INFATTI, DETTO $E_k = \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_k)$. SE $k=n$ IL TEOREMA È GIÀ DIMOSTRATO, ALTRIMENTI ($k<n$) SI SCELGA UN VETTORE $w_1 \in V \setminus E_k$. PER ASSURDO, SUPPONIAMO CHE $v_1, v_2, \dots, v_k, w_1$ NON SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI $\Rightarrow \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \alpha \in \mathbb{R} \mid$

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k + \alpha w_1 = 0 \wedge \alpha \neq 0 \Rightarrow w_1 = -\frac{1}{\alpha}(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k)$

$= \left(-\frac{\lambda_1}{\alpha}\right) v_1 + \left(-\frac{\lambda_2}{\alpha}\right) v_2 + \dots + \left(-\frac{\lambda_k}{\alpha}\right) v_k \Rightarrow w_1 \in \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_k)$.

MA $\text{span}(v_1, v_2, \dots, v_k) = E_k$ E $w_1 \notin E_k \Rightarrow$ PER ASSURDO, SI PUÒ AFFERMARE CHE w_1 È LINEARMENTE INDIPENDENTE A $v_1, v_2, \dots, v_k$. DETTO $E_{k+1} = \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_k, w_1)$

SE $k+1 = n$ IL TEOREMA È DIMOSTRATO, ALTRIMENTI SI REITERA IL PROCEDIMENTO.

OSSERVIAMO CON UN ESEMPIO PRATICO CHE I w_i POSSONO ESSERE SCELTI DA UNA QUALSIASI BASE DI V

$V = \mathbb{R}^4$. $v_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$, $v_2 = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$, $v_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix}$ SONO VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI

$$rk\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = rk\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = rk\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = rk\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = rk\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -6 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= rk\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -6 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = rk\begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = rk\begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 3 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = rk\begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= rk\begin{vmatrix} 3 & -3 & -6 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = rk\begin{vmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = rk\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = rk\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

SCELGO DI COMPLETARE USANDO LA BASE CANONICA

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

e_1

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & - & - & - \end{vmatrix} \Rightarrow \{v_1, v_2, v_3, e_1\} \text{ È ANCH'ESSA BASE DI } \mathbb{R}^4$$

SI NOTI CHE, PRESO UNO SPAZIO VETTORIALE $V \mid \dim V = n$ E UN SUO SOTTOSPAZIO W DI $\dim W = m$. $m \leq n$. IN PARTICOLARE, $m = n \Leftrightarrow W = V$. INFATTI, PRESA UNA BASE DI W $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ SE $m = n$, DALLA PROPRIETÀ $\boxed{3}$ PRECEDENTEMENTE VISTA $\text{span}(w_1, w_2, \dots, \underset{}{\overset{=w_m}{w_n}}) = V$

VEDIAMO, CON UN ESEMPIO, COME I VETTORI POSSANO ESSERE ESPRESSI SIA IN FORMA CARTESIANA E SIA IN FORMA PARAMETRICA. PRESO IN $\mathbb{R}^4$ LO SPAZIO $V = \text{span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}\right)$, LO SI PUÒ ESPRIMERE IN

• FORMA PARAMETRICA $V=\left\{ \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x=t+s \\ y=2t \\ z=0 \\ w=t+s \end{cases} \quad t,s\in\mathbb{R} \right\}$

• FORMA CARTESIANA $V=\left\{ \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x-w=0 \\ z=0 \end{cases} \right\}$

PRESO $V\subseteq\mathbb{R}^n$, È SOTTOSPAZIO VETTORIALE $\Longleftrightarrow V=Sol(\Sigma)$, CON Σ AD INDICARE UN SISTEMA LINEARE OMOGENEO

$\Longleftarrow$ È IMMEDIATO VERIFICARE CHE UN SISTEMA LINEARE OMOGENEO È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE. INFATTI:

1] $\forall v\in V,\ A\cdot v=0$ ✓

2] $v_1,v_2\in V \rightarrow A\cdot v_1+A\cdot v_2=0+0=0$ ✓

3] $\forall v\in V \wedge \forall r\in\mathbb{R} \rightarrow A\cdot(rv)=A\cdot 0=0$ ✓

$\Longrightarrow$ SUPPONIAMO CHE IL SOTTOSPAZIO SIA DI DIMENSIONE K, CON $K\leq n$, E COSTRUIAMO $V=span(v_1,v_2,\dots,v_k)$.

