ESERCIZIO: SI CONSIDERI IL SISTEMA

$$\begin{cases} x^{\bullet}(t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot x(t) + \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot u(t) \\ y(t) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot x(t) \end{cases}$$

DETERMINARE, SE POSSIBILE, UNA MATRICE K_0 TALE PER CUI GLI AUTOVALORI CHE REGOLANO LA DINAMICITÀ DELL'ERRORE, OSSIA GLI AUTOVALORI DELLA MATRICE $A-K_0 \cdot C$, SIANO PARI A $\lambda_{1DES} = -3$; $\lambda_{2DES} = -3-2i$; $\lambda_{3DES} = -3+2i$

① $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3 \Rightarrow$ SISTEMA INSTABILE E AUTOVALORI NON DESIDERATI

② $$\mathcal{O} = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ -1 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$rk(\mathcal{O}) = 3 \Rightarrow$ SISTEMA COMPLETAMENTE OSSERVABILE

③ $P_A(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$ $\qquad \alpha_0 = -6,\ \alpha_1 = 11,\ \alpha_2 = -6$

④ $$q_{(A-K_0 \cdot C)}(\lambda) = (\lambda - \lambda_{1DES})(\lambda - \lambda_{2DES})(\lambda - \lambda_{3DES}) =$$

$$= (\lambda+3)(\lambda+3+2i)(\lambda+3-2i) = \lambda^3 + 9\lambda^2 + 31\lambda + 39$$

$\beta_0 = 39,\ \beta_1 = 31,\ \beta_2 = 9$

⑤ $$T^{-1} = \left[C^T \quad A^T C^T \quad (A^T)^2 C^T\right] \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 11 & -6 & 1 \\ -6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -1 \\ 6 & -8 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 & \frac{9}{2} \end{vmatrix} \rightarrow \text{NUOVA REALIZZAZIONE } \hat{x}(t)$$

$$\hat{A} = T\cdot A\cdot T^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & -6 \end{vmatrix} \qquad \hat{B} = T\cdot C^T = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

IL DUALE È $\hat{\hat{A}} = \hat{A}^T = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ $\hat{C} = \hat{B}^T = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

⑥ $K_0^T = [(\beta_0-\alpha_0) \ (\beta_1-\alpha_1) \ (\beta_2-\alpha_2)]\cdot T = [(39+6) \ (31-11) \ (9+6)]\cdot$

$$\cdot \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 & \frac{9}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -40 & -\frac{145}{2} & 120 \end{vmatrix} \Rightarrow K_0 = \begin{vmatrix} -40 \\ -\frac{145}{2} \\ 120 \end{vmatrix}$$

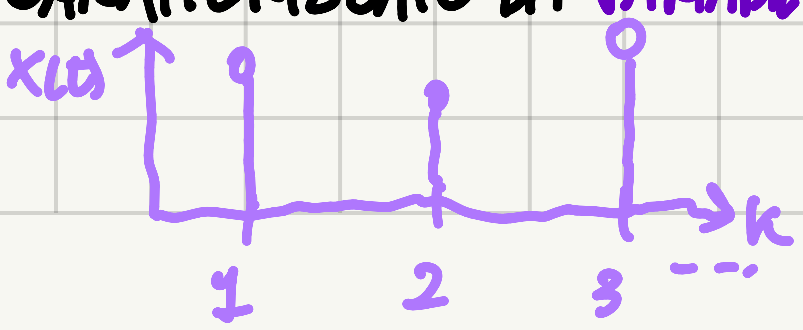
⑦ VERIFICA $\det(\lambda I-(A-K_0C)) = \det\left(\lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \right.$

$$\left. - \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -40 \\ -\frac{145}{2} \\ 120 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}\right)\right) = \lambda^3 + 9\lambda^2 + 31\lambda + 39 -$$

$\cdot \lambda_1 = -3 = \lambda_{1DES}$ ✓ $\cdot \lambda_2 = -3-2i = \lambda_{2DES}$ ✓ $\cdot \lambda_3 = -3+2i = \lambda_{3DES}$ ✓

ANALISI DEI SISTEMI A TEMPO DISCRETO

UN SISTEMA A TEMPO DISCRETO È CARATTERIZZATO DA VARIABILI FUNZIONI DI UNA VARIABILE TEMPORALE $k \in \mathbb{Z}$.



Un generico sistema dinamico a tempo discreto è caratterizzato da m ingressi e p uscite. Il numero minimo di condizioni iniziali da assegnare per determinare tutte le uscite del sistema noti gli andamenti degli ingressi a partire dall'istante iniziale prende il nome di ordine del sistema n.

