FEDELTÀ DI RISPOSTA

Per studiare il comportamento di un sistema in funzione di parametri si usa la **funzione sensibilità** $W(s,p)$: $\dfrac{\Delta W(s,p)/W(s,p)}{\Delta p/p}$, con p il parametro in analisi. Per piccole variazioni,

$$S_p^W(s,p) = \frac{\partial W(s,p)}{\partial p} \cdot \frac{p}{W(s,p)}$$

Esempio: $y(t) = W(0)$, $u(t) = \delta_{-1}(t)$ $F(s) = \dfrac{50}{s+p}$

$$\Rightarrow W(s) = \frac{50}{s+p+50} \Rightarrow \tilde{y}(t) = \frac{50}{50+p}$$

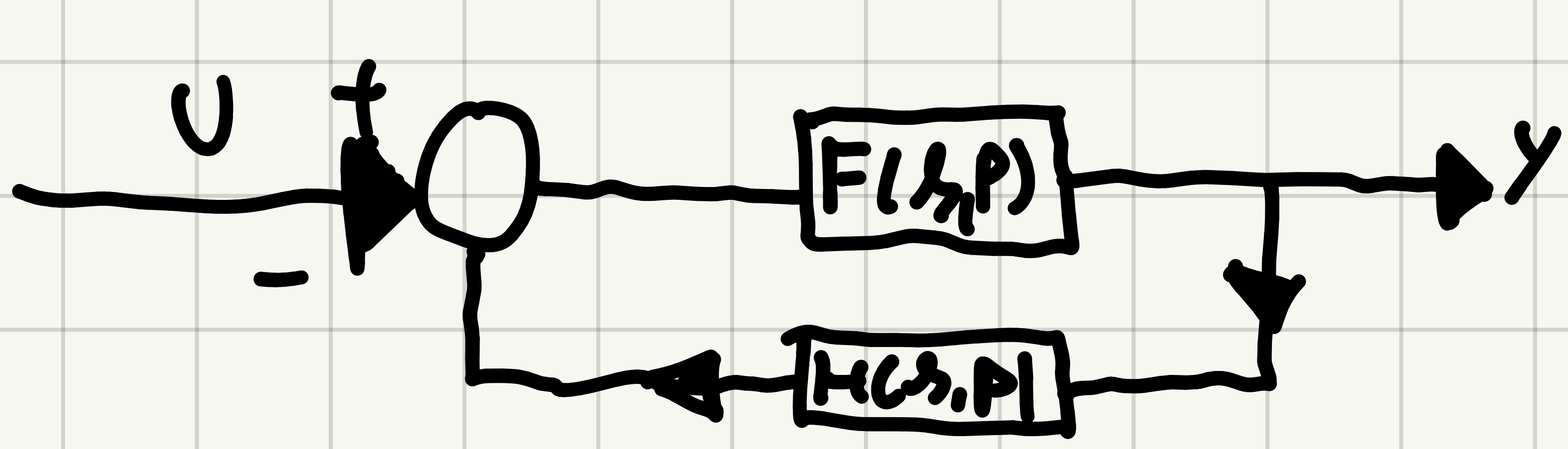
$\Rightarrow$ l'uscita dipende dal parametro p

$$S_p^W\Big|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{50}{50+s+p}\right) \cdot \frac{p}{\frac{50}{s+p+50}}\Bigg|_{s=0} = -\frac{50}{(s+p+50)^2} \cdot \frac{p}{\frac{50}{s+p+50}}\Bigg|_{s=0} = -\frac{p}{p+50}$$

Esempio: $F(s) = \dfrac{50}{s(s+p)} \Rightarrow W(s) = \dfrac{50}{s^2+ps+5}$

$$S_p^W\Big|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{50}{s^2+ps+50}\right) \cdot \frac{p}{\frac{50}{s^2+ps+50}}\Bigg|_{s=0} = \frac{-\cancel{50}s}{(s^2+ps+50)} \cdot p \cdot \frac{\cancel{s^2+ps+50}}{\cancel{50}}\Bigg|_{s=0}$$

$$= \frac{-p}{s^2+ps+50} \cdot s\Bigg|_{s=0} = 0$$



$$S_p^W = \frac{\partial W}{\partial p} \cdot \frac{p}{W} = \frac{\partial W}{\partial F} \cdot \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{p}{W} \cdot \frac{F}{F} = \frac{\partial W}{\partial F} \cdot \frac{F}{W} \cdot \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{p}{F} = S_F^W \cdot S_p^F$$

$$W = \frac{F}{1+H F}$$

$$S_F^W = \frac{\partial W}{\partial F} \cdot \frac{F}{W} = \frac{(1+HF)-HF}{(1+HF)^2} \cdot \frac{F}{W} = \frac{1}{(1+HF)^2} \cdot F \cdot \frac{1+HF}{F} = \frac{1}{1+HF}$$

$S_F^W\big|_{s=0} = 0 \iff F$ HA ALMENO UN POLO IN $s=0$

$$S_P^W = \frac{\partial W}{\partial P} \cdot \frac{P}{W} = \frac{\partial W}{\partial H} \cdot \frac{\partial H}{\partial P} \cdot \frac{P}{W} \cdot \frac{H}{H} = \frac{\partial W}{\partial H} \cdot \frac{H}{W} \cdot \frac{\partial H}{\partial P} \cdot \frac{P}{H} = S_H^W \cdot S_P^H$$

$$S_H^W = \frac{\partial W}{\partial H} \cdot \frac{H}{W} = \frac{-F^2}{(1+HF)^2} \cdot H \cdot \frac{1+HF}{F} = \frac{-FH}{1+FH}$$

IN GENERALE, $S_H^W\big|_{s=0} \neq 0 \implies S_P^W \neq 0$

SINTESI

SI PONE L'OBIETTIVO DI CALCOLARE $G_c(s)$ IN MODO CHE IL SISTEMA IN CATENA CHIUSA SODDISFI LE SPECIFICHE ASSEGNATE. SI PARLA GENERALMENTE DI SINTESI PER TENTATIVI, LE CUI TIPOLOGIE SONO:

- IN FREQUENZA/IN ω → DI NATURA FISICA
- CON IL LUOGO DELLE RADICI → DI NATURA ALGEBRICA

LE SPECIFICHE ASSEGNATE SI DISTINGUONO IN:

1 — UNIVOCHE ⇒ REGIME PERMANENTE PER INGRESSI POLINOMIALI

2 - LASCHE $\Rightarrow$ REGIME PERMANENTE PER INGRESSI A GRADO > 1

LE SPECIFICHE UNIVOCHE PRODUCONO IL CONTROLLORE DI 1° TENTATIVO $\hat{G}(s) = \frac{K_G}{s^2}$, ED EVENTUALMENTE RIMODELLATO PER SODDISFARE LE SPECIFICHE LASCHE.

ESEMPIO:

$P(s) = \frac{5}{s+2}$ $\quad |\tilde{e}_1| \le 0{,}05 \quad G(s)$?

$$e_1 = \frac{1}{K_G K_P} \quad K_P = \frac{2}{5} \quad \frac{1}{K_G \cdot K_P} \le 0{,}05 \Rightarrow K_G \ge 8$$

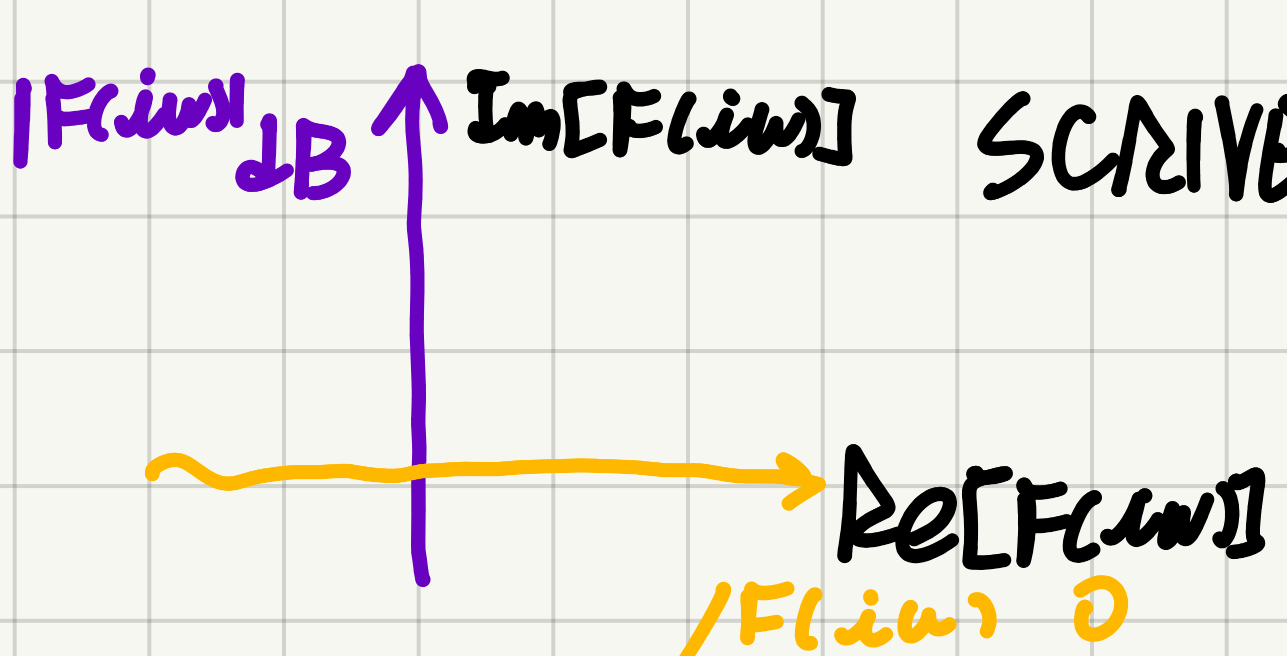
$$\hat{G}(s) = \frac{8}{s^2} \Rightarrow \hat{F}(s) = \frac{8}{s^2} \cdot \frac{5}{s+2}$$

$F(s) = \hat{F}(s) \cdot R(s)$, DOVE $R(s)$ VIENE OPPORTUNAMENTE MODELLATA. PRENDE IL NOME DI FUNZIONE COMPENSATRICE

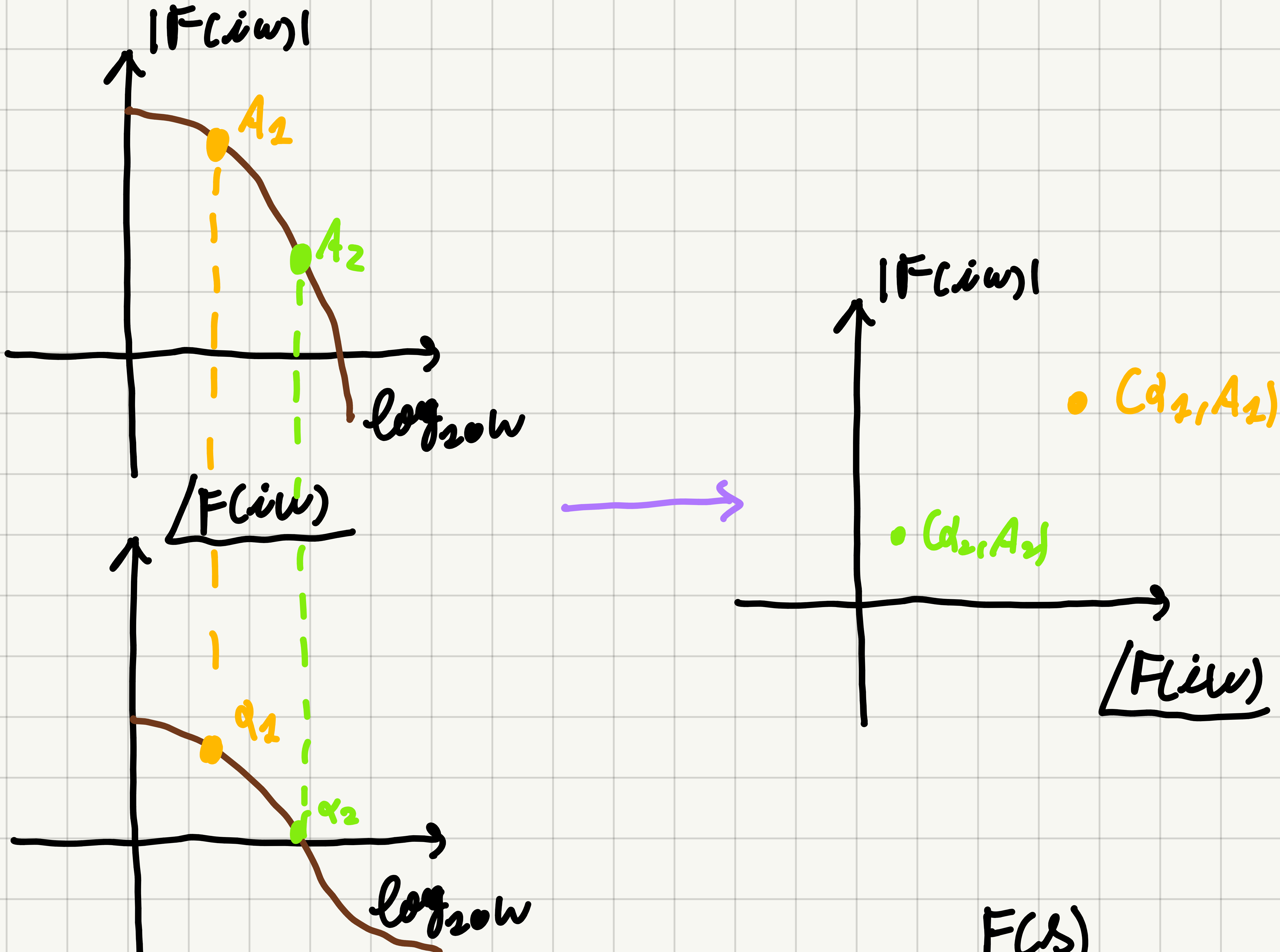
SINTESI IN ω

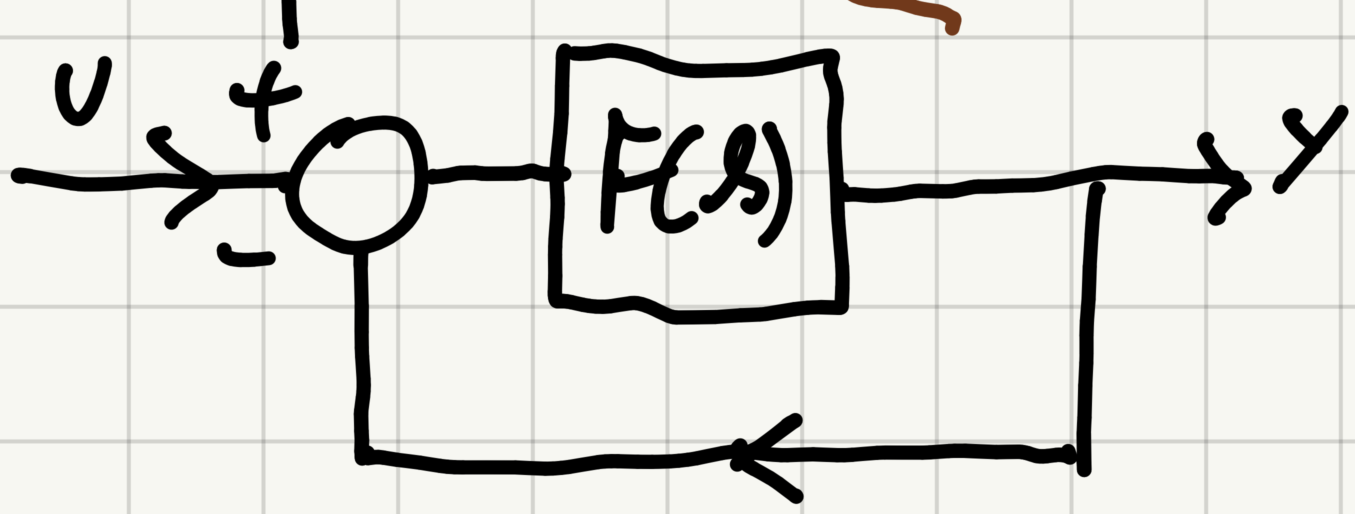
DIAGRAMMA DI NICHOLS DI $F(j\omega)$

SI RICAVA DAI 2 DIAGRAMMI DI BODE, CONSENTE DI SCRIVERE LA CARTA DI NICHOLS, CHE DA LEGAMI IMPORTANTI TRA LE SOLUZIONI IN CATENA APERTA E CHIUSA



