② SE UNO STATO DI EQUILIBRIO x_e È INSTABILE, LO SONO ANCHE TUTTI GLI ALTRI STATI DI EQUILIBRIO

③ SE UNO STATO DI EQUILIBRIO x_e È ASINTOTICAMENTE STABILE,

- $x_e \neq 0$ È L'UNICO STATO DI EQUILIBRIO STABILE
- x_e È G.A.S., OSSIA IL DOMINIO DI ATTRAZIONE COINCIDE CON L'INTERO SPAZIO DI STATO

PER SISTEMI LINEARI, È POSSIBILE STUDIARE LA STABILITÀ GRAZIE AL

CRITERIO DEGLI AUTOVALORI

TEMPO CONTINUO

- IL SISTEMA È ASINTOTICAMENTE STABILE $\Leftrightarrow$ TUTTI GLI AUTOVALORI, RADICI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO $P(\lambda)$, HANNO $Re[\lambda_i] < 0 \; \forall i = 1, \dots, r$
- IL SISTEMA È SEMPLICEMENTE STABILE $\Leftrightarrow$ TUTTI GLI AUTOVALORI, RADICI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO $P(\lambda)$, HANNO:
  - $Re[\lambda_i] \leq 0 \; \forall i = 1, \dots, r \quad \nu_i = 1$
  - $Re[\lambda_i] < 0 \; \forall i = 1, \dots, r \quad \nu_i > 1$
- IL SISTEMA È INSTABILE $\Leftrightarrow$ ESISTE ALMENO UN AUTOVALORE CON:
  - $Re[\lambda_i] > 0, \nu_i = 1$
  - $Re[\lambda_i] \geq 0, \nu_i > 1$

ESERCIZIO: STUDIARE, IN FUNZIONE DI $K \in \mathbb{R}$, LA STABILITÀ DEL SEGUENTE SISTEMA A TEMPO CONTINUO:

$$\begin{cases} x'(t) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$

$$P(\lambda) = \det(\lambda \cdot I_2 - A) = \det \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 0 & \lambda-k \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-k)$$

$P(\lambda)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1,\ \nu_1 = 1 \\ \lambda_2 = k,\ \nu_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow k \begin{cases} < 0 & \text{STABILITÀ ASINTOTICA} \\ = 0 & \text{STABILITÀ SEMPLICE} \\ > 0 & \text{INSTABILITÀ} \end{cases}$$

TEMPO DISCRETO

- IL SISTEMA È ASINTOTICAMENTE STABILE $\Leftrightarrow$ TUTTI GLI AUTOVALORI, RADICI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO $P(\lambda)$, HANNO $|\lambda_i| < 1 \ \forall i=1,\dots,r$

- IL SISTEMA È SEMPLICEMENTE STABILE $\Leftrightarrow$ TUTTI GLI AUTOVALORI, RADICI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO $P(\lambda)$, HANNO:
  - $|\lambda_i| \leq 1 \ \forall i=1,\dots,r \quad \nu_i = 1$
  - $|\lambda_i| < 1 \ \forall i=1,\dots,r \quad \nu_i > 1$

- IL SISTEMA È INSTABILE $\Leftrightarrow$ ESISTE ALMENO UN AUTOVALORE CON:
  - $|\lambda_i| > 1,\ \nu_i = 1$
  - $|\lambda_i| \geq 1,\ \nu_i > 1$

CRITERIO DI ROUTH

PER SISTEMI A TEMPO CONTINUO, AGEVOLA LO STUDIO DEL SEGNO DELLE RADICI PER POLINOMI DI GRADO ELEVATO. È UNA GENERALIZZAZIONE DELLA CONDIZIONE DI STODOLA: DATO IL POLINOMIO $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, AFFINCHÈ TUTTE LE RADICI ABBIANO PARTE REALE NEGATIVA I COEFFICIENTI $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ DEVONO AVERE TUTTI LO STESSO SEGNO.

