DI NECESSITÀ $\Box$ E DI POSSIBILITÀ $\Diamond$, POSSIAMO AFFERMARE CON CERTEZZA CHE, AD ESEMPIO, $\Box A \Rightarrow \Diamond A$ O $A \Rightarrow \Box A$ SIANO VERE. MA PER FORMULE PIÙ COMPLESSE COME $A \Rightarrow \Box\Diamond A$ NON È IMMEDIATO. AD ESEMPIO, NELLA LOGICA EPISTEMICA LA FORMULA $\Box A \Rightarrow A$ (SE SI SA CHE A, A VALE) SEMBRA VERA, MENTRE $A \Rightarrow \Box A$ (SE VALE A, SI SA CHE A) SEMBRA FALSA POICHÉ "NON SI È ONNISCIENTI"

SEMANTICA DEI MONDI POSSIBILI

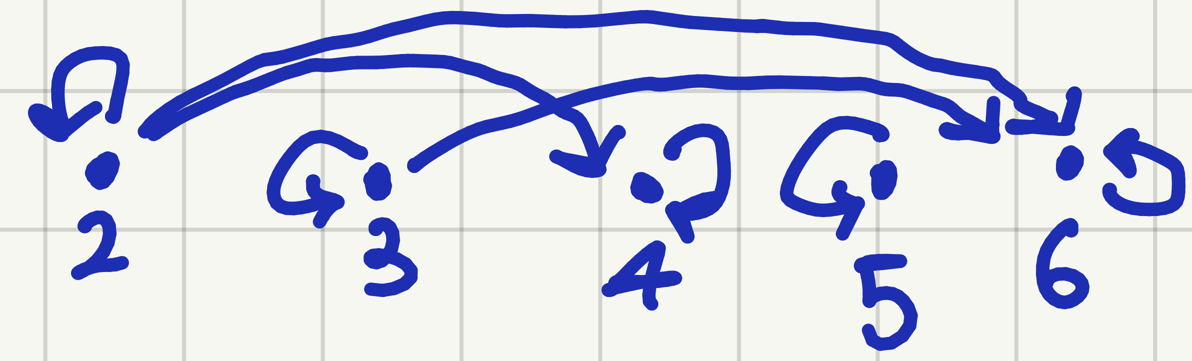
(O SEMANTICA DI KRIPKE)

UN FRAME È UNA COPPIA (S, R), DOVE S È L'INSIEME DEI MONDI (NON VUOTO) E $R \subseteq S \times S$ È UNA RELAZIONE SU S DETTA RELAZIONE DI ACCESSIBILITÀ (SE $(x,y) \in R$ SI DICE CHE y È ACCESSIBILE DA x). UN FRAME PUÒ ESSERE RAPPRESENTATO CON UN GRAFO DIRETTO (CON CAPPI (LOOP)) I CUI VERTICI SONO GLI ELEMENTI DELL'INSIEME S E SI HA UNA FRECCIA DAL VERTICE x AL VERTICE y SE $(x,y) \in R$.

ESEMPI:

a) IL FRAME $(\mathbb{N}, R)$, DOVE $R := \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, È RAPPRESENTATO DAL GRAFO DIRETTO $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to \cdots$

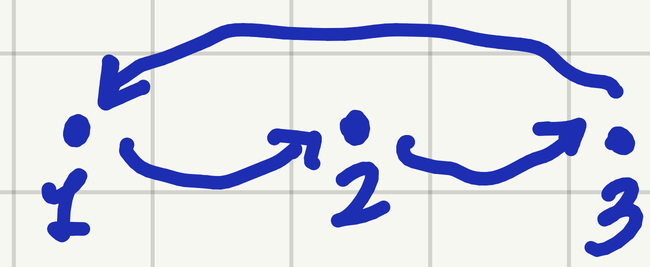
b) IL FRAME (S,R), DOVE $S:=\{2,3,4,5,6\}$ E $R:=\{(x,y)\in S\times S \mid \frac{x}{y}\}$ È RAPPRESENTATO DAL GRAFO



c) IL FRAME $(\{1,2,3\}, \{(x,y)\in\{1,2,3\}\times\{1,2,3\} \mid y=f(x)\})$

CON $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$ LA FUNZIONE $f(1)=2$, $f(2)=3$

E $f(3)=1$ È RAPPRESENTATA DAL GRAFO



DEFINIZIONE) UN MODELLO SU UN FRAME (S,R) È UNA TERNA (S,R,V) DOVE $V: Var \to \mathcal{P}(S)$ È DETTA FUNZIONE DI VALUTAZIONE, CHE ASSEGNA A CIASCUNA PROPOSIZIONE ATOMICA L'INSIEME DEGLI STATI IN CUI È VERA.

