$$\begin{array}{c} \\ A = \end{array}\left|\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{c} \hat{A}_1 \\ \\ \hat{A}_{nc} \end{array}$$

- $$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \gamma & 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{C} = \begin{vmatrix} B & AB & A^2B \end{vmatrix} \qquad \mathcal{C} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+\gamma \\ 1 & 0 & \gamma \\ 0 & \gamma & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{O} = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{vmatrix} \qquad \mathcal{O} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \gamma & 2 \\ 1 & 2\gamma & \gamma+1 \end{vmatrix}$$

$\det(\mathcal{C}) = -\gamma(\gamma - 1 - \gamma) = \gamma \Rightarrow$ SISTEMA COMPLETAMENTE CONTROLLABILE $\forall \gamma \neq 0$

$\det(\mathcal{O}) = \gamma^2 \cancel{+\gamma} - 4\gamma \cancel{-\gamma} - 1 + 2 + 2\gamma - \gamma = \gamma^2 - 3\gamma + 1 \neq 0$

$\gamma \neq \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow$ SISTEMA COMPLETAMENTE OSSERVABILE $\forall \gamma \neq \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

ESAME DEL 09/11/2015

1. SIA DATA LA RAPPRESENTAZIONE IN VARIABILI DI STATO DI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 4x_1(t) + 6x_2(t) + 2u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -3x_1(t) - 5x_2(t) - 2u(t) \\ \dot{x}_3(t) = -3x_1(t) - 6x_2(t) - 5x_3(t) \\ y(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

- STUDIARE LA STABILITÀ, LA CONTROLLABILITÀ E L'OSSERVABILITÀ DEL SISTEMA
- NEL CASO IN CUI IL SISTEMA NON SIA COMPLETAMENTE CONTROLLABILE, STABILIRE SE I MODI NON CONTROLLABILI DEL SISTEMA SONO STABILI O INSTABILI
- NEL CASO IN CUI IL SISTEMA NON SIA COMPLETAMENTE OSSERVABILE, STABILIRE SE I MODI OSSERVABILI DEL SISTEMA SONO STABILI O INSTABILI
- STABILIRE QUALI SONO I MODI DEL SISTEMA CHE SONO CONTEMPORANEAMENTE OSSERVABILI E CONTROLLABILI E, INOLTRE, QUALI SONO I MODI CONTEMPORANEAMENTE NON CONTROLLABILI E NON OSSERVABILI

2. SIA DATA LA RAPPRESENTAZIONE IN VARIABILI DI STATO DI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -3 \end{vmatrix} x(k) + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{vmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} x(k) \end{cases}$$

• DATO LO STATO INIZIALE $x(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$, DETERMINARE LA RISPOSTA LIBERA NELLO STATO E NELL'USCITA IN FUNZIONE DEL TEMPO

• STABILIRE SE È POSSIBILE DETERMINARE UNA OPPORTUNA LEGGE IN RETROAZIONE $u(t) = -Kx(t)$ TALE PER CUI GLI AUTOVALORI DEL SISTEMA A CICLO CHIUSO SIANO ASSEGNABILI AD ARBITRIO. NEL CASO IN CUI QUESTO SIA POSSIBILE, SI DETERMINI LA MATRICE K TALE PER CUI GLI AUTOVALORI DEL SISTEMA A CICLO CHIUSO SIANO PARI A $\lambda_{1DES} = 0$, $\lambda_{2DES} = -1$, $\lambda_{3DES} = -2$

(1) $A = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{vmatrix}$ $B = \begin{vmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{vmatrix}$ $C = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$

• STABILITÀ $P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{vmatrix} \lambda-4 & -6 & 0 \\ 3 & \lambda+5 & 0 \\ 3 & 6 & \lambda+5 \end{vmatrix} = (\lambda+5)\left((\lambda-4)(\lambda+5)+18\right)$

$P(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 3\lambda - 10 = (\lambda+2)(\lambda^2+4\lambda-5) = (\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda+5)$

