INTRODUZIONE

Lo studio dei Controlli Automatici riguarda una particolare sezione dell'Automatica e si dedica all'analisi del problema del controllo e alla sintesi dei controlli a controreazione. Per semplicità, i sistemi esaminati saranno lineari, stazionari e a parametri concentrati.

Generalità sui sistemi di controllo

Spesso è necessario intervenire dall'esterno per modificare un fenomeno affinché si comporti nel modo desiderato. Il controllo è inteso come insieme di azioni indirizzate a far assumere ad una grandezza fisica un valore o un andamento temporale assegnato.

Problema di controllo

Si intende come imposizione di un comportamento desiderato. Esso è composto da due entità:

- Processo → oggetto da controllare
- Funzionamento desiderato → andamento a cui vogliamo sottoporre le variabili controllate affinché

ABBIANO ANDAMENTO TEMPORALE COINCIDENTE CON ALTRE VARIABILI PREASSEGNATE, DETTE SEGNALI DI RIFERIMENTO

- CONDIZIONAMENTO VARIABILI CONTROLLATE → SI SUPPONE DI POTER AGIRE SUL PROCESSO ATTRAVERSO ALTRE VARIABILI DETTE VARIABILI DI CONTROLLO.

L'OBIETTIVO IDEALE VUOLE CHE, PER TUTTO L'INTERVALLO DI TEMPO, VARIABILI CONTROLLATE E SEGNALI DI RIFERIMENTO COINCIDANO.

INCERTEZZA

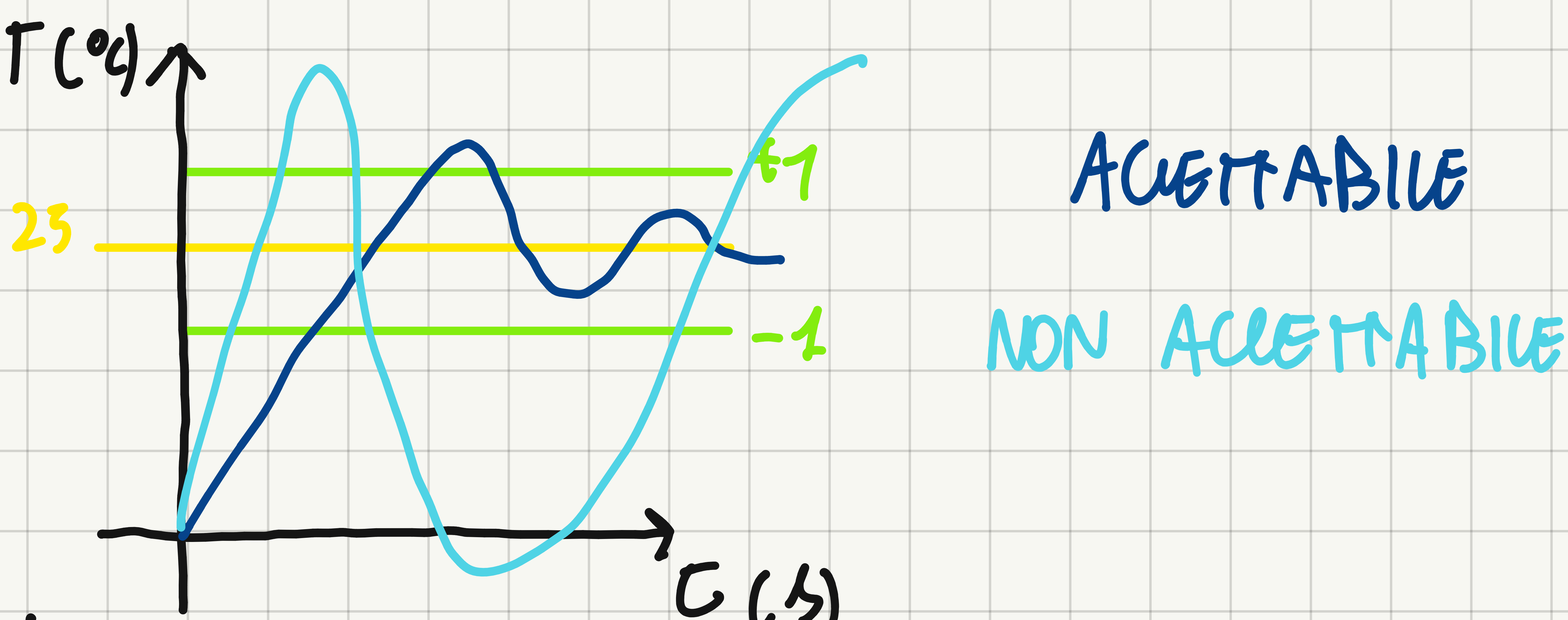
LE VARIABILI CONTROLLATE NON DIPENDONO SOLO DA VARIABILI DI CONTROLLO E SEGNALI DI RIFERIMENTO, MA ANCHE DAGLI INGRESSI NON CONTROLLABILI DETTI DISTURBI. INOLTRE, IL PROCESSO FISICO DA PARAMETRI QUASI SEMPRE NON DETERMINABILE CON ESATTEZZA.

SI DIRÀ DUNQUE CHE VARIABILI CONTROLLATE $\simeq$ SEGNALI DI RIFERIMENTO E INTRODUCE L'ERRORE COME ERRORE = SEGNALE DI RIFERIMENTO − VARIABILI CONTROLLATE E RICHIEDE LA SODDISFAZIONE DI UN INSIEME DI SPECIFICHE E DEVE ESSERE "ACCETTABILMENTE PICCOLO" IN TUTTE LE CONDIZIONI DI FUNZIONAMENTO DI INTERESSE (REGIME PERMANENTE, PRESENZA DI DISTURBI ETC...)

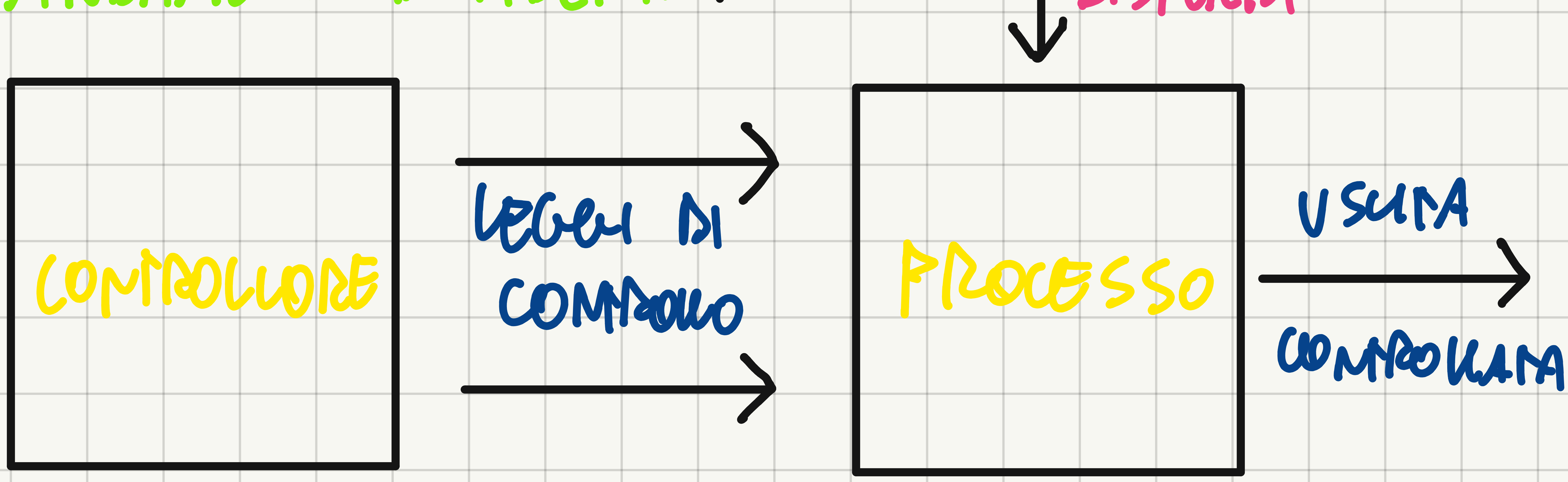
SISTEMA DI CONTROLLO

È LA RISOLUZIONE DEL PROBLEMA DEL CONTROLLO, DEVE ESSERE TALE CHE L'USCITA DEL PROCESSO SEGUA IL PIU POSSIBILE IL SEGNALE DI RIFERIMENTO NONOSTANTE LA PRESENZA DI DISTURBI.