COSTRUZIONE DEL DIAGRAMMA DI NICHOLS DAI DIAGRAMMI DI BODE





$$W(s) = \frac{F(s)}{1+F(s)}$$

$$W(i\omega) = \frac{F(i\omega)}{1+F(i\omega)} \qquad F(i\omega) = |F(i\omega)|\, e^{i\angle F(i\omega)}$$

$$W(i\omega) = |W(i\omega)|\, e^{i\angle W(i\omega)}$$

PER COMODITÀ, USIAMO LA SEGUENTE NOTAZIONE:

- $|F(i\omega)| = A(\omega)$, $\angle F(i\omega) = \alpha(\omega)$
- $|W(i\omega)| = N(\omega)$, $\angle W(i\omega) = \varphi(\omega)$

$\Rightarrow$ $F(i\omega) = A(\omega)e^{i\alpha(\omega)}$, $W(i\omega) = N(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$

$$\Rightarrow W(i\omega) = \frac{A(\omega)\cdot e^{i\alpha(\omega)}}{1+A(\omega)e^{i\alpha(\omega)}}, \text{ DA CUI:}$$

- $|W(i\omega)| = N(\omega) = \dfrac{A(\omega)}{|1+A(\omega)e^{i\alpha(\omega)}|}$

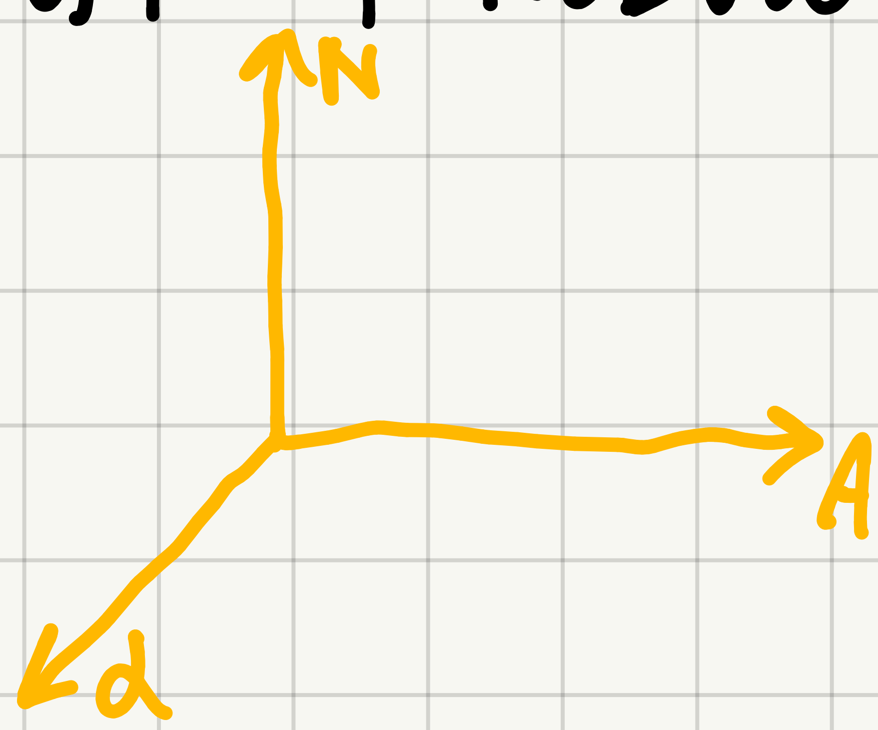
• $\angle W(i\omega) = \varphi(\omega) = \alpha(\omega) - \angle 1 + A(\omega) e^{i\alpha(\omega)}$

POSSIAMO VEDERE CHE $N(\omega) = f(A, \alpha)$. INFATTI,

$N(A,\alpha) = \dfrac{A}{|1 + A e^{i\alpha}|}$. NEL PIANO DI NICHOLS, PRENDIAMO

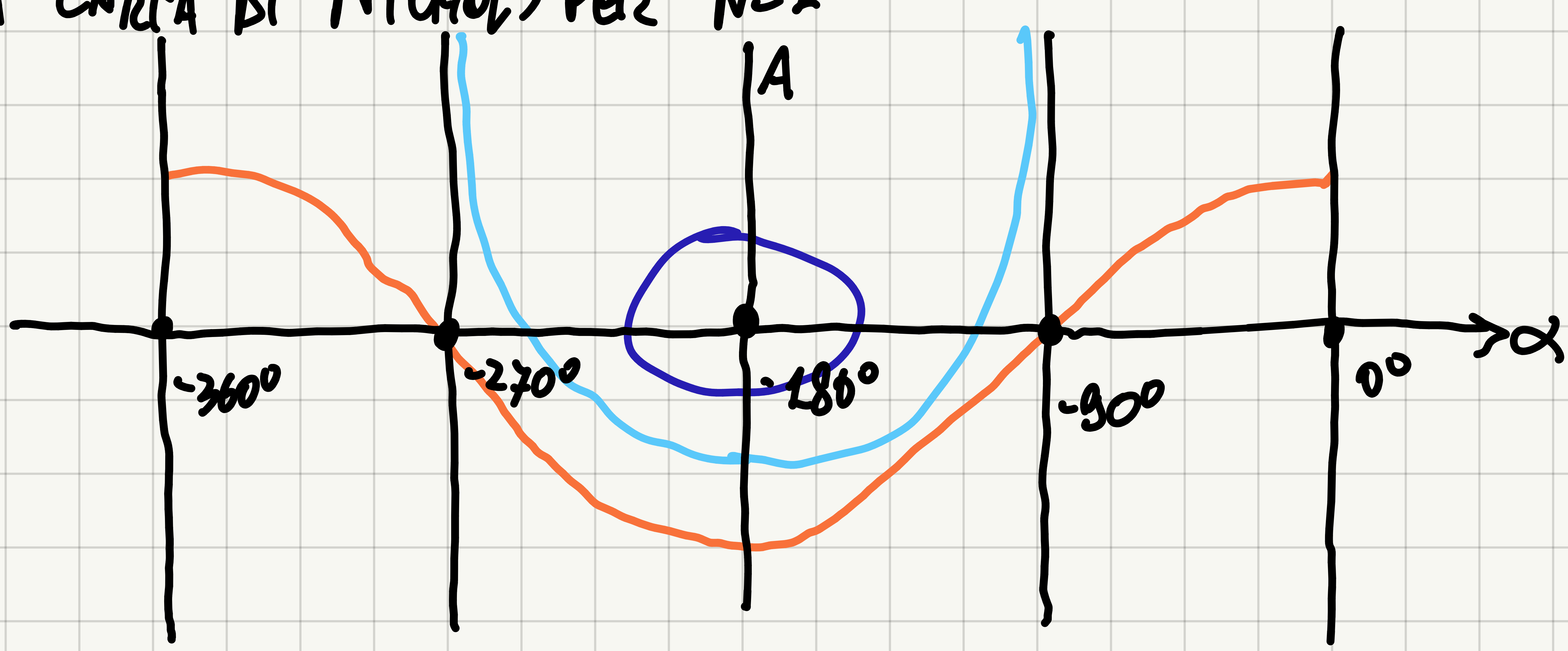
IN $A\alpha$ PUNTI CHE CORRISPONDONO A VALORI COSTANTI DI W

(PUNTI A MODULO COSTANTE)



ESEMPIO: $A = 1 \to A = 0\,dB$
$\alpha = -180° \Rightarrow N = \dfrac{1}{1-1} \to +\infty$

IN GENERALE, C'È SIMMETRIA TRA I LUOGHI. SCRIVIAMO ALLORA LA CARTA DI NICHOLS PER $N=1$



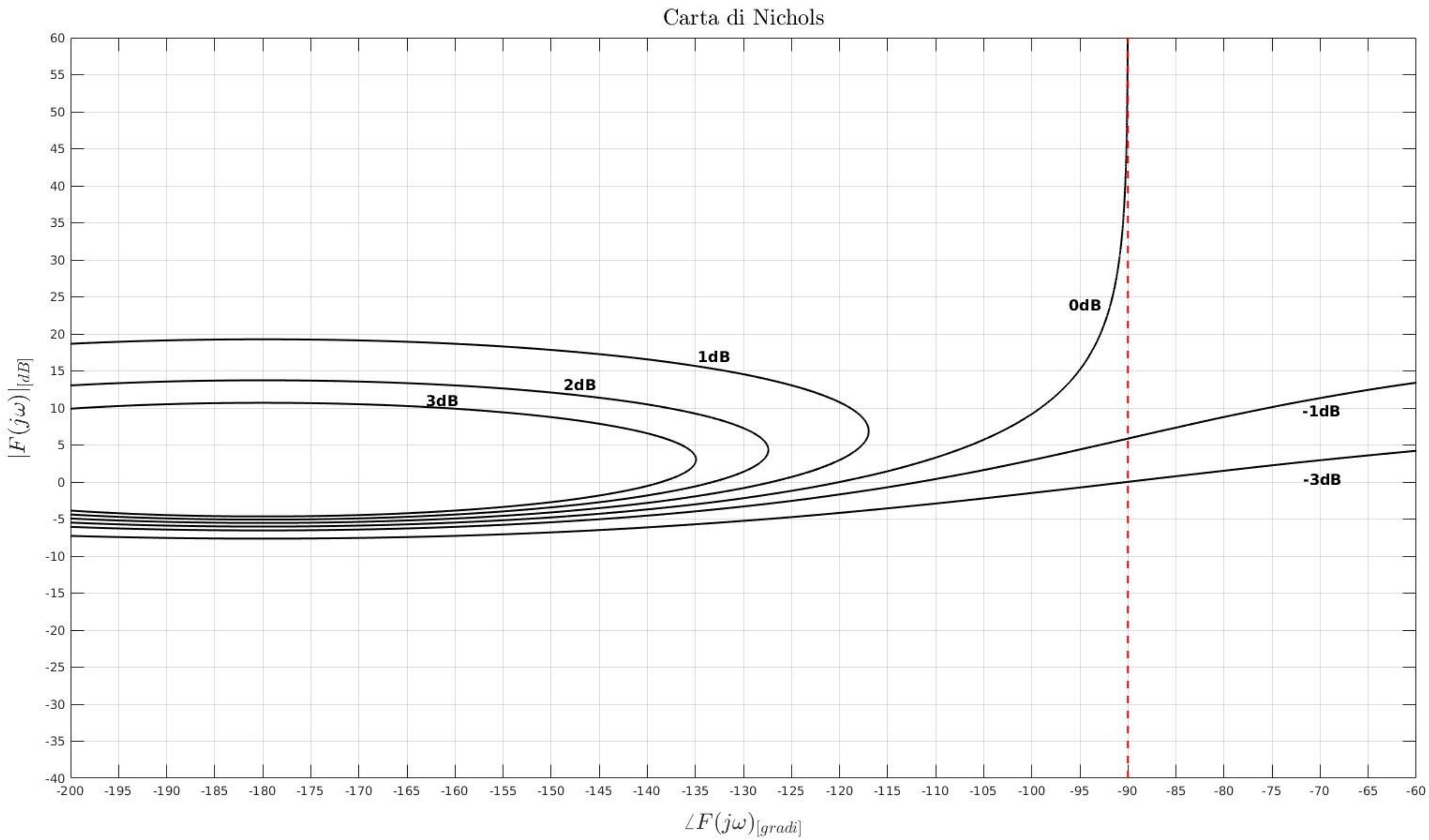
$A = |1 + A e^{i\omega}| \Rightarrow \boxed{A = |(1 + A\cos\alpha) + j A \sin\alpha|}$

$A^2 = (1 + A\cos\alpha)^2 + A^2 \sin^2\alpha = 1 + 2A\cos\alpha + A^2\cos^2\alpha + A^2\sin^2\alpha$ (HA UN POLO IN $s=0$)

$\Rightarrow 1 + 2A\cos\alpha = 0$ IL LUOGO DEI PUNTI NEL PIANO (α, A)

IN CUI $A = 1$ (0 dB) $\quad A = -\dfrac{1}{2\cos\alpha}$

A	α
1	-60°
1/2	-180°
⋮	⋮


Carta di Nichols
0dB
1dB
2dB
3dB
-1dB
-3dB
$|F(j\omega)|_{[dB]}$
$\angle F(j\omega)_{[gradi]}$

CALCOLO DELLE SPECIFICHE

RICORDIAMO LA CORRISPONDENZA TRA I SEGUENTI PARAMETRI:

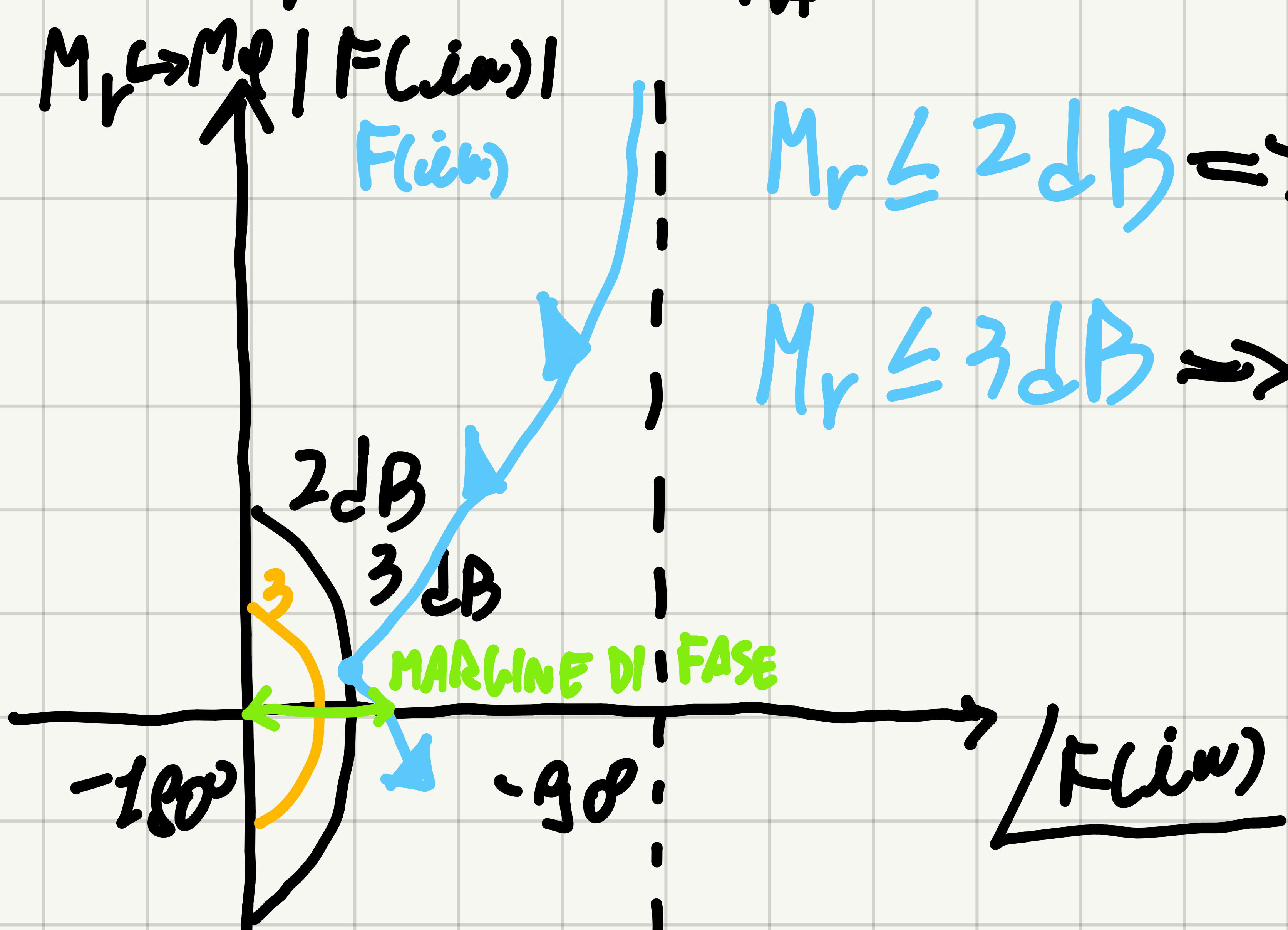
$W(i\omega)$	$F(i\omega)$
M_r	M_φ
B_3	ω_c