REGOLA DI CARTESIO: CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE AFFINCHÈ LE RADICI DEL POLINOMIO DI 2° GRADO $P(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ ABBIANO TUTTE PARTE REALE NEGATIVA È CHE a_0, a_1, a_2 SIANO TUTTI E 3 DELLO STESSO SEGNO. DA CUI IL TEOREMA: CONDIZIONE NECESSARIA (NON SUFFICIENTE) AFFINCHÈ LE RADICI DI UN GENERICO POLINOMIO DI GRADO n $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ ABBIANO PARTE REALE NEGATIVA È CHE TUTTI I COEFFICIENTI $a_0, a_1, \dots, a_n$ ABBIANO LO STESSO SEGNO

DIMOSTRAZIONE

SI SUPPONGA CHE $a_n = 1$ E $P(z)$ ABBIA R RADICI REALI E $2S$ COMPLESSE $\Rightarrow$

$n = R + 2S$. INDICHIAMO CON:

- $\lambda_i = d_i \ (i = 1, 2, \dots, R)$ UNA GENERICA RADICE REALE
- $\lambda_i, \lambda_i^* = d_i \pm j w_i \ (i = R+1, \dots, R+S)$ UNA GENERICA COPPIA DI COMPLESSI CONIUGATI

POSSIAMO COSÌ DIRE CHE $P(\lambda) = \prod_{i=1}^{R} (\lambda - d_i) \cdot \prod_{i=R+1}^{R+S} (\lambda^2 - 2d_i \lambda + W_{n,i})$,

DOVE $W_{n,i} = \sqrt{d_i^2 + w_i^2}$

SE $d_i \geq 0 \ \forall i = 1, 2, \dots, R+S$, SVILUPPANDO LA PRODUTTORIA SI HANNO SOLO TERMINI POSITIVI. SE QUALCHE $d_i \leq 0$, IL SISTEMA NON È STABILE BIBO, O NON ASINTOTICAMENTE STABILE.

L'APPLICAZIONE DEL CRITERIO DI ROUTH PREVEDE LA COSTRUZIONE DELLA TABELLA DI ROUTH, OTTENUTA A PARTIRE DAI COEFFICIENTI DEL POLINOMIO $P(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\dots$
$n-1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\dots$
$n-2$	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	$\dots$
$n-3$	c_{n-3}	c_{n-5}	c_{n-7}	$\dots$
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
2	d_2	d_0		
1	e_1			
0	e_0			

$$b_{n-k} = \frac{-1}{a_{n-1}} \cdot \det \begin{vmatrix} a_n & a_{n-k} \\ a_{n-1} & a_{n-k-1} \end{vmatrix}$$

$$c_{n-k} = \frac{-1}{b_{n-2}} \cdot \det \begin{vmatrix} a_{n-k+2} & a_{n-k} \\ b_{n-k+1} & b_{n-k-1} \end{vmatrix}$$

$\vdots$

Si otterrà che:

- Il numero di radici a parte reale positiva è uguale al numero di variazioni di segno dei coefficienti della prima colonna della tabella
- Il numero di radici a parte reale negativa è uguale al numero di permanenze di segno dei coefficienti della prima colonna della tabella

! Si possono moltiplicare/dividere le righe solo per quantità positive

CASI DI SINGOLARITÀ

Sono situazioni particolari da gestire in maniera diversa

durante la costruzione della tabella:

1 → 1° elemento di una riga nullo

⇒ si sostituisce 0 con una $\varepsilon > 0$

$$\begin{array}{c|l} n & a_n \cdots \\ n-1 & a_{n-1} \cdots \\ \vdots & \cdots \\ i & 0 \cdots \\ \vdots & \cdots \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|l} n & a_n \cdots \\ n-1 & a_{n-1} \cdots \\ \vdots & \cdots \\ i & \varepsilon \cdots \\ \vdots & \cdots \end{array}$$

