$$x_F^{\bullet}(t) = \frac{d}{dt}\left[\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau)\, d\tau\right] + e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(t) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} A \cdot e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau)\, d\tau + I_n \cdot B \cdot u(t) = A \cdot \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} \cdot$$

$$\cdot B \cdot u(\tau)\, d\tau + B \cdot u(t) = A \cdot x_F(t) + B \cdot u(t)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_F(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau)\, d\tau \\ y_F(t) = C \cdot \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau)\, d\tau + D \cdot u(t) \end{cases}$$

RISPOSTA TOTALE: FORMULA DI LAGRANGE

$$\begin{cases} x(t) = x_L(t) + x_F(t) \\ y(t) = y_L(t) + y_F(t) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau)\, d\tau \\ y(t) = C \cdot e^{A(t-\tau)} \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^{t} C \cdot e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau)\, d\tau + D \cdot u(t) \end{cases}$$

PROPOSIZIONE: DATO IL SISTEMA DESCRITTO DA $x^{\bullet}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$, LA SUA SOLUZIONE È DATA DA $x(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau)\, d\tau$

DIMOSTRAZIONE $x^{\bullet}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$ MOLTIPLICO PER e^{-At}

$$e^{-At} \cdot x^{\bullet}(t) = e^{-At} \cdot A \cdot x(t) + e^{-At} \cdot B \cdot u(t) \qquad \frac{d}{dt}\left[e^{-At} \cdot x(t)\right] =$$

$$= \frac{d}{dt}\left[e^{-At}\right] \cdot x(t) + e^{-At} \cdot \frac{d}{dt}\left[x(t)\right] = -A \cdot e^{-At} \cdot x(t) + e^{-At} \cdot x^{\bullet}(t)$$

$$\Rightarrow e^{-At}\cdot x'(t) = e^{-At}\cdot x(t) + e^{-At}\cdot B\cdot u(t)$$

$$\rightarrow e^{-At}\cdot x'(t) - e^{-At}\cdot x(t) = \frac{d}{dt}\left[e^{-At}\cdot x(t)\right] = e^{-At}\cdot B\cdot u(t)$$

$$\int_{t_0}^{t}\frac{d}{dt}\left[e^{-A\tau}\cdot x(\tau)\right]d\tau = \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}\cdot B\cdot u(\tau)\,d\tau = \left[e^{-A\tau}\cdot x(\tau)\right]_{t_0}^{t} =$$

$$= \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}\cdot B\cdot u(\tau)\,d\tau$$

$$e^{-At}\cdot x(t) - e^{-At_0}\cdot x(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}\cdot B\cdot u(\tau)\,d\tau$$

$$e^{-At}\cdot x(t) = e^{-At_0}\cdot x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}\cdot B\cdot u(\tau)\,d\tau$$

MOLTIPLICO PER e^{At}, OSSIA L'INVERSA DI e^{-At}

$$I_n\cdot x(t) = e^{A(t-t_0)}\cdot x(t_0) + I_n\cdot\int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}\cdot B\cdot u(\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{A(t-t_0)}\cdot x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}\cdot B\cdot u(\tau)\,d\tau = x_L(t) + x_F(t)$$

FORMULE DI LAGRANGE IN FORMA COMPATTA

$$\begin{cases} x'(t) = A\cdot x(t) + B\cdot u(t) \\ y(t) = C\cdot x(t) + D\cdot u(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = e^{A(t-t_0)}\cdot x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}\cdot B\cdot u(\tau)\,d\tau \\ y(t) = C\cdot e^{A(t-t_0)}\cdot x(t_0) + C\cdot\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}\cdot B\cdot u(\tau)\,d\tau + D\cdot u(t) \end{cases}$$

- $e^{A(t-t_0)} = \Phi(t,t_0) \quad \forall\, t \geq t_0 \qquad \Phi(t,t_0)\in\mathbb{R}^{n\times m}$

$$\begin{cases} x(t) = \Phi(t,t_0)\cdot x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\cdot B\cdot u(\tau)\,d\tau \\ y(t) = C\cdot\Phi(t,t_0)\cdot x(t_0) + C\cdot\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\cdot B\cdot u(\tau)\,d\tau + D\cdot u(t) \end{cases}$$

