MOLTIPLICAZIONE RIGHE PER COLONNE PER MATRICI 2×2

SIA $M_{2\times2}(K) = \left\{ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{vmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in K \right\}$ L'INSIEME DELLE MATRICI 2×2 A COEFFICIENTI IN UN CAMPO K. DIAMO ALL'INSIEME UNA STRUTTURA DI ANELLO

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1+y_1 & x_2+y_2 \\ x_3+y_3 & x_4+y_4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1y_1+x_2y_3 & x_1y_2+x_2y_4 \\ x_3y_1+x_4y_3 & x_3y_2+x_4y_4 \end{vmatrix}$$

CON QUESTE OPERAZIONI, $M_{2\times2}(K)$ È UN ANELLO CON UNITÀ $\begin{vmatrix} 1_K & 0 \\ 0 & 1_K \end{vmatrix}$

IL PRODOTTO DI DUE MATRICI 2×2 COSÌ DEFINITO RICHIEDE DI ESEGUIRE 8 MOLTIPLICAZIONI. ANALOGAMENTE, POSSIAMO DOTARE L'INSIEME $M_{2\times2}(K)$ DELLE MATRICI $n\times n$ DI UNA STRUTTURA AD ANELLO. LA MOLTIPLICAZIONE RIGHE PER COLONNE RICHIEDE L'ESECUZIONE DI n^3 MOLTIPLICAZIONI

ESEMPIO: IN $M_{3\times3}(\mathbb{F}_2)$ ABBIAMO $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

ALGORITMO DI STRASSEN PER CALCOLARE IL PRODOTTO DI MATRICI 2×2

SIA $A := \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{vmatrix}$, $B := \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix}$, $AB = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{vmatrix}$. DEFINIAMO:

$I := (x_1+x_4)(y_1+y_4)$

$II := (x_3+x_4)y_1$

$\mathrm{III} := X_1(Y_2+Y_4)$

$\mathrm{IV} := X_4(-Y_1+Y_3)$

$\mathrm{V} := (X_1+X_2)Y_4$ ESEGUIRE 7 MOLTIPLICAZIONI

$\mathrm{VI} := (-X_1+X_3)(Y_1+Y_2)$

$\mathrm{VII} := (X_2-X_4)(Y_3+Y_4)$

ALLORA $Z_1 = \mathrm{I}+\mathrm{IV}-\mathrm{V}+\mathrm{VII}$ $Z_2 = \mathrm{III}+\mathrm{V}$

$Z_3 = \mathrm{II}+\mathrm{IV}$ $Z_4 = \mathrm{I}+\mathrm{III}-\mathrm{II}+\mathrm{VI}$

ESEMPIO: IN $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{F}_2)$ SIANO $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ $B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$. ALLORA

$\mathrm{I}=0, \mathrm{II}=0, \mathrm{III}=1, \mathrm{IV}=0, \mathrm{V}=0, \mathrm{VI}=0, \mathrm{VII}=0$

$$\Rightarrow \quad AB = \begin{vmatrix} \mathrm{I}+\mathrm{IV}-\mathrm{V}+\mathrm{VII} & \mathrm{III}+\mathrm{V} \\ \mathrm{III}+\mathrm{IV} & \mathrm{I}+\mathrm{III}-\mathrm{II}+\mathrm{VI} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

NELL'ALGORITMO DI STRASSEN, PER IL PRODOTTO DI MATRICI 2×2 DOBBIAMO ESEGUIRE 7 MOLTIPLICAZIONI. QUESTO PUÒ POI ESSERE USATO RICORSIVAMENTE PER MOLTIPLICARE MATRICI DI DIMENSIONI MAGGIORI. AD ESEMPIO, SE $M,N \in \mathcal{M}_{4\times4}(K)$ POSSIAMO SCRIVERE $M = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$ $N = \begin{vmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{vmatrix}$ DOVE $A, B, C, D, A', B', C', D' \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{F}_2)$.

POICHÉ $MN = \begin{vmatrix} AA'+BC' & AB'+BD' \\ CA'+DC' & CB'+DD' \end{vmatrix}$, POSSIAMO USARE L'ALGORITMO DI STRASSEN IN DUE PASSI:

PRIMO PASSO) $\mathrm{I}=(A+D)(A'+D')$ $\mathrm{II}=(C+D)A'$ $\mathrm{III}=A(B'+D')$

$\mathrm{IV}=D(-A'+C')$ $\mathrm{V}=(A+B)D'$ $\mathrm{VI}=(-A+C)(A'+B')$

$$\mathrm{VII}=(B-D)(C'+D') \Rightarrow MN=\begin{vmatrix} \mathrm{I}+\mathrm{IV}+\mathrm{V}+\mathrm{VII} & \mathrm{III}+\mathrm{V} \\ \mathrm{II}+\mathrm{IV} & \mathrm{I}+\mathrm{III}-\mathrm{II}-\mathrm{VI} \end{vmatrix}$$

SECONDO PASSO) CALCOLARE I PRODOTTI DI MATRICI 2×2 IN $\mathrm{I}, \mathrm{II}, \dots, \mathrm{VII}$ CON L'ALGORITMO DI STRASSEN

IN TOTALE, VERRANNO EFFETTUATE 7^2 MOLTIPLICAZIONI.

