DIMENSIONE DELLA PIÙ GRANDE MINORE NON SINGOLARE. QUINDI $rk(A)=k$ SE:

① $\exists$ ALMENO UN MINORE DI A DI ORDINE K CON $\det \neq 0$
② $\forall$ MINORE DI ORDINE $>k$ $\det = 0$

AD ESEMPIO, SE $A=\begin{vmatrix}1&2\\3&6\\4&8\end{vmatrix}$ $1 \leq rkA \leq 2$ $M=\begin{vmatrix}1&2\\3&6\end{vmatrix}$; $M'=\begin{vmatrix}3&6\\4&8\end{vmatrix}$; $M''=\begin{vmatrix}1&2\\4&8\end{vmatrix}$

$\det M = 6-6=0$ $\det M' = 24-24=0$ $\det M'' = 8-8=0$ $\Rightarrow$ ORDINE $<2$ $\Rightarrow rk(A)=1$, CON $M_1 = |6|$

SI PUÒ OSSERVARE CHE $rk(A)=0$ SOLO PER LA MATRICE NULLA E SI HA RANGO MASSIMO QUANDO $rkA = \min$

CONSIDERATO CHE $\forall$ MINORE DI A $\det M = \det M^T \wedge M^T$ È MINORE DI $A^T$, $rk(A)=rk(A^T)$

DATA UNA MATRICE A E UN MINORE $M$ DI ORDINE P, GLI ORLATI DI M SONO TUTTI I MINORI DI ORDINE P+1 CHE CONTENGONO M. AD ESEMPIO, PER $A=\begin{vmatrix}1&2&3\\5&9&7\end{vmatrix}$, GLI ORLATI DI M SONO $\begin{vmatrix}2&3\\9&7\end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix}1&2\\5&9\end{vmatrix}$

IL RANGO DI UNA MATRICE PUÒ ESSERE DETERMINATO GRAZIE A DUE TEOREMI:

- TEOREMA DEGLI ORLATI: DATA $A \in \mathcal{M}(n \times m, \mathbb{R})$, $rk(A)=k \Leftrightarrow$ A HA UN MINORE $M$ DI ORDINE K, $\det M \neq 0$, E TUTTI GLI ORLATI DI M HANNO DETERMINANTE NULLO

AD ESEMPIO, PRESA $A=\begin{vmatrix}1&2\\3&6\\4&8\end{vmatrix}$ ($M = 1$) ORLATI DI M: ① $\begin{vmatrix}1&2\\3&6\end{vmatrix}$; ② $\begin{vmatrix}1&2\\4&8\end{vmatrix}$ $\det ① = 0$ $\det ② = 0$

$\Rightarrow$ $= rk(A) = 1$

- RIDUZIONE DELLA MATRICE A SCALA ($\rightarrow$ TRIANGOLARE SUPERIORE) CON L'ALGORITMO DI GAUSS E NUMERO DEI PIVOTS ($= 1^\circ$ ELEMENTO NON NULLO DI OGNI RIGA)

AD ESEMPIO, PRESA $A=\begin{vmatrix}1&2\\3&6\\4&8\end{vmatrix} \longrightarrow A=\begin{vmatrix}1&2\\0&0\\0&0\end{vmatrix}\begin{matrix}\\2^a-3\cdot1^a\\3^a-4\cdot1^a\end{matrix}$ 1 SOLO PIVOT $\Rightarrow rk(A)=1$

INFATTI, DETTO P IL NUMERO DI RIGHE NON NULLE:

① SE M È UN MINORE DI ORDINE P+1, M HA ALMENO UNA RIGA NULLA $\Rightarrow \det M = 0 \Rightarrow rkA \leq p$

② IL MINORE N DI ORDINE P È UNA MATRICE QUADRATA TRIANGOLARE SUPERIORE CON ELEMENTI NON NULLI SU TUTTA LA DIAGONALE $\Rightarrow \det N \neq 0 \Rightarrow rkA = p$

