TEOREMA SPETTRALE: SIA A UNA MATRICE QUADRATA $n \times n$

① $\exists$ BASE ORTONORMALE DI $\mathbb{R}^n$ COSTITUITA DA n AUTOVETTORI DI A

② $\exists$ MATRICE ORTOGONALE $M \mid M^{-1} \cdot A \cdot M = M^T \cdot A \cdot M = D$ (= DIAGONALE)

$\Bigg\} \Rightarrow A$ È SIMMETRICA

LO SPETTRO DI UN ENDOMORFISMO INDICA PROPRIO L'INSIEME DEI SUOI AUTOVALORI.

SIA $T: V \to V$ UN ENDOMORFISMO SU UNO SPAZIO VETTORIALE REALE DI DIMENSIONE n, $\mathcal{B}$ UNA BASE DI V E $A = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ LA MATRICE ASSOCIATA A T RISPETTO A $\mathcal{B}$. SE TUTTI GLI n AUTOVALORI DI T SONO REALI, VALE CHE $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$ E $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$ (TRACCIA). SI DIMOSTRA PER INDUZIONE, MA VEDREMO SOLO IL PASSO ZERO CON $n=2$

PASSO ZERO)

$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \qquad P(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda\underbrace{(a+d)}_{\operatorname{tr} A} + \underbrace{ad - bc}_{\det A} = 0$$

DETTI $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ I DUE AUTOVALORI, $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - \lambda(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1 \cdot \lambda_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + d = \lambda_1 + \lambda_2 \\ ad - bc = \lambda_1 \lambda_2 \end{cases} \checkmark$$

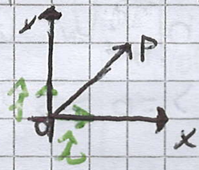
SI OSSERVI CHE $\det A$ E $\operatorname{tr} A$ NON DIPENDONO DALLA BASE SCELTA

GEOMETRIA ANALITICA...

...NEL PIANO $\mathbb{R}^2$

LA PRIMA COSA DA FARE È FISSARE NEL PIANO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO

$\mathcal{R}\,C(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

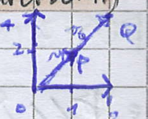


INDICHIAMO IL GENERICO PUNTO P CON LE COORDINATE $P(x_P, y_P)$ E IL VETTORE $v_P = \begin{vmatrix} x_P \\ y_P \end{vmatrix} \in \mathbb{R}$. $\|v_P\| = \overline{PO} = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$

IN GENERALE, CALCOLIAMO LA DISTANZA TRA DUE PUNTI P E Q COME $\overline{PQ} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$

E I VETTORI v_P E v_Q RISULTANO PARALLELI $\Longleftrightarrow v_P = \lambda v_Q$ (VETTORI LINEARMENTE DIPENDENTI)

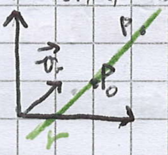
AD ESEMPIO, SIA $v_P = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$ E $v_Q = \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \end{vmatrix}$. È CHIARO CHE $v_Q = 2 v_P \Rightarrow v_Q // v_P$



(SI OSSERVI CHE I TRE PUNTI O, P, Q SONO ALLINEATI). UN'ALTRA CONDIZIONE DI PARALLELISMO È LEGATA AGLI ANGOLI: VOGLIAMO CHE $\cos\theta = \dfrac{\langle v_P, v_Q \rangle}{\|v_P\| \, \|v_Q\|} = \pm 1$

LA RETTA

UNA RETTA IN $\mathbb{R}^2$ È INDIVIDUATA DA UN PUNTO P_0 E UNA DIREZIONE $v_r \neq 0_V \wedge v_r \in \mathbb{R}^2$ DETTO VETTORE DIRETTORE



r È UN SOTTOSPAZIO AFFINE DI $\mathbb{R}^2$ $\quad P \in r \Leftrightarrow \overrightarrow{P P_0} // \vec{v_r}$