2 → tutta una riga identicamente nulla

$$\begin{array}{c|l} n & a_n \cdots \\ n-1 & a_{n-1} \cdots \\ \vdots & \cdots \\ m & 0 \; 0 \cdots \\ \vdots & \cdots \end{array}$$

⇒ Il polinomio ha sicuramente radici a parte reale non negativa. Si fattorizza il polinomio caratteristico come $P(z) = r(z) \cdot q(z)$, dove:

- $r(z) \rightarrow$ POLINOMIO DI GRADO $n-2m$ IN CUI IL SEGNO DELLE RADICI SI DETERMINA DALLA PRIMA COLONNA DELLE PRIME $n-2m+1$ RIGHE
- $q(z) \rightarrow$ POLINOMIO DI GRADO $2m$, DETTO POLINOMIO AUSILIARIO, CHE NON CONTIENE TERMINI DI GRADO DISPARI

INDICHIAMO CON n_0 LE RADICI A PARTE REALE NULLA, n_- QUELLE A PARTE REALE NEGATIVA E n_+ QUELLE A PARTE REALE POSITIVA.
IL SEGNO DELLE RADICI È DETERMINATO TRAMITE IL SEGUENTE ALGORITMO:

1. SI DERIVA $q(z) \rightarrow q'(z)$
2. SI SOSTITUISCONO I COEFFICIENTI DI $q'(z)$ DEGLI ZERI NELLA RIGA NULLA
3. SI COMPLETA LA TABELLA
4. SI DETERMINA IL SEGNO DELLE RADICI DEL POLINOMIO CONSIDERANDO LE RIGHE DI INDICE $n-2m+1$
5. SI COSTRUISCONO $n_v < m$ VARIAZIONI DI SEGNO
6. $n_0 = 2m - 2n_v$

ESERCIZIO: $p(z) = z^4 + 4z^3 + 3z^2 + 8z + 5$

4	1	3	5
3	4	8	
2	1	5	
1	-12		
0	5		

$-\frac{1}{4}\cdot \det\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$

ANALOGO PER GLI ALTRI

1ª COLONNA: 2 VARIAZIONI; 2 PERMANENZE

$\Rightarrow$ 2 RADICI A PARTE REALE POSITIVA $\Rightarrow$ SISTEMA INSTABILE

ESERCIZIO: $P(z) = z^4 + z^3 + 5z^2 + 5z + 2$

4	1	5	2
3	1	5	
2	0	2	
1	0		
0	0		

$\longrightarrow$

4	1	5	2
3	1	5	
2	ε	2	
1	$\frac{5\varepsilon-2}{\varepsilon}$		
0	2		

$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{5\varepsilon-2}{\varepsilon} = -\infty$

1ª COLONNA: 2 VARIAZIONI; 2 PERMANENZE

$\Rightarrow$ 2 RADICI A PARTE REALE POSITIVA $\Rightarrow$ SISTEMA INSTABILE

ESERCIZIO: $P(z) = z^5 + z^4 + 4z^3 + 4z^2 + 7z + 7$

5	1	4	7
4	1	4	7
3	0	0	
2	0	0	
1	0		
0	0		

$\Rightarrow q(z) = z^4 + 4z^2 + 7$ $\qquad q'(z) = 4z^3 + 8z$

5	1	4	7
4	1	4	7
3	4	8	
2	2	7	
1	-6		
0	7		

1ª COLONNA: 2 VARIAZIONI; 3 PERMANENZE

→ 2 RADICI A PARTE REALE POSITIVA ⇒ SISTEMA INSTABILE

ESERCIZIO: $P(z) = z^3 + 5z^2 + 6z + K$, $K \in \mathbb{R}$. STUDIARE IL SEGNO DELLA PARTE REALE DELLE RADICI IN FUNZIONE DI K