VEDIAMO, AD ESEMPIO, COME CONTROLLARE UNA TEMPERATURA A REGIME ASSEGNANDO $T_{DES} = 25°C$ E TOLLERANZA $\pm 1°C$



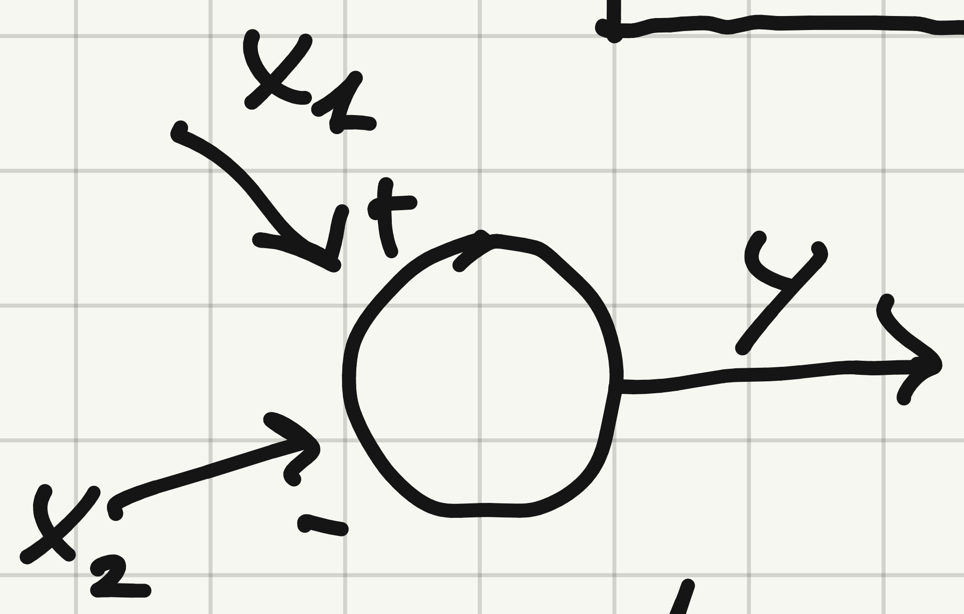
IN GENERALE, CIÒ SI REALIZZA TRAMITE IL PROGETTO DEL CONTROLLORE, LA CUI USCITA COINCIDE CON L'INGRESSO DEL PROCESSO E FA IN MODO CHE L'USCITA CONTROLLATA ASSUMA L'ANDAMENTO DESIDERATO.



RAPPRESENTAZIONE A BLOCCHI

- 

$y = F \cdot x$

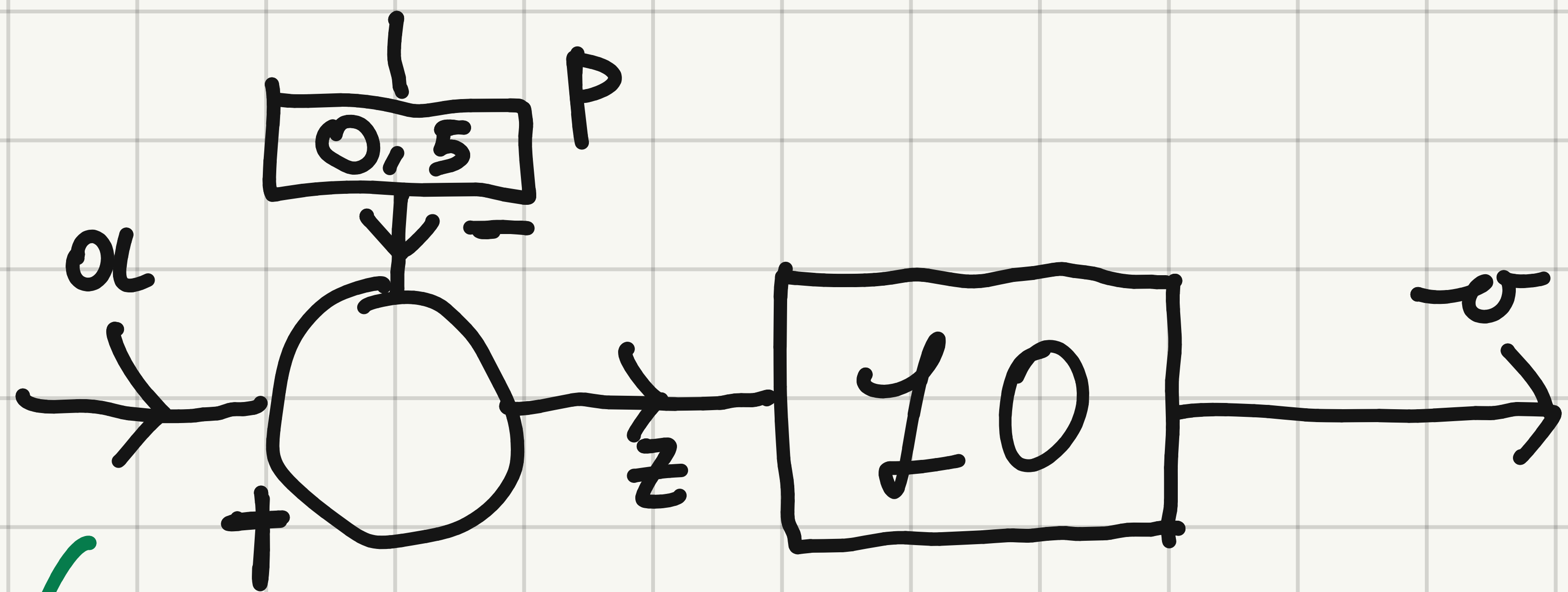
- 

$y = x_1 - x_2$

ESEMPIO 1: A REGIME PERMANENTE, SI STUDI SE E COME È POSSIBILE CONTROLLARE IL MOTO DI UN'AUTO IN MODO DA AVERE VELOCITÀ COSTANTE. IPOTESI:

- SISTEMA STAZIONARIO
- UNA INCLINAZIONE DELL'ACCELERATORE RISPETTO ALLO STATO DI QUIETE (L'INGRESSO) PORTA AD UNA VARIAZIONE DELLA VELOCITÀ DI 10 Km/h
- UNA VARIAZIONE DELLA PENDENZA DELLA STRADA (IL DISTURBO) PORTA AD UNA DIMINUZIONE DELLA VELOCITÀ DI 5 Km/h

INDICANDO CON v LA VELOCITÀ (L'USCITA), α L'ANGOLAZIONE DELL'ACCELERATORE E p LA PENDENZA, POSSIAMO DIRE CHE $v = 10\alpha - 5p \rightarrow v = 10(\alpha - 0.5p)$. ABBIAMO 2 INGRESSI E UNA USCITA. LA FORMULA SUGGERISCE UNA RAPPRESENTAZIONE DEL TIPO $y = F \cdot x$

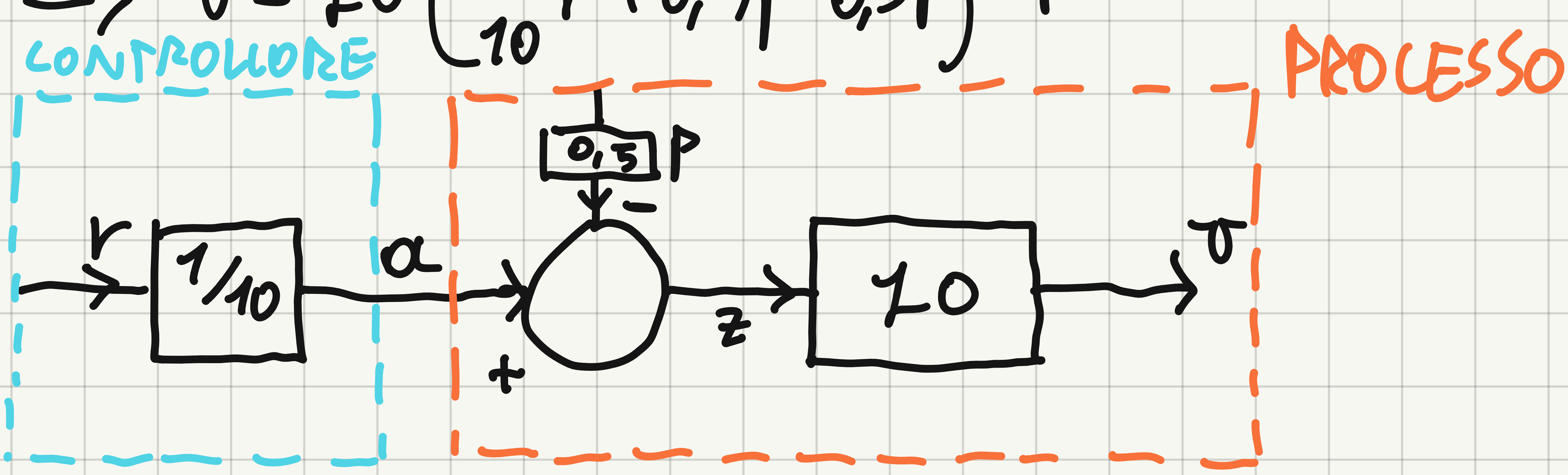


$z = \alpha - 0{,}5p$

Soluzione a catena aperta: detta r la velocità desiderata, poniamo $\alpha = \frac{1}{10} r \Rightarrow v = r - 5p$. Se la strada è dritta ($p=0$), $v = r \Rightarrow$ costante ✓