$\Rightarrow P - P_0 = t \cdot v_r \quad (t \in \mathbb{R})$

$$\to \begin{cases} x = x_0 + t\ell \\ y = y_0 + tm \end{cases} \quad \text{CON } P = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \quad v_r = \begin{vmatrix} \ell \\ m \end{vmatrix}$$

EQUAZIONE PARAMETRICA DI r PER P_0 DI VETTORE DIRETTORE v_r

AD ESEMPIO, VIENE CHIESTA L'EQUAZIONE PARAMETRICA DI r PER $P_0 = \begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$ E $v = \begin{vmatrix}-1\\1\end{vmatrix}$

COSTRUIAMO L'EQUAZIONE PARAMETRICA $P = P_0 + t v = \begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix} + t\begin{vmatrix}-1\\1\end{vmatrix}$

$$r = \left\{ \begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix} + t\begin{vmatrix}-1\\1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1-t\\2+t\end{vmatrix} \,\middle|\, t\in\mathbb{R} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 1-t \\ x = 2+t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

DATI DUE PUNTI $P_1, P_2 \in r$, POSSIAMO SCRIVERE L'EQUAZIONE DELLA RETTA SAPENDO CHE, DATO UN GENERICO P, $P-P_1 \,//\, P_2-P_1 \Rightarrow P-P_1 = t(P_2-P_1) \Rightarrow P = P_1 + t(P_2-P_1)$

$$\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}x_1\\y_1\end{vmatrix} + t\begin{vmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{vmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x = x_1 + t(x_2-x_1) \\ y = y_1 + t(y_2-y_1) \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

- ALTRA STRADA (EQUAZIONE CARTESIANA): $rk\left(P-P_1 \mid P_2-P_1\right) = 1 \Rightarrow \det\left|P-P_1 \mid P_2-P_1\right| = 0$

$$\rightarrow \det\begin{vmatrix}x-x_1 & x_2-x_1\\ y-y_1 & y_2-y_1\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (y_2-y_1)(x-x_1) - (x_2-x_1)(y-y_1) = 0$$

IMPONENDO CHE $x_2 \neq x_1 \wedge x_2 \neq y_1 \Rightarrow \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{x_2-y_1}$

AD ESEMPIO, DATI I PUNTI $P_1 = \begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$ E $P_2 = \begin{vmatrix}-1\\1\end{vmatrix}$, SCRIVIAMO L'EQUAZIONE PARAMETRICA:

$$\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix} + t\begin{vmatrix}-1-1\\1-2\end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2-t \end{cases}, \; t\in\mathbb{R} \quad \text{PARAMETRICA}$$

$$\det\begin{vmatrix}x-1 & -2\\ x-2 & -1\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{-x+2y-3=0}$$

UN'ALTRA POSSIBILE SITUAZIONE VUOLE, DATO $P_0 \in r$ E $r \perp n = \begin{vmatrix}a\\b\end{vmatrix}$, UN GENERICO $P \in r \Leftrightarrow P-P_0 \perp n \Rightarrow \langle P-P_0, n\rangle = 0 \rightarrow \left\langle \begin{vmatrix}x-x_0\\y-x_0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}a\\b\end{vmatrix} \right\rangle = 0 \Rightarrow a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0$

$ax + by \underbrace{- a x_0 - b y_0}_{=c} = 0 \Rightarrow ax + by + c = 0$

AD ESEMPIO, DATO $P_0 = \begin{vmatrix}1\\-1\end{vmatrix}$ E $n = \begin{vmatrix}1\\3\end{vmatrix} \rightarrow x + 3y + 2 = 0$

POSIZIONE RECIPROCA TRA DUE RETTE r, s, CON $v_r = \begin{vmatrix}\alpha_1\\\beta_1\end{vmatrix}$ E $v_s = \begin{vmatrix}\alpha_2\\\beta_2\end{vmatrix}$

