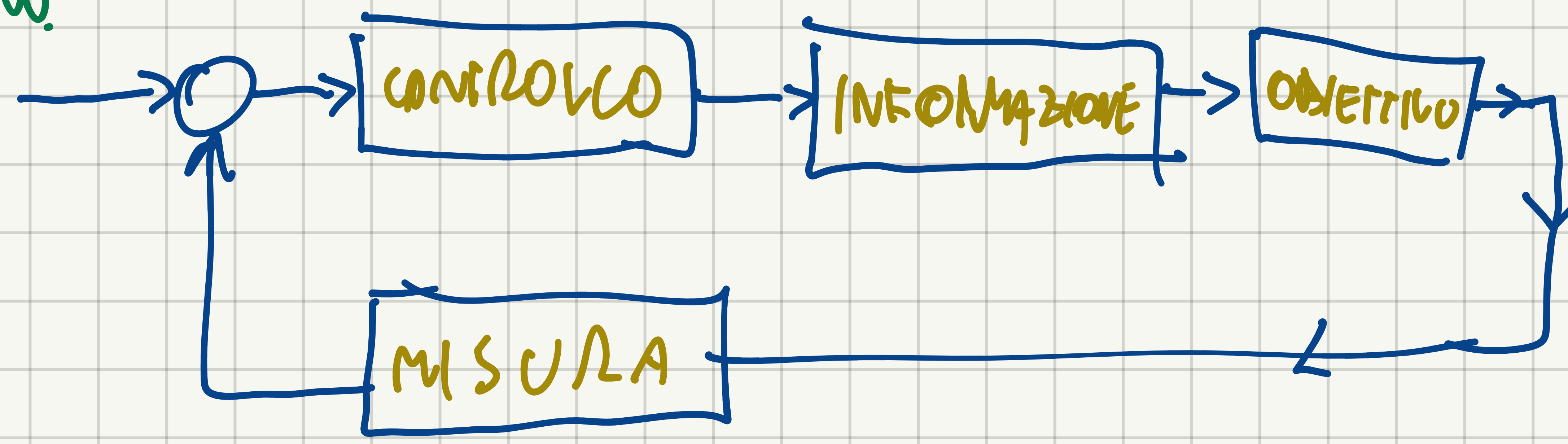
INTRODUZIONE

L'AUTOMATICA È LO STUDIO DELLE METODOLOGIE E TECNOLOGIE SVILUPPATE PER PROGETTARE IN TERMINI ASTRATTI E FORMALI DEI SISTEMI AUTOMATICI DINAMICI ATTI A MINIMIZZARE L'INTERVENTO UMANO.



$t \in \mathbb{R}$ → SISTEMI A TEMPO CONTINUO → RISOLUZIONE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL 1° ORDINE

$t \in \mathbb{Z}$ → SISTEMI A TEMPO DISCRETO → SEMPLIFICAZIONI CON PASSAGGIO A SEMPLICI EQUAZIONI ALGEBRICHE

DESCRIZIONE MATEMATICA NON INFLUENZATA DALLA NATURA DEL SISTEMA

UN SISTEMA È INTESO COME UN OGGETTO ASTRATTO ORIENTATO, OSSIA COMPOSTO DA CAUSE ED EFFETTI DINAMICI → VARIABILI IN INGRESSO $u(t)$ E IN USCITA $y(t)$

CONTROLLI AUTOMATICI

È UN'AZIONE ATTIVA, CIOÈ UN'AZIONE A CUI SI ASSEGNA UN COMANDO, CHE NON PREVEDE L'INTERVENTO DELL'UOMO. SI DISTINGUONO IN DUE IMPORTANTI CATEGORIE:

CONTROLLI AUTOMATICI

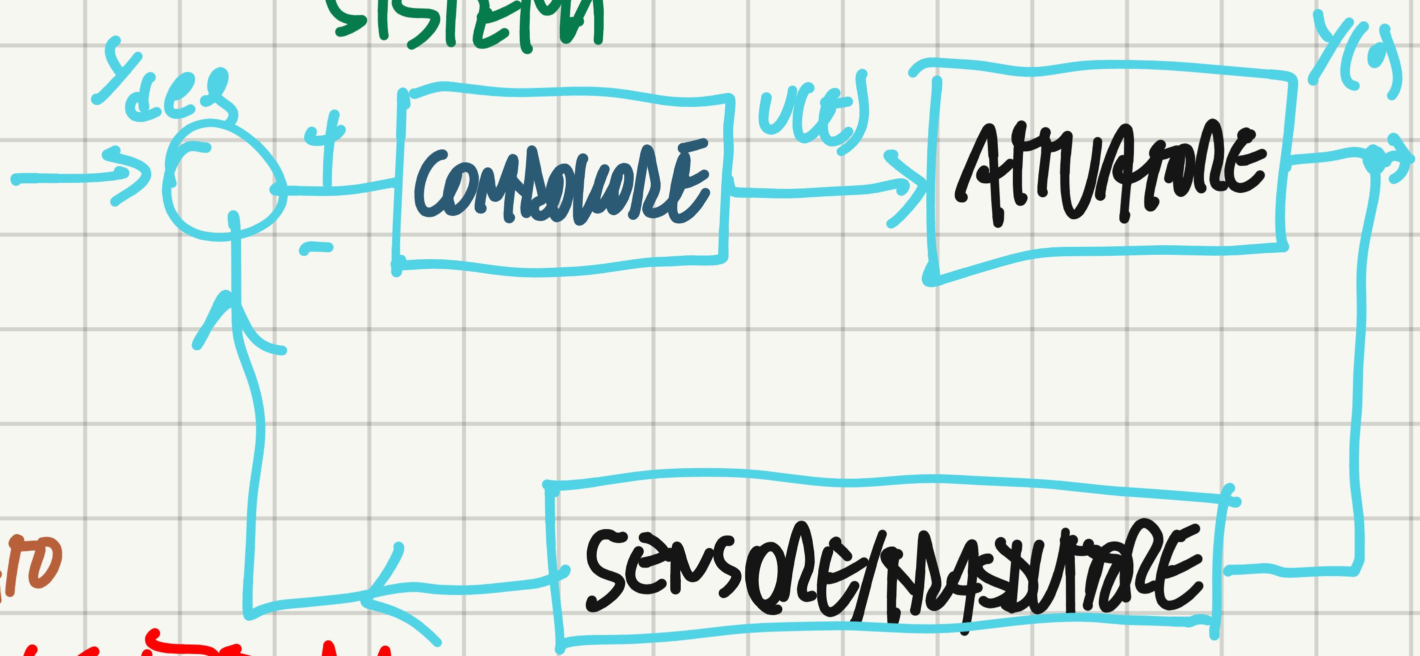
CON/SENZA RETROAZIONE DELL'INGRESSO IN USCITA

A CATENA APERTA
↓
COME PROCEDERE?