- $H(t,\tau) = \Phi(t,\tau)\cdot B \quad \forall t \geq t_0 \qquad H(t,\tau) \in \mathbb{R}^{n\times r}$

$$\begin{cases} x(t) = \Phi(t,t_0)\cdot x(t_0) + \int_{t_0}^{t} H(t,\tau)\cdot u(\tau)\,d\tau \\ y(t) = C\cdot\Phi(t,t_0)\cdot x(t_0) + C\cdot\int_{t_0}^{t} H(t,\tau)\cdot u(\tau)\,d\tau + D\cdot u(t) \end{cases}$$

- $\Psi(t,t_0) = C\cdot e^{A(t-t_0)} = C\cdot\Phi(t,t_0) \quad \forall t \geq t_0 \qquad \Psi(t,t_0) \in \mathbb{R}^{p\times n}$

$$\begin{cases} x(t) = \Phi(t,t_0)\cdot x(t_0) + \int_{t_0}^{t} H(t,\tau)\cdot u(\tau)\,d\tau \\ y(t) = \Psi(t,t_0)\cdot x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Psi(t,\tau)\cdot B\cdot u(\tau)\,d\tau + D\cdot u(t) \end{cases}$$

- $W(t,t_0) = C\cdot e^{A(t-t_0)}\cdot B + D \qquad \forall t \geq t_0 \qquad W(t,t_0) \in \mathbb{R}^{p\times r}$

$$W(t,t_0) = \Psi(t,t_0)\cdot B + D\cdot u(t)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x(t) = \Phi(t,t_0)\cdot x(t_0) + \int_{t_0}^{t} H(t,\tau)\cdot u(\tau)\,d\tau \\ y(t) = \Psi(t,t_0)\cdot x(t_0) + \int_{t_0}^{t} W(t,\tau)\cdot u(\tau)\,d\tau \end{cases}$$

ESERCIZIO: DETERMINARE LA RISPOSTA TOTALE NELLO STATO E NELL'USCITA DEL SISTEMA $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + u(t) \\ y(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$ $x(t)?\ y(t)?$

SAPENDO CHE $x(t_0) = x(0) = \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix}$ E $u(t) = 2$

$$\begin{cases} x(t) = e^{A(t-t_0)}\cdot x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}\cdot B\cdot u(\tau)\,d\tau \\ y(t) = C\cdot e^{A(t-t_0)}\cdot x(t_0) + C\cdot\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}\cdot B\cdot u(\tau)\,d\tau + D\cdot u(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot u(t) \\ \begin{vmatrix} y(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix} \cdot u(t) \end{cases}$$

$$e^{A(t-t_0)} = e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i(t) \cdot A^i = \beta_0(t) \cdot I_2 + \beta_1(t) \cdot A$$

$$P(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) = \det\left(\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} \right) = (\lambda+1)(\lambda+2)$$

$$P(\lambda)=0 \begin{cases} \lambda_1 = -1, \quad r_1 = 1 \\ \lambda_2 = -2, \quad r_2 = 1 \end{cases} \qquad (t)$$

$$\begin{cases} \beta_0(t) - \beta_1(t) = e^{-t} \\ \beta_0(t) - 2\beta_1(t) = e^{-2t} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \beta_0(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} \\ \beta_1(t) = e^{-t} - e^{-2t} \end{cases}$$

$$e^{At} = \beta_0(t) \cdot I_2 + \beta_1(t) \cdot A = \begin{vmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{vmatrix}$$

$$x_L(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot x(t_0) = \begin{vmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7e^{-t} - 4e^{-2t} \\ 4e^{-2t} \end{vmatrix}$$

$$x_F(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau)\, d\tau = \int_0^t \begin{vmatrix} e^{-(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ 0 & e^{-2(t-\tau)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot 2\, d\tau$$

$$= \int_0^t 2 \cdot \begin{vmatrix} e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ e^{-2(t-\tau)} \end{vmatrix} d\tau = \begin{vmatrix} 1 - 2e^{-t} + e^{-2t} \\ 1 - e^{-2t} \end{vmatrix}$$

$$X(t) = X_L(t) + X_F(t) = \begin{vmatrix} 1 + 5e^{-t} - 3e^{-2t} \\ 1 + 3e^{-2t} \end{vmatrix}$$

$$Y_L(t) = C \cdot X_L(t) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 7e^{-t} - 4e^{-2t} \\ 4e^{-2t} \end{vmatrix} = 14e^{-t} - 4e^{-2t}$$