- $r \,//\, s \Leftrightarrow v_r \,//\, v_s \Leftrightarrow \det\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix} = 0$

- $r \perp s \Leftrightarrow v_r \perp v_s \Leftrightarrow \langle v_r, v_s\rangle = 0$

AD ESEMPIO, DATE $r_1: 2x-y+3=0$; $r_2: 4x-2y+1=0$; $r_3: -x-2y-1=0$, VOGLIAMO DETERMINARE COME È r_1 RISPETTO AD r_2 E r_3

$v_{r_1} = \begin{vmatrix}2\\-1\end{vmatrix}$; $v_{r_2} = \begin{vmatrix}4\\-2\end{vmatrix}$; $v_{r_3} = \begin{vmatrix}-1\\-2\end{vmatrix}$

$r_1 r_2 \rightarrow 2v_{r_1} = v_{r_2} \Rightarrow r_1 // r_2$ $\qquad$ $r_1 r_3 \rightarrow \langle v_{r_1}, v_{r_3}\rangle = 0 \Rightarrow r_1 \perp r_3$

• $r_1 \cap r_2 \neq \emptyset$

$$\rightarrow \begin{cases} r_1 = a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ r_2 = a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad \left|\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{A} & b \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right|$$

- $rkA = rkA|b \overset{=2}{\Rightarrow}$ RETTE INCIDENTI IN $P(x_P; y_P)$
- $rkA = 1$:

  $\Delta\ rk(A|b) = 2 \Rightarrow r_1 // r_2$

  $\Delta\ rk(A|b) = 1 \Rightarrow r_1 \equiv r_2$

FASCI DI RETTE

CON FASCIO DI RETTE SI INTENDE UN INSIEME DI INFINITE RETTE E DISTINGUIAMO I FASCI IN:

- IMPROPRI $\rightarrow$ INFINITE RETTE $r': a'x + b'y + c' = 0$ PARALLELE AD $r: ax + by + c = 0$
- PROPRI $\rightarrow$ INFINITE RETTE PASSANTI PER $P = \begin{vmatrix} x_P \\ y_P \end{vmatrix}$ $\quad r': a(x - x_P) + b(y - y_P) = 0, \quad a, b \neq 0$

ALTRE PROPRIETÀ GEOMETRICHE

- PUNTO MEDIO M DI $P_1 = \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix}$ E $P_2 = \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix}$ $\longrightarrow M - P_1 = M - P_2 \Longrightarrow M = \begin{vmatrix} x_M \\ y_M \end{vmatrix} = \dfrac{P_1 + P_2}{2} \Rightarrow x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2};\ y_M = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$
- BARICENTRO G DI UN TRIANGOLO DI ESTREMI $P_1, P_2, P_3 \longrightarrow G = \dfrac{P_1 + P_2 + P_3}{3}$
- ASSE DI UN SEGMENTO $\overline{AB}$ $\rightarrow$ LUOGO GEOMETRICO DEI PUNTI EQUIDISTANTI DA A E B E RETTA PERPENDICOLARE ALLA RETTA PASSANTE PER IL PUNTO MEDIO DI $\overline{AB}$ E SI DICE CHE A E B SONO SIMMETRICI RISPETTO ALL'ASSE

- DISTANZA PUNTO-RETTA $\longrightarrow P_0 = \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$, $r: ax + by + c = 0$ $\quad d_{P_r} = ||P_0 - H||$, CON H LA PROIEZIONE ORTOGONALE DI P_0 SU r. $P_0 - H // n_r$, CON $n_r = \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$

$$|\langle P_0 - H, n_r \rangle| = ||n_r||\,||P_0 - H|| \Rightarrow d_r = \frac{|\langle P_0 - H, n_r \rangle|}{||n_r||} =$$

$$= \frac{\left|\left\langle \begin{vmatrix} x_0 - x_H \\ y_0 - y_H \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} \right\rangle\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a(x_0 - x_H) + b(y_0 - y_H)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 - ax_H - by_H|}{\sqrt{a^2 + b^2}} =$$

$$= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- DISTANZA TRA DUE RETTE PARALLELE $\rightarrow$ SI PRENDE UN QUALSIASI PUNTO DELLA PRIMA E SE NE CALCOLA LA DISTANZA DALL'ALTRA

