$M \models_1 (\Box x \vee \Box y) \Leftrightarrow (M \models_1 x \wedge M \models_2 x) \vee (M \models_1 y \wedge M \models_2 y)$

$\Rightarrow M \not\models_1 (\Box x \vee \Box y)$

$$\Box(\Box A \Rightarrow A) \Rightarrow \Box A$$

$\overset{\circlearrowleft}{1} \to 2 \to 3$, $V(x) = \{2,3\}$ $M \models_1 \Box(\Box x \Rightarrow x) \Leftrightarrow M \models_1 (\Box x \Rightarrow x)$ E $M \models_2 (\Box x \Rightarrow x) \Rightarrow M \models_1 \Box(\Box x \Rightarrow x)$. Invece, $M \not\models_1 \Box x$ perché $M \not\models_1 x$

CORRISPONDENZA E NON ESPRIMIBILITÀ

Diciamo che un frame (S,R) gode di una certa proprietà se ne gode la relazione R. In molti casi, una proprietà di un frame equivale alla validità di uno schema di formule modali nei frame con quella proprietà

TEOREMA 2: lo schema $\Box A \Rightarrow A$ è valido in un frame $(S,R) \Leftrightarrow R$ riflessiva

DIM

Nella logica della necessità vogliamo sempre che $\Box x \Rightarrow x$. Per garantire ciò, R deve essere riflessiva ($(y,y) \in R \ \forall y \in S$). Infatti, in caso negativo esisterebbe un mondo $y \in S \mid (y,y) \notin R$. Sia $Z := V(x)$, $Z \subseteq S \mid y \notin Z$. Sia $Z \supseteq \{z \in S \mid (y,z) \in R\}$, cioè x sia vera in tutti i mondi accessibili da y. Allora $M = (S,R,V) \Rightarrow M \models_y \Box x$, ma $M \models_y x$.

Nella logica deontica, dove non vogliamo che la formula $\Box X \Rightarrow X$ sia vera, non prenderemo una relazione riflessiva. ∎

Teorema 3: Lo schema $A \Rightarrow \Box\Diamond A$ è valido in un frame (S,R)

$\Leftrightarrow$ R è simmetrica

DIM

$\Leftarrow)$ Sia R simmetrica: $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$. Sia $M \models_w A$ e $(w,v) \in R$.

Dunque $(v,w) \in R \land M \models_v \Diamond A \ \forall v \in S \mid (w,v) \in R \Rightarrow M \models_w \Box\Diamond A$

$\Rightarrow)$ Sia X una variabile e $V(X) = \{s\}$; sia $t \in S \mid (s,t) \in R \Rightarrow M \models_s X$.

Dalla validità dello schema, $M \models_s \Box\Diamond X$ da cui $M \models_t \Diamond X$

$\Rightarrow \exists r \in S \mid (t,r) \in R$ e $M \models_r X \Rightarrow r = s$ ∎

Teorema 4: Lo schema $\Box A \Rightarrow \Box\Box A$ è valido in un frame (S,R)

$\Leftrightarrow$ R è transitiva

DIM

$\Leftarrow)$ Sia R transitiva, ossia $(x,y) \in R \land (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$. Sia $M \models_w \Box A$,

ossia $M \models_v A \ \forall v \in S \mid (w,v) \in R$. Sia $u \in S \mid (v,u) \in R$ con $(w,v) \in R$

$\Rightarrow (w,u) \in R \Rightarrow M \models_v \Box A \ \forall v \in S \mid (w,v) \in R \Rightarrow M \models_w \Box\Box A$

$\Rightarrow)$ Sia X una variabile, $s \in S$, $V(X) = \{w \in S \mid (s,w) \in R\}$. Allora $M \models_s \Box X$

$\Rightarrow$ per la validità dello schema $M \models_s \Box\Box s \mid (s,t) \in R \Rightarrow M \models_r X \ \forall r \in S \mid$

$|\ (t,r)\in R,\ (s,t)\in R \Rightarrow r\in V(x) \Rightarrow (s,t)\in R \wedge (t,r)\in R \Rightarrow (s,r)\in R$

ADESSO VEDIAMO CHE CI SONO PROPRIETÀ DEI FRAME NON ESPRIMIBILI IN TERMINI DI VALIDITÀ DI FORMULE MODALI

MORFISMI DI MODELLI

DEFINIZIONE) SIANO (S_1,R_1) E (S_2,R_2) DUE FRAME. UNA FUNZIONE $f: S_1 \to S_2$ È UN MORFISMO DI FRAME SE $(x,y)\in R_1 \Rightarrow (f(x),f(y))\in R_2 \ \forall x,y \in S_1$

