- $y_f(t) = \int_0^t \overbrace{u(t-\tau)}^{=1} y_\delta(\tau)\, d\tau = \frac{1}{21} \int_0^t \left(-54 e^{-2\tau} + 27 e^{-3\tau} + 27\tau e^{-5\tau} \right) d\tau = \frac{1}{21} \left(I_1 + I_2 + I_3 \right)$

$I_1 = \int_0^t -54 e^{-2\tau} d\tau = \frac{54}{2} \left(e^{-2t} - 1 \right) \qquad I_2 = \int_0^t 27 e^{-3\tau} d\tau = -\frac{27}{2} \left(e^{-3t} - 1 \right)$

$I_3 = \int_0^t 27\tau e^{-5\tau} d\tau = 27 \int_0^t \tau e^{-5\tau} d\tau = 27 \left(\frac{\tau e^{-5\tau}}{-5} - \int_0^t -\frac{1}{5} e^{-5\tau} d\tau \right) = 27 \left(-\frac{1}{5} t e^{-5t} - \frac{1}{25} e^{-5t} + \frac{1}{5} \right)$

$y_f(t) = \frac{1}{1050} \left(28350 e^{-2t} - 14175 e^{-3t} - 5670 t e^{-5t} - 1134 e^{-5t} - 8505 \right)$

$y_f(t) = \frac{1}{1050} \left(28350 e^{-2t} - 19845 e^{-3t} - 1134 e^{-5t} - 8505 \right)$

- DEFINIAMO LE VARIABILI DI STATO

$\left. \begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = y'(t) = \dot{x}_1(t) \\ x_3(t) = y''(t) = \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = y'''(t) = -12 y''(t) - 45 y'(t) - 50 y(t) + 9u(t) \end{cases} \right\} \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{50} y'''(t) - \frac{12}{50} y''(t) - \frac{45}{50} y'(t) + \frac{9}{50} u(t)$

$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = -12 x_3(t) - 45 x_2(t) - 50 x_1(t) + 9u(t) \\ y(t) = -\frac{1}{\cancel{50}} \left(\cancel{-12 x_3(t)} - \cancel{45 x_2(t)} - \underbrace{\cancel{50 x_1(t)}}_{-x_1(t)} + \cancel{9u(t)} \right) - \cancel{\frac{12}{50} x_3(t)} - \cancel{\frac{45}{50} x_2(t)} + \cancel{\frac{9}{50} u(t)} \end{cases}$

$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = -12 x_3(t) - 45 x_2(t) - 50 x_1(t) + 9u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$

$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -50 & -45 & -12 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$

②

$A = \begin{vmatrix} 2 & \alpha \\ 0 & \alpha+2 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} \alpha+1 & \alpha-1 \end{vmatrix} \qquad D = \begin{vmatrix} 7 \end{vmatrix}$

- $\mathcal{C} = \begin{vmatrix} B & AB \end{vmatrix} \qquad AB = \begin{vmatrix} 2 & \alpha \\ 0 & \alpha+2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6+5\alpha \\ 5\alpha+10 \end{vmatrix}$

$\mathcal{C} = \begin{vmatrix} 3 & 6+5\alpha \\ 5 & 5\alpha+10 \end{vmatrix} \qquad \det(\mathcal{C}) = 15\alpha + 30 - 30 - 25\alpha = -10\alpha \neq 0 \Rightarrow$ COMPLETAMENTE OSSERVABILE $\forall\ \alpha \neq 0$

$\mathcal{O} = \begin{vmatrix} C \\ CA \end{vmatrix} \qquad CA = \begin{vmatrix} \alpha+1 & \alpha-1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & \alpha \\ 0 & \alpha+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\alpha+2 & 2\alpha^2+2\alpha-2 \end{vmatrix}$

Scansionato con CamScanner

$$O = \begin{vmatrix} \alpha+1 & \alpha-1 \\ 2\alpha+2 & \alpha^2+2\alpha-2 \end{vmatrix} \quad \det(O) = \alpha^3+2\alpha^2-\alpha+2-2\alpha^2+2 = \alpha^3-\alpha = \alpha(\alpha^2-1)$$

COMPLETAMENTE OSSERVABILE $\forall \alpha \neq 0, \alpha \neq \pm 1$

$\Rightarrow$ IL SISTEMA È CONTEMPORANEAMENTE CONTROLLABILE E OSSERVABILE $\forall \alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq \pm 1$

- $\det(\lambda I - A) = \det \begin{vmatrix} \lambda-2 & -\alpha \\ 0 & \lambda-\alpha-2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + (-4-\alpha)\lambda + (4+2\alpha)$

$$\lambda = \frac{4+\alpha \pm \sqrt{16+8\alpha+\alpha^2-16-8\alpha}}{2} = \frac{4+\alpha \pm \sqrt{\alpha^2}}{2} = \begin{cases} 2+\alpha \\ 2 \end{cases}$$

