Infatti detto $\text{Im}\,T = \{T(v) \mid v \in V\} \to \{T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$

$= \{\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_n T(v_n) \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\} = \text{span}(T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n))$

Ma non è detto, in generale, che $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ sia una base per W in quanto in generale non sono linearmente indipendenti

Presa un'applicazione lineare iniettiva $T: V \to W$, $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ sono linearmente indipendenti se e solo se $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_k)$ sono linearmente indipendenti

$\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_k T(v_k) = 0_W \to T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k) = 0_W$ —

$\to \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0_V \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$

Si può definire quello che è il rango di una matrice, ossia la dimensione della sua immagine. $rk(T)$

Si può dimostrare che se $T = L_A$, con $A \in \mathcal{M}(n \times m, \mathbb{R})$, $rk(L_A) = rk(A)$.

Infatti, $rk(L_A) = \dim(\text{Im}(L_A)) = \dim(\text{Im}\,A)$ $\quad \text{Im}\,A = \text{span}(L_A(e_1), L_A(e_2), \dots, L_A(e_m)) =$

$= \text{span}(Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_m) = \text{span}(A^1 \mid A^2 \mid \dots \mid A^m)$

Teorema della dimensione: $\dim \text{Ker}\,T + \overbrace{\dim \text{Im}\,T}^{rk\,T} = \dim V$, con $T: V \to W$

Detto $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ una generica base del nucleo e completata con $n-k$ vettori di V

$\{u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots, v_{n-k}\}$. $\dim \text{Ker}\,T = k$ $\dim V = n$. Pongo $w_j = T(v_{k+j})$ $\forall j = 1, 2, \dots, n-k$

Vogliamo verificare che $\{w_1, w_2, \dots, w_{n-k}\}$ è una base di $\text{Im}\,T$:

$\Rightarrow$ generatori ✓

1) $\text{Im}\,T = \text{span}(T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_k), T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_{n-k})) = \text{span}(w_1, w_2, \dots, w_{n-k})$

2) $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_{n-k} w_{n-k} = 0_W \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-k} = 0$?

$\alpha_1 T(v_{k+1}) + \alpha_2 T(v_{k+2}) + \dots + \alpha_{n-k} T(v_n) = 0_W \to T(\underbrace{\alpha_1 v_{k+1} + \alpha_2 v_{k+2} + \dots + \alpha_{n-k} v_n}_{\in \text{Ker}\,T}) = 0_W$

$\Longrightarrow \alpha_1 v_{k+1} + \alpha_2 v_{k+2} + \dots + \alpha_{n-k} v_n = \text{span}(u_1, u_2, \dots, u_k) \Longrightarrow \exists \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k \mid$

$\mid \alpha_1 v_{k+1} + \alpha_2 v_{k+2} + \dots + \alpha_{n-k} v_n = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_k u_k$. Per proprietà dello span, sappiamo che i β coefficienti sono tutti nulli (vettori linearmente indipendenti) $\Longrightarrow$ lo sono anche gli α coefficienti

$\Longrightarrow \{w_1, w_2, \dots, w_{n-k}\}$ è una base di $\text{Im}\,T \Longrightarrow \dim \text{Im}\,T = \overset{\dim V}{n} - \overset{\dim \text{Ker}\,T}{k}$ ✓

Si osservi che, se $T = L_A$ $(A \in \mathcal{M}(n \times m, \mathbb{R}))$. $L_A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ si può verificare anche col teorema della dimensione $\Longrightarrow m = \dim \text{Ker}\,A + rk\,A$ $\quad \text{Ker}\,A = \{v \in \mathbb{R}^m \mid A \cdot v = 0\} = m - rk\,A$ per il teorema di Rouché-Capelli $\Longrightarrow m = m - rk\,A + rk\,A$ ✓

$\Gamma: V \to W$

Dal precedente teorema conseguono diversi corollari. Data l'applicazione lineare:

① Γ è iniettiva $\iff rk\,\Gamma = \dim V$

② Γ è suriettiva $\iff rk\,\Gamma = \dim W$

③ Se $\dim V = \dim W$, Γ è iniettiva $\iff$ Γ è suriettiva

① $Ker\,\Gamma = \{0_V\}$ per proprietà iniettività $\Rightarrow \dim Ker\,\Gamma = 0 \Rightarrow \dim V = 0 + rk\,\Gamma$ ✓

② $Im\,\Gamma = \dim W$ per proprietà suriettività $\Rightarrow rk\,\Gamma = \dim W$ ✓

③ Dall'iniettività, $\dim V = rk\,\Gamma$. Dalla suriettività, $\dim W = rk\,\Gamma \Rightarrow \dim V = \dim W$ ✓

Prese le applicazioni lineari $\Gamma: V \to W$ e $S: W \to U$ si può definire $S \circ \Gamma: V \to U$ come una <u>nuova applicazione lineare</u>. Infatti, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \wedge v_1, v_2 \in V$,

$(S \circ \Gamma)(\lambda v_1 + \mu v_2) = S(\Gamma(\lambda v_1 + \mu v_2)) = S(\lambda \Gamma(v_1) + \mu(\Gamma(v_2))) = \lambda S\Gamma(v_1) + \mu S\Gamma(v_2) =$
$= S(\lambda \Gamma(v_1) + \mu \Gamma(v_2)) = \lambda S(\Gamma(v_1)) + \mu S(\Gamma(v_2)) = \lambda (S \circ \Gamma)(v_1) + \mu (S \circ \Gamma)(v_2)$. In generale, $S \circ \Gamma \neq \Gamma \circ S$. Un'applicazione lineare $\Gamma: V \to W$ è invertibile se $\exists\, S: W \to V \mid \Gamma \circ S = I_dW \wedge S \circ \Gamma = I_dV$ è l'inversa e indicata Γ^{-1}

Si può dimostrare che l'inversa è unica. Infatti, supponendo per assurdo che esistano due inverse di Γ (S_1 e S_2), $S_2 = S_2 \circ I_dW$ e $S_1 = S_1 \circ I_dW$

$S_2 = S_2 \circ (\Gamma \circ S_1) = S_2 \circ \Gamma \circ S_1 = I_dV \circ S_1 = S_1 \Rightarrow S_2 = S_1$ ✓

Un'applicazione lineare $\Gamma: V \to W$ risulta invertibile $\iff$ è biettiva

$\Rightarrow$ Dalle proprietà precedenti ✓

$\Leftarrow$ $\exists\, S \mid \Gamma \circ S = I_dW \wedge S \circ \Gamma = I_dV$. Verificare la linearità di S

- $S(\lambda w_1 + \mu w_2) = S(\lambda \Gamma(v_1) + \mu \Gamma(v_2)) = S\Gamma(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda v_1 + \mu v_2 = \lambda S(w_1) + \mu S(w_2)$

Data l'applicazione lineare $\Gamma: V \to W$ isomorfa e presa una base $\mathcal{B}$ di V, $\Gamma(\mathcal{B})$ è anch'essa base di W. Infatti, ① essendo un isomorfismo $\dim V = \dim W$

② $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$; $\Gamma(\mathcal{B}) = \{\Gamma(v_1), \Gamma(v_2), \dots, \Gamma(v_n)\} \Rightarrow Im\,\Gamma = span(\Gamma(v_1), \Gamma(v_2), \dots, \Gamma(v_n))$

Essendo una funzione iniettiva, $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti $\Rightarrow \Gamma(v_1), \Gamma(v_2), \dots, \Gamma(v_n)$ sono anch'essi linearmente indipendenti $\Rightarrow \Gamma(\mathcal{B})$ è una base di W

Consideriamo ora due matrici $A \in M(n \times m, \mathbb{R})$, $B \in M(m \times k, \mathbb{R})$. Varrà che $L_A \circ L_B = L_{A \cdot B}$

Infatti $L_B: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ e $L_A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. $L_A \circ L_B(x) = A \cdot (B \cdot x) = (A \cdot B)x = L_{A \cdot B}(x)$ e $L_{AB}: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$

