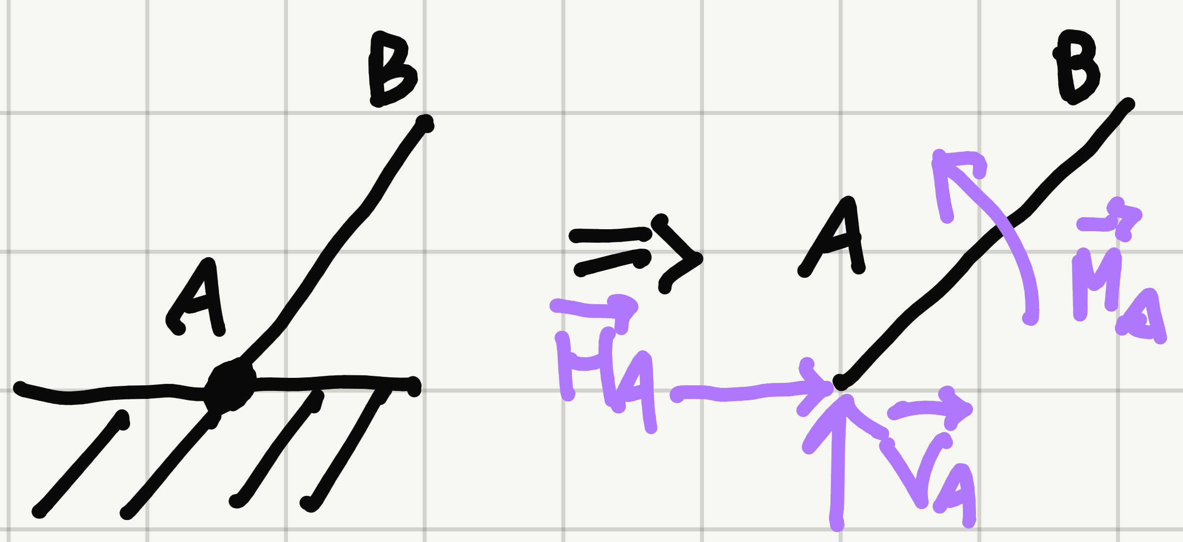
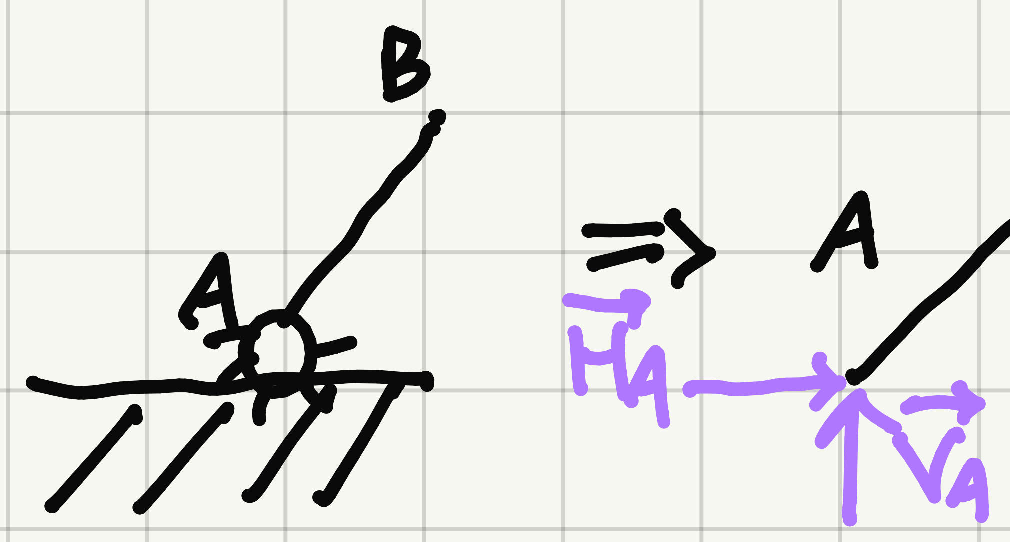
INTRODUZIONE STATICA