Se $p \neq 0$, supponendo di poter misurare il disturbo agisco su α in modo da annullare il disturbo $\Rightarrow \alpha = \frac{1}{10} r + 0{,}5p$

$$\Rightarrow v = 10\left(\frac{1}{10} r + 0{,}5p - 0{,}5p\right) = r$$

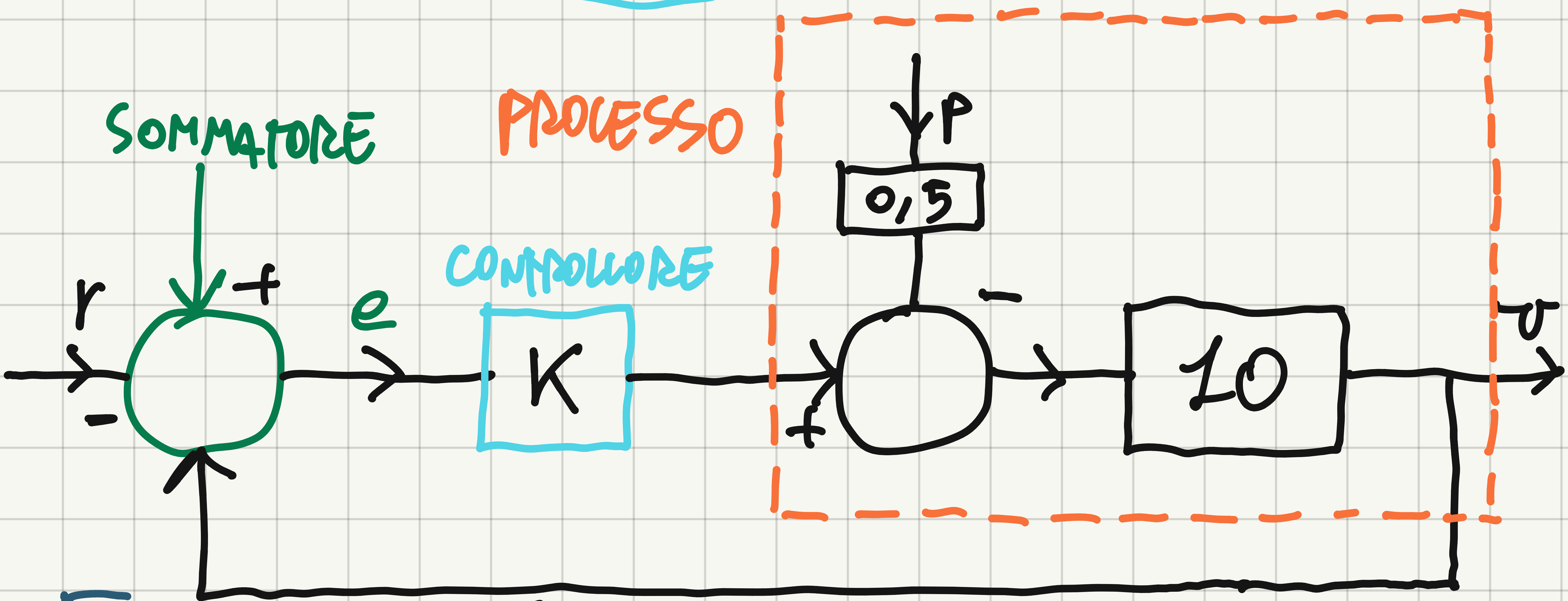


Soluzione a catena chiusa: definendo l'errore $e = r - v$, diciamo che $\alpha = K \cdot e$ e vogliamo che $e \to 0$.
Ossia velocità desiderata e velocità reale coincidano

$$v = 10(Ke - 0.5p) = 10(Kr - Kv - 0.5p) = 10Kr - 10Kv - 5p$$

$\Rightarrow v = \frac{10K}{10K+1} r - \frac{5}{10K+1} p$. È evidente che v dipende sia dal riferimento sia dal disturbo. $\lim_{K \to \infty} v =$

$$= \lim_{K\to+\infty} \underbrace{\frac{10K}{10K+1}}_{\to 1} r - \underbrace{\frac{5}{10K+1}}_{\to 0} p = r \Rightarrow v \simeq r$$

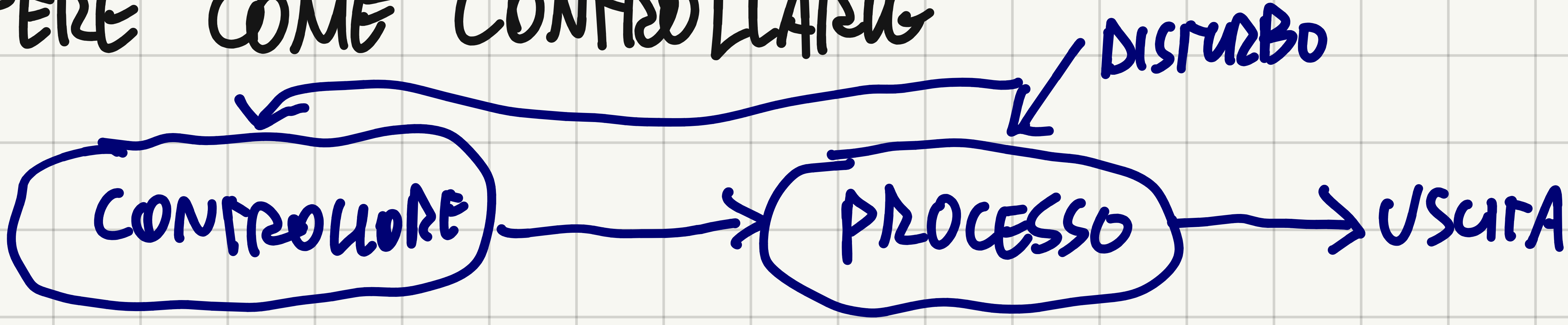


ESEMPIO 2: SFRUTTANDO UNA VALVOLA CHE CONTROLLA IL FLUSSO DI ACQUA IN ENTRATA, RIFORNIRE UN IMPIANTO DI PICCOLE POTENZIALITÀ IN MODO CHE IL SERBATOIO ABBIA LIVELLO COSTANTE DI ACQUA. **SOLUZIONE A CATENA APERTA:** TRAMITE UNO STRUMENTO DETTO ELETTROVALVOLA, MISURO QUANTA ACQUA ESCE DALL'IMPIANTO E REGOLO IL FLUSSO IN ENTRATA DI CONSEGUENZA. **PROBLEMA:** GUASTI INTERNI NON VENGONO RILEVATI, SI LAVORA SOLO IN INGRESSO E USCITA MA NON CONOSCIAMO LA SITUAZIONE INTERNA.

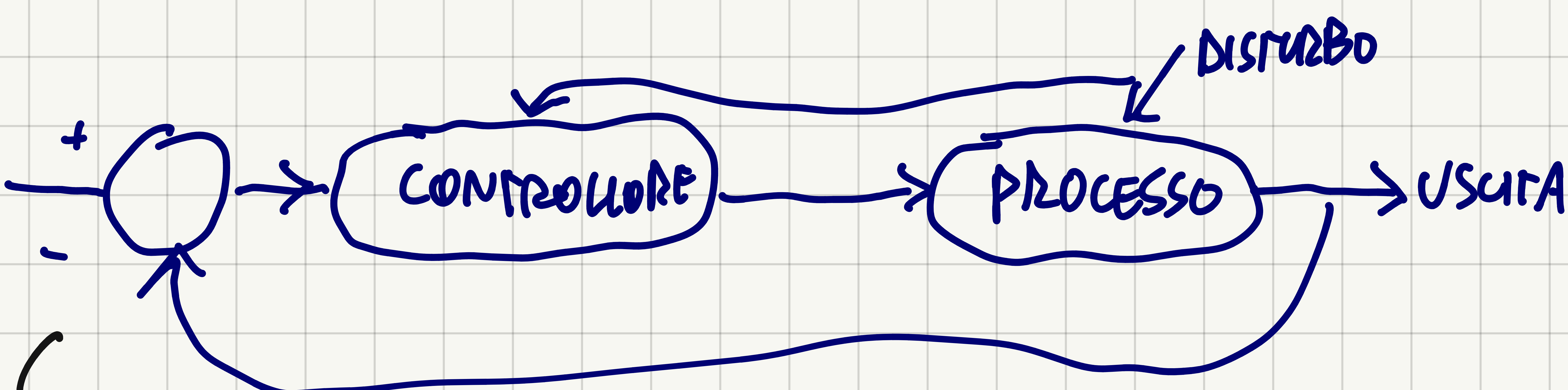
SOLUZIONE A CATENA CHIUSA: CONOSCO LA QUANTITÀ EFFETTIVA ALL'INTERNO DEL SERBATOIO E FACCIO IN MODO CHE NON CAMBI, GESTENDO COSÌ ANCHE VARIAZIONI INATTESE

(PIOGGIA, DANNI ETC.). CIÒ È APPROSSIMATIVAMENTE POSSIBILE QUANDO $K >> 0$.

