$\Longleftarrow$ PONIAMO $v_n = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{n-1} v_{n-1}$ $\quad \alpha_i \in \mathbb{R}$ $\forall i \in [1; n-1]$

DISCENDE CHE $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{n-1} v_{n-1} - v_n = 0_V$ ✓

UN'ALTRA RELAZIONE INTERESSANTE DA OSSERVARE È CON LE MATRICI È CHE I VETTORI $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI $\iff A = |v_1 | v_2 | \dots | v_k|$ HA RANGO K

INFATTI, ESSENDO LINEARMENTE INDIPENDENTI VARRÀ CHE $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1^1 \alpha_1 + v_2^1 \alpha_2 + \dots + v_k^1 \alpha_k = 0 \\ v_1^2 \alpha_1 + v_2^2 \alpha_2 + \dots + v_k^2 \alpha_k = 0 \\ \vdots \\ v_k^2 \alpha_1 + v_k^2 \alpha_2 + \dots + v_k^k \alpha = 0 \end{cases} \Longrightarrow |v_1 | v_2 | \dots | v_k| \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}$$

SCRIVENDO IL SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO A TALE COMBINAZIONE, $A \cdot \alpha = 0 \iff rkA =$ NUMERO DI COLONNE $\Rightarrow rkA = k$ ✓. DA QUESTA PROPOSIZIONE DUE INTERESSANTI COROLLARI:

- n VETTORI IN $\mathbb{R}^n$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI $\iff \det|v_1 | v_2 | \dots | v_n| \neq 0$
- $rk(A)$ = NUMERO DI COLONNE/RIGHE DI A LINEARMENTE INDIPENDENTI

SI DICE CHE $v_1, v_2, \dots, v_n$ VETTORI $\in V$ GENERANO V SE $\forall v \in V \ \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \mid v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ E L'INSIEME $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ È UN SISTEMA DI GENERATORI PER V E IL NUMERO DI VETTORI NEL SISTEMA INDICA LA DIMENSIONE DI V. ! DIMENSIONE $\in \mathbb{N}$

SE $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI E GENERANO V, $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ È UNA BASE DI V

UNA BASE MOLTO NOTA È LA BASE CANONICA, ANALOGA ALLA MATRICE IDENTITÀ. DIMOSTRIAMO CHE IN $\mathbb{R}^3$, I VETTORI $e_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$, $e_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$, $e_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ GENERANO LA BASE CANONICA IN $\mathbb{R}^3$.

VEDIAMO CHE SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI, IN QUANTO $\alpha \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = 0_V \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

INOLTRE $\forall a, b, c \mid \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \mid \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = a \\ \beta = b \\ \gamma = c \end{cases}$

L'INSIEME DEI VETTORI $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ È UNA BASE $\iff v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k \ \forall v \in V$ E COEFFICIENTI DEFINITI UNIVOCAMENTE

$\Rightarrow v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k \wedge v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_k v_k$ (SUPPONIAMO COEFFICIENTI NON UNIVOCI). SOTTRAENDO MEMBRO A MEMBRO $(\alpha_1 - \beta_1) v_1 + (\alpha_2 - \beta_2) v_2 + \dots + (\alpha_k - \beta_k) v_k = 0$. ESSENDO I VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI, TALE RELAZIONE VALE QUANDO $\alpha_1 - \beta_1 = 0 \wedge \alpha_2 - \beta_2 = 0 \wedge \dots \wedge \alpha_k - \beta_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_k = \beta_k$

$\Longleftarrow v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$. COEFFICIENTI UNICI $\Rightarrow \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ GENERA V. INOLTRE, $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0 \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0 \Rightarrow$ VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI $\Rightarrow$ BASE

QUESTI COEFFICIENTI PRENDONO IL NOME DI COORDINATE DI v RISPETTO ALLA BASE $\mathcal{B} \to [v]_{\mathcal{B}}$

$F_{\mathcal{B}}: v \to [v]_{\mathcal{B}}$ AD ESEMPIO, PRESO LO SPAZIO VETTORIALE $\mathbb{R}^2$, E LA BASE CANONICA

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix} \right\}$ E IL VETTORE $v = \begin{vmatrix}5\\3\end{vmatrix} \in \mathbb{R}^2$, VOGLIAMO DETERMINARE LE COORDINATE DI v RISPETTO A $\mathcal{B}$ $\Rightarrow \begin{vmatrix}5\\3\end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix} \Rightarrow \alpha = 5,\ \beta = 3$