TRADUZIONE VINCOLI → FORZE REATTIVE

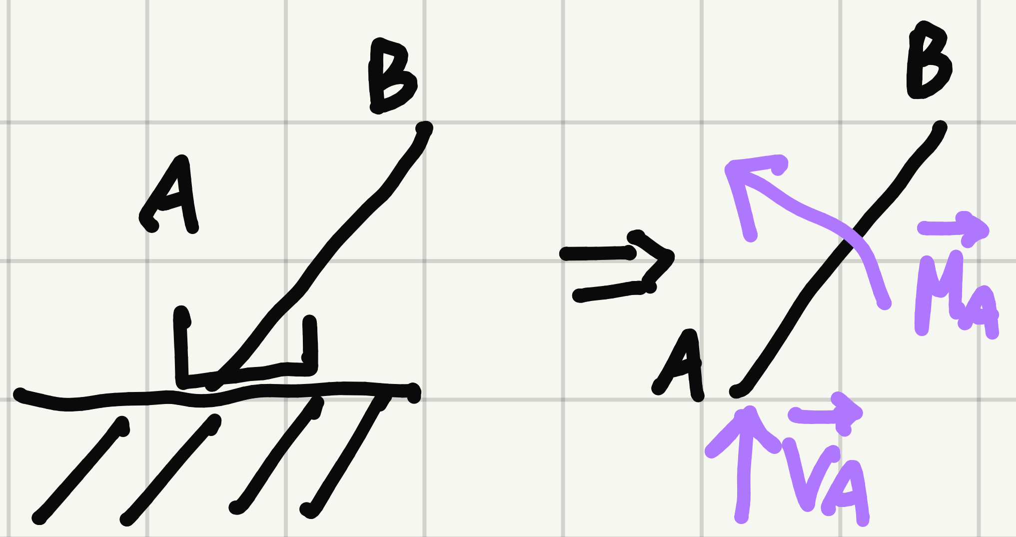
INCASTRO



CERNIERA

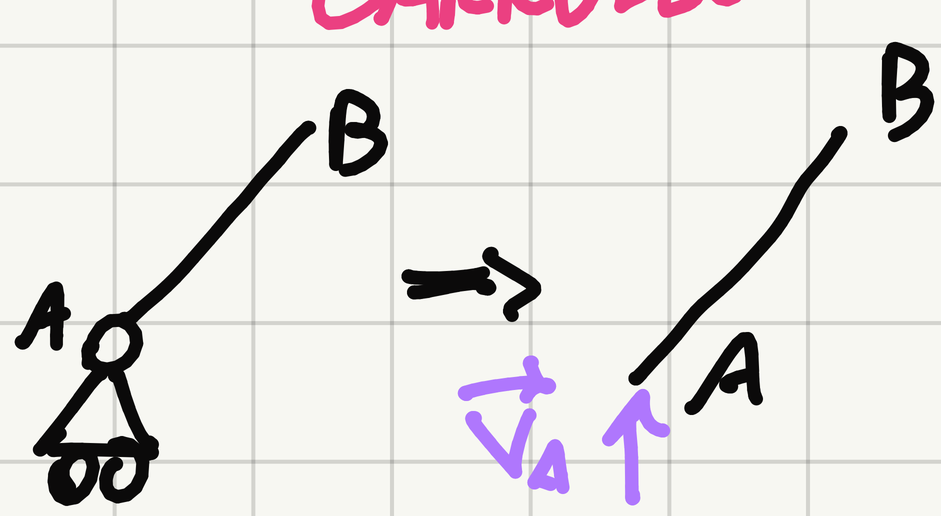


PATTINO

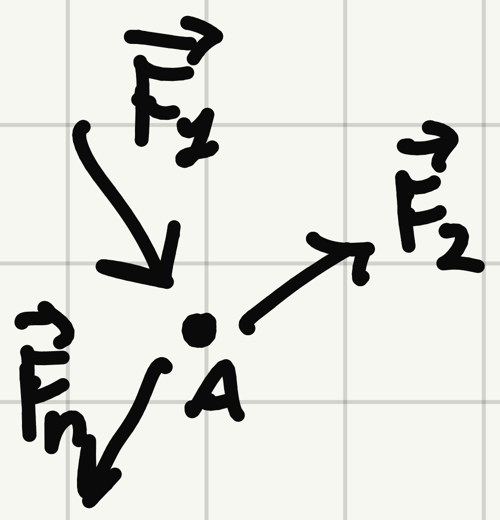


MANICOTTO

CARRELLO



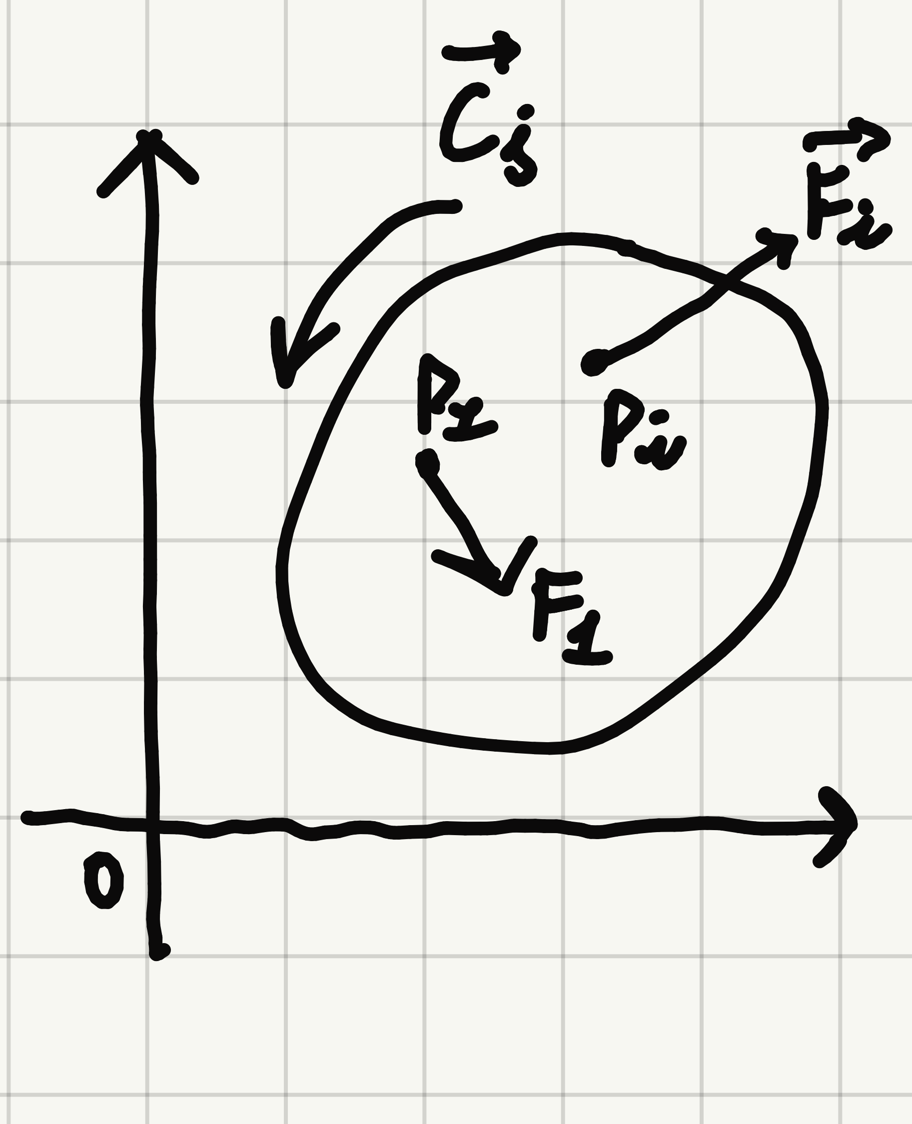
STATICA PUNTO MATERIALE



$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_x = 0 \\ \sum \vec{F}_y = 0 \end{cases}$$

EQUAZIONE CARDINALE DELLA STATICA PER IL PUNTO MATERIALE

STATICA CORPO RIGIDO

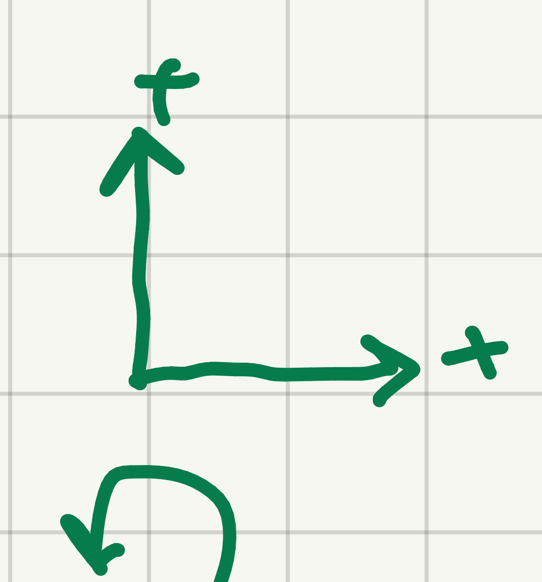


$$\begin{cases} \sum \vec{F} = 0 \\ \sum \vec{M}_o = 0 \end{cases}$$

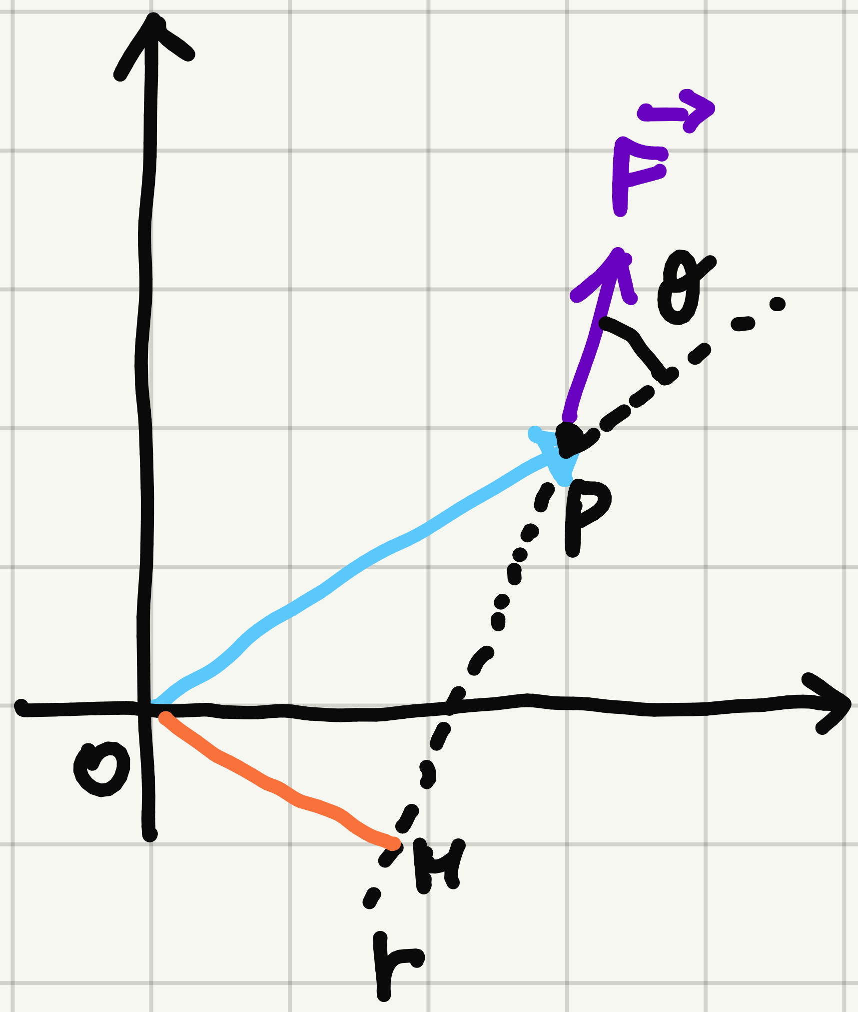
FORZE

MOMENTI E COPPIE RISPETTO POLO O

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{x_i} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} F_{y_i} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^{m} \vec{C}_j = 0 \end{cases}$$



MOMENTO



$$\vec{M}_O = (P-O) \times \vec{F} = \overline{PO}\, F \sin\theta\, \hat{k}$$

$$= \overline{OH}\, F\, \hat{k}$$

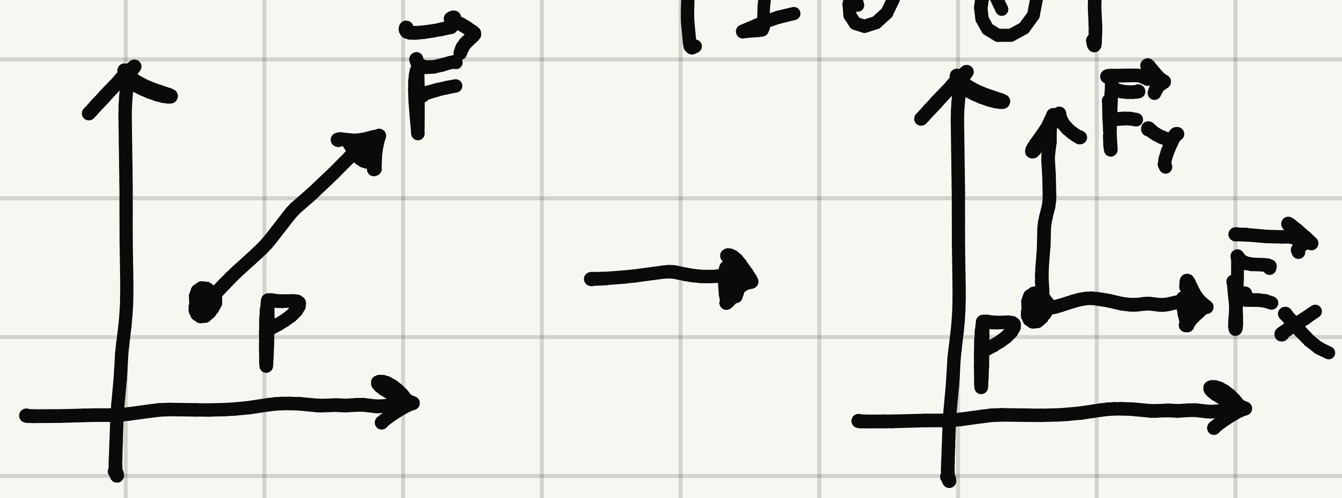
$OH = OP \sin\theta$ BRACCIO DI F

$$\vec{M}_O = (P-O)\times\vec{F} = (x_P\hat{i} + y_P\hat{j}) \times (F_x\hat{i} + F_y\hat{j}) = \cancel{x_P F_x (\hat{i}\times\hat{i})} +$$