GENERALITÀ SULLA CIRCONFERENZA

LA CIRCONFERENZA È IL LUOGO GEOMETRICO DEI PUNTI EQUIDISTANTI DA UN CERTO PUNTO $C = \begin{vmatrix} x_C \\ y_C \end{vmatrix}$ IDENTIFICATO COME IL CENTRO DELLA CIRCONFERENZA. LA DISTANZA DEL GENERICO PUNTO $P = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ DALLA CENTRO PRENDE IL NOME DI **RAGGIO R**

$\overline{PC}=R \qquad \sqrt{(x-x_c)^2-(y-y_c)^2}=R \Rightarrow \boxed{(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=R^2}$

Un'altra espressione che identifica la circonferenza la si ricava con dei calcoli algebrici

$x^2-2x_c x+x_c^2+y^2-2y_c y+y_c^2-R^2=0$. Posti $a=-2x_c$, $b=-2y_c$ e $c=x_c^2+y_c^2-R^2$

$\left(\Rightarrow X_c=\begin{pmatrix}-a/2\\-b/2\end{pmatrix}\right)$ si ottiene $\boxed{x^2+y^2+ax+by+c=0}$

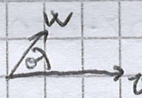
PRODOTTO VETTORIALE

Dato $v=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$ e $w=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$, il prodotto vettoriale $v\times w$ restituisce:

$v\times w=(y_1z_2-y_2z_1,\ -x_1z_2+x_2z_1,\ x_1y_2-x_2y_1)^T$. Infatti

$$v\times w=\det\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=(y_1z_2-y_2z_1)\hat{i}-(x_1z_2-x_2z_1)\hat{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\hat{k}$$

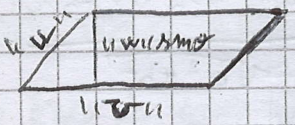
Per il prodotto vettoriale valgono le seguenti proprietà (consideriamo $v,w,u\in\mathbb{R}^3$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$):

1. $v\times w=-w\times v$ ANTISIMMETRICO
2. $(\lambda v+\mu u)\times w=\lambda(v\times w)+\mu(u\times w)$ LINEARITÀ
3. $v\times w=0_V \Leftrightarrow v /\!/ w$ CRITERIO DI PARALLELISMO
4. $\langle v\times w, v\rangle=\langle v\times w, w\rangle=0$ DIREZIONE DEL VETTORE
5. Il verso di $v\times w$ si determina con la regola della mano dx: pollice su v, indice su w e, a seconda di come è orientato il palmo, si ha $\pm v\times w$ VERSO
6. $\|v\times w\|=\|v\|\,\|w\|\sin\theta$ 

MODULO

Infatti $\|v\times w\|^2=(\|v\|\,\|w\|)^2-(\langle v,w\rangle)^2=\|v\|^2\|w\|^2(1-\cos^2\theta)=\|v\|^2\|w\|^2\sin\theta$

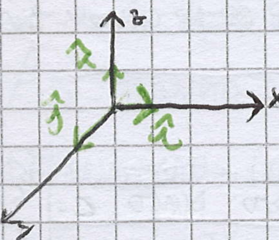
Si può notare che $\|v\times w\|$ rappresenta anche l'area di quel parallelogramma di lati w e v



$A=\overset{\text{BASE}}{\|v\|}\ \overset{\text{ALTEZZA}}{\|w\|\sin\theta}$

NELLO SPAZIO $\mathbb{R}^3$

Si fissa, come in $\mathbb{R}^2$, un sistema di riferimento cartesiano $R(O,\hat{i},\hat{j},\hat{k})$.



