ESEMPIO: DATA $A=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 4 & -6\\ 3 & 0 & 3\end{vmatrix}$, $rk(A)=2$. IN PARTICOLARE,

SI PUÒ ESPRIMERE COME COMBINAZIONE LINEARE DELLE MATRICI DI RANGO 1

$$A=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & -6\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & -1 & -2\\ 0 & 4 & 8\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

TUTTE LE COLONNE DI MATRICI DI RANGO 1 IN $\mathcal{M}_{a\times b}(K)$ SONO PROPORZIONALI AD UN VETTORE COLONNA $\vec{v}\in K^a\setminus\{\vec{0}\}$. QUINDI, SE $A\in\mathcal{M}_{a\times b}(K)\wedge$ $\wedge rk(A)=1\Rightarrow\exists a_1,\dots,a_b\in K$ NON NULLI $|\ A=|a_1\vec{v}\ \dots\ a_b\vec{v}|$

$\Rightarrow A=\vec{v}(a_1\ \dots\ a_b)=\vec{v}\cdot\vec{a}^T$, DOVE $\vec{a}=\begin{vmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_b\end{vmatrix}\in K^b\setminus\{\vec{0}\}$

ORA DEFINIAMO, IN MANIERA PIÙ GENERALE, MATRICI $A\in\mathcal{M}_{a\times b}(K)$ DI RANGO K. SIANO $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k\in K^a\setminus\{\vec{0}\}$ COLONNE LINEARMENTE INDIPENDENTI. LE ALTRE $(b-k)$ COLONNE SONO COMBINAZIONI LINEARI DI QUESTE $\Rightarrow$

$\Rightarrow\exists\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k\in K^b\setminus\{\vec{0}\}\ |\ A=\vec{v}_1\vec{a}_1^T+\dots+\vec{v}_k\vec{a}_k$, OSSIA POSSIAMO SCRIVERE A COME SOMMA DI K MATRICI DI RANGO 1 $\Rightarrow rk(A)=\min\{k\in\mathbb{N}\ |\ A=\sum_{i=1}^{k}\mathcal{M}_i,\ rk(\mathcal{M}_i)=1\ \forall\ 1\le i\le k\}$.

DA ADESSO IN POI, SE $V_1,\dots,V_n$ SONO SPAZI VETTORIALI SU UN CAMPO K CON

BASI $\{v_1^1,\dots,v_{i_1}^1\}, \{v_1^2,\dots,v_{i_2}^2\},\dots,\{v_1^h,\dots,v_{i_h}^h\}$, ALLORA $V_1\otimes V_2\otimes\dots$

$\dots\otimes V_k$ È LO SPAZIO VETTORIALE CON BASE $\{v_{j_1}^1\otimes v_{j_2}^2\otimes\dots\otimes v_{j_h}^h \mid$

$1\le j_1\le i_1, 1\le j_2\le i_2,\dots,1\le j_h\le i_h\}$ CHE SODDISFA LE SEGUENTI RELAZIONI:

a) $a(v_{j_1}^1\otimes v_{j_2}^2\otimes\dots\otimes v_{j_h}^h)=(a v_{j_1}^1)\otimes v_{j_2}^2\otimes\dots\otimes v_{j_h}^h)=\dots=$

$= v_{j_1}^1\otimes v_{j_2}^2\otimes\dots\otimes(a v_{j_h}^h)\ \forall a\in K, 1\le j_1\le i_1,\dots,1\le j_h\le i_h$

b) $(v_1+w_1)\otimes\dots\otimes v_h=v_1\otimes\dots\otimes v_h+w_1\otimes\dots\otimes v_h$

$v_1\otimes(v_2+w_2)\otimes\dots\otimes v_h=v_1\otimes v_2\otimes\dots\otimes v_h+v_1\otimes w_2\otimes\dots\otimes v_h$

$\vdots$

$v_1\otimes\dots\otimes(v_h+w_h)=v_1\otimes\dots\otimes v_h+v_1\otimes\dots\otimes w_h\quad \forall v_i,w_i\in V_i \quad 1\le i\le h$

L'INSIEME $\{v_1\otimes v_2\otimes\dots\otimes v_h \mid v_i\in V_i\ \forall 1\le i\le h\}$ È L'INSIEME DEI TENSORI DI RANGO 1 DI $V_1\otimes\dots\otimes V_h$

