Si noti che B e D non hanno ruolo nella determinabilità, dunque attribuita alla coppia A, C.

Un sistema si dice determinabile se $\exists [k_0, k_p] \mid$ noti $u(\cdot)$ e $y(\cdot)$ si determina sempre e univocamente il valore dello stato finale $x(k_p)$

In generale, per i sistemi a tempo discreto $\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{X}_D$, ossia osservabilità $\Rightarrow$ determinabilità. Se la matrice della dinamica risulta non singolare, inoltre, $\mathcal{X}_0 \equiv \mathcal{X}_D$, ossia osservabilità $\Leftrightarrow$ determinabilità. In un sistema lineare con dimensione finita n e non completamente osservabile, si ha che:

- Il sottospazio di osservabilità ($\dim \mathcal{X}_0 = n_0 < n$) risulta la parte osservabile
- Il sottospazio di non osservabilità ($\dim \mathcal{X}_{\bar{o}} = n - n_0$) risulta la parte non osservabile
- Al sottospazio di osservabilità sono associati n_0 degli n autovalori di A
- Al sottospazio di non osservabilità sono associati $n - n_0$ degli n autovalori di A
- L'uscita $y(\cdot)$ è influenzata dalla sola parte osservabile
- Gli stati osservabili possono influenzare la parte non osservabile
- Gli stati non osservabili non influenzano la parte osservabile

Determinazione di $\mathcal{X}_0$

Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$\begin{cases} x(k+1) = A \cdot x(k) + B \cdot u(k) \\ y(k) = C \cdot x(k) + D \cdot u(k) \end{cases}.$$

SI VUOLE DETERMINARE:

- L'INSIEME DI NON OSSERVABILITÀ $\mathcal{X}_{NO}(k^*)$ AL TEMPO k^*
- IL SOTTOSPAZIO DI NON OSSERVABILITÀ
- IL SOTTOSPAZIO DI OSSERVABILITÀ
- UNA CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PER LA COMPLETA OSSERVABILITÀ

CONSIDERIAMO, PER SEMPLICITÀ, IL CASO CON UNA USCITA ED INGRESSO NULLO.

$$\begin{cases} y(k_0) = C \cdot x(k_0) \\ y(k_0+1) = C \cdot x(k_0+1) = C \cdot A \cdot x(k_0) \\ y(k_0+2) = C \cdot x(k_0+2) = C \cdot A^2 \cdot x(k_0) \\ \vdots \\ y(k_0+k^*) = C \cdot x(k_0+k^*) = C \cdot A^{k^*} \cdot x(k_0) \end{cases}$$

L'ULTIMA ESPRESSIONE PUÒ ESSERE RISCRITTA IN FORMA MATRICIALE

$$\begin{vmatrix} y(k_0) \\ y(k_0+1) \\ \vdots \\ y(k_0+k^*) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k^*} \end{vmatrix} \cdot x(k_0) \Rightarrow Y(k_0+k^*) = \mathcal{O}(k^*) \cdot x(k_0).$$

LA MATRICE DI OSSERVABILITÀ RAPPRESENTA IL LEGAME TRA LO STATO DI USCITA $[y(k_0) \;\; y(k_0+1) \; \dots \; y(k_0+k^*)]$ E LO STATO INIZIALE. QUINDI, L'INSIEME DI NON OSSERVABILITÀ $\mathcal{X}_{NO}(k^*)$ AL TEMPO $k+k^*$ CORRISPONDE ALLO SPAZIO

NULLO DELLA MATRICE $\mathcal{O}(k^*)$ $\mathcal{X}_{NO}(k+k^*) = \mathrm{Ker}(\mathcal{O}(k^*)) = \mathrm{Ker}\left(\begin{vmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{vmatrix}\right)$, OSSIA L'INSIEME DEGLI STATI INIZIALI CHE DANNO RISPOSTA LIBERA NULLA. LA $\dim(\mathrm{Ker}(\mathcal{O}(k^*)))$ È MINIMA QUANDO $rk(\mathcal{O}(k^*))$ È MASSIMA, QUINDI $k^* = n-1$.