$\lambda_1 = -2 < 0$

$\lambda_2 = 1 > 0 \Longrightarrow$ SISTEMA INSTABILE

$\lambda_3 = -5 < 0$

CONTROLLABILITÀ $\mathcal{C} = \begin{vmatrix} B & AB & A^2B \end{vmatrix}$ $AB = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 \\ 4 \\ 6 \end{vmatrix}$

$A^2B = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -4 \\ 4 \\ 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 \\ -8 \\ -42 \end{vmatrix}$

$\Longrightarrow \mathcal{C} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 8 \\ -2 & 4 & -8 \\ 0 & 6 & -42 \end{vmatrix}$ $\det(\mathcal{C}) = -6(-16+16) - 42(8-8) = 0 \Longrightarrow$ SISTEMA NON COMPLETAMENTE CONTROLLABILE

$rk(\mathcal{C}) = rk \begin{vmatrix} 2 & -4 & 8 \\ -2 & 4 & -8 \\ 0 & 6 & -42 \end{vmatrix} = rk \begin{vmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -30 \end{vmatrix} = 2$

OSSERVABILITÀ $\mathcal{O} = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{vmatrix}$ $CA = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

$CA^2 = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

$\Longrightarrow \mathcal{O} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 0 \\ -1 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

$rk(\mathcal{O}) = rk \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 0 \\ -1 & -5 & 0 \end{vmatrix} = rk \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 9/2 & 0 \\ 0 & -9/2 & 0 \end{vmatrix} = rk \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 9/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 < 3 \Longrightarrow$ SISTEMA NON COMPLETAMENTE OSSERVABILE

Scansionato con CamScanner

• $T^{-1} = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix}$ $\quad t_1 = \begin{vmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad t_2 = \begin{vmatrix} -4 \\ 4 \\ 6 \end{vmatrix}$ $\quad t_3 = \begin{cases} \langle t_1, t_3 \rangle = 0 \\ \langle t_2, t_3 \rangle = 0 \end{cases}$ $\quad t_3 = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$

$\begin{cases} 2a - 2b = 0 \\ -4a + 4b + 6c = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a = b \\ 6c = 0 \end{cases}$ $\rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow t_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\Rightarrow T^{-1} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix}$

$\det(T^{-1}) = -6(2+2) = -24$

$T = -\frac{1}{24} \det \begin{vmatrix} -6 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & -4 \\ -12 & -12 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow T = \begin{vmatrix} 1/4 & -1/4 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/6 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{vmatrix}$

$\hat{A} = T \cdot A \cdot T^{-1} = \begin{vmatrix} 1/4 & -1/4 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/6 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3/4 & 3/4 & -\frac{9}{3} \\ -1/2 & -1 & 5/6 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix}$

$\hat{A} = \left|\begin{array}{cc|c} 0 & -10 & 3/2 \\ 1 & 5 & -3/2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$ ($\hat{A}_c$, $\hat{A}_{nc}$) $\rightarrow \det(-\hat{A}_{nc} + \lambda I) = \lambda - 1 \qquad \lambda = 1 > 0 \Rightarrow$ INSTABILE

• $T^{-1} = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix}$ $\quad t_1 = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad t_2 = \begin{vmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad t_3 = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$ $\quad t_3 = \begin{cases} \langle t_1, t_3 \rangle = 0 \\ \langle t_2, t_3 \rangle = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ -a - 5b = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} -10b + b = 0 \\ a = -5b \end{cases}$ $\quad \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$ $\rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c \in \mathbb{R} = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow T^{-1} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad \det(T^{-1}) = -9 \quad T = -\frac{1}{9} \begin{vmatrix} -5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5/9 & -1/9 & 0 \\ 1/9 & -2/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$\hat{A} = T \cdot A \cdot T^{-1} = \begin{vmatrix} 5/9 & -1/9 & 0 \\ 1/9 & -2/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7/9 & 16/9 & 0 \\ -2/9 & -4/9 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$\hat{A} = \left|\begin{array}{cc|c} \frac{23}{9} & \frac{21}{9} & 0 \\ -\frac{8}{9} & \frac{22}{9} & 0 \\ \hline -12 & 33 & -5 \end{array}\right|$ ($\hat{A}_o$, $\hat{A}_1$, $\hat{A}_{no}$) $= \det(\lambda I - \hat{A}_o) = \left(\frac{23}{9} \cdot \frac{22}{9}\right)\lambda^2 + \frac{8 \cdot 21}{9} = 0 \quad (23 \cdot 22)\lambda^2 + 8 \cdot 21 = 0$