ESEMPI:

a) SIANO $(\mathbb{N},R_1)$ E $(\mathbb{N},R_2)$ I FRAME TALI CHE $R_1 = R_2 = \{(x,y)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid x<y\}$

ALLORA $f: \begin{array}{l} \mathbb{N}\to\mathbb{N} \\ n\mapsto n^2 \end{array}$ È UN MORFISMO DI FRAME

b) SIANO $(\mathbb{N},R_1)$ E $(\mathbb{N},R_2)$ I FRAME TALI CHE $R_1 = R_2 = \{(x,y)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid \frac{x}{y}\}$

ALLORA $f: \begin{array}{l} \mathbb{N}\to\mathbb{N} \\ n\mapsto n+1 \end{array}$ È UN MORFISMO DI FRAME

DEFINIZIONE) SIANO $M_1 := (S_1,R_1,V_1)$ E $M_2 := (S_2,R_2,V_2)$ DUE MODELLI.

UN MORFISMO DI FRAME $f: (S_1,R_1)\to(S_2,R_2)$ È UN MORFISMO DI MODELLI SE:

- $w\in V_1(x) \Leftrightarrow f(w)\in V_2(x) \ \forall w\in S_1, x\in Var$
- $(f(w),y)\in R_2 \Rightarrow \exists v\in S_1 \mid (w,v)\in R_1$ E $f(v)=y \ \forall w\in S_1, y\in S_2$

NOTA: I MORFISMI DI MODELLI SONO SOLITAMENTE DETTI P-MORFISMI

ESEMPIO: SIANO $M_1=(\mathbb{N},R_1,V_1)$ E $M_2=(\{0,1\},\{0,1\}\times\{0,1\},V_2)$

DOVE $R_1:=\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\mid x\leq y\}$, $Var=\{x\}$, $V_1(x)=\{2n\mid n\in\mathbb{N}\}$, $V_2(x)=\{0\}$.

SIA $f: \begin{matrix}\mathbb{N}\to\{0,1\}\\ n\mapsto n \bmod 2\end{matrix}$. ALLORA f È UN MORFISMO DI MODELLI. INFATTI:

- $x\leq y \Rightarrow (x \bmod 2, y \bmod 2)\in\{0,1\}\times\{0,1\}$
- $w\in V_1(x)\Leftrightarrow w\in\{2n\mid n\in\mathbb{N}\}$. ALLORA $w\in V_1(x)\Rightarrow f(w)=0$.

  $f(w)\in V_2(x)\Leftrightarrow f(w)=0$. ALLORA $f(w)\in V_2(x)\Rightarrow w\in V_1(x)$
- $(f(w),y)\in R_2=\{0,1\}\times\{0,1\}$: $y=0$
  - $f(w)=0$ $\quad y=0\Rightarrow w\leq w$ E $f(w)=0=y$

    $y=1\Rightarrow w\leq w+1$ E $f(w+1)=1=y$
  - $f(w)=1$ $\quad y=0\Rightarrow w\leq w+1$ E $f(w+1)=0=y$

    $y=1\Rightarrow w\leq w$ E $f(w)=1=y$

LEMMA 1: SIA $f:(S_1,R_1,V_1)\to(S_2,R_2,V_2)$ UN MORFISMO DAL MODELLO M_1 AL MODELLO M_2. ALLORA $M_1\models_w F\Leftrightarrow M_2\models_{f(w)}F$ $\forall w\in S_1$, FORMULA F

DIM

SE F È UNA VARIABILE, $M_1\models_w F\Leftrightarrow w\in V_1(F)\Leftrightarrow f(w)\in V_2(F)\Leftrightarrow M_2\models_{f(w)}F$

PER GLI ALTRI TIPI DI FORMULA, SI DIMOSTRA INDUTTIVAMENTE SULLA COSTRUZIONE DELLA FORMULA. VEDIAMO IL CASO IN CUI $F:=\Diamond G$. ALLORA $\exists v\in S_1\mid (w,v)\in R_1\wedge$ $\wedge M_1\models_v G$. POICHÉ $(f(w),f(v))\in R_2$ PERCHÉ f È UN MORFISMO DI MODELLI

E, INDUTTIVAMENTE, $M_2 \models_{f(v)} G \Rightarrow M_2 \models_{f(v)} \Diamond G$.