In particolare, L_A è invertibile $\Longleftrightarrow$ A è invertibile e $L_A^{-1} = L_{A^{-1}}$

Prese due applicazioni lineari $T: V \to W$ e $S: W \to U$ e B_V, B_W, B_U tre basi rispettivamente di V, W, U. Consideriamo le matrici associate $[T]^{B_W}_{B_V}$ e $[S]^{B_U}_{B_W}$. Si può così definire $S \circ T: V \to U$ lineare $\mid [S \circ T]^{B_U}_{B_V} = [S]^{B_U}_{B_W} \cdot [T]^{B_W}_{B_V}$. In particolare, se T risulta invertibile $[T^{-1}]^{B_V}_{B_W} = \left([T]^{B_W}_{B_V}\right)^{-1}$. Infatti, $[T^{-1} \circ T]^{B_W}_{B_V} = I_n \Rightarrow [T^{-1}]^{B_V}_{B_W} \cdot [T]^{B_W}_{B_V} = I_n$

Data la matrice B, per passare ad un'altra ~~matrice~~ B' si utilizza una matrice A detta di cambio di base. $A = [I_n]^{B}_{B'}$.

Ad esempio, data la base canonica in $\mathbb{R}^2$ $B \left\{ \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right\}$, se vogliamo passare a $B' = \left\{ \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \end{vmatrix} \right\}$

$$A = \left(\left[\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \right]_B \middle| \left[\begin{vmatrix} -1 \\ 2 \end{vmatrix} \right]_B \right) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Dato uno spazio vettoriale V di dimensione finita e date due basi B, C di V, varrà che $A = [I_n]^B_C$ è invertibile e $A^{-1} = [I_n]^C_B$

Infatti, $[I_n]^B_C \cdot [I_n]^C_B = [I_n \cdot I_n]^C_C = I_n$ ✓

Relativamente alle applicazioni lineari, chiudiamo con la seguente proposizione: siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita e siano B, B' due basi distinte di V e C, C' due basi distinte di W. Consideriamo l'applicazione lineare $T: V \to W$.

1) $B' = B \cdot A \Rightarrow [v]_{B'} = A^{-1} \cdot [v]_B \quad \forall v \in V$ dove A è la matrice di cambio base da B a B'.
2) $B' = B \cdot A \wedge C' = C \cdot A \Rightarrow [T]^{C'}_{B'} = M^{-1} [T]^C_B A$, dove A e M sono le matrici di cambio base rispettivamente da B a B' e da C a C'

PRODOTTO SCALARE CANONICO

Dati due vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$ di coordinate rispettivamente $v = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix}$, $w = \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{vmatrix}$, il loro prodotto scalare canonico restituisce un numero dato dalla somma dei prodotti dei termini nella stessa riga, ossia $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$

Ad esempio, dati in $\mathbb{R}^3$ i vettori $v = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}$ e $w = \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$, $\langle v, w \rangle = (1 \cdot 0) + (2 \cdot (-1)) + (3 \cdot 1) = 1$

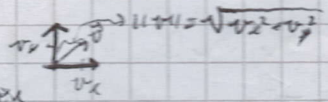
Dati i vettori u, v, w in $\mathbb{R}^n$ e lo scalare $\lambda \in \mathbb{R}$, valgono le seguenti proprietà:

1) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ $\quad \langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i \wedge \langle w, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} w_i v_i = \langle v, w \rangle$ ✓ SIMMETRIA
2) $\langle v + u, w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle u, w \rangle$ $\quad \langle v + u, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} (v_i + u_i) w_i = \sum_{i=1}^{n} (\overbrace{v_i w_i}^{\langle v, w \rangle} + \overbrace{u_i w_i}^{\langle u, w \rangle})$ ADDITIVITÀ
3) $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$ $\quad \langle \lambda v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda v_i w_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$ OMOGENEITÀ

④ $\langle v, v \rangle \geq 0$. In particolare $=0 \iff v = 0_V$ $\quad \langle v, v \rangle = v_1 v_1 + v_2 v_2 + \dots + v_n v_n = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2$