IN GENERALE, A CATENA APERTA MISURO LE CAUSE PER SAPERE COME CONTROLLARE



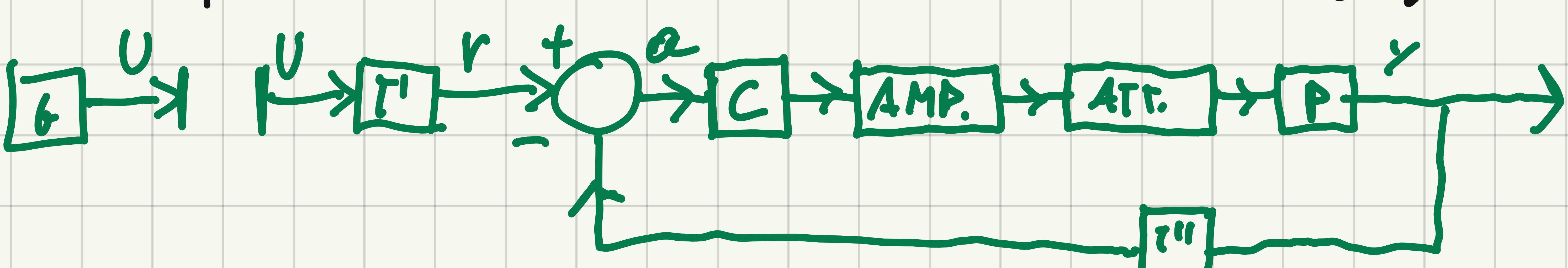
A CATENA CHIUSA MISURO L'ERRORE, OSSIA LA DIFFERENZA TRA RIFERIMENTO ED USCITA LIMITANDO COSÌ SIA L'EFFETTO DEI DISTURBI SIA QUELLO DI VARIAZIONI INTERNE DEI PARAMETRI



SI UTILIZZA PRINCIPALMENTE LA **RISOLUZIONE A CATENA CHIUSA**, O A **CONTROREAZIONE NEGATIVA**.

CONTROREAZIONE NEGATIVA

VEDIAMO E COMMENTIAMO LO SCHEMA GENERICO:



G: GENERAZIONE DEL RIFERIMENTO.

T', T'' : TRASDUTTORE. TRASFORMA L'USCITA IN SEGNALE ELETTRICO

C : CONTROLLORE. PROGRAMMA DIGITALE CHE ESEGUE CIÒ PER CUI È PROGETTATO.

AMP : AMPLIFICAZIONE. AMPLIFICA IL SEGNALE DI C

ATT : ESECUZIONE. CONSENTE L'ESECUZIONE DI C

P : PROCESSO

MODELLI MATEMATICI

DATO UN GENERICO SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO.

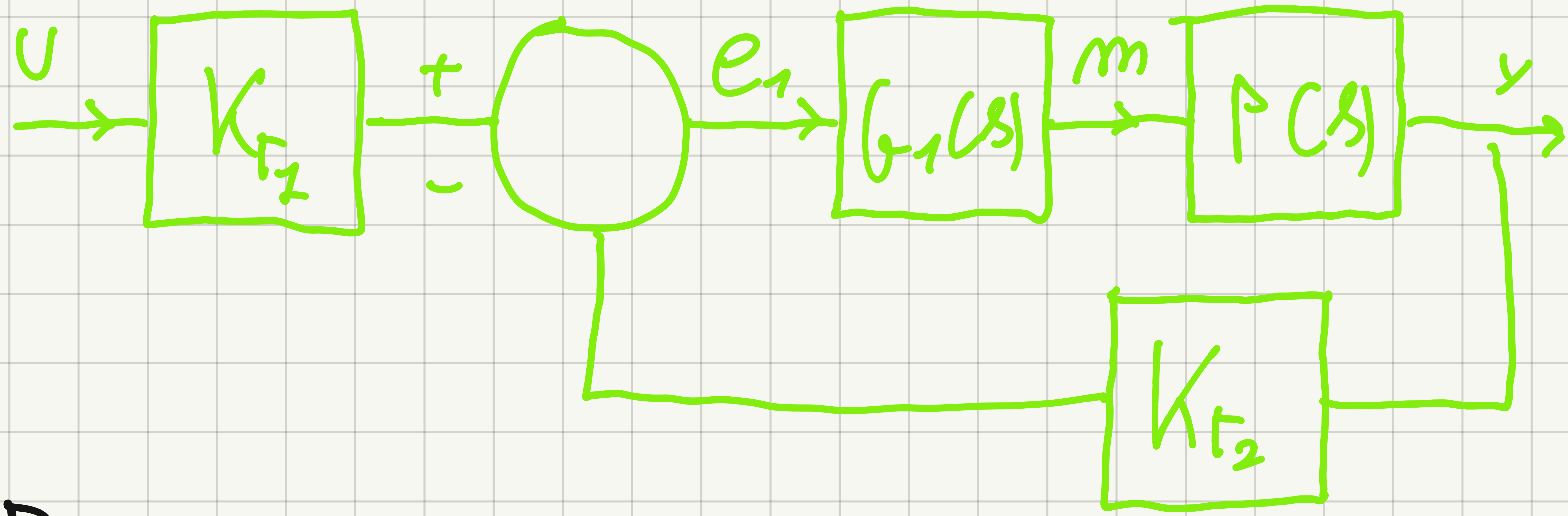
E INDICANDO CON U GLI INGRESSI, Y LE USCITE E Z I DISTURBI $\rightarrow$

$$\begin{cases} x^{\circ}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) + P \cdot z(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) + Q \cdot z(t) \end{cases}$$

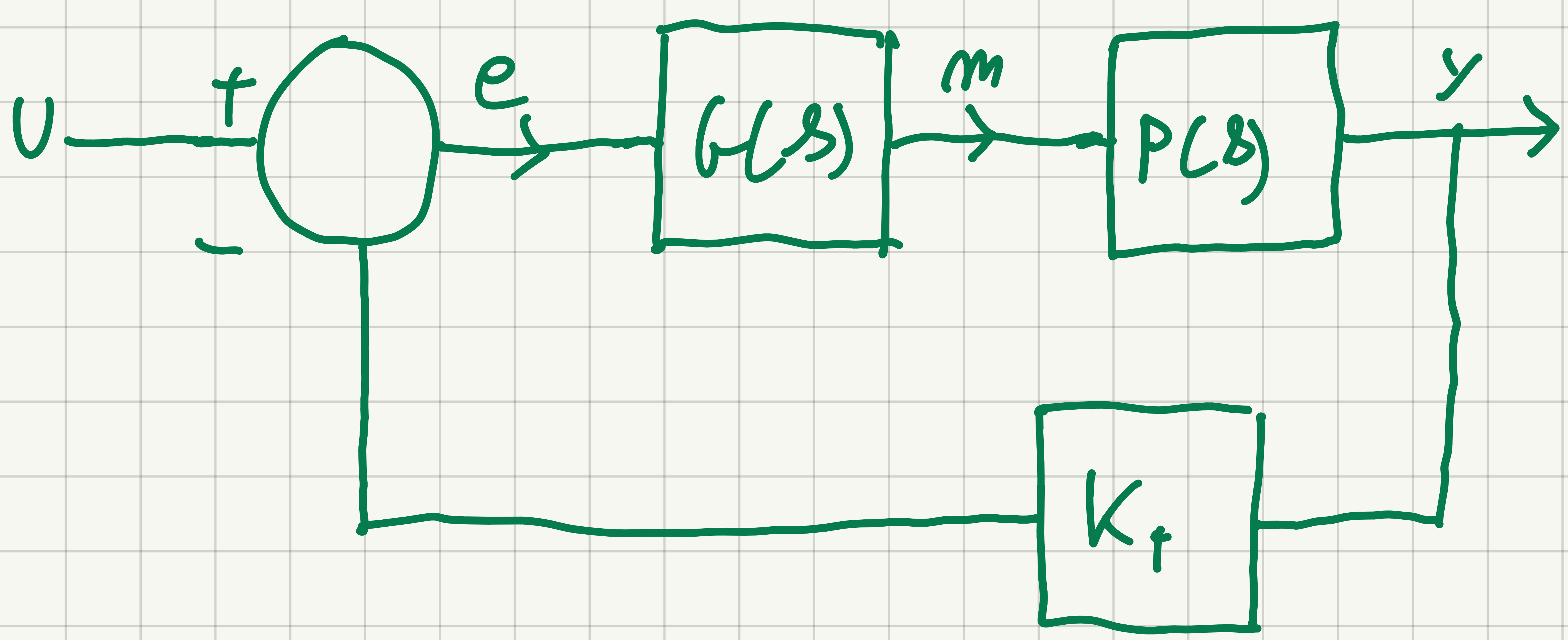
SCRIVENDO, NEL DOMINIO s, LE FORMULE DI LAGRANGE

$$\begin{cases} X(s) = \Phi(s) \cdot x(t_0) + H(s) \cdot U(s) + H_z(s) \cdot Z(s) \\ Y(s) = \Psi(s) \cdot x(t_0) + W(s) \cdot U(s) + W_z(s) \cdot Z(s) \end{cases}$$

PONIAMO L'IPOTESI DI AVERE UN SISTEMA SISO, COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE E CONTROLLABILE, SI PUÒ RISCRIVERE LO SCHEMA A BLOCCHI GENERALE NEL MODO CHE SEGUE