$$Y_F(t) = C \cdot X_F(t) + D \cdot U(t) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 - 2e^{-t} + e^{-2t} \\ 1 - 2e^{-t} \end{vmatrix} + 0 = 3 + 10e^{-t} - 3e^{-2t}$$

$$Y(t) = Y_L(t) + Y_F(t) = 3 + 24e^{-t} - 5e^{-2t}$$

ANALISI NEL DOMINIO DI LAPLACE

$$\Sigma : \begin{cases} x^{\bullet}(t) = A \cdot X(t) + B \cdot U(t) \\ y(t) = C \cdot X(t) + D \cdot U(t) \end{cases}$$

$$\rightarrow \Sigma_s : \begin{cases} \mathcal{L}[x^{\bullet}(t)] = \mathcal{L}[A \cdot X(t) + B \cdot U(t)] \\ \mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[C \cdot X(t) + D \cdot U(t)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}[x^{\bullet}(t)] = A \cdot \mathcal{L}[X(t)] + B \cdot \mathcal{L}[Y(t)] \\ \mathcal{L}[y(t)] = C \cdot \mathcal{L}[X(t)] + D \cdot \mathcal{L}[U(t)] \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[X(t)] = \mathcal{L}\left[\begin{vmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{vmatrix}\right] = \begin{vmatrix} \mathcal{L}[X_1(t)] \\ \mathcal{L}[X_2(t)] \\ \vdots \\ \mathcal{L}[X_n(t)] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{vmatrix} = X(s) \in \mathbb{C}^{n \times 1}$$

$$\mathcal{L}[U(t)] = \mathcal{L}\left[\begin{vmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \vdots \\ U_r(t) \end{vmatrix}\right] = \begin{vmatrix} \mathcal{L}[U_1(t)] \\ \mathcal{L}[U_2(t)] \\ \vdots \\ \mathcal{L}[U_r(t)] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_r(s) \end{vmatrix} = U(s) \in \mathbb{C}^{r \times 1}$$

$$\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}\left[\begin{vmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{vmatrix}\right] = \begin{vmatrix} \mathcal{L}[y_1(t)] \\ \mathcal{L}[y_2(t)] \\ \vdots \\ \mathcal{L}[\ p(t)] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ \vdots \\ y_p(s) \end{vmatrix} = y(s) \in \mathbb{C}^{p\times 1}$$

$$\mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}\left[\begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{vmatrix}\right] = \begin{vmatrix} \mathcal{L}[x_1(t)] \\ \mathcal{L}[x_2(t)] \\ \vdots \\ \mathcal{L}[x_n(t)] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \\ \vdots \\ x_n(s) \end{vmatrix} = x(s) \in \mathbb{C}^{n\times 1}$$

$$\mathcal{L}[x'(t)] = \begin{vmatrix} s\cdot x_1(s) - x_1(t_0) \\ s\cdot x_2(s) - x_2(t_0) \\ \vdots \\ s\cdot x_n(s) - x_n(t_0) \end{vmatrix} = s\cdot \begin{vmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \\ \vdots \\ x_n(s) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{vmatrix} =$$

$$= s\cdot x(s) - x(t_0)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}[x'(t)] = A\cdot\mathcal{L}[x(t)] + B\cdot\mathcal{L}[u(t)] \\ \mathcal{L}[y(t)] = C\cdot\mathcal{L}[x(t)] + D\cdot\mathcal{L}[u(t)] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s\cdot x(s) - x(t_0) = A\cdot x(s) + B\cdot u(s) \\ y(s) = C\cdot x(s) + D\cdot u(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} s\cdot x(s) - A\cdot x(s) = x(t_0) + B\cdot u(s) \\ y(s) = C\cdot x(s) + D\cdot u(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (sI_n - A)\cdot x(s) = x(t_0) + B\cdot u(s) \\ y(s) = C\cdot x(s) + D\cdot u(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(s) = (sI_n-A)^{-1}\cdot x(t_0) + (sI_n-A)^{-1}\cdot B\cdot u(s) \\ y(s) = C\cdot(sI_n-A)^{-1}\cdot x(t_0) + C\cdot(sI_n-A)^{-1}\cdot B\cdot u(s) + D\cdot u(s) \end{cases}$$

$x_L(s), y_L(s)$ $\qquad$ $x_F(s), y_F(s)$

PROPOSIZIONE: C'È UNA STRETTA CORRELAZIONE TRA LA MATRICE RISOLVENTE $(sI_n - A)^{-1}$ E LA MATRICE DI TRANSIZIONE $e^{A(t-t_0)}$.