SI OSSERVI CHE n VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI FORMANO UNA BASE DI $\mathbb{R}^n$

INFATTI, PRESI $v_1, v_2, \dots, v_n$, SE LINEARMENTE SI PUÒ COSTRUIRE LA MATRICE $A = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{vmatrix}$ NON SINGOLARE $\Rightarrow \exists A^{-1}$ E IL SISTEMA LINEARE $A \cdot x = b$ HA SOLUZIONE E, PER IL METODO DI CRAMER, $x = A^{-1} \cdot b$

$$A \cdot x = b \Rightarrow b = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n \Rightarrow$$

$\Rightarrow b$ È COMBINAZIONE LINEARE DEGLI n VETTORI DATI $\Rightarrow$ VISTO CHE b ESPRIME UN GENERICO VETTORE DI $\mathbb{R}^n$, SI HA CHE $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ GENERA $\mathbb{R}^n$ E, ESSENDO LINEARMENTE INDIPENDENTI, FORMANO UNA BASE DI $\mathbb{R}^n$

SOTTOSPAZIO VETTORIALE

SI CONSIDERI UNO SPAZIO VETTORIALE V. UN SOTTOINSIEME $W \subset V$ SI DICE SOTTOSPAZIO VETTORIALE SE

1) $0_V \in W$
2) $w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$
3) $\lambda \in \mathbb{R}, w \in W \Rightarrow \lambda w \in W$

SI NOTI COME SIA V CHE $\{0_V\}$ SONO SOTTOSPAZI DI V, I SOTTOINSIEMI IMPROPRI, IN ANALOGIA CON E CHE UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE È ESSO STESSO UNO SPAZIO VETTORIALE. DIMOSTRIAMO, AD ESEMPIO, CHE

$W = \left\{ \begin{vmatrix}x\\y\\0\end{vmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$ È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE:

- $\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix} \in W \Rightarrow 0_W \in W$ ✓

- $\begin{vmatrix}x_1\\y_1\\0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}x_2\\y_2\\0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\\0\end{vmatrix} \in W$ ✓

- $\lambda \begin{vmatrix}x\\y\\0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\lambda x\\\lambda y\\0\end{vmatrix} \in W$ ✓

CONSIDERATO UNO SPAZIO VETTORIALE V E $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$. IL SOTTOSPAZIO VETTORIALE GENERATO DAI v_k VETTORI PRENDE IL NOME DI SPAN. $\text{span}(v_1, v_2, \dots, v_k) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k \mid \alpha_i \dots \forall i \dots\}$

PER DIMOSTRARE CHE $\text{span}(v_1, v_2, \dots, v_k)$ È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI V, APPLICHIAMO LA DEFINIZIONE

- $0 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_k = 0 \in V$ ✓

- $w_1, w_2 \in \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_k) \Rightarrow w_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k \wedge w_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_k v_k$

  SOMMANDO MEMBRO A MEMBRO, $w_1 + w_2 = (\alpha_1 + \beta_1) v_1 + (\alpha_2 + \beta_2) v_2 + \dots + (\alpha_k + \beta_k) v_k \in V$ ✓

- $v \in \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_k);\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda v = \lambda(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k) = (\lambda \alpha_1) v_1 + (\lambda \alpha_2) v_2 + \dots + (\lambda \alpha_k) v_k \in V$ ✓

SI PUÒ OSSERVARE E DIMOSTRARE CHE LO SPAN DEI v_k VETTORI È IL PIÙ PICCOLO DEI SOTTOSPAZI CHE CONTIENE I v_k VETTORI. INFATTI, CONSIDERATO $\text{span}(v_1, v_2, \dots, v_k) = S$ E PRESO UN $v_1 \in$

$v_j = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_{j-1} + 1 \cdot v_j + 0 \cdot v_{j+1} + \dots + 0 \cdot v_k$ ✓

CONSIDERATO ORA SOTTOSPAZIO $W \subset V$ E $\{v_1, v_2, \dots, v_k\} = S$ $\Rightarrow W$ CONTIENE OGNI COMBINAZIONE LINEARE DEI v_k VETTORI $\Rightarrow S \subseteq W \Rightarrow W = S$