POSSIAMO CONSIDERARE K_{r_1} E K_{r_2} COME SENSORI COSTANTI LA CUI MISURA ISTANTANEA È $y_1(t) = K_{r_1} \cdot T_1(t)$
SI PUÒ DIMOSTRARE CHE LO SCHEMA PRECEDENTE È EQUIVALENTE AL SEGUENTE, SCELTI OPPORTUNAMENTE G E K_r



- $Y(s) = P(s) \cdot M(s) = P \cdot G_1 \cdot e_1 = P \cdot G_1 \cdot (K_{r_1} \cdot U - K_{r_2} \cdot Y)$

$= P \cdot G_1 \cdot K_{r_1} \cdot U - P \cdot G_1 \cdot K_{r_2} \cdot Y$

$$\Rightarrow Y = \frac{P \cdot G_1 \cdot K_{r_1}}{1 + P \cdot G_1 \cdot K_{r_2}} \cdot U \Rightarrow W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{P \cdot G_1 \cdot K_{r_1}}{1 + P \cdot G_1 \cdot K_{r_2}}$$

- $Y(s) = P(s) \cdot M(s) = P \cdot G \cdot e = P \cdot G \cdot (U - K_r \cdot Y)$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{PGU}{1+PGK_r} \Rightarrow W(s) = \frac{G(s)\cdot P(s)}{1+P(s)\cdot G(s)\cdot K_r}$$

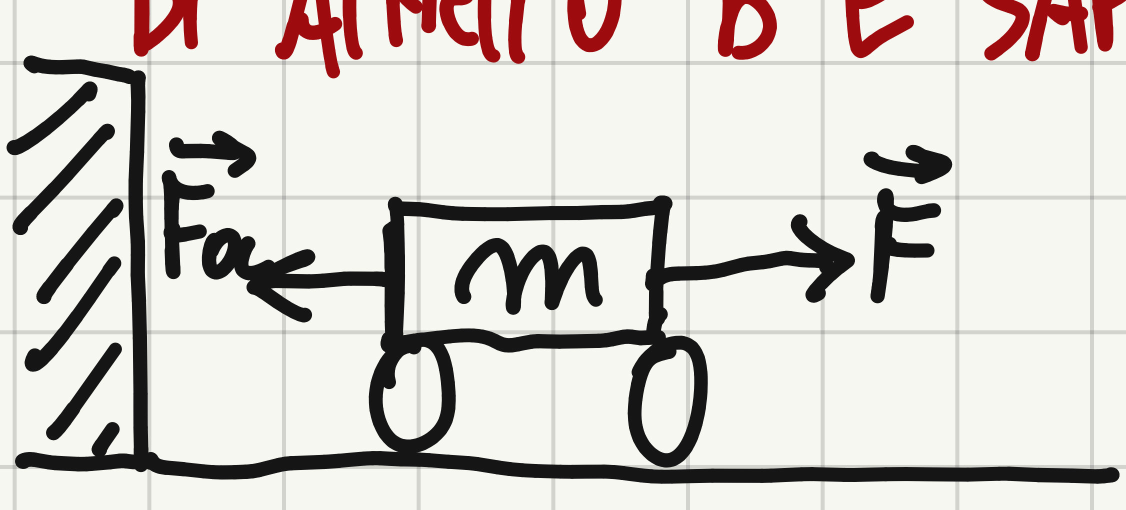
$$W(s) = W(s) \qquad \frac{P\cdot G_1\cdot K_{r_1}}{1+P\cdot G_1\cdot K_{r_2}} = \frac{G\cdot P}{1+P\cdot G\cdot K_r}$$

SCELTI $G(s) = K_{r_2}\cdot G_1(s)$ E $K_r = \frac{K_{r_2}}{K_{r_1}}$,
LA RELAZIONE È SODDISFATTA.

$F(s) = G(s)\cdot P(s)$ È ANCHE DETTA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO A CATENA DIRETTA; $G(s)\cdot P(s)\cdot K_r = F(s)\cdot K_r$ È DETTA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO A CATENA APERTA; $W(s) = \frac{F(s)}{1+F(s)\cdot K_r}$ È DETTA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO IN CATENA CHIUSA, ESPRIME IL LEGAME TRA IL SEGNALE E LA SUA RELATIVA USCITA.

ALCUNI ESERCIZI

1) UN CARRELLO SI MUOVE LUNGO UNA STRADA CON COEFFICIENTE DI ATTRITO b E SAPPIAMO CHE $v_0 = 0$. DETERMINARE $W(s)$.



$$\sum \vec{F} = ma \qquad F - bv = ma$$

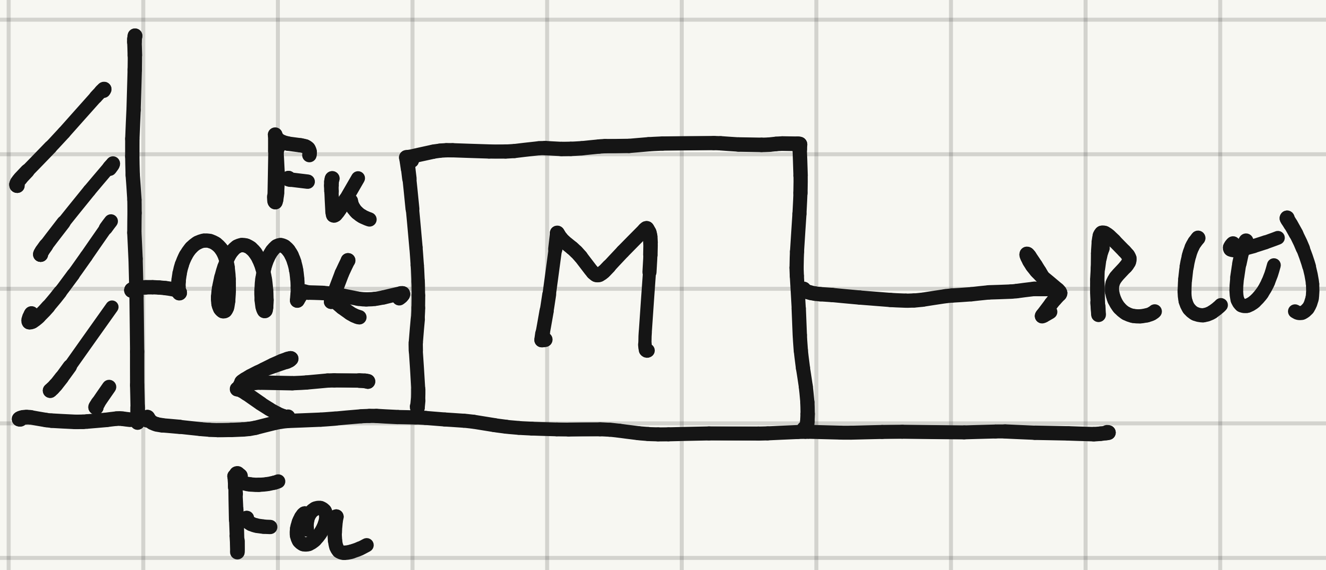
$$F(t) - bv = m\cdot\frac{dv}{dt} \xrightarrow{\text{LAPLACE}} F(s) - bv(s) = msv(s)$$

$$(b+ms)v(s) = F(s) \Rightarrow v(s) = \frac{F(s)}{b+ms}.$$

$$F(s) = 1 \Rightarrow v(t) = e^{-\frac{b}{m}t}; \; F(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow v(t) = \frac{1}{b}\left[1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right]\delta_{-1}(t)$$

$$W(s) = \frac{F(t)}{ms+b}$$

② UNA MASSA M SI MUOVE SU UN PIANO ORIZZONTALE SOTTOPOSTA AD UNA FORZA $R(t)$ ED È ATTACCATA AD UNA PARETE TRAMITE UNA MOLLA. IL PAVIMENTO HA COEFFICIENTE DI ATTRITO b E CONOSCIAMO LE CONDIZIONI INIZIALI $x(0)=0$ E $v(0)=0$. DETERMINARE $W(s)$



$$\Sigma F = Ma$$

$$M\cdot\frac{d^2x}{dx^2} = R(t) - b\cdot\frac{dx}{dt} - K\cdot x(t) \rightarrow M\frac{d^2x}{dt} + b\frac{dx}{dt} + Kx(t) = R(t)$$

$$\xRightarrow{\text{LAPLACE}} Ms^2X(s) + bsX(s) + KX(s) = R(s)$$

$$(Ms^2+bs+K)X(s) = R(s) \quad W(s) = \frac{X(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ms^2+bs+K}$$