INFATTI, $\mathcal{L}[e^{A(t-t_0)}] = (s \cdot I_n - A)^{-1}$

DIMOSTRAZIONE $\quad \mathcal{L}[e^{A(t-t_0)}] = (s \cdot I_n - A)^{-1}$. S_1

MOLTIPLICANDO A SINISTRA ENTRAMBI I MEMBRI DELL'EQUAZIONE:

$$\rightarrow \mathcal{L}[e^{A(t-t_0)}] \cdot x(t_0) = (sI_n - A)^{-1} \cdot x(t_0)$$

$$\rightarrow \mathcal{L}[e^{A(t-t_0)} \cdot x(t_0)] = \mathcal{L}[x_L(t)] = X_L(s)$$

FORMULE DI LAGRANGE IN FORMA COMPATTA

$$\begin{cases} X(s) = (sI_n - A)^{-1} \cdot x(t_0) + (sI_n - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s) \\ Y(s) = C \cdot (sI_n - A)^{-1} \cdot x(t_0) + C \cdot (sI_n - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s) + D \cdot U(s) \end{cases}$$

$\Phi(s) = (s \cdot I_n - A)^{-1}$, $\Phi(s) \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$$\begin{cases} X(s) = \Phi(s) \cdot x(t_0) + \Phi(s) \cdot B \cdot U(s) \\ Y(s) = C \cdot \Phi(s) \cdot x(t_0) + [C \cdot \Phi(s) \cdot B + D] \cdot U(s) \end{cases}$$

$H(s) = \Phi(s) \cdot B$, $H(s) \in \mathbb{C}^{n \times r}$

$$\begin{cases} X(s) = \Phi(s) \cdot x(t_0) + H(s) \cdot U(s) \\ Y(s) = C \cdot \Phi(s) \cdot x(t_0) + [C \cdot H(s) + D] \cdot U(s) \end{cases}$$

$\Psi(s) = C \cdot \Phi(s)$, $\Psi(s) \in \mathbb{C}^{p \times n}$

$$\begin{cases} X(s) = \Phi(s) \cdot X(t_0) + H(s) \cdot U(s) \\ Y(s) = \Psi(s) \cdot X(t_0) + [\Psi(s) \cdot B + D] \cdot U(s) \end{cases}$$

$W(s) = C \cdot \Phi(s) \cdot B + D = C \cdot H(s) + D = \Psi(s) \cdot B + D$, $W(s) \in \mathbb{C}^{p \times r}$

$$\Rightarrow \begin{cases} X(s) = \Phi(s) \cdot X(t_0) + H(s) \cdot U(s) \\ Y(s) = \Psi(s) \cdot X(t_0) + W(s) \cdot U(s) \end{cases}$$

I SISTEMI IBRIDI

SI RICORDI LA DISTINZIONE TRA I SISTEMI AD AVANZAMENTO TEMPORALE ED I SISTEMI AD ELEMENTI DISCRETI. DEI PRIMI, SI SONO VISTI I MODELLI IU E VS, NEI DOMINI t ED s. NEL MODELLO VS È POSSIBILE DEFINIRE NUOVI DOMINI CHE CONSENTONO DI COMPIERE ANALISI SU ALCUNE PROPRIETÀ SPECIFICHE, SIA IN t CHE IN s.

