2iA^*_{2,1} e^{(-1+i)t}$

$$\begin{array}{l} C(0) \\ C'(0) \\ C''(0) \end{array} \begin{cases} A_1 + A_{2,1} + A^*_{2,1} = 0 \\ -2A_1 + (-1-i)A_{2,1} + (-1+i)A^*_{2,1} = 2 \\ 4A_1 + 2iA_{2,1} - 2iA^*_{2,1} = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 + 2Re[A_{2,1}] = 0 \\ -2A_1 - 2Re[A_{2,1}] + 2Im[A_{2,1}] = 2 \\ 4A_1 - 4Im[A_{2,1}] = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 = \\ Re[A_{2,1}] = \\ Im[A_{2,1}] = \end{cases}$$

$\Longrightarrow Y_e(t) = 4e^{-2t} + (-2+3i)e^{(-1-i)t} + (-2-3i)e^{(-1+i)t}$

- $Y_\delta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ C(t) \cdot \delta_{-1}(t) + A_0 \delta(t) & t \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_0 \\ C(0) \\ C'(0) \\ C''(0) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 4 & 1 \\ 6 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1 + 2Re[A_{2,1}] \\ -2A_1 - 2Re[A_{2,1}] + 2Im[A_{2,1}] \\ 4A_1 - 4Im[A_{2,1}] \end{vmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 4 & 1 \\ 6 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \end{vmatrix} \cdot$$

$$\begin{vmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 & 4 \\ 6 & 2 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1 \\ Re[A_{2,1}] \\ Im[A_{2,1}] \end{vmatrix}$$

$\det A = \det \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -8$ $\quad$ $\det(A|A_1) = \det \ldots$

$\det(A|A_0) = \det \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\quad$ $\det(A|A_{Re[A_{2,1}]}) = -8$ $\quad$ $\det \ldots$

$A_0 = \dfrac{\det(A|A_0)}{\det A} = \dfrac{0}{-8} = 0$ $\quad$ $A_1 = \dfrac{\det(A|A_1)}{\det A} = \dfrac{16}{-8} = -2$ $\quad$ $Re[A_{2,1}] = Im[A_{2,1}] = \dfrac{-8}{-8} = 1$

$\Longrightarrow X_\delta(t) = \left(-2e^{-2t} + (1+i)e^{(-1-i)t} + (1-i)e^{(-1+i)t}\right)$

- $\begin{cases} X_1(t) = Y(t) \\ X_2(t) = Y'(t) = X_1'(t) \\ X_3(t) = Y''(t) = X_2'(t) \\ X_3'(t) = Y'''(t) = -4X_3(t) - 6X_2(t) - 4X_1(t) + 4U(t) + 4U'(t) \end{cases}$ $\quad$ CASO $n > m > 0$

$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -6 & -4 \end{vmatrix}$ $\quad$ $B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ $\quad$ $C = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ $\quad$ $D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$

② • STABILITÀ $P(\lambda)=\det(\lambda I-A)=0$

$$P(\lambda)=\det\begin{vmatrix}\lambda & 1 & -1\\ -1 & \lambda & -2\\ 0 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda^2+1)$$

$|Re[\lambda_i]|<1 \ \forall i=1,\dots,3$

$-\lambda_1=-2<0,\ \nu_1=1$ ✓

$-\lambda_{2/3}=\pm i\quad Re[\lambda_i]=0,\ \nu_2=1$ ✓ } STABILE

CONTROLLABILITÀ $C=\begin{vmatrix}B & AB & A^2B\end{vmatrix}$

$$C=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 5\\ 1 & -2 & 4\end{vmatrix}\quad \det(C)=5 \Rightarrow \text{SISTEMA CONTROLLABILE}$$

OSSERVABILITÀ $O=\begin{vmatrix}C\\ CA\\ CA^2\end{vmatrix}$

$$O=\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -5\end{vmatrix}\quad \det(O)=-25 \Rightarrow \text{SISTEMA OSSERVABILE}$$