RANGO DI UN TENSORE

OGNI ELEMENTO DI $V_1\otimes\dots\otimes V_h$ SI SCRIVE COME COMBINAZIONE LINEARE DI TENSORI DI RANGO 1

DEFINIZIONE) SIA $T\in V_1\otimes\dots\otimes V_k$. DEFINIAMO IL RANGO DI T $rk(T)$ COME NUMERO MINIMO $r\in\mathbb{N} \mid T=\sum_{i=1}^{r}T_i$, DOVE I $T_i\in V_1\otimes\dots\otimes V_k$ SONO DI RANGO 1 $\forall 1\le i\le r$

ESEMPIO: SIA U CON BASE $\{u_1, u_2\}$, V CON BASE $\{v_1, v_2\}$ E W CON $\{w_1, w_2\}$

a) $T := u_1 \otimes v_1 \otimes w_1 + u_1 \otimes v_2 \otimes w_1 \in U \otimes V \otimes W$ HA RANGO 1.

INFATTI, $T = u_1 \otimes (v_1 + v_2) \otimes w_1$

b) $T := u_1 \otimes v_1 \otimes w_1 + u_2 \otimes v_2 \otimes w_1 \in U \otimes V \otimes W$ HA RANGO 2, IN QUANTO L'UNICA FATTORIZZAZIONE POSSIBILE È $T = (u_1 \otimes v_1 + u_2 \otimes v_2) \otimes w_1$, TENSORE NON DI RANGO 1

c) $T := u_1 \otimes v_1 \otimes w_1 + u_2 \otimes v_2 \otimes w_2 \in U \otimes V \otimes W$ HA RANGO 2

POICHÉ $\dim(\bigotimes_{i=1}^{h} V_i) = \prod_{i=1}^{h} \dim(V_i)$, ABBIAMO CHE SE $T \in \bigotimes_{i=1}^{h} V_i$ $\Rightarrow rk(T) \leq \prod_{i=1}^{h} \dim(V_i)$ POICHÉ $\bigotimes_{i=1}^{h} V_i$ HA UNA BASE FATTA DI TENSORI DI RANGO 1.

ADESSO VERIFICHIAMO CHE LA NOZIONE DI RANGO DI TENSORE È COERENTE CON QUELLA DI RANGO DI UNA MATRICE, INTERPRETANDO UNA MATRICE COME FORMA BILINEARE, E QUINDI COME TENSORE. VEDIAMO COME ESEMPIO UNA MATRICE DI RANGO 1. UNA MATRICE $n \times n$ DI RANGO 1 HA COME COLONNE MULTIPLI DI UN QUALCHE VETTORE $v \in K^m \setminus \{0\}$. SIANO $a_1 v$ LA PRIMA COLONNA, $a_2 v$ LA SECONDA, ..., $a_n v$ L'n-SIMA CON $a_1, \dots, a_n \in K$. TALE MATRICE

SI PUÒ SCRIVERE COME PRODOTTO $\begin{vmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{vmatrix}$

COME FORMA BILINEARE È IL SEGUENTE ELEMENTO DI $(K^m)^* \otimes (K^n)^*$:

$$v_1 a_1 e_1^* \otimes e_1^* + v_2 a_1 e_2^* \otimes e_1^* + \dots + v_m a_1 e_m^* \otimes e_1^* + v_1 a_2 e_1^* \otimes e_2^* + \dots + v_m a_n e^m \otimes e^n = (v_1 e_1^* + \dots + v_m e_m^*) \otimes a_1 e_1^* +$$

$$(v_1 e_1^* + \dots + v_m e_m^*) \otimes a_2 e_2^* + \dots + (v_1 e_1^* + \dots + v_m e_m^*) \otimes a_n e_n^* =$$

$$= (v_1 e_1^* + \dots + v_m e_m^*) \otimes (a_1 e_1^* + \dots + a_n e_n^*).$$

DUNQUE UNA MATRICE $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K) \mid rk(A) = 1$ CORRISPONDE AD UN TENSORE $T_A \in (K^m)^* \otimes (K^n)^* \mid rk(T_A) = 1$

ESEMPIO: LA MATRICE $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{F}_3)$ HA RANGO 1, INFATTI $\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$ IN $(\mathbb{F}_3)^2$. AD A CORRISPONDE LA FORMA BILINEARE $T_A : (\mathbb{F}_3)^2 \times (\mathbb{F}_3)^2 \to \mathbb{F}_3$ DEFINITA DA $T_A(u,v) = u^T A v \ \forall u, v \in (\mathbb{F}_3)^2$.