1. DA UNA SERIE DI ESPERIMENTI RICAVARE UNA LEGGE $y(t) = f(u(t))$
2. FUNZIONE INVERSA $\rightarrow u(t) = g(y(t))$

CALCOLO L'INPUT CONOSCENDO L'OUTPUT DESIDERATO

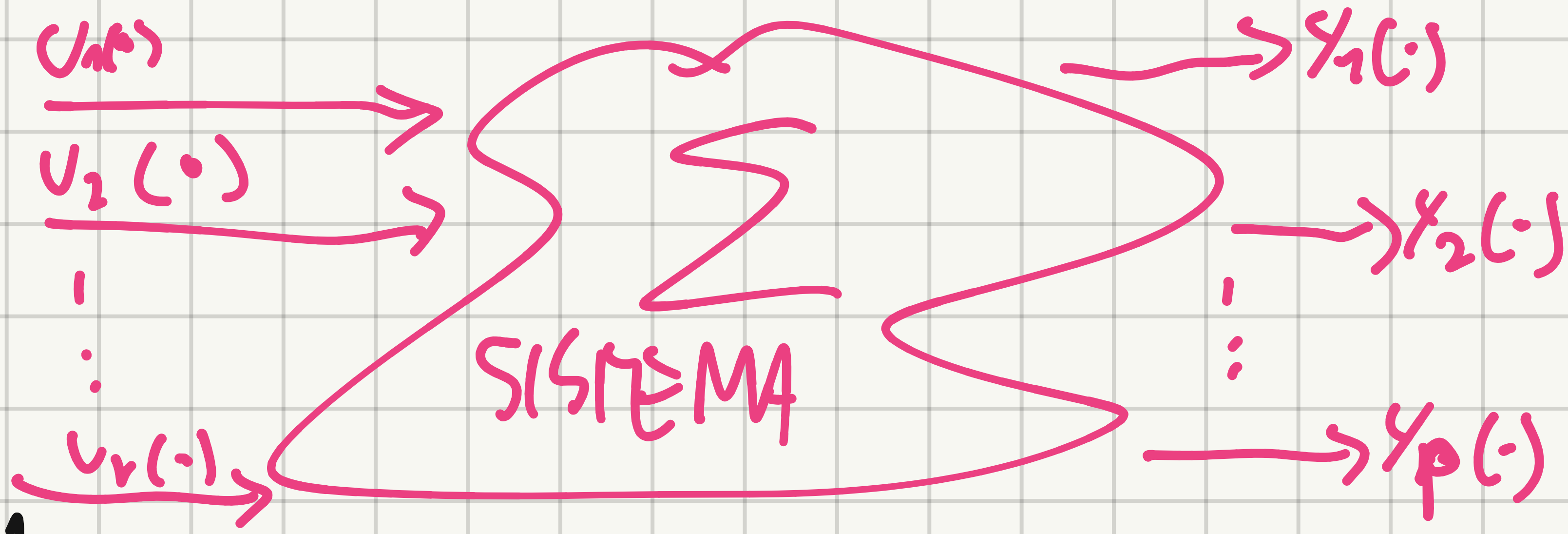
A CATENA CHIUSA
↓
VANTAGGIO: GESTISCE EVENTUALI VARIAZIONI INTERNE/ESTERNE DEL SISTEMA



I SISTEMI

In natura esistono diverse tipologie. Noi distinguiamo le due principali:

- ad avanzamento temporale → t varia in maniera continua o periodica/discreta
- ad elementi discreti



SISTEMA A r INGRESSI E p USCITE

In genere si definiscono i vettori ingresso e uscita

$$U(\cdot)_{(r\times 1)} = \begin{vmatrix} U_1(\cdot) \\ U_2(\cdot) \\ \vdots \\ U_r(\cdot) \end{vmatrix} \qquad Y(\cdot)_{(p\times 1)} = \begin{vmatrix} Y_1(\cdot) \\ Y_2(\cdot) \\ \vdots \\ Y_p(\cdot) \end{vmatrix}$$

PROPRIETÀ DEI SISTEMI

1. SISO/MIMO (Single Input Single Output / Multi Input Multi Output)
   - SISO: $\dim U = 1$, $\dim Y = 1$
   - MIMO: $\dim U = r$, $\dim Y = p$

   → CON "VERSIONI INTERMEDIE" SIMO E MISO

2. STATICO/DINAMICO — STATICO → L'USCITA DIPENDE SOLO DALL'ENTRATA E NON DALLE DERIVATE $Y(\cdot) = f(U(\cdot))$

3. LINEARE/NON LINEARE — LINEARE → VALE IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI: LA COMBINAZIONE LINEARE DELLE CAUSE È UGUALE ALLA COMBINAZIONE LINEARE DEGLI EFFETTI

   $$a_n Y^n(\cdot) + \dots + a_1 Y'(\cdot) + a_0 Y(\cdot) = b_0 U(\cdot) + b_1 U'(\cdot) + \dots + b_m U^m(\cdot)$$

4. STAZIONARIO/NON STAZIONARIO — STAZIONARIO → VALE IL PRINCIPIO DI TRASLAZIONE CAUSA-EFFETTO, PER CUI VI È UN LEGAME TEMPORALE TRA $U(t)$ E $Y(t)$ $\quad f(U(\cdot)+t) = Y(\cdot)+t$

5. PROPRIO/NON PROPRIO — PROPRIO → VALE IL PRINCIPIO DI CAUSALITÀ: UNA VARIAZIONE DEGLI INGRESSI IMPLICA UNA VARIAZIONE DELLE USCITE MA NON VALE IL VICEVERSA

6. PARAMETRI CONCENTRATI/DISTRIBUITI — DESCRITTO DA UN NUMERO FINITO/NON FINITO DI STATI E I PARAMETRI DIPENDONO AL PIÙ DAL TEMPO

7. SENZA/CON RITARDO — NON C'È/C'È TRASLAZIONE DELL'EFFETTO IN USCITA. CON RITARDO: $U(\cdot) \Rightarrow Y(\cdot + T)$

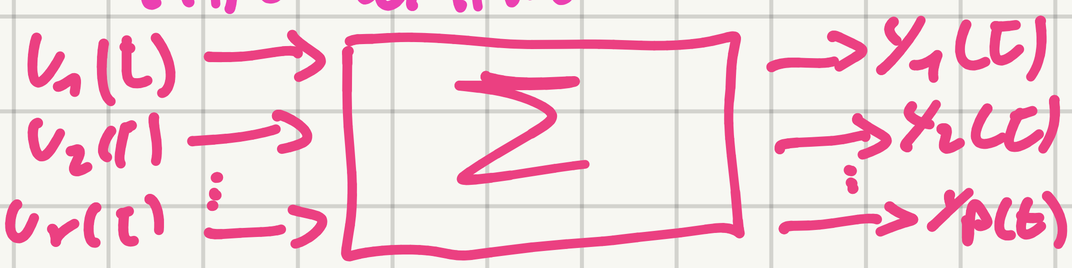
MODELLAZIONE MATEMATICA DI UN SISTEMA

① MODELLAZIONE INGRESSO-USCITA IU → DESCRIVE UNA RELAZIONE MATEMATICA TRA U E Y SENZA CONSIDERARE ALTRO

② MODELLAZIONE IN VARIABILI DI STATO VS → SFRUTTA VARIABILI CHE DESCRIVONO LE CONDIZIONI INTERNE DEL SISTEMA

MODELLO IU

TEMPO CONTINUO



① SISO $f(y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n)}(t), u(t), \dots, u^{(m)}(t), t) = 0$

MIMO
$$\begin{cases} f_1(y_1(t), \dots, y_1^{(n_1)}(t), u_1(t), \dots, u_1^{(m_{1,1})}, \dots, u_r^{(m_{1,r})}, t) = 0 \\ f_2(y_2(t), \dots, y_2^{(n_2)}(t), u_1(t), \dots, u_1^{(m_{2,1})}, \dots, u_r^{(m_{2,r})}, t) = 0 \\ \vdots \\ f_p(y_p(t), \dots, y_p^{(n_p)}(t), u_1(t), \dots, u_1^{(m_{p,1})}, \dots, u_r^{(m_{p,r})}, t) = 0 \end{cases}$$