SE VOGLIAMO APPLICARE L'ALGORITMO PER CALCOLARE IL PRODOTTO TRA DUE MATRICI 3×3 BASTA AGGIUNGERE UNA RIGA ED UNA COLONNA DI ZERI IN MODO DA CONSIDERARLE MATRICI 4×4. IN GENERALE, LA MOLTIPLICAZIONE DI DUE MATRICI $n\times n$ USANDO L'ALGORITMO DI STRASSEN RICHIEDE, SE $n=2^k$, 7^k MOLTIPLICAZIONI.

$$7^k = 2^{\log_2(7^k)} = 2^{k\log_2 7} = n^{\log_2 7} \simeq n^{2,81}$$

DEFINIZIONE) L'ESPONENTE ω DELLA MOLTIPLICAZIONE DI MATRICI È

$\omega := \inf\{h \in \mathbb{R} \mid \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ PUÒ ESSERE MOLTIPLICATO USANDO $O(n^h)$ OPERAZIONI ARITMETICHE$\}$. L'ALGORITMO DI STRASSEN MOSTRA CHE

$\omega \leq \log_2 7 < 2,81$. PER $n=2$, L'ALGORITMO È OTTIMALE.

ANELLO DI ENDOMORFISMI DI UNO SPAZIO VETTORIALE

SIANO V, W SPAZI VETTORIALI SU UN CAMPO K. UNA FUNZIONE $f: V \to W$ È UN MORFISMO DI SPAZI VETTORIALI SE $f(av_1 + bv_2) = a f(v_1) + b f(v_2)$ $\forall a, b \in K;\ v_1, v_2 \in V$. UN MORFISMO $f: V \to V$ DI SPAZI VETTORIALI È DETTO ENDOMORFISMO DI V. L'INSIEME DEGLI ENDOMORFISMI DI UNO SPAZIO VETTORIALE V È INDICATO CON $\mathrm{END}(V)$. CON LE OPERAZIONI DI SOMMA E COMPOSIZIONE DI FUNZIONI, $\mathrm{END}(V)$ È UN ANELLO CON UNITÀ LA FUNZIONE IDENTITÀ $I_d: V \to V$ (SE $\dim V > 1$, TALE ANELLO NON È COMMUTATIVO).

SIA $\mathcal{M}_{n \times n}(K)$ L'INSIEME DELLE MATRICI $n \times n$ A COEFFICIENTI IN K. CON LE OPERAZIONI DI SOMMA E PRODOTTO RIGHE PER COLONNE, L'INSIEME $\mathcal{M}_{n\times n}(K)$ È UN ANELLO CON UNITÀ LA MATRICE IDENTITÀ $I_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

AD UN ENDOMORFISMO $f \in \mathrm{END}(V)$, SE $\dim(V) = n$ POSSIAMO ASSOCIARE UNA MATRICE NEL SEGUENTE MODO: SIA $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ UNA BASE DI V. SIA $f(e_i) = a_{1i} e_1 + a_{2i} e_2 + \dots + a_{ni} e_n$, $a_{1i}, \dots, a_{ni} \in K$ $\forall 1 \leq i \leq n$. ALLORA AD f ASSOCIAMO LA MATRICE $M(f) \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ LA CUI COLONNA i-ESIMA È $\begin{vmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{vmatrix}$

TEOREMA: SIA V UNO SPAZIO VETTORIALE DI DIMENSIONE n SUL CAMPO K.