TRASFORMATA ZETA

Consente calcoli più agevoli rispetto all'uso delle formule esplicite. Dato un segnale a tempo discreto, cioè una sequenza di numeri $f(k)$ nulli per $k<0$, definiamo così la trasformata zeta: $Z[f(k)]=F(z)=f(0)+f(1)\cdot z^{-1}+f(2)\cdot z^{-2}+\ldots=\sum_{k=0}^{+\infty} f(k)\cdot z^{-k}$. L'insieme dei valori di $z\in\mathbb{C}$ per i quali l'ampiezza del corrispondente al valore di $F(z)$ ha ampiezza finita è detto regione di convergenza di $F(z)$. La trasformata zeta è una serie di potenze negative, e dunque la regione di convergenza è specificata dalla disuguaglianza $\left|\frac{1}{z}\right|<\frac{1}{\rho}$, quindi $\rho>|z|$. Il raggio di convergenza ρ può assumere diversi valori:

- $\rho=0 \rightarrow F(z)$ converge ovunque tranne che in $z=0$
- $0<\rho<+\infty \rightarrow F(z)$ converge all'esterno di un cerchio di raggio ρ

CENTRATO NELL'ORIGINE DEL PIANO Z

- $\rho \to +\infty \to F(z)$ DIVERGE OVUNQUE

IN GENERALE, NON POSSIAMO DIRE NULLA PER I PUNTI DEL PIANO COMPLESSO Z CHE APPARTENGONO ALLA CIRCONFERENZA DI RAGGIO ρ, CIOÈ I PUNTI PER CUI $|z|=\rho$, IN CUI INFATTI $F(z)$ PUÒ ESSERE LIMITATA O ILLIMITATA E, QUINDI, SI STUDIA LA CONVERGENZA CASO PER CASO.

TRASFORMATA DI UN VETTORE

SIA $g(k) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ UN VETTORE DI FUNZIONI REALI DEFINITE PER $k \in \mathbb{Z}$, CON $k \geq 0$. LA SUA TRASFORMATA Z È COSÌ DEFINITA:

$$\mathcal{Z}[g(k)] = \mathcal{Z}\left[\begin{vmatrix} g_1(k) \\ g_2(k) \\ \vdots \\ g_n(k) \end{vmatrix}\right] = \mathcal{Z}\begin{bmatrix} [g_1(k)] \\ [g_2(k)] \\ \vdots \\ [g_n(k)] \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} G_1(z) \\ G_2(z) \\ \vdots \\ G_n(z) \end{vmatrix} = G(z)$$ E

IL RAGGIO DI CONVERGENZA DI $G(z)$ È IL MASSIMO DEI RAGGI DI CONVERGENZA DEI SUOI ELEMENTI, OSSIA $\rho = \max\{\rho_{G_1}, \rho_{G_2}, \dots, \rho_{G_n}\}$

TRASFORMATA DI UNA MATRICE

SIA $L(k) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ UNA MATRICE DI FUNZIONI REALI DEFINITE PER $k \in \mathbb{Z}$ E $k \geq 0$. LA SUA TRASFORMATA Z È COSÌ DEFINITA:

$$\mathcal{Z}[L(k)] = \mathcal{Z}\left[\begin{vmatrix} l_{11}(k) & l_{12}(k) & \cdots & l_{n1}(k) \\ l_{21}(k) & l_{22}(k) & \cdots & l_{n2}(k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1}(k) & l_{n2}(k) & \cdots & l_{nn}(k) \end{vmatrix}\right] = \mathcal{Z}\left[\begin{vmatrix} \mathcal{Z}[l_{11}(k)] & \cdots & \mathcal{Z}[l_{n1}(k)] \\ \mathcal{Z}[l_{21}(k)] & \cdots & \mathcal{Z}[l_{21}(k)] \\ \vdots & & \vdots \\ \mathcal{Z}[l_{n1}(k)] & \cdots & \mathcal{Z}[l_{nn}(k)] \end{vmatrix}\right]$$

$$= \left[\begin{vmatrix} L_{11}(z) & L_{12}(z) & \dots & L_{n1}(z) \\ L_{21}(z) & L_{22}(z) & \dots & L_{n2}(z) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_{n1}(z) & L_{n2}(z) & \dots & L_{nn}(z) \end{vmatrix} \right] = L(z)$$ E IL RAGGIO DI CONVERGENZA

DI $G(z)$ È IL MASSIMO DEI RAGGI DI CONVERGENZA DEI SUOI ELEMENTI,

OSSIA $\rho = \max\{\rho_{L11}, \rho_{L12}, \dots, \rho_{Lnn}\}$

PROPRIETÀ FONDAMENTALI

- **LINEARITÀ:** DATE DUE SEQUENZE $f_1(k)$ E $f_2(k)$ Z-TRASFORMABILI CON $F_1(z) = \mathcal{Z}[f_1(k)]$, $F_2(z) = \mathcal{Z}[f_2(k)]$ E ρ_1, ρ_2 I RISPETTIVI RAGGI DI CONVERGENZA, DATI $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, LA FUNZIONE $f(k) = \alpha f_1(k) + \beta f_2(k)$ È Z-TRASFORMABILE E DI RAGGIO DI CONVERGENZA $\rho = \max\{\rho_1, \rho_2\}$ E VALE CHE $F(z) = \mathcal{Z}[f(z)] =$
$= \mathcal{Z}[\alpha f_1(k) + \beta f_2(k)] = \alpha F_1(z) + \beta F_2(z)$