$$+ x_P F_y (\hat{i}\times\hat{j}) + y_P F_x (\hat{j}\times\hat{i}) + \cancel{y_P F_y (\hat{j}\times\hat{j})} =$$

$$\hat{i}\times\hat{j} = \det\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{k} \qquad \hat{j}\times\hat{i} = \det\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\hat{k}$$

$$= (x_P F_y - y_P F_x)\hat{k}$$



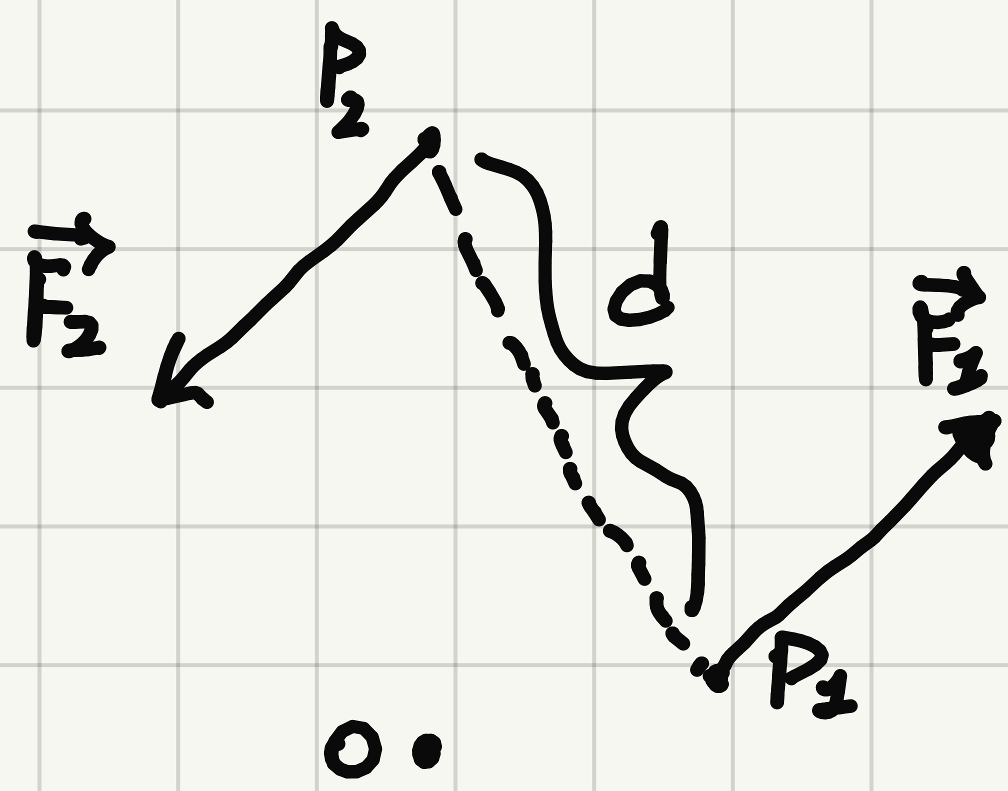
COPPIA

SISTEMA DI DUE FORZE DI RISULTANTE NULLA E MOMENTO NON NULLO

$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$

$\vec{F}_1 \parallel \vec{F}_2$

$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

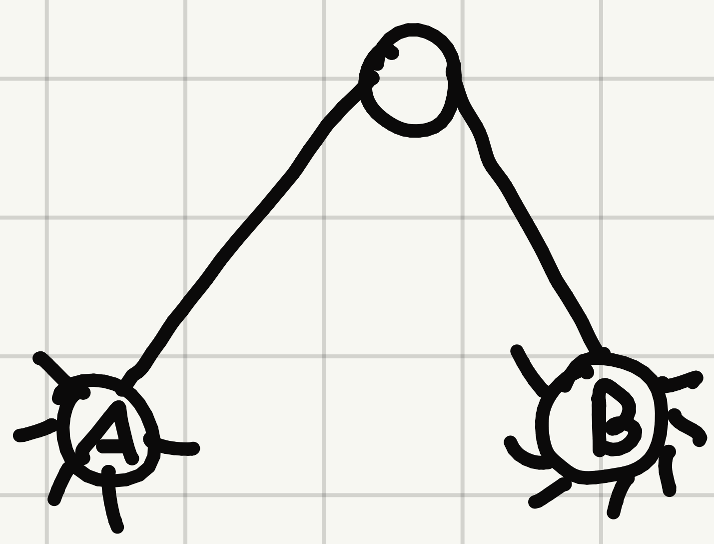


$$\vec{M}_O = (P_1 - O)\times\vec{F}_1 + (P_2 - O)\times\vec{F}_2$$

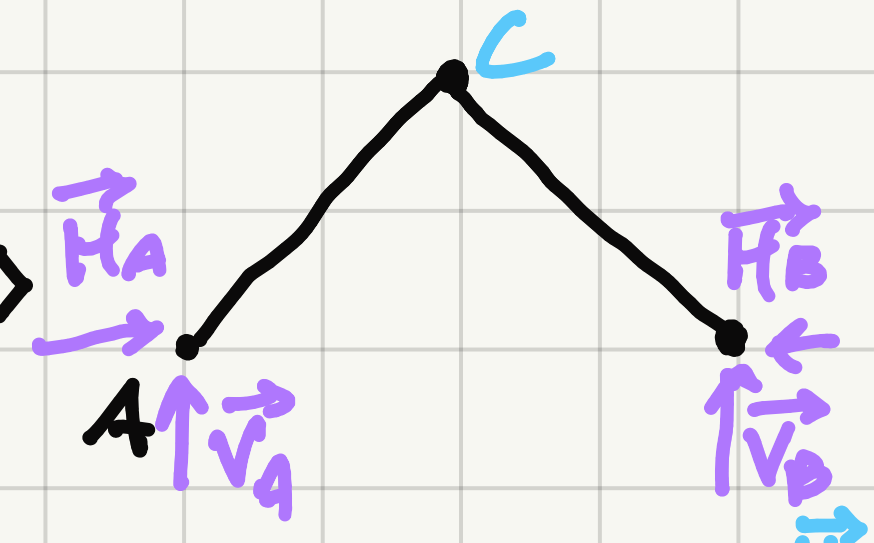
$$= ((P_1 - O) - (P_2 - O))\times\vec{F}_1 =$$