ESSENDO $\lambda_2 = 2 > 0$, IL SISTEMA È SEMPRE INSTABILE

- $\alpha = 0 \Rightarrow \quad A = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & -1 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 7 \end{vmatrix}$

$Y_L(z) = z \cdot (zI-A)^{-1} \cdot X(0)$

$Y_F(z) = C \cdot (zI-A)^{-1} \cdot B \cdot U(t)$

$X(0) = \begin{vmatrix} 2 \\ -2 \end{vmatrix} \quad U(k) = 1$

$Y_{TOT} = Y_L + Y_F$

$Y_L(z)$

$(zI-A) = \begin{vmatrix} z-2 & 0 \\ 0 & z-2 \end{vmatrix} \quad \det(zI-A) = (z-2)^2$

$$(zI-A)^{-1} = \frac{1}{(z-2)^2} \begin{vmatrix} z-2 & 0 \\ 0 & -2+z \end{vmatrix} \Rightarrow (zI-A)^{-1} = \begin{vmatrix} 1/(z-2) & 0 \\ 0 & 1/(z-2) \end{vmatrix}$$

$$Y_L(z) = \begin{vmatrix} \frac{z}{z-2} & 0 \\ 0 & \frac{z}{z-2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ -2 \end{vmatrix} = 2\frac{z}{z-2} - 2\frac{z}{z-2} = 0$$

$$Y_F(z) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{z}{z-2} & 0 \\ 0 & \frac{z}{z-2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{z}{z-2} & -\frac{z}{z-2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \end{vmatrix}$$

$$= 3\frac{z}{z-2} - 5\frac{z}{z-2} = \frac{-2z}{z-2}$$

$$\Rightarrow Y_{TOT}(z) = \frac{-2z}{z-2}$$

$$Y_{TOT}(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[Y_{TOT}(z)\right] = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{-2z}{z-2}\right] = -2\,\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-2}\right] = -2 \cdot 2^k$$

$$Y_{TOT}(k) = -2^{k+1}$$

Scansionato con CamScanner

ESAME DEL 02/04/2020

① Sia data la rappresentazione in variabili di stato di un sistema lineare e stazionario

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + 2x_3(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - 3x_2(t) + 3x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = -3x_3(t) + 3u(t) \\ y(t) = 2x_1(t) + 3x_3(t) \end{cases}$$

- Studiare la stabilità, la controllabilità e l'osservabilità del sistema
- Nel caso in cui il sistema non sia completamente controllabile, stabilire se i modi controllabili del sistema sono stabili o instabili
- Nel caso in cui il sistema non sia completamente osservabile, stabilire se i modi osservabili del sistema sono stabili o instabili
- Stabilire quali sono i modi del sistema che sono contemporaneamente controllabili e osservabili e, inoltre, quali modi sono contemporaneamente non controllabili e non osservabili
- Determinare una rappresentazione ingresso-uscita del sistema considerando condizioni iniziali nulle

② Sia data la rappresentazione in variabili di stato di un sistema lineare e stazionario

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{vmatrix} \cdot x(k) + \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} \cdot u(k) \\ y(k) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} \cdot x(k) \end{cases}$$

- Dato lo stato iniziale $x(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{vmatrix}$, determinare la risposta libera nello stato in funzione del tempo
- Dato lo stato iniziale $x(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{vmatrix}$, determinare la risposta libera nell'uscita in funzione del tempo
- Stabilire se è possibile determinare una opportuna legge in retroazione $u(k) = -K \cdot x(k)$ tale per cui gli autovalori del sistema a ciclo chiuso siano assegnabili ad arbitrio. Nel caso in cui questo sia possibile, si determini la matrice K tale per cui gli autovalori del sistema a ciclo chiuso siano pari a $\lambda_{1des} = -\frac{1}{2}$; $\lambda_{2des} = -\frac{1}{2}$; $\lambda_{3des} = -\frac{1}{2}$

①

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$$

- STABILITÀ $\det(\lambda I - A) = \det \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ -1 & \lambda+3 & -3 \\ 0 & 0 & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda+3)(\lambda-1)(\lambda+3) = (\lambda+3)^2(\lambda-1)$
  - $\lambda_1 = -3 \quad \mu_1 = 2$
  - $\lambda_2 = 1 > 0 \Rightarrow$ INSTABILE

Scansionato con CamScanner

OSSERVABILITÀ $\quad O = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad CA = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$CA^2 = (CA)\cdot A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 19 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow O = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & 19 \end{vmatrix} \quad \det(O) = 0 \Rightarrow$ SISTEMA NON COMPLETAMENTE OSSERVABILE