$$M_r = \frac{|W(i\omega)|_{max}}{|W(0)|}$$

$$M_r\,(dB) = 20\log_{10}|W(i\omega)| - 20\log_{10}|W(0)|$$

$W(0) = \dfrac{K_F}{1+K_F} \simeq 1$ PER GUADAGNO MOLTO ELEVATO

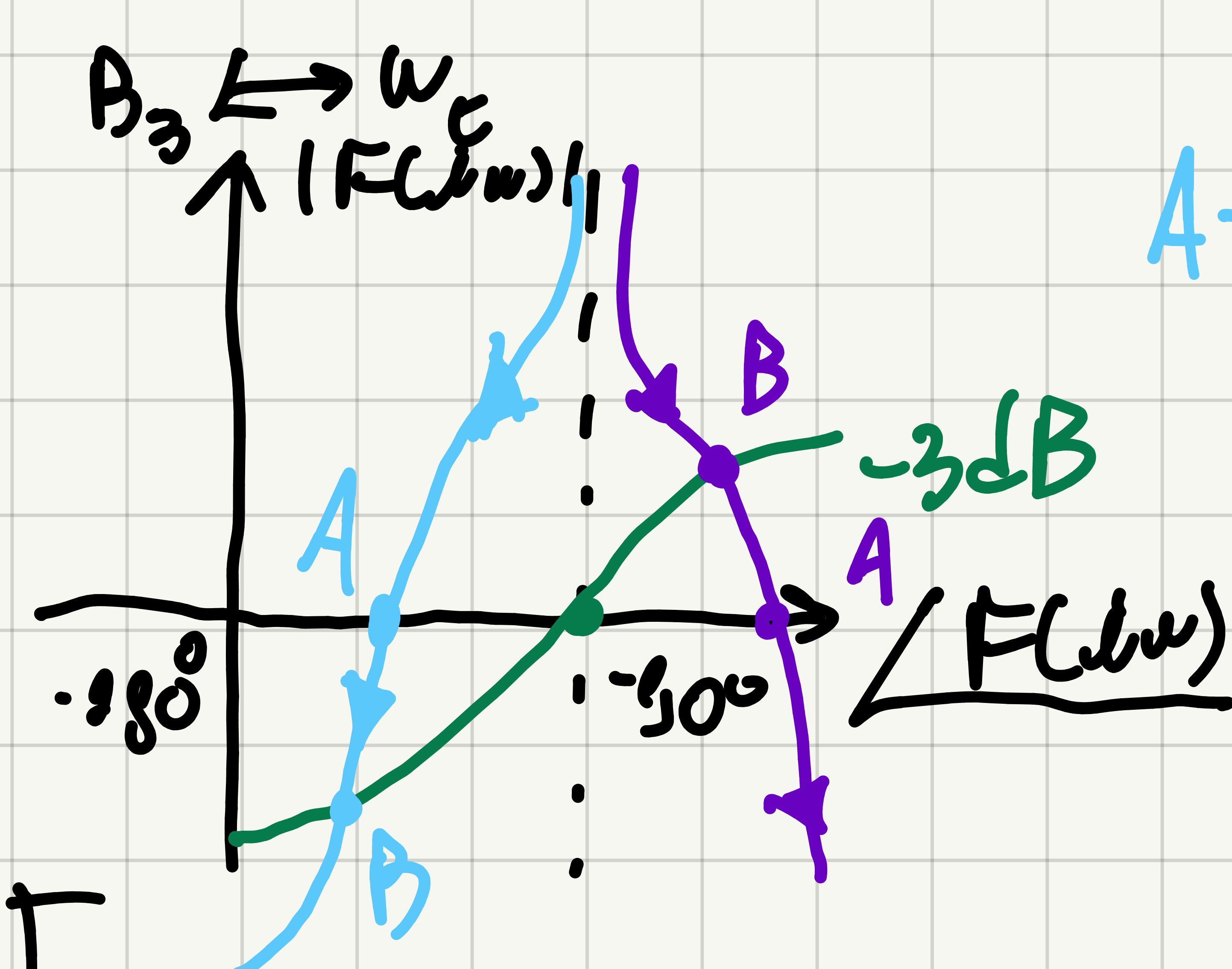
$\Rightarrow M_r \simeq |W(i\omega)|_{MAX}$



$M_r \leq 2dB \Rightarrow M_\varphi \geq 47°$

$M_r \leq 3dB \Rightarrow M_\varphi \geq 42°$

AUMENTANDO IL MARGINE DI FASE DIMINUISCO IL MODULO DELLA RISONANZA



$A \to \omega_c \quad B \to B_3$

IN GENERALE,

- $M_\varphi < 90° \Rightarrow \omega_c < B_3$
- $M_\varphi > 90° \Rightarrow \omega_c > B_3$

EMPIRICAMENTE, $\omega_c = 3 \div 5\, B_3$. $3 \div 5 =$ DA 3 A 5 VOLTE. SI PUÒ APPROSSIMARE CON $\omega_c = 4B_3$

RISOLUZIONE SINTESI IN ω

DALLE SPECIFICHE UNIVOCHE SI OTTIENE IL CONTROLLORE DI 1° TENTATIVO $\hat{G}(s)=\frac{K_G}{s^r}$, DA CUI $\hat{F}(i\omega)=\frac{K_G}{(i\omega)^r}\cdot P(i\omega)$. SE NE TRACCIA I DIAGRAMMI DI BODE DA CUI SI VERIFICANO LE SPECIFICHE LASCHE. SE SONO SODDISFATTE, LO STUDIO È CONCLUSO. ALTRIMENTI SI PROGETTA UN NUOVO CONTROLLORE SFRUTTANDO LE FUNZIONI COMPENSATRICI $\Rightarrow G(s)=\hat{G}(s)\cdot R(s) \Rightarrow F(s)=P(s)\cdot\frac{K_G}{s^r}\cdot R(s)$ E, SULLA CARTA DI NICHOLS, SI VERIFICA CHE B_3 E M_p SIANO SODDISFATTE. IN CASO AFFERMATIVO, LA SINTESI È CONCLUSA.

FUNZIONI COMPENSATRICI

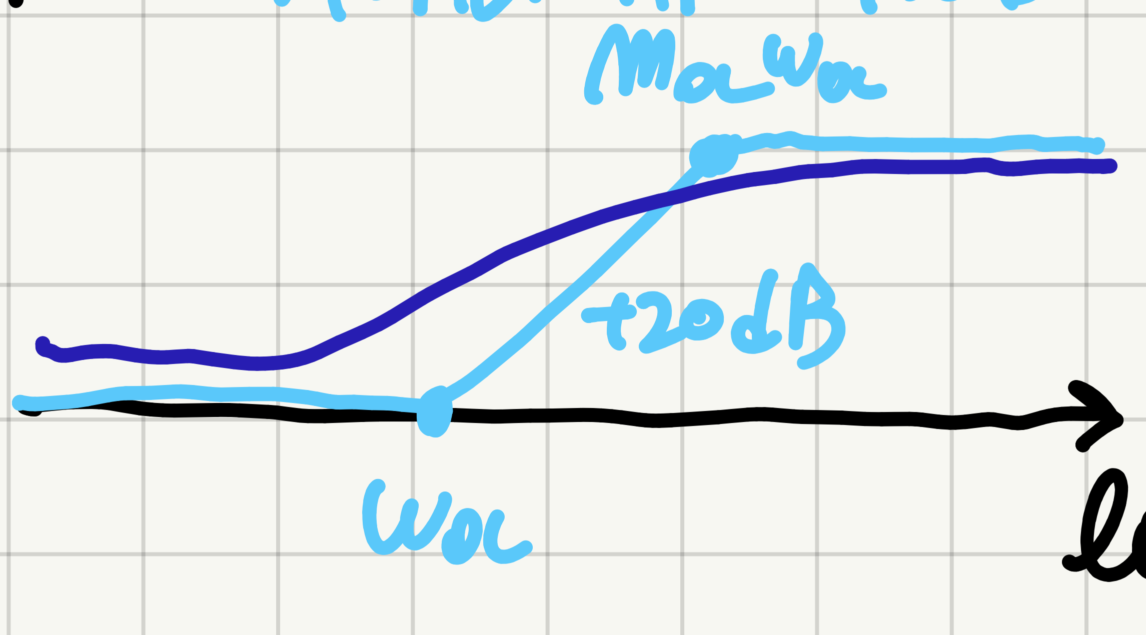
SI DISTINGUONO IN FUNZIONE ANTICIPATRICE $R_a(s)$ E FUNZIONE ATTENUATRICE $R_i(s)$. HANNO GUADAGNO UNITARIO IN MODO DA NON ALTERARE LE SPECIFICHE UNIVOCHE.

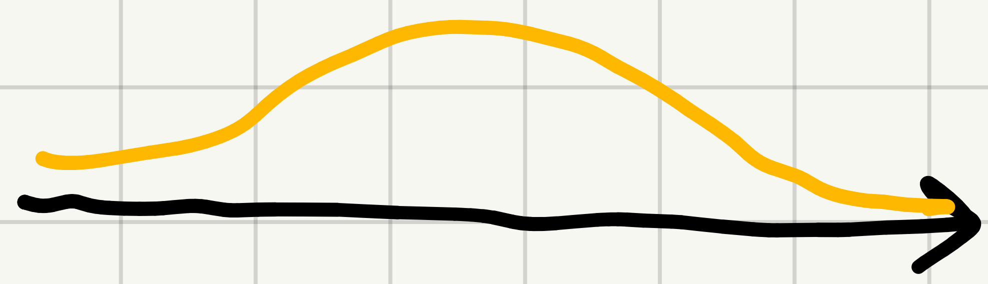
FUNZIONE ANTICIPATRICE

$R_a(s)=\dfrac{1+\tau_a s}{1+\frac{\tau_a}{m_a}s}=\dfrac{1+\frac{s}{\omega_a}}{1+\frac{s}{m_a\omega_a}}$, DOVE $\omega_a=\frac{1}{\tau_a}$ È LA PULSAZIONE DI ROTTURA DELLO ZERO E $m_a>1 \Rightarrow m_a\omega_a>\omega_a$

$\Rightarrow$ LA PULSAZIONE DI ROTTURA DELLO ZERO INTERVIENE PRIMA DELLA

PULSAZIONE DI ROTTURA DEL POLO. VIENE USATA QUINDI PER AUMENTARE MODULO E FASE.