② STATICO $f(u(t), y(t), t) = 0$

NON COMPAIONO LE DERIVATE

UN SISTEMA MIMO È DINAMICO SE ALMENO

③ LINEARE SISO

$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) + \dots + b_m u^{(m)}(t)$

UN SISTEMA MIMO È NON LINEARE SE

④ STAZIONARIO $f(y(t), \dots, y^{(n)}(t), u(t), \dots, u^{(m)}(t)) = 0$

UN SISTEMA MIMO È NON STAZIONARIO

⑤ PROPRIO $\forall_p$ EQUAZIONE $n \geq m$

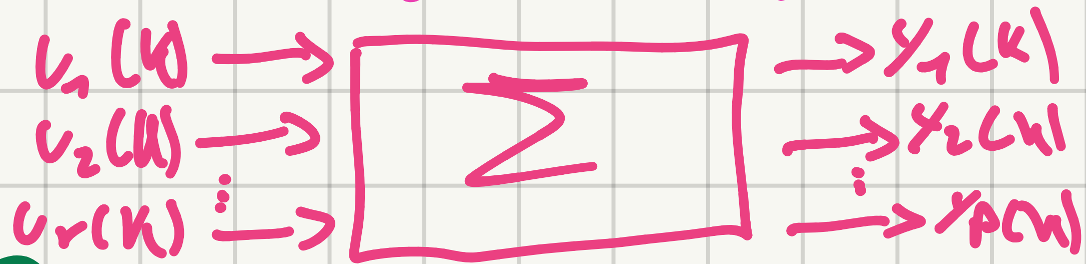
⑥ A PARAMETRI CONCENTRATI TUTTE LE EQUAZIONI HANNO UN NUMERO FINITO DI ELEMENTI

ESEMPIO DISTRIBUITI: $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i x_i(t)$

⑦ CON RITARDO

$f(y(t+T), \dots, y^{(n)}(t+T), u(t), \dots, u^{(m)}(t), t) = 0$

TEMPO DISCRETO



① $f(y(k), y(k-1), \dots, y(k-n), u(k), \dots, u(k-m), k) = 0$

$$\begin{cases} f_1(y_1(k), \dots, y_1(k-n_1), u_1(k), \dots, u_1(k-m_{1,1}), \dots, u_r(k-m_{1,r}), k) = 0 \\ f_2(y_2(k), \dots, y_2(k-n_2), u_1(k), \dots, u_1(k-m_{2,1}), \dots, u_r(k-m_{2,r}), k) = 0 \\ \vdots \\ f_p(y_p(k), \dots, y_p(k-n_p), u_1(k), \dots, u_1(k-m_{p,1}), \dots, u_r(k-m_{p,r}), k) = 0 \end{cases}$$

② $f(u(k), y(k), k) = 0$

NON COMPAIONO I $k-1, \dots$

UN'EQUAZIONE È DINAMICO

③

$a_n y(k-n) + \dots + a_1 y(k-1) + a_0 y(k) = b_0 u(k) + \dots + b_m u(k-m)$

ALMENO UN'EQUAZIONE È NON LINEARE

④ $f(y(k), y(k-1), \dots, y(k-n), u(k), \dots, u(k-m)) = 0$

SE ALMENO UN'EQUAZIONE È NON STAZIONARIA

STRETTAMENTE PROPRIO $\forall_p$ EQUAZIONE $n > m$

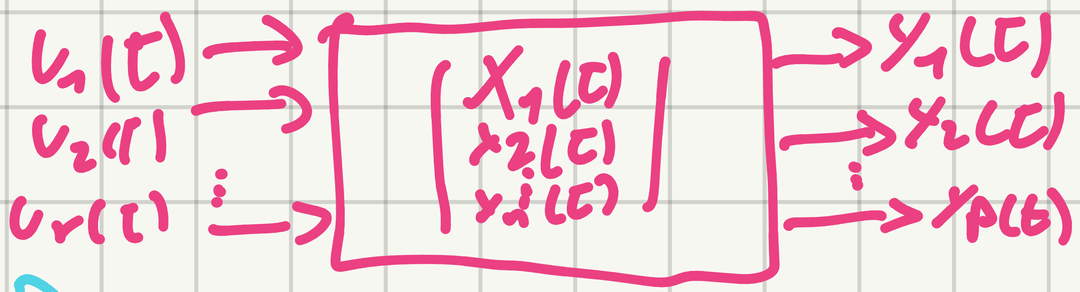
⑦ CON RITARDO

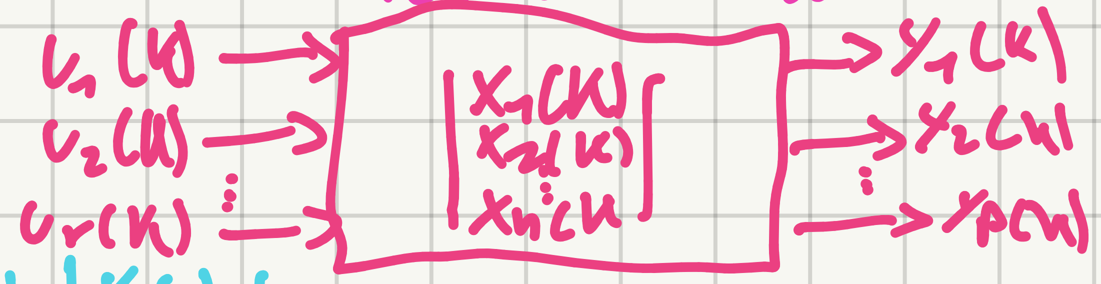
$f(y(k+T), y(k-1+T), \dots, y(k-n+T), u(k), \dots, u(k-m), k) = 0$

IL SISTEMA È SENZA RITARDO SE $T=0$

MODELLO VS

TEMPO CONTINUO	TEMPO DISCRETO





DEFINIAMO IL VETTORE $\dot{x}(\cdot) = \begin{vmatrix} \frac{dx_1(\cdot)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n(\cdot)}{dt} \end{vmatrix}$ CHE DESCRIVE COME VARIA x_i

Tempo continuo

1 MIMO

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) = f_1[x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_r(t),t] \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n[x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_r(t),t] \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1(t) = g_1[x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_r(t),t] \\ \vdots \\ y_p(t) = g_p[x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_r(t),t] \end{bmatrix} \end{cases}$$

EQUAZIONI DI STATO EQUAZIONI DI USCITA

FORMA COMPATTA: $\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t) \\ y(t) = g(x(t),u(t),t) \end{cases}$

Tempo discreto

1 MIMO

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1(k+1) = f_1[x_1(k),\dots,x_n(k),u_1(k),\dots,u_r(k),k] \\ \vdots \\ x_n(k+1) = f_n[x_1(k),\dots,x_n(k),u_1(k),\dots,u_r(k),k] \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1(k) = g_1[x_1(k),\dots,x_n(k),u_1(k),\dots,u_r(k),k] \\ \vdots \\ y_p(k) = g_p[x_1(k),\dots,x_n(k),u_1(k),\dots,u_r(k),k] \end{bmatrix} \end{cases}$$