AD ESEMPIO, PRESO $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}$, $v_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge v_1, v_2 \in V$, $span\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}\right) = ?$

$$\left\{ \alpha \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{vmatrix} \alpha \\ 2\alpha + \beta \\ 0 \end{vmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{vmatrix} x \\ y \\ 0 \end{vmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$x = \alpha$

$y = 2\alpha + \beta \Rightarrow y = 2x + \beta$

$\Rightarrow \left\{ \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \right\}$ È UNA BASE DI V

SI PUÒ NOTARE CHE, PRESI v_{k+1} VETTORI $\in V$, $span(v_1, v_2, \dots, v_k) \subseteq span(v_1, v_2, \dots, v_{k+1})$

INFATTI, APPLICANDO LA DEFINIZIONE DELLO SPAN E DETTI $span(v_1, v_2, \dots, v_k) = E$, $span(v_1, v_2, \dots, v_{k+1}) = F$

① $v \in E \rightarrow v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k + 0 \cdot v_{k+1} \in F$ ✓

② - SUPPOSTO $E = F$, $v_{k+1} \in E \Rightarrow v_{k+1} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$ ✓

- SUPPOSTO $v_{k+1} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k \in E$, SI CONSIDERI UN $w \in F$.

$w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_k v_k + \gamma v_{k+1} = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_k v_k + \gamma\alpha_1 v_1 + \gamma\alpha_2 v_2 + \dots + \gamma\alpha_k v_k$

$= (\beta_1 + \alpha_1\gamma) v_1 + (\beta_2 + \alpha_2\gamma) v_2 + \dots + (\beta_k + \alpha_k\gamma) v_k$ CHE $\in E \Rightarrow w \in E$

$\Rightarrow F \subseteq E$. DA IPOTESI $E \subseteq F \Rightarrow E = F$

QUESTA PROPOSIZIONE PERMETTE DI AFFERMARE CHE:

1 - $v_1, v_2, \dots, v_k$ GENERANO $V \Rightarrow \{v_1, v_2, \dots, v_k, w\}$ È UN SISTEMA DI GENERATORI PER V

2 - PRESO UN SISTEMA DI GENERATORI PER V, RIMOSSI I VETTORI LINEARMENTE DIPENDENTI CONTENUTI NEL SISTEMA DI GENERATORI, TALE SISTEMA RIMANE

PRESO UNO SPAZIO VETTORIALE V NON VUOTO, SE FINITAMENTE GENERATO AMMETTE ALMENO UNA BASE.

INFATTI, PRESO $V = span(v_1, v_2, \dots, v_k)$, SE TALI VETTORI SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI LA BASE È $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ ✓

ALTRIMENTI, SI PRENDA v_k LINEARMENTE DIPENDENTE DA $v_1, v_2, \dots, v_{k-1} \Rightarrow V' = span(v_1, v_2, \dots, v_{k-1})$

E SI RIPETE RICORSIVAMENTE IL RAGIONAMENTO $\Rightarrow$ OGNI INSIEME FINITO DI GENERATORI CONTIENE UNA BASE.

SI ANALIZZI IL SEGUENTE LEMMA: SIA V UNO SPAZIO VETTORIALE E SI PRENDANO $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI E $w_1, w_2, \dots, w_m \in V$ SONO GENERATORI PER V $= \mathbb{R}^n$: $m \geq n$

PER ASSURDO, PONIAMO $n > m$. $w_1, w_2, \dots, w_n$ GENERANO $V \Rightarrow \exists\, a_{i,j} \in \mathbb{R} \mid \begin{cases} v_1 = a_{1,1} w_1 + a_{1,2} w_2 + \dots + a_{1,m} w_m \\ v_2 = a_{2,1} w_1 + a_{2,2} w_2 + \dots + a_{2,m} w_m \\ \vdots \\ v_m = a_{m,1} w_1 + a_{m,2} w_2 + \dots + a_{m,m} w_n \end{cases}$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_m \end{vmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_m \end{vmatrix}}_{C} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{1,m} & \dots & \dots & a_{m,n} \end{vmatrix}}_{A}$$

CASISTICHE

SI CONSIDERINO 2 DIVERSE :