COME ELEMENTO DI $(\mathbb{F}_3^2)^* \otimes (\mathbb{F}_3)^3$ SCRIVIAMO $T_A = e_1^* \otimes e_1^* + 2 e_2^* \otimes e_1^* + e_2^* \otimes e_3^* = (e_1^* + 2e_2^*) \otimes e_1^* + (2e_1^* + e_2^*) \otimes e_3^* = (e_1^* + 2e_2^*) \otimes e_1^* + 2(e_1^* + 2e_2^*) \otimes e_3^* = (e_1^* + 2e_2^*) \otimes (e_1^* + 2e_3^*)$. INOLTRE, SUL CAMPO $\mathbb{F}_3$ SI AVEVA $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

AD UN TENSORE DI RANGO 1 $v_1 \otimes v_2$ CORRISPONDE UNA MATRICE DI RANGO 1 $v_1 v_2^T \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$. AD ESEMPIO, DATA $(2e_1^* + 3e_2^*) \otimes (\cancel{e_2^*} + 4e_3^*)$

$\in (\mathbb{F}_5^2)^* \otimes (\mathbb{F}_5^3)^*$, LA MATRICE È $\begin{vmatrix}2\\3\end{vmatrix} \begin{vmatrix}0 & 1 & 4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 2 & 3\\0 & 3 & 2\end{vmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{F}_5)$

DALLA CARATTERIZZAZIONE DEL RANGO DI UNA MATRICE IN TERMINI DI COMBINAZIONI LINEARI DI MATRICI DI RANGO 1, E DALLA DEFINIZIONE DI RANGO DI UN TENSORE, SEGUE CHE LE MATRICI DI RANGO r IN $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ STANNO IN CORRISPONDENZA BIUNIVOCA CON I TENSORI DI RANGO r IN $(K^m)^* \otimes (K^n)^*$

ENDOMORFISMI DI V COME ELEMENTI DI $V^* \otimes V$

SIA V UNO SPAZIO VETTORIALE SU UN CAMPO K CON BASE $\{e_1, \dots, e_n\}$. GLI ELEMENTI DI $V^* \otimes V = \mathrm{span}\{e_i^* \otimes e_j\}$ POSSONO ESSERE INTERPRETATI COME ENDOMORFISMI DI V COME SEGUE: DEFINIAMO IL MORFISMO DI SPAZI VETTORIALI $e_i^* \otimes e_j : V \to V$ PONENDO $e_i^* \otimes e_j (e_h) = \begin{cases} e_j & h = i \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$, OSSIA $e_i^* \otimes e_j (e_h) = e_i^*(e_h) e_j \ \forall 1 \leq i, j, h \leq n$. SE $f \in \mathrm{END}(V)$ È RAPPRESENTATO DALLA MATRICE $A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, COME ELEMENTO DI $V^* \otimes V$ $f = e_1^* \otimes (a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + \dots + a_{n1} e_n) + \dots + e_n^* \otimes (a_{n1} e_1 + \dots + a_{nn} e_n)$. VICEVERSA, OGNI ELEMENTO DI $V^* \otimes V$ PUÒ ESSERE INTERPRETATO COME UN ENDOMORFISMO DI V, E TALE CORRISPONDENZA BIUNIVOCA È UN ISOMORMISFO DI SPAZI VETTORIALI $\mathrm{END}(V) \to V^* \otimes V$