UNA FORMULA F SI DICE VERA IN UN MONDO x DEL MODELLO M $M\models_x F$ SE E SOLO SE:

- F È UNA VARIABILE: $M\models_x F \Rightarrow x\in V(F)$
- F È $\neg Y$, E Y È UNA VARIABILE: $M\models_x F \Rightarrow x\notin V(Y)$
- F È DEL TIPO $\neg G$, E G È UNA FORMULA: $M\models_x F \Rightarrow M\not\models_x G$
- F È DEL TIPO $G_1 \wedge G_2$: $M\models_x F \Rightarrow M\models_x G_1 \wedge \models_x G_2$
- F È DEL TIPO $G_1 \vee G_2$: $M\models_x F \Rightarrow M\models_x G_1 \vee \models_x G_2$
- F È DEL TIPO $\Box G$: $M\models_x F \Rightarrow M\models_y G, \forall y\in S \mid (x,y)\in R$
- F È DEL TIPO $\Diamond G$: $M\models_x F \Rightarrow M\models_y G, \exists y\in S \mid (x,y)\in R$

DEFINIZIONE) UNA FORMULA F È SODDISFACIBILE SE $\exists\, M=(S,R,V) \wedge$
$\wedge\, x\in S \mid M\models_x F$

TEOREMA: SE UNA FORMULA MODALE F È SODDISFACIBILE, ALLORA È SODDISFACIBILE IN UNA STRUTTURA DI KRIPKE (S,R) | $|S| \leq 2^{|F|}$

$\Rightarrow$ IL PROBLEMA DI SODDISFACIBILITÀ DI UNA FORMULA È DECIDIBILE.

SE COME FRAME PRENDIAMO $(\{0\}, R)$ DOVE $R \subseteq S \times S = \{(0,0)\}$ $\Rightarrow R \equiv S \times S$, UNA FUNZIONE DI VALUTAZIONE È $V: Var \to \mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{0\}\} \simeq \{0,1\}$ $\Rightarrow$ I CONNETTIVI MODALI DIVENTANO SUPERFLUI E RITROVIAMO LA LOGICA PROPOSIZIONALE.

QUINDI, LA VERITÀ DI UNA FORMULA NELLA LOGICA MODALE DIPENDE DAL FRAME SCELTO E, IN PARTICOLARE, DALLA RELAZIONE R. AD ESEMPIO, NELLA LOGICA DELLA NECESSITÀ VOGLIAMO SEMPRE CHE $\Box x \Rightarrow x$. PER GARANTIRE CIÒ, R DEVE ESSERE RIFLESSIVA ($(y,y) \in R \ \forall y \in S$). INFATTI, IN CASO NEGATIVO ESISTEREBBE UN MONDO $y \in S$ | $(y,y) \notin R$. SIA $Z := V(x)$, $Z \subseteq S$ | $y \notin Z$. SIA $Z \supseteq \{z \in S \mid (y,z) \in R\}$, CIOÈ x SIA VERA IN TUTTI I MONDI ACCESSIBILI DA y. ALLORA $M = (S,R,V) \Rightarrow M \models_y \Box x$, MA $M \not\models_y x$.

NELLA LOGICA DEONTICA, DOVE NON VOGLIAMO CHE LA FORMULA $\Box x \Rightarrow x$ SIA VERA, NON PRENDEREMO UNA RELAZIONE RIFLESSIVA.