SIA $M_2 \models_{f(w)} \Diamond G$. ALLORA $\exists u \in R_2 \mid (f(w), u) \in R_2 \wedge M_2 \models_u G$

$\Rightarrow$ DALLA DEFINIZIONE DI MORFISMO DI MODELLI, $\exists v \in S_1 \mid (w, v) \in R_1$ E

$f(v) = u$. PER L'IPOTESI INDUTTIVA, $M_1 \models_v G \Rightarrow M_1 \models_w \Diamond G$ $\blacksquare$

LEMMA 2: SIA $f: (S_1, R_1, V_1) \to (S_2, R_2, V_2)$ UN MORFISMO DAL MODELLO M_1 AD M_2. f SURIETTIVO $\Rightarrow M_1 \models F \Leftrightarrow M_2 \models F \ \forall F$

DIM

$M_1 \models F \Leftrightarrow M_1 \models F \ \forall w \in S_1 \Leftrightarrow M_2 \models_{f(w)} F \ \forall w \in S_1 \Leftrightarrow M_2 \models F$ PER SURIETTIVITÀ $\blacksquare$

LEMMA 3: SIA M_2 MODELLO SU (S_2, R_2) E $f: (S_1, R_1) \to (S_2, R_2)$ UN MORFISMO DI FRAME $\mid (f(w), y) \in R_2 \Rightarrow \exists v \in S_1 \mid (w, v) \in R_1$ E $f(v) = y$ $\forall w \in S_1, y \in S_2$. ALLORA $\exists M_1$ SU $(S_1, R_1) \mid f: M_1 \to M_2$ È UN MORFISMO DI MODELLI

DIM

BASTA DEFINIRE $M_1 := (S_1, R_1, V_1)$ CON $V_1(x) = \{w \in S_1 \mid M_2 \models_{f(w)} x\} \ \forall x \in V_{AR}$ $\blacksquare$

LEMMA 4: SIA M_2 MODELLO SU (S_2, R_2) E $f: (S_1, R_1) \to (S_2, R_2)$ UN MORFISMO DI FRAME $\mid (f(w), y) \in R_2 \Rightarrow \exists v \in S_1 \mid (w, v) \in R_1$ E $f(v) = y$ $\forall w \in S_1, y \in S_2$. f SURIETTIVO $\Rightarrow (S_1, R_1) \models F \Rightarrow (S_2, R_2) \models F \ \forall F$

DIM

SIA $(S_2, R_2) \not\models F \Rightarrow \exists M_2$ SU $(S_2, R_2) \mid M_2 \not\models F$. DAL LEMMA 3, $\exists M_1$ SU $(S_1, R_1) \mid f: M_1 \to M_2$ È UN MORFISMO DI MODELLI. POICHÉ f SURIETTIVO, DAL LEMMA 2

SI HA $M_1 \not\models F \Rightarrow (S_1, R_1) \not\models F$ ■

DEFINIZIONE) UNA RELAZIONE R SU UN INSIEME X SI DICE ANTISIMMETRICA

SE $(x,y) \in R, (y,x) \in R \Rightarrow x = y \ \forall x, y \in X$

ESEMPI:

a) L'ORDINAMENTO $\leq$ DEI NUMERI NATURALI È UNA RELAZIONE ANTISIMMETRICA SU $\mathbb{N}$

b) LA RELAZIONE $\frac{x}{y}$ SU $\mathbb{N}$ È UNA RELAZIONE ANTISIMMETRICA

c) LA RELAZIONE $A \subseteq B$ SULL'INSIEME DELLE PARTI $\mathcal{P}(X)$ DI UN INSIEME X È ANTISIMMETRICA

TEOREMA: L'ANTISIMMETRIA NON È ESPRIMIBILE, OSSIA $\nexists F \mid (S,R) \models F \Leftrightarrow R$ ANTISIMMETRICA

DIM

SIA $(S_1, R_1) = (\mathbb{N}, \leq)$ E $(S_2, R_2) = (\{0,1\}, \{0,1\} \times \{0,1\})$. NELL'ESEMPIO

DI MORFISMO DI MODELLI ABBIAMO VISTO CHE LA FUNZIONE $f: \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\} \\ n \longmapsto n \bmod 2 \end{array}$ È

UN MORFISMO DAL FRAME $(\mathbb{N}, \leq)$ AL FRAME (S_2, R_2), CHE SODDISFA LA

CONDIZIONE $(f(w), y) \in R_2 \Rightarrow \exists v \in S_1 \mid (w, v) \in R_1$ E $f(v) = y \ \forall w \in S_1, y \in S_2$

$\Rightarrow$ LA RELAZIONE $\leq$ SU $\mathbb{N}$ È ANTISIMMETRICA. SUPPONIAMO PER ASSURDO

CHE $\exists F \mid (S,R) \models F \Leftrightarrow R$ ANTISIMMETRICA. ALLORA $(\mathbb{N}, \leq) \models F$. PER IL LEMMA 4,

$(S_2, R_2) \models \Rightarrow R_2$ ANTISIMMETRICA, MA CIÒ NON È POSSIBILE ■