- **TRASFORMATA ZETA DI UNA SEQUENZA RITARDATA (SCORRIMENTO VERSO DESTRA):**
DATA UNA SEQUENZA $f(k)$ Z-TRASFORMABILE CON $F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$ E RAGGIO DI CONVERGENZA ρ ED IDENTICAMENTE NULLA PER $k<0$ ED UN NUMERO $m>0$, VALE CHE $\mathcal{Z}[f(k-m)] = z^{-m} \cdot F(z)$, $|z| > \rho$

DIMOSTRAZIONE

$$\mathcal{Z}[f(k-m)] = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k-m) \cdot z^{-k} = \cancel{f(-m)} + \cancel{f(1-m)}\, z^{-1} + \cancel{f(2-m)} \cdot z^{-2} + \dots + \cancel{f(-1)}\, z^{-m+1}$$

$+f(0)z^{-m}+f(1)z^{-m-1}+\ldots=f(0)z^{-m}+f(1)z^{-1-m}+\ldots=z^{-m}[f(0)+f(1)z^{-1}+\ldots]=z^{-m}F(z)$

! NEL CASO IN CUI $f(k)\neq 0\ \forall k<0$, $\mathcal{Z}[f(k-m)]=z^{-m}F(z)+\sum_{i=0}^{m-1}f(i-m)z^{-i}$

- TRASFORMATA ZETA DI UNA SEQUENZA ANTICIPATA (SCORRIMENTO A SINISTRA): DATA UNA SEQUENZA $f(k)$ Z-TRASFORMABILE, CON $F(z)=\mathcal{Z}[f(k)]$ E RAGGIO DI CONVERGENZA ρ ED IDENTICAMENTE NULLA PER $k<0$ ED UN NUMERO $m>0$ TALE CHE $f(k+m)=0\ \forall k\leq -m$. ALLORA $\mathcal{Z}[f(k+m)]=z^{m}F(z)-\sum_{k=0}^{m-1}f(k)z^{m-k}$, $|z|>\rho$
- TRASFORMATA ZETA DELLA SOMMA DI CONVOLUZIONE DI DUE SEQUENZE: DATE DUE SEQUENZE $f_1(k)$ E $f_2(k)$ Z-TRASFORMABILI CON $F_1(z)=\mathcal{Z}[f_1(k)]$, $F_2(z)=\mathcal{Z}[f_2(k)]$ E ρ_1,ρ_2 I RISPETTIVI RAGGI DI CONVERGENZA TALI CHE $f_1(k)=0$ E $f_2(k)=0\ \forall k<0$, ALLORA $\mathcal{Z}[\sum_{i=0}^{k}f_1(i)\cdot f_2(k-i)]=F_1(z)*F_2(z)$
- TEOREMA DEL VALORE INIZIALE: IL VALORE INIZIALE $f(0)$ DI UNA SEQUENZA $f(k)$ PUÒ ESSERE DETERMINATA DIRETTAMENTE DALLA SUA TRASFORMATA ZETA. INFATTI $f(0)=\lim_{|z|\to+\infty}F(z)$
- TEOREMA DEL VALORE FINALE: IL VALORE FINALE PER $k\to+\infty$ DI UNA SEQUENZA $f(k)$ PUÒ ESSERE DETERMINATA DIRETTAMENTE DALLA SUA TRASFORMATA ZETA. INFATTI, $\lim_{k\to+\infty}f(k)=\lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$
- TEOREMA DELLA DERIVAZIONE DELLA TRASFORMATA ZETA: POICHÉ LA TRASFORMATA ZETA È UNA SERIE DI POTENZE, È UNA FUNZIONE ANALITICA NELLA

SUA REGIONE DI CONVERGENZA. PUÒ, QUINDI, ESSERE DIFFERENZIATA UN NUMERO ARBITRARIO DI VOLTE E IL RISULTATO È UNA SERIE CARATTERIZZATA DALLO STESSO ARCO DI CONVERGENZA.

$$\frac{d[F(z)]}{dz} = \frac{d}{dz}\left[\sum_{k=0}^{+\infty} f(k) z^{-k}\right] = -\sum_{k=0}^{+\infty} k f(k) z^{-k-1} = -\sum_{k=0}^{+\infty} k f(k) \cdot z^{-k} \cdot z^{-1} \quad |z|>\rho$$

$$-\sum_{k=0}^{+\infty} k f(k) z^{-k} = -z \cdot \frac{d[F(z)]}{dz} \Rightarrow \mathcal{Z}[k f(k)] = -z \cdot \frac{d[F(z)]}{dz} \text{ PER } |z|>\rho$$