① $\det A = 0 \Longrightarrow rk A < max \Longrightarrow$ PER IL SISTEMA OMOGENEO $A \cdot X = 0$ $\exists$ ALMENO UNA SOLUZIONE NON NULLA, CHIAMATA $\begin{vmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{vmatrix} \longrightarrow B = C \cdot A \longrightarrow B \cdot \begin{vmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{vmatrix} = C \cdot A \cdot \begin{vmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{vmatrix} \longrightarrow 0$

$\Longrightarrow B \cdot \begin{vmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$ MA LA SOLUZIONE È PRESA NON NULLA $\Longrightarrow$ <u>CONTRADDIZIONE</u> $\Longrightarrow m \geq n$ ✓

② $\det A \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$ E $B \cdot A^{-1} = C$ $\quad A^{-1} = (\alpha_{i,j})_{i,j} \quad i,j = 1,2,\dots,m$

$$\begin{cases} w_1 = \alpha_{1,1} v_1 + \alpha_{1,2} v_2 + \dots + \alpha_{1,m} v_m \\ w_2 = \alpha_{2,1} v_1 + \alpha_{2,2} v_2 + \dots + \alpha_{2,m} v_m \\ \vdots \\ w_m = \alpha_{m,1} v_1 + \alpha_{m,2} v_2 + \dots + \alpha_{m,m} v_m \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ ESSENDO I w_m VETTORI COMBINAZIONI LINEARI DEI v_m VETTORI, $span(w_1, w_2, \dots, w_m) \subset span(v_1, v_2, \dots, v_m) \Longrightarrow$ ESSENDO I w_m VETTORI GENERATORI PER V, $v_{m+1} = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \dots + \beta_m w_m \Longrightarrow v_{m+1} \in span(v_1, v_2, \dots, v_m)$ MA PER IPOTESI $v_1, v_2, \dots, v_m, v_{m+1}$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI $\Longrightarrow$ CONTRADDIZIONE $\Longrightarrow m \geq n$ ✓

UNO SPAZIO VETTORIALE V NON NULLO HA TUTTE LE BASI CON LO STESSO NUMERO DI ELEMENTI.

INFATTI PRESE DUE DIVERSE BASI $B_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ E $B_2 = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$:

① $v_1, v_2, \dots, v_n$ LINEARMENTE INDIPENDENTI, $w_1, w_2, \dots, w_k$ GENERATORI $\xrightarrow[\text{DIMOSTRATO}]{\text{LEMMA}} k \geq n$

② $w_1, w_2, \dots, w_k$ LINEARMENTE INDIPENDENTI, $v_1, v_2, \dots, v_n$ GENERATORI $\Longrightarrow n \geq k$

$\longrightarrow n = k$ ✓

LA DIMENSIONE DI UNO SPAZIO VETTORIALE FINITAMENTE GENERATO È DATA DAL NUMERO DI ELEMENTI DI UNA QUALUNQUE SUA BASE. È INDICATA COME $\dim V$

ANALIZZANDO, AD ESEMPIO, LA BASE CANONICA IN $\mathbb{R}^n$ $\quad B = \left\{ \begin{vmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0\\1\\ \vdots\\0\end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{vmatrix} \right\} \quad \dim \mathbb{R}^n = n$

SI DEFINISCE COME ISOMORFISMO UNA APPLICAZIONE LINEARE BIUNIVOCA. SI PUÒ DIMOSTRARE CHE UNO SPAZIO VETTORIALE REALE DI DIMENSIONE n HA UN ISOMORFISMO TRA V E $\mathbb{R}^n$. INFATTI, PRESA $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ COME UNA BASE DI V, VALE CHE $\forall v \in V \Longrightarrow v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ È DEFINITO UNIVOCAMENTE. PRESO

$$F_B : \begin{array}{l} V \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ v \longrightarrow [v]_B = \begin{vmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{vmatrix}, \ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \end{array} \Longrightarrow F_B \text{ È UN ISOMORFISMO}$$

IN QUANTO:

① LINEARITÀ $\longrightarrow \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \wedge v, w \in V, \ F_B(\lambda v + \mu w) = \lambda F_B(v) + \mu F_B(w)$?