CONTROLLABILITÀ $\quad C = \begin{vmatrix} B & AB & A^2B \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{vmatrix}$

$AB = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 \\ 10 \\ -9 \end{vmatrix} \quad A^2B = A\cdot(AB) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 7 \\ 10 \\ -9 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} -11 \\ -20 \\ 27 \end{vmatrix} \Rightarrow C = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -11 \\ 0 & 10 & -20 \\ 3 & -9 & 27 \end{vmatrix} \quad \det(C) = 10(27+33) + 20(-30) = 0 \Rightarrow$ SISTEMA NON COMPLETAMENTE CONTROLLABILE

• $T^{-1} = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix} \quad t_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad t_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{vmatrix} \quad t_3 = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \quad \begin{cases} \langle t_1, t_3 \rangle = 0 \\ \langle t_2, t_3 \rangle = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a + b + \ldots = 0 \\ \ldots -3b \ldots = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -\frac{23}{8}c \\ b = \frac{15}{8}c \end{cases} \quad \begin{cases} a = -23 \\ b = 23 \\ c = 8 \end{cases} \Rightarrow \quad t_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow T^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \det(T^{-1}) = 2(-325) - 2(461) + 2(160) = -1252 \quad \det(T^{-1}) = -3$

$$T = \frac{1}{-3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\hat{A} = T \cdot A \cdot T^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \hat{A}_c \quad\quad \hat{A}_{12} \\ \left|\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & -3 \end{array}\right| \\ \hat{A}_{nc} \end{array}$$

$\det(\lambda I - \hat{A}_c) = (1-\lambda)^2 \qquad \lambda = 1 > 0 \Rightarrow$ INSTABILE

• $T^{-1} = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix} \quad t_1 = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{vmatrix} \quad t_2 = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{vmatrix} \quad t_3 = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \quad \begin{cases} \langle t_1, t_3 \rangle = 0 \\ \langle t_2, t_3 \rangle = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2a + 3c = 0 \\ 2a - 5c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a = -3c \\ -8c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow t_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$

Scansionato con CamScanner

$$\Rightarrow T^{-1} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} \qquad \det(T^{-1}) = -13 \qquad T = \begin{vmatrix} \frac{-2}{13} & 0 & \frac{2}{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{13} & 0 & -\frac{2}{13} \end{vmatrix}$$

$$\hat{A} = T \cdot A \cdot T^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{5}{13} & 0 & \frac{2}{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{13} & 0 & -\frac{2}{13} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{48}{13} & 0 & 0 \\ 16 & -3 & 0 \\ \frac{20}{13} & 0 & \frac{6}{13} \end{vmatrix}$$

A_0, A_1, A_{10}

$$\det(-\hat{A}_0 + \lambda I) = -\frac{3 \cdot 58}{13}\lambda^2 \qquad \lambda = 0,\ r = 2 \Rightarrow \text{NON CONTROLLABILE}$$

- SONO ENTRAMBI NON CONTROLLABILI E NON OSSERVABILI
- LAGRANGE: $y(t) = C \cdot e^{At} \cdot x(0) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau)\, d\tau + D \cdot u(t)$

$$D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix} \qquad x(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow y(t) = C \cdot \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau)\, d\tau$$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right] \qquad sI - A = \begin{vmatrix} s-1 & 0 & -2 \\ -1 & s+3 & -3 \\ 0 & 0 & s-3 \end{vmatrix} \qquad \det(sI-A) = (s-1)(s^2-9)$$

$$(sI-A)^{-1} = -\frac{1}{(s-1)(s^2-9)} \cdot \begin{vmatrix} (s^2-9) & 0 & 2(s+3) \\ s-3 & (s-1)(s-3) & 3(s-1)+2 \\ 0 & 0 & (s-1)(s+3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{s-1} & 0 & \frac{-2}{(s-1)(s-3)} \\ -\frac{1}{(s-1)(s+3)} & -\frac{1}{s+3} & -\frac{3(s-1)+2}{(s-1)(s^2-9)} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{s-3} \end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{(s-1)(s+3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+3} = \frac{(A+B)s + (3A-B)}{(s-1)(s+3)} \quad \begin{cases} A+B=0 \\ 3A-B=0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{(s-1)(s+3)} = \frac{1}{4(s-1)} - \frac{1}{4(s+3)}$$

$$\frac{-2}{(s-1)(s-3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-3} = \frac{(A+B)s + (-3A-B)}{(s-1)(s-3)} \quad \begin{cases} A+B=0 \\ -3A-B=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases} \Rightarrow \frac{-2}{(s-1)(s-3)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-3}$$