IN GENERALE, $\mathcal{Z}[k^i f(k)] = \left(-z \cdot \frac{d}{dz}\right)^i [F(z)]$, $|z|>\rho$, OSSIA SI HANNO i RIPETIZIONI DELLA DERIVAZIONE DI $F(z)$ E SUCCESSIVA MOLTIPLICAZIONE PER $-z$

TRASFORMATE DI FUNZIONI NOTEVOLI

- SEQUENZA GEOMETRICA: $\mathcal{Z}[f(k)] = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^k = \frac{z}{z-a}$, $|z|>a$

$\Rightarrow F(z) = \frac{z}{z-a}$, $\rho = |a|$. $F(z)$ CONVERGE PER $|z|>a$, DIVERGE PER $|z|<a$

- $g(k) = a^k \cdot f(k)$: $\mathcal{Z}[g(k)] = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cdot f(k) \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^k f(k) = F\left(\frac{z}{a}\right)^k$

$\Rightarrow G(z) = F\left(\frac{z}{a}\right)$, $|z|>|a|\cdot\rho$

- IMPULSO UNITARIO $f(k) = \delta(k) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k\neq 0 \end{cases}$: $\mathcal{Z}[f(k)] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(k) \cdot z^{-k} = \delta(0) = 1 \Rightarrow F(z) = 1$, $\rho = 0$. $F(z)$ CONVERGE $\forall z \in \mathbb{C}$

- GRADINO UNITARIO $f(k) = \delta_{-1}(k) = \begin{cases} 1 & k\geq 0 \\ 0 & k<0 \end{cases}$: $\mathcal{Z}[f(k)] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_{-1}(k) \cdot z^{-k} =$

$= \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (z^{-1})^k = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \Rightarrow F(z) = \frac{z}{z-1}$, $|z|>1$, $\rho = 1$. $F(z)$ CONVERGE PER $|z|>1$, DIVERGE PER $|z|<1$

- $f(k) = k^i$: $\mathcal{Z}[f(k)] = \mathcal{Z}[k^i \delta_{-1}(k)] = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^i [\mathcal{Z}[\delta_{-1}(k)]] =$
$= \left(-z\frac{d}{dz}\right)^i \left[\frac{z}{z-1}\right] \Rightarrow F(z) = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^i \left[\frac{z}{z-1}\right], |z|>1$ $F(z)$ CONVERGE PER $|z|>1$, DIVERGE PER $|z|<1$

ESEMPI:

- $f(k) = k$ $\quad F(z) = \left(-z\frac{d}{dz}\right)\left[\frac{z}{z-1}\right] = -z \cdot \frac{z-1-z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}, |z|>1$
- $f(k) = k^2$ $\quad F(z) = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^2\left[\frac{z}{z-1}\right] = -z \cdot \frac{(z-1)^2 - 2z(z-1)}{(z-1)^4} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$

- POLINOMIO FATTORIALE DI ORDINE i $f(k) = \frac{k^i}{i!}$: $F(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{k^i}{i!}\right] =$
$= \frac{z}{(z-1)^{i+1}}, |z|>1$. INOLTRE, $\mathcal{Z}\left[\frac{k^{i}}{i!} \cdot a^{k-i}\right] = \frac{z}{(z-a)^{i+1}}$, $|z|>|a|$

ANALISI DEL MODELLO I-U

ASSUMENDO CHE INGRESSO E USCITA SIANO SCALARI ED IL SISTEMA È LINEARE, STAZIONARIO E A PARAMETRI CONCENTRATI, LA DINAMICA DEL SISTEMA È DESCRITTA DALL'

EQUAZIONE ALLE DIFFERENZE $a_n y(k-n) + a_{n-1} y(k-n+1) + \dots + a_1 y(k-1) + a_0 y(k) = b_m u(k-m) + b_{m-1} u(k-m+1) + \dots + b_1 u(k-1) + b_0 u(k)$, IN CUI GLI a_i E b_i COEFFICIENTI NON DIPENDONO DAL TEMPO. DA CUI $y(k) = \frac{b_m}{a_0} u(k-m) + \frac{b_{m-1}}{a_0} u(k-m+1) + \dots + \frac{b_1}{a_0} u(k) - \frac{a_n}{a_0} y(k-n) - \frac{a_{n-1}}{a_0} y(k-n+1) + \dots + \frac{a_1}{a_0} y(k-1)$