3	1	6
2	5	K
1	$\frac{30-K}{5}$	
0	K	

- $K = 0 \Rightarrow P(z) = z(z+3)(z+2)$

$$\left.\begin{array}{l} - z_1 = 0 \\ - z_2 < 0 \\ - z_3 < 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{SEMPLICEMENTE STABILE}$$

- $\begin{cases} \frac{30-K}{5} > 0 \\ K > 0 \end{cases} \Rightarrow$ P(z) HA 3 RADICI A PARTE REALE NEGATIVA PER $0 < K < 30$

→ ASINTOTICAMENTE STABILE

- $\begin{cases} \frac{30-K}{5} > 0 \\ K < 0 \end{cases} \Rightarrow$ P(z) HA 2 RADICI A PARTE REALE NEGATIVA E 1 POSITIVA PER $K < 0, K < 30$

→ INSTABILE

- $\begin{cases} \frac{30-K}{5} < 0 \\ K > 0 \end{cases}$ P(z) HA 1 RADICE A PARTE REALE NEGATIVA E 2 POSITIVA PER $K > 0, K > 30$

→ INSTABILE

• $k=30$ → LA RIGA DI INDICE 1 SI ANNULLA ⇒ 1 RADICE A PARTE REALE NEGATIVA.

$q(z)=5z^2+30 \Rightarrow q'=10z$

3	1	6
2	5	30
1'	10	
0	30	

3 PERMANENZE ⇒ 2 RADICI A PARTE REALE NULLA ⇒ SEMPLICEMENTE STABILE

RAGGIUNGIBILITÀ/CONTROLLABILITÀ

QUESTE PROPRIETÀ DESCRIVONO LE POSSIBILITÀ DI AZIONE DELLA FUNZIONE D'INGRESSO $u(\cdot)$ PER INFLUENZARE IL MOVIMENTO DELLO STATO. LA RAGGIUNGIBILITÀ È LA POSSIBILITÀ DI MODIFICARE LO STATO DEL SISTEMA PARTENDO DA UNO STATO INIZIALE AGENDO OPPORTUNAMENTE SU $u(\cdot)$, E LA CONTROLLABILITÀ È LA POSSIBILITÀ DI TRASFERIRE LO STATO DEL SISTEMA AD UN PARTICOLARE STATO FINALE AGENDO OPPORTUNAMENTE SU $u(\cdot)$

STATO RAGGIUNGIBILE

UNO STATO x^* DEL SISTEMA $\begin{cases} \dot{x}(t)=A\cdot x(t)+B\cdot u(t) \\ y(t)=C\, x(t)+D\cdot u(t) \end{cases}$

SI DICE RAGGIUNGIBILE DALLO STATO INIZIALE $x(t_0)$ AL TEMPO t^* SE:

- $\exists\ t^* \in [t_0, +\infty)$
- $\exists\ u^*(t)\ \forall t \in [t_0, t^*] \mid x(t), t \in [t_0, t^*] \Rightarrow x(t^*) = x^*$

OSSIA, UN PARTICOLARE STATO x^* È RAGGIUNGIBILE SE, CON UNA OPPORTUNA SCELTA DELL'INGRESSO, È POSSIBILE PASSARE DA $x(t_0)$ A x^* IN UN TEMPO t ARBITRARIO AGENDO OPPORTUNAMENTE SU $u(\cdot)$.