$$\frac{3s+1}{(s-1)(s^2-9)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s+3} = \frac{(A+B+C)s^2 + (9A+2B-4C)s + (3C-3B)}{(s-1)(s^2-9)} \quad \begin{cases} A+B+C=0 \\ 9A+2B-4C=3 \\ 3C-3B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 2/5 \\ B = -11/30 \\ C = -1/30 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{3s+1}{(s-1)(s^2-9)} = \frac{2}{5(s-1)} - \frac{11}{30(s-3)} - \frac{1}{30(s+3)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\begin{vmatrix} -\frac{1}{s-1} & 0 & \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-3} \\ -\frac{1}{4(s-1)} + \frac{1}{4(s+3)} & -\frac{1}{s+3} & \frac{2}{5(s-1)} - \frac{11}{30(s-3)} - \frac{1}{30(s+3)} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{(s-3)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -e^{t} & 0 & e^{t} - e^{3t} \\ -\frac{1}{4}e^{t} + \frac{1}{4}e^{-3t} & -e^{-3t} & \frac{2}{5}e^{t} - \frac{11}{30}e^{3t} - \frac{1}{30}e^{-3t} \\ 0 & 0 & -e^{3t} \end{vmatrix}$$

$$y(t) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot \int_0^t \begin{vmatrix} -e^{t} & 0 & e^{t} - e^{3t} \\ -\frac{1}{4}e^{t} + \frac{1}{4}e^{-3t} & -e^{-3t} & \frac{2}{5}e^{t} - \frac{11}{30}e^{3t} - \frac{1}{30}e^{-3t} \\ 0 & 0 & -e^{3t} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u(\tau) \end{vmatrix} d\tau$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot \int_0^t \begin{vmatrix} 9e^{t} - 9e^{3t} \\ \frac{18}{5}e^{t} - \frac{99}{30}e^{3t} - \frac{9}{30}e^{-3t} \\ -9e^{3t} \end{vmatrix} \cdot u(\tau)\, d\tau = \int_0^t \left(18e^{\tau} - 18e^{3\tau} - 27e^{-3\tau}\right) u(\tau)\, d\tau$$

$$= \quad W(s) = C \cdot (sI-A)^{-1} \cdot B = \frac{-12}{s-3} \Rightarrow y'(t) - 3y(t) = -12u(t)$$

Scansionato con CamScanner

①

$$A=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \quad B=\begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} \quad C=\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} \quad D=\begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$$

- $$X(0)=\begin{vmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad X_L(k)=A^k\cdot X(0) \quad \text{POICHÉ DIAGONALE, } A^k=\begin{vmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^k & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{4}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{vmatrix}$$

$$X_L(k)=\begin{vmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^k & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 \\ 3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^k \\ 0 \end{vmatrix}$$

- $$X(0)=\begin{vmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad Y_L(k)=C\cdot X_L(k)=\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 0 \\ 3\left(-\frac{1}{4}\right)^k \\ 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 \\ -6\left(-\frac{1}{4}\right)^k \\ 0 \end{vmatrix}$$

- $$P(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2\left(\lambda+\frac{1}{4}\right) \qquad \begin{matrix}\lambda_1=\frac{1}{2}\\ \lambda_2=\frac{1}{2}\\ \lambda_3=-\frac{1}{4}\end{matrix} \not\Rightarrow \lambda_{DES}$$

$$P(\lambda)=\lambda^3-\frac{3}{4}\lambda^2+\frac{1}{16} \qquad \alpha_0=\frac{1}{16} \qquad \alpha_1=0 \qquad \alpha_2=-\frac{3}{4}$$

$$\mathcal{C}=\begin{vmatrix} B & AB & A^2B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \det(\mathcal{C})=0 \Rightarrow \text{MATRICE NON CONTROLLABILE}$$

$$\Rightarrow \nexists\ u(k)=-k\cdot x(k)$$

ESAME DEL 07/05/2020

① SIA DATA LA RAPPRESENTAZIONE IN VARIABILI DI STATO DI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t)=3\alpha x_2(t)+3\alpha x_2(t)+2u(t) \\ \dot{x}_2(t)=3\alpha x_1(t)+3\alpha x_2(t) \\ \dot{x}_3(t)=x_1(t)+x_2(t)+3\alpha x_3(t) \\ y(t)=x_2(t)-3\alpha x_3(t) \end{cases}$$