ALLORA LA FUNZIONE $M: \begin{array}{ccc} \mathrm{END}(V) & \to & \mathcal{M}_{n\times n}(K) \\ f & \mapsto & \mathcal{M}(f) \end{array}$ È UN ISOMORFISMO DI ANELLI

ESEMPIO: SI CONSIDERI IL CAMPO $\mathbb{F}_4 := \frac{\mathbb{F}_2[x]}{\langle x^2+x+1\rangle}$. $\mathbb{F}_4$ È UNO SPAZIO VETTORIALE DI DIMENSIONE 2 SUL CAMPO $\mathbb{F}_2$. NELLA BASE $\{1, x\}$ DI $\mathbb{F}_4$, L'AUTOMORFISMO DI FRÖBENIUS $\Phi: \begin{array}{ccc} \mathbb{F}_4 & \to & \mathbb{F}_4 \\ v & \mapsto & v^2 \end{array}$, CHE È UN MORFISMO DI SPAZI VETTORIALI PERCHÉ $\Phi(y)=y \ \forall y \in \mathbb{F}_2$, È RAPPRESENTATO DALLA MATRICE

$M(\Phi)=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. INFATTI $\Phi(1)=1$ E $\Phi(x)=x^2=1+x$. POICHÉ $[M(\Phi)]^2=$

$=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, UNA RAPPRESENTAZIONE MATRICIALE DI $\underset{\text{AUTOMORFISMI COME CAMPO}}{\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_4)}$ È

$\left\{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right\}$. IN RAPPRESENTAZIONE MATRICIALE, GLI ENDOMORFISMI DI $\mathbb{F}_4$, COME SPAZIO VETTORIALE, SONO L'INSIEME DI 16 MATRICI $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{F}_2)=$

$=\left\{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{vmatrix} \,\middle|\, x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{F}_2\right\}$

AUTOMORFISMI DI $\mathbb{F}_4$ COME SPAZIO VETTORIALE DI $\mathbb{F}_2$

SIA $A:=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ UNA MATRICE INVERTIBILE A COEFFICIENTI IN $\mathbb{F}_2$. A RAPPRESENTA UN AUTOMORFISMO DI $\mathbb{F}_4$ COME SPAZIO VETTORIALE. A È INVERTIBILE $\Leftrightarrow \det A = ad-bc \neq 0 \Leftrightarrow \det A = 1$

- $a=0 \Rightarrow bc=1 \Rightarrow b=c=1$
- $b=0 \Rightarrow ad=1 \Rightarrow a=d=1$
- $c=0 \Rightarrow ad=1 \Rightarrow a=d=1$
- $d=0 \Rightarrow bc=1 \Rightarrow b=c=1$

QUINDI, COME SPAZIO VETTORIALE, $Aut(\mathbb{F}_4)=\left\{\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}\right\}$. INVECE, COME CAMPO AVEVAMO

$$Aut(\mathbb{F}_4)=\left\{\overset{\text{IDENTITÀ}}{\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}},\overset{\text{AUTOMORFISMO DI FRÖBENIUS}}{\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}}\right\}$$

SPAZIO DUALE DI UNO SPAZIO VETTORIALE

SIA V UNO SPAZIO VETTORIALE DI DIMENSIONE n SU UN CAMPO K. SIA $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ UNA BASE DI V. L'INSIEME $V^*:=\{f:V\to K \mid f$ È MORFISMO DI SPAZI VETTORIALI$\}$ È DETTO SPAZIO DUALE DI V. SIA $e_i^*:V\to K$ IL MORFISMO DEFINITO DA $e_i^*(e_j)=\begin{cases}1_K & i=j\\ 0 & \text{ALTRIMENTI}\end{cases}$ $\forall\, 1\le i\le n$. L'INSIEME $\{e_1^*,e_2^*,\dots,e_n^*\}$ È UNA BASE DI V^*. IN PARTICOLARE, $\dim V^*=\dim V=n$

ESEMPIO: SIA $V=(\mathbb{F}_2)^4$ E $f\in V^*$ DEFINITA COME $f(x)=\left\langle\begin{vmatrix}1\\1\\1\\1\end{vmatrix},x\right\rangle$ (PRODOTTO SCALARE CANONICO SU $(\mathbb{F}_2)^4$). DUNQUE, SE $x=\begin{vmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{vmatrix}$

$\Rightarrow f(x)=x_1+x_2+x_3+x_4$, $f=e_1^*+e_2^*+e_3^*+e_4^*$. AD ESEMPIO, $x=\begin{vmatrix}1\\1\\1\\1\end{vmatrix}$

$\Rightarrow f(x)=1+1+1+1=0$

FORME BILINEARI

SIA V UNO SPAZIO VETTORIALE DI DIMENSIONE n SU UN CAMPO K. INDICHIAMO CON $\{e_1,\dots,e_n\}$ UNA BASE DI V. UNA FUNZIONE $f:V\times V\to K$ È DETTA FORMA BILINEARE SE:

- $f(\alpha v_1, v_2) = f(v_1, \alpha v_2) = \alpha f(v_1, v_2)\ \forall \alpha \in K, v_1, v_2 \in V$
- $f(v_1 + v_2, w) = f(v_1, w) + f(v_2, w) \wedge f(w, v_1 + v_2) = f(w, v_1) + f(w, v_2)\ \forall v_1, v_2, w \in V$