EQUAZIONI DI STATO EQUAZIONI DI USCITA

2 STATICO

UN SISTEMA È STATICO QUANDO LE USCITE DIPENDONO SOLO DAGLI INGRESSI E, AL PIÙ, DAL TEMPO $y(\cdot) = g(u_1(\cdot),\dots,u_r(\cdot),\cdot)$

LE VARIABILI DI STATO NON SONO OSSERVABILI IN USCITA

3 LINEARE MIMO (tempo continuo)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)\cdot x(t) + B(t)\cdot u(t) \\ y(t) = C(t)\cdot x(t) + D(t)\cdot u(t) \end{cases}$$

3 LINEARE MIMO (tempo discreto)

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)\cdot x(k) + B(k)\cdot u(k) \\ y(k) = C(k)\cdot x(k) + D(k)\cdot u(k) \end{cases}$$

$A(\cdot) = \begin{vmatrix} a_{1,1}(\cdot) & a_{1,2}(\cdot) & \dots & a_{1,n}(\cdot) \\ a_{2,1}(\cdot) & a_{2,2}(\cdot) & \dots & a_{2,n}(\cdot) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}(\cdot) & a_{n,2}(\cdot) & \dots & a_{n,n}(\cdot) \end{vmatrix}$ MATRICE DELLA DINAMICA

$B(\cdot) = \begin{vmatrix} b_{1,1}(\cdot) & b_{1,2}(\cdot) & \dots & b_{1,r}(\cdot) \\ b_{2,1}(\cdot) & b_{2,2}(\cdot) & \dots & b_{2,r}(\cdot) \\ b_{n,1}(\cdot) & b_{n,2}(\cdot) & \dots & b_{n,r}(\cdot) \end{vmatrix}$ MATRICE DEGLI INGRESSI

$C(\cdot) = \begin{vmatrix} c_{1,1}(\cdot) & c_{1,2}(\cdot) & \dots & c_{1,n}(\cdot) \\ c_{2,1}(\cdot) & c_{2,2}(\cdot) & \dots & c_{2,n}(\cdot) \\ \vdots & \vdots & & \\ c_{p,1}(\cdot) & c_{p,2}(\cdot) & \dots & c_{p,n}(\cdot) \end{vmatrix}$ MATRICE DELLE USCITE

$D(\cdot) = \begin{vmatrix} d_{1,1}(\cdot) & d_{1,2}(\cdot) & \dots & d_{1,r}(\cdot) \\ d_{2,1}(\cdot) & d_{2,2}(\cdot) & \dots & d_{2,r}(\cdot) \\ \vdots & & & \vdots \\ d_{p,1}(\cdot) & d_{p,2}(\cdot) & \dots & d_{p,r}(\cdot) \end{vmatrix}$ MATRICE TRASMISSIONE INGRESSO USCITA

4 STAZIONARIO

SE LE MATRICI APPENA DEFINITE NON DIPENDONO DAL TEMPO

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\cdot x(t) + B\cdot u(t) \\ y(t) = C\cdot x(t) + D\cdot u(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(k+1) = A\cdot x(k) + B\cdot u(k) \\ y(k) = C\cdot x(k) + D\cdot u(k) \end{cases}$$

⑤ PROPRIO

$$\begin{cases} x^{\circ}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases}$$

È GIÀ PROPRIO

⑤ PROPRIO

$$\begin{cases} x^{\circ}(k+1) = f(x(k), u(k), k) \\ y(k) = g(x(k), u(k), k) \end{cases}$$

È GIÀ PROPRIO

SE $y(\cdot) = g(x(\cdot), \cdot)$ È STRETTAMENTE PROPRIO

⑥ A PARAMETRI CONCENTRATI SE $U_r(\cdot), Y_p(\cdot)$ SONO TALI CHE P, V NUMERI FINITI

⑦ CON/SENZA RITARDO

$$\begin{cases} x^{\circ}(t) = f(x(t), u(t-T), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t-T), t) \end{cases}$$

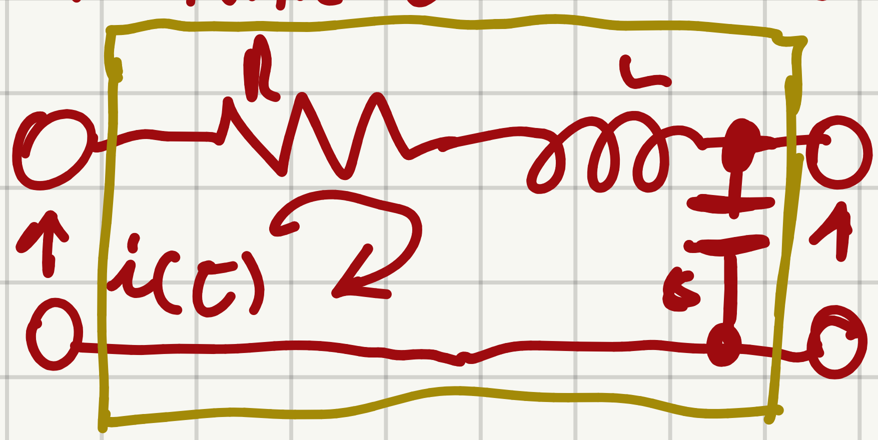
⑦ CON/SENZA RITARDO

$$\begin{cases} x^{\circ}(k+1) = f(x(k), u(k-T), k) \\ y(k) = g(x(k), u(k-T), k) \end{cases}$$

RISULTA SENZA RITARDO NEL CASO IN CUI $T=0$

ALCUNI ESERCIZI

① PRENDIAMO UN CIRCUITO RLC A TEMPO CONTINUO E RICAVARNE UN MODELLO PRIMA IN VS E POI IN IO



$$v_i(t) \rightarrow \boxed{\Sigma} \rightarrow v_o(t)$$

$$v_R(t) = R \cdot i(t)$$

$$v_L(t) = L \cdot \frac{d\,i(t)}{dt}$$

$$v_C(t) = ? \quad i_C(t) = C \cdot \frac{d v(t)}{dt}$$

$$v(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t)$$

$$\begin{cases} v(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \dfrac{di(t)}{dt} + v_c(t) \\ i(t) = C \cdot \dfrac{dv_c(t)}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{di(t)}{dt} = v(t) - \dfrac{R}{L} i(t) - \dfrac{1}{L} v_c(t) \\ \dfrac{dv_c(t)}{dt} = \dfrac{1}{C} i(t) \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{vmatrix} i(t) \\ v_c(t) \end{vmatrix} \qquad u(t) = \begin{vmatrix} v(t) \end{vmatrix} \qquad y(t) = \begin{vmatrix} v_c(t) \end{vmatrix}$$