- STUDIARE LA STABILITÀ, LA CONTROLLABILITÀ E L'OSSERVABILITÀ DEL SISTEMA AL VARIARE DI $\alpha\in\mathbb{R}$
- CALCOLARE I MODI DEL SISTEMA PER $\alpha<0$, $\alpha=0$ E $\alpha>0$ TENENDO CONTO CHE $\alpha\in\mathbb{R}$
- POSTO $x(0)=\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{3\alpha} \end{vmatrix}$, CALCOLARE LA RISPOSTA LIBERA NELLO STATO E NELL'USCITA IN FUNZIONE DI $\alpha\in\mathbb{R}$
- POSTO $\alpha=-1$, SI STABILISCA SE È POSSIBILE DETERMINARE UNA OPPORTUNA LEGGE IN RETROAZIONE $u(t)=-k\cdot x(t)$ TALE PER CUI GLI AUTOVALORI DEL SISTEMA A CICLO CHIUSO SIANO ASSEGNABILI AD ARBITRIO. NEL CASO IN CUI QUESTO SIA POSSIBILE, SI DETERMINI LA MATRICE K TALE PER CUI GLI AUTOVALORI DEL SISTEMA A CICLO CHIUSO SIANO PARI A $\lambda_{1DES}=0$, $\lambda_{2DES}=-3$, $\lambda_{3DES}=-6$

② SIA DATA LA RAPPRESENTAZIONE IN VARIABILI DI STATO DI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$$\begin{cases} x_1(k+1)=-x_1(k)-x_2(k) \\ x_2(k+1)=x_1(k)+\alpha x_2(k)+u(k) \\ y(k)=x_1(k)-x_2(k) \end{cases}$$

Scansionato con CamScanner

- STUDIARE LA STABILITÀ, LA CONTROLLABILITÀ E L'OSSERVABILITÀ DEL SISTEMA AL VARIARE DI $\alpha \in \mathbb{R}$
- POSTO $\alpha=-3$, DETERMINARE LA DECOMPOSIZIONE CANONICA DI KALMAN DEL SISTEMA, METTENDO IN EVIDENZA GLI EVENTUALI MODI OSSERVABILI E NON OSSERVABILI
- POSTO $\alpha=1$, E DATO $X(0)=\begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix}$, DETERMINARE LA RISPOSTA LIBERA NELLO SPAZIO E NELL'USCITA

① $A=\begin{vmatrix} 3\alpha & 3\alpha & 0 \\ 3\alpha & 3\alpha & 0 \\ 1 & 1 & 3\alpha \end{vmatrix}$ $B=\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ $C=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3\alpha \end{vmatrix}$ $D=\begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$

- STABILITÀ $P(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\det\begin{vmatrix} \lambda-3\alpha & -3\alpha & 0 \\ -3\alpha & \lambda-3\alpha & 0 \\ -1 & -1 & \lambda-3\alpha \end{vmatrix}=(\lambda-3\alpha)\left((\lambda-3\alpha)^2-9\alpha^2\right)=$

$=(\lambda-3\alpha)(\lambda^2-6\lambda\alpha)=\lambda(\lambda-3\alpha)(\lambda-6\alpha)$

- $\lambda_1=0,\ \nu_1=1$
- $\lambda_2=3\alpha,\ \nu_2=1$
- $\lambda_3=6\alpha,\ \nu_3=1$

$\longrightarrow$ STABILE PER $\begin{cases} 3\alpha\le 0 \\ 6\alpha\le 0 \end{cases}$ $\alpha\le 0$ STABILITÀ PER $\alpha\le 0$

CONTROLLABILITÀ $\mathcal{C}=\begin{vmatrix} B & AB & A^2B \end{vmatrix}$ $B=\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ $AB=\begin{vmatrix} 3\alpha & 3\alpha & 0 \\ 3\alpha & 3\alpha & 0 \\ 1 & 1 & 3\alpha \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6\alpha \\ 6\alpha \\ 2 \end{vmatrix}$

$A^2B=A\cdot AB=\begin{vmatrix} 3\alpha & 3\alpha & 0 \\ 3\alpha & 3\alpha & 0 \\ 1 & 1 & 3\alpha \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 6\alpha \\ 6\alpha \\ 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 36\alpha^2 \\ 36\alpha^2 \\ 18\alpha \end{vmatrix}$ $\mathcal{C}=\begin{vmatrix} 2 & 6\alpha & 36\alpha^2 \\ 0 & 6\alpha & 36\alpha^2 \\ 0 & 2 & 18\alpha \end{vmatrix}$

$\det(\mathcal{C})=2(108\alpha^2-72\alpha^2)=72\alpha^2\neq 0\quad\forall\alpha\neq 0$ CONTROLLABILITÀ PER $\alpha\neq 0$

OSSERVABILITÀ $\mathcal{O}=\begin{vmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{vmatrix}$ $C=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3\alpha \end{vmatrix}$ $CA=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3\alpha \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 3\alpha & 3\alpha & 0 \\ 3\alpha & 3\alpha & 0 \\ 1 & 1 & 3\alpha \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & -9\alpha^2 \end{vmatrix}$