SIANO $f, f_1, f_2 : V \times V \to K$ FORME BILINEARI. SE DEFINIAMO $f_1 + f_2 : V \times V \to K$ CON $(f_1 + f_2)(v, w) := f_1(v, w) + f_2(v, w)\ \forall v, w \in V$ E $\alpha f : V \times V \to K$ CON $(\alpha f)(v, w) = \alpha f(v, w)\ \forall v, w \in V, \alpha \in K$, ALLORA $f_1 + f_2$ E αf SONO FORME BILINEARI $\Rightarrow$ L'INSIEME DELLE FORME BILINEARI SU V È UNO SPAZIO VETTORIALE INDICATO COME $V^* \otimes V^*$ (PRODOTTO TENSORIALE DI V^* CON V^*). SIANO $1 \leq i, j \leq n$. INDICHIAMO CON $e_i^* \otimes e_j^* : V \times V \to K$ LA FORMA BILINEARE | $e_i^* \otimes e_j^*(e_h, e_k) = \delta_{ih} \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & i = h \wedge j = k \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$, DOVE È DEFINITO IL DELTA DI KRONECKER $\delta_{ih} = \begin{cases} 1 & i = h \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$. L'INSIEME $\{e_i^* \otimes e_j^* \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ È UNA BASE DELLO SPAZIO VETTORIALE $V^* \otimes V^*$.

ABBIAMO CHE $e_i^* \otimes e_j^*(e_h, e_k) = e_i^*(e_h) \cdot e_j^*(e_k)$. SE $u, v \in V^*$ ALLORA $u \otimes v(x, y) = u(x) \cdot v(y)\ \forall x, y \in V$. SE $u = u_1 e_1^* + \ldots + u_n e_n^*$ E $v = v_1 e_1^* + \ldots + v_n e_n^*$, ALLORA $u(x) v(y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_i v_j\, e_i^* \otimes e_j^*(x, y)$

$\Rightarrow (u_1 e_1^* + \ldots + u_n e_n^*) \otimes (v_1 e_1^* + \ldots + v_n e_n^*) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_i v_j\, e_i^* \otimes e_j^*$

ESEMPIO: DATI $v := v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$ E $w := w_1 e_1 + \dots + w_n e_n$, SIA $\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n$ IL PRODOTTO SCALARE CANONICO SU K^n.

ESSO È UNA FORMA BILINEARE SIMMETRICA SU V E, COME ELEMENTO DI $(K^n)^* \otimes (K^n)^*$ SI SCRIVE $e_1^* \otimes e_1^* + \dots + e_n^* \otimes e_n^*$.

AD UNA FORMA BILINEARE f SU V POSSIAMO ASSOCIARE UNA MATRICE $M(f) \in M_{n \times n}(K)$ COME SEGUE: LA COMPONENTE $M(f)_{ij}$ È L'ELEMENTO $f(e_i, e_j) \in K$. IN TAL MODO, $f(u,v) = \langle u, M(f) v \rangle$ $\forall u, v \in V$ COSSIA, $M(f)_{ij}$ È LA COORDINATA DI f NELLA BASE $\{e_i^* \otimes e_j^*\}$ DI $V^* \otimes V^*$

ESEMPI:

a) LA MATRICE DEL PRODOTTO SCALARE CANONICO È LA MATRICE IDENTITÀ

b) ALLA FORMA BILINEARE $e_1^* \otimes e_2^* - e_2^* \otimes e_1^* \in (K^2)^* \otimes (K^2)^*$ CORRISPONDE LA MATRICE $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$, ESEMPIO DI FORMA BILINEARE ANTISIMMETRICA

c) LA FORMA BILINEARE ANTISIMMETRICA $e_1^* \otimes e_3^* - e_3^* \otimes e_1^* + e_2^* \otimes e_4^* - e_4^* \otimes e_2^* \in (K^4)^* \otimes (K^4)^*$ È DETTA FORMA SIMPLETTICA, DI MATRICE

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

ABBIAMO QUINDI DEFINITO UN ISOMORFISMO DI SPAZI VETTORIALI

$$M: \begin{array}{ccc} V^*\otimes V^* & \to & \mathcal{M}_{n\times n}(K) \\ f & \mapsto & \mathcal{M}(f) \end{array} \Rightarrow \text{SE } A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(K),$$