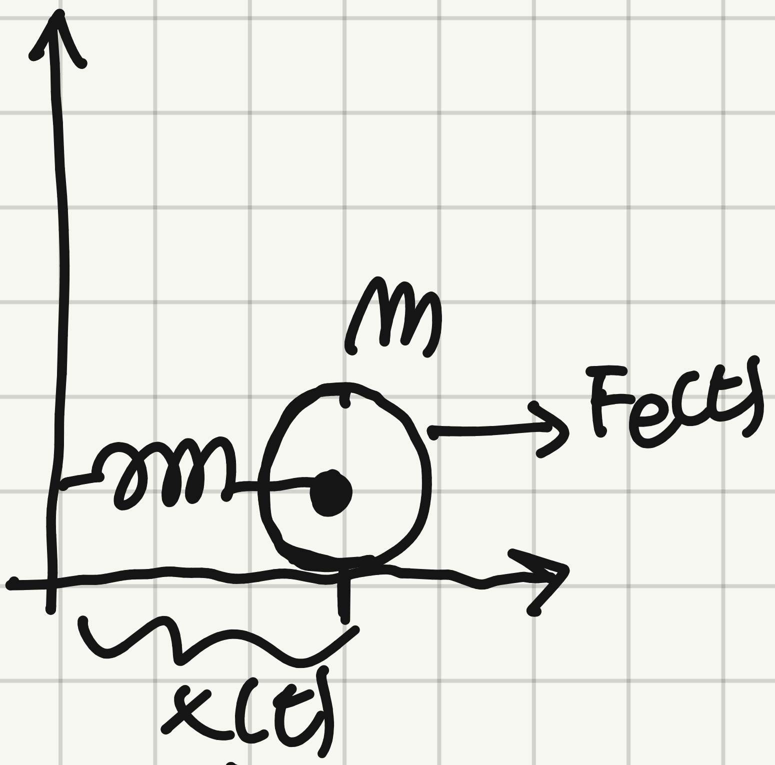
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u(t) - \dfrac{R}{L} x_1(t) - \dfrac{1}{L} x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \dfrac{1}{C} x_1(t) \\ y(t) = x_2(t) \end{cases}$$

$$y'(t) = \frac{1}{C} x_1(t) \implies x_1(t) = C y'(t) \quad \dot{x}_1(t) = C y''(t)$$

$$\rightarrow C y''(t) + \frac{R}{L} C y'(t) + \frac{1}{L} y(t) = u(t)$$

1. SISO
2. DINAMICO
3. LINEARE
4. STAZIONARIO
5. STRETTAMENTE PROPRIO
6. A PARAMETRI CONCENTRATI
7. SENZA RITARDO

② UNA MASSA m È VINCOLATA ALLA PARETE DA UNA MOLLA DI COSTANTE ELASTICA K. DETERMINARE $x(t)$ E LE MATRICI A, B, C, D



$$F_e(t) \rightarrow \boxed{\Sigma} \rightarrow x(t)$$

$$\Sigma \vec{F} = ma \rightarrow F_e(t) - F_{el}(t) = m a$$

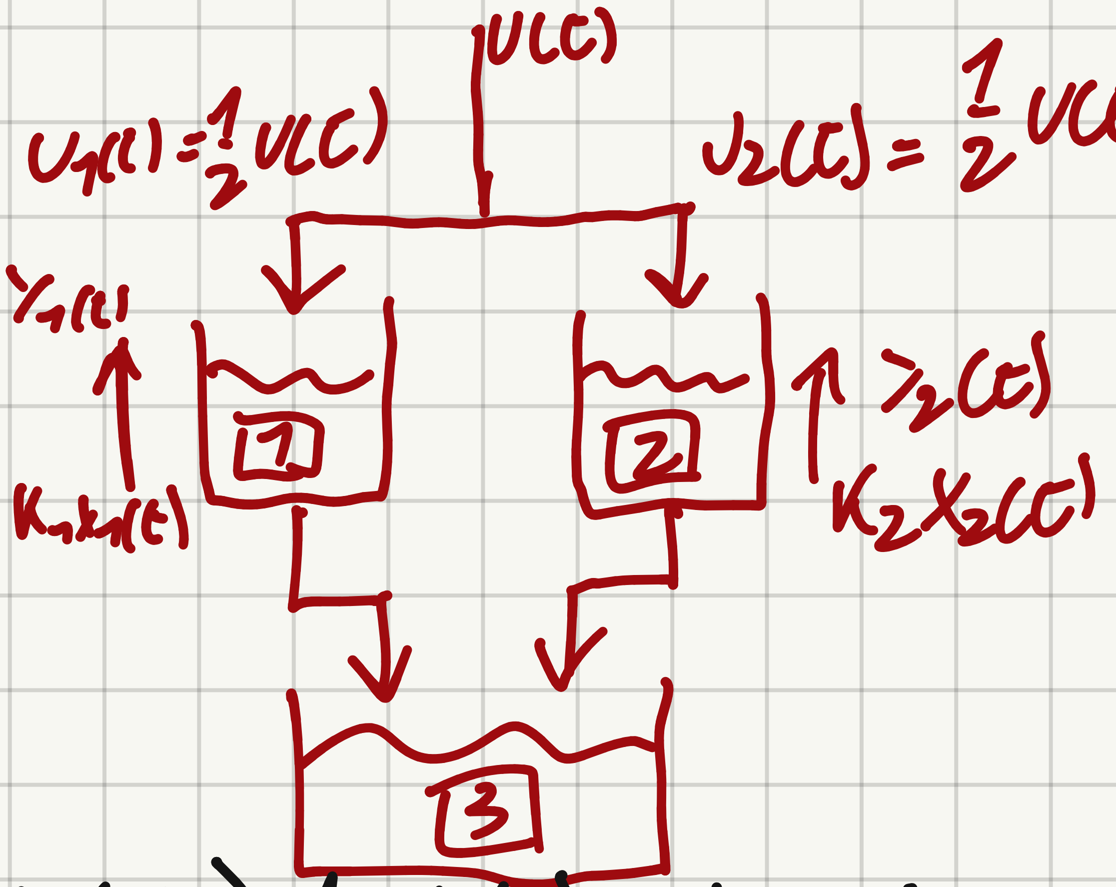
$$F_e(t) - K x(t) = m \ddot{x}(t)$$

$$F_e(t) - K x(t) = m \dot{v}(t) \qquad X(t) = \begin{vmatrix} x(t) \\ v(t) \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{1}{m} K x_1(t) + \frac{1}{m} u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{m} & \frac{1}{m} \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1/m \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$$

③ PRENDIAMO 3 SERBATOI UGUALI CON PORTATA D'INGRESSO $u(t)$ CHE SI DIVIDE IN 2 PARTI UGUALI PER RIEMPIRE I SERBATOI $\boxed{1}$ E $\boxed{2}$. COME VARIANO I VOLUMI DEI 3 SERBATOI?



$$u(t) \to \boxed{\Sigma} \to V_{TOT}(t)$$

$V_1(t)=A_1X_1(t) \quad V_2(t)=A_2X_2(t) \quad V_3=A_3X_3(t)$

$$\to \begin{cases} V_1(t)=A\,X_1(t) \\ V_2(t)=A\,X_2(t) \\ V_3(t)=A\,X_3(t) \end{cases}$$

$$L(t)=\int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau=\int_{t_0}^{t}\frac{\text{PORTATA}(\tau)}{A}\,d\tau \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1(t)=x_1(t_0)+\int_{t_0}^{t}\frac{1}{2A}u(\tau)\,d\tau-\int_{t_0}^{t}\frac{k_1x_1(\tau)}{A}\,d\tau \\ x_2(t)=x_2(t_0)+\int_{t_0}^{t}\frac{1}{2A}u(\tau)\,d\tau-\int_{t_0}^{t}\frac{k_2x_2(\tau)}{A}\,d\tau \\ x_3(t)=x_1(t_0)+\int_{t_0}^{t}\frac{1}{2A}u(\tau)\,d\tau-\int_{t_0}^{t}\frac{k_2x_2(\tau)}{A}\,d\tau \\ y(t)=Ax_1(t)+Ax_2(t)+Ax_3(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 0 + \frac{1}{2A} u(t) - \frac{k_1}{A} x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = 0 + \frac{1}{2A} u(t) - \frac{k_2}{A} x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = 0 + \frac{1}{2A} u(t) - \frac{k_3}{A} x_3(t) \\ y(t) = A x_1(t) + A x_2(t) + A x_3(t) \end{cases}$$