$$= \vec{d}\times\vec{F} \Rightarrow \vec{C} = F d \hat{k}$$

STATICA SISTEMA DI CORPI RIGIDI

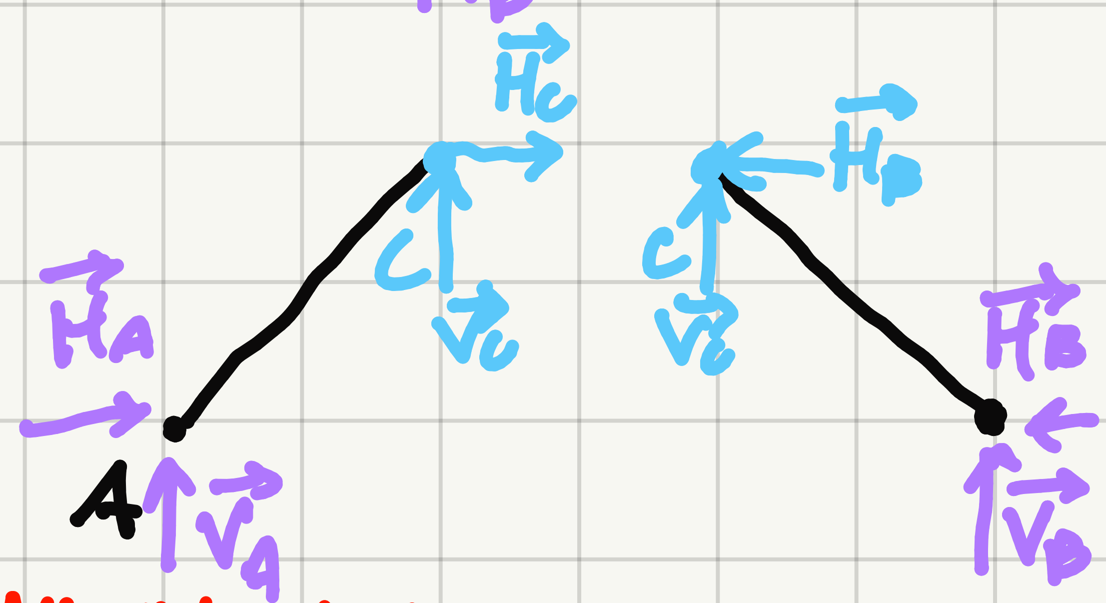


$\Rightarrow$



REAZIONI VINCOLARI $\geq$ EQUAZIONI

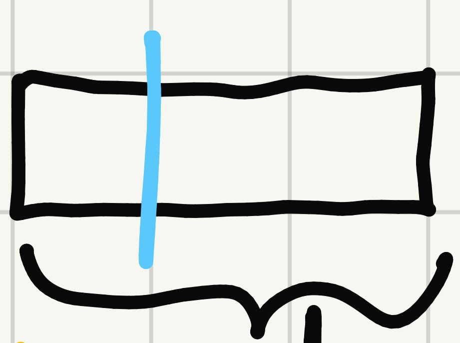
$\Rightarrow$ SPEZZARE I CORPI

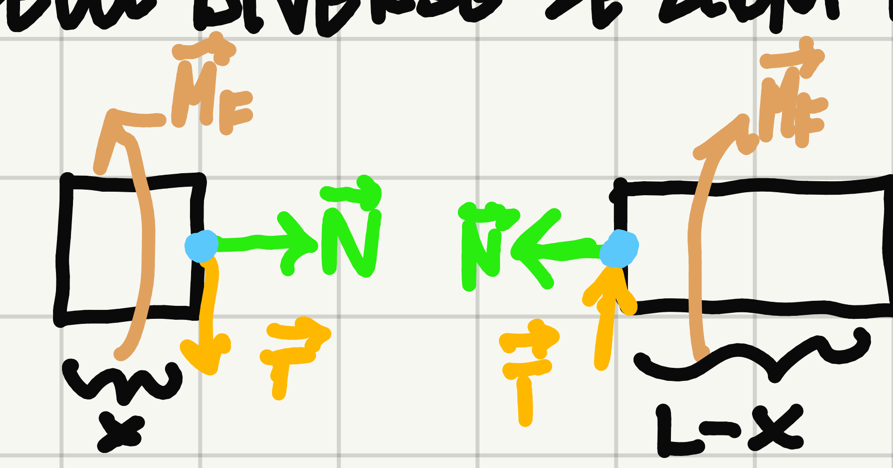


FORZE INTERNE

AZIONI INTERNE

STUDIO SOLLECITAZIONI DELLE DIVERSE SEZIONI DI UN CORPO RIGIDO





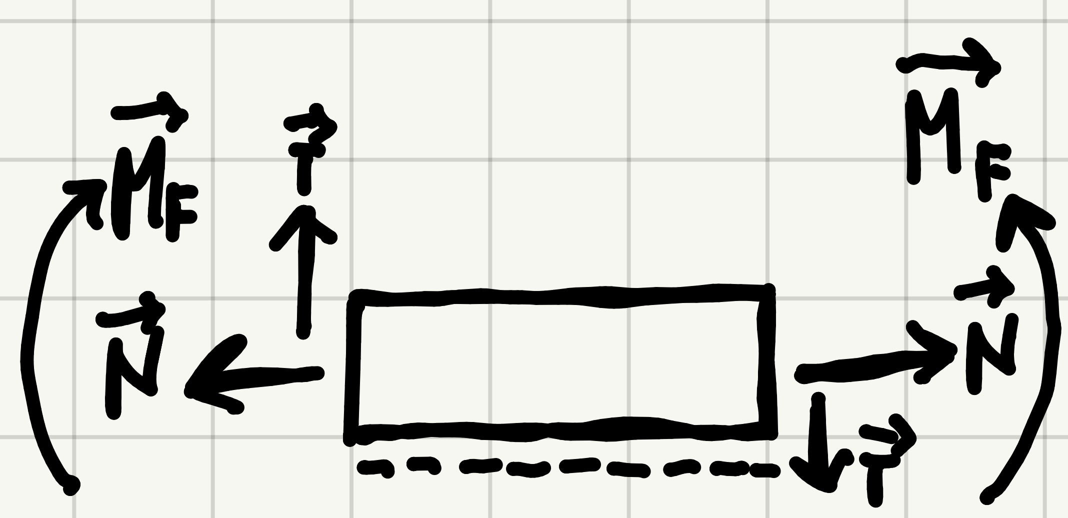
MOMENTO FLETTENTE

AZIONE ASSIALE

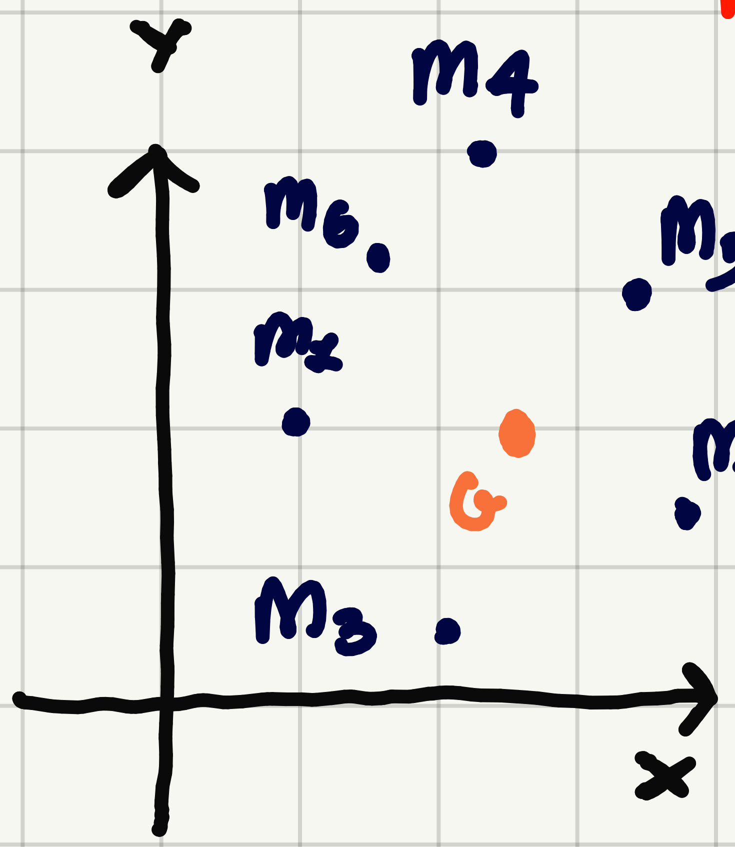
INCASTRO

AZIONE ASSIALE DI TAGLIO

! LA COPPIA DELLE FORZE T FA RUOTARE L'ELEMENTO IN SENSO ORARIO



BARICENTRO

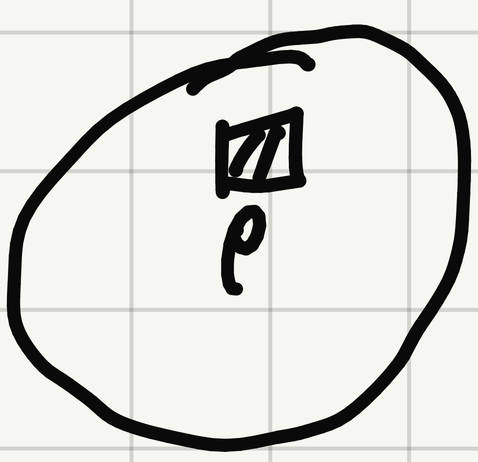


$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad Y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

DEFINIZIONE CON MOMENTO STATICO DEL 1° ORDINE

ASSE x $\quad S_x = m d_x \quad S_y = m d_y \quad X_G = \frac{S_y}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad Y_G = \frac{S_x}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$

INTEGRALE TRIPLO

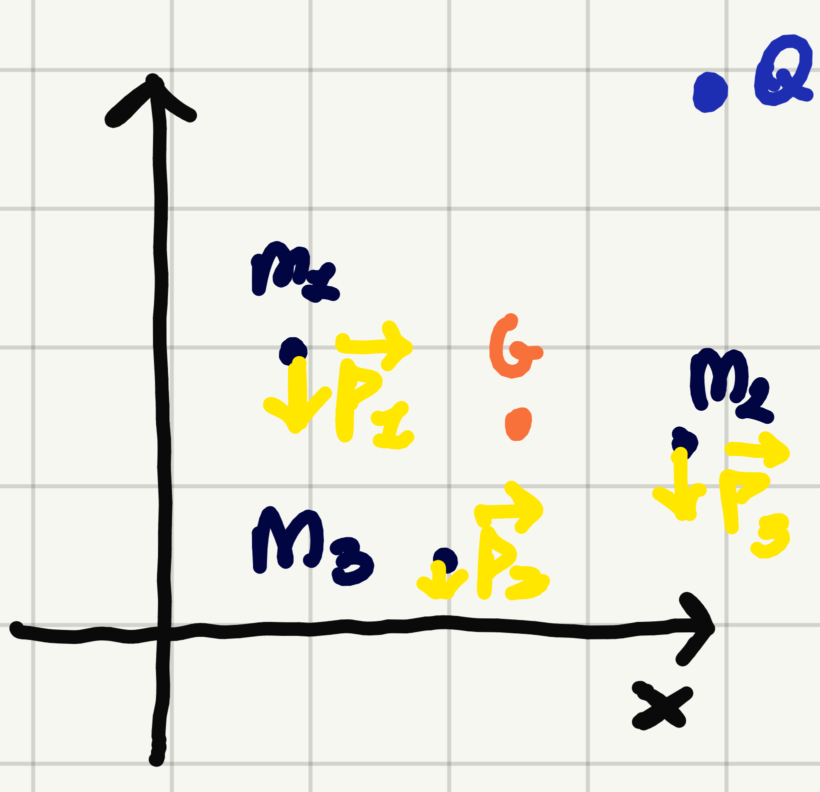


IN UN CORPO RIGIDO, $X_G = \frac{1}{m}\int_V \rho x \, dV$ E $Y_G = \frac{1}{m}\int_V \rho y \, dV$