Essendo una somma tra n termini positivi, è sicuramente ≥ 0 e $=0 \iff v_1 = v_2 = \dots = v_n = 0$

In particolare, $\sqrt{\langle v, v \rangle} = \|v\|$ indica la norma di v e, graficamente, indica la lunghezza di v



Dati $\vec{v}_P (x_P, y_P)$ e $\vec{v}_Q (x_Q, y_Q) \rightarrow \|\vec{v}_P - \vec{v}_Q\| = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$

Anche per la norma possono essere descritte le 4 seguenti proprietà:

① $\|v\| \geq 0 \ \forall v \in \mathbb{R}^n \wedge = 0 \iff v = 0_V$

② $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \wedge \forall v \in \mathbb{R}^n$

③ Diseguaglianza di Cauchy-Schwarz $\quad |\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$

④ Diseguaglianza triangolare $\quad |\|v\| - \|w\|| \leq \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

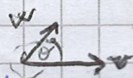
Infatti $\|v + w\|^2 = \langle v + w, v + w \rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle w, v \rangle$. Dalla proprietà ③,

$-\|v\| \|w\| \leq \langle v, w \rangle \leq \|v\| \|w\| \Rightarrow \|v + w\|^2 \leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| = (\|v\| + \|w\|)^2$ ✓

$\|v + w\|^2 \geq \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2(\|v\| \cdot \|w\|) = (\|v\| - \|w\|)^2$ ✓.

$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\| \rightarrow -1 \leq \dfrac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \leq 1$ e $\cos\theta = \dfrac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}$, con θ l'angolo

convesso tra w e v



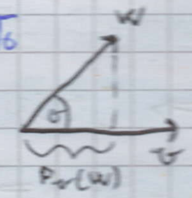
, si nota che $\cos\theta = 0 \iff \vec{v} \perp \vec{w} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

Ad esempio, dati $v = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ e $w = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$, determinare θ

$\langle v, w \rangle = (1 \cdot 1) + (2 \cdot 0) + (1 \cdot 2) + (0 \cdot 1) = 3$

$\|v\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{6}$ $\qquad \|w\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2 + 1} = \sqrt{6}$

$\cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad \theta = \arccos \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}$



$\mathrm{Im}\, P(v) = V$
$\mathrm{Ker}\, P_V = V^\perp$

Si definisce inoltre la proiezione ortogonale di w su v $\quad P_v(w) = \dfrac{\langle v, w \rangle}{\|v\|^2} \cdot v$

Si può dimostrare che $v_1, v_2, \dots, v_k$ vettori a due a due ortogonali sono linearmente indipendenti

Infatti, presi $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0$ con $\alpha_i \in \mathbb{R} \ \forall i \in [1, k]$, $\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k, v_j \rangle = 0$

$\rightarrow 0 \cdot x_{1j} + 0 \cdot x_{2j} + \dots + 0 \cdot x_{kj} = 0 \Rightarrow \|v_j\|^2 \neq 0 \wedge \alpha_j \|v_j\|^2 = 0 \Rightarrow$ i v_k vettori sono linearmente indipendenti

È molto importante, inoltre, introdurre la base ortogonale di un sottospazio vettoriale V come

$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \mid \langle v_j, v_i \rangle = 0 \ \forall j \neq i$

Un esempio è la base canonica (in $\mathbb{R}^2$), in quanto $\left\langle \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$ ✓ $\qquad \mathcal{B} = \left\{ \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right\}$

In particolare se $\|v_i\| = 1 \ \forall i = 1, 2, \dots, k$ la base si dice ortonormale

Riprendendo l'esempio precedente, $\left\| \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$ ✓ $\qquad \left\| \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right\| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$ ✓

Una base ortogonale, però, non è detto sia ortonormale. Per normalizzarla basta

SEMPLICEMENTE DIVIDERE IL VETTORE PER LA SUA NORMA. FORMALIZZANDO, DATA UNA BASE ORTOGONALE $B = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$, LA RISPETTIVA BASE ORTONORMALE È $B' = \left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, ..., \frac{v_k}{\|v_k\|} \right\}$