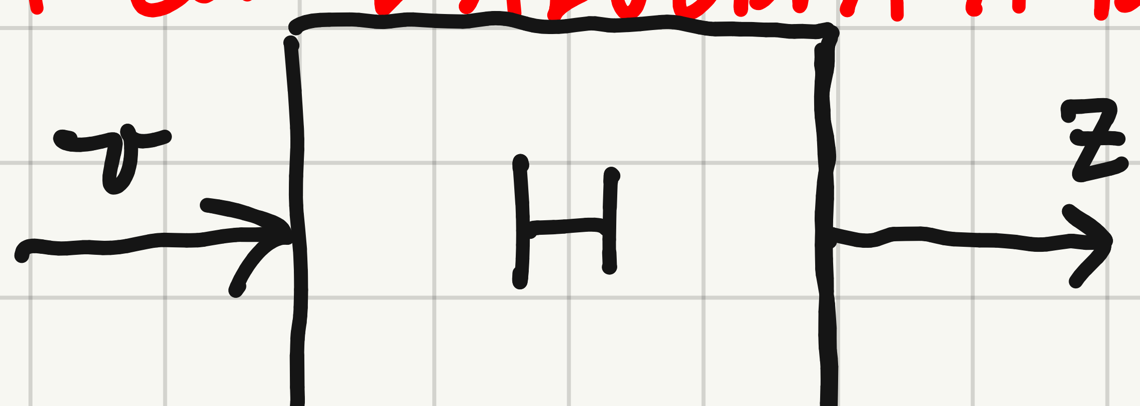
EQUAZIONI DEL CONTROLLORE

$$m(t) = K\cdot e^{t} + K_I\int_0^t e(\tau)d\tau \rightarrow m(s) = Ke(s) + K_d\cdot\frac{1}{s}\cdot e(s)$$

$$\Rightarrow m(s) = \left[K + \frac{K_d I}{s}\right]e(s) \rightarrow G(s) = \frac{m(s)}{e(s)} = \frac{Ks + K_d I}{s}$$

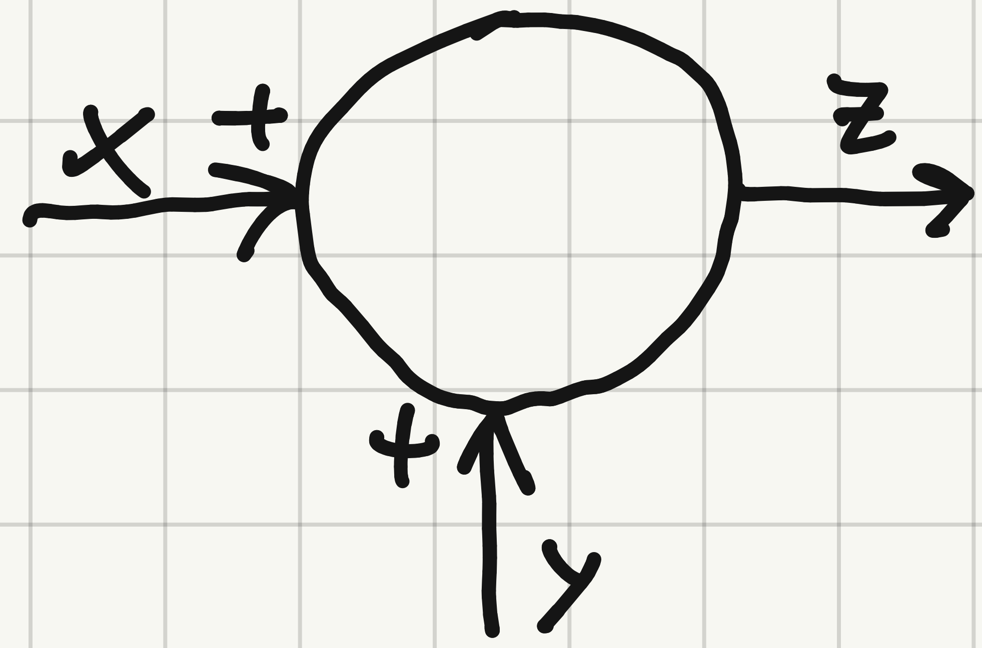
OPERAZIONI CON L'ALGEBRA A BLOCCHI

- MOLTIPLICATORE



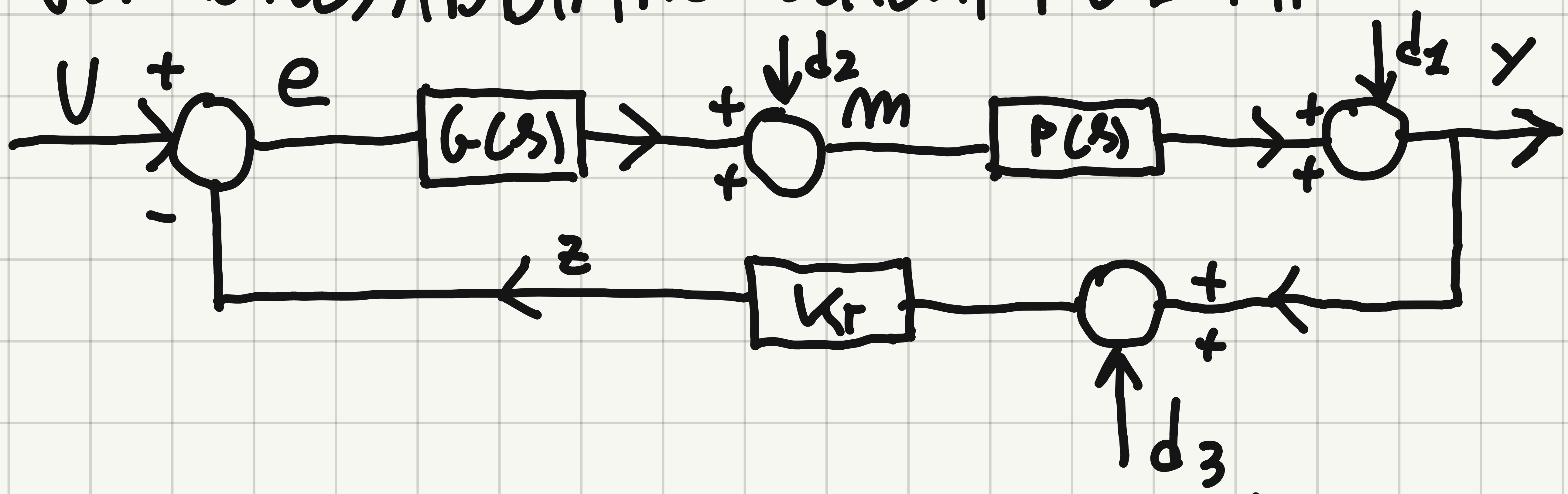
$$z = H\cdot v$$

SOMMATORE



$z = x + y$

In generale, abbiamo schemi del tipo



y dipende dall'ingresso u e dai disturbi d_1, d_2, d_3.
Il nostro scopo è far sì che l'uscita si comporti il più possibile allo stesso modo dell'ingresso e che gli effetti dei disturbi siano minimi. Dal principio di sovrapposizione degli effetti abbiamo che $y(t) = y_u(t) + y_{d_1}(t) + y_{d_2}(t) + y_{d_3}(t)$

$$\xRightarrow{\text{LAPLACE}} Y(s) = W_u(s)U(s) + W_{d_1}(s)d_1(s) + W_{d_2}(s)d_2(s) + W_{d_3}(s)d_3(s)$$

u) $$W_u(s) = \frac{G(s)P(s)}{1 + K_T G(s)P(s)} = \frac{F(s)}{1 + K_T F(s)}$$

d_1) $$Y_{d_1}(s) = d_1 + Pm = d_1 + PGe = d_1 + PG(-z - (\overset{=0}{\cancel{d_3}} + y)) =$$

$$= d_1 + PG(-K_T Y_{d_1}) \Rightarrow Y_{d_1}(s) = \frac{d_1}{1 + PGK_T} = \frac{d_1}{1 + FK_T}$$

$$\Rightarrow W_{d_1}(s) = \frac{Y_{d_1}(s)}{d_1(s)} = \frac{1}{1+F(s)K_T}$$

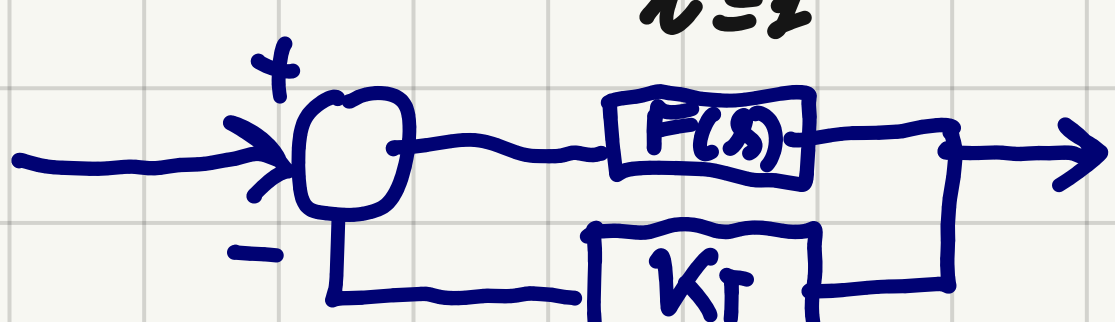
(SI OSSERVI CHE $W_U(s) = W_{d_1}(s)$)

d_2) $Y_{d_2}(s) = P \cdot m = P(d_2 + Ge) = P(d_2 - G K_T Y_{d_2})$

$$\Rightarrow Y_{d_2}(s) = \frac{P(s)d_2(s)}{1+G(s)P(s)K_T} \Rightarrow W_{d_2}(s) = \frac{P(s)}{1+F(s)K_T}$$

d_3) $$W_{d_3}(s) = -\frac{F(s)K_T}{1+F(s)K_T}$$

IL DISTURBO d_3 È QUELLO CHE PIÙ INFLUENZA POICHÉ IL PERCORSO TOCCA IN K_T, ED È PERCIÒ QUELLO CHE SI PROVA AD ANNULLARE. $Y(s) = W_U(s)U(s) + \sum_{i=1}^{3} W_{d_i}(s) d_i(s) - K_T(U(s) d_3(s))$



$$W_U(s) = \frac{F(s)}{1+K_T \cdot F(s)} \qquad F(s) = G(s)P(s) = \frac{N_F(s)}{D_F(s)}$$