④ MODELLO PREDA-PREDATORE: INDICHIAMO CON $x_1(t)$ IL NUMERO DI PREDE AL TEMPO t E $x_2(t)$ IL NUMERO DI PREDATORI AL TEMPO t. COME INTERAGISCONO?

a: TASSO DI CRESCITA x_1 $\quad$ d: TASSO DI DECRESCITA

b: RIDUZIONE DI x_1 CON L'INTERAZIONE x_2

c: AUMENTO DI x_2 CON L'INTERAZIONE x_1

SOLO PREDE

$$\dot{x}_1(t) = a x_1(t) \rightarrow \frac{dx_1(t)}{dt} = a x_1(t) \rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{1}{x_1(t)} dt = \int_{t_0}^{t} a \, dt$$

$$\ln(x_1(t)) - \ln(x_1(t_0)) = a(t - t_0)$$

$$\rightarrow \frac{\ln(x_1(t))}{\ln(x_1(t_0))} = a(t-t_0) \Longrightarrow x_1(t) = x_1(t_0) e^{a(t-t_0)}$$

SOLO PREDATORI

ANALOGAMENTE $\dot{x}_2(t) = -d x_2(t) \rightarrow x_2(t) = x_2(t_0) e^{-d(t-t_0)}$

INTERAZIONE

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a x_1(t) - b x_1(t) x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -d x_2(t) + c x_1(t) x_2(t) \\ y_1(t) = x_1(t) = x_1(t_0) e^{a(t-t_0)} \\ y_2(t) = x_2(t) = x_2(t_0) e^{-d(t-t_0)} \end{cases}$$

MODELLO IU: ANALISI NEL DOMINIO DEL TEMPO ($T = \mathbb{R}$)

PER SEMPLICITÀ, ANALIZZIAMO IL CASO SISO

$h[y(t), y'(t), \dots, y^n(t), u(t), u'(t), \dots, u^m(t), t] = 0$ E PONIAMO LE SEGUENTI IPOTESI:

- NOTE LE CONDIZIONI INIZIALI $y(t_0), y'(t_0), \dots, y^n(t_0)$
- SISTEMA LINEARE
- SISTEMA STAZIONARIO $\forall t \geq t_0$
- SISTEMA PROPRIO

$\rightarrow a_n y^n(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) + b_1 u'(t) + \dots + b_m u^m(t)$

$y(t)$? È CHIARO CHE LA RISPOSTA DEL SISTEMA DIPENDA DA CAUSE ESTERNE $u(t)$ E CAUSE INTERNE, OSSIA LE CONDIZIONI INIZIALI $\Rightarrow$ PER LA LINEARITÀ, LA SOMMA DELLE DUE RISPOSTE RESTITUISCE LA $y(t)$

$y(t) = y_e(t) + y_f(t)$ RISPOSTA LIBERA + RISPOSTA FORZATA

RISPOSTA LIBERA

$u(t) = 0$, NOTE CONDIZIONI INIZIALI

$a_n y^n(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$

RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE MEDIANTE:

IL POLINOMIO CARATTERISTICO $P(\lambda)$ E QUINDI EQUAZIONE CARATTERISTICA $P(\lambda)=0$

$a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \Rightarrow$ SI OTTENGONO r RADICI DI MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA $\mu_i = 1, \dots, r$ $\quad r \leq n$

$$\sum_{i=1}^{r} \mu_i = n$$

ASSOCIAMO AD OGNI RADICE IL RISPETTIVO MODO NATURALE, MODO CARATTERISTICO DEL SISTEMA CHE NON PUÒ VARIARE. IL SISTEMA AVRÀ n MODI

RADICI REALI

$$\lambda_i \in \mathbb{R}(\mu_i) \rightarrow \begin{cases} \mu_i = 1 \rightarrow t^0 e^{\lambda_i t} = C_1(t) \\ \mu_i = 2 \rightarrow t\, e^{\lambda_i t} = C_2(t) \\ \vdots \\ \text{GENERICO } \mu_i \rightarrow t^{\mu_i - 1} e^{\lambda_i t} = C_n(t) \end{cases}$$

CERCHIAMO LA COMBINAZIONE LINEARE DEI MODI E, DALLE CONDIZIONI INIZIALI DATE, DETERMINIAMO LA $y_\ell(t)$

ESEMPIO: DETERMINARE LA $y_\ell(t)$ DI $3y^{IV}(t) + 21y'''(t) + 45y''(t) + 39y'(t) + 12y(t) = 5u(t) + 7u'(t) + 9u''(t)$

SAPENDO CHE $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 1$

$$P(\lambda)=0 \to 3\lambda^4+21\lambda^3+45\lambda^2+39\lambda+12=0$$

$$\to 3(\lambda+1)^3(\lambda+4)=0$$

- $\lambda_1=-1 \quad r_1=3 \quad e^{-t},\ te^{-t},\ t^2e^{-t}$
- $\lambda_2=-4 \quad r_2=1 \quad e^{-4t}$

$$c(t)=A_{1,0}e^{-t}+A_{1,1}te^{-t}+A_{1,2}t^2e^{-t}+A_2e^{-4t}$$

$$c'(t)=-A_{1,0}e^{-t}+A_{1,1}e^{-t}-A_{1,1}te^{-t}+2A_{1,2}te^{-t}-A_{1,2}t^2e^{-t}-4A_2e^{-4t}$$

$$c''(t)=A_{1,0}e^{-t}-2A_{1,1}e^{-t}+A_{1,1}te^{-t}+2A_{1,2}e^{-t}-4A_{1,2}te^{-t}+A_{1,2}t^2e^{-t}+16A_2e^{-4t}$$

$$c'''(t)=-A_{1,0}e^{-t}+3A_{1,1}e^{-t}-A_{1,1}te^{-t}-6A_{1,2}e^{-t}+6A_{1,2}te^{-t}+A_{1,2}t^2e^{-t}-64A_2e^{-4t}$$

$$\begin{cases} A_{1,0}+A_{1,2}+A_2=0 \\ -A_{1,0}+A_{1,1}-4A_2=0 \\ A_{1,0}-2A_{1,1}+2A_{1,2}+16A_2=0 \\ -A_{1,0}+3A_{1,1}-6A_{1,2}-64A_2=1 \end{cases}$$

$$A_{1,0}=-\frac{1}{15} \quad A_{1,1}=-\frac{1}{5} \quad A_{1,2}=\frac{1}{10} \quad A_2=-\frac{1}{30}$$

$$\to y_e(t)=-\frac{1}{15}e^{-t}-\frac{1}{5}te^{-t}+\frac{1}{10}t^2e^{-t}-\frac{1}{30}e^{-4t}$$