$\mathcal{Z}[y(k)] = \mathcal{Z}\left[\frac{b_m}{a_0} u(k-m) + \frac{b_{m-1}}{a_0} u(k-m+1) + \dots + \frac{b_1}{a_0} u(k) - \frac{a_n}{a_0} y(k-n) - \frac{a_{n-1}}{a_0} y(k-n+1) + \dots + \frac{a_1}{a_0} y(k-1)\right]$! $\mathcal{Z}[f(k-m)] = z^{-m} \cdot F(z) + \sum_{i=0}^{m-1} f(i-m) z^{-i}$

$$f(k)=0 \ \forall k<0 \Rightarrow \mathcal{Z}[f(k-m)]=z^{-m}F(z)$$

$$\rightarrow \mathcal{Z}[f(k-(m-1))]=z^{-m+1}F(z)+\sum_{i=0}^{m-2} f(i-m+1)z^{-i}$$

$$Y(z)=\frac{b_m}{a_0}[U(-m)+z^{-1}U(1-m)+\dots+z^{-m+1}U(-1)+z^{-m}U(z)]+\dots+\frac{b_1}{a_0}[U(-1)+z^{-1}U(z)]$$

$$+\frac{b_0}{a_0}U(z)-\frac{a_n}{a_0}[Y(-n)+z^{-1}Y(1-n)+\dots+z^{-n+1}Y(-1)+z^{-n}Y(z)]-\dots-\frac{a_1}{a_0}[Y(-1)+z^{-1}Y(z)]$$

$$\Rightarrow \left[1+\frac{a_1}{a_0}z^{-1}+\dots+\frac{a_n}{a_0}z^{-n}\right]Y(z)=\left[\frac{b_0}{a_0}+\frac{b_1}{a_0}z^{-1}+\dots+\frac{b_m}{a_0}z^{-m}\right]U(z)+$$

$$+\frac{b_m}{a_0}[U(-m)+z^{-1}U(1-m)+\dots+z^{-m+1}U(-1)]+\dots+\frac{b_1}{a_0}[U(-1)]-\frac{a_n}{a_0}[Y(-n)+$$

$$+z^{-1}Y(1-n)+\dots+z^{-n+1}Y(-1)]-\dots-\frac{a_1}{a_0}[Y(-1)]$$

$$\Rightarrow \left[1+\frac{a_1}{a_0}z^{-1}+\dots+\frac{a_n}{a_0}z^{-n}\right]Y(z)=\left[\frac{b_0}{a_0}+\frac{b_1}{a_0}z^{-1}+\dots+\frac{b_m}{a_0}z^{-m}\right]U(z)+$$

$$+\sum_{j=0}^{m-1} z^{-j}\left[\sum_{i=1}^{m-j}\frac{b_{i+j}}{a_0}U(-i)\right]-\sum_{j=0}^{n-1} z^{-j}\left[\sum_{i=1}^{n-j}\frac{a_{i-j}}{a_0}y(-i)\right]$$

$$Y(z)=\frac{\frac{b_0}{a_0}+\frac{b_1}{a_0}z^{-1}+\dots+\frac{b_m}{a_0}z^{-m}}{1+\frac{a_1}{a_0}z^{-1}+\dots+\frac{a_n}{a_0}z^{-n}}U(z)+\frac{\sum_{j=0}^{m-1} z^{-j}\left[\sum_{i=1}^{m-j}\frac{b_{i+j}}{a_0}U(-i)\right]}{1+\frac{a_1}{a_0}z^{-1}+\dots+\frac{a_n}{a_0}z^{-n}}$$

$$-\frac{\sum_{j=0}^{m-1} z^{-j}\left[\sum_{i=1}^{m-j}\frac{a_{i+j}}{a_0}U(-i)\right]}{1+\frac{a_1}{a_0}z^{-1}+\dots+\frac{a_n}{a_0}z^{-n}}$$

MOLTIPLICANDO NUMERATORE E DENOMINATORE PER a_0

$$Y(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\dots+b_mz^{-m}}{a_0+a_1z^{-1}+\dots+a_nz^{-n}}\cdot U(z)+\frac{\sum_{j=0}^{m-1}z^{-j}\cdot\sum_{i=0}^{m-j}b_{i+j}U(-i)}{a_0+a_1z^{-1}+\dots+a_nz^{-n}}-\frac{\sum_{j=0}^{m-1}z^{-j}\cdot\sum_{i=0}^{m-j}b_{i+j}U(-i)}{a_0+a_1z^{-1}+\dots+a_nz^{-n}}$$

PER SEMPLIFICARE I CALCOLI, PONIAMO $n=m$

$$Y(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\dots+b_nz^{-n}}{a_0+a_1z^{-1}+\dots+a_nz^{-n}}\cdot U(z)+\frac{\sum_{i=0}^{n-1}z^{-i}\cdot\sum_{j=0}^{n-i}b_{i+j}U(-j)-\sum_{i=0}^{n-1}z^{-i}\cdot\sum_{j=0}^{n-i}b_{i+j}U(-j)}{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\dots+a_n}=$$

$=Y_L(z)+Y_F(z)$ DA CUI, ANTITRASFORMANDO, OTTENIAMO LA SOLUZIONE IN K

! SE LE CONDIZIONI INIZIALI SONO NULLE, $Y(z)=Y_F(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\dots+b_nz^{-n}}{a_0+a_1z^{-1}+\dots+a_nz^{-n}}U(z)$