$CA^2=CA\cdot A=\begin{vmatrix} 0 & 0 & -9\alpha^2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 3\alpha & 3\alpha & 0 \\ 3\alpha & 3\alpha & 0 \\ 1 & 1 & 3\alpha \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -9\alpha^2 & -9\alpha^2 & -27\alpha^3 \end{vmatrix}$ $\mathcal{O}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3\alpha \\ 0 & 0 & -9\alpha^2 \\ -9\alpha^2 & -9\alpha^2 & -27\alpha^3 \end{vmatrix}$

$\det(\mathcal{O})=9\alpha^2(-27\alpha^3)=-243\alpha^5\neq 0\quad\forall\alpha\neq 0$ OSSERVABILITÀ PER $\alpha\neq 0$

- $\lambda_1=0,\ \nu_1=1\rightarrow C_1(t)=e^{0\cdot t}=1>0\Rightarrow$ MODO ~~DIVERGENTE~~ ASINTOTICAMENTE STABILE $\forall\alpha\in\mathbb{R}$
- $\lambda_2=3\alpha,\ \nu_2=1\rightarrow C_2(t)=e^{3\alpha t}$
- $\lambda_3=6\alpha,\ \nu_3=1\rightarrow C_3(t)=e^{6\alpha t}$

MODO
- STABILE PER $\alpha<0$
- AL LIMITE DI STABILITÀ PER $\alpha=0$
- INSTABILE PER $\alpha>0$

- $X_L(s)=(sI-A)^{-1}\cdot X(0)$

$Y_L(s)=C\cdot(sI-A)^{-1}\cdot X(0)$

$sI-A=\begin{vmatrix} -3\alpha+s & -3\alpha & 0 \\ -3\alpha & s-3\alpha & 0 \\ -1 & -1 & s-3\alpha \end{vmatrix}$ $\det(sI-A)=s(s-3\alpha)(s-6\alpha)$

$(sI-A)^{-1}=\begin{vmatrix} \frac{s-3\alpha}{s(s-6\alpha)} & \frac{3\alpha}{s(s-6\alpha)} & 0 \\ \frac{3\alpha}{s(s-6\alpha)} & \frac{s-3\alpha}{s(s-6\alpha)} & 0 \\ \frac{1}{(s-3\alpha)(s+3\alpha)} & \frac{1}{(s-3\alpha)(s+3\alpha)} & \frac{(s-3\alpha)^2-3\alpha}{s(s-3\alpha)(s+3\alpha)} \end{vmatrix}$ $(sI-A)^{-1}\cdot X(0)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{3\alpha-(s-3\alpha)^2}{3\alpha s(s-3\alpha)(s+3\alpha)} \end{vmatrix}$

Scansionato con CamScanner

$$Y_L(s) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{(s-3\alpha)^2-3\alpha}{s(s-3\alpha)(s+3\alpha)} \end{vmatrix}$$

- $\alpha = -1$

$\longrightarrow \quad A = \begin{vmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$

$P(\lambda) = (\lambda)(\lambda+3)(\lambda+6)$ $\quad \cdot \lambda_1 = 0 \quad \cdot \lambda_2 = -3 \quad \cdot \lambda_3 = -6$ } ABBIAMO GIÀ I λ_{DES}

② $A = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & -1 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$

- STABILITÀ $\quad P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 \\ -1 & \lambda-\alpha \end{vmatrix} = \lambda^2 + (1-\alpha)\lambda - \alpha + 1$

$= \lambda^2 + (1-\alpha)\lambda + (1-\alpha)$

$\Delta > 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(\alpha-1) \pm \sqrt{1-2\alpha+\alpha^2+4-4\alpha}}{2} = \frac{(\alpha+1) \pm \sqrt{\alpha^2-6\alpha+5}}{2} = \frac{(\alpha-1) \pm \sqrt{(\alpha-1)(\alpha+5)}}{2}$$

CRITERIO DI JURY

- $P(\lambda=1) = 2-2\alpha > 0 \implies \alpha < 1$: $\quad \alpha < 1$
- $P(\lambda=-1)\cdot(-1)^2 = 1 > 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\longrightarrow$ $\implies$ STABILITÀ PER $0 < \alpha < 1$
- $a_n > a_0 \implies 1 > 1-\alpha \quad\quad \alpha > 0$

CONTROLLABILITÀ $\quad \mathcal{C} = \begin{vmatrix} B & AB \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} \quad \det(\mathcal{C}) = 1 \neq 0 \implies$ CONTROLLABILITÀ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

OSSERVABILITÀ $\quad \mathcal{O} = \begin{vmatrix} C \\ CA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1-\alpha \end{vmatrix} \quad \det(\mathcal{O}) = \cancel{3}-\alpha \neq 0 \to \alpha \neq \cancel{3} \implies$ OSSERVABILITÀ $\forall \alpha \neq -3$