LA FORMA BILINEARE $f \in V^*\otimes V^*$ ASSOCIATA AD A È

$$f(a_{11}e_1^* + \dots + a_{n1}e_n^*)\otimes e_1^* + \dots + f(a_{1n}e_1^* + \dots + a_{nn}e_n^*)\otimes e_n^*$$

ESEMPIO: $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{F}_3)$

$$f = (e_1^* + 2e_2^*)\otimes e_1^* + (2e_1^* + e_2^*)\otimes e_2^* = e_1^*\otimes e_1^* + 2e_2^*\otimes e_1^* +$$
$$+ 2e_1^*\otimes e_2 + e_2^*\otimes e_2^*$$

NOTA: ESSENDO $V^*\otimes V^*$ LO SPAZIO VETTORIALE DELLE FORME BILINEARI SU V, SI HA CHE:

- $a(e_i^*\otimes e_j^*) = (a e_i^*)\otimes e_j^* = e_i^*\otimes(a e_j^*)$
- $(e_i^* + e_j^*)\otimes e_k^* = e_i^*\otimes e_k^* + e_j^*\otimes e_k^*$
- $e_k^*\otimes(e_i^* + e_j^*) = e_k^*\otimes e_i^* + e_k^*\otimes e_j^*$

ESEMPIO: SIANO $v_1 := 3e_1^* + 2e_2^* + e_3^*$ E $v_2 := e_2^* - \sqrt{3}e_3^* \mid v_1, v_2 \in (\mathbb{R}^3)^*$

ALLORA $v_1\otimes v_2 = (3e_1^* + 2e_2^* + e_3^*)\otimes(e_2^* - \sqrt{3}e_3^*) = 3e_1^*\otimes e_2^* -$

$$- 3\sqrt{3}e_1^*\otimes e_3^* + 2e_2^*\otimes e_2^* - 2\sqrt{3}e_2^*\otimes e_3^* + e_3^*\otimes e_2^* - \sqrt{3}e_3^*\otimes e_3^*$$

DEFINIZIONE: SIANO $V_1, V_2, \dots, V_k$ SPAZI VETTORIALI SU UN CAMPO $\mathbb{F}$. UNA FUNZIONE $f: V_1\times V_2\times\dots\times V_k \to \mathbb{F}$ È DETTA FORMA MULTILINEARE SE:

- $f(\alpha v_1,\dots,v_k)=f(v_1,\alpha v_2,\dots,v_k)=\dots=f(v_1,v_2,\dots,\alpha v_k)=$
$=\alpha f(v_1,\dots,v_k)\ \forall \alpha\in\mathbb{F},\ v_i\in V_i$

- $f(v_1+w_1,\dots,v_k)=f(v_1,\dots,v_k)+f(w_1,\dots,v_k),\dots,$
$f(v_1,\dots,v_k+w_k)=f(v_1,\dots,v_k)+f(w_1,\dots,w_k)\ \forall v_i,w_i\in V_i$

PRODOTTO TENSORIALE

SIANO $V_1,\dots,V_k$ SPAZI VETTORIALI SU UN CAMPO $\mathbb{F}$. DEFINIAMO $V_1^*\otimes V_2^*\otimes\dots\otimes V_k^*:=$ SPAZIO VETTORIALE DELLE FORME MULTILINEARI $f: V_1\times V_2\times\dots\times V_k\to\mathbb{F}$. UNA BASE DI $V_1^*\otimes V_2^*\otimes\dots\otimes V_k^*$ È L'INSIEME $\{e^{1*}_{i_1}\otimes e^{2*}_{i_2}\otimes\dots\otimes e^{k*}_{i_k}\mid 1\le i_k\le \dim V_k\}$, DOVE $\{e^{1*}_1,\dots,e^{1*}_{\dim V_1}\}$ È UNA BASE DI V_1^*, $\{e^{2*}_1,\dots,e^{2*}_{\dim V_2}\}$ DI V_2^* ETC...

RANGO DI UNA MATRICE

SIA $A\in\mathcal{M}_{h\times k}(\mathbb{F})$. IL RANGO DI UNA MATRICE È DEFINITO COME $rk(A):=$ NUMERO MASSIMO DI RIGHE/COLONNE LINEARMENTE INDIPENDENTI. SI VERIFICA FACILMENTE CHE OGNI MATRICE SI PUÒ SCRIVERE COME COMBINAZIONE LINEARE DI MATRICI DI RANGO 1. SIA $X:=\{A\in\mathcal{M}_{h\times k}(\mathbb{F})\mid rk(A)=1\}$. ALLORA SI HA CHE $rk(A)=\min\{k\in\mathbb{N}\mid A=\sum_{i=1}^{k}M_i,\ M_i\in X\ \forall 1\le i\le k\}$