# RISOLUZIONE SISTEMI LINEARI

ORA CHE SAPPIAMO TUTTO SULLE MATRICI E SULLE LORO PROPRIETÀ, POSSIAMO USARLE PER LA RISOLUZIONE DEI SISTEMI LINEARI. È GIÀ STATO INTRODOTTO IL CONCETTO DI MATRICE INCOMPLETA, ORA VEDREMO NEL DETTAGLIO IL SIGNIFICATO DI MATRICE INCOMPLETA E COMPLETA. DATO UN SISTEMA $\Sigma$ DI N EQUAZIONI IN M INCOGNITE, LA MATRICE INCOMPLETA È QUELLA I CUI ELEMENTI RAPPRESENTANO I SOLI COEFFICIENTI DELLE INCOGNITE, MENTRE PER LA COMPLETA VIENE INCLUSA ANCHE UNA COLONNA DEI TERMINI NOTI. IN SIMBOLI,

$$\Sigma \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,m}x_m = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,m}x_m = b_n \end{cases}$$

$A \in \mathcal{M}(n \times m, \mathbb{R})$ MATRICE INCOMPLETA

$A|b \in \mathcal{M}(n \times (m+1), \mathbb{R})$ MATRICE COMPLETA

$$A=\begin{vmatrix}a_{1,1}&a_{1,2}&\dots&a_{1,m}\\a_{2,1}&a_{2,2}&\dots&a_{2,m}\\\vdots&&&\vdots\\a_{n,1}&a_{n,2}&\dots&a_{n,m}\end{vmatrix} \qquad A|b=\begin{vmatrix}a_{1,1}&a_{1,2}&\dots&a_{1,m}&b_1\\a_{2,1}&a_{2,2}&\dots&a_{2,m}&b_2\\\vdots&&&&\vdots\\a_{n,1}&a_{n,2}&\dots&a_{n,m}&b_n\end{vmatrix}$$

DEFINITA $X=\begin{vmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{vmatrix}$ LA COLONNA DELLE INCOGNITE, SI DEFINISCE IL PRODOTTO $A\cdot X=b \rightsquigarrow \Sigma$

AD ESEMPIO, PRESO $\Sigma \begin{cases} 2x+y=1 \\ x-x=2 \end{cases}$ $A=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}$; $b=\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$; $X=\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$

$$A\cdot X=b \Rightarrow \begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix}2x+y\\ x-y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$$

**TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI:** DATO IL SISTEMA LINEARE $A\cdot X=b$, CON $A\in\mathcal{M}(m\times n,\mathbb{R})$, $X\in\mathcal{M}(n\times 1,\mathbb{R})$, $b\in\mathcal{M}(m\times 1,\mathbb{R})$, IL SISTEMA È RISOLUBILE $\overset{①}{\Longleftrightarrow}$ $rk(A|b)=rk(A)$. [INOLTRE, $m-rk(A|b)$ INDICA IL NUMERO DI PARAMETRI CHE INFLUENZANO LE SOLUZIONI:
- $m=rk(A)$ → 0 PARAMETRI → SISTEMA DETERMINATO
- $m-rk(A)=\ell\neq 0$ → $\ell$ PARAMETRI → INFINITE SOLUZIONI DIPENDENTI DA $\ell$ PARAMETRI: $\infty^{\ell}$ ]②

① $\Longrightarrow$ DETTA $X^*=\begin{vmatrix}x_1^*\\x_2^*\\\vdots\\x_n^*\end{vmatrix}$ UNA IPOTETICA SOLUZIONE, VALE $A\cdot X^*=b$ $\quad A=\begin{array}{c|c|c|c} \text{colonna } 1 & \text{colonna } 2 & & \text{colonna } n \\ C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{array}$

$|C_1|C_2|\dots|C_n|\cdot\begin{vmatrix}x_1^*\\x_2^*\\\vdots\\x_n^*\end{vmatrix}=b \longrightarrow C_1x_1^*+C_2x_2^*+\dots+C_nx_n^*=b$. HO DEFINITO $b$ COME COMBINAZIONE LINEARE DELLE $n$ COLONNE DI $A \Rightarrow A|b=|C_1|C_2|\dots|C_n|b|$ E $A$ HANNO LO STESSO RANGO ✓

$\Longleftarrow$ SE $rk(A|b)=rk(A)$, $b$ È COMBINAZIONE LINEARE DELLE COLONNE DI $A \Rightarrow b=\alpha C_1+\beta C_2+\dots+\gamma C_n=$

$=|C_1|C_2|\dots|C_n|\cdot\begin{vmatrix}\alpha\\\beta\\\vdots\\\gamma\end{vmatrix}$. DETTO $X^\circ=\begin{vmatrix}\alpha\\\beta\\\vdots\\\gamma\end{vmatrix}$, $A\cdot X^\circ=b \Rightarrow X^\circ$ È SOLUZIONE DEL SISTEMA ✓