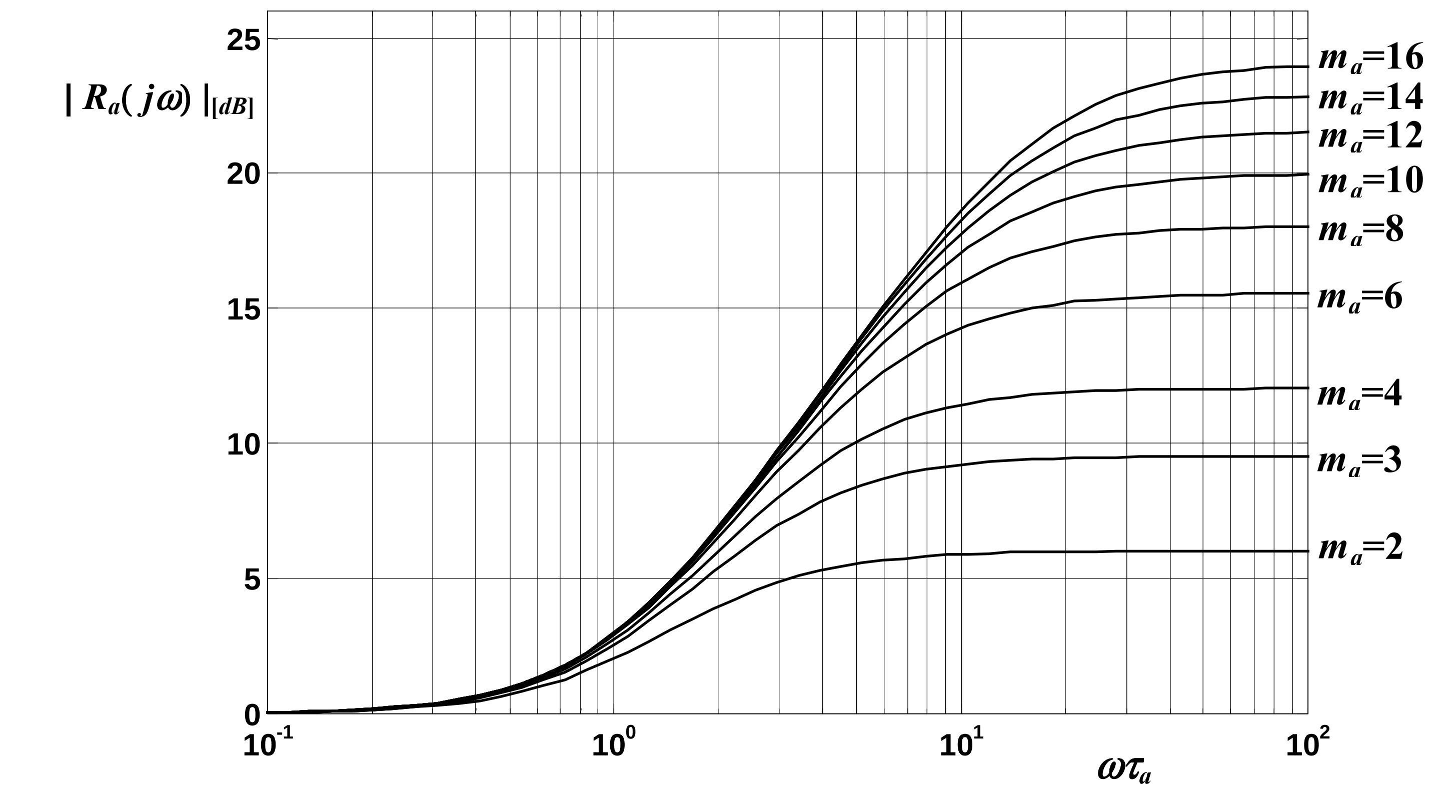


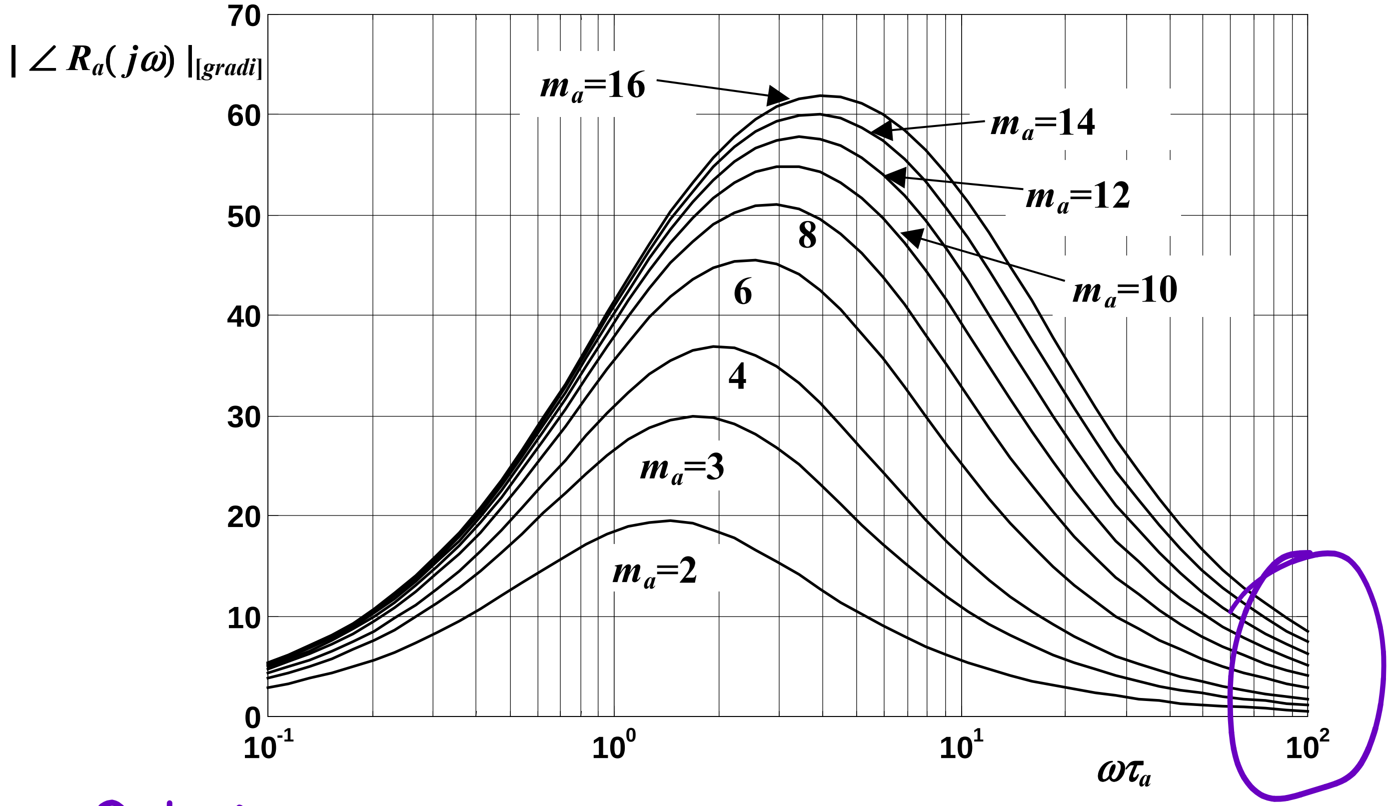


FUNZIONE ATTENUATRICE

$$R_i(s) = \frac{1 + \frac{\tau_i}{m_i} s}{1 + \tau_i s} = \frac{1 + \frac{s}{m_i \tau_i}}{1 + \tau_i s}$$

IN ANALOGIA CON IL DISCORSO SULL'ANTICIPATRICE, L'ATTENUATRICE SI UTILIZZA PER DIMINUIRE MODULO E FASE.

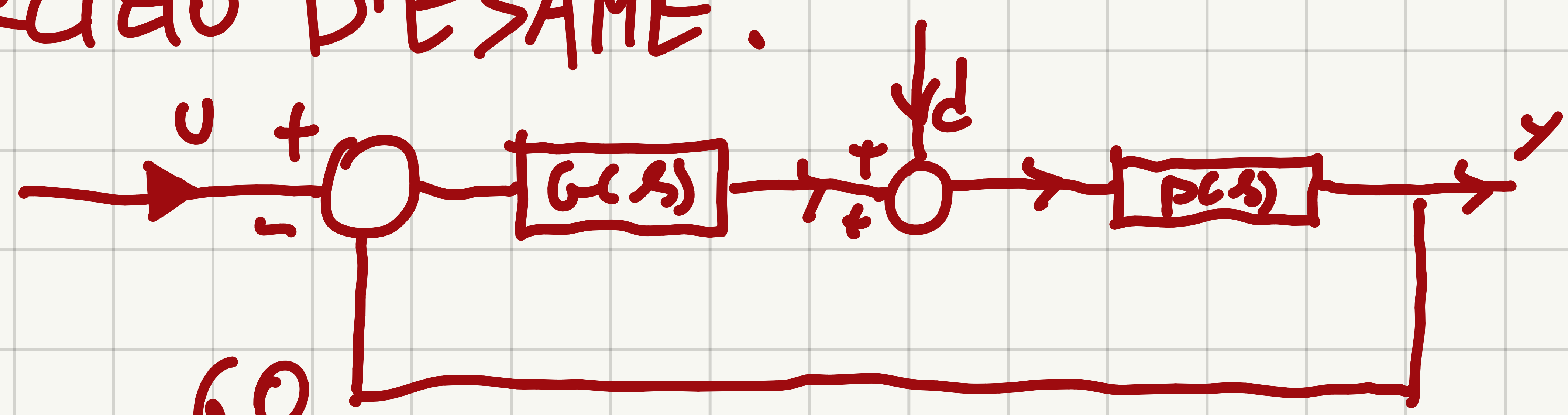




QUANDO LA SPECIFICA SU M_φ È GIÀ SODDISFATTA

SI SCEGLIE $\omega\tau_a = 100$

ESERCIZIO D'ESAME:



$P(s) = \dfrac{60}{s(s+2)(s+30)}$ $\quad \underbrace{d(t) = \delta_{-1}(t)} \quad \underbrace{v(t) = t \cdot \delta_{-1}(t)}$

- $|\tilde{e}| \leq 0,04$ } SPECIFICA UNIVOCA
- $M_r \leq 2dB$ } SPECIFICHE LASCHE
- $B_3 \simeq 2Hz$

$G(s)$?

$$\tilde{e} = \tilde{y}_c + \tilde{e}_d = \frac{1}{K_G} + \frac{K_d^2}{K_F} = \frac{1}{K_G} + \frac{1}{K_G K_P} \qquad K_P = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{K_G} \leq 0,04 \Rightarrow K_G \geq 50$$

ASTATISMO RISPETTO DISTURBO DI TIPO 1 $\Rightarrow$ F(s) DEVE AVERE UN POLO, GIÀ PRESENTE IN P(s)

$\Rightarrow$ CONTROLLORE DI PRIMO TENTATIVO $\hat{G}(s) = 50$

$$\Rightarrow \hat{F}(s) = \hat{G}(s) \cdot P(s) = \frac{50}{s\left(1+\frac{s}{2}\right)\left(1+\frac{s}{30}\right)}$$

- $M_r \leq 2dB \Rightarrow M_\varphi \geq 47°$
- $B_3 \simeq 2Hz \Rightarrow \omega_c = 3 \div 5\, B_3 = 4 B_3 = 8 \frac{rad}{s}$

$$F(i\omega) = \frac{50}{i\omega\left(1+\frac{i\omega}{2}\right)\left(1+\frac{i\omega}{30}\right)}$$

$50 \to 20\log_{10}(50) =$
$= 34\,dB$

PUNTI DI ROTTURA:

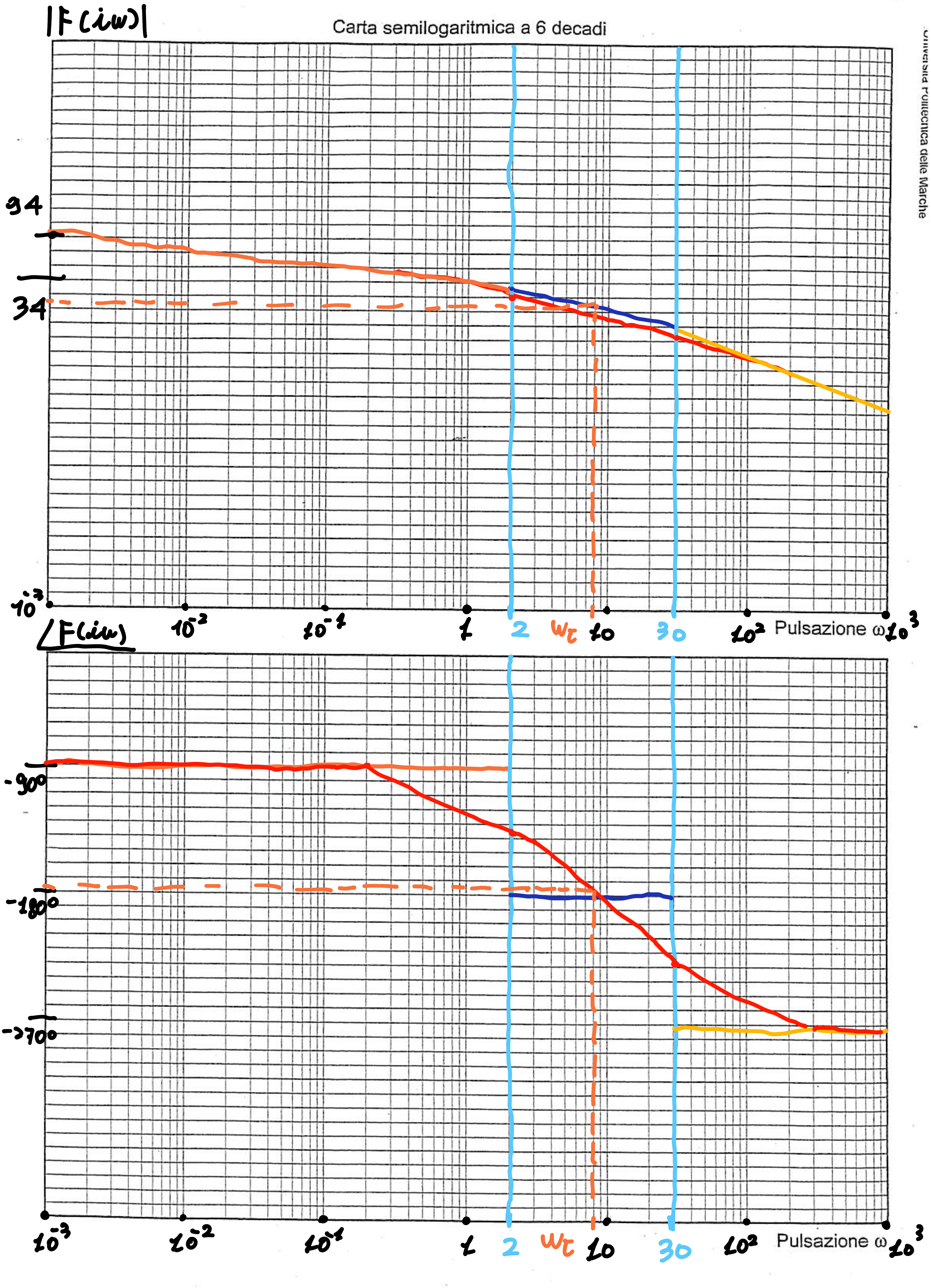
				tot	
• $\omega = 0$	🟠	$-20dB$	$-90°$	$-20dB$	$-90°$
• $\omega = 2$	🔵	$-20dB$	$-90°$	$-40dB$	$-180°$
• $\omega = 30$	🟡	$-20dB$	$-90°$	$-60dB$	$-270°$

CORREZIONE MODULO:

ω	$1+\frac{i\omega}{2}$	$1+\frac{i\omega}{30}$	tot
2	$-3dB$	0	$-3dB$
30	0	$-3dB$	$-3dB$

CORREZIONE FASE:

ω	$i\omega$	$1+\frac{i\omega}{2}$	$1+\frac{i\omega}{30}$	tot
2	$-90°$	$-45°$	0	$-135°$
30	$-90°$	$-90°$	$-45°$	$-225°$



|F(iω)|
Carta semilogaritmica a 6 decadi
Politecnica delle Marche
94
34
10^-3
10^-2
10^-1
1
2
ω_t
10
30
10^2
Pulsazione ω
10^3
∠F(iω)
-90°
-180°
-270°

$|F(8i)| = 0$?

$\angle F(8i) \geq -180° + M_p = -133°$

$|F(i\omega)| = 6\ dB$ ✗

$\angle F(i\omega) = -179°$ ✗

OCCORRE DIMINUIRE IL MODULO

E AUMENTARE LA FASE

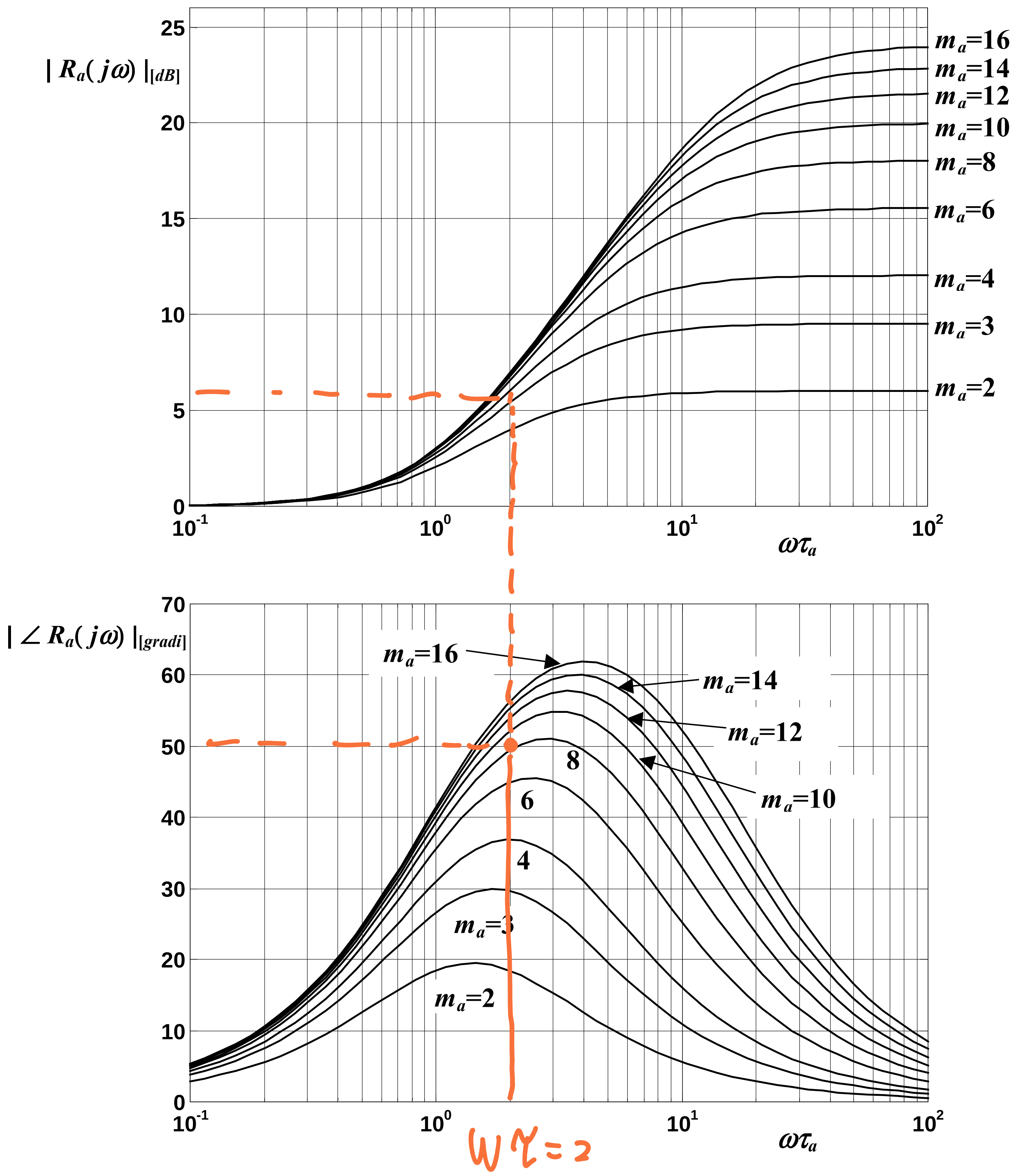
$\Rightarrow$ FUNZIONE ANTICIPATRICE $R_a(s) = \dfrac{1 + \frac{s}{\omega_i}}{1 + \frac{s}{m_i \omega_i}}$