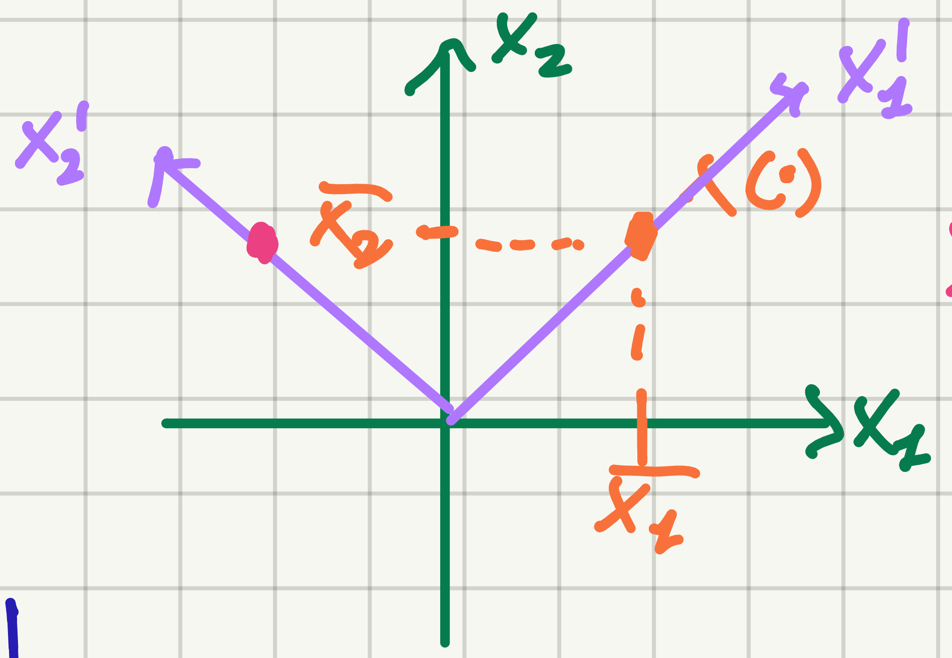
RAPPRESENTAZIONI EQUIVALENTI

DATO UN SISTEMA $\Sigma_t: \begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$ A TEMPO CONTINUO, O A TEMPO DISCRETO $\Sigma_k: \begin{cases} x(k+1) = A \cdot x(k) + B \cdot u(k) \\ y(k) = C \cdot x(k) + D \cdot u(k) \end{cases}$,

POSSIAMO DEFINIRE IL SISTEMA EQUIVALENTE, INDICATO COME $\hat{\Sigma}_t$.

$$\hat{\Sigma}_t: \begin{cases} x^{\cdot}(t) = \hat{A} \cdot x(t) + \hat{B} \cdot u(t) \\ y(t) = \hat{C} \cdot x(t) + \hat{D} \cdot u(t) \end{cases}$$

DUE SISTEMI SI DICONO EQUIVALENTI SE, A STATI ESPRESSI CON BASI DIVERSE, CORRISPONDONO GLI STESSI INGRESSI E LE STESSE USCITE. LE RAPPRESENTAZIONI EQUIVALENTI SONO UTILI PER SVARIATI MOTIVI: SCRIVERE UNA MATRICE $\hat{A}$ DIAGONALE PER RENDERE PIÙ SEMPLICE IL CALCOLO DI $e^{A(t-t_0)}$, STUDIARE LE PROPRIETÀ STRUTTURALI E MOLTO ALTRO. PER DETERMINARE I PASSAGGI DA UNA RAPPRESENTAZIONE ALL'ALTRA, OCCORRE DETERMINARE IL LEGAME $A \to \hat{A}$, $B \to \hat{B}$, $C \to \hat{C}$, $D \to \hat{D}$ ATTRAVERSO LA MATRICE DI TRASFORMAZIONE $T \in \mathbb{R}^{n \times m}$, OPPORTUNAMENTE DEFINITA A SECONDA DEL CONTESTO, CON IL VINCOLO CHE T SIA NON SINGOLARE. AD ESEMPIO, PER $n=2$



SCEGLIAMO LA NUOVA BASE X'

$$x(\cdot) = \begin{vmatrix} \bar{x}_1(\cdot) \\ \bar{x}_2(\cdot) \end{vmatrix} \xrightarrow{T} \hat{x}(\cdot) = \begin{vmatrix} x_1'(\cdot) \\ x_2'(\cdot) \end{vmatrix}$$

IL CALCOLO VERRÀ SVOLTO PER IL CASO A TEMPO CONTINUO, ED È ANALOGO AL CASO A TEMPO DISCRETO.

$$\Sigma_t: \begin{cases} \dot{x}(t) = A\cdot x(t) + B\cdot u(t) \\ y(t) = C\cdot x(t) + D\cdot u(t) \end{cases} \qquad \hat{x}(t) = T\cdot x(t) \Rightarrow x(t) = T^{-1}\cdot \hat{x}(t)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(T^{-1}\cdot \hat{x}(t)\right) = A\cdot T^{-1}\cdot \hat{x}(t) + B\cdot u(t) \\ y(t) = C\cdot T^{-1}\cdot \hat{x}(t) + D\cdot u(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} T^{-1}\cdot \dot{\hat{x}}(t) = A\cdot T^{-1}\cdot \hat{x}(t) + B\cdot u(t) \rightarrow \text{MOLTIPLICO PER } T \\ y(t) = C\cdot T^{-1}\cdot \hat{x}(t) + D\cdot u(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_n\cdot \dot{\hat{x}}(t) = T\cdot A\cdot T^{-1}\cdot \hat{x}(t) + B\cdot u(t)\cdot T \\ y(t) = C\cdot T^{-1}\cdot \hat{x}(t) + D\cdot u(t) \end{cases}$$