$(23 \cdot 11)\lambda^2 + 4 \cdot 21 = 0 \qquad \lambda = \pm\sqrt{-\frac{4 \cdot 21}{23 \cdot 11}} \qquad \mathrm{Re}[\lambda] = 0,\ r_\lambda = 2 \Rightarrow$ INSTABILE

• $\lambda = -2$ CONTEMPORANEAMENTE OSSERVABILE E CONTROLLABILE

$\nexists$ MODI CONTEMPORANEAMENTE NON OSSERVABILI E NON CONTROLLABILE

②

• $X_L(z) = z \cdot (zI - A)^{-1} \cdot x(0) \rightarrow x_L(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X_L(z)]$

$y_L(k) = C \cdot x_L(k)$

$(zI - A) = \begin{vmatrix} z-4 & -6 & 0 \\ 3 & z+5 & 0 \\ 3 & 6 & z+5 \end{vmatrix} \qquad \det(zI - A) = (z+5)(z^2 + z - 2)$

$$\Rightarrow (zI-A)^{-1} = \frac{1}{(z+5)(z^2+z-2)} \cdot \begin{vmatrix} (z+5)^2 & 6(z+5) & 0 \\ -3(z+5) & (z^2+z-2) & 0 \\ 3(z+1) & 6(z+1) & z^2+z-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{z+5}{z^2+z-2} & \frac{6}{z^2+z-2} & 0 \\ -\frac{3}{z^2+z-2} & \frac{1}{z+5} & 0 \\ \frac{3(z+1)}{(z+5)(z^2+z-2)} & \frac{6(z+1)}{(z+5)(z^2+z-2)} & \frac{1}{z+5} \end{vmatrix}$$

$$z \cdot (zI-A)^{-1} \cdot x(0) = z \cdot (zI-A)^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = z \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{z+5} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{z}{z+5} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow X_L(z) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{z}{z+5} \end{vmatrix} \qquad \Rightarrow X_L(k) = \qquad = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -5^k \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow Y_L(k) = C \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -5^k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -5^k \end{vmatrix} = 0$$

•

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{vmatrix} \lambda-4 & -6 & 0 \\ 3 & \lambda+5 & 0 \\ 3 & 6 & \lambda+5 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda+5) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 3\lambda - 10$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = -5 \end{matrix}\right\} \neq \lambda_{DES} \qquad C = \begin{vmatrix} B & AB & A^2B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ -2 & 7 & -29 \end{vmatrix}$$

$\det(C) = (3 \cdot 29 - 21) - 4(6) - 2(-6) = 54 \neq 0 \Rightarrow$ POSSIAMO PROCEDERE

$\alpha_0 = -10 \qquad \alpha_1 = 3 \qquad \alpha_2 = 6$

$q(\lambda) = (\lambda - \lambda_{1DES})(\lambda - \lambda_{2DES})(\lambda - \lambda_{3DES}) = \lambda(\lambda+1)(\lambda+2) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda$

$\beta_0 = 0 \qquad \beta_1 = 2 \qquad \beta_2 = 3$

$$T^{-1} = C \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ -2 & 7 & -29 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 25 & 10 & 1 \\ -15 & -3 & 0 \\ 7 & -5 & -2 \end{vmatrix}$$