RADICI COMPLESSE

$$P(\lambda)=0 \begin{cases} R \text{ RADICI REALI} \\ \to \lambda_\ell \in \mathbb{C}\ (r_\ell);\ \lambda_\ell^* \in \mathbb{C}\ (r_\ell^*=r_\ell) \quad \ell=1,\dots,S \\ 2S \text{ RADICI COMPLESSE CONIUGATE} \end{cases}$$

$$\to \mathrm{Re}[\lambda_\ell]+i\,\mathrm{Im}[\lambda_\ell]$$

$$\lambda_i \in \mathbb{R}(\nu_i) \to \begin{cases} e^{\lambda_i t} \\ \vdots \\ t^{\nu_i - 1} e^{\lambda_i t} \end{cases}$$

$$e^{\lambda_\ell(t)} = e^{Re[\lambda_\ell] + i\,Im[\lambda_\ell]} = e^{Re[\lambda_\ell]} \cdot e^{i\,Im[\lambda_\ell]} =$$

$$= e^{\alpha_\ell t} e^{i\omega_\ell t} = e^{\alpha_\ell t}\left(\cos(\omega_\ell t) + i \sin(\omega_\ell t)\right) = e^{\alpha_\ell} \cos(\omega_\ell t)$$

$$+ i\, e^{\alpha_\ell t} \sin(\omega_\ell t)$$

$$\lambda_i, \lambda_i^* \in \mathbb{C}\,(\nu_i^* = \nu_i) \to \begin{cases} e^{\lambda_i t}, \; e^{\lambda_i^* t} \\ \vdots \\ t^{\nu_i - 1} e^{\lambda_i t}, \; t^{\nu_i^* - 1} e^{\lambda_i^* t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{\lambda_\ell(t)} = e^{\alpha_\ell t} \cos(\omega_\ell t) + i e^{\alpha_\ell t} \sin(\omega_\ell t) \\ e^{\lambda_\ell^*(t)} = e^{\alpha_\ell t} \cos(\omega_\ell t) - i e^{\alpha_\ell t} \sin(\omega_\ell t) \end{cases}$$

$$C(t) = \sum_{i=1}^{R} C_{\nu_i}(t) + \sum_{\ell=1}^{S} C_{\nu_\ell}(t) + \sum_{\ell=2}^{S} C_{\nu_\ell^*}(t) = \sum_{i=1}^{R} C_{\nu_i}(t) + \sum_{\ell=1}^{S} \left(C_{\nu_\ell}(t) + C_{\nu_\ell^*}(t)\right)$$

POSSIAMO SCRIVERE LA COMBINAZIONE $C_{\nu_\ell}(t) + C_{\nu_\ell^*}(t)$

IN TRE MODI DIVERSI COLLEGATI TRA LORO:

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\nu_\ell - 1} t^k \left[A_{\ell,k} e^{\lambda_\ell t} + A_{\ell,k}^* e^{\lambda_\ell^* t}\right]$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\nu_\ell - 1} t^k \left[B_{\ell,k} e^{\lambda_\ell t} \cos(\omega_\ell t) + C_{\ell,k} e^{\lambda_\ell t} \sin(\omega_\ell t)\right]$

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\nu_\ell - 1} t^k \left[M_{\ell,k} e^{\lambda_\ell t} \cos(\omega_\ell t + \Phi_{\ell,k})\right]$

INDICHIAMO CON $U_{\ell,k} + i v_{\ell,k}$ LE COORDINATE DI UN PUNTO NEL

PIANO DI GAUSS $\Rightarrow A_{\ell,k} = U_{\ell,k} + i v_{\ell,k}$, $A_{\ell,k}^* = U_{\ell,k} - i v_{\ell,k}$

① → ②

$$A_{e,k} e^{\lambda_e t} + A^*_{e,k} e^{\lambda_e^* t} = (U_{e,k} + i V_{e,k}) e^{(\alpha_e + i\omega_e)t} +$$

$$(U_{e,k} - i V_{e,k}) e^{(\alpha_e - i\omega_e)t} = (U_{e,k} + i V_{e,k}) e^{\alpha_e t} e^{i\omega_e t} +$$

$$(U_{e,k} - i V_{e,k}) e^{\alpha_e t} \cdot e^{-i\omega_e t} = (U_{e,k} + i V_{e,k}) e^{\alpha_e t} [\cos(\omega_e t) + i \sin(\omega_e t)]$$

$$+ (U_{e,k} - i V_{e,k}) e^{\alpha_e t} [\cos(\omega_e t) - i \sin(\omega_e t)] = e^{\alpha_e t} [U_{e,k} \cos(\omega_e t) +$$

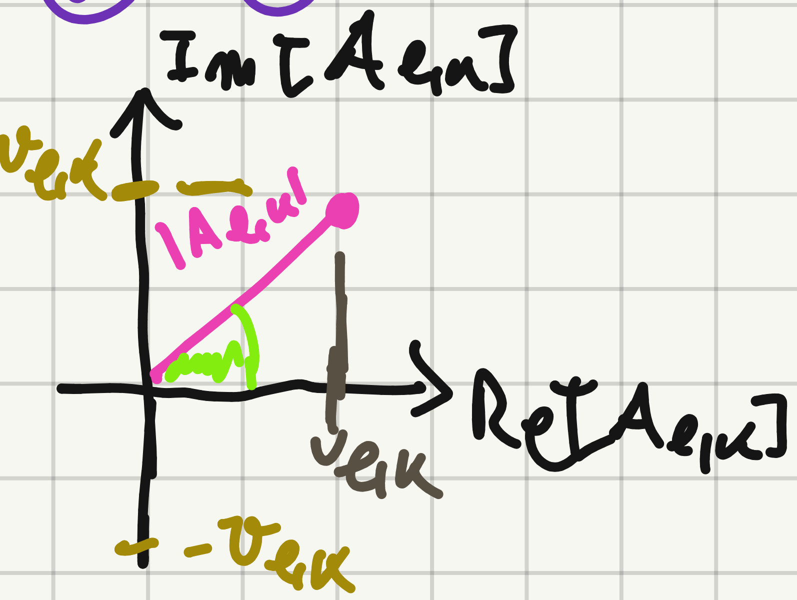
$$\cancel{+ i V_{e,k} \cos(\omega_e t)} \cancel{+ i U_{e,k} \sin(\omega_e t)} - V_{e,k} \sin(\omega_e t) + U_{e,k} \cos(\omega_e t) -$$

$$\cancel{- i V_{e,k} \cos(\omega_e t)} \cancel{- i U_{e,k} \sin(\omega_e t)} - V_{e,k} \sin(\omega_e t)] =$$

$$= e^{\alpha_e t} [\underbrace{2 U_{e,k}} \cos(\omega_e t) - \underbrace{2 V_{e,k}} \sin(\omega_e t)]$$

$$= e^{\alpha_e t} [B_{e,k} \cos(\omega_e t) - C_{e,k} \sin(\omega_e t)]$$

① → ③



$$\Phi_{e,k} = \arctan\left(\frac{V_{e,k}}{U_{e,k}}\right)$$ DAL TTR2

$$A_{e,k} e^{\lambda_e t} + A^*_{e,k} e^{\lambda_e^* t} \; ?$$

$$|A_{e,k}| = \sqrt{U_{e,k}^2 + V_{e,k}^2} \qquad |A^*_{e,k}| = \sqrt{U_{e,k}^2 + (-V_{e,k})^2}$$

$$A_{\ell,n} = U_{\ell,n} + i v_{\ell,n} = |A_{\ell,n}|\cos(\Phi_{\ell,n}) + i|A_{\ell,n}|\sin(\Phi_{\ell,n}) =$$

$$= |A_{\ell,n}|(\cos(\Phi_{\ell,n}) + i\sin(\Phi_{\ell,n})) = |A_{\ell,n}|\cdot e^{i\Phi_{\ell,n}}$$