DATA UNA BASE ORTOGONALE, POSSIAMO ESPRIMERE UN GENERICO v COME $v = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} \cdot v_1 + \frac{\langle v, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} \cdot v_2 + ... + \frac{\langle v, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} \cdot v_k$. INFATTI $\langle v, v_j \rangle = \langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_k v_k \rangle = \alpha_1 \langle v_1, v_j \rangle + ... + \alpha_j \langle v_j, v_j \rangle + ... + \alpha_n \langle v_n, v_j \rangle = \alpha_j \langle v_j, v_j \rangle \Rightarrow \alpha_j = \frac{\langle v, v_j \rangle}{\|v_j\|^2}$. TALE TERMINE È DETTO COEFFICIENTE DI FOURIER

TEOREMA DELL'ORTOGONALIZZAZIONE DI GRAM-SCHMIDT: SIA V UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI $\mathbb{R}^k$ E $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ È UNA SUA BASE. PONENDO $w_1 = v_1$; $w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1$; $w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1$, ..., $w_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, w_j \rangle}{\|w_j\|^2} \cdot w_j$ RISULTERÀ CHE:

1) $\mathrm{span}(w_1, w_2, ..., w_\ell) = \mathrm{span}(v_1, v_2, ..., v_\ell) \quad \forall \ell \in [1; k]$

2) w_j È ORTOGONALE AD OGNI VETTORE DELLO $\mathrm{span}(w_1, w_2, ..., w_{j-1})$, $j \in [2; k]$

LA DIMOSTRAZIONE AVVIENE PER INDUZIONE:

PASSO ZERO) $k = 1 \rightarrow w_1 = v_1$ ✓

PASSO INDUTTIVO $k-1 \Rightarrow k$?) $w_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, w_j \rangle}{\|w_j\|^2} \cdot w_j$

1) $w_k \in \mathrm{span}(w_1, w_2, ..., w_{k-1}, v_k) = \mathrm{span}(v_1, v_2, ... v_{k-1}, v_k)$ PER INDUZIONE $\Rightarrow \mathrm{span}(w_1, w_2, ..., w_{k-1}, v_1) \subset \mathrm{span}(v_1, v_2, ..., v_k)$. ANCHE $v_k \in \mathrm{span}(w_1, w_2, ..., w_{k-1}, v_1)$ PER L'IPOTESI INDUTTIVA $\Rightarrow \mathrm{span}(w_1, w_2, ..., w_k) = \mathrm{span}(v_1, v_2, ..., v_k)$ ✓

2) BISOGNA PROVARE CHE $\langle w_k, w_\ell \rangle = 0 \quad \forall \ell \in [1; k-1]$

$\langle w_\ell, w_k \rangle = \langle w_\ell, v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, w_j \rangle}{\|w_j\|^2} w_j \rangle = \langle w_\ell, v_k \rangle - \langle w_\ell, \frac{\langle v_k, w_\ell \rangle}{\|w_\ell\|^2} \cdot w_\ell \rangle =$

$= \langle w_\ell, v_k \rangle - \|w_\ell\|^2 \cdot \frac{\langle w_\ell, v_k \rangle}{\|w_\ell\|^2} = 0 \Rightarrow w_k$ È ORTOGONALE AD OGNI VETTORE DI $\mathrm{span}(w_1, w_2, ..., w_k)$ ✓

QUINDI, PARTENDO DALLA BASE ORTOGONALE $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$, GRAM-SCHMIDT CONSENTE DI COSTRUIRE L'ORTONORMALE $\left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, ..., \frac{v_k}{\|v_k\|} \right\}$

AD ESEMPIO, DATA $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x - y - 2z = 0 \right\}$, DETERMINIAMO UNA SUA BASE

$\begin{cases} x = s + 2t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \quad E = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow B_E = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2} \right\}$

$w_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow B \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ È LA BASE ORTOGONALE $\|w_1\| = \sqrt{2}$, $\|w_2\| = \sqrt{3}$ $\Rightarrow B' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ È L'ORTONORMALE