DALLE RELAZIONI CON LE MANCANTI, $v\in V \Longleftrightarrow B=\left(v_1 \middle| v_2 \middle| \dots \middle| v_k \middle| v\right)$

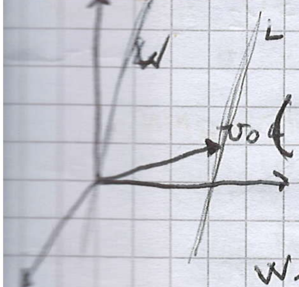
$v=\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}$ $\quad rkV=rkA$ ✓

DAL TEOREMA DEGLI ORLATI, PRESI M_{n+k} ORLATI DI $B=\left(v_1 \middle| v_2 \middle| \dots \middle| v_k \middle| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}\right)$, $\det M_i=0.\ \forall i=1,2,\dots,n-k$

SOTTOSPAZIO AFFINE

UN SOTTOSPAZIO AFFINE L DI UNO SPAZIO VETTORIALE È UN SOTTOINSIEME DI V DELLA FORMA

$L=\overset{\in V}{v_0}+\overset{\in W}{W}$, CON W UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI V.



NOTIAMO CHE $L/\!/W$ E W PRENDE IL NOME DI SOTTOSPAZIO DI GIACITURA.

INOLTRE, $\dim L=\dim W$. L È UN SOTTOSPAZIO AFFINE DI $\mathbb{R}^n \Longrightarrow L=\{v\in\mathbb{R}^n \mid A\cdot x=b\}$

DOVE $A\cdot X=b$ È UN SISTEMA LINEARE NON NECESSARIAMENTE OMOGENEO, MENTRE

$W=\{v\in\mathbb{R}^n \mid A\cdot v=0\}$

DATI DUE SOTTOSPAZI VETTORIALI DI V, INDICATI CON U E W, SI POSSONO DEFINIRE:

• IL SOTTOSPAZIO INTERSEZIONE $U\cap W=\{v\in V \mid v\in U \wedge v\in W\}$

• IL SOTTOSPAZIO SOMMA $U+W=\{u+w \mid u\in U \wedge w\in W\}$

ENTRAMBI SONO A LORO VOLTA SOTTOSPAZI VETTORIALI DI V. INFATTI,

• $0_V\in W\cap U$ ✓; $\exists r,s\in\mathbb{R} \mid rv_1+sv_2\in W\cap U\ \forall v_1,v_2\in V$

• $0_V=0_U+0_W$ ✓; $\forall u_1,u_2\in U \wedge \forall w_1,w_2\in W \wedge \forall r,s\in\mathbb{R} \longrightarrow r(u_1+w_1)+s(u_2+w_2)=$

$=\overset{\in U}{(ru_1+su_2)}+\overset{\in W}{(rw_1+sw_2)}\in U+W$ ✓

DIMOSTRIAMO PERÒ, CON UN ESEMPIO, CHE DATI DUE SOTTOSPAZI VETTORIALI DI V, U,W, IN GENERALE

$U\cup W$ NON È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE

PRESO IN $V = \mathbb{R}^2$ I SOTTOSPAZI $U = span\left(\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}\right)$ E $W = span\left(\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}\right)$. VERIFICHIAMO CHE $U \cup W$ NON È CHIUSO RISPETTO ALLA SOMMA. $\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix} \in U \cup W$, $\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix} \in U \cup W$ MA