$\det(T^{-1}) = 75 + 21 + 150 - 300 = -54$

$$T = -\frac{1}{54} \begin{vmatrix} 6 & 20 & 3 \\ -30 & -97 & -15 \\ 96 & -195 & -77 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1/9 & 10/27 & 1/18 \\ -3/9 & 97/54 & 9/18 \\ 16/9 & 65/18 & 77/18 \end{vmatrix}$$

$$K = \left[(\beta_0 - \alpha_0) \quad (\beta_1 - \alpha_1) \quad (\beta_2 - \alpha_2) \right] \cdot T = \begin{vmatrix} 10 & -1 & -3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{10}{27} & \frac{1}{18} \\ -\frac{3}{9} & \frac{97}{54} & \frac{9}{18} \\ \frac{16}{9} & \frac{65}{18} & \frac{77}{18} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-53}{9} & \frac{-241}{27} & \frac{-37}{9} \end{vmatrix}$$

ESAME DEL 23/01/2020

① SIA DATA LA RAPPRESENTAZIONE INGRESSO-USCITA DI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$$y'''(t) + 7y''(t) + 15y'(t) + 9y(t) = -2u'(t) + u(t)$$

- STUDIARE I MODI DEL SISTEMA
- DETERMINARE L'EVOLUZIONE LIBERA A PARTIRE DALL'ISTANTE INIZIALE $t_0 = 0$ DATE LE SEGUENTI CONDIZIONI INIZIALI $y(t_0) = 4$, $y'(t_0) = -6$, $y''(t_0) = 27$
- DETERMINARE LA RISPOSTA IMPULSIVA DEL SISTEMA
- DETERMINARE LA RISPOSTA FORZATA DEL SISTEMA CONSEGUENTE ALL'AZIONE DI UN INGRESSO $u(t) = \frac{1}{840} e^{t} \delta_{-1}(t)$ PER $t \geq t_0$
- DETERMINARE LE MATRICI (A, B, C, D) DEL SISTEMA IN VARIABILI DI STATO

② SIA DATA LA RAPPRESENTAZIONE IN VARIABILI DI STATO DI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 6x_3(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = 2\alpha x_2(k) + 4\gamma u(k) \\ x_3(k+1) = x_1(k) \\ y(k) = -\frac{3}{43} x_1(k) - \beta x_3(k) \end{cases}$$

CON $x(0) = \begin{vmatrix} 1/4 \\ \gamma/4 \\ 0 \end{vmatrix}$

- DETERMINARE IL VALORE DELLA RISPOSTA LIBERA NELLO STATO AL TEMPO $k=5$
- DETERMINARE IL VALORE DELLA RISPOSTA FORZATA NELL'USCITA AL TEMPO $k=5$, RELATIVA ALL'INGRESSO AL GRADINO $u(k) = 1$ PER $k \geq 0$
- POSTO $\alpha = \beta = \gamma = 0$, DETERMINARE IL VALORE DELLA RISPOSTA TOTALE NELL'USCITA AL TEMPO $k=6$, RELATIVA ALL'INGRESSO AL GRADINO $u(k) = \sin(k\pi)$ PER $k \geq 0$

① • $P(\lambda) = \lambda^3 + 7\lambda^2 + 15\lambda + 9$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 7 & 15 & 9 \\ -1 & & -1 & -6 & -9 \\ \hline & 1 & 6 & 9 & 0 \end{array}$$

$= (\lambda+1)(\lambda^2 + 6\lambda + 9) = (\lambda+1)(\lambda+3)^2$

$- \lambda_1 = -1;\ \nu_1 = 1 \rightarrow C_1(t) = A_1 e^{-t}$

$- \lambda_2 = -3;\ \nu_2 = 2 \rightarrow C_2(t) = A_{2,1} e^{-3t}, A_{2,2} t e^{-3t}$

• $y_l(t) = C(t)\Big|_{y(0)=4,\ y'(0)=-6,\ y''(0)=27}$ $\qquad C(t) = A_1 e^{-t} + A_{2,1} e^{-3t} + A_{2,2} t e^{-3t}$

$\Rightarrow C'(t) = -A_1 e^{-t} - 3A_{2,1} e^{-3t} + A_{2,2} e^{-3t} - 3A_{2,2} t e^{-3t}$