POSSONO ESSERE ANCHE CASI DI DENSITÀ SUPERFICIALE σ E LINEARE λ

PROPRIETÀ

- $G \equiv$ CENTRO FORZE PESO



BRACCI FORZE PESO

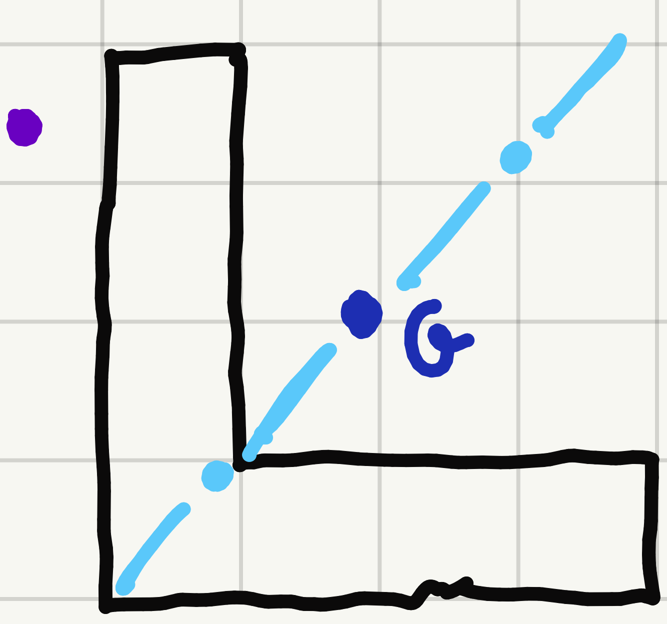
$$\vec{M}_Q = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_Q)\hat{\imath} \times P_i \hat{\jmath} = -\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_Q) m_i g \hat{k}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} (x_i m_i g - x_Q m_i g) = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i g - x_Q M_{TOT} g$$

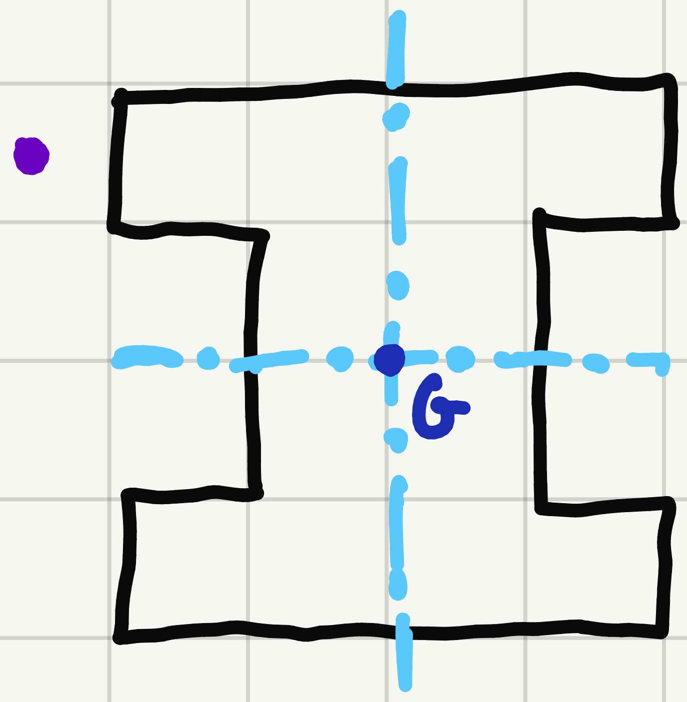
! $Q \equiv G \Rightarrow \vec{M}_Q = 0$

- $G \equiv O \Rightarrow S_x = 0, S_y = 0$

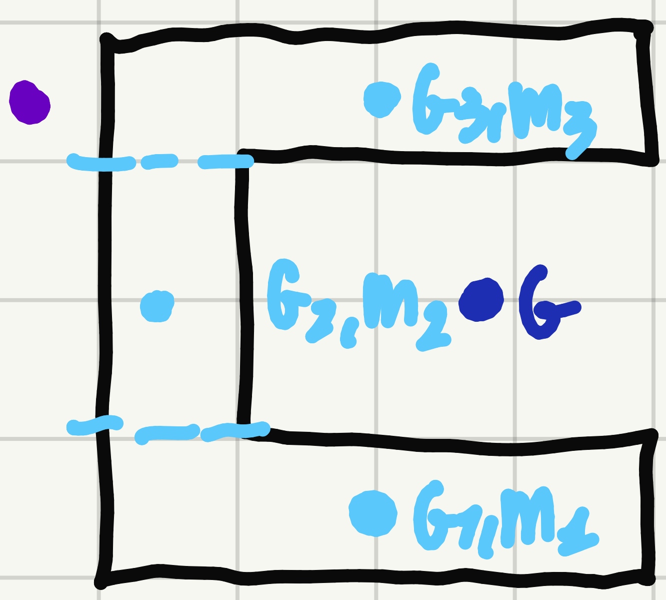
! DA ORA CONSIDERIAMO CORPI OMOGENEI, CON ρ COSTANTE, E A SPESSORE (DIMENSIONE LUNGO z) COSTANTE

- 

SE IL CORPO HA ASSE DI SIMMETRIA, G ∈ ALL'ASSE



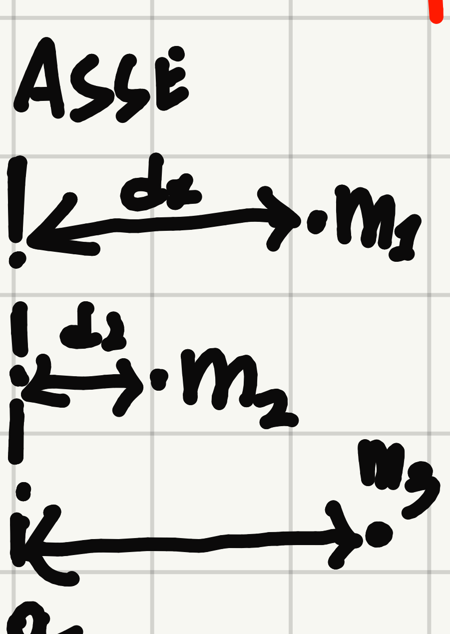
- SE IL CORPO HA + ASSI DI SIMMETRIA, G è INTERSEZIONE



- SE IL CORPO HA GEOMETRIA COMPLESSA E SI PUÒ SCOMPORRE IN SOTTOCORPI PIÙ SEMPLICI, G = MEDIA PESATA

$$x_G = \frac{m_1 x_{G1} + m_2 x_{G2} + m_3 x_{G3}}{m_1 + m_2 + m_3} \qquad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_{Gi}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

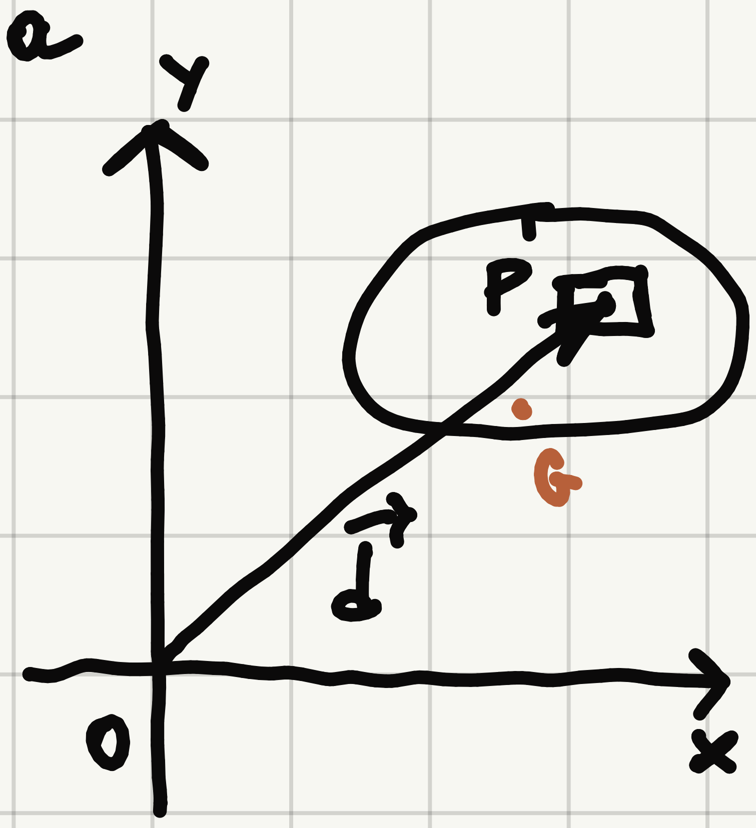
MOMENTO D'INERZIA



$$J_a = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2$$

! TANTO PIÙ IL CORPO È VICINO AD a, TANTO PIÙ J_a È PICCOLO

SOLITAMENTE, A = Z



$$J_{Z_0} = J_O = \int_V d^2 \rho \, \overbrace{dV}^{dm} = \int_V (x_P^2 + y_P^2) \rho \, dV =$$

