RIPASSO LOGICA PROPOSIZIONALE

SINTASSI

L'ALFABETO È COSTITUITO DA UN INSIEME NUMERABILE DI VARIABILI E DAI CONNETTIVI LOGICI $\neg, \vee, \wedge$. LE PAROLE DEL LINGUAGGIO POSSONO ESSERE:

1) UN LETTERALE: UNA VARIABILE x O LA SUA NEGAZIONE $\neg x$
2) UNA CLAUSOLA: UNA DISGIUNZIONE FINITA DI LETTERALI, OSSIA UNA PAROLA DELLA FORMA $L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n$
3) UNA CNF: CONGIUNZIONE FINITA DI CLAUSOLE $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n$

PER OGNI LETTERALE L DEFINIAMO LA SUA NEGAZIONE $\bar{L}$: $\begin{cases} \neg x & \text{SE L È } x \\ x & \text{SE L È } \neg x \end{cases}$

INDICHIAMO CON $Var(F)$ L'INSIEME DELLE VARIABILI CHE APPAIONO IN UNA CNF

ESEMPIO: $(\neg x_1 \vee x_2) \wedge x_1 \wedge (x_2 \vee x_3)$ È UNA CNF CHE INDICHIAMO CON F $\Rightarrow Var(F) = \{x_1, x_2, x_3\}$. LE CLAUSOLE SONO $\neg x_1 \vee x_2$, x_1, $x_2 \vee x_3$. I LETTERALI SONO $\neg x_1, x_1, x_2, x_3$

SEMANTICA

SIA F UNA CNF. UNA ASSEGNAZIONE APPROPRIATA A F È UNA FUNZIONE

$V: X \to \{0,1\}$, DOVE $X \geq Var(F)$. L'INSIEME $\{0,1\}$ È L'INSIEME DEI VALORI DI VERITÀ DI F E PUÒ ESSERE INTERPRETATO COME L'INSIEME $\{T, F\}$. SIA F UNA FORMULA E V UNA SUA ASSEGNAZIONE APPROPRIATA. DICIAMO CHE V SODDISFA F $V \models F$ SE:

- F È UNA VARIABILE X: $V \models F \Rightarrow V(X) = 1$
- F È IL LETTERALE $\neg X$: $V \models F \Rightarrow V(X) = 0$
- F È UNA CLAUSOLA $L_1 \vee L_2 \vee ... \vee L_n$: $V \models F \Rightarrow$ V SODDISFA ALMENO UNO DEI LETTERALI L_i
- F È UNA CONGIUNZIONE DI CLAUSOLE $C_1 \wedge C_2 \wedge ... \wedge C_n$: $V \models F \Rightarrow$ V SODDISFA TUTTE LE CLAUSOLE C_i

VICEVERSA, SE V NON SODDISFA F SCRIVEREMO $V \not\models F$

ESEMPIO: SIA F LA CNF $(\neg X_1 \vee X_2) \wedge X_1 \wedge (X_2 \vee X_3)$ E

$U: \{X_1, X_2, X_3\} \to \{0,1\} \mid U(X_1) = U(X_2) = 1,\ U(X_3) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ U(\neg X_1) = 0 \\ \bullet\ U(\neg X_1 \vee X_2) = 1 \\ \bullet\ U(X_2 \vee X_3) = 1 \\ \bullet\ U(F) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow U \models F$$

DICIAMO CHE UNA CNF F È SODDISFACIBILE SE $\exists V: Var(F) \to \{0,1\} \mid V \models F$, ALTRIMENTI DICIAMO CHE F È INSODDISFACIBILE.

ESEMPIO: LA FORMULA DELL'ESEMPIO PRECEDENTE È SODDISFACIBILE, MENTRE LA FORMULA $X \wedge \neg X$ È INSODDISFACIBILE.

UNA FORMULA F È UNA **TAUTOLOGIA** SE OGNI ASSEGNAZIONE DI F SODDISFA F.