$\Rightarrow C''(t) = A_1 e^{-t} + 9A_{2,1} e^{-3t} - 6A_{2,2} e^{-3t} + 9A_{2,2} t e^{-3t}$

$$\begin{array}{l} C(0) \\ C'(0) \\ C''(0) \end{array} \begin{cases} A_1 + A_{2,1} = 4 \\ -A_1 - 3A_{2,1} + A_{2,2} = -6 \\ A_1 + 9A_{2,1} - 6A_{2,2} = 27 \end{cases} \qquad \begin{cases} -A_1 = A_{2,1} - 4 \\ A_{2,1} - 4 - 3A_{2,1} + A_{2,2} = -6 \\ -A_{2,1} + 4 + 9A_{2,1} - 6A_{2,2} = 27 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 = 4 - A_{2,1} \\ A_{2,2} = 2A_{2,1} - 2 \\ 8A_{2,1} - 12A_{2,1} + 12 = 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 27/4 \\ A_{2,1} = -11/4 \\ A_{2,2} = -15/2 \end{cases} \Rightarrow y_l(t) = \frac{27}{4} e^{-t} - \frac{11}{4} e^{-3t} - \frac{15}{2} t e^{-3t}$$

- $y_\delta(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ c(t)\,\delta_{-1}(t) + A_0\,\delta(t) & t\geq 0 \end{cases}$ POICHÉ IL SISTEMA È STRETTAMENTE PROPRIO, CI ASPETTIAMO

$c(t) = A_1 e^{-t} + A_{2,1} e^{-3t} + A_{2,2}\, t\, e^{-3t}$

$$\begin{vmatrix} b_0 \\ b_1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_0 \\ c(0) \\ c'(0) \\ c''(0) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 15 & 7 & 1 \\ 15 & 7 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1 + A_{2,1} \\ -A_1 - 3A_{2,1} + A_{2,2} \\ A_1 + 9A_{2,1} - 6A_{2,2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 15 & 7 & 1 \\ 15 & 7 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & -6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_{2,1} \\ A_{2,2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 9 & 3 & 1 \\ 15 & 6 & 4 & 1 \\ 7 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_{2,1} \\ A_{2,2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 9A_0 + 9A_1 + 3A_{2,1} + A_{2,2} = 1 \\ 15A_0 + 6A_1 + 4A_{2,1} + A_{2,2} = -2 \\ 7A_0 + A_1 + A_{2,1} = 0 \\ A_0 = 0 \end{cases} \checkmark$$

$$\begin{cases} 9A_1 + 3A_{2,1} + A_{2,2} = 1 \\ 6A_1 + 4A_{2,1} + A_{2,2} = -2 \\ A_1 + A_{2,1} = 0 \end{cases}$$

SISTEMA DEL TIPO $A \cdot x = b$ RISOLVIBILE COL METODO DI CRAMER

$$A = \begin{vmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad X = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_{2,1} \\ A_{2,2} \end{vmatrix}$$

$\det(A) = (3-4) - (9-6) = -4 \neq 0 \checkmark$

$$A_1 = \frac{\det\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4} \qquad A_{2,1} = \frac{\det\begin{vmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

$$A_{2,2} = \frac{\det\begin{vmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{(-6-4)-(-18-6)}{-4} = -\frac{7}{2} \implies y_\delta(t) = \left(\frac{3}{4}e^{-t} - \frac{3}{4}e^{-3t} - \frac{7}{2}\,t\,e^{-3t}\right)\delta_{-1}(t)$$

- $y_f(t) = \int_0^t U(t-\tau)\, y_\delta(t) = \int_0^t \frac{1}{840} e^{(t-\tau)} \delta_{-1} \left(\frac{3}{4} e^{-\tau} - \frac{3}{4} e^{-3\tau} - \frac{7}{2} \tau e^{-3\tau} \right) d\tau =$

$$= \frac{1}{840} e^{t} \underbrace{\int_0^t e^{-\tau} \left(\frac{3}{4} e^{-\tau} - \frac{3}{4} e^{-3\tau} - \frac{7}{2} \tau e^{-3\tau} \right) d\tau}_{I}$$