$$A^*_{\ell,n} = U_{\ell,n} - i v_{\ell,n} = |A_{\ell,n}|\cos(\Phi_{\ell,n}) - i|A_{\ell,n}|\sin(\Phi_{\ell,n}) =$$

$$= |A_{\ell,n}|(\cos(\Phi_{\ell,n}) - i\sin(\Phi_{\ell,n})) = |A_{\ell,n}|\cdot e^{-i\Phi_{\ell,n}}$$

$$A_{\ell,n} e^{\lambda_\ell t} + A^*_{\ell,n} e^{\lambda^*_\ell t} = |A_{\ell,n}|\cdot e^{i\Phi_{\ell,n}}\cdot e^{\lambda_\ell t} + |A_{\ell,n}|\cdot e^{-i\Phi_{\ell,n}}\cdot e^{\lambda^*_\ell t}$$

$$= |A_{\ell,n}|\cdot e^{i\Phi_{\ell,n}}\cdot e^{(\alpha_\ell + i\omega_\ell)t} + |A_{\ell,n}| e^{-i\Phi_{\ell,n}}\cdot e^{(\alpha_\ell - i\omega_\ell)t} =$$

$$= |A_{\ell,n}| e^{i\Phi_{\ell,n}}\cdot e^{\alpha_\ell t}\cdot e^{i\omega_\ell t} + |A_{\ell,n}| e^{-i\Phi_{\ell,n}}\cdot e^{\alpha_\ell t}\cdot e^{-i\omega_\ell t} =$$ DEI COMPLESSI

DALLE PROPRIETÀ

$$= 2|A_{\ell,n}|\cdot e^{\alpha_\ell t}\cdot\left[\frac{e^{i(\omega_\ell t+\Phi_{\ell,n})} + e^{-i(\omega_\ell t + \Phi_{\ell,n})}}{2}\right] = 2|A_{\ell,n}| e^{\alpha_\ell t}\cos(\omega_\ell t + \Phi_{\ell,n})$$

$$= M_{\ell,n} e^{\alpha_\ell t}\cos(\omega_\ell t + \Phi_{\ell,n})$$

(2) -> (1)

$$B_{\ell,n} e^{\alpha_\ell t}\cos(\omega_\ell t) + C_{\ell,n} e^{\alpha_\ell t}\sin(\omega_\ell t)$$

$$U_{\ell,n} = |A_{\ell,n}|\cos(\Phi_{\ell,n}) = \frac{M_{\ell,n}}{2}\cos(\Phi_{\ell,n}) \Rightarrow$$

$$B_{\ell,n} = M_{\ell,n}\cos(\Phi_{\ell,n}) \Rightarrow U_{\ell,n} = \frac{B_{\ell,n}}{2}$$

$$v_{\ell,n} = |A_{\ell,n}|\sin(\Phi_{\ell,n}) = \frac{M_{\ell,n}}{2}\sin(\Phi_{\ell,n}) \Rightarrow$$

$$C_{\ell,n} = M_{\ell,n}\sin(\Phi_{\ell,n}) \Rightarrow v_{\ell,n} = \frac{C_{\ell,n}}{2}$$

$$A_{\ell i k} = |A_{\ell i k}| e^{i\Phi_{\ell i k}} = \frac{M}{2} e^{i\Phi_{\ell i k}} = U_{\ell i k} + i V_{\ell i k} = \frac{B_{\ell i k}}{2} + i\frac{C_{\ell i k}}{2}$$

$$A^*_{\ell i k} = |A_{\ell i k}| e^{i\Phi_{\ell i k}} = \frac{M}{2} e^{-i\Phi_{\ell i k}} = U_{\ell i k} - i V_{\ell i k} = \frac{B_{\ell i k}}{2} - i\frac{C_{\ell i k}}{2}$$

3 → 1

$$M_{\ell i k} e^{\lambda_\ell t} \cos(\omega_\ell t + \Phi_{\ell i k})$$

$$A_{\ell i k} = |A_{\ell i k}| e^{i\Phi_{\ell i k}} = \frac{M_{\ell i k}}{2} e^{i\Phi_{\ell i k}} \; ; \; A^*_{\ell i k} = |A_{\ell i k}| e^{i\Phi_{\ell i k}} = \frac{M_{\ell i k}}{2} e^{-i\Phi_{\ell i k}}$$

2 → 3

$$B_{\ell i k} e^{\lambda_\ell t} \cos(\omega_\ell t) + C_{\ell i k} e^{\lambda_\ell t} \sin(\omega_\ell t) \rightarrow M_{\ell i k} e^{\lambda_\ell t} \cos(\omega_\ell t + \Phi_{\ell i k})$$

$B_{\ell i k} = 2U_{\ell i k} = M_{\ell i k}\cos(\Phi_{\ell i k})$ $\qquad$ $C_{\ell i k} = 2V_{\ell i k} = -M_{\ell i k}\sin(\Phi_{\ell i k})$

$$\rightarrow M_{\ell i k} = 2|A_{\ell i k}| = 2\sqrt{U_{\ell i k}^2 + V_{\ell i k}^2} = 2\sqrt{\left(\frac{B_{\ell i k}}{2}\right)^2 + \left(\frac{C_{\ell i k}}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{B_{\ell i k}^2 + C_{\ell i k}^2}$$

$$\Phi_{\ell i k} = \arctan\left(\frac{V_{\ell i k}}{U_{\ell i k}}\right) = \arctan\left(\frac{-\frac{C_{\ell i k}}{2}}{\frac{B_{\ell i k}}{2}}\right) = \arctan\left(-\frac{C_{\ell i k}}{B_{\ell i k}}\right)$$

TABELLA RIASSUNTIVA

DA \ A	1	2	3
	$A_{\ell i k} = U_{\ell i k} + iV_{\ell i k}$ $A^*_{\ell i k} = U_{\ell i k} - iV_{\ell i k}$	$B_{\ell i k}$ $C_{\ell i k}$	$M_{\ell i k}$ $\Phi_{\ell i k}$
1: $A_{\ell i k} = U_{\ell i k} + iV_{\ell i k}$ $A^*_{\ell i k} = U_{\ell i k} - iV_{\ell i k}$		$B_{\ell i k} = 2U_{\ell i k}$ $C_{\ell i k} = -2V_{\ell i k}$	$M_{\ell i k} = 2\sqrt{U_{\ell i k}^2 + V_{\ell i k}^2}$ $\Phi_{\ell i k} = \arctan\left(\frac{V_{\ell i k}}{U_{\ell i k}}\right)$
2: $B_{\ell i k}$ $C_{\ell i k}$	$A_{\ell i k} = \frac{B_{\ell i k}}{2} - i\frac{C_{\ell i k}}{2}$ $A^*_{\ell i k} = \frac{B_{\ell i k}}{2} + i\frac{C_{\ell i k}}{2}$		
3: $M_{\ell i k}$ $\Phi_{\ell i k}$	$A_{\ell i k} = \frac{M_{\ell i k}}{2} \cdot e^{i\Phi_{\ell i k}}$ $A^*_{\ell i k} = \frac{M_{\ell i k}}{2} \cdot e^{i\Phi_{\ell i k}}$	$B_{\ell i k} = M_{\ell i k}\cos(\Phi_{\ell i k})$ $C_{\ell i k} = -M_{\ell i k}\sin(\Phi_{\ell i k})$	