ESEMPIO: SIA $V=\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ LO SPAZIO VETTORIALE DELLE MATRICI 2×2 A COMPONENTI IN $\mathbb{R}$. LA FUNZIONE $f: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^T \end{array}$ È UN MORFISMO DI SPAZI VETTORIALI. UNA BASE DI V È $\{E_{ij} \mid 1\leq i, j \leq 2\}$, DOVE $E_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ $E_{12}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ $E_{21}=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ $E_{22}=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. LA MATRICE DI f IN QUESTA BASE È $M(f)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, $rk(M(f))=4$. COME ELEMENTO DI $V^*\otimes V$, LA TRASPOSIZIONE SI SCRIVE $f=E_{11}^*\otimes E_{11}+E_{12}^*\otimes E_{21}+E_{21}^*\otimes E_{12}+E_{22}^*\otimes E_{22}$, $rk(f)=4$. INVECE, L'ELEMENTO $f\in V^*\otimes V$ DEFINITO DA $g=2E_{11}^*\otimes E_{11}+E_{12}^*\otimes(E_{12}+E_{21})+E_{21}^*\otimes(E_{12}+E_{21})+2E_{22}^*\otimes E_{22}=2E_{11}^*\otimes E_{11}+(E_{12}^*+E_{21}^*)\otimes(E_{12}+E_{21})+2E_{22}^*\otimes E_{22}$, $rk(g)=3$ CORRISPONDE ALL'ENDOMORFISMO $g: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A+A^T \end{array}$.

IN GENERALE, I MORFISMI DI SPAZI VETTORIALI $f:V\to W$ SONO IN CORRISPONDENZA BIUNIVOCA CON $V^*\otimes W$ E TALE CORRISPONDENZA È UN ISOMORFISMO DI SPAZI VETTORIALI $\overbrace{\mathrm{Hom}(V,W)}^{\text{SPAZIO VETTORIALE DEI MORFISMI } f:V\to W}\to V^*\otimes W$. IL RANGO DI UN MORFISMO $f:V\to W$, COME DIMENSIONE DELLA SUA IMMAGINE O COME RANGO DELLA SUA MATRICE ASSOCIATA, CORRISPONDE AL RANGO DEL TENSORE $f\in V^*\otimes W$. ANCORA PIÙ IN GENERALE, OGNI FORMA MULTILINEARE $f: V_1\times V_2\times\ldots\times V_h\to W$ È UN ELEMENTO DI $V_1^*\otimes V_2^*\otimes\ldots\otimes V_h^*\otimes W$.

Posto $e_{i_1}^{1*} \otimes e_{i_2}^{2*} \otimes \dots \otimes e_{i_h}^{h*} \otimes w(v_1, v_2, \dots, v_h) =$

$= e_{i_1}^{1*}(v_1)\, e_{i_2}^{2*}(v_2) \dots e_{i_h}^{h*}(v_h)\, w \in W \;\; \forall 1 \le i_1 \le \dim V_1, \dots, 1 \le i_h \le \dim V_h,$

$v_i \in V_i \;\; \forall w \in W$

ADESSO ANDIAMO A CONSIDERARE LA MOLTIPLICAZIONE DI MATRICI 2×2.

QUESTA È UNA FORMA BILINEARE $M_{2,2,2} \mid M_{2\times2}(K) \times M_{2\times2}(K) \to M_{2\times2}(K)$

DEFINITA DA $M_{2,2,2}(A,B) = A \cdot B$. SI TRATTA DI UNA FORMA BILINEARE IN QUANTO:

a) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B) \;\; \forall \alpha \in K,\ A, B \in M_{2\times2}(K)$

b) $A(B_1+B_2) = AB_1 + AB_2,\ (A_1+A_2)B = A_1B + A_2B \;\; \forall A_1, A_2, B_1, B_2,$
$A, B \in M_{2\times2}(K)$

$\Rightarrow M_{2,2,2} \in M_{2\times2}(K)^* \otimes M_{2\times2}(K)^* \otimes M_{2,2}(K)$

IN GENERALE, LA MOLTIPLICAZIONE DI MATRICI $n\times n$ È UN ELEMENTO

$M_{n,n,n} \in M_{n\times n}(K)^* \otimes M_{n\times n}(K)^* \otimes M_{n\times n}(K)$. ORA VEDIAMO COME

SCRIVERE $M_{2,2,2}$ NELLA BASE $\{E_{ij}^* \otimes E_{hk}^* \otimes E_{uv}\}$, DOVE $E_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$,

$E_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad E_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad E_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. ABBIAMO CHE $E_{11}E_{11} =$

$= E_{11}$; $E_{12}E_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$; $E_{21}E_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$; $E_{22}E_{22} = E_{22}$