$I = I_1 + I_2 + I_3$

$I_1 = \int_0^t \frac{3}{4} e^{-2\tau} d\tau = -\frac{3}{8} \left[e^{-2\tau} \right]_0^t = -\frac{3}{8} \left(e^{-2t} - 1 \right) = -\frac{3}{8} e^{-2t} + \frac{3}{8}$

$I_2 = \int_0^t -\frac{3}{4} e^{-4\tau} d\tau = \frac{3}{16} \left(e^{-4t} - 1 \right) = \frac{3}{16} e^{-4t} - \frac{3}{16}$

$g'(\tau) = e^{-4\tau} \Rightarrow -\frac{1}{4} e^{-4\tau}$
$g(\tau) =$

INTEGRALE PER PARTI: $f(\tau) = \tau \Rightarrow f'(\tau) = 1$;

$I_3 = \int_0^t -\frac{7}{2} \tau e^{-4\tau} = -\frac{7}{2} \int_0^t \tau e^{-4\tau} d\tau = -\frac{7}{2} \left[-\frac{1}{4} \tau e^{-4\tau} - \frac{1}{16} e^{-4\tau} \right]_0^t =$

$= \frac{7}{2} \left(\frac{1}{4} t e^{-4t} + \frac{1}{16} e^{-4t} - 1 \right) = \frac{7}{8} t e^{-4t} + \frac{7}{32} e^{-4t} - \frac{7}{2}$

$\Rightarrow I = -\frac{3}{8} e^{-2t} + \frac{13}{32} e^{-4t} + \frac{7}{8} t e^{-4t} - \frac{53}{16}$

$\Rightarrow y_f(t) = \frac{1}{840} e^{t} \left(-\frac{3}{8} e^{-2t} + \frac{13}{32} e^{-4t} + \frac{7}{8} t e^{-4t} - \frac{53}{16} \right) =$

$= -\frac{1}{2240} e^{-t} + \frac{13}{26880} e^{-3t} + \frac{1}{960} t e^{-3t} - \frac{53}{13440} e^{t}$

- DEFINIAMO LE VARIABILI DI STATO $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = y'(t) = \dot{x}_1(t) \\ x_3(t) = y''(t) = \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = y'''(t) = -\frac{9}{1} y(t) - \frac{15}{1} y'(t) - \frac{7}{1} y''(t) + \frac{1}{1} u(t) - \frac{2}{1} u'(t) \end{cases}$$

MATRICE DI REALIZZAZIONE: CASO $n \geq m > 0$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -9 & -13 & -7 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right| \Rightarrow A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -9 & -15 & -7 \end{vmatrix}, \; B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}, \; D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$$

② $A = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 0 & 22 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 48 \\ 0 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} -\frac{3}{43} & 0 & -\beta \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$

- $X_L(k) = A^k X(0)$

$$A^k = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6^k \\ 0 & (2\alpha)^k & 0 \\ \gamma^k & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ PER K DISPARI} \qquad A^k = \begin{vmatrix} 6^k & 0 & 0 \\ 0 & (2\alpha)^k & 0 \\ 0 & 0 & 1^k \end{vmatrix} \text{ PER K PARI}$$

$$\Rightarrow X_L(5) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6^5 \\ 0 & 32\alpha^5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1/4 \\ \gamma/4 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad X_L(5) = \begin{vmatrix} 0 \\ 8\alpha^5\gamma \\ 1/4 \end{vmatrix}$$

- $$X_F(k) = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i+1} \cdot B \cdot u(k) \Rightarrow X_F(5) = \sum_{i=0}^{4} A^{5-i+1} \cdot B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2\alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 4\gamma \\ 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 4\gamma \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 36 \\ 0 & 8\alpha^3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 4\gamma \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & 16\alpha^4 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 4\gamma \\ 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 6 \\ 16\alpha^2\gamma \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 32\alpha^3\gamma \\ 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 8\alpha\gamma \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 36 \\ 64\alpha^4\gamma \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 42 \\ \alpha\gamma(8+16\alpha+32\alpha^2+64\alpha^3) \\ 0 \end{vmatrix} \quad Y_L(k) = C \cdot X_F(k) = -\frac{126}{43}$$