② RIDUCENDO A SCALA $A|b$ E $A$, LE DUE MATRICI AVRANNO LO STESSO NUMERO DI RIGHE NULLE E SI OTTERRANNO $k$ PIVOTS. DETTO $a_{k,k}$ IL TERMINE DELL'ULTIMO PIVOT, $a_{k,k}x_k+a_{k,k+1}x_{k+1}+\dots+a_{k,m}x_m=b_k$ $\Rightarrow x_k=(b_k-a_{k,k+1}x_{k+1}-\dots-a_{k,m}x_m)/a_{k,k}$. SE $k=rk(A|b)$, $a_{k,k}\neq 0 \Rightarrow$ UNA SOLUZIONE. SE $k\neq rk(A|b)$, $a_{k,k}=0 \Rightarrow$ INFINITE SOLUZIONI DIPENDENTI DA $m-rk(A|b)$ PARAMETRI

APPLICAZIONE DI ROUCHÉ-CAPELLI: $\begin{cases}x-y=1\\2x-y=0\end{cases}$ $\quad A=\begin{vmatrix}1 & -1\\2 & -1\end{vmatrix}$ $\quad b=\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}$

$A=\begin{vmatrix}1 & -1\\0 & 3\end{vmatrix}$ $rkA=2$ $\quad A|b=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\2 & -1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\0 & -3 & -2\end{vmatrix}$ $rk(A|b)=2 \Rightarrow$ IL SISTEMA AMMETTE SOLUZIONI. DETTO $m$ IL NUMERO DI COLONNE DI A, $m=2 \Rightarrow rk(A|b)=m \Rightarrow$ LA SOLUZIONE DEL SISTEMA È UNICA

$\{x-y=1 \rightsquigarrow A=|1 \;\; -1|$ $\quad A|b=|1 \;\; -1 \;\; 1|$ $\quad rk(A)=rk(A|b)=1$ e $m=2$.

IL SISTEMA HA INFINITE SOLUZIONI DIPENDENTI DA UN PARAMETRO $t \longrightarrow \begin{cases}x=1+t\\y=t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

DI QUESTO ESERCIZIO È DEFINIBILE "LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI" $S=\left\{\begin{vmatrix}1+t\\t\end{vmatrix}, t\in\mathbb{R}\right\}$ CHE CONTIENE APPUNTO TUTTE LE SOLUZIONI DEL SISTEMA. QUANDO LA MATRICE DELLE SOLUZIONI È NULLA IL SISTEMA È DETTO LINEARE OMOGENEO. SI OSSERVI COME, SE $v_1$ E $v_2$ SONO SOLUZIONI DI UN SISTEMA LINEARE

OMOGENEO, ALLORA SONO SOLUZIONI ANCHE $v_1+v_2$ (INFATTI $A(v_1+v_2)=Av_1+Av_2=0+0=0$) E $\lambda v_1$, CON $\lambda\in\mathbb{R}$ (INFATTI $A(\lambda v_1)=\lambda(Av_1)=\lambda\cdot 0=0$)

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE UN SISTEMA LINEARE COMPATIBILE (=AMMETTE SOLUZIONI) $Ax=b$ PUÒ ESSERE ESPRESSO MEDIANTE LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI $S=S_0+\bar{v}$, CON $S_0$ LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI DEL SISTEMA LINEARE OMOGENEO E $\bar{v}$ LA SOLUZIONE DEL SISTEMA $A\cdot\bar{v}=b$

INFATTI, DEFINITI GLI SPAZI $S=\{v\in\mathcal{M}(m\times 1,\mathbb{R}) \mid A\cdot v=b\}$ E $S_0=\{v'\in\mathcal{M}(m\times 1,\mathbb{R}) \mid A\cdot v'=0\}$, SE $v\in S$ E $v'\in S_0$, $v+v'\in S$ IN QUANTO $A(v+v')=Av+Av'=b+0=b$. ORA, PRESO UN ELEMENTO $v_1\in S$, $A(v_1-v')=Av_1-Av'=b-b=0 \Rightarrow S\in S_0+\bar{v} \Rightarrow S=S_0+\bar{v}$

RIPRENDENDO L'ULTIMO ESEMPIO $S=\left\{\begin{vmatrix}1+t\\ t\end{vmatrix} \;\middle|\; t\in\mathbb{R}\right\}$, TALE SOLUZIONE PUÒ ESSERE RISCRITTA COME $S=\left\{\overbrace{\begin{vmatrix}1\\ 0\end{vmatrix}}^{S_0}+\overbrace{\begin{vmatrix}1\\ 1\end{vmatrix}}^{\bar{v}}t \;\middle|\; t\in\mathbb{R}\right\}$.