E ATTENUATRICE $R_i(s) = \dfrac{1 + \frac{s}{m_i \omega_i}}{1 + \frac{s}{\omega_i}}$

AUMENTO LA FASE DI $50°$ E DIMINUISCO IL MODULO DI 6dB

$\omega_t \tau = 2 \Rightarrow \omega_i = \dfrac{\omega_t}{2} = 4\ \frac{rad}{s}$ $\quad m_i = 3$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{50}{s\left(1+\frac{s}{2}\right)\left(1+\frac{s}{30}\right)} \cdot \frac{1+\frac{s}{12}}{1+\frac{s}{4}} \cdot \text{———}$$



$|R_a(j\omega)|_{[dB]}$
25
20
15
10
5
0
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
$\omega\tau_a$
m_a=16
m_a=14
m_a=12
m_a=10
m_a=8
m_a=6
m_a=4
m_a=3
m_a=2
$|\angle R_a(j\omega)|_{[gradi]}$
70
60
50
40
30
20
10
0
m_a=16
m_a=14
m_a=12
m_a=10
8
6
4
m_a=3
m_a=2
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
$\omega\tau_a$
$\omega\tau = 2$

$$F(i\omega) = \frac{50}{i\omega\left(1+\frac{i\omega}{2}\right)\left(1+\frac{i\omega}{30}\right)} \cdot \frac{1+\frac{i\omega}{12}}{1+\frac{i\omega}{4}}$$

PUNTI DI ROTTURA

• $\omega = 0$	●	$-20\,dB$	$-90°$	$-20\,dB$	$-90°$
• $\omega = 2$	●	$-20\,dB$	$-90°$	$-40\,dB$	$-180°$
• $\omega = 4$	●	$-20\,dB$	$-90°$	$-60\,dB$	$-270°$
• $\omega = 12$	●	$+20\,dB$	$+90°$	$-40\,dB$	$-180°$
• $\omega = 30$	●	$-20\,dB$	$-90°$	$-60\,dB$	$-270°$

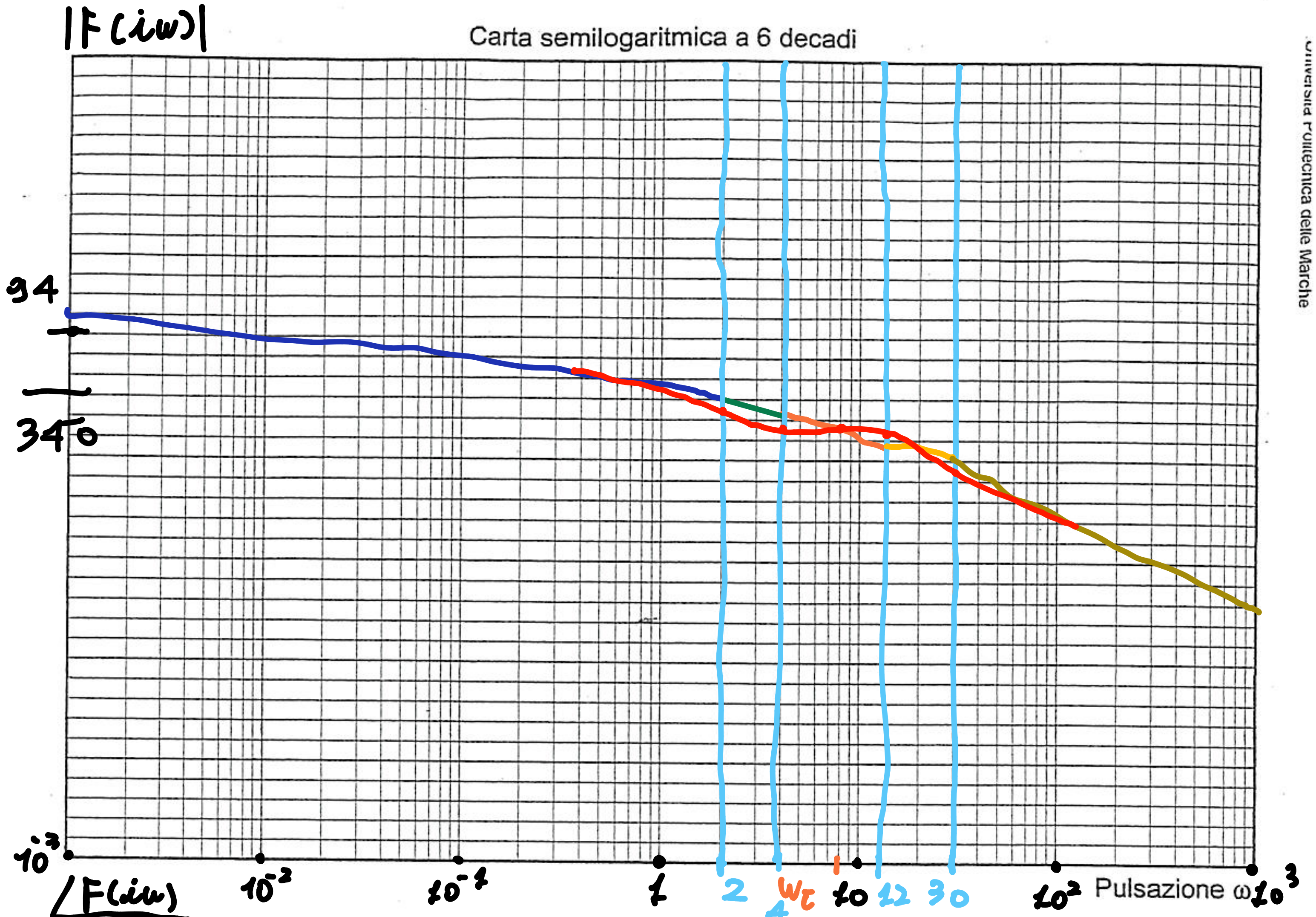
CORREZIONE MODULO

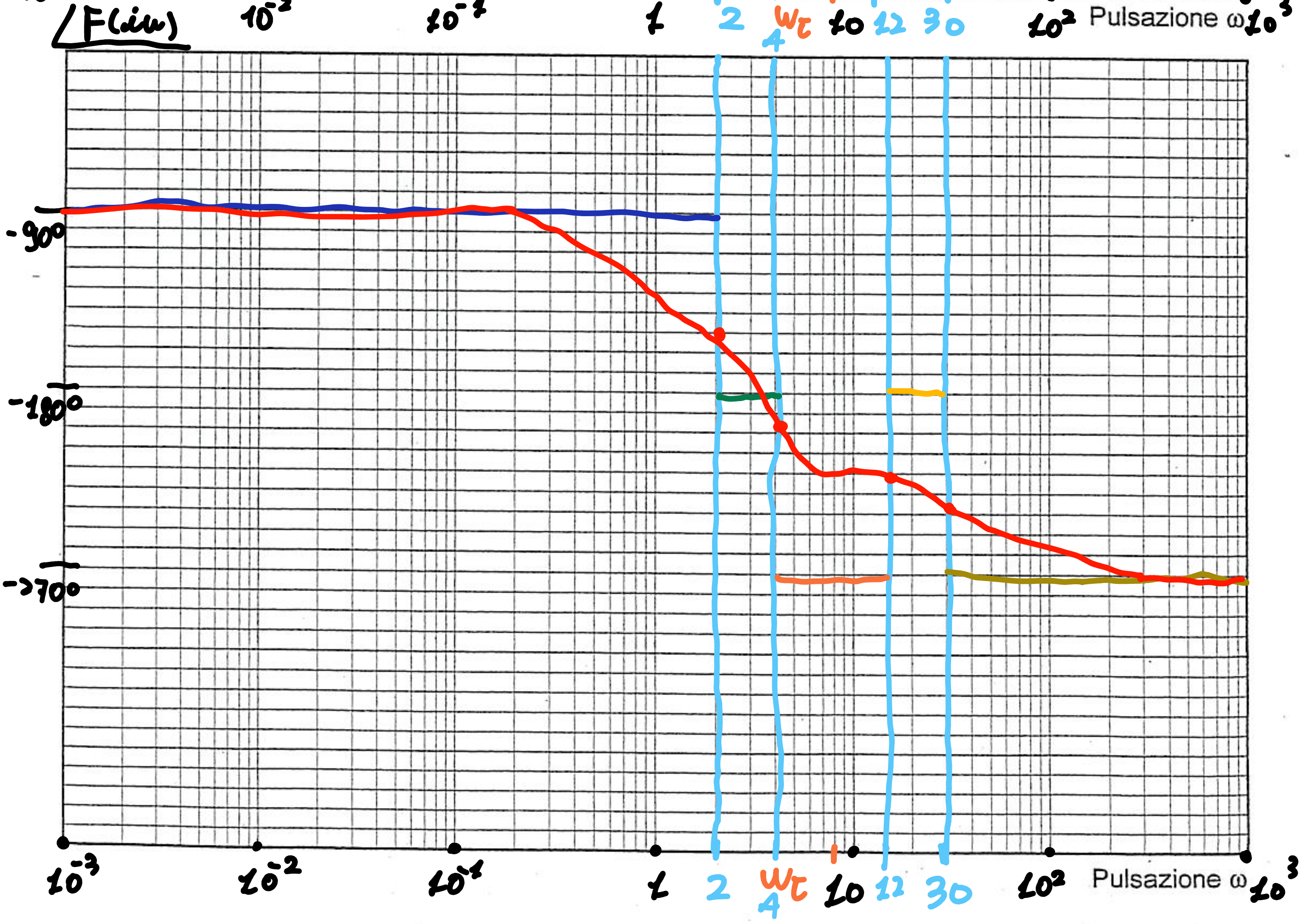
ω	$1+\frac{i\omega}{2}$	$1+\frac{i\omega}{4}$	$1+\frac{i\omega}{12}$	$1+\frac{i\omega}{30}$	tot
2	$-3\,dB$	$-1\,dB$	0	0	$-4\,dB$
4	$-1\,dB$	$-3\,dB$	0	0	$-4\,dB$
12	0	0	$+3\,dB$	0	$+3\,dB$
30	0	0	0	$-3\,dB$	$-3\,dB$

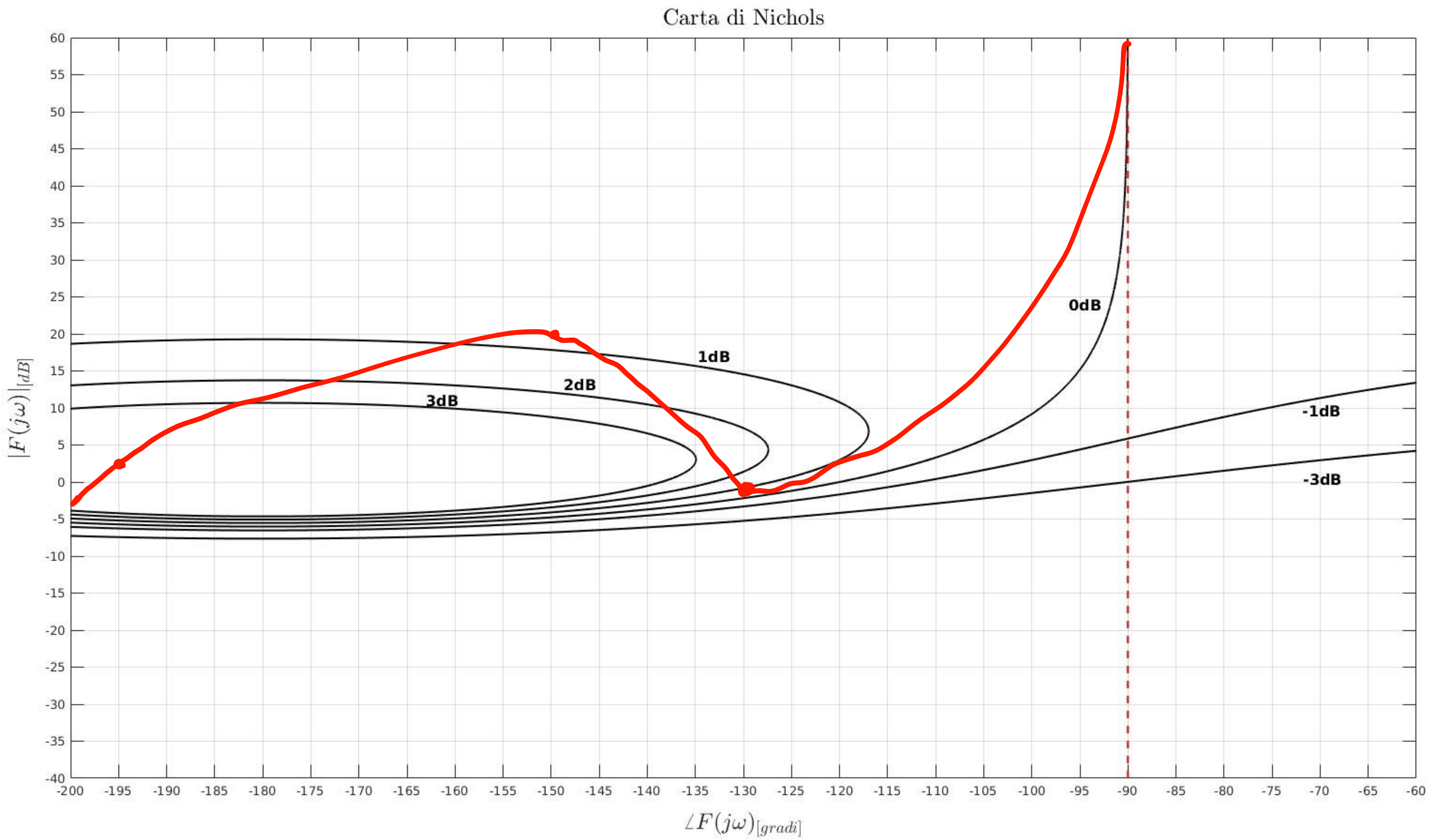
CORREZIONE FASE

ω	$i\omega$	$1+\frac{i\omega}{2}$	$1+\frac{i\omega}{4}$	$1+\frac{i\omega}{12}$	$1+\frac{i\omega}{30}$	tot
2	$-90°$	$-45°$	$-25°$	$+10°$	0	$-150°$
4	$-90°$	$-75°$	$-45°$	$+15°$	0	$-195°$
12	$-90°$	$-80°$	$-70°$	$+45°$	$-25°$	$-220°$
30	$-90°$	$-80°$	$-90°$	$+70°$	$-45°$	$-235°$

Carta semilogaritmica a 6 decadi







Carta di Nichols
$|F(j\omega)|_{[dB]}$
$\angle F(j\omega)_{[gradi]}$
0dB
1dB
2dB
3dB
-1dB
-3dB
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
-30
-35
-40
-200
-195
-190
-185
-180
-175
-170
-165
-160
-155
-150
-145
-140
-135
-130
-125
-120
-115
-110
-105
-100
-95
-90
-85
-80
-75
-70
-65
-60

SINTESI CON IL LUOGO DELLE RADICI

PUÒ ESSERE USATO ANCHE PER SISTEMI INSTABILI, SI DEFINISCE IL CONTROLLORE COME $G(s) = \frac{K_G}{s^r} \cdot R(s)$, DOVE $R(s)$ SI RICAVA MEDIANTE ESPRESSIONI ALGEBRICHE. CONSIDERIAMO UN SISTEMA IN RETROAZIONE $F(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$, CON K COEFFICIENTE DI GUADAGNO, z GLI ZERI E p I POLI. IN GENERALE SI STUDIANO SISTEMI STRETTAMENTE PROPRI ($n>m$)

PRIMO ESEMPIO: $F(s) = \frac{K \cdot (s+2)(s+5)}{s(s^2+2s+2)(s+10)}$ $m=2$, $n=4$

$n-m=2$ (ANALIZZEREMO IN SEGUITO L'IMPORTANZA)

$z_1=-2$, $z_2=-5$; $p_1=0$, $p_2=-1+i$, $p_3=-1-i$, $p_4=-10$

$K_F = \frac{K \cdot 5 \cdot 2}{2 \cdot 10} = \frac{K}{2} \neq K$

$W(s) = \frac{F(s)}{1+F(s)}$. SVOLGENDO I CALCOLI, SI OTTIENE CHE

$W(s) = \frac{K \cdot \prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i) + K \cdot \prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}$. DA CUI SI DEFINISCE, DAL DENOMINATORE, $\varphi(s,K) = \prod_{i=1}^{n}(s-p_i) + K \cdot \prod_{i=1}^{m}(s-z_i)$. IL LUOGO DELLE RADICI È IL LUOGO DEI PUNTI NEL PIANO DI GAUSS PERCORSO DALLE RADICI DI $\varphi(s,K)$ AL VARIARE DI $K \in \mathbb{R}$

$f(s,K)=0$ CONSENTE DI STUDIARE LA STABILITÀ.