- $$\alpha = \beta = \gamma = 0 \Rightarrow A = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} -\frac{3}{43} & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$$

$$X_{TOT}(6) = X_L(6) + X_F(6) \qquad X(0) = \begin{vmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$X_L(6) = A^6 X(0)$$

$$A^6 = A^5 \cdot A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6^5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow X_L(6) = \begin{vmatrix} 6^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{6^6}{4} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$X_F(6) = \sum_{i=0}^{5} A^{6-i+1} \cdot B \cdot u(k) = \sum_{i=0}^{5} A^{6-i+1} \cdot B \cdot \underbrace{\sin(6\pi)}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow X_{TOT}(6) = \begin{vmatrix} 6^6/4 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

ESAME DEL 12/03/2020

1. SIA DATA LA RAPPRESENTAZIONE INGRESSO USCITA DI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO
$y'''(t) + 12y''(t) + 45y'(t) + 50y(t) = 9u(t)$
- DETERMINARE I MODI DEL SISTEMA E QUALI DI QUESTI SONO DIVERGENTI

- Determinare l'evoluzione libera a partire dall'istante iniziale $t_0=0$ date le seguenti condizioni iniziali $y(t_0)=9$; $y'(t_0)=-9$; $y''(t_0)=-9$
- Determinare la risposta impulsiva del sistema
- Determinare la risposta forzata del sistema conseguente all'azione di un ingresso $u(t)=\delta_{-1}(t)$ per $t\geq 0$
- Determinare le matrici (A,B,C,D) del sistema in variabili di stato

2. Sia data la rappresentazione in variabili di stato di un sistema lineare e stazionario

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 2x_1(k) + \alpha \cdot x_2(k) + 3u(k) \\ x_2(k+1) = (\alpha+2)x_2(k) + 5u(k) \\ y(k) = (\alpha+1)x_1(k) + (\alpha-1)x_2(k) + 2u(k) \end{cases}$$

- Determinare il valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ affinché il sistema sia contemporaneamente controllabile e osservabile
- Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il sistema risulta semplicemente stabile e per quali risulta asintoticamente stabile
- Per $\alpha=0$, determinare il valore della risposta nell'uscita supponendo $x(0)=\begin{vmatrix} 2 \\ -2 \end{vmatrix}$ ed ingresso $u(k)=1$ per $k\geq 0$

1.
- $P(\lambda) = \lambda^3 + 12\lambda^2 + 45\lambda + 50 = (\lambda+2)(\lambda^2+10\lambda+25) = (\lambda+2)(\lambda+5)^2$

$\lambda_1=-2;\ \nu_1=1$

$\lambda_2=-5;\ \nu_2=2$

$\Rightarrow$ entrambi i modi sono convergenti poiché $\lambda_i<0\ ;\ i=1,2$ $\quad c_1(t)=e^{-2t}$ $\quad c_2(t)=e^{-5t}+te^{-5t}$

- $y_\ell(t) = c(t)\Big|_{y(0)=9;\ y'(0)=-9;\ y''(0)=-9}$

$$c(t) = A_1 e^{-2t} + A_{2,1} e^{-5t} + A_{2,2}\, t e^{-5t}$$

$$c'(t) = -2A_1 e^{-2t} - 5A_{2,1} e^{-5t} + A_{2,2} e^{-5t} - 5A_{2,2}\, t e^{-5t}$$

$$c''(t) = 4A_1 e^{-2t} + 25A_{2,1} e^{-5t} - 10A_{2,2} e^{-5t} + 25A_{2,2}\, t e^{-5t}$$

$$\begin{cases} A_1 + A_{2,1} + A_{2,2} = 9 \\ -2A_1 - 5A_{2,1} + A_{2,2} = -9 \\ 4A_1 + 25A_{2,1} - 10A_{2,2} = -9 \end{cases}$$