$$\rightarrow \hat{\Sigma}_t: \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\cdot \hat{x}(t) + \hat{B}\cdot u(t) \\ y(t) = \hat{C}\cdot \hat{x}(t) + \hat{D}\cdot u(t) \end{cases} \Rightarrow \quad \hat{A} = T\cdot A\cdot T^{-1} \quad \hat{B} = T\cdot B \quad \hat{C} = C\cdot T^{-1} \quad \hat{D} = D$$

PROPRIETÀ DELLE RAPPRESENTAZIONI EQUIVALENTI:

① $e^{At} \longrightarrow T\cdot e^{At}\cdot T^{-1}$

DIMOSTRAZIONE

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\cdot A^k \qquad e^{\hat{A}t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\hat{A}^k \qquad e^{\hat{A}t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}(T\cdot A\cdot T^{-1})^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\cdot \Big[\underbrace{(T\cdot A\cdot T^{-1})\cdot (T\cdot A\cdot T^{-1})\cdot \ldots \cdot (T\cdot A\cdot T^{-1})}_{k \text{ VOLTE}}\Big] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}[T\cdot A\cdot A\cdot \ldots \cdot A\cdot T^{-1}]$$

(con $T^{-1}\cdot T = I_n$)

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}[T\cdot A^k\cdot T^{-1}] = T\cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}A^k\right)\cdot T^{-1} = T\cdot e^{At}\cdot T^{-1}$$

② $\hat{P}(\lambda) = P(\lambda) \Rightarrow$ I MODI NATURALI SONO INDIPENDENTI DALLA BASE

DIMOSTRAZIONE

$\hat{P}(\lambda) = \det(\lambda \cdot I_n - \hat{A}) = \det(\lambda I_n - T \cdot A \cdot T^{-1}) = \det(\lambda \cdot T \cdot I_n \cdot T^{-1} - T \cdot A \cdot T^{-1}) = \det(T \cdot (\lambda I_n - A) \cdot T^{-1}) = \cancel{\det(T)} \cdot \det(\lambda I_n - A) \cdot \cancel{\det(T^{-1})} = \det(\lambda I_n - A) = P(\lambda)$

STABILITÀ ($T \equiv \mathbb{R}$)

CONSIDERIAMO IL SISTEMA $\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$, LA CUI SOLUZIONE, DA LAGRANGE, È $\begin{cases} x(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) d\tau \\ y(t) = C \cdot e^{A(t-t_0)} \cdot x(t_0) + C \cdot \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} \cdot B u(\tau) d\tau + D \cdot u(t) \end{cases}$

① NOTO $x(t_0)$, SI VUOLE STUDIARE IL COMPORTAMENTO DEL SISTEMA PER $x(t_0) + \delta_x(t_0)$, DOVE $\delta_x(t_0)$ È UNA QUANTITÀ MOLTO PICCOLA MA CHE DA INCERTEZZE (PERTURBAZIONI) ALLE CONDIZIONI INIZIALI. VALE LA PROPRIETÀ DI LIMITATEZZA?

② NOTO $u(t)$, SI VUOLE ANALIZZARE $u(t) + \delta_u(t)$. VALE LA PROPRIETÀ DI CONVERGENZA ASINTOTICA?

Tali domande trovano risposte nella teoria della stabilità.

(1) $x(t_0)+\delta_{x_0}(t) \rightarrow x(t) = e^{A(t-t_0)}\left(x(t_0)+\delta_{x_0}(t)\right) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau)\,d\tau$

$$e_{\delta_{x(t_0)}}(t) = x_{\delta_{x(t_0)}}(t) - x(t) = e^{A(t-t_0)}\left(\cancel{x(t_0)}+\delta_{x(t_0)}(t)\right) + \cancel{\int_{t_0}^{t} e^{A(t-t_0)} \cdot B \cdot u(\tau)\,d\tau} - e^{A(t-t_0)} \cdot \cancel{x(t_0)} - \cancel{\int_{t_0}^{t} e^{A(t-t_0)} \cdot B \cdot u(\tau)\,d\tau}$$

$$\Rightarrow e_{\delta_{x(t_0)}}(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot \delta_x(t_0)$$