• $X(0)=\begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix}$ $\quad X_L(s)=(sI-A)^{-1}\cdot X(0)\rightarrow X_L(k)=\mathcal{L}^{-1}[X_L(s)]\quad Y_L(k)=C\cdot X_L(k)$

$$sI-A=\begin{vmatrix}s & 1 & -1\\ -1 & s & -2\\ 0 & 0 & s+2\end{vmatrix}\quad \det(sI-A)=(s+2)(s^2+1)\rightarrow (sI-A)^{-1}=\begin{vmatrix}\frac{s}{s^2+1} & -\frac{1}{s^2+1} & \frac{-2+s}{(s+2)(s^2+1)}\\ \frac{1}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1} & \frac{2s+1}{(s+2)(s^2+1)}\\ 0 & 0 & \frac{1}{s+2}\end{vmatrix}$$

$$X_L(s)=\begin{vmatrix}-\frac{1}{s^2+1}\\ \frac{s}{s^2+1}\\ 0\end{vmatrix}=\frac{A}{s-i}+\frac{B}{s+i}=\frac{(A+B)s+(A-B)i}{s^2+1}\rightarrow\begin{cases}A+B=1\\A-B=0\end{cases}\quad\begin{cases}A>0\\B=0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}A+B=1\\A-B=0\end{cases}\quad\begin{cases}2A=1\\B=A\end{cases}\quad\begin{cases}A=\frac{1}{2}\\B=\frac{1}{2}\end{cases}\rightarrow X_L(s)=\begin{vmatrix}0\\ \frac{1}{2(s-i)}+\frac{1}{2(s+i)}\\ 0\end{vmatrix}\quad Y_L(s)=\frac{2-s}{s^2+1}$$

• $P(\lambda)=\lambda^3+2\lambda^2+\lambda+2\quad \lambda\neq\lambda_{DES}\quad \alpha_0=2\quad \alpha_1=1\quad \alpha_2=2$

GIÀ VERIFICATA LA CONTROLLABILITÀ

$q(\lambda)=(\lambda-\lambda_{1DES})(\lambda-\lambda_{2DES})(\lambda-\lambda_{3DES})=(\lambda+3)^3$

$q(\lambda)=\lambda^3+9\lambda^2+27\lambda+27\qquad \beta_0=27\quad \beta_1=27\quad \beta_2=9$

$$T^{-1}=C\cdot\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & 1\\ \alpha_2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 5\\ 1 & -2 & 4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 9 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}\quad \det(T^{-1})=-5$$

$$T=\frac{1}{5}\cdot\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ -9 & 2 & 0\\ -2 & 1 & -5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2/5 & -1/5 & 0\\ -9/5 & 2/5 & 0\\ -2/5 & 1/5 & -1\end{vmatrix}$$

$$K=\left[(\beta_0-\alpha_0)\ (\beta_1-\alpha_1)\ (\beta_2-\alpha_2)\right]\cdot T=\begin{vmatrix}25 & 26 & 7\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0\\ -\frac{9}{5} & \frac{2}{5} & 0\\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -1\end{vmatrix}$$

$$K=\begin{vmatrix}-\frac{198}{5} & \frac{34}{5} & -7\end{vmatrix}$$

Scansionato con CamScanner

ESAME DEL 05/03/2021

② SIA DATA LA RAPPRESENTAZIONE INGRESSO USCITA DI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$y'''(t) + 9y''(t) + 24y'(t) + 16y(t) = 18u'(t) - 9u(t)$

- STUDIARE I MODI DEL SISTEMA
- DETERMINARE L'EVOLUZIONE LIBERA DEL SISTEMA A PARTIRE DALL'ISTANTE $t_0 = 0$ DATE LE SEGUENTI CONDIZIONI INIZIALI: $y(0) = $
- DETERMINARE LA RISPOSTA IMPULSIVA DEL SISTEMA
- DETERMINARE LA RISPOSTA FORZATA DEL SISTEMA CONSEGUENTE ALL'AZIONE DI UN INGRESSO $u(t) = $
- DETERMINARE LE MATRICI (A, B, C, D) DEL SISTEMA IN VARIABILI DI STATO

② SIA DATA LA RAPPRESENTAZIONE IN VARIABILI DI STATO DI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$$\begin{cases} x_1(k+1) = u(k) \\ x_2(k+1) = 3x_1(k) + u(k) \\ x_3(k+1) = 2x_1(k) + x_2(k) \\ y(k) = x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) \end{cases}$$