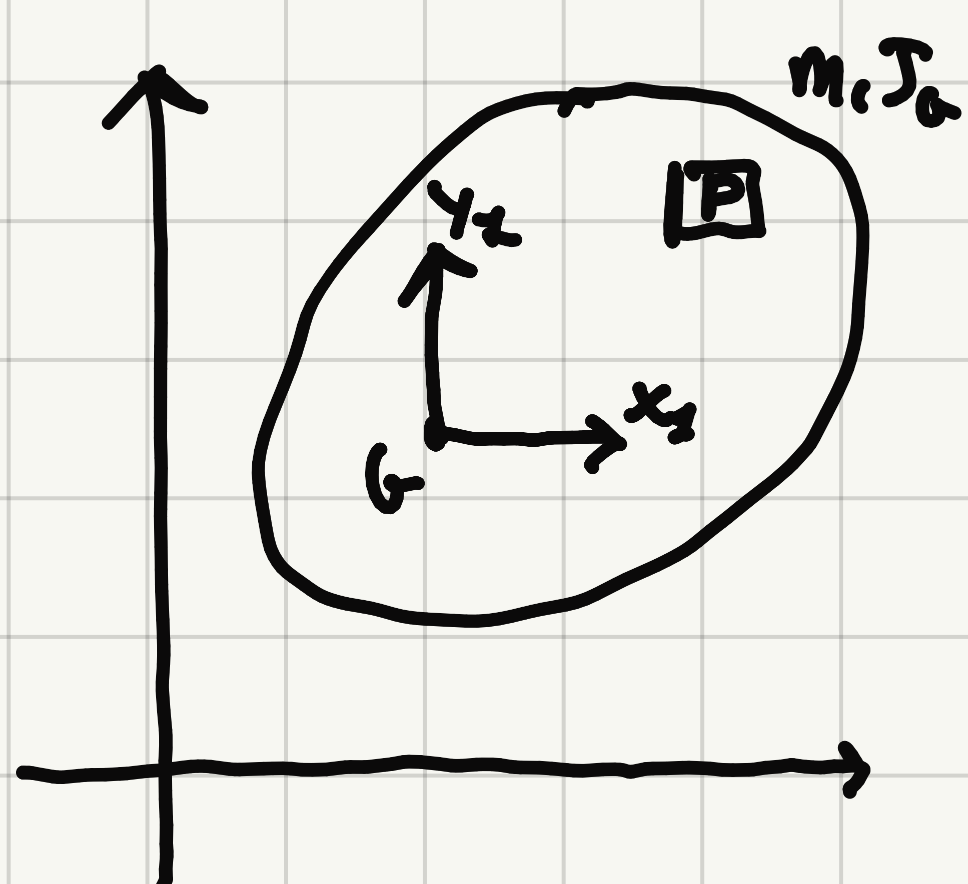
CORPO OMOGENEO, SPESSORE COSTANTE $dV = h\,dA$

$$= \rho h \int_A (x_P^2 + y_P^2) \, dA$$

J_G ? PER "CAMBIARE ASSE" USO IL TEOREMA DI HUYGENS:

$$J_O = J_G + m \cdot \overline{OG}^2$$

DIM



$$J_O = \int_V (x_P^2 + y_P^2) \rho \, dV = \int_V ((x_G + x_1)^2 + (y_G + y_1)^2) \cdot$$

$$\cdot \rho \, dV = \int_V (x_G^2 + x_1^2 + 2x_G x_1 + y_G^2 + y_1^2 + 2 y_G y_1) \rho \, dV$$

MOMENTO P RISPETTO G

$$= (x_G^2 + y_G^2) \int_V \rho \, dV + \int_V (x_1^2 + y_1^2) \rho \, dV + 2x_G \int_V x_1 \rho \, dV$$

$$+ 2y_G \int_V y_1 \rho \, dV$$

MOMENTO STATICO DEL PRIMO ORDINE RISPETTO ALL'ASSE Y/X PER UN SISTEMA DI RIFERIMENTO CON ORIGINE IN G

$$= m\overline{OG}^2 + J_G + 0 + 0$$

$J_G = m\cdot r_G^2$, CON r_G RAGGIO GIRATORIO D'INERZIA.

CASI NOTEVOLI

TRAVE

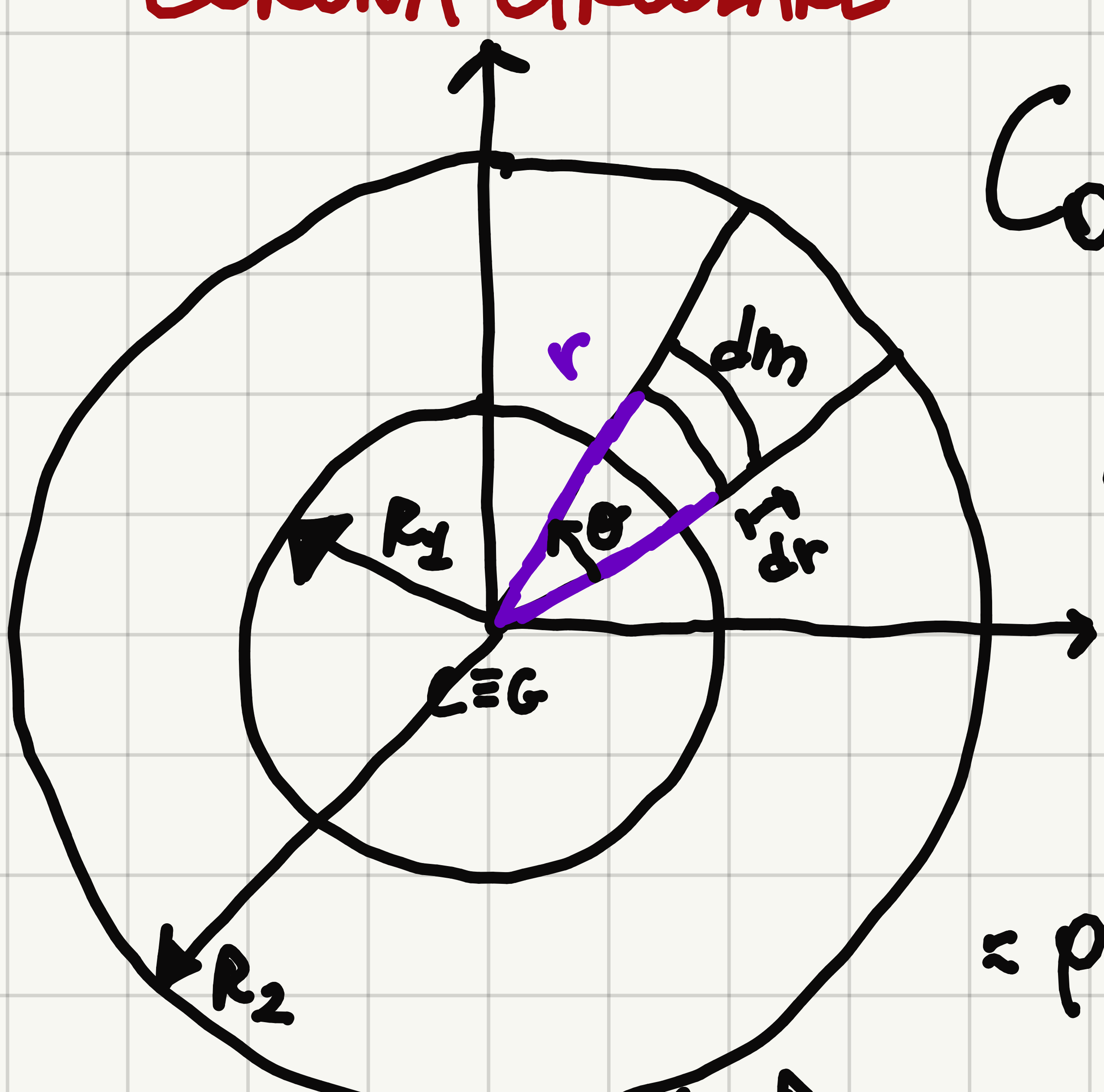
$$J_G = \rho h \int_A (x^2+y^2)\,dA = \rho h \int_{-L/2}^{L/2}\int_{-b/2}^{b/2}(x^2+y^2)\,dx\,dy =$$

$$= \rho h\left[\int_{-L/2}^{L/2} x^2\,dx + \int_{-b/2}^{b/2} y^2\,dy\right] = \rho h\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} + \rho h\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-b/2}^{b/2} =$$

$$= \rho h\left(\frac{L^3}{12}+\frac{b^3}{12}\right) = \underbrace{\rho h L b}\left(\frac{L^2}{12}+\frac{b^2}{12}\right) = \frac{m}{12}(L^2+b^2)$$