DEFINIZIONE) UNA FORMULA F SI DICE VERA IN UN MODELLO M $M \models F$

SE $M \models_x F \ \forall \overset{\text{MONDO}}{x} \in S$

DEFINIZIONE) UNA FORMULA F SI DICE VALIDA IN UN FRAME (S, R)

$(S,R) \models F$ SE È VERA IN TUTTI I MODELLI COSTRUITI SU (S,R)

ESEMPIO: LA FORMULA $\Box X \Rightarrow X$ È VALIDA SOLO NEI FRAME IN CUI R È RIFLESSIVA

DEFINIZIONE) UNA FORMULA F SI DICE VALIDA SE È VALIDA IN TUTTI I FRAME $\models F$.

UNO SCHEMA DI FORMULE È UNA COLLEZIONE DI FORMULE AVENTI TUTTE UNA STESSA FORMA SINTATTICA. AD ESEMPIO, CON LO SCHEMA $\Box F \Rightarrow F$ SI INTENDONO TUTTE LE FORMULE DI QUESTA FORMA COME $\Box X \Rightarrow X$, CON X VARIABILE, O $\Box(\neg\Diamond\neg X) \Rightarrow \neg\Diamond\neg X$.

LE TAUTOLOGIE DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE SONO VALIDE SU OGNI FRAME.

VEDIAMO ORA CHE LO SCHEMA DI FORMULE $\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B)$ È VALIDO SU OGNI FRAME. SIA $w \in S$ UN MONDO E M UN MODELLO SU UN FRAME (S,R), $M \models_w \Box(A \Rightarrow B)$ E $M \models_w \Box A$. DOBBIAMO CONTROLLARE CHE QUANDO $\Box(A \Rightarrow B)$ È VERA, ALLORA SE È VERA $\Box A$ È VERA $\Box B$.

$M \models_w \Box(A \Rightarrow B)$ SIGNIFICA CHE $M \models_v A \Rightarrow B \ \forall v \in S \mid (w,v) \in R$.

$M \models_w \Box A$ SIGNIFICA CHE CHE $M \models_v A \ \forall v \in S \mid (w,v) \in R \ \Rightarrow$

$\Rightarrow M \models_v B \ \forall v \in S \mid (w,v) \in R$, OSSIA $M \models_w \Box B$. QUINDI, ABBIAMO MOSTRATO CHE $\models \Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B)$. CHIAMEREMO K TALE SCHEMA E MOSTREREMO CHE I SEGUENTI SONO VALIDI:

- $\Box(A \wedge B) \Leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$
- $\Diamond(A \vee B) \Leftrightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B)$
- $\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Diamond A \Rightarrow \Diamond B)$
- $\Diamond(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Diamond B)$

$\Box(A \wedge B) \Leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$

SIA M UN MODELLO SU UN FRAME (S,R) E $w \in S$.

$M \models_w \Box(A \wedge B) \Leftrightarrow M \models_v A \wedge B \ \forall v \in S \mid (w,v) \in R \Leftrightarrow M \models_v A \ \wedge$

$\wedge \ M \models_v B \ \forall v \in S \mid (w,v) \in R \Leftrightarrow M \models_w \Box A \wedge M \models_w \Box B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow M \models_w (\Box A \wedge \Box B)$

$\Diamond(A \vee B) \Leftrightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B)$

SIA M UN MODELLO SU UN FRAME (S,R) E $w \in S$.

$M \models_w \Diamond(A \vee B) \Leftrightarrow M \models_v A \vee B \ \forall v \in S \mid (w,v) \in R \Leftrightarrow M \models_v A \ \vee$

$\vee \ M \models_v B \ \forall v \in S \mid (w,v) \in R \Leftrightarrow M \models_w \Diamond A \vee M \models_w \Diamond B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow M \models_w (\Diamond A \vee \Diamond B)$

$\square(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Diamond A \Rightarrow \Diamond B)$

SIA M UN MODELLO SU UN FRAME (S,R) E $w \in S$.