DEFINENDO LA MATRICE DI OSSERVABILITÀ COME $\mathcal{O}(n-1) = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{vmatrix}$, $\mathcal{X}_{NO} = \mathrm{Ker}(\mathcal{O})$ $\Rightarrow \mathcal{X}_O = \mathcal{X}_{NO} \Rightarrow \mathcal{X}_O = \mathcal{X}_{NO}^{\perp} = (\mathrm{Ker}(\mathcal{O}))^{\perp} = \mathrm{Im}(\mathcal{O}^T)$. QUINDI, LA DIMENSIONE DEL SOTTOSPAZIO DI OSSERVABILITÀ $\mathcal{X}_O$ È PARI AL RANGO n_O DELLA MATRICE DI OSSERVABILITÀ $n_O = rk(\mathcal{O}) \Rightarrow$ UN SISTEMA DINAMICO LINEARE A TEMPO DISCRETO È COMPLETAMENTE OSSERVABILE $\Leftrightarrow n_O = rk(\mathcal{O}) = n$. QUESTI RISULTATI SONO GENERALIZZABILI AI SISTEMI A PIÙ USCITE, DOVE $\mathcal{O} = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ C \cdot A^{n-k} \end{vmatrix}$, $k = rk(C)$

PROBLEMA DELL'OSSERVABILITÀ

PER UN SISTEMA LINEARE A TEMPO DISCRETO ESISTE, E SOTTO QUALI CONDIZIONI, UN INTERVALLO $[k_0, k_f]$ TALE CHE, CONOSCENDO SENZA ERRORI SIA I VALORI DELLA FUNZIONE $u(\cdot)$ APPLICATA AL SISTEMA IN TALE INTERVALLO SIA I VALORI DELLA CORRISPONDENTE RISPOSTA IN USCITA $y(k)$ SULLO STESSO INTERVALLO, RISULTI POSSIBILE IN OGNI CASO DETERMINARE UNIVOCAMENTE IL VALORE DELLO STATO INIZIALE $x(k_0)$?

PER RISOLVERE IL PROBLEMA, SI RICORDI CHE $y(k_0+k^*) = \mathcal{O}(k_0) \cdot x(k_0)$ E, NEL CASO DI

SISTEMA OSSERVABILE E PER $K^* \geq n-1$ VALE CHE $rk(\mathcal{O}(K^*)) = n$ E SICCOME VALE LA PROPRIETÀ CHE DATA UNA GENERICA MATRICE $E \in \mathbb{M}_{l \times m}$, PER ESSA VALE CHE $\dim(Ker(E)) = m - rk(E)$, IL SOTTOSPAZIO $Ker(E)$ HA DIMENSIONE NULLA.

INOLTRE, POICHÈ VALE CHE PER UNA QUALUNQUE MATRICE REALE E $Ker(E^T) = Ker(E \cdot E^T)$, $rk(\mathcal{O}^T(K^*) \cdot \mathcal{O}(K)) = n$, CON n IL NUMERO DI COLONNE. PREMOLTIPLICANDO PER $\mathcal{O}^T(K^*)$, $\mathcal{O}^T(K^*) \cdot Y(K_0 + K^*) = \mathcal{O}^T(K^*) \cdot \mathcal{O}(K^*) \cdot X(K_0)$. INOLTRE, GRAZIE ALLA NON SINGOLARITÀ, SI PUÒ PREMOLTIPLICARE PER $(\mathcal{O}^T(K^*) \cdot \mathcal{O}(K^*))^{-1}$, PER CUI $X(K_0) = (\mathcal{O}^T(K^*) \cdot \mathcal{O}(K^*))^{-1} \cdot \mathcal{O}(K^*) \cdot Y(K-K_0)$, CHE FORNISCE UN VALORE UNICO A $X(K_0)$.

SI NOTI CHE, SOTTO L'IPOTESI DI SISTEMA OSSERVABILE, $rk(\mathcal{O}(K^*)) = n$ GIÀ PER UN VALORE DI $K^* < n-1$. SI PUÒ DIMOSTRARE CHE TALE FORMULA FORNISCE VALORE UNICO DELLO STATO $X(K_0)$

DECOMPOSIZIONE CANONICA DI KALMAN

DECOMPOSIZIONE COMPLETA

UN SISTEMA DINAMICO NON COMPLETAMENTE NÉ RAGGIUNGIBILE NÉ OSSERVABILE PUÒ ESSERE DECOMPOSTO IN 4 PARTI:

- $S_1 \rightarrow$ RAGGIUNGIBILE E NON OSSERVABILE

~ $S_2 \rightarrow$ RAGGIUNGIBILE E OSSERVABILE

~ $S_3 \rightarrow$ NON RAGGIUNGIBILE E NON OSSERVABILE

~ $S_4 \rightarrow$ NON RAGGIUNGIBILE E OSSERVABILE

$\mathcal{X}$	$\mathcal{X}_R$	$\mathcal{X}_{NR}$
$\mathcal{X}_O$	$\mathcal{X}_2$	$\mathcal{X}_4$
$\mathcal{X}_{NO}$	$\mathcal{X}_1$	$\mathcal{X}_3$

$$\begin{cases} \mathcal{X} = \mathcal{X}_R \oplus \mathcal{X}_{NR} \\ \mathcal{X} = \mathcal{X}_O \oplus \mathcal{X}_{NO} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_R \oplus \mathcal{X}_{NO} \\ \mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_R \oplus \mathcal{X}_O \\ \mathcal{X}_3 = \mathcal{X}_{NR} \oplus \mathcal{X}_{NR} \\ \mathcal{X}_4 = \mathcal{X}_{NR} \oplus \mathcal{X}_O \end{cases}$$

PROCEDURA:

0) CALCOLARE LE DIMENSIONI n_R DEL SOTTOSPAZIO $\mathcal{X}_R$ DEGLI STATI RAGGIUNGIBILI E n_{NO} DEL SOTTOSPAZIO $\mathcal{X}_{NO}$ DEGLI STATI NON OSSERVABILI

1) TROVARE UNA BASE $\{e_1, e_2, \dots, e_{n_1}\}$ DEL SOTTOSPAZIO $\mathcal{X}_1$ INDICANDONE LA DIMENSIONE CON n_1

2) TROVARE UNA BASE $\{v_1, v_2, \dots, v_{n_2}\}$ DEL SOTTOSPAZIO $\mathcal{X}_2$ INDICANDONE LA DIMENSIONE CON $n_2 = n_R - n_1$, PER CUI $\mathcal{X}_R = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$

3) TROVARE UNA BASE $\{w_1, w_2, \dots, w_{n_3}\}$ DEL SOTTOSPAZIO $\mathcal{X}_3$ INDICANDONE LA DIMENSIONE CON $n_3 = n_{NO} - n_1$, PER CUI $\mathcal{X}_{NO} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_3$

4) TROVARE UNA BASE $\{z_1, z_2, \dots, {}_{n_4}\}$ DEL SOTTOSPAZIO $\mathcal{X}_4$ INDICANDONE LA

DIMENSIONE CON $n_4 = n - (n_1 + n_2 + n_3)$

5) DEFINIRE LA MATRICE DI CAMBIO BASE USANDO IL TEOREMA DELLA DECOMPOSIZIONE CANONICA DI KALMAN $T^{-1} = [e_1, ..., e_{n_1} | v_1, ..., v_{n_2} | w_1, ..., w_{n_3} | z_1, ..., z_{n_4}]$.

DA CUI $\hat{x} = T \cdot x$, $\hat{A} = T \cdot A \cdot T^{-1} = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ 0 & A_{2,2} & 0 & A_{2,4} \\ 0 & 0 & A_{3,3} & A_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & A_{4,4} \end{vmatrix}$, $\hat{B} = T \cdot B = \begin{vmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

$\hat{C} = C \cdot T^{-1} = | 0 \quad C_2 \quad 0 \quad C_4 |$, CON I BLOCCHI $A_{1,1}, A_{2,2}, A_{3,3}, A_{4,4}$ QUADRATI E DI DIMENSIONE RISPETTIVAMENTE $n_1 = \dim(\mathcal{X}_R \cap \mathcal{X}_{NO})$, $n_2 = n_R - n_1$, $n_3 = n_{NO} - n_1$, $n_4 = n - n_R - n_{NO} + n_1$ E GLI ALTRI BLOCCHI DELLE DIMENSIONI CONSEGUENTI. INOLTRE, IL SISTEMA CARATTERIZZATO DALLE MATRICI $(A_{2,2}, B_2, C_2, D)$ È RAGGIUNGIBILE ED OSSERVABILE. TALE FORMA È DETTA FORMA CANONICA DI KALMAN DEL SISTEMA CARATTERIZZATO DALLE MATRICI A, B, C, D. NELLA BASE CANONICA DI KALMAN, IL SISTEMA S RISULTA DECOMPOSTO NEI 4 SOTTOSISTEMI INTERCONNESSI COSÌ STRUTTURATI:

$S_1)$ $\hat{x}_1(k+1) = A_{1,1} \cdot \hat{x}_1(k) + A_{1,2} \cdot \hat{x}_2(k) + A_{1,3} \cdot \hat{x}_3(k) + A_{1,4} \cdot \hat{x}_4(k) + B_1 \cdot u(k)$

$S_2)$ $\hat{x}_2(k+1) = A_{2,2} \cdot \hat{x}_2(k) + A_{2,4} \cdot \hat{x}_4(k) + B_2 \cdot u(k)$

$S_3)$ $\hat{x}_3(k+1) = A_{3,3} \cdot \hat{x}_3(k) + A_{3,4} \cdot \hat{x}_4(k)$

$S_4)$ $\hat{x}_4(k+1) = A_{4,4} \cdot \hat{x}_4(k)$

$$Y(k) = C_2 \cdot \hat{X}_2(k) + C_4 \cdot \hat{X}_4(k) + D \cdot U(k)$$

DA CUI SI OSSERVA CHE:

- L'INGRESSO $U(\cdot)$ AGISCE SOLO SU S_1 E S_2 FORMANO IL SOTTOSISTEMA RAGGIUNGIBILE $S_R \Rightarrow S_3, S_4$ FORMANO IL SOTTOSISTEMA NON RAGGIUNGIBILE S_{NR}
- L'USCITA $Y(\cdot)$ AGISCE SOLO SU S_2 E S_4, FORMANDO IL SOTTOSISTEMA OSSERVABILE S_O $\Rightarrow S_1, S_3$ FORMANO IL SOTTOSISTEMA NON OSSERVABILE S_{NO}
- S_2 È RAGGIUNGIBILE E OSSERVABILE
- LO STATO $\hat{X}_4$ È UN INGRESSO PER TUTTI GLI ALTRI SOTTOSISTEMI MA NON HA PER INGRESSO NESSUNO DI ESSI
- IL SOTTOSISTEMA S_1 HA COME INGRESSI GLI STATI DI TUTTI GLI ALTRI SOTTOSISTEMI MA IL SUO STATO $\hat{X}_1$ NON È L'INGRESSO DI NESSUN SOTTOSISTEMA
- IL POLINOMIO CARATTERISTICO DI $\hat{A}$ (UGUALE A QUELLO DI A) È IL PRODOTTO DI QUELLI DI $A_{1,1}, A_{2,2}, A_{3,3}, A_{4,4}$, ESSENDO $\hat{A}$ TRIANGOLARE SUPERIORE

SI NOTI CHE, NON NECESSARIAMENTE, NELLA SCOMPOSIZIONE COMPAIONO TUTTE 4. IN PARTICOLARE:

- SISTEMA RAGGIUNGIBILE $\Rightarrow$ SICURAMENTE NON COMPAIONO S_3 E S_4
- SISTEMA OSSERVABILE $\Rightarrow$ SICURAMENTE NON COMPAIONO S_1 E S_3

UN SISTEMA È IN FORMA MINIMA QUANDO È COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE E OSSERVABILE

E QUINDI NON È POSSIBILE ADOPERARE UN NUMERO DI VARIABILI DI STATO MINORE DEL SUO ORDINE PER DESCRIVERE LA RELAZIONE TRA INGRESSO E USCITA CHE STABILISCE.

UN SISTEMA A TEMPO DISCRETO IN FORMA MINIMA È ESTERNAMENTE STABILE $\Leftrightarrow$ È ASINTOTICAMENTE STABILE

ESERCIZIO: SIA DATO IL SISTEMA

$$\begin{cases} x^\circ(t) = \begin{vmatrix} -1 & 4 & -5 & -2 \\ -4 & 13 & -14 & -6 \\ -10 & 18 & -16 & -6 \\ 12 & -8 & 2 & -1 \end{vmatrix} \cdot x(t) + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} \cdot u(t) \\ y(t) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \cdot x(t) \end{cases}$$

. TROVARE:

- IL SOTTOINSIEME RAGGIUNGIBILE E OSSERVABILE (A_{RO}, B_{RO}, C_{RO})
- IL SOTTOINSIEME RAGGIUNGIBILE E NON OSSERVABILE $(A_{RNO}, B_{RNO}, C_{RNO})$
- IL SOTTOINSIEME NON RAGGIUNGIBILE E OSSERVABILE $(A_{NRO}, 0, C_{NRO})$
- IL SOTTOINSIEME NON RAGGIUNGIBILE E NON OSSERVABILE $(A_{NRNO}, 0, 0)$

$$\mathcal{R} = [B \;\; AB \;\; A^2B \;\; A^3B] = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -14 & 34 \\ 0 & 10 & -30 & 70 \\ -1 & 6 & -16 & 36 \\ 0 & 10 & -30 & 40 \end{vmatrix} = [\mathcal{R}_1 \;\; \mathcal{R}_2 \;\; \mathcal{R}_3 \;\; \mathcal{R}_4]$$

$$rk(\mathcal{R}) = 2 \Rightarrow n_R = 2; \; n_{NR} = n - n_R = 2 \quad \mathcal{X}_R = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 5 \end{matrix} \right\} \quad \mathcal{X}_{NR} = \{ t_1 \;\; t_2 \}$$

$$\begin{cases} (\mathcal{R}_1)^T t_1 = 0 \\ (\frac{1}{2}\mathcal{R}_2)^T t_2 = 0 \\ t_1 - \alpha t_2 \neq \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$|1 \quad 0 \quad -1 \quad 0| \cdot \begin{vmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{31} \\ t_{41} \end{vmatrix} = 0 \rightarrow t_{11} - t_{31} = 0 \Rightarrow t_{11} = t_{31} \quad t_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$|2 \quad 5 \quad 3 \quad 5| \cdot \begin{vmatrix} t_{21} \\ t_{22} \\ t_{32} \\ t_{42} \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2t_{12} + 5t_{22} + 3t_{32} + 5t_{42} = 0 \quad t_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}$$

t_1, t_2 LINEARMENTE INDIPENDENTI $\mathcal{X}_{NR} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\}$

$$\mathcal{O} = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & -7 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & -7 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathcal{O}_1 \\ \mathcal{O}_2 \\ \mathcal{O}_3 \\ \mathcal{O}_4 \end{vmatrix} \quad rk(\mathcal{O}) = 2 \rightarrow n_o = 2, n_{NO} = n - n_o = 2$$

$$\mathcal{X}_o = \left\{ \left(\frac{1}{4}(\mathcal{O}_2 + 3\mathcal{O}_1) \right)^T \left(\frac{1}{4}(\mathcal{O}_2 - \mathcal{O}_1) \right)^T \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\} \quad \mathcal{X}_{NO} = \{ t_1 \quad t_2 \}$$

$$\begin{cases} (t_1)^T \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = 0 \\ (t_2)^T \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} = 0 \\ t_1 - \alpha t_2 \neq \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$[t_{11} \quad t_{21} \quad t_{31} \quad t_{41}] \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2t_{11} - t_{21} = 0 \Rightarrow t_{21} = 2t_{11} \quad t_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix}$$

$$[t_{21} \quad t_{22} \quad t_{32} \quad t_{42}] \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -2t_{22} + 2t_{32} + t_{42} = 0 \quad t_2 = \begin{vmatrix} 5 \\ 10 \\ 8 \\ 4 \end{vmatrix}$$

τ_1, τ_2 LINEARMENTE INDIPENDENTI $\mathcal{W}_{NO} = \left\{ \begin{matrix} 0 & 5 \\ 0 & 10 \\ 1 & 8 \\ -2 & 4 \end{matrix} \right\}$

$\mathcal{W}_1 = \mathcal{W}_R \cap \mathcal{W}_{NO}$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 10 \\ 1 & 8 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \gamma \\ \theta \end{vmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha = \theta \\ \beta = 2\theta \\ \gamma = -3\theta \end{cases}$

$\gamma \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix} + \theta \begin{vmatrix} 5 \\ 10 \\ 8 \\ 4 \end{vmatrix} = -3\theta \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix} + \theta \begin{vmatrix} 5 \\ 10 \\ 8 \\ 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5\theta \\ 10\theta \\ 5\theta \\ 10\theta \end{vmatrix} \quad \theta = \frac{1}{5} \Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{W}_1) = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \right\}$