## ALGORITMO PER IL CALCOLO DELLA MATRICE INVERSA

APRENDO UNA PARENTESI, VEDIAMO CON UN ESERCIZIO GUIDA COME DETERMINARE LA MATRICE INVERSA SENZA DOVER INCORRERE ALL'USO DEI COMPLEMENTI ALGEBRICI

$$A=\begin{vmatrix}2&1&1\\4&1&0\\-2&2&1\end{vmatrix}\qquad A|I=\left|\begin{array}{ccc|ccc}2&1&1&1&0&0\\4&1&0&0&1&0\\-2&2&1&0&0&1\end{array}\right| \xrightarrow{\text{TRIANGOLARE SUPERIORE}} \left|\begin{array}{ccc|ccc}2&1&1&1&0&0\\0&-1&-2&-2&1&0\\0&0&-4&-5&3&1\end{array}\right|$$

TRIANGOLARE INFERIORE

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&-1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&-4&-5&3&1\end{array}\right| \longrightarrow \left|\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&-\frac{1}{8}\\0&1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{5}{4}&-\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\end{array}\right|\begin{array}{l}:2\\:-1\\:-4\end{array}$$

CONCLUDIAMO, QUINDI, CHE $A^{-1}=\begin{vmatrix}\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&-\frac{1}{8}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{5}{4}&-\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\end{vmatrix}$

**TEOREMA DI CRAMER**: DATO UN SISTEMA LINEARE $A\cdot x=b$, CON $A$ MATRICE QUADRATA NON SINGOLARE, IL SISTEMA AVRÀ SOLUZIONE UNICA $x^\circ=A^{-1}\cdot b$ ...

1) DIMOSTRAZIONE FORMULA $\Rightarrow$ $A\cdot x^\circ = b \Rightarrow A\cdot A^{-1}\cdot b=b \Rightarrow I_n b=b \Rightarrow b=b$ ✓

2) DIMOSTRAZIONE UNICITÀ $\Rightarrow$ PER ASSURDO, SI CONSIDERI CHE IL SISTEMA ABBIA DUE SOLUZIONI $U_1, U_2$

$\Rightarrow A\cdot U_1=b \wedge A\cdot U_2=b$. SOTTRAENDO MEMBRO A MEMBRO, $A\cdot(U_1-U_2)=0$. MOLTIPLICANDO A DESTRA E SINISTRA PER $A^{-1}$, $\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I_n}(U_1-U_2)=0\cdot\cancel{A^{-1}} \to U_1-U_2=0 \Rightarrow U_1=U_2 \Rightarrow$ SOLUZIONE UNICA

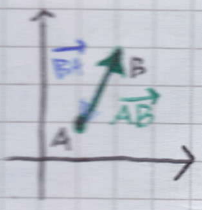
... INOLTRE, LA INCOGNITA $x_i\in X$ È DATA DA $x_i=\frac{\det(B_i)}{\det A}$, CON $B_i$ LA MATRICE INCOMPLETA $A$ IN CUI LA COLONNA $i$-ESIMA È SOSTITUITA DALLA COLONNA $i$

INFATTI, $A\cdot x=b$ PUÒ ESSERE RISCRITTA COME $x_i=A^{-1}b=\frac{1}{\det A}\hat{A}\cdot b=\frac{1}{\det A}B_i$

$\det(B_i)=b_1A_{1,i}+b_2A_{2,i}+\dots+b_nA_{n,i}$

$\Rightarrow x_i=\frac{\det B_i}{\det A}$

# SPAZIO VETTORIALE




NELLO SPAZIO $\mathbb{R}^n$, UN VETTORE GEOMETRICO $\vec{AB}$ È UN SEGMENTO DI ESTREMO INIZIALE A ED ESTREMO FINALE B ED È IMPORTANTE LEGGERE QUALE DEI DUE È IL PRIMO IN QUANTO NE DEFINISCE LA DIREZIONE. INFATTI $\vec{AB} \neq \vec{BA}$. PRESI DUE VETTORI $\vec{OP}$ E $\vec{OQ}$, IN CUI UNO DEGLI ESTREMI COINCIDE CON L'ORIGINE (SCELTA FATTA PER COMODITÀ! IL RAGIONAMENTO VALE PER OGNI VETTORE) SONO DEFINITE LE OPERAZIONI DI:

1. SOMMA $\vec{OP} + \vec{OQ} = (x_P + x_Q; y_P + y_Q; z_P + z_Q; ...)$
2. PRODOTTO PER SCALARE $\lambda \cdot \vec{OP} = (\lambda x_P; \lambda y_P; \lambda z_P; ...)$. SE $|\lambda| > 1$, VETTORE DILATA; SE $|\lambda| < 1$, VETTORE CONTRAE.

CI FERMIAMO AD $\mathbb{R}^3$, IN QUANTO PER $n \geq 4$ DIMENSIONALMENTE NON HA SENSO.

AD ESEMPIO, DATI I PUNTI IN $\mathbb{R}^3$ $A(1,1,1)$; $B(3,3,3)$, $C(1,2,3)$, $D(3,4,5)$; $\vec{AB} = \vec{CD}$?

$$\left.\begin{array}{l}\vec{AB} = B - A = (3-1, 3-1, 3-1) = (2,2,2) \\ \vec{CD} = D - C = (3-1, 4-2, 5-3) = (2;2;2)\end{array}\right] \Longrightarrow \vec{AB} = \vec{CD}$$

IN QUESTO CASO SI DICE CHE I DUE VETTORI SONO EQUIVALENTI, OSSIA $\vec{AB} \sim \vec{OP}$. LA RELAZIONE DI EQUIVALENZA ASSOCIA TRA LORO VETTORI LIBERI (OSSIA VETTORI CONSIDERATI SENZA IL PUNTO DI APPLICAZIONE) E SI INDICA COME $\mathbb{R}^3/\sim$.

INVECE, LO SPAZIO VETTORIALE $V$ DEFINITO IN $\mathbb{R}$ È UN INSIEME MUNITO DELLE GIÀ DESCRITTE OPERAZIONI DI SOMMA $(V + V \to V)$ E DI PRODOTTO PER SCALARE $(V \times \mathbb{R} \to V)$, CHE SI NOTI ESSERE DEL TUTTO ANALOGHE ALLE RISPETTIVE OPERAZIONI NELLE MATRICI, OSSIA PRESI TRE VETTORI $v, u, w \in V$ E GLI SCALARI $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

1. ASSOCIATIVA DELLA SOMMA $(v + u) + w = v + (u + w)$
2. ESISTENZA DEL VETTORE NULLO $0_v$: $v + 0_v = v$
3. ESISTENZA DEL VETTORE OPPOSTO $v + (-v) = 0_v$
4. PROPRIETÀ COMMUTATIVA $v + u = u + v$
5. ASSOCIATIVA DEL PRODOTTO $(\lambda \cdot \mu) v = \lambda \cdot (\mu v)$
6. DISTRIBUTIVA DELLA SOMMA $(\lambda + \mu) v = \lambda v + \mu v$
7. DISTRIBUTIVA DEL PRODOTTO $\lambda (v + u) = \lambda v + \lambda u$
8. PRODOTTO PER VETTORE NULLO $0_v \cdot v = 0_v$
9. ELEMENTO NEUTRO DEL PRODOTTO $1 \cdot v = v$

UN CLASSICO ESEMPIO DI SPAZIO VETTORIALE È LO SPAZIO DEI POLINOMI $\mathbb{R}[x] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \wedge a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}\}$

OLTRE ALLE PROPRIETÀ GIÀ DESCRITTE ELENCHIAMO ANCHE LE SEGUENTI CON DIMOSTRAZIONE:

1. $u + v = w + v \iff u = w$ — INFATTI, DALL'ESISTENZA DELL'OPPOSTO $-v$, SOMMANDOLO MEMBRO A MEMBRO $u + v - v = w + v - v \longrightarrow u = w$
2. $(-1) \cdot v = -v$ — $v + (-1) \cdot v = v \cdot (1 - 1) = v \cdot 0 = 0_v$. DAL PRODOTTO PER VETTORE NULLO CONCLUDIAMO CHE $-1 \cdot v = -v$
3. $\lambda \cdot 0_v = 0_v$ — $\lambda \cdot (0_v \cdot v) = \lambda 0_v \cdot v = 0_v \cdot v = 0_v$