DA CUI $\frac{Y(z)}{U(z)}=W(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\dots+b_nz^{-n}}{a_0+a_1z^{-1}+\dots+a_nz^{-n}}$

ESERCIZIO: DATI IL SISTEMI A TEMPO DISCRETO, CALCOLARE $y(k)$

① $\frac{1}{2}y(k-2)-\frac{3}{2}y(k-1)+y(k)=u(k-1)$, $u(k)=\delta(k)$, $y(-1)=y(-2)=u(-1)=0$

$$\left[\frac{1}{2}z^{-2}-\frac{3}{2}z^{-1}+1\right]Y(k)=z^{-1}U(z)\longrightarrow Y(z)=\frac{z}{z^2-\frac{3}{2}z+\frac{1}{2}}U(z),$$

$$Y(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\dots+b_nz^{-n}}{a_0+a_1z^{-1}+\dots+a_nz^{-n}}\cdot U(z).\quad u(k)=\delta(k)\Longrightarrow U(z)=1$$

$$Y(z)=\frac{z}{(z-\frac{1}{2})(z-1)}\qquad\frac{Y(z)}{z}=\frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z-1)}=\frac{2}{z-\frac{1}{2}}\cdot\frac{2}{z-1}$$

$$\Longrightarrow Y(z)=\frac{2z}{z-1}\cdot\frac{2z}{z-\frac{1}{2}}$$

$$y(k)=z^{-1}\left[\frac{2z}{z-1}\cdot\frac{2z}{z-\frac{1}{2}}\right]=-2\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^k-1\right]\delta(k)$$

② $-\frac{2}{5}y(k-1)+y(k)=u(k-1)$, $u(k)=k\cdot\delta_{-1}(k)$, $y(-1)=1$, $u(-1)=0$

$$-\frac{2}{5}\left[z^{-1}y(z)+y(-1)\right]+Y(z)=z^{-1}\cdot U(z)$$

$$\left(1-\frac{2}{5}z^{-1}\right)Y(k)=z^{-1}U(z)+\frac{2}{5} \qquad u(k)=k\cdot\delta_{-1}(k) \Rightarrow U(z)=\frac{z}{(z-1)^2}$$

$$Y(z)=\frac{2}{5}\cdot\frac{z}{z-\frac{2}{5}}+\frac{1}{z-\frac{2}{5}}\cdot U(z)=\frac{2}{5}\cdot\frac{z}{z-\frac{2}{5}}+\frac{z}{\left(z-\frac{2}{5}\right)(z-1)^2}=$$

$$=Y_L(z)+Y_F(z)$$

$$y_L(k)=\frac{2}{5}\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-\frac{2}{5}}\right]=\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^k\delta_{-1}(k)$$

$$\frac{Y_F(z)}{z}=\frac{1}{\left(z-\frac{2}{5}\right)(z-1)^2}=\frac{25}{9}\cdot\frac{1}{z-\frac{2}{5}}-\frac{25}{9}\cdot\frac{1}{z-1}+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{(z-1)^2}$$

$$\Rightarrow Y_F(z)=\frac{25}{9}\cdot\frac{z}{z-\frac{2}{5}}-\frac{25}{9}\cdot\frac{z}{z-1}+\frac{5}{3}\cdot\frac{z}{(z-1)^2}$$

$$y_L(k)=\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{25}{9}\cdot\frac{z}{z-\frac{2}{5}}-\frac{25}{9}\cdot\frac{z}{z-1}+\frac{5}{3}\cdot\frac{z}{(z-1)^2}\right]=$$

$$=\left\{\frac{25}{9}\left(\frac{2}{5}\right)^k-\frac{25}{9}+\frac{5}{3}\right\}\delta_{-1}(k)$$

$$y(k)=\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^{k+1}+\frac{25}{9}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^k-1\right)+\frac{5}{3}k\right\}\delta_{-1}(k)$$

ANALISI DEL MODELLO V-S

ANALISI NEL DOMINIO DEL TEMPO

Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$\begin{cases} x(k+1) = A \cdot x(k) + B \cdot u(k) \\ y(k) = C \cdot x(k) + D \cdot u(k) \end{cases}$$