NUMERATORE

DENOMINATORE

$$W_U(s) = \frac{\frac{N_F(s)}{D_F(s)}}{1+K_T \cdot \frac{N_F(s)}{D_F(s)}} = \frac{N_F(s)}{D_F(s)+K_T N_F(s)} \rightarrow$$

INFLUENZA LE PROPRIETÀ DINAMICHE DEL SISTEMA

$$= \frac{N_W(s)}{D_W(s)}$$

$$W_{d_1}(s) = \frac{1}{1+K_T \frac{N_F(s)}{D_F(s)}} = \frac{D_F(s)}{D_F(s)+K_T N_F(s)}$$

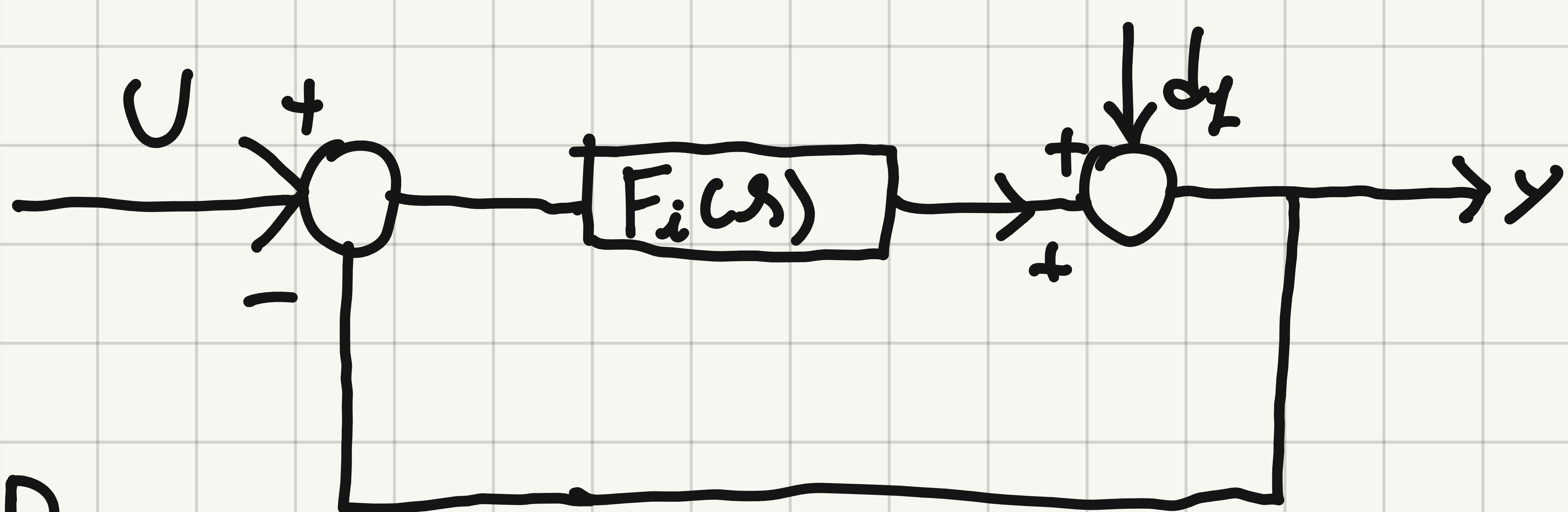
SI NOTI CHE IL

DENOMINATORE È INVARIATO RISPETTO A $D_w(s)$.

$$W_{d_2}(s)=\frac{P(s)}{1+K_r\,G(s)F(s)} \qquad P(s)=\frac{N_P(s)}{D_P(s)} \qquad G(s)=\frac{N_G(s)}{D_G(s)}$$

SVOLGENDO I CONTI, $W_{d_2}(s)=\dfrac{N_P(s)\cdot D_G(s)}{D_F(s)+K_r N_F(s)}$

ESERCIZIO:



PONIAMO CHE $u=d_1=\delta_{-1}(t) \Rightarrow U(s)=D_1(s)=\frac{1}{s}$

CALCOLARE LA RISPOSTA A REGIME PERMANENTE NEI CASI:

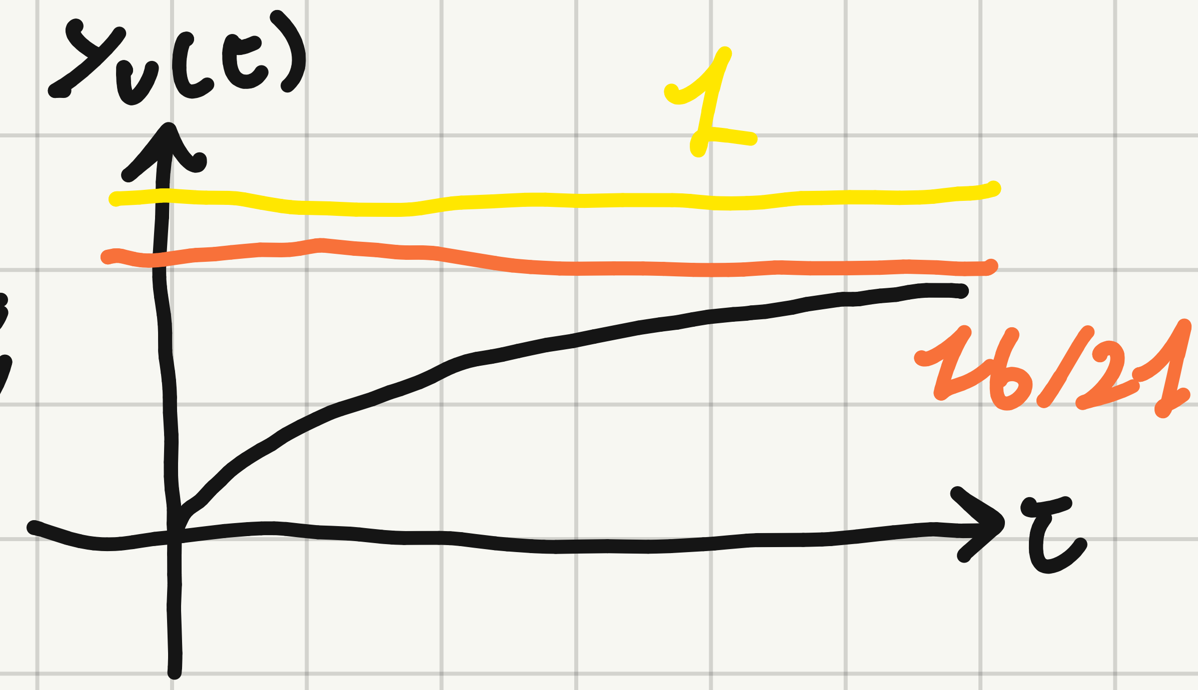
- $F_1(s)=\dfrac{16}{s+5} \Rightarrow W_u(s)=\dfrac{16}{s+5+16}=\dfrac{16}{s+21}$

$$W_{d_1}(s)=\frac{s+5}{s+21} \qquad y(t)=y_L(t)+y_F(t)\xrightarrow{\text{REGIME PERMANENTE}}\tilde{y}(t)=\tilde{y}_u(t)+\tilde{y}_d(t)$$

TEOREMA DEL VALORE FINALE $\tilde{y}_u(t)=\lim_{t\to+\infty} y_u(t)=\lim_{s\to0} s\cdot Y_u(s)=$

$$=\lim_{s\to0} s\cdot W_u(s)\cdot U(s)=\lim_{s\to0}\cancel{s}\cdot\frac{16}{s+21}\cdot\frac{1}{\cancel{s}}=\frac{16}{21}$$

GRAFICAMENTE,



ASSENZA DI ERRORE

ANALOGAMENTE, $\tilde{y}_d(t) = \lim_{t\to+\infty} y_d(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot Y_d(s) =$

$$= \lim_{s\to 0} s\cdot W_d(s)\cdot d(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\cdot \frac{s+5}{s+21}\cdot\frac{1}{\cancel{s}} = \frac{5}{21}$$

DISTURBO $\neq 0$, COME CI SI ASPETTAVA

- $F_2(s) = \frac{16}{s(s+5)}$ $\quad W_u(s) = \frac{16}{s(s+5)+16} = \frac{16}{s^2+5s+16}$

CONDIZIONE DI STODOLA $\Longrightarrow$ TUTTI I COEFFICIENTI SONO DELLO STESSO SEGNO $\begin{pmatrix}1\\5\\16\end{pmatrix} \Longrightarrow Re[z_1], Re[z_2] < 0$