LA RAGGIUNGIBILITÀ DIPENDE SOLO DALL'EQUAZIONE DI STATO, QUINDI DALLE SOLE MATRICI A E B. UN SISTEMA SI DICE RAGGIUNGIBILE SE TUTTI I SUOI STATI SONO RAGGIUNGIBILI. IN QUESTO CASO È ANCHE DETTO COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE. L'INSIEME DI TUTTI GLI STATI RAGGIUNGIBILI RAPPRESENTA L'INSIEME DI RAGGIUNGIBILITÀ $\mathcal{X}_R(t^*)$ AL TEMPO t^*.
$\mathcal{X}_R(t^*)$ È UN SOTTOSPAZIO LINEARE DELLO SPAZIO DI STATO $\mathcal{X}$.
$\mathcal{X}_R = \max_{t \in [t_0, +\infty)} \mathcal{X}_R(t)$ È IL SOTTOSPAZIO DI RAGGIUNGIBILITÀ. UN SISTEMA SI DICE COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE SE $\mathcal{X}_R \equiv \mathcal{X}$.
IL COMPLEMENTO ORTOGONALE DI $\mathcal{X}_R$ RESTITUISCE I SISTEMI NON RAGGIUNGIBILI E QUINDI IL SOTTOSPAZIO DI NON RAGGIUNGIBILITÀ $\mathcal{X}_{NR} = \mathcal{X}_R^{\perp}$.

STATO CONTROLLABILE

Uno stato x^* del sistema $\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$ si dice controllabile allo stato x_R al tempo t_R se:

- $\exists\, t^* \in [t_0, +\infty)$
- $\exists\, u^*(t)\ \forall t \in [t_0, t^*] \mid x(t), t \in [t_0, t^*] \Rightarrow x(t^*) = x_R$

Ossia, un sistema è controllabile se, a partire da uno stato iniziale x^*, in un tempo t^*, agendo opportunamente su $u(\cdot)$, posso arrivare allo stato $x_R = x(t^*)$ detto stato obiettivo.

Se tutti gli stati sono controllabili, il sistema è completamente controllabile. L'insieme di tutti gli stati controllabili rappresenta l'insieme di controllabilità $\mathcal{X}_C(t^*)$ al tempo t^*. $\mathcal{X}_C(t^*)$ è un sottospazio lineare dello spazio di stato $\mathcal{X}$. $\mathcal{X}_C = \max_{t \in [t_0, +\infty)} \mathcal{X}_C(t)$ è il sottospazio di controllabilità. Un sistema è completamente controllabile se $\mathcal{X}_C \equiv \mathcal{X}$.

L complemento ortogonale di $\mathcal{X}_C$ restituisce i sistemi non controllabili e quindi il sottospazio di non raggiungibilità $\mathcal{X}_{NC} = \mathcal{X}_C^{\perp}$

PER SISTEMI LINEARI E STAZIONARI, IL PROBLEMA DI VERIFICARE SE ESISTE UNA FUNZIONE DI INGRESSO $u(\cdot)$ CHE CONSENTA DI TRASFERIRE LO STATO DA UN DATO VALORE INIZIALE AD UNO FINALE IN UN INTERVALLO DI TEMPO FINITO PUÒ ESSERE SEMPLIFICATO RISOLVENDO I DUE CASI SEPARATAMENTE, IN CUI LO STATO INIZIALE E FINALE RISPETTIVAMENTE È PARI A 0.

PER SISTEMI LINEARI E STAZIONARI:

- OGNI STATO RAGGIUNGIBILE DALLO STATO 0 È ANCHE CONTROLLABILE
- OGNI STATO CONTROLLABILE ALLO STATO 0 È ANCHE RAGGIUNGIBILE

$\Longrightarrow \mathcal{X}_R = \mathcal{X}_C$

PROBLEMA DEL CONTROLLO

DATO UN QUALUNQUE STATO INIZIALE $x(t_0)$, ESISTE UNA FUNZIONE DI INGRESSO $u(\cdot)$ TALE CHE IL SISTEMA, A PARTIRE DA QUESTO STATO INIZIALE E INGRESSO $u(t)$ RAGGIUNGE UNO STATO FINALE $x(t_f)$ IN UN INTERVALLO DI TEMPO FINITO t_f?