- PER $\alpha = -3$ SISTEMA NON OSSERVABILE $\implies$ NON È POSSIBILE LA SCOMPOSIZIONE

- $\alpha = 1 \quad X(0) = \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix} \quad\quad X_L(z) = z \cdot (zI-A)^{-1} \cdot X(0) \quad\quad Y_L(k) = C \cdot X_L(k)$

$X_L(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X_L(z)]$

$$(zI-A) = \begin{vmatrix} z+1 & 1 \\ -1 & z-1 \end{vmatrix} \longrightarrow (zI-A)^{-1} = \frac{1}{z^2} \begin{vmatrix} z-1 & 1 \\ 1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{z-1}{z^2} & \frac{1}{z^2} \\ \frac{1}{z^2} & \frac{z+1}{z^2} \end{vmatrix}$$

$$X_L(z) = \begin{vmatrix} \frac{z-1}{z} & \frac{1}{z} \\ -\frac{1}{z} & \frac{z+1}{z} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3}{z}(z-1+1) & \frac{3}{z}(1+z+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & \frac{6+3z}{z} \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}[X_L(z)] = \begin{vmatrix} 3\delta(k) & 12\delta(k-1)+3\delta(k) \end{vmatrix}$$

$$Y_L(k) = 3\delta(k) - 12\delta(k-1) - 8\delta(k) = 2(\delta(k) - 6\delta(k-1))$$

Scansionato con CamScanner

ESAME DEL 16/07/2020

① SIA DATA LA RAPPRESENTAZIONE IN VARIABILI DI STATO DI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2\alpha x_2(t) + 2\alpha x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = 4\alpha x_2(t) + 4\alpha x_3(t) + u(t) \\ \dot{x}_3(t) = 2\alpha x_1(t) + 2x_2(t) + 2x_3(t) \\ y(t) = -2\alpha x_1(t) \end{cases}$$

- STUDIARE LA STABILITÀ, LA CONTROLLABILITÀ E L'OSSERVABILITÀ DEL SISTEMA AL VARIARE DEL PARAMETRO $\alpha \in \mathbb{R}$
- POSTO $\alpha = \frac{1}{2}$ E $x(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$, CALCOLARE LA RISPOSTA LIBERA NELLO STATO E NELL'USCITA
- NEL CASO $\alpha = -2$, SI STABILISCA SE È POSSIBILE DETERMINARE UNA OPPORTUNA LEGGE IN RETROAZIONE $u(t) = -K \cdot x(t)$ TALE PER CUI GLI AUTOVALORI DEL SISTEMA A CICLO CHIUSO SIANO ASSEGNABILI AD ARBITRIO. NEL CASO IN CUI QUESTO SIA POSSIBILE, SI DETERMINI LA MATRICE K TALE PER CUI GLI AUTOVALORI DEL SISTEMA A CICLO CHIUSO SIANO PARI A $\lambda_{1DES} = -2$, $\lambda_{2DES} = -4$, $\lambda_{3DES} = -6$

② SIA DATA LA RAPPRESENTAZIONE IN VARIABILI DI STATO DI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 2x_2(k) + x_3(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = 3x_3(k) + u(k) \\ x_3(k+1) = 0 \\ y(k) = x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) \end{cases}$$

- DETERMINARE LA RISPOSTA FORZATA IN USCITA DEL SISTEMA SOLLECITATO DA UN INGRESSO A GRADINO UNITARIO
- SCOMPORRE IL SISTEMA NELLA FORMA CANONICA CONTROLLABILE DI KALMAN
- POSTO $x_3(k+1) = \gamma x_3(k)$, DETERMINARE PER QUALI VALORI DI $\gamma \in \mathbb{R}$ IL SISTEMA DUALE RISULTA CONTROLLABILE E/O OSSERVABILE

①

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 2\alpha & 2\alpha \\ 0 & 4\alpha & 4\alpha \\ 2\alpha & 2 & 2 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} -2\alpha & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$$

- STABILITÀ $\det(\lambda I - A) = 0$

$$\det \begin{vmatrix} \lambda & -2\alpha & -2\alpha \\ 0 & \lambda - 4\alpha & -4\alpha \\ -2\alpha & -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (\lambda - 4\alpha)(\lambda^2 - 2\lambda - 4\alpha^2) + 4\alpha(-2\lambda - 4\alpha^2) = 0$$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 4\alpha^2\lambda - 4\alpha\lambda^2 + \cancel{8\alpha\lambda} + \cancel{16\alpha^3} - \cancel{8\alpha\lambda} - \cancel{16\alpha^3} = 0 \qquad \lambda^3 + (-4\alpha - 2)\lambda^2 + (-4\alpha^2)\lambda = 0$$