$\Longrightarrow$ SISTEMA STABILE

$W_d(s) = \frac{s(s+5)}{s^2+5s+16}$ $\quad \tilde{y}_u(t) = \lim_{t\to+\infty} y_u(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot Y_u(s) =$

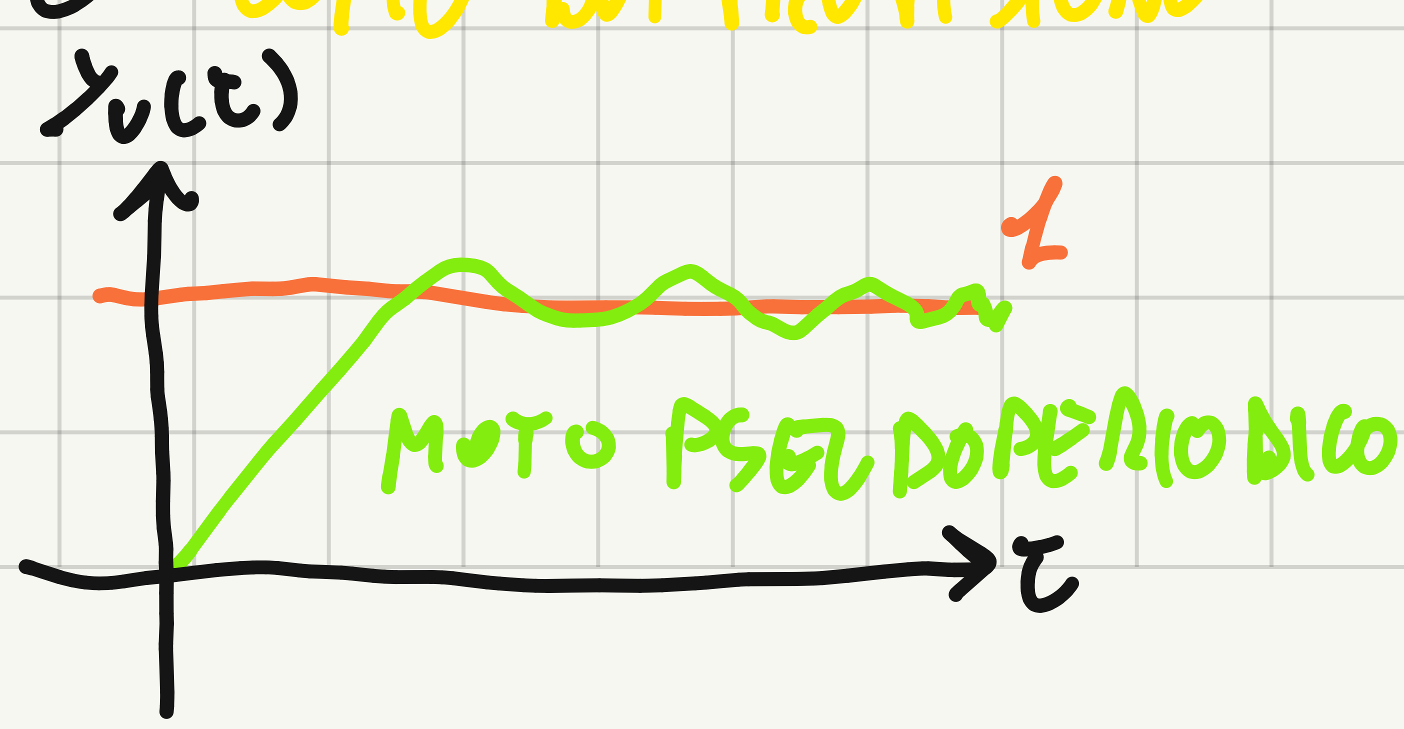
$$= \lim_{s\to 0} s\cdot W_u(s)\, u(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\cdot \frac{16}{s^2+5s+16}\cdot\frac{1}{\cancel{s}} = 1$$

IL SISTEMA È PRIVO DI ERRORE

$$\tilde{y}_d(t) = \lim_{t\to+\infty} y_d(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot Y_d(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot W_d(s)\cdot d(s)$$

$$= \lim_{s\to 0} \cancel{s}\cdot \frac{s(s+5)}{s^2+5s+16}\cdot\frac{1}{\cancel{s}} = 0$$ COME DA PREVISIONE

GRAFICAMENTE,

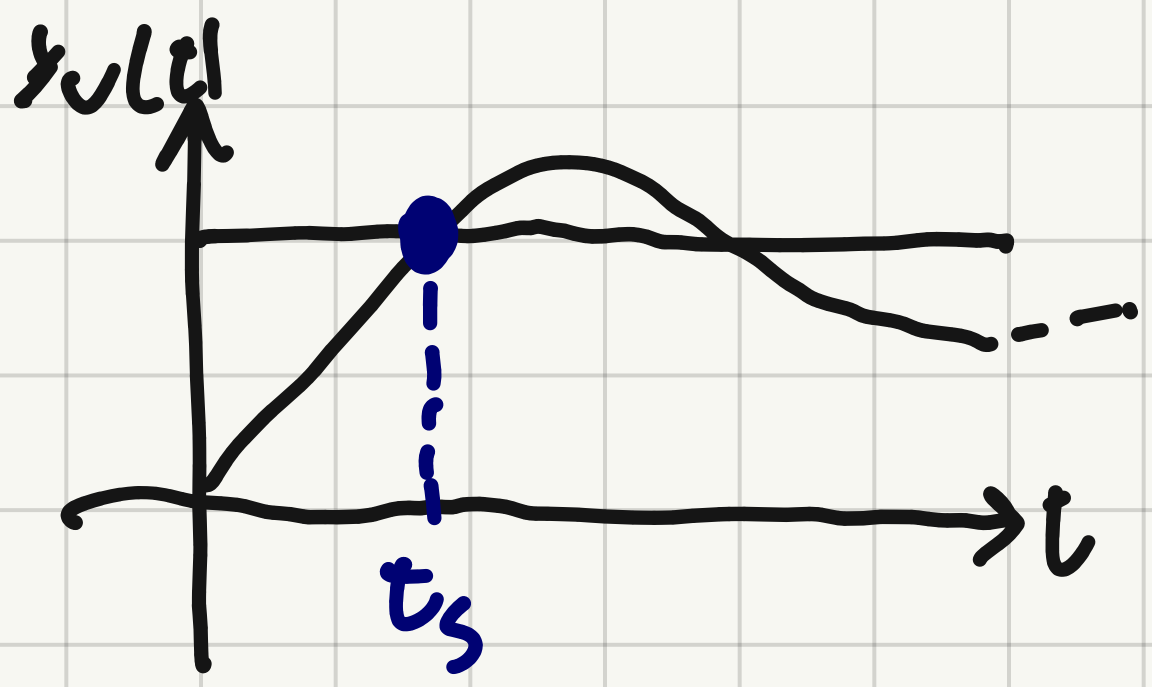


Il teorema del valore finale è utilizzabile solo per funzioni convergenti

Fasi dello studio di un sistema di controllo:

1. Caratterizzazione delle grandezze agenti sul sistema
2. Individuazione delle parti del sistema sulle quali si può intervenire
3. Definire le caratteristiche dei sistemi (variabili di stato, parametri etc.)
4. Definire, in modo quantitativo, gli obiettivi di controllo (es. $\tilde{e} \leq 0{,}05$)

Fondamentale che il tempo di salita, ossia quanto impiega il sistema a raggiungere lo stato di regime la prima volta, sia breve



5. Individuare la corrispondenza tra gli obiettivi e gli elementi del sistema di controllo. Ad esempio, per ingressi a gradino è l'imposizione di ingressi che annullino

GLI ERRORI.

6. COSTRUZIONE DEL CONTROLLORE $G(s)$ CHE GARANTISCA LA SODDISFAZIONE DELLE SPECIFICHE

7. PROGETTO E REALIZZAZIONE DEL CONTROLLORE

STUDIEREMO I PUNTI 4., 5., 6., OSSIA ANALISI E SINTESI.

ANALISI

SPECIFICHE

SONO LE CARATTERISTICHE CHE SI VOGLIONO IMPORRE ALL'USCITA DEL SISTEMA DI CONTROLLO. ESSE SONO:

- STABILITÀ → IL SISTEMA NON SUBISCE VARIAZIONI DA PERTURBAZIONI
- FEDELTÀ DI RISPOSTA. QUANTO L'USCITA REALE SI AVVICINA ALL'USCITA DESIDERATA. SI DICE CIOÈ CHE SI HA UN SISTEMA DI CONTROLLO PROPORZIONALE $y_{des}(t) = K_d \cdot u(t)$, CON K_d LA MATRICE DI RETROAZIONE. $e(t) = y_{des}(t) - y(t) = K_d\, u(t) - y(t)$.

L'ERRORE È CARATTERIZZABILE GRAZIE AL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI, ANALIZZANDO SEPARATAMENTE I DUE CONTRIBUTI. INOLTRE, È UTILE STUDIARE $e(t)$ DIVIDENDOLO IN REGIME PERMANENTE E RISPOSTA TRANSITORIA. INGRESSI

ANDAMENTO ASINTOTICO ↑ RISPOSTA ISTANTE INIZIALE ↑