! TRAVE SNELLA ($L \gg b$) $\Rightarrow$ $J_G = \frac{m}{12}L^2$ $\quad r_G = \sqrt{\frac{1}{12}L^2} = \frac{2\sqrt{3}}{12}L$

CORONA CIRCOLARE



CONSIDERIAMO LA CORONCINA DI MASSA

$dm = \rho dV$ A DISTANZA r DA G

$$J_G = \rho h \int_A r^2\,dA = \rho h \int_A r^2\cdot r\,d\theta\,dr$$

$$= \rho h \int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} r^3\,dr\,d\theta =$$

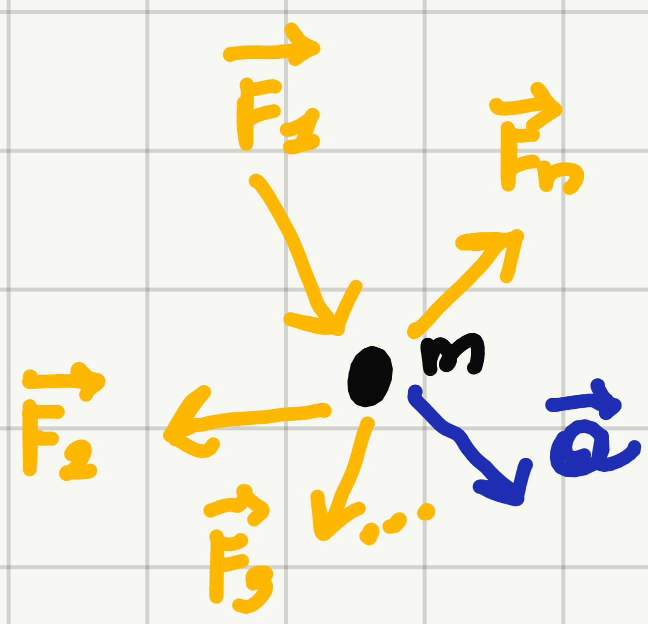
$$= \rho h\cdot \cancel{2}\pi\cdot\left[\frac{R^4}{\cancel{4}\,2}\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{1}{2}\rho h\pi(R_2^4-R_1^4) = \frac{1}{2}\rho h\pi(R_2^2-R_1^2)(R_2^2+R_1^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\rho V(R_2^2+R_1^2) = \frac{m}{2}(R_2^2+R_1^2)$$

- DISCO PIENO MASSA UNIFORMEMENTE DISTRIBUITA LUNGO LA CIRCONFERENZA
  $R_1=0$ $\quad R_2=R$ $\rightarrow$ $J_G = \frac{m}{2}R^2$ $\quad r_G = \frac{\sqrt{2}}{2}R$

- ANELLO MASSA DISTRIBUITA LUNGO IL PERIMETRO $\quad R_1=R_2=R$
  $\rightarrow J_G = mR^2 \quad r_G = R$

DINAMICA
PRINCIPIO DI D'ALEMBERT
PUNTO MATERIALE

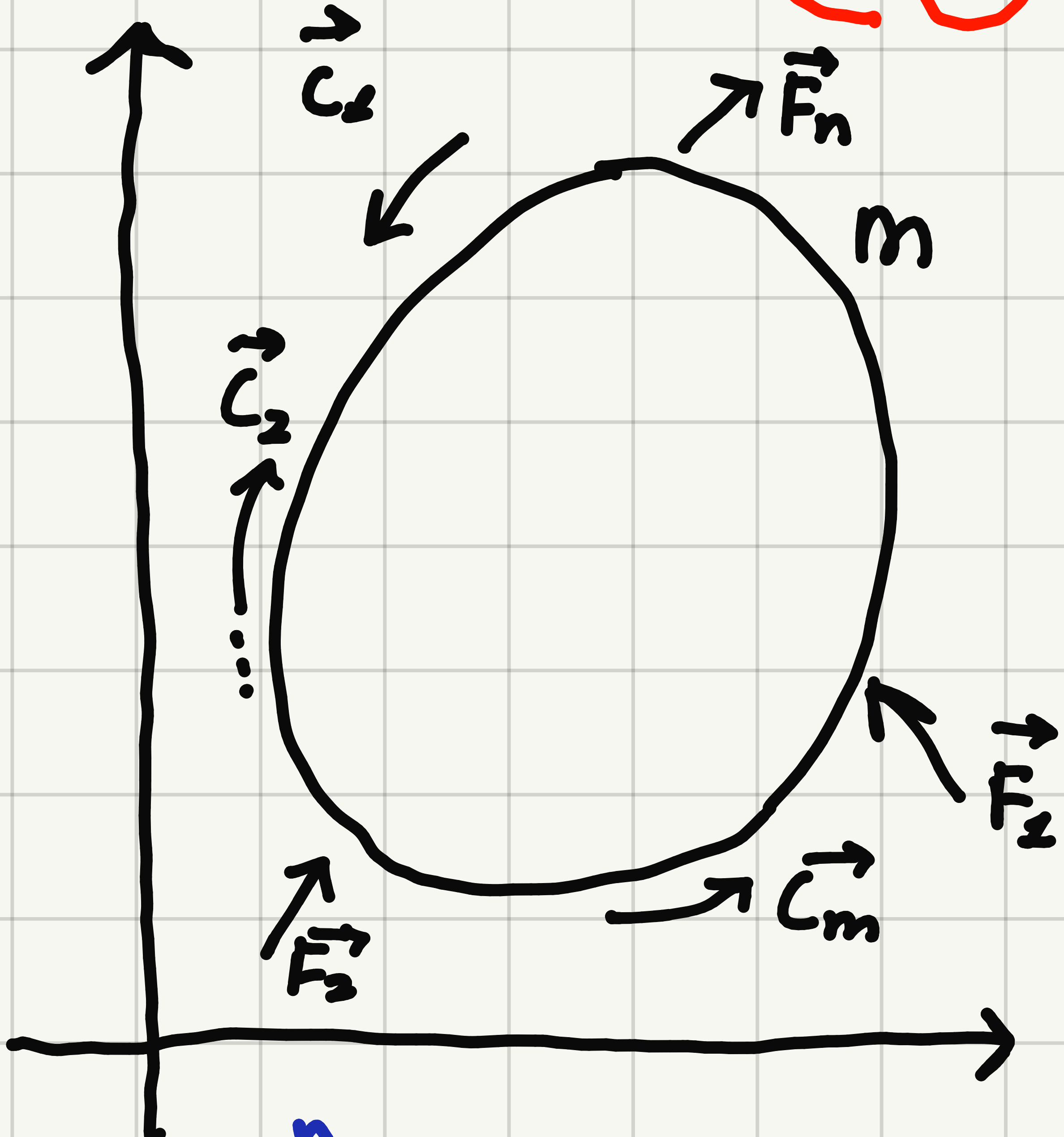


F. ATTIVE E REATTIVE

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = m\vec{a} \qquad \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} - m\vec{a} = 0$$

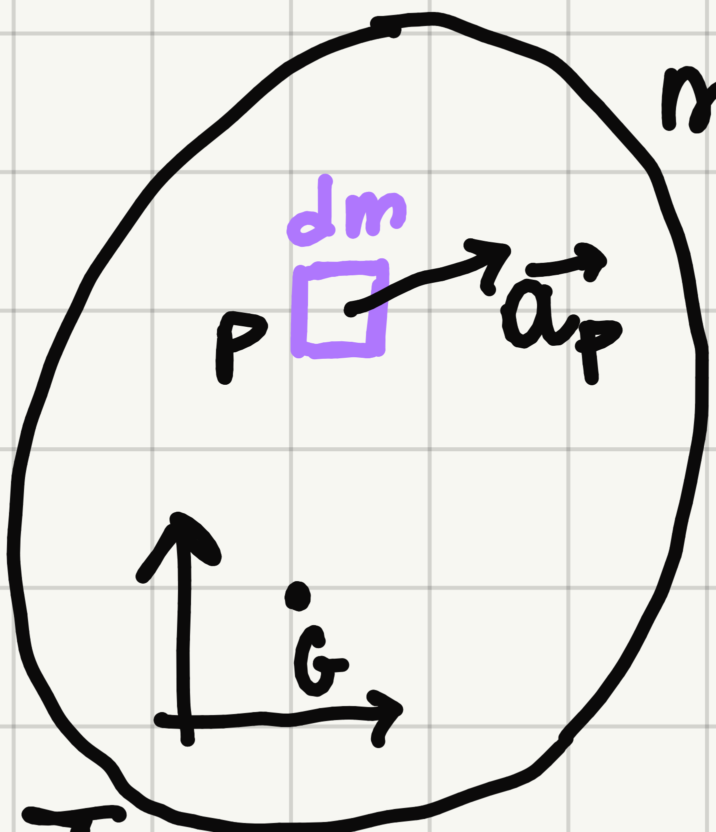
$\vec{F_{in}} = -m\vec{a}$ FORZA D'INERZIA $\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} + \vec{F_{in}} = 0$