$K=0 \Rightarrow f(s,K)=D_F \Rightarrow$ POLI IN CATENA CHIUSA = POLI IN CATENA APERTA

ESEMPIO: $F(s)=\dfrac{K}{s(s+4)}$ $n=2,\ m=0$

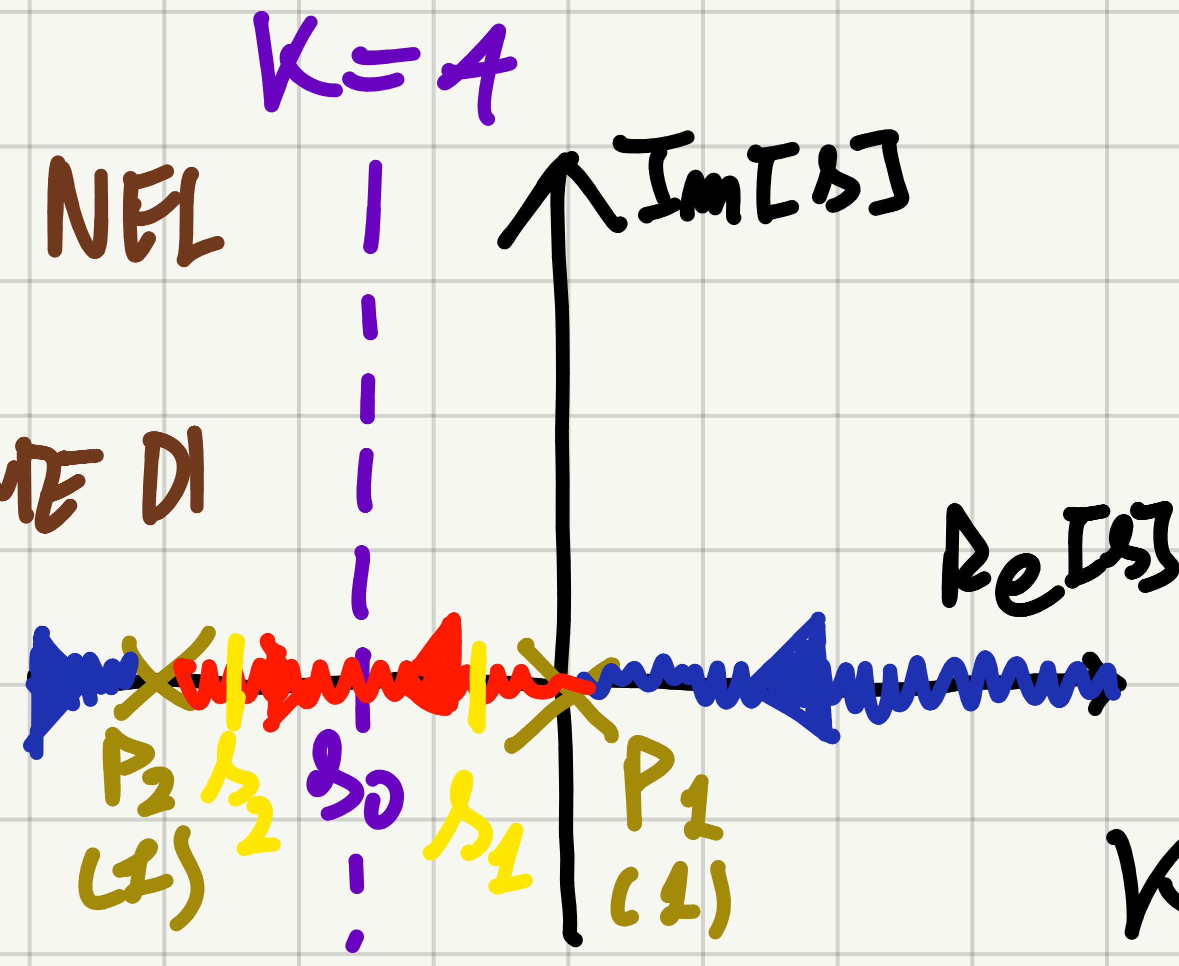
$P_1=0,\ P_2=-4$ $f(s,K)=s^2+4s+K$ $n-m=2$

$s=\begin{cases}-2+\sqrt{4-K}\\-2-\sqrt{4-K}\end{cases}$ PER $n-m=2$, SI DEFINISCE

L'ASINTOTO $s_0=\dfrac{\Sigma P-\Sigma Z}{n-m}=-2$

POLI INDICATI CON ×
ZERI INDICATI CON O

FRECCE NEL VERSO CRESCENTE DI K



$K<0$ LUOGO NEGATIVO

$K>0$ LUOGO POSITIVO

$K\begin{cases}<4 \Rightarrow 2 \text{ RADICI} \in \mathbb{R}\\=4 \Rightarrow 2 \text{ RADICI GIÀ COINCIDENTI}\\>4 \Rightarrow 2 \text{ RADICI} \in \mathbb{C}\end{cases}$

$f(s,K)\big|_{s=0}=0 \Rightarrow K=0 \Rightarrow$ SISTEMA STABILE $\forall K>0$

IN GENERALE, $f(s,K)=0 \Rightarrow \prod_{i=1}^{n}(s-P_i)=-K\prod_{i=1}^{m}(s-Z_i)$

$\Rightarrow$ POSSO ASSOCIARE UNA CONDIZIONE DI MODULO E UNA DI FASE

- $\prod_{i=1}^{n}|s-P_i|=|K|\cdot\prod_{i=1}^{m}|s-Z_i| \Rightarrow |K|=\dfrac{\prod_{i=1}^{n}|s-P_i|}{\prod_{i=1}^{m}|s-Z_i|}$
- $\angle \prod_{i=1}^{n}(s-P_i)=\angle -K\cdot\prod_{i=1}^{m}(s-Z_i)$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \angle(s-p_i) = \angle -1 + \angle K + \sum_{i=1}^{m} \angle(s-z_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \angle(s-p_i) - \sum_{i=1}^{m} \angle(s-z_i) = \pi + \angle K + 2h\pi, \quad h \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} K > 0 \Rightarrow \angle K = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \angle(s-p_i) - \sum_{i=1}^{m} \angle(s-z_i) = (2h+1)\pi \\ K < 0 \Rightarrow \angle K = -\pi \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \angle(s-p_i) - \sum_{i=1}^{m} \angle(s-z_i) = 2h\pi \end{cases}$$

REGOLE PER IL TRACCIAMENTO

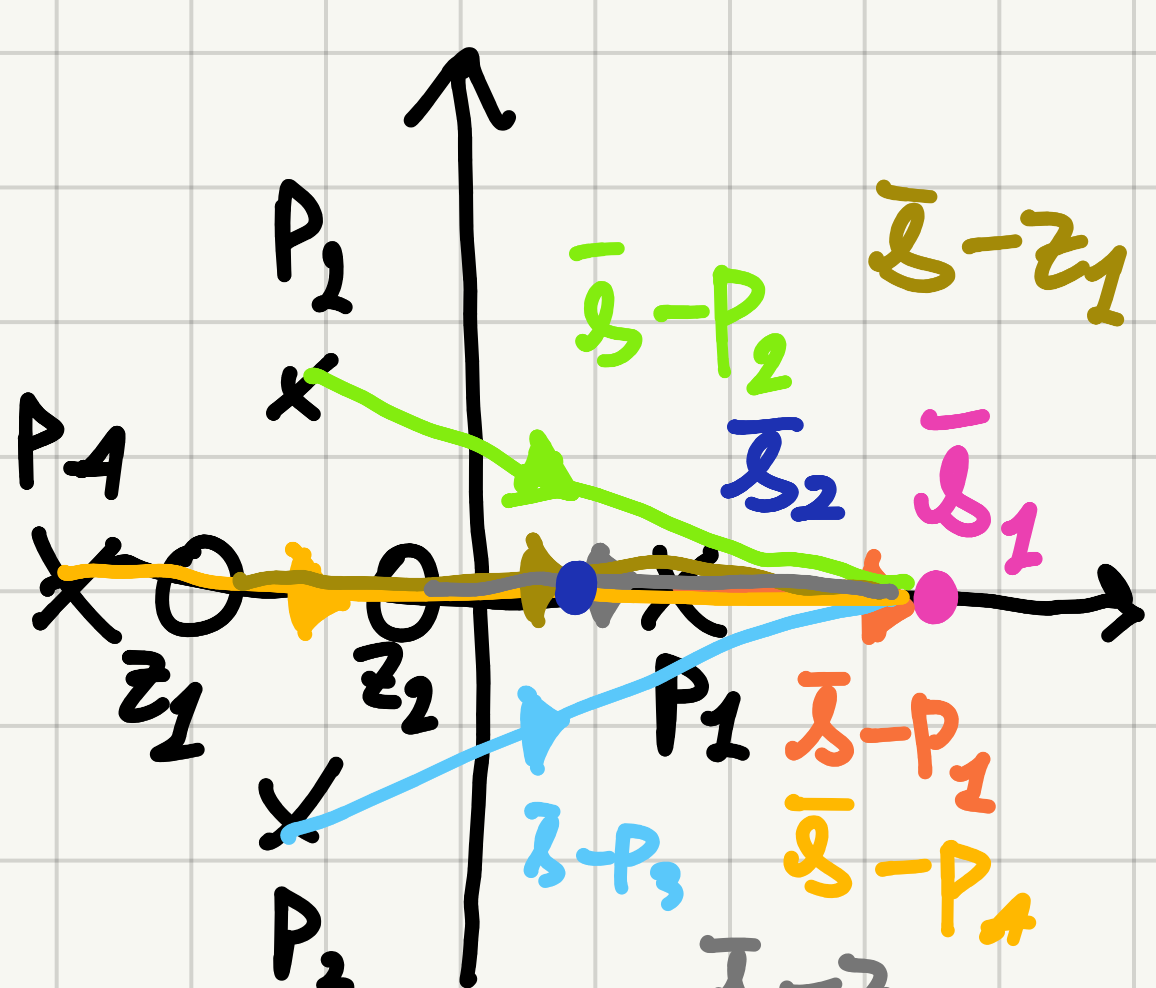
1. $K=0 \Rightarrow p(s,K) = \prod_{i=1}^{n}(s-p_i) = 0 \Rightarrow$ POLI IN CATENA CHIUSA = POLI IN CATENA APERTA

2. IL LUOGO DELLE RADICI È SIMMETRICO RISPETTO ALL'ASSE REALE

3. TUTTO L'ASSE REALE APPARTIENE AL LUOGO DELLE RADICI

   a) APPARTENGONO AL LUOGO POSITIVO LE PORZIONI DI ASSE REALE CHE LASCIANO ALLA LORO DESTRA UN NUMERO DISPARI DI ZERI E/O POLI CONTATI CON LA LORO MOLTEPLICITÀ

DIMOSTRAZIONE CON LA FASE



PRENDIAMO $\bar{s}_1$ SU CUI APPLICHIAMO LA CONDIZIONE DI FASE:

$$\sum_{i=1}^{n} \angle(\bar{s}-p_i) - K\sum_{i=1}^{m} \angle(\bar{s}-z_i) = \begin{cases} (2h+1)\pi & K>0 \\ 2h\pi & K<0 \end{cases}$$

DISEGNAMO I VETTORI ED EFFETTUIAMO IL CALCOLO

$$\begin{cases} \bar{s}-z_1 = \bar{s}-z_2 = \bar{s}-p_1 = \bar{s}-p_4 = 0 \\ \bar{s}-p_2 = \bar{s}-p_3 \end{cases}$$

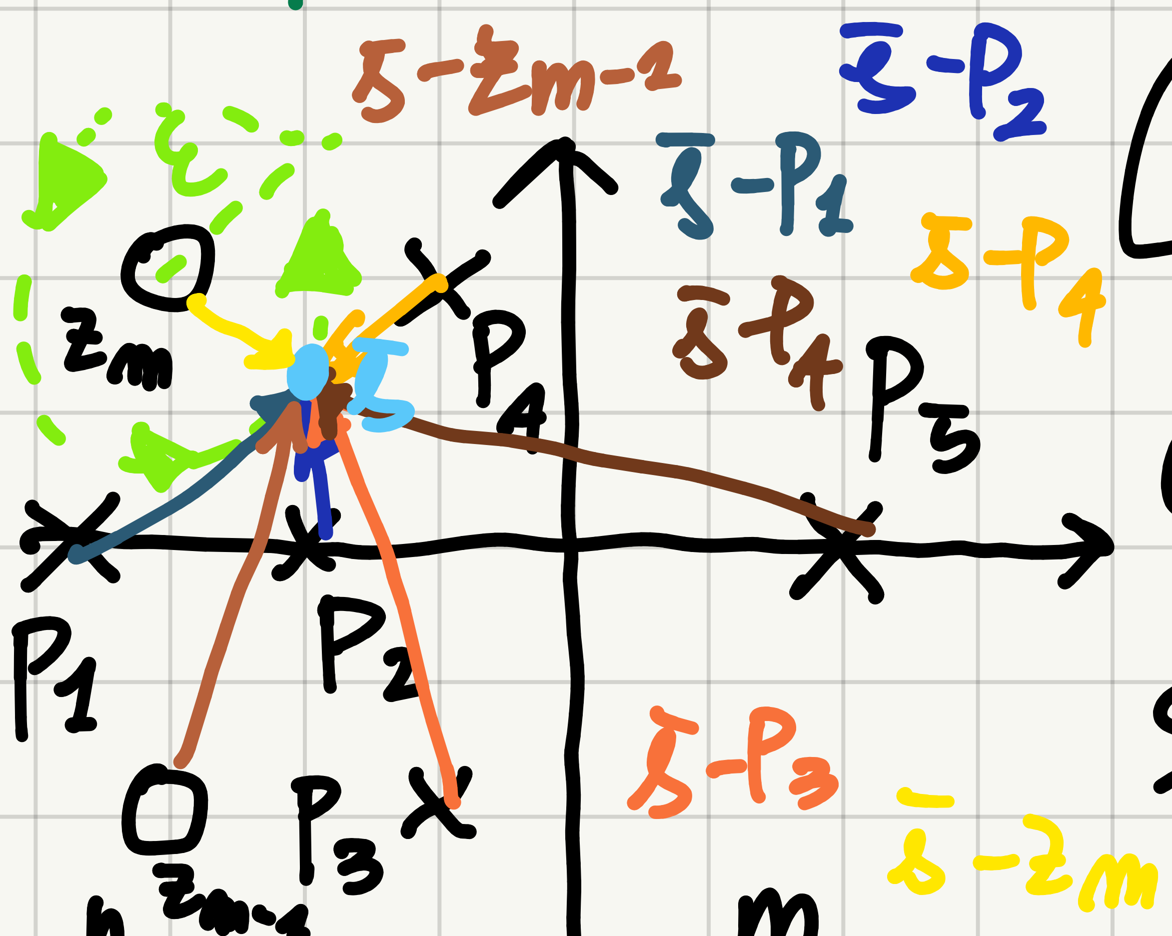
$\Rightarrow \Sigma_{tot} = 0 \Rightarrow \bar{s}_1 \in K<0$