$U + W = \begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix} \notin U \cup W$

SE $U = span(U_1, U_2, ..., U_k)$ E $W = span(W_1, W_2, ..., W_h)$ SONO SOTTOSPAZI VETTORIALI DI V, VALE CHE $U + W = span(U_1, U_2, ..., U_k, W_1, W_2, ..., W_h)$. INFATTI PRESO $U + W \in U + W$, SAPPIAMO CHE ESISTONO $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_h \in \mathbb{R} \mid U = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + ... + \alpha_k U_k \wedge W = \beta_1 W_1 + \beta_2 W_2 + ... + \beta_h W_h$ $\Rightarrow U + W = span(U_1, U_2, ..., U_k, W_1, W_2, ..., W_h)$. VALE INOLTRE $\forall \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k, \mu_1, \mu_2, ..., \mu_h$ CHE $\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + ... + \lambda_k U_k + \mu_1 W_1 + \mu_2 W_2 + ... + \mu_h W_h \in U + W \Rightarrow span(U_1, U_2, ..., U_k, W_1, W_2, ...$ $\subset U + W$

TEOREMA DI GRASSMANN: PRESI DUE SOTTOSPAZI U, W DI UNO SPAZIO VETTORIALE V DI DIMENSIONE FINITA $n \to \dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$. IN PARTICOLARE QUANDO $U \cap W = \{0_V\} \to \dim(U+W) = \dim U + \dim W$. SI INDICA $U \oplus W$ SOMMA DIRETTA E I DUE SPAZI SI DICONO SUPPLEMENTARI.

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE, DATI U E W SOTTOSPAZI VETTORIALI DI $V \mid U \cap W = \{0_V\}$, PRESI $U_1, U_2 \in U$ E $W_1, W_2 \in W$, VALE CHE $U_1 + W_1 = U_2 + W_2 \Longleftrightarrow U_1 = U_2 \wedge W_1 = W_2$.

$U_1 + W_1 = U_2 + W_2 \longrightarrow U_1 - U_2 = W_2 - W_1$. $U_1 - U_2 \in U \cap W = \{0_V\} \Rightarrow U_1 = U_2$. ANALOGAMENTE $W_2 = ...$

SIA V UNO SPAZIO VETTORIALE DI $\dim V = n$. OGNI SOTTOSPAZIO $U \subset V$ HA UN SUPPLEMENTARE. CONSIDERIAMO UNA BASE $U = \{U_1, U_2, ..., U_k\}$ E LA SI COMPLETI CON $n-k$ VETTORI $\to \{U_1, U_2, ..., U_k, W_1, W_2, ..., W_{n-k}\}$ E DEFINIAMO LO SPAZIO DI QUESTI VETTORI $U + W = span(U_1, U_2, ..., U_k, W_1, W_2, ..., W_{n-k}) = V$

DAL TEOREMA DI GRASSMANN, $\dim(U \cap W) = \dim(\overset{n}{U+W}) - \overset{k}{\dim U} - \overset{n-k}{\dim W} = n - k - n + k = 0$ $\Rightarrow U \cap W = \{0_V\} \Rightarrow V = U \oplus W$, CON W IL SUPPLEMENTARE DI U

DATI DUE SPAZI VETTORIALI V, W E $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ UNA BASE DI V, DATI $w_1, w_2, ..., w_n$ ESISTE UN'UNICA APPLICAZIONE LINEARE $T: V \to W \mid T(v_j) = w_j$ $\forall j = ...$

INFATTI, DETTO $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$ UN GENERICO VETTORE DI V, POSSIAMO DEFINIRE $T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + ... + \alpha_n w_n$.

1) T È LINEARE?