ESEMPIO: LA FORMULA DELL'ESEMPIO PRECEDENTE NON È UNA TAUTOLOGIA PERCHÉ $U \models F$ E $V \not\models F$, MENTRE LA FORMULA $X \vee \neg X$ È UNA TAUTOLOGIA

CONSEGUENZA LOGICA: DATE DUE FORMULE F E G, DICIAMO CHE G È CONSEGUENZA LOGICA DI F SE PER OGNI ASSEGNAZIONE V APPROPRIATA AD ENTRAMBE SI HA CHE $V \models F \Rightarrow V \models G$

ESEMPIO: LA FORMULA Y È CONSEGUENZA LOGICA DELLA FORMULA $F := (\neg X \vee Y) \wedge X$. INFATTI, L'UNICA ASSEGNAZIONE CHE SODDISFA F È $X \mapsto 1, Y \mapsto 1$ E TALE ASSEGNAZIONE SODDISFA ANCHE LA FORMULA Y.

IMPLICAZIONE LOGICA: $X \Rightarrow Y := \neg X \vee Y$

X	Y	$X \Rightarrow Y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

EQUIVALENZA LOGICA: DUE FORMULE F E G SONO LOGICAMENTE EQUIVALENTI SE F È CONSEGUENZA LOGICA DI G E SE G È CONSEGUENZA LOGICA DI F. IN TAL CASO SCRIVIAMO $F \equiv G$

ESEMPIO:

a) NELL'ESEMPIO PRECEDENTE, ABBIAMO VISTO CHE Y È CONSEGUENZA

LOGICA DI $F := (\neg x \vee y) \wedge x$, CHE PUÒ ESSERE RISCRITTA COME $(x \Rightarrow y) \wedge x$. POICHÉ $x \mapsto 0$, $y \mapsto 1$ SODDISFA Y MA NON F, ABBIAMO CHE F NON È CONSEGUENZA LOGICA DI Y.

b) $L_1 \vee L_2 \equiv L_2 \vee L_1$ LA DISGIUNZIONE È COMMUTATIVA

c) $C_1 \wedge C_2 \equiv C_2 \wedge C_1$ LA CONGIUNZIONE È COMMUTATIVA

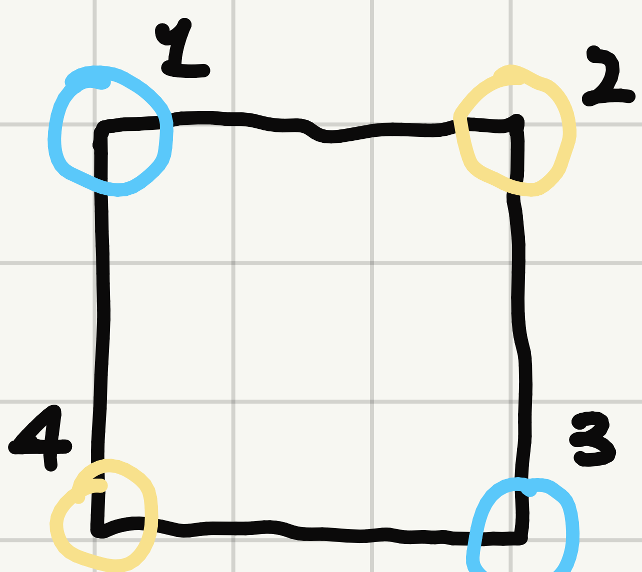
d) $C \wedge C \equiv C$ E $L \vee L \equiv L$, OSSIA CONGIUNZIONE E DISGIUNZIONE SONO IDEMPOTENTI

DOPPIA IMPLICAZIONE: $x \Leftrightarrow y : (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x)$

NEGAZIONE DI CNF:

- L LETTERALE: $\neg L := \bar{L}$
- $\neg (L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n) := \neg L_1 \wedge \neg L_2 \wedge \ldots \wedge \neg L_n$
- $\neg (C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n) := \neg C_1 \vee \neg C_2 \vee \ldots \vee \neg C_n$

ESEMPIO: CONSIDERIAMO IL PROBLEMA DI COLORARE I VERTICI DI UN QUADRATO CON DUE COLORI A DISPOSIZIONE IN MODO CHE I VERTICI SU UNO STESSO LATO ABBIANO COLORI DIVERSI



FORMULANDOLO SOTTOFORMA DI UNA CNF, IL PROBLEMA HA SOLUZIONE $\Leftrightarrow$ LA FORMULA È SODDISFACIBILE

LA FORMULA È LA SEGUENTE: LA VARIABILE x_{11} INDICA L'AFFERMAZIONE "IL VERTICE 1 HA COLORE 1"; x_{12} "IL VERTICE 1 HA COLORE 2" ETC.