ANALOGAMENTE CON $\bar{s}_2$, $\Sigma_{tot} = \pi \Rightarrow \bar{s}_2 \in K>0$

$\Rightarrow s \in \mathbb{R}$

4 PER $K \to \pm\infty$, m RAMI CONVERGONO SUGLI ZERI

DIMOSTRAZIONE



CONSIDERIAMO L'INTORNO CIRCOLARE CENTRATO IN z_m E RAGGIO ε SU $\bar{s}$

SI APPLICA LA CONDIZIONE DI FASE

$$\sum_{i=1}^{n} \angle \bar{s}-p_i - \sum_{i=1}^{m} \angle \bar{s}-z_i = (2h+1)\pi$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \angle \bar{s}-p_i - \sum_{i=1}^{m-1} \angle \bar{s}-z_i}_{} - \angle \bar{s}-z_m = (2h+1)\pi$$

$$\varphi(\bar{s}) - \angle \bar{s}-z_m = (2h+1)\pi$$

$\varphi(\bar{s})$ TENDE AD UN VALORE COSTANTE PER $\varepsilon \to 0$

$\angle \bar{s}-z_m$ PUÒ ASSUMERE QUALUNQUE VALORE $\Rightarrow$ ESISTE UN PUNTO CHE SODDISFA L'EQUAZIONE. DALLA CONDIZIONE

DI MODULO, $|K| = \dfrac{\prod_{i=1}^{n} |s-p_i|}{\prod_{i=1}^{m} |s-z_i|}$

$\nu \angle \bar{s}-z_m = \varphi(\bar{s}) - (2h+1)\pi \qquad \angle \bar{s}-z_m = \dfrac{\varphi(\bar{s})}{\nu} - \dfrac{(2h+1)\pi}{\nu}$

$\bar{s}_1$ CON $h=0$

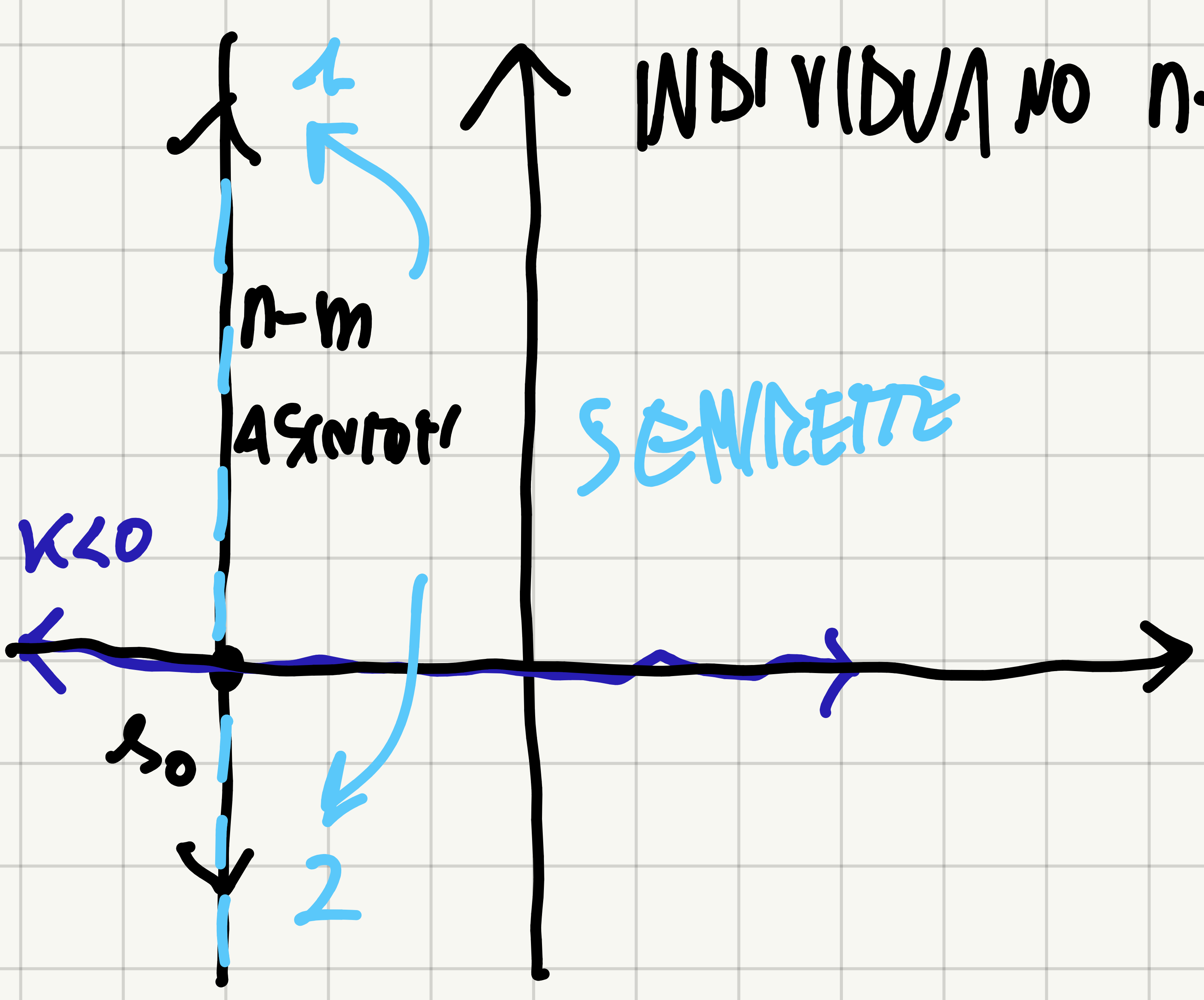
$\bar{s}_2$ CON $h=1$

$\vdots$

$\bar{s}_\nu$ CON $h=\nu-1$

IN TUTTO ABBIAMO m SOLUZIONI PER n RAMI CON $K \to \pm\infty$

$\Rightarrow$ m RAMI TENDONO AGLI ZERI. GLI ALTRI $n-m$? S_1



INDIVIDUANO $n-m$ ASINTOTI DI CENTRO s_0.

$$s_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$$ CENTRO DEGLI ASINTOTI

$$F(s) = \frac{K \cdot \prod_{i=1}^{m} (s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n} (s-p_i)} \qquad \bar{F}(s) = \frac{K}{(s-s_0)^{n-m}}$$

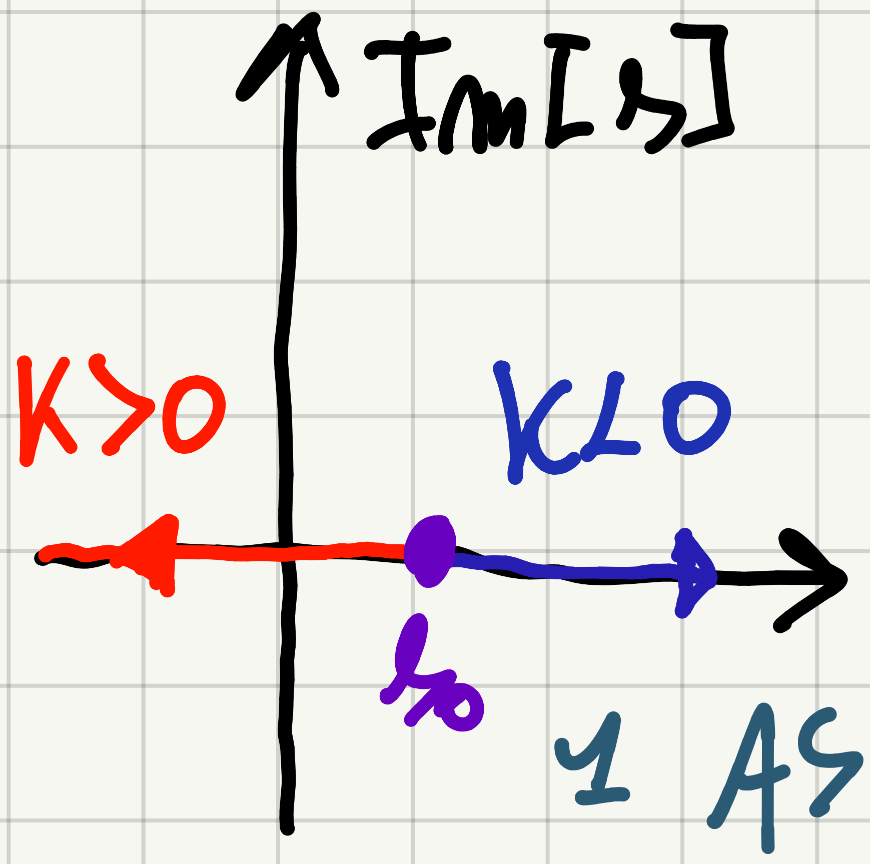
$$f(s,K) = \prod_{i=1}^{n} (s-p_i) + K \prod_{i=1}^{m} (s-z_i)$$

PER $K \to +\infty$, $\bar{f}(s,K) = (s-s_0)^{n-m} + K = 0$

COMPORTAMENTO ASINTOTICO AL VARIARE DI n-m

• $n-m=1 \Rightarrow \bar{P}(s,K)=(s-s_0)+K=0$

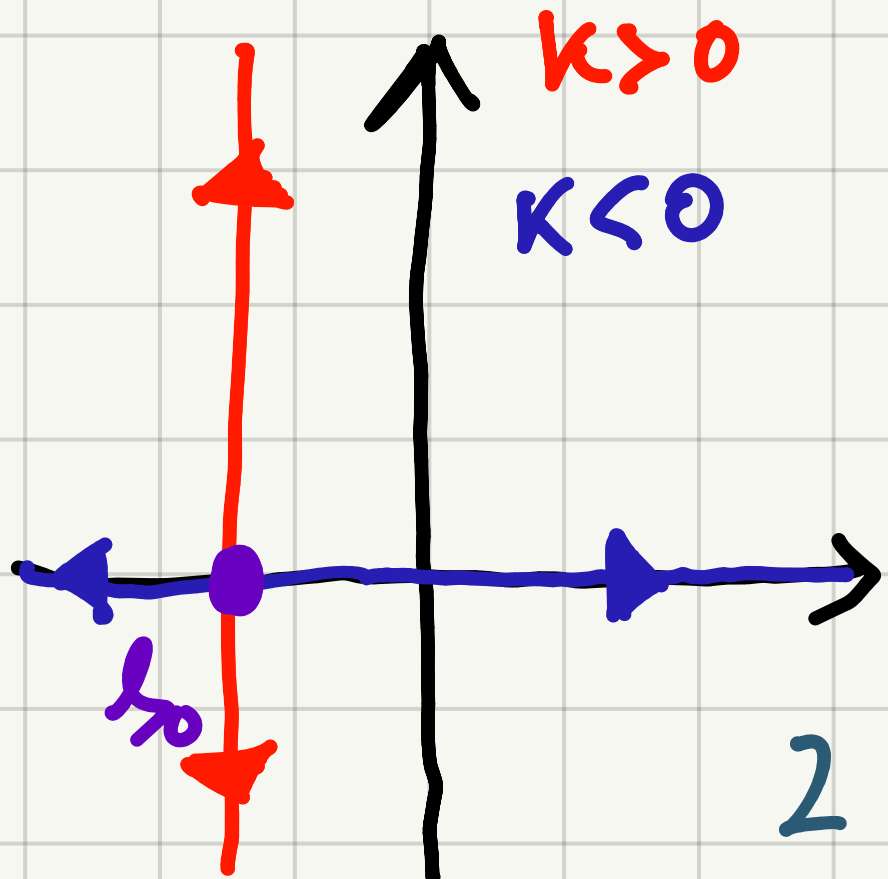
$$\Rightarrow s=s_0-K$$



IL PUNTO s_0 HA COORDINATE NON NOTE

1 ASINTOTO ORIZZONTALE

• $n-m=2 \Rightarrow \bar{P}(s,K)=(s-s_0)^2+K=0 \qquad s-s_0=y$



$$\Rightarrow y^2=-K$$

$$\begin{cases} K>0 \Rightarrow s-s_0=\pm i\sqrt{K} \\ K<0 \Rightarrow s-s_0=\pm\sqrt{K} \end{cases}$$

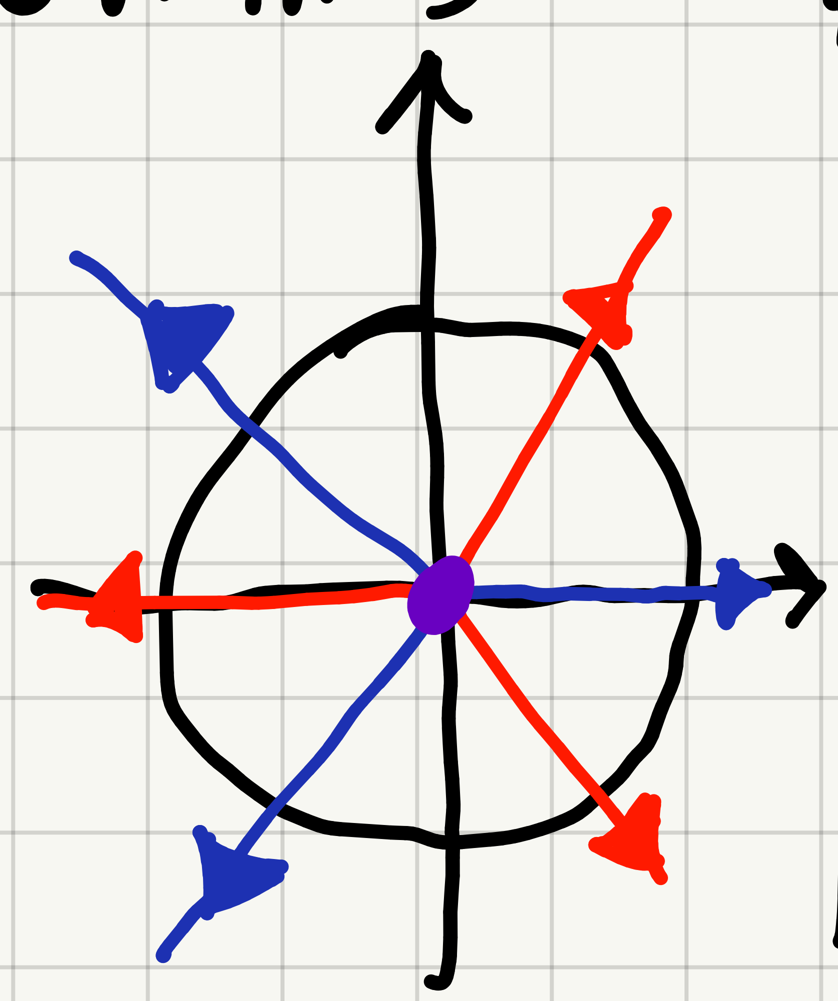
2 ASINTOTI ORIZZONTALE PER K<0

2 ASINTOTI VERTICALE PER K>0

$$s_0=\frac{\Sigma p-\Sigma z}{n-m}$$

• $n-m=3 \Rightarrow P(s,K)=(s-s_0)^3+K=0 \qquad s-s_0=y$

$$\Rightarrow y^3=-K \qquad s_0=\frac{\Sigma p-\Sigma z}{n-m}$$



K>0

SFASAMENTO DI $+\pi$ K<0

È NECESSARIO, PER TROVARE GLI ASINTOTI OBLIQUI, CONOSCERE L'ANGOLO CHE FORMANO CON L'ASSE REALE

$$\varphi_+=\frac{(2h+1)\pi}{n-m} \qquad \varphi_-=\frac{2h\pi}{n-m} \qquad h=0,1,\dots,n-m-1$$

$$\Rightarrow h=0,1,2 \qquad \varphi_{+,0}=\frac{\pi}{3},\ \varphi_{+,1}=\pi,\ \varphi_{+,2}=\frac{5}{3}\pi$$