TEOREMA: AD OGNI STATO $x(t_0)$ DI UN SISTEMA CONTROLLABILE È POSSIBILE RAGGIUNGERE UN QUALUNQUE STATO FINALE x_f IN UN QUALUNQUE TEMPO FINITO t, PUR DI APPLICARE AL SISTEMA L'INGRESSO

$$u(\tau) = B^T \cdot e^{A^T(t-\tau)} [G(t)]^{-1} (x_f - e^{A(t-t_0)} x(t_0)) \quad \forall \tau \in [t_0, t],$$

DOVE $G(t) \in \mathcal{M}_{n \times n}$ È IL GRAMIANO DI CONTROLLABILITÀ, NON SINGOLARE $\forall t \geq t_0$. $G(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot B^T \cdot e^{A^T(t-\tau)} d\tau$

VERIFICA

$$x(t_f) = e^{A(t_f - t_0)} \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} e^{A(t_f-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) d\tau = e^{A(t_f-t_0)} x(t_0) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_f} e^{A(t_f-\tau)} \cdot B \cdot B^T \cdot e^{A^T(t_f-\tau)} \cdot [G(t_f)]^{-1} (x_f - e^{A(t_f-t_0)} \cdot x(t_0)) d\tau =$$

$$= e^{A(t_f-t_0)} x(t_0) + G(t_f) \cdot G^{-1}(t_f)(x_f - e^{A(t_f-t_0)} x(t_0)) =$$

$$= e^{A(t_f-t_0)} x(t_0) + (x_f - e^{A(t_f-t_0)} x(t_0)) = x_f$$

TEOREMA: UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO È CONTROLLABILE $\Leftrightarrow G(t)$ È UNA MATRICE NON SINGOLARE $\forall t > t_0$

IL TEOREMA FORNISCE UN CRITERIO PER LA VERIFICA DELLA CONTROLLABILITÀ CHE CONSENTE DI SCEGLIERE UN INGRESSO OPPORTUNO PER RAGGIUNGERE UNO STATO DESIDERATO

PER DETERMINARE SE UN SISTEMA È CONTROLLABILE, PUÒ RISULTARE PIÙ AGEVOLE L'USO DEL SEGUENTE CRITERIO: DATO UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases},$$ CON $x(t) \in \mathbb{R}^n$ E $u(t) \in \mathbb{R}^r$, SI

COSTRUISCE LA MATRICE DI CONTROLLABILITÀ $n \times r \cdot n$

$C = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$. CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE AFFINCHÉ IL SISTEMA SIA CONTROLLABILE È CHE $n_c = rk(C) = n$.

SCRIVIAMO CHE $x^{\circ}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rr} \end{bmatrix}}_{B} u(t)$

DOVE A È IN FORMA DIAGONALE E $\lambda_i \neq \lambda_j \ \forall i \neq j$ E $\lambda \in \mathbb{R}$, QUINDI AUTOVALORI REALI E DISTINTI. CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE AFFINCHÉ IL SISTEMA SIA CONTROLLABILE È CHE B NON ABBIA RIGHE IDENTICAMENTE NULLE.

PER SISTEMI LINEARI E STAZIONARI, LA CONTROLLABILITÀ NON È UNA PROPRIETÀ DELLA SPECIFICA REALIZZAZIONE ED È QUINDI INVARIANTE RISPETTO A QUALUNQUE TRASFORMAZIONE DI SIMILITUDINE $\Rightarrow$ SI PARLA DI CONTROLLABILITÀ DEL SISTEMA.