SE $u(k)$ AMMETTE TRASFORMATA Z, SI PUÒ DIMOSTRARE CHE ANCHE $x(k)$ È Z-TRASFORMABILE. NOTO $x(k_0)$ E APPLICANDO LA TRASFORMATA Z ALLE EQUAZIONI DI STATO ED USCITA,

$$\begin{cases} \mathcal{Z}[x(k+1)] = \mathcal{Z}[A \cdot x(k) + B \cdot u(k)] \\ \mathcal{Z}[y(k)] = \mathcal{Z}[C \cdot x(k) + D \cdot u(k)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{Z}[x(k) - x(k_0)] = A \cdot X(z) + B \cdot U(z) \\ Y(z) = C \cdot X(z) + D \cdot U(z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (zI - A) \cdot X(z) = z \cdot X(k_0) + B \cdot U(z) \\ Y(z) = C \cdot X(z) + D \cdot U(z) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} X(z) = (zI - A)^{-1} \cdot z \cdot x(k_0) + (zI - A)^{-1} \cdot B \cdot U(z) \\ Y(z) = C \cdot [(zI - A)^{-1} \cdot z \cdot x(k_0)] + [C \cdot (zI - A)^{-1} \cdot B + D] \cdot U(z) \end{cases}$$

POSSIAMO RISCRIVERE IL SISTEMA IN FORMA COMPATTA:

- $\Phi(z) = (zI - A)^{-1} \cdot z$
- $H(z) = (zI - A)^{-1} \cdot \frac{B}{z} \cdot z$
- $\Psi(z) = C \cdot (zI - A)^{-1} \cdot z = C \cdot \Phi(z)$
- $W(z) = C \cdot (zI - A)^{-1} \cdot B + C \cdot \frac{\Phi(z)}{z} \cdot B + D = \frac{\Psi(z)}{z} \cdot B + D = C \cdot H(z) + D$

$$\begin{cases} X(z) = \Phi(z)\cdot X(k_0) + H(z)\cdot U(z) \\ Y(z) = \Psi(z)\cdot X(k_0) + W(z)\cdot U(z) \end{cases}$$

ESEMPIO: SIA DATO IL SISTEMA
$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\cdot x(k) + \begin{vmatrix} 5 \\ 0 \end{vmatrix}\cdot u(k) \\ y(k) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix}\cdot x(k) + \begin{vmatrix} 6 \end{vmatrix}\cdot u(k) \end{cases}$$

E SI ASSUMA CHE $x(0) = \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix}$ E $u(k) = \cos(\frac{\pi}{3}k)$. DETERMINARE LA RISPOSTA LIBERA E FORZATA NELLO STATO E NELL'USCITA.

$$\Phi(z) = (zI-A)^{-1}\cdot z = \begin{vmatrix} z+1 & 0 \\ -1 & z-2 \end{vmatrix}^{-1}\cdot z = \begin{vmatrix} \frac{z}{z+1} & 0 \\ \frac{z}{(z+1)(z-2)} & \frac{z}{z-2} \end{vmatrix}$$

$$\Psi(z) = C\cdot\Phi(z) = \begin{vmatrix} \frac{z}{(z+1)(z-2)} & \frac{z}{z-2} \end{vmatrix}$$

$$H(z) = (zI-A)^{-1}\cdot B = \begin{vmatrix} z+1 & 0 \\ -1 & z-2 \end{vmatrix}^{-1}\cdot B = \begin{vmatrix} \frac{5}{z+1} \\ \frac{5}{(z+1)(z-2)} \end{vmatrix}$$

$$W(z) = C\cdot H(z) + D = \begin{vmatrix} \frac{5}{(z+1)(z-2)} + 6 \end{vmatrix}$$

PER RICAVARE LA MATRICE DI TRANSIZIONE $A^k = \Phi(k)$, SI ANTITRASFORMA $\Phi(z)$

$$\Phi(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{\Phi(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\begin{vmatrix} \frac{z}{z+1} & 0 \\ \frac{z}{(z+1)(z-2)} & \frac{z}{z-2} \end{vmatrix}\right\} = \begin{vmatrix} (-1)^k & 0 \\ \frac{1}{3}\cdot 2^k - \frac{1}{3}(-1)^k & 2^k \end{vmatrix}, \quad k \geq 0$$

PER RICAVARE $\Psi(k)$, $H(k)$ E $W(k)$, SI PUÒ SEGUIRE TRA:

- ANTITRASFORMARE LE RISPETTIVE FUNZIONI NEL DOMINIO Z (COME PRIMA)
- USARE LE FORMULE NEL DOMINIO DEL TEMPO

$$A^{k-1}\cdot B = \begin{vmatrix} (-1)^{k-1} & 0 \\ \frac{1}{3}2^{k-1}-\frac{1}{3}(-1)^{k-1} & 2^{k-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5\cdot(-1)^k \\ \frac{5}{6}\cdot 2^k + \frac{5}{3}\cdot(-1)^k \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow H(k) = \begin{cases} 0_{2\times1} & k=0 \\ \begin{vmatrix} -5\cdot(-1)^k \\ \frac{5}{6}\cdot 2^k + \frac{5}{3}\cdot(-1)^k \end{vmatrix} & k\geq 1 \end{cases}$$

$$\Psi(k) = C\cdot\Phi(k) = |0 \quad 1| \cdot \begin{vmatrix} (-1)^k & 0 \\ \frac{1}{3}\cdot 2^k - \frac{1}{3}(-1)^k & 2^k \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{3}\cdot 2^k - \frac{1}{3}(-1)^k & 2^k \end{vmatrix}, \ k\geq 0$$