Sistema del tipo $Ax=b$ $\quad x=\begin{vmatrix} A_1 \\ A_{2,1} \\ A_{2,2} \end{vmatrix}$ $\quad b=\begin{vmatrix} 9 \\ -9 \\ -9 \end{vmatrix}$

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & 1 \\ 4 & 25 & -10 \end{vmatrix} \qquad \det A = (50-25)-(20-4)+(-50+20) = -21$$

$$A_1 = \frac{\det\begin{vmatrix} 9 & 1 & 1 \\ -9 & -5 & 1 \\ -9 & 25 & -10 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{9(50-25)-(90+9)+(-225-45)}{21} = -\frac{48}{7}$$

$$A_2 = \frac{\det\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 \\ -2 & -9 & 1 \\ 4 & -9 & -10 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{(90+9)-9(20-4)+(18+36)}{21} = \frac{3}{7}$$

$$A_3 = \frac{\det\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ -2 & -5 & -9 \\ 4 & 25 & -9 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{(45+225)-(18+36)+9(-50+20)}{21} = -\frac{18}{7}$$

$$\Rightarrow y_\ell(t) = -\frac{48}{7}e^{-2t} + \frac{3}{7}e^{-5t} - \frac{18}{7}te^{-5t}$$

- $y_\delta(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ c(t)\,\delta_{-1}(t) & t \geq 0 \end{cases}$ * $A_0\delta(t) = 0$ POICHÉ IL SISTEMA È STRETTAMENTE PROPRIO

$$c(t) = A_1 e^{-2t} + A_{2,1} e^{-5t} + A_{2,2}\, t\, e^{-5t}$$

$$\begin{vmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_0 \\ c(0) \\ c'(0) \\ c''(0) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 50 & 45 & 12 & 1 \\ 45 & 12 & 1 & 0 \\ 12 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1 + A_{2,1} + A_{2,2} \\ -2A_1 - 5A_{2,1} + A_{2,2} \\ 4A_1 + 25A_{2,1} - 10A_{2,2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 50 & 45 & 12 & 1 \\ 45 & 12 & 1 & 0 \\ 12 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \\ 0 & 4 & +25 & -10 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_{2,1} \\ A_{2,2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 50 & 25 & 10 & 47 \\ 45 & 10 & 7 & 13 \\ 12 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_{2,1} \\ A_{2,2} \end{vmatrix}$$

$$\det \begin{vmatrix} 50 & 25 & 10 & 47 \\ 45 & 10 & 7 & 13 \\ 12 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 25 & 10 & 47 \\ 10 & 7 & 13 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 21$$

$$A_0 = \frac{\det \begin{vmatrix} 9 & 25 & 10 & 47 \\ 0 & 10 & 7 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{21} = 0 \;\checkmark \qquad A_1 = \frac{\det \begin{vmatrix} 50 & 9 & 10 & 47 \\ 45 & 0 & 7 & 13 \\ 12 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{21} = \frac{\det \begin{vmatrix} 9 & 10 & 47 \\ 0 & 7 & 13 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{21} = \frac{-54}{21}$$

$$A_{2,1} = \frac{\det \begin{vmatrix} 50 & 25 & 9 & 47 \\ 45 & 10 & 0 & 13 \\ 12 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{21} = \frac{\det \begin{vmatrix} 25 & 9 & 47 \\ 10 & 0 & 13 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{21} = \frac{27}{21}$$

$$A_{2,2} = \frac{\det \begin{vmatrix} 50 & 25 & 10 & 9 \\ 45 & 10 & 7 & 0 \\ 12 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{21} = \frac{\det \begin{vmatrix} 25 & 10 & 9 \\ 10 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{21} = \frac{27}{21}$$

$$\Rightarrow y_\delta(t) = \frac{1}{21}\left(-54 e^{-2t} + 27 e^{-5t} + 27 t e^{-5t}\right)$$