TEOREMA: SI CONSIDERINO DUE RAPPRESENTAZIONI DI UNO STESSO SISTEMA DI ORDINE n: $x^{\circ}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$ E $\hat{x}^{\circ}(t) = \hat{A} \cdot \hat{x}(t) + \hat{B} \cdot u(t)$, DOVE $\hat{x}(t) = T \cdot x(t)$. $T \in \mathcal{M}_{n \times n}$ È NON SINGOLARE $\Rightarrow \hat{A} = T \cdot A \cdot T^{-1}$ E $\hat{B} = T \cdot B$. $x^{\circ}(t)$ È CONTROLLABILE $\Longleftrightarrow \hat{x}^{\circ}(t)$ È CONTROLLABILE

DIMOSTRAZIONE

$\hat{\mathcal{C}} = [\hat{B} \;\; \hat{A}\hat{B} \ldots \hat{A}^{n-1}\hat{B}] = [TB \;\; T\cdot A\cdot T^{-1}\cdot B\cdot T \;\; TAT^{-1}\cdot TAT^{-1}\cdot BT$

$\ldots \;\; T\cdot A\cdot T^{-1}\cdot \ldots \cdot T\cdot A\cdot T^{-1}\cdot B\cdot T] = [TB \;\; TAB \;\; TA^2B \ldots TA^{n-1}B]$

$= T\cdot[B \;\; AB \;\; A^2B \ldots A^{n-1}B] = T\cdot\mathcal{C}$

T NON SINGOLARE $\Longrightarrow rk(\mathcal{C}) = rk(\hat{\mathcal{C}})$

ESERCIZIO: DATO IL SISTEMA $\dot{x}(t) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} x(t) + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} u(t)$,

IN CUI $x(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$, RISPONDERE ALLE SEGUENTI DOMANDE:

- IL SISTEMA È RAGGIUNGIBILE?
- CALCOLARE IL SOTTOSPAZIO DEGLI STATI RAGGIUNGIBILE
- $x_{R_1} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ È RAGGIUNGIBILE $\forall t \geq 0$?
- $x_{R_2} = \begin{vmatrix} 0 \\ -3 \end{vmatrix}$ È RAGGIUNGIBILE $\forall t \geq 0$?
- SE POSSIBILE, CALCOLARE LA FUNZIONE D'INGRESSO $u(t)$ CHE TRASFERISCE, IN UN TEMPO FINITO t_R, LO STATO DA $x(0)$ A x_{R_2}

$\mathcal{R} = [\,B \;\; AB\,]$

$$\Rightarrow \mathcal{R}_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad rk(\mathcal{R}_2) = 1 < 2 \Rightarrow$$ SISTEMA NON COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE

• $\mathcal{X}_R = Im(\mathcal{R}_2) = Im\left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) = \alpha \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$

• $\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad \begin{cases} 1 = 0\,! \\ \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow x_{f_1}$ NON RAGGIUNGIBILE

• $\begin{vmatrix} 0 \\ -3 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ \alpha = -3 \end{cases} \Rightarrow x_{f_2}$ RAGGIUNGIBILE PER $\alpha = -3$

• $U(\tau) = B^T \cdot e^{A^T(t_f - \tau)} \cdot [G(t_f)^{-1}] \cdot x_{f_2}$

$$e^{A \cdot t} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \mathcal{L}^{-1}\left(\begin{vmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-1} \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{vmatrix}$$

$$e^{A \cdot t} \cdot B = \begin{vmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ e^{t} \end{vmatrix} \Rightarrow B^T \cdot e^{A^T t} = |0 \;\; e^{t}|$$

$$G(t) = \int_0^{t_f} e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} \, d\tau = \int_0^{t_f} \begin{vmatrix} 0 \\ e^{\tau} \end{vmatrix} \cdot |0 \;\; e^{\tau}| \, d\tau = \int_0^{t_f} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{2\tau} \end{vmatrix} d\tau =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(e^{2t_f} - 1) \end{vmatrix}. \quad t_f = 1 \Rightarrow G(t) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(e^{2} - 1) \end{vmatrix}$$

$$U(t) = B^T e^{A^T(t_f - t)} \cdot \underbrace{[G(t_f)]^{-1} \cdot x_f}_{\beta} \Rightarrow x_f = \beta\, G(1)$$

$$\begin{vmatrix} 0 \\ -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(e^{2} - 1) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\beta_2 (e^{2} - 1) \end{vmatrix}$$