Tutte le relazioni tra vettori viste nel piano valgono anche nello spazio estendendo all'incognita z (distanza tra due punti, punto medio, parallelismo ...)

RETTE NELLO SPAZIO

① RETTA r PASSANTE PER P_0 E $r // v_r$

$P \in r \iff P-P_0 // v_r \Rightarrow P-P_0 = t v_r \quad (t \in \mathbb{R}) \longrightarrow \boxed{P = P_0 + t v_r}$ EQUAZIONE PARAMETRICA

$$r = \left\{ \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{vmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} \longrightarrow \begin{cases} x = x_0 + t x_r \\ y = y_0 + t y_r \\ z = z_0 + t z_r \end{cases}$$

② RETTA r PER DUE PUNTI P_1 E P_2

$P \in r \iff P-P_1 = t(P_2-P_1)$ DETTO $v_r = P_2 - P_1 \longrightarrow P = P_1 + t v_r$

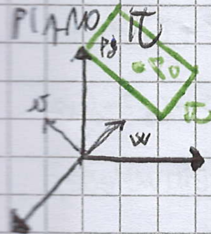
AD ESEMPIO, DATI $P_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}$ E $P_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \in r$, $r: \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{vmatrix}, t \in \mathbb{R}$

• ALTRO MODO: $rk \begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 \\ y-y_1 & y_2-y_1 \\ z-z_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix} = 1 \xrightarrow[\text{DEGLI ORLATI}]{\text{TEOREMA}} \begin{cases} \det \begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 \\ y-y_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix} = 0 \\ \det \begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 \\ z-z_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$ EQUAZIONE 1, EQUAZIONE 2

RIPRENDENDO L'ESEMPIO DI PRIMA, $rk \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ y-2 & -1 \\ z-3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \longrightarrow \begin{cases} -x+y-1=0 \\ -2x-z+5=0 \end{cases}$ EQUAZIONE CARTESIANA

PIANI

① PIANO π PASSANTE PER P_0 E PARALLELO AI VETTORI v, w



$P \in \pi \iff P-P_0 \in Span(v,w) \longrightarrow P = P_0 + tv + sw \quad t,s \in \mathbb{R}$

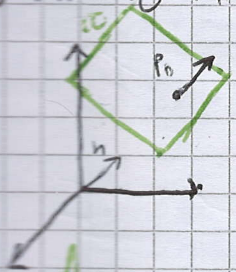
$$\pi = \left\{ \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix} + s \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{vmatrix} \;\middle|\; t,s \in \mathbb{R} \right\}$$

AD ESEMPIO, DATI IL PUNTO $P = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}$, I VETTORI DIRETTORI $v = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}$ E $w = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$

$\pi: \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} t + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} s \longrightarrow \pi \begin{cases} x = 1-t+s \\ y = 2+t \\ z = 3+2t+s \end{cases} \quad t,s \in \mathbb{R}$ EQUAZIONE PARAMETRICA

E $\det \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \pi: x+3y-z-4=0$ EQUAZIONE CARTESIANA

② PIANO π PASSANTE PER P_0 E PERPENDICOLARE AD n



$P-P_0 \in \pi \iff \langle P-P_0, n \rangle = 0 \qquad n = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \in \mathbb{R}; \quad P_0 = \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix} \qquad P = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$

$\longrightarrow \quad = a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

AL VARIARE DI a,b,c OTTENIAMO LA STELLA DI PIANI PASSANTI PER P_0

③ PIANO π PASSANTE PER 3 PUNTI NON ALLINEATI

I VETTORI P_2-P_1 E P_3-P_2 SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI E, PRESO UN GENERICO $P \in \pi$,

$P-P_1 \in Span(P_2-P_1, P_3-P_2) \Longrightarrow \det \begin{vmatrix} P-P_1 \\ P_2-P_1 \\ P_3-P_1 \end{vmatrix} = 0$