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\exists a = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n w_n \wedge b = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + ... + \beta_n v_n \in V$

$T(\lambda a + \mu b) = T(\lambda \alpha_1 v_1 + \lambda \alpha_2 v_2 + ... + \lambda \alpha_n v_n + \mu \beta_1 v_1 + \mu \beta_2 v_2 + ... + \mu \beta_n v_n) =$

$= T((\lambda\alpha_1+\lambda\alpha_2+\dots+\lambda\alpha_n)v_1+(\mu\beta_1+\mu\beta_2+\dots+\mu\beta_n)v_2) = (\lambda\alpha_1+\mu\beta_1)w_1+\dots+(\lambda\alpha_n+\mu\beta_n)w_n$

$= \lambda(\alpha_1 w_1+\alpha_2 w_2+\dots+\alpha_n w_n)+\mu(\beta_1 w_1+\beta_2 w_2+\dots+\beta_n w_n)$ ✓

2) T è unica?

Supponendo che esista un'altra applicazione lineare $S: V \to W \mid S(v_j)=w_j \ \forall j=1,2,\dots,n$

$S(v) = S(\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\dots+\lambda_n v_n) = \lambda_1 w_1+\lambda_2 w_2+\dots+\lambda_n w_n = T(v)$ ✓

Questo secondo punto ci permette di affermare che, date due applicazioni lineari e $B=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ è una base $V \mid T(v_j)=S(v_j) \ \forall j=1,2,\dots,n$ vale che $T\equiv S \ \forall v\in V$

Se, ad esempio, vogliamo determinare l'unica applicazione lineare $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \mid T\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2\\3\end{vmatrix} \wedge T\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1\\0\end{vmatrix}$

Prendiamo la base $B=\left\{\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}\right\}$, $\forall \begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}\in\mathbb{R}^2 \quad T\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}=T\left(x\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}+y\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}\right)=$

$= x\,T\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}+y\,T\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix} = x\begin{vmatrix}2\\3\end{vmatrix}+y\begin{vmatrix}-1\\0\end{vmatrix} \Longrightarrow T\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x-y\\3x\end{vmatrix}$

Date ora due matrici $A,B\in M(n\times m,\mathbb{R})$ e $L_A,L_B:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ le applicazioni lineari ad esse associate, si può dimostrare che $L_A=L_B \Longleftrightarrow A=B$

$\Longleftarrow$ $A=B \Rightarrow L_A(x)=A\cdot x=B\cdot x=L_B(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}^m$ ✓

$\Longrightarrow$ Se $L_A=L_B$, $L_A(e_j)=L_B(e_j) \ \forall j=1,2,\dots,n$ ($\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ sta ad indicare la base canonica)

$\to A\cdot e_j = B\, e_j \longrightarrow A^j=B^j \Longleftrightarrow A=B$ ✓

Consideriamo lo spazio delle ~~soluzioni~~ applicazioni lineari da $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$ $\Phi: M(n\times m,\mathbb{R})\to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$,
sappiamo che tale funzione è iniettiva, cerchiamo di verificare che ci sia una biettività, cercando di trovare una suriettività, quindi come associare una matrice ad un'applicazione lineare $T:V\to W$, con $\dim V=n$ e $\dim W=m$. Dette $B=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ e $C=\{w_1,w_2,\dots,w_m\}$ basi, rispettivamente, di V e W, identifichiamo un generico $v\in V$ come $v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\dots+\alpha_n v_n$ $\quad T(v)=\alpha_1(T(v_1))+\alpha_2(T(v_2))+\dots+\alpha_n(T(v_n)) \to T(v)=\alpha_1 w_1+\alpha_2 w_2+\dots+\alpha_n w_n$

Inoltre, $\forall j=1,2,\dots,n \ \exists\, b^j_k\in\mathbb{R} \mid T(v_j)=\cancel{b^j_1+b^j_2+\dots}\ b^j_1 w_1+b^j_2 w_2+\dots+b^j_m w_m$

$\Longrightarrow T(v)=\alpha_1 b^1_1 w_1+\alpha_1 b^1_2 w_2+\dots+\alpha_1 b^1_m w_m+\dots+\alpha_n b^n_1 w_1+\alpha_n b^n_2 w_2+\dots+\alpha_n b^n_m w_m$