$\Rightarrow E_{ij}E_{hk} = \begin{cases} E_{ik} & j=h \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases} \quad \Rightarrow M_{2,2,2} = E_{11}^* \otimes E_{11}^* \otimes E_{11} + E_{12}^* \otimes$

$\otimes E_{21}^* \otimes E_{11} + E_{11}^* \otimes E_{12}^* \otimes E_{12} + E_{12}^* \otimes E_{22}^* \otimes E_{12} + E_{21}^* \otimes E_{11}^* \otimes E_{21} +$

$+ E_{22}^* \otimes E_{21}^* \otimes E_{21} + E_{22}^* \otimes E_{22}^* \otimes E_{22} + E_{21}^* \otimes E_{12}^* \otimes E_{22} \Rightarrow rk(M_{2,2,2}) \le 8$

ABBIAMO ANCHE CHE $M_{2,2,2} = (E^*_{11}+E^*_{22}) \otimes (E^*_{11}+E^*_{22}) \otimes (E_{11}+E_{22}) +$

$+ (E^*_{21}+E^*_{22}) \otimes E^*_{11} \otimes (E_{21}-E_{22}) + E^*_{11} \otimes (E^*_{12}-E^*_{22}) \otimes (E_{12}+E_{22}) +$

$+ E^*_{22} \otimes (-E^*_{11}+E^*_{21}) \otimes (E_{21}+E_{11}) + (E^*_{11}+E^*_{12}) \otimes E^*_{22} \otimes (-E_{11}+E_{12}) +$

$+ (-E^*_{11}+E^*_{21}) \otimes (E^*_{11}+E^*_{12}) \otimes E_{22} + (E^*_{12}-E^*_{22}) \otimes (E^*_{21}+E^*_{22}) \otimes E_{11}$

$\Rightarrow rk(M_{2,2,2}) \leq 7$. QUESTA FATTORIZZAZIONE È L'ALGORITMO DI STRASSEN PER LA MOLTIPLICAZIONE DI MATRICI 2×2. NOTIAMO CHE, SE $A,B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(K)$,

$E^*_{ij} \otimes E^*_{hk} \otimes E_{uv}(A,B) = \overbrace{E^*_{ij}(A)}^{\in K} \overbrace{E^*_{hk}(B)}^{\in K} E_{uv} \Rightarrow$ OGNI ADDENDO IN UNA FATTORIZZAZIONE DEL TENSORE $M_{2,2,2}$ CORRISPONDE AD UNA MOLTIPLICAZIONE DI ELEMENTI DEL CAMPO K. ALLORA IL RANGO DEL TENSORE $M_{2,2,2}$ È IL NUMERO MASSIMO DI MOLTIPLICAZIONI NECESSARIE PER ESEGUIRE LA MOLTIPLICAZIONE DI DUE MATRICI 2×2. CONSIDERANDO IL CAMPO PIÙ GENERALE $K=\mathbb{C}$, POSSIAMO EFFETTUARE LE SEGUENTI FORMULAZIONI:

TEOREMA DI BROCKETT-DOBKIN: DATO IL TENSORE $M_{n,n,n}$ DELLA MOLTIPLICAZIONE DI DUE MATRICI $n\times n$ SUL CAMPO $\mathbb{C}$, $rk(M_{n,n,n}) \geq 2n^2-1$

COROLLARIO: $rk(M_{2,2,2}) = 7$. INFATTI, DALL'ALGORITMO DI STRASSEN $rk(M_{2,2,2}) \leq 7$, MENTRE DAL TEOREMA APPENA ENUNCIATO $rk(M_{2,2,2}) \geq 7$

TEOREMA DI BLÄSER: $rk(M_{n,n,n}) \geq \frac{5}{2}n^2 - 3n$

TEOREMA DI LADERMAN: $rk(M_{3,3,3}) \leq 23$

TEOREMA DI DEEPMIND: SUL CAMPO $\mathbb{F}_2$, $rk(M_{4,4,4}) \leq 47$; $rk(M_{5,5,5}) \leq 96$

TEOREMA DI KAUERS E MOOSBAUER: SUL CAMPO $\mathbb{F}_2$, $rk(M_{5,5,5}) \leq 95$