- DETERMINARE LA RISPOSTA FORZATA IN USCITA DEL SISTEMA SOLLECITATO DA UN INGRESSO A GRADINO UNITARIO
- POSTO $x_2(k+1) = u(k)$, SCOMPORRE IL SISTEMA NELLA FORMA CANONICA CONTROLLABILE DI KALMAN
- POSTO $x_2(k+1) = \gamma x_1(k) + u(k)$, DETERMINARE PER QUALI VALORI DI $\gamma \in \mathbb{R}$ IL SISTEMA DUALE RISULTA

① • $p(\lambda) = \lambda^3 + 9\lambda^2 + 24\lambda + 16$

	1	9	24	16
−1		−1	−8	−16
	1	8	16	0

$= (\lambda+1)(\lambda^2 + 8\lambda + 16) = (\lambda+1)(\lambda+4)^2$

$\lambda_1 = -1,\ \tau_1 = 1 \to c_1(t) = A_1 e^{-t}$

$\lambda_2 = -4,\ \tau_2 = 2 \to c_2(t) = A_{2,1} e^{-4t} + A_{2,2}\, t e^{-4t}$

• $y_L(t) = c(t)\big|_{y(0)=7,\ y'(0)=-11,\ y''(0)=7}$

$c(t) = A_1 e^{-t} + A_{2,1} e^{-4t} + A_{2,2}\, t e^{-4t}$

$c'(t) = -A_1 e^{-t} - 4A_{2,1} e^{-4t} - 4A_{2,2}\, t e^{-4t} + A_{2,2} e^{-4t}$

$c''(t) = A_1 e^{-t} + 16A_{2,1} e^{-4t} + 16A_{2,2}\, t e^{-4t} - 8A_{2,2} e^{-4t}$

$$\begin{cases} A_1 + A_{2,1} = 7 \\ -A_1 - 4A_{2,1} + A_{2,2} = -14 \\ A_1 + 16A_{2,1} - 8A_{2,2} = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 = 7 - A_{2,1} \\ -3A_{2,1} + A_{2,2} = -7 \to A_{2,2} = 3A_{2,1} - 7 \\ -56 + 12A_{2,1} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A_1 = 7/3 \\ A_{2,1} = \frac{14}{3} \\ A_{2,2} = 7 \end{cases} \Longrightarrow y_L(t) = \frac{7}{3}e^{-t} + \frac{14}{3}e^{-4t} + 7te^{-4t}$$

• $y_\delta(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ c(t)\cdot\delta_{-1}(t) + A_0 \cdot \delta(t) & t \geq t_0 \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_0 \\ c(0) \\ c'(0) \\ c''(0) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -9 \\ 18 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & 24 & 9 & 1 \\ 24 & 9 & 1 & 0 \\ 9 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1 + A_{2,1} \\ -A_1 - 4A_{2,1} + A_{2,2} \\ A_1 + 16A_{2,1} - 8A_{2,2} \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} -9 \\ 18 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 16 & 4 & 1 \\ 24 & 8 & 5 & 1 \\ 9 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_{2,1} \\ A_{2,2} \end{vmatrix}$$

$\det(A) = -9 \quad \det(A|A_0) = 0 \quad \det(A|A_1) = 27 \quad \det(A|A_{2,1}) = -27 \quad \det(A|A_{2,2}) = 3\ldots$

$\Rightarrow A_0 = 0;\ A_1 = -3;\ A_{2,1} = 3;\ A_{2,2} = -43 \Rightarrow y_\delta(t) = (-3e^{-t} + 3e^{-4t} - 43te^{-4t})\,\delta_{-1}(t) -$

• $y_f(t) = \int_0^t y_\delta(\tau)\cdot u(\tau)\,d\tau = \int_0^t \left(-e^{-\tau} + e^{-4\tau} - \frac{43}{3}\tau e^{-4\tau}\right) d\tau = e^{-t} - \frac{55}{48}e^{-4t} + \frac{43}{12}te^{-4t} - \frac{29}{48}$

Scansionato con CamScanner