$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$

$w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n$

$\Rightarrow \lambda v + \mu w = \lambda \alpha_1 v_1 + \lambda \alpha_2 v_2 + \dots + \lambda \alpha_n v_n + \mu \beta_1 v_1 + \mu \beta_2 v_2 + \dots + \mu \beta_n v_n = (\lambda \alpha_1 + \mu \beta_1) v_1 + (\lambda \alpha_2 + \mu \beta_2) v_2 + \dots + (\lambda \alpha_n + \mu \beta_n) v_n$

$\Rightarrow F_B(\lambda v + \mu w) = (\lambda \alpha_1 + \mu \beta_1, \lambda \alpha_2 + \mu \beta_2, \dots, \lambda \alpha_n + \mu \beta_n)$

$\Rightarrow \lambda F_B(v) + \mu F_B(w) = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{vmatrix} \Rightarrow F_B$ È LINEARE ✓

② BIUNIVOCITÀ:

- INIETTIVA $\longrightarrow$ SE $F_B(v) = F_B(w) = \begin{vmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow v = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \dots + \gamma_n v_n$ ✓

- SURIETTIVA $\longrightarrow \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^n$. PRESO $u \in V$, $u = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n \mid F_B(u) = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}$ ✓

$\Rightarrow$ ESSENDO LINEARE E BIUNIVOCA, F_B È UN ISOMORFISMO

UNO SPAZIO VETTORIALE DI DIMENSIONE n RISULTA ISOMORFO AD $\mathbb{R}^n$. AD ESEMPIO LA MATRICE $A \in M(2\times 3, \mathbb{R}) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$ CONTA 6 ELEMENTI $\Rightarrow \dim A = 6$ E $\mathbb{R}^{2\cdot 3} = \mathbb{R}^6$ $\in \mathbb{R}^6$

COSTRUITA LA BASE $B \{E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}\}$, $F_B(A) = aE_{1,1} + bE_{1,2} + cE_{1,3} + dE_{2,1} + eE_{2,2} + fE_{2,3}$

$\Rightarrow A$ ISOMORFO AD $\mathbb{R}^6$ ✓

IN UNO SPAZIO VETTORIALE V, $\dim V = n$, VALE CHE:

1) NON ESISTONO PIÙ DI n VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI
2) DATO $k < n$, QUALUNQUE INSIEME DI k VETTORI NON È UN SISTEMA DI GENERATORI PER V
3) GLI n VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI SONO ANCHE GENERATORI
4) GLI n VETTORI GENERATORI SONO ANCHE LINEARMENTE INDIPENDENTI

FISSATA UNA BASE $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, DIMOSTRIAMO QUESTE 4 PROPRIETÀ

1) PRESI $w_1, w_2, \dots, w_k$ VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI, DAL PRECEDENTE LEMMA $k \leq n$
2) PRESI $w_1, w_2, \dots, w_k$ VETTORI GENERATORI, DAL LEMMA PRECEDENTE $k \geq n$
3) PRESI $w_1, w_2, \dots, w_k$ VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI E UN $u \in V \mid w_1, w_2, \dots, w_k, u$ SONO LINEARMENTE DIPENDENTI $\Rightarrow \exists \beta \in \mathbb{R} \neq 0 \mid \beta u = -\alpha_1 w_1 - \alpha_2 w_2 - \dots - \alpha_n w_n \Rightarrow u = \beta^{-1}(-\alpha_1 w_1 - \alpha_2 w_2 - \dots - \alpha_n w_n) \in \mathrm{span}(w_1, w_2, \dots, w_n)$
4) SI PRENDA $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n = 0$ E, PER ASSURDO, LINEARMENTE DIPENDENTI $\Rightarrow \exists \alpha_i \neq 0$, CON $i \in [1, n]$ $\Rightarrow \mathrm{span}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \overbrace{\mathrm{span}(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_n)}^{F}$ MA $\dim F \geq n+1 > n \Rightarrow$ NON POSSONO ESSERE GENERATORI $\Rightarrow$ PER ASSURDO, TEOREMA DIMOSTRATO

TEOREMA DI COMPLETAMENTO DELLA BASE: SIA V UNO SPAZIO VETTORIALE IN $\mathbb{R}$ E DI DIMENSIONE n E PRENDIAMO $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI ($k \leq n$). ALLORA ESISTONO $n-k$ VETTORI IN V, DETTI $w_1, w_2, \dots, w_{n-k} \mid \{v_1, v_2, \dots, v_k, w_1, w_2, \dots, w_{n-k}\}$ È UNA BASE PER V