$= (\alpha_1 b^1_1+\alpha_2 b^2_1+\dots+\alpha_n b^n_1)w_1+(\alpha_1 b^1_2+\alpha_2 b^2_2+\dots+\alpha_n b^n_2)w_2+(\alpha_1 b^1_n+\alpha_2 b^2_n+\dots+\alpha_n b^n_n)w_n$

La matrice cercata è dunque $A=\begin{vmatrix} b^1_1 & b^2_1 & \dots & b^n_1\\ b^1_2 & b^2_2 & \dots & b^n_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b^1_n & b^2_n & \dots & b^n_n\end{vmatrix}$. Tale matrice è la matrice associata a T rispetto alle basi B e C e si indica come $A=[T]^C_B$

Ad esempio preso un generico $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \mathbb{R}^3$, con $T\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \\ x-y \end{vmatrix}$, definiamo $\mathcal{B} = \left\{ \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right\}$ e $\mathcal{C} = \left\{ \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right\}$, definiamo la matrice $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \left(\left[T\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}\right]_{\mathcal{C}} \middle| \left[T\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}\right]_{\mathcal{C}} \right)$

$T_{c_1} = T\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+0 \\ 1 \\ 1-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \wedge T_{c_2} = T\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} \Rightarrow [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

Nucleo e immagine di un'applicazione lineare

Presa un'applicazione lineare $T: V \to W$ tra i due spazi vettoriali V e W, il **nucleo di T** $\ker T = \{ v \in V \mid T(v) = 0_W \} \subseteq V$ e l'**immagine** è $\mathrm{Im}(T) = \{ T(v) \mid v \in V \} \subseteq W$

Ad esempio, l'applicazione lineare $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+y+z \\ x-z \end{vmatrix}$, $\ker T = \left\{ \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| T\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \right\} = \left\{ \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{vmatrix} x+y+z \\ x-z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \right\}$ $\begin{cases} y = -2t \\ x = t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \ker T = \left\{ t\begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$

$\mathrm{Im}\, T = \left\{ \begin{vmatrix} x+y+z \\ x-z \end{vmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$

Si può dimostrare che in un'applicazione lineare $T: V \to W$:

1. $\ker T$ è un sottospazio vettoriale di V
2. $\mathrm{Im}\, T$ è un sottospazio vettoriale di W
3. T è suriettiva $\Longleftrightarrow \mathrm{Im}\, T = W$
4. T è iniettiva $\Longleftrightarrow \ker T = \{0_V\}$

(1) $v_1, v_2 \in \ker T$, e $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = 0_W + 0_W = 0_W$ ✓

$T(\lambda v_1) = \lambda T(v_1) = \lambda 0_W = 0_W$ ✓

(2) $w_1 = T(v_1)$, $w_2 = T(v_2) \to w_1 + w_2 = T(v_1 + v_2) \in \mathrm{Im}\, T$

$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ additività ✓

$T(\lambda v) = \lambda T(v)$ omogeneità ✓

(3) Dalla definizione stessa di suriettività

(4) $\Rightarrow$ Se è iniettiva, $T(v_1) = T(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$. Preso un $v \in \ker T \mid T(v) = 0_W$

$T(v) = 0_W = T(0_V)$. $v = 0_V \Rightarrow \ker T = \{0_V\}$ ✓

$\Leftarrow$ Supponiamo $T(v_1) = T(v_2)$, $v_1, v_2 \in V$. $T(v_1) - T(v_2) = 0_W \Rightarrow T(v_1 - v_2) = 0_W$

$\to v_1 - v_2 = \ker T = \{0_V\} \Rightarrow v_1 - v_2 = 0_V \Rightarrow v_1 = v_2$ ✓

Inoltre, presa l'applicazione lineare $T: V \to W$ e $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base di V, vale che $\mathrm{Im}\, T = \mathrm{span}(T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n))$