$\varphi_{-,0}=0,\ \varphi_{-,1}=\frac{2}{3}\pi,\ \varphi_{-,2}=\frac{4}{3}\pi$

PUNTI SINGOLARI

SONO RADICI MULTIPLE DI $f(s,K)=0$ CORRISPONDENTI AD UN CERTO VALORE DI K E VALE CHE $\begin{cases} f(s,K)=0 \\ \frac{\partial}{\partial s} f(s,K)=0 \end{cases}$

$f(s,K)=\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)+K\cdot\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)=0$

$f(s,\bar{K})=\prod_{i=1}^{n}(s-\bar{s}_i)$. SUPPONIAMO CHE ESISTA UNA RADICE DOPPIA $\bar{s}_1 \Rightarrow f(s,K)=(s-\bar{s}_1)^2\cdot\prod_{i=3}^{n}(s-\bar{s}_i)=0$

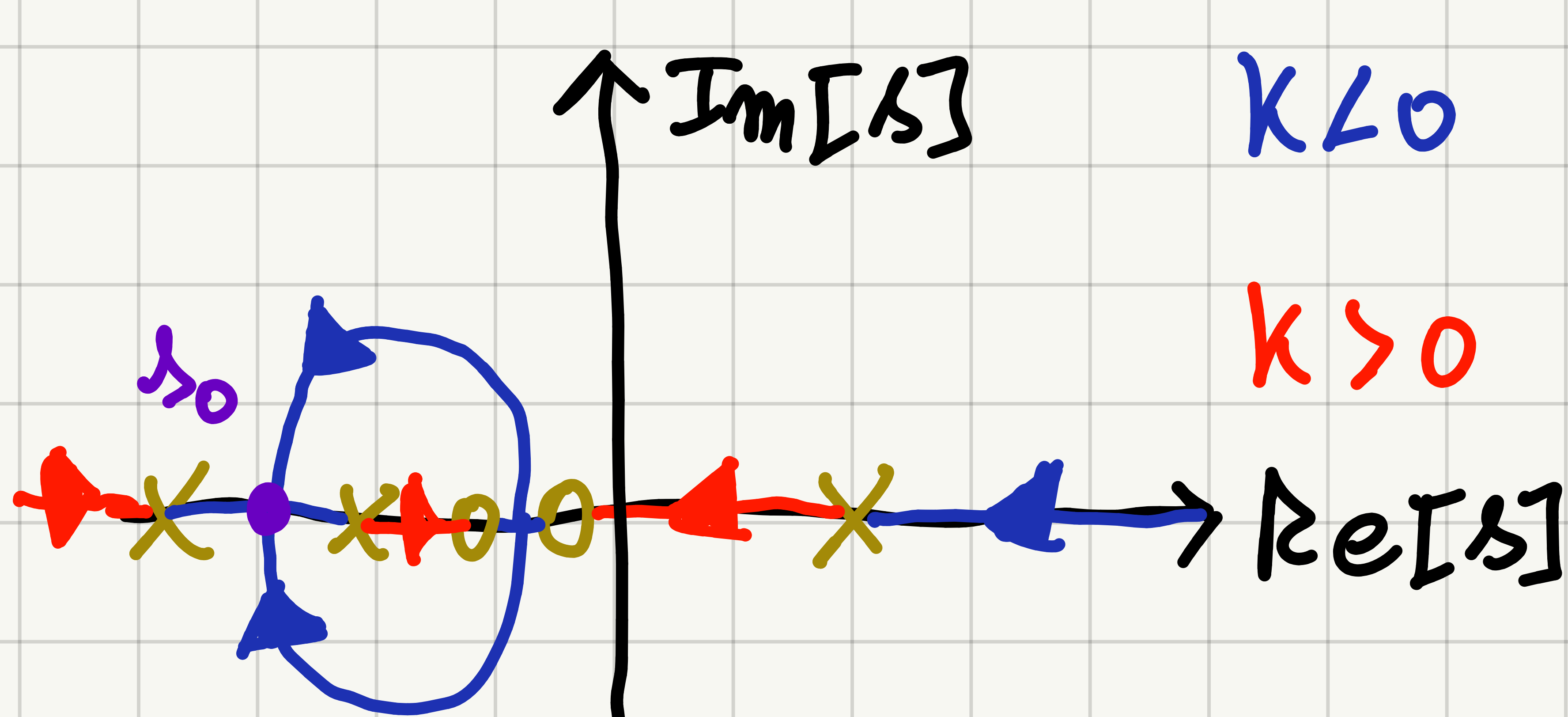
$$\frac{\partial f}{\partial s}=2(s-\bar{s}_1)\cdot\prod_{i=1}^{n}+(s-s_1)^2\cdot\prod_{\substack{i=3\\ i\neq 3}}^{n}(s-\bar{s}_i)+(s-\bar{s}_1)\cdot\prod_{\substack{i=3\\ i\neq 1}}^{n}(s-\bar{s}_i)\dots$$

ESERCIZIO:

$F(s)=K\cdot\frac{(s+1)(s+2)}{(s-1)(s+4)(s+10)}$

$n=3,\ m=2 \Rightarrow n-m=1$

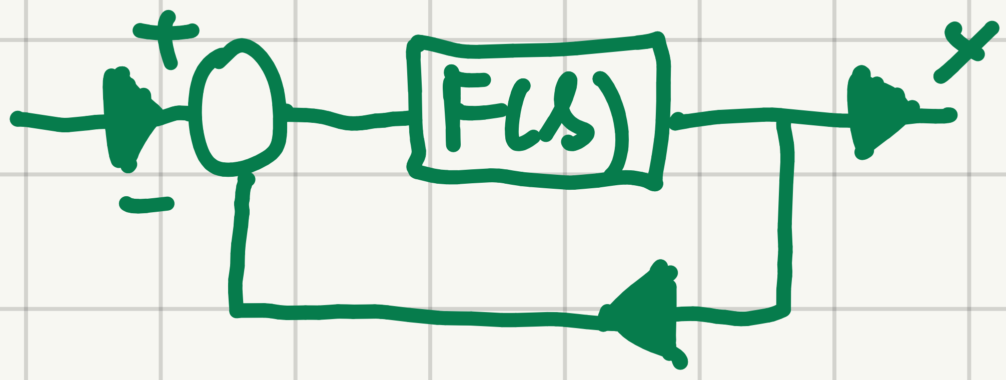
$z_1=-1,\ z_2=-2 \qquad p_1=1,\ p_2=-4,\ p_3=-10$



$f(s,K)=(s-1)(s+4)(s+10)+K(s+1)(s+2)\Big|_{s=0}=0$

$-40+2K=0 \Rightarrow$ STABILITÀ $\forall\ K>20$

Esercizio:

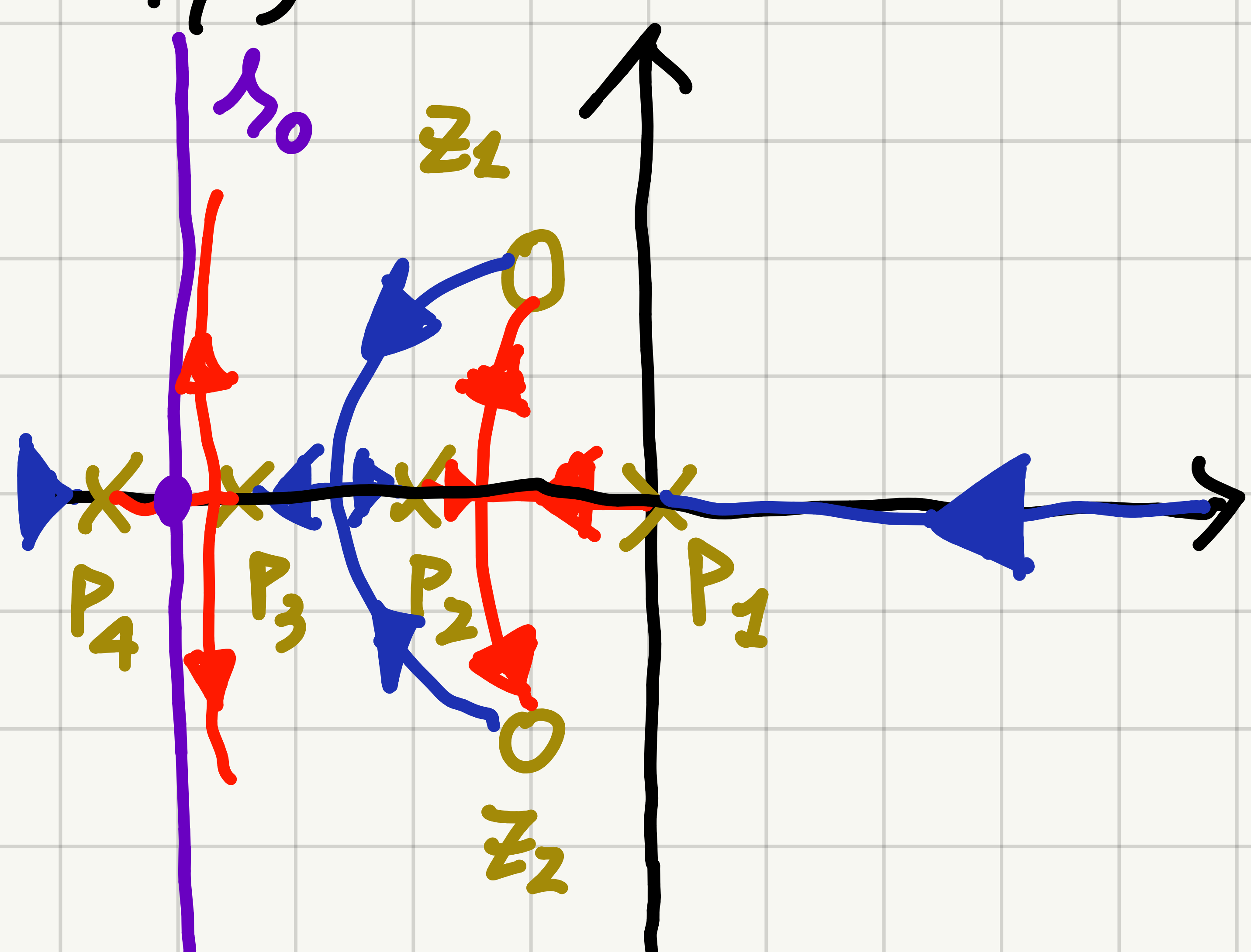


$$F(s) = \frac{K \cdot (s^2+2s+2)}{s(s+5)(s+10)(s+2)}$$

$n=4, m=2 \Rightarrow n-m=2$

$z_1=-1+i,\ z_2=-1-i \qquad p_1=0,\ p_2=-2,\ p_3=-5,\ p_4=-10$

$$s_0 = \frac{\Sigma p - \Sigma z}{2} = -7{,}5$$



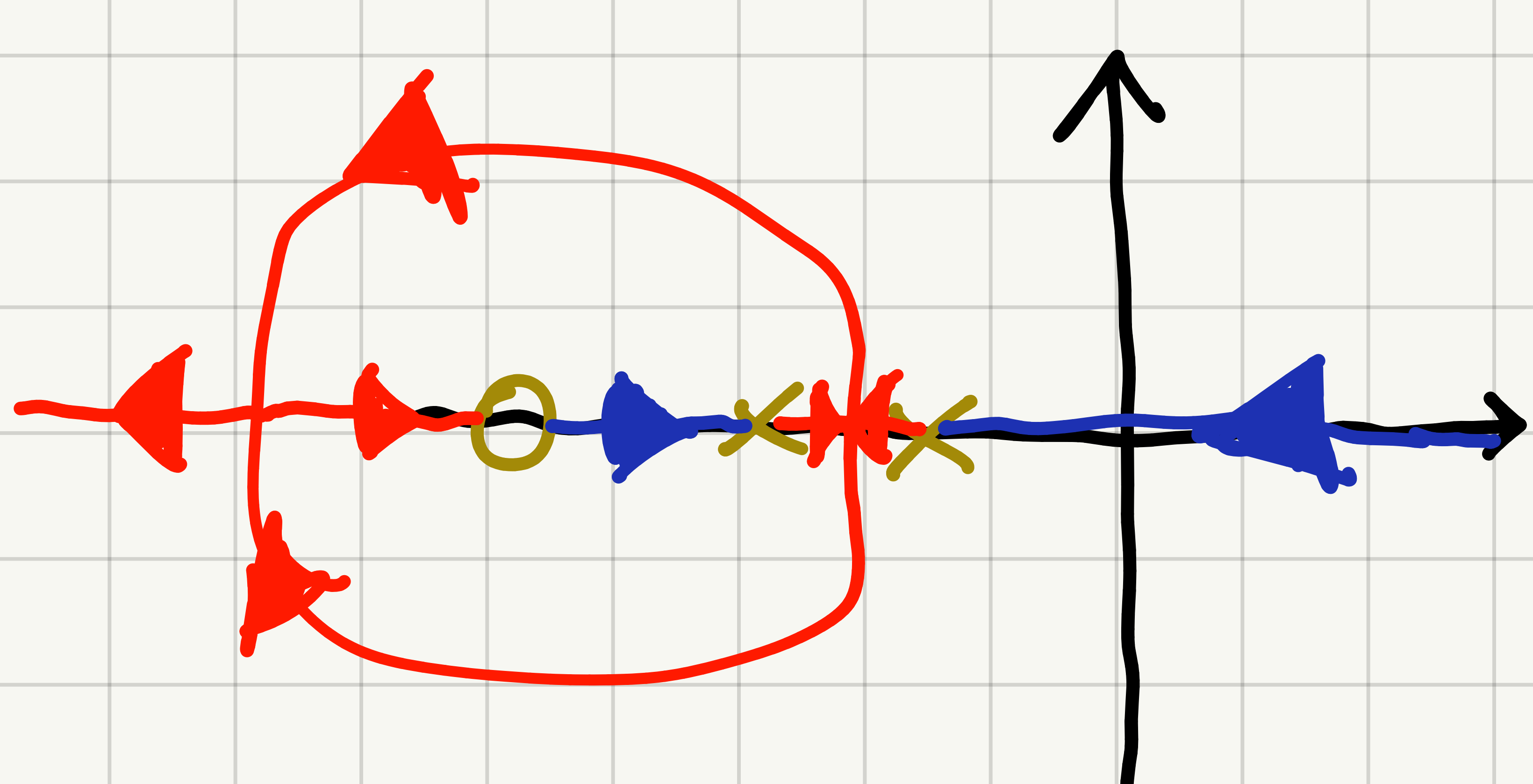
$$f(s,K) = s(s+5)(s+10)(s+2) + K(s^2+2s+2)\Big|_{s=0} = 0$$

$2K=0 \Rightarrow$ STABILITÀ $\forall\ K>0$

Esercizio:

$$F(s) = \frac{K(s+7)}{(s+2)(s+4)}$$

$n=2, m=1 \Rightarrow n-m=1 \qquad z_1=-7 \qquad p_1=-2,\ p_2=-4$



$$f(s,K) = (s+2)(s+4) + K(s+7)\Big|_{s=0} = 0$$

$8+7K=0 \Rightarrow$ STABILITÀ $\forall\ K>-\frac{8}{7}$