CRITERIO DI JURY

- $P(\lambda = 1) > 0 \quad 1 - 4\alpha - 2 - 4\alpha^2 > 0 \quad -4\alpha^2 - 4\alpha - 1 > 0 \quad \alpha \neq -\frac{1}{2}$
- $P(\lambda = -1) > 0 \quad -1 - 4\alpha - 2 + 4\alpha^2 > 0 \quad 4\alpha^2 - 4\alpha - 3 > 0 \quad \alpha < 0 \lor \alpha > 2$
- $a_n > a_0 \quad 1 > 0$ ✓

STABILITÀ PER $\alpha < 0$ E $\alpha > 2$

Scansionato con CamScanner

CONTROLLABILITÀ $\quad C = \begin{vmatrix} B & AB & A^2B \end{vmatrix}$

$$B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad AB = \begin{vmatrix} 0 & 2\alpha & 2\alpha \\ 0 & 4\alpha & 4\alpha \\ 2\alpha & 2 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\alpha \\ 4\alpha \\ 2 \end{vmatrix}$$

$$A^2B = \begin{vmatrix} 0 & 2\alpha & 2\alpha \\ 0 & 4\alpha & 4\alpha \\ 2\alpha & 2 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2\alpha \\ 4\alpha \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8\alpha^2+4\alpha \\ 8\alpha^2+4\alpha \\ 4\alpha^2+8\alpha+4 \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} 0 & 2\alpha & 8\alpha^2+4\alpha \\ 1 & 4\alpha & 8\alpha^2+4\alpha \\ 0 & 2 & 4\alpha^2+8\alpha+4 \end{vmatrix}$$

$$\det(C) = -(8\alpha^3+16\alpha^2+8\alpha-16\alpha^2-8\alpha) = -8\alpha^3 \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 0$$

CONTROLLABILITÀ PER $\alpha \neq 0$

OSSERVABILITÀ $\quad O = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} -2\alpha & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad CA = \begin{vmatrix} 0 & -4\alpha^2 & -4\alpha^2 \end{vmatrix}$

$$CA^2 = \begin{vmatrix} 0 & -4\alpha^2 & -4\alpha^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2\alpha & 2\alpha \\ 0 & 4\alpha & 4\alpha \\ 2\alpha & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8\alpha^3 & -16\alpha^3-8\alpha^2 & -16\alpha^3-8\alpha^2 \end{vmatrix}$$

$$O = \begin{vmatrix} -2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -4\alpha^2 & -4\alpha^2 \\ -8\alpha^3 & -16\alpha^3-8\alpha^2 & -16\alpha^3-8\alpha^2 \end{vmatrix} \qquad \det(O) = -2\alpha \det \begin{vmatrix} -4\alpha^2 & -4\alpha^2 \\ -16\alpha^3-8\alpha^2 & -16\alpha^3-8\alpha^2 \end{vmatrix} = 0$$

NON OSSERVABILE $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

- $\alpha = -\frac{1}{2} \rightarrow A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$

$$x(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad x_L(t)? \qquad y_L(t)?$$

$$X_L(s) = (sI-A)^{-1} \cdot x(0) \qquad Y_L(s) = C \cdot X_L(s)$$

$$(sI-A) = \begin{vmatrix} s & 1 & 1 \\ 0 & s+2 & 2 \\ 1 & -2 & s-2 \end{vmatrix} \qquad \det(sI-A) = (s+2)(s^2-2s-1) - 2(-2s-1)$$

$$= s^3 \cancel{-2s^2} - s \cancel{+2s^2} \cancel{-4s} \cancel{-2} \cancel{+4s} \cancel{+2}$$

$$\det(sI-A) = s^3 - s = s(s^2-1)$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{s(s^2-1)} \cdot \begin{vmatrix} s^2 & -s & -s \\ 2 & s^2-2s-1 & -2s \\ -s-2 & 2s-1 & s(s+2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{s}{(s^2-1)} & -\frac{1}{s(s^2-1)} & -\frac{1}{s(s^2-1)} \\ \frac{2}{s(s^2-1)} & \frac{s^2-2s-1}{s(s^2-1)} & \frac{-2}{s^2-1} \\ \frac{-s-2}{s(s^2-1)} & \frac{2s-1}{s(s^2-1)} & \frac{s+2}{s^2-1} \end{vmatrix}$$

$$X_L(s) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{s(s-1)(s+1)} \\ -\frac{2}{(s-1)(s+1)} \\ \frac{s+2}{(s-1)(s+1)} \end{vmatrix} \qquad \frac{-1}{s(s-1)(s+1)} = \quad + \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} = \frac{(s+1)A + (s-1)B}{s(s-1)(s+1)}$$

Scansionato con CamScanner