$\mathcal{W}_1^{\perp} : [1 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 2] \cdot \begin{vmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \tau_1 + 2\tau_2 + \tau_3 + \tau_4 = 0 \Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{W}_1^{\perp}) = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} \right\}$

$\mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_R \cap \mathcal{W}_1^{\perp}$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} \theta \rightarrow \begin{cases} \alpha = \theta \\ \beta = 0 \end{cases}$

$\alpha \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 5 \end{vmatrix} = \theta \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \theta = 1 \Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{W}_2) = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} \right\}$

$\mathcal{W}_3 = \mathcal{W}_{NO} \cap \mathcal{W}_1^{\perp}$

$\begin{cases} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 10 \\ 1 & 8 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{vmatrix} \theta \rightarrow \begin{vmatrix} 5\beta \\ 10\beta \\ \alpha + 8\beta \\ 4\beta - 2\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{vmatrix} \\ |1 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 2| \cdot \begin{vmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \tau_1 + 2\tau_2 + \tau_3 + 2\tau_4 = 0 \end{cases}$

$\rightarrow 5\beta + 20\beta + \alpha + 8\beta + 8\beta - 4\alpha = 0 \rightarrow \alpha = \frac{41}{3}\beta$

$\alpha \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} 5 \\ 10 \\ 8 \\ 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5\beta \\ 10\beta \\ \frac{65}{3}\beta \\ -\frac{70}{3}\beta \end{vmatrix} \quad \beta = \frac{3}{5} \Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{W}_3) = \begin{vmatrix} 3 \\ 6 \\ -13 \\ -14 \end{vmatrix}$

$\mathcal{X}_4 = \mathcal{X}_{NR} \cap \mathcal{X}_O$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \gamma \\ \theta \end{vmatrix} \quad \begin{cases} \alpha = 2\theta \\ \beta = \theta \\ \gamma = \theta \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \gamma + \begin{vmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} \theta = \begin{vmatrix} 2\theta \\ -3\theta \\ 2\theta \\ \theta \end{vmatrix} \quad \theta = 1 \Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{X}_4) = \begin{vmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 13 & 2 \\ 2 & 0 & -14 & 1 \end{vmatrix} \quad \det(T^{-1}) = -360 \Rightarrow T = \frac{1}{180} \begin{vmatrix} 18 & 36 & 18 & 36 \\ 110 & 15 & -70 & -35 \\ 4 & 3 & 4 & -7 \\ 20 & -30 & 20 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\hat{A} = T \cdot A \cdot T^{-1} = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & A_{3,1} & A_{1,4} \\ 0 & A_{2,2} & 0 & A_{2,4} \\ 0 & 0 & A_{3,3} & A_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & A_{4,4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & -7 & -99/5 \\ 0 & -1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & -3 & -33/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\hat{B} = T \cdot B = \begin{vmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \hat{C} = C \cdot T^{-1} = |0 \;\; C_2 \;\; 0 \;\; C_4| = |0 \;\; 4 \;\; 0 \;\; -4|$$

IL SISTEMA È DECOMPOSTO NEI SEGUENTI SOTTOSISTEMI:

- $S_1(-2,0,0)$ RAGGIUNGIBILE E NON OSSERVABILE
- $S_2(-1,1,4)$ RAGGIUNGIBILE E OSSERVABILE
- $S_3(-3,0,0)$ NON RAGGIUNGIBILE E NON OSSERVABILE
- $S_4(1,0,-4)$ NON RAGGIUNGIBILE E OSSERVABILE

LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DEL SISTEMA IN FORMA CANONICA DI KALMAN RISULTA:

$$\hat{C}(sI-\hat{A})^{-1}\hat{B} = |0 \;\; 4 \;\; 0 \;\; -4| \cdot \begin{vmatrix} s+2 & -5 & 7 & 99/5 \\ 0 & s+1 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & s+3 & 33/5 \\ 0 & 0 & 0 & s-1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} =$$

$= \dfrac{4}{s+1}$, FUNZIONE DELLA SOLA PARTE RAGGIUNGIBILE E OSSERVABILE DEL SISTEMA, CIOÈ DALLE SOLE MATRICI DEL SOTTOSISTEMA S_2. INFATTI, SI HA CHE $\hat{W}(s) = \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B} = C_2(sI - A_{2,2})^{-1} \cdot B_2 = \dfrac{4}{s+1}$