$M \models_w \square(A \Rightarrow B) \wedge M \models_w \Diamond A \Rightarrow M \models_v A \Rightarrow B \; \forall v \in S \mid (w,v) \in R \; \wedge$

$\wedge \; \exists v \in S \mid M \models_v A, (w,v) \in R \Rightarrow \exists v \in S \mid M \models_v B, (w,v) \in R$

$\Rightarrow M \models_w \Diamond B$

$\Diamond(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\square A \Rightarrow \Diamond B)$

SIA M UN MODELLO SU UN FRAME (S,R) E $w \in S$.

$M \models_w \Diamond(A \Rightarrow B) \wedge M \models_w \square A \Rightarrow \exists v \in S \mid M \models_v A \Rightarrow B, (w,v) \in R \; \wedge$

$M \models_v A \; \forall v \in S \mid (w,v) \in R \Rightarrow \exists v \in S \mid M \models_v B, (w,v) \in R$

$\Rightarrow M \models_w \Diamond B$

ABBIAMO GIÀ MOSTRATO CHE SE M È UN MODELLO SU UN FRAME $(S,R) \mid$

$\mid$ R NON È RIFLESSIVA, ALLORA $\square X \Rightarrow X$ NON È VERA NEL MODELLO M. QUINDI

$\square X \Rightarrow X$ NON È VALIDA: $\not\models \square X \Rightarrow X$. MOSTRIAMO CHE I SEGUENTI

SCHEMI DI FORMULE NON SONO VALIDI:

- $\Diamond A \Rightarrow \square A$
- $\square A \Rightarrow A$ (GIÀ VISTO)
- $\square A \Rightarrow \square\square A$
- $\square(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\square A \Rightarrow \Diamond B)$
- $\square(\square A \Rightarrow B) \vee \square(\square B \Rightarrow A)$
- $\square(A \vee B) \Rightarrow (\square A \vee \square B)$
- $\square(\square A \Rightarrow A) \Rightarrow \square A$

$\Diamond A \Rightarrow \Box A$

$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left] \arrow[r] & 2 \end{tikzcd}$ $M=(\{1,2\},\{(1,2),(1,1)\},V)$, DOVE $V(x)=\{2\}$, OSSIA LA FORMULA x È VERA SOLO NEL MONDO 2 $\Rightarrow M\models_1 \Diamond x$ E $M\not\models_1 \Box x \Rightarrow M\not\models_1 (\Diamond A \Rightarrow \Box A)$

$\Box A \Rightarrow \Box\Box A$

$1 \to 2 \to 3$ $M=(\{1,2,3\},\{(1,2),(2,3)\},V)$ DOVE $V(x)=\{2\}$

$\Rightarrow M\models_1 \Box x$. ABBIAMO CHE $M\models_1 \Box\Box x \Leftrightarrow M\models_2 \Box x \Leftrightarrow M\models_3 x$, MA

$M\not\models_3 x \Rightarrow M\not\models_1 \Box\Box x$

$\Box(A\Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Diamond B)$

$1 \to 2$ $V(A)=\{1\}=V(B) \Rightarrow M\models_2 \Box(A\Rightarrow B) \Rightarrow M\models_2 \Box A$, MA

$M\not\models_2 \Diamond B$ POICHÉ $\nexists v\in\{1,2\} \mid M\models_v B$ E $(2,v)\in R$

$\Box(\Box A\Rightarrow B) \vee \Box(\Box B \Rightarrow A)$

SE PRENDIAMO $A=B=x$, x VARIABILE, ALLORA CONSIDERANDO IL FRAME

$1 \to 2 \to 3$ E $V(x)=\{3\}$, SI HA CHE $M\models_1 \Box(\Box x \Rightarrow x) \Leftrightarrow M\models_2 \Box x \Rightarrow x$

$\Leftrightarrow M\models_2 x \wedge M\models_3 x$, MA $M\not\models_2 x \Rightarrow M\not\models_1 \Box(\Box x\Rightarrow x)$

$\Box(A\vee B) \Rightarrow (\Box A \vee \Box B)$

$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left] \arrow[r] & 2 \end{tikzcd}$ $V(x)=\{1\}, V(y)=\{2\}$ $M\models_1 \Box(x\vee y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow M\models_1 (x\vee y)$ E $M\models_2 (x\vee y) \Rightarrow M\models_1 \Box(x\vee y)$. INVECE,