4 $\lambda \cdot v = 0_V \iff \lambda = 0 \vee v = 0_V$ 1 $\lambda \cdot v = 0$. SUPPOSTO $\lambda \neq 0$, MOLTIPLICO 1° E 2° MEMBRO PER $\lambda^{-1}$ $\rightarrow v = 0$. $\lambda = 0 \Rightarrow 0 \cdot v = 0$ ✓

## APPLICAZIONE LINEARE

NOZIONE MOLTO LEGATA A QUELLA DEGLI SPAZI VETTORIALI. INFATTI, PRESI DUE DIVERSI SPAZI VETTORIALI $V$ E $W$, UN'APPLICAZIONE LINEARE DA $V$ IN $W$ È UNA FUNZIONE $f: V \rightarrow W$ TALE CHE:

1 - $\forall v_1, v_2 \in V$ VALE CHE $\underset{\in W}{f(v_1+v_2)} = \underset{\in W}{f(v_1)} + \underset{\in W}{f(v_2)}$ ADDITIVA

2 - $\forall \lambda \in \mathbb{R} \wedge \forall v \in V$ VALE CHE $\underset{\in V}{f(\lambda v)} = \lambda \underset{\in W}{f(v)}$ OMOGENEA

3 - $f(0_V) = 0_W$

AD ESEMPIO, PER VERIFICARE CHE LA RELAZIONE $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ È UNA APPLICAZIONE LINEARE PER $f(x,y,z) = (x^2, 0)$

1 $f(v_1+v_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$
$\neq$ $\Rightarrow$ NON È UNA APPLICAZIONE LINEARE
$f(v_1)+f(v_2) = (x_1^2+x_2^2, 0)$

IN GENERALE, UNA RELAZIONE DEL TIPO $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ È LINEARE $\iff$ LE SUE $n$ COMPONENTI SONO POLINOMI OMOGENEI DI 1° GRADO IN $m$ VARIABILI

UN ESEMPIO DI APPLICAZIONE LINEARE È LA TRASPOSIZIONE. INFATTI $(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$

## COMBINAZIONE LINEARE

ANCHE NEGLI SPAZI VETTORIALI POSSONO ESSERE DEFINITE LE COMBINAZIONI LINEARI DI $v_1, v_2, \dots, v_n$ N VETTORI E SARÀ UN'ESPRESSIONE DEL TIPO $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$, CON $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

QUESTA ESPRESSIONE RESTITUISCE UN ALTRO VETTORE $W \in V$

AD ESEMPIO, DATI $v_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}$, $v_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^3$ E $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3 \in \mathbb{R}$

$W = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \begin{vmatrix} 2 \\ +1 \\ 9 \end{vmatrix}$

POSSONO, IN ANALOGIA CON LE MATRICI, ESSERE DEFINITI I VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI O DIPENDENTI

AD ESEMPIO, SE SI VUOLE TROVARE LA RELAZIONE TRA $v_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}$, $v_2 = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$, $v_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}$,

PONIAMO $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_V \Longrightarrow \begin{vmatrix} \alpha+2\beta+\gamma \\ \beta+\gamma \\ -\alpha+\beta+2\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha+2\beta+\gamma = 0 \\ \beta+\gamma = 0 \\ -\alpha+\beta+2\gamma = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha - 2\gamma + \gamma = 0 \\ \beta = -\gamma \\ = \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = -\gamma \\ -\gamma-\gamma+2\gamma = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = \gamma \\ \beta = -\gamma \\ 0 = 0 \end{cases}$ PRESO $\gamma \neq 0 \Rightarrow \beta \neq 0$ E $\alpha \neq 0 \Rightarrow$ SONO LINEARMENTE DIPENDENTI

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ RISULTANO LINEARMENTE DIPENDENTI $\iff$ ALMENO UNO DEGLI $n$ VETTORI È COMBINAZIONE LINEARE DEGLI ALTRI

$\Longrightarrow$ $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$. PRESO UN $\lambda_k \neq 0$, $1 \leq k \leq n$, SCRIVEREMO CHE

$v_k = \frac{\lambda_1}{\lambda_k} v_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_n} v_2 + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda_n} v_n$ ✓