IN GENERALE $X_{i,j}$ INDICA CHE IL VERTICE i HA COLORE j $\forall\, 1 \leq i \leq 4,\ 1 \leq j \leq 2$.

IL VERTICE 1 HA ALMENO UN COLORE

$F := (X_{11} \vee X_{12}) \wedge (X_{21} \vee X_{22}) \wedge (X_{31} \vee X_{32}) \wedge (X_{41} \vee X_{42}) \wedge$

$(\equiv \neg(X_{11} \wedge X_{12}))$ = IL VERTICE 1 HA AL MASSIMO UN COLORE

$\wedge (\neg X_{11} \vee \neg X_{12}) \wedge (\neg X_{21} \vee \neg X_{22}) \wedge (\neg X_{31} \vee \neg X_{32}) \wedge (\neg X_{41} \vee \neg X_{42}) \wedge$

I VERTICI 1 E 2 NON HANNO ENTRAMBI COLORE 1

$\wedge (\neg X_{11} \vee \neg X_{21}) \wedge (\neg X_{12} \vee \neg X_{22}) \wedge (\neg X_{21} \vee \neg X_{31}) \wedge$

$\wedge (\neg X_{22} \vee \neg X_{32}) \wedge (\neg X_{31} \vee \neg X_{41})$

L'ASSEGNAZIONE $X_{11} \mapsto 1,\ X_{12} \mapsto 0,\ X_{21} \mapsto 0,\ X_{22} \mapsto 1,\ X_{31} \mapsto 1,\ X_{32} \mapsto 0,\ X_{41} \mapsto 0,\ X_{42} \mapsto 1$ SODDISFA LA FORMULA F

LOGICA MODALE

SINTASSI

LA LOGICA MODALE ESTENDE LA PROPOSIZIONALE. L'ALFABETO DELLA PROPOSIZIONALE VIENE ESTESO CON I CONNETTIVI MODALI, È COMPOSTO DA:

- UN INSIEME NUMERABILE DI VARIABILI Var (O FORMULE ATOMICHE)
- I CONNETTIVI LOGICI $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- SIMBOLI AUSILIARI (,)
- I CONNETTIVI MODALI:

$\Box$ SCATOLA/BOX "È NECESSARIO CHE..." $\Box A$

$\Diamond$ DIAMANTE/DIAMOND "È POSSIBILE CHE..." $\Diamond A$

Le parole del linguaggio sono le formule ben formate (FBF) definite in modo ricorsivo:

- ogni variabile è una FBF
- A è una FBF $\Rightarrow$ $(\neg A)$, $(\Box A)$, $(\Diamond A)$ sono FBF
- A e B sono FBF $\Rightarrow$ $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(\overset{B}{A} \Rightarrow \overset{A}{B})$, $(A \Leftrightarrow B)$ sono FBF

I connettivi modali possono essere definiti uno in termini dell'altro:

- $\Box A \equiv \neg \Diamond \neg A$ "è necessario A ≡ non è possibile non A"
- $\Diamond A \equiv \neg \Box \neg A$ "è possibile A ≡ non è necessario non A"

Le logiche modali, inoltre, si possono classificare in:

- epistemiche $\Box A$ "si sa che A"
- deontiche $\Box A$ "è obbligatorio che A"
- doxastiche $\Box A$ "si crede che A"
- dimostrative $\Box A$ "è dimostrabile che A"

La logica proposizionale è detta vero-funzionale: assegnando valori "0" o "1" alle variabili possiamo assegnare un valore "0" o "1" ad una formula nel modo univoco stabilito nella semantica. La logica modale introduce un ulteriore grado di complessità. Definiti gli operatori