DINAMICA
PRINCIPIO DI D'ALEMBERT
CORPO RIGIDO



$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} + \vec{F_{in}} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \times \vec{F_i} + \sum_{j=1}^{m} \vec{C_j} + (G-O) \times \vec{F_{in}} + \vec{C_{in}} = 0 \end{cases}$$

DEFINIRE $\vec{F}_{in}$ E $\vec{C}_{in}$



$dm = \rho dV$

$$d\vec{F}_{in} = -dm \cdot \vec{a}_p \Rightarrow \vec{F}_{in} = -\int_m \vec{a}_p dm = -\int_V \vec{a}_p \rho dV$$

TEOREMA DI RIVALS: NOTO $\vec{a}_G$, $\vec{a}_p = \vec{a}_G + \dot{\vec{\omega}} \times (P-G) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P-G))$

$$\Rightarrow \vec{F}_{in} = -\vec{a}_G \int_V \rho dV - \dot{\omega} \times \int_V (P-G)\rho dV - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \int_V (P-G)\rho dV)$$

$\int_V (P-G)\rho dV = \hat{i}_1 \int_V x_1 \rho dV + \hat{j} \int_V y_1 \rho dV = 0+0$, SONO LA DEFINIZIONE DEI MOMENTI STATICI DEL PRIMO ORDINE RISPETTO AL BARICENTRO

$$\Rightarrow \vec{F}_{in} = -\vec{a}_G \int_V \rho dV = -m\vec{a}_G$$

$$d\vec{C}_{in} = -(P-G) \times d\vec{F}_{in} \Rightarrow \vec{C}_{in} = -\int_V (P-G) \times \vec{a}_p \rho dV$$

$$(P-G) \times \vec{a}_p = (P-G) \times (\vec{a}_G + \underbrace{\dot{\vec{\omega}} \times (P-G)}_{\perp} + \underbrace{\cancel{\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times (P-G)}}_{0}) =$$

$$\Rightarrow \vec{C}_{in} = -\left[\int_V \cancel{(P-G)\rho dV}\right] \times \vec{a}_G - \dot{\omega} \int_V \overline{PG}^2 \rho dV \Rightarrow \vec{C}_{in} = -\dot{\vec{\omega}} \int_V \overline{PG}^2 \rho dV =$$

$$= -\dot{\vec{\omega}} J_G$$

IN UN SISTEMA DI CORPI RIGIDI

j-ESIMO CORPO

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{in_j} = 0 \quad \vec{F}_{in} = -m_j \vec{a}_{G_j} \\ \sum_{i=1}^{n} (P_{ij} - O) \times \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \vec{C}_{ij} + (G_j - O) \times \vec{F}_{in_j} + \vec{C}_{in_j} = 0 \end{cases}$$

DINAMICA

BILANCIO DI POTENZE

! SOLO UNA EQUAZIONE ⇒ INSUFFICIENTE SE gdL > 1

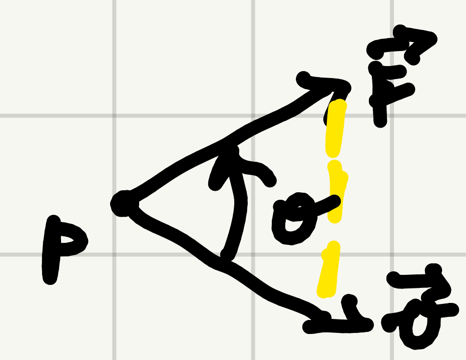
IPOTESI:

- I VINCOLI APPLICATI AL SISTEMA SONO FISSI (NO GIOCHI, NO CEDIMENTI)
- I VINCOLI APPLICATI AL SISTEMA SONO PERFETTI (ASSENZA DI ATTRITI)
- I VINCOLI APPLICATI AL SISTEMA SONO BILATERI (VALGONO IN ENTRAMBI I SENSI)

$\Big\}$ NO REAZIONI VINCOLARI

FORZE/COPPIE ATTIVE INTERNE/ESTERNE

$\Rightarrow \quad P + P_{inerzia} = 0 \qquad P = \vec{F}\cdot\vec{v} = F v \cos\theta$



$P = \vec{C}\cdot\vec{\omega}$

BILANCIO DI POTENZE $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\cdot\vec{v}_i + \sum_{i=1}^{m} \vec{C}_i\cdot\vec{\omega}_i +$

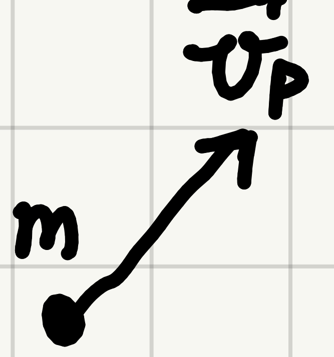
*CORPI RIGIDI

$+\sum_{i=1} (\vec{F}_{in_i}\cdot\vec{v}_{G_i} + \vec{C}_{in}\cdot\vec{\omega}_i) = 0$

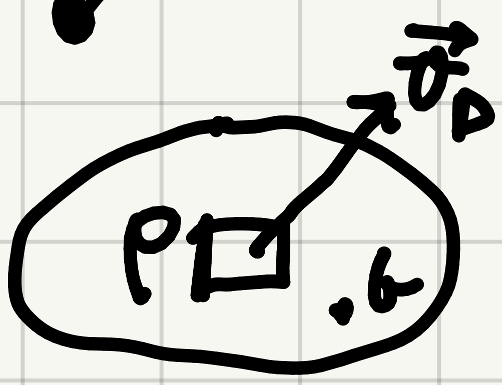
TEOREMA DI KÖNIG

*CORPI RIGIDI

DIMOSTRAZIONE $P_{in} = -\frac{d}{dt}K = -\sum_{i=1} (m_i \vec{a}_{G_i}\cdot\vec{v}_{G_i} + J_{G_i}\dot{\vec{\omega}}_i\cdot\vec{\omega}_i)$



$K = \frac{1}{2} m v_P^2 = \frac{1}{2} m \vec{v}_P\cdot\vec{v}_P$ ANALOGAMENTE, PER UN CORPO RIGIDO



$dK = \frac{1}{2} dm\, \vec{v}_P\cdot\vec{v}_P \Rightarrow K = \frac{1}{2}\int_V \vec{v}_P\cdot\vec{v}_P\, \rho\, dV =$

TEOREMA DI RIVALS: $\vec{v}_P = \vec{v}_G + \vec{\omega}\times(P-G)$

$= \frac{1}{2}\int_V [\vec{v}_G + \vec{\omega}\times(P-G)]\cdot[\vec{v}_G + \vec{\omega}\times(P-G)]\,\rho\, dV =$

$= \frac{1}{2}\int_V \vec{v}_G^{\,2}\rho\, dV + \int_V \vec{v}_G\cdot(\vec{\omega}\times(P-G))\rho\, dV + \frac{1}{2}\int_V (\vec{\omega}\times(P-G))^2 \rho\, dV =$

MOMENTO STATICO DEL 1° ORDINE RISPETTO G

$$= \frac{1}{2} m v_G^2 + \vec{v}_G \cdot \vec{\omega} \times \cancel{\int_V (P-G)\rho\, dV} + \frac{1}{2} \omega^2 \int (P-G)^2 \rho\, dV$$

$\Rightarrow K = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J_G \omega^2$ TEOREMA DI KÖNIG = L'ENERGIA CINETICA

È DATA DALLA SOMMA DEI CONTRIBUTI DELLE VELOCITÀ CON CUI IL CORPO TRASLA

INSIEME AL BARICENTRO ED UN CONTRIBUTO DI ROTAZIONE ATTORNO AL BARICENTRO

$$\frac{d}{dt} K = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (\vec{v}_G \cdot \vec{v}_G) + \frac{1}{2} J_G \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) =$$

$$= \frac{1}{2} m (\vec{a}_G \cdot \vec{v}_G + \vec{v}_G \cdot \vec{a}_G) + \frac{1}{2} J_G (\dot{\vec{\omega}} \cdot \vec{\omega} + \vec{\omega} \cdot \dot{\vec{\omega}}) =$$

$$= m (\vec{a}_G \cdot \vec{v}_G) + J_G (\dot{\vec{\omega}} \cdot \vec{\omega})$$

PER UN SISTEMA DI CORPI RIGIDI, SI OTTIENE L'EQUAZIONE OBIETTIVO