$$W(k) = \begin{cases} D=6 & k=0 \\ C\cdot A^{k-1}\cdot B = \frac{5}{6}\cdot 2^k + \frac{5}{3}\cdot(-1)^k & k\geq 1 \end{cases}$$

$$X_L(k) = \Phi(k)\cdot X(0) = \begin{vmatrix} (-1)^k & 0 \\ \frac{1}{3}\cdot 2^k - \frac{1}{3}\cdot(-1)^k & 2^k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\cdot(-1)^k \\ 4\cdot 2^k - (-1)^k \end{vmatrix}, \ k\geq 0$$

$$Y_L(k) = C\cdot X_L(k) = 4\cdot 2^k - (-1)^k, \ k\geq 0$$

PER LE RISPOSTE FORZATE, SI CALCOLA PRIMA LA TRASFORMATA Z DELL'INGRESSO E, SUCCESSIVAMENTE, SI USA LA H(z) PER CALCOLARE LA $X_F(k)$

$$U(z) = \mathcal{Z}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}k\right)\right\} = \frac{z^2 - \frac{1}{2}z}{z^2 - z + 1}$$

$$X_F(k)=\mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\cdot U(z)\}=\mathcal{Z}^{-1}\left\{\begin{vmatrix}-5\cdot(-1)^k\\ \frac{5}{6}\cdot 2^k+\frac{5}{3}\cdot(-1)^k\end{vmatrix}\cdot\frac{z^2-\frac{1}{2}z}{z^2-z+1}\right\}=$$

$$=\mathcal{Z}^{-1}\left\{z\begin{vmatrix}\dfrac{5(z^2-\frac{1}{2}z)}{(z+1)(z^2-z+1)}\\ \dfrac{5(z^2-\frac{1}{2}z)}{(z+1)(z-2)(z^2-z+1)}\end{vmatrix}\right\}=\mathcal{Z}^{-1}\left\{z\cdot\begin{vmatrix}\dfrac{\frac{5}{4}-i\cdot\frac{5\sqrt{3}}{12}}{z-(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})}+\dfrac{\frac{5}{4}+i\cdot\frac{5\sqrt{3}}{12}}{z-(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})}-\frac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{z+1}\\ -\frac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{z-(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})}-\frac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{z-(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})}+\frac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{z+1}+\frac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{z-2}\end{vmatrix}\right\}$$

$$\begin{vmatrix}\frac{5}{6}\sqrt{3}\left(e^{-i\frac{\pi}{6}}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{3}k}+e^{i\frac{\pi}{6}}\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}k}\right)-\frac{5}{2}(-1)^k\\ -\frac{5}{6}\left(e^{i\frac{\pi}{3}k}+e^{-i\frac{\pi}{3}k}\right)+\frac{5}{6}(-1)^k+\frac{5}{6}\cdot 2^k\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{5\sqrt{3}}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}k-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{5}{2}(-1)^k\\ -\frac{5}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}k\right)+\frac{5}{6}(-1)^k+\frac{5}{6}2^k\end{vmatrix},\ k\geq 0$$

$$Y_F(k)=C\cdot X_F(k)+D\cdot U(k)=-\frac{5}{3}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}k\right)+\frac{5}{6}(-1)^k+\frac{5}{6}\cdot 2^k+6\cos\left(\frac{\pi}{3}k\right)=$$

$$=\frac{13}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}k\right)+\frac{3}{6}(-1)^k+\frac{5}{6}\cdot 2^k,\ k\geq 0$$

$$X(k)=X_L(k)+X_F(k)=\begin{vmatrix}\frac{5\sqrt{3}}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}k-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}(-1)^k\\ -\frac{5}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}k\right)-\frac{1}{6}(-1)^k+\frac{29}{6}\cdot 2^k\end{vmatrix},\ k\geq 0$$

$$Y(k)=Y_L(k)+Y_F(k)=\frac{13}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}k\right)-\frac{1}{6}(-1)^k+\frac{29}{6}2^k,\ k\geq 0$$

RAPPRESENTAZIONI EQUIVALENTI

SI CONSIDERI UNA MATRICE $T\in\mathbb{R}^{n\times n}$ NON SINGOLARE E, MEDIANTE UN CAMBIAMENTO DI VARIABILI, SI DEFINISCA UN NUOVO VETTORE DI STATO

$$\hat{x}(k)=T\cdot x(k)\Rightarrow\begin{cases}\hat{x}(k+1)=\hat{A}\cdot\hat{x}(k)+\hat{B}\cdot u(k)\\ \hat{y}(k)=\hat{C}\cdot\hat{x}(k)+\hat{D}\cdot u(k)\end{cases},$$ DOVE $\hat{A}=T\cdot A\cdot T^{-1}$,