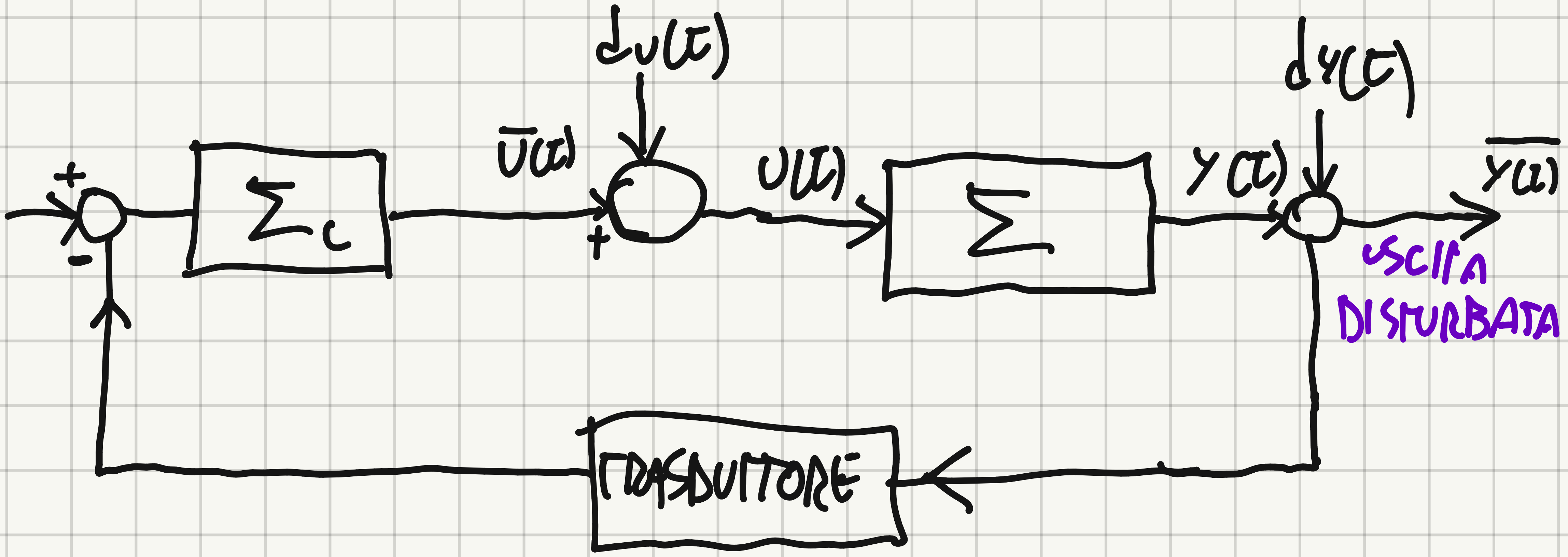
L'ERRORE NON DIPENDE NÉ DA $x(t_0)$ NÉ DA $u(t)$, SOLO DA $\delta_x(t_0)$

(2) $u(t)+\delta_u(t) \rightarrow x_{\delta_u}(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot \left(u(\tau)+\delta_u(\tau)\right)d\tau$

$$e_{\delta_u}(t) = x_{\delta_u}(t) - x(t) = \cancel{e^{A(t-t_0)} \cdot x(t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot \left(\cancel{u(\tau)}+\delta_u(\tau)\right)d\tau - \cancel{e^{A(t-t_0)} \cdot x(t_0)} - \cancel{\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau)\,d\tau}$$

$$\Rightarrow e_{\delta_u}(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot \delta_u(\tau)\,d\tau$$

L'ERRORE NON DIPENDE NÉ DA $x(t_0)$ NÉ DA $u(t)$, SOLO DA $\delta_x(t_0)$



Può capitare che, in ingresso e/o uscita, ci siano disturbi. In generale, un sistema è:

- **Asintoticamente stabile** → la sua evoluzione è poco sensibile alle perturbazioni sullo stato iniziale e sull'ingresso e coincide con quella che si avrebbe in assenza di perturbazioni
- **Semplicemente stabile** → la sua evoluzione è poco sensibile alle perturbazioni sullo stato iniziale e sull'ingresso
- **Instabile** → la sua evoluzione è molto sensibile alle perturbazioni sullo stato iniziale e sull'ingresso

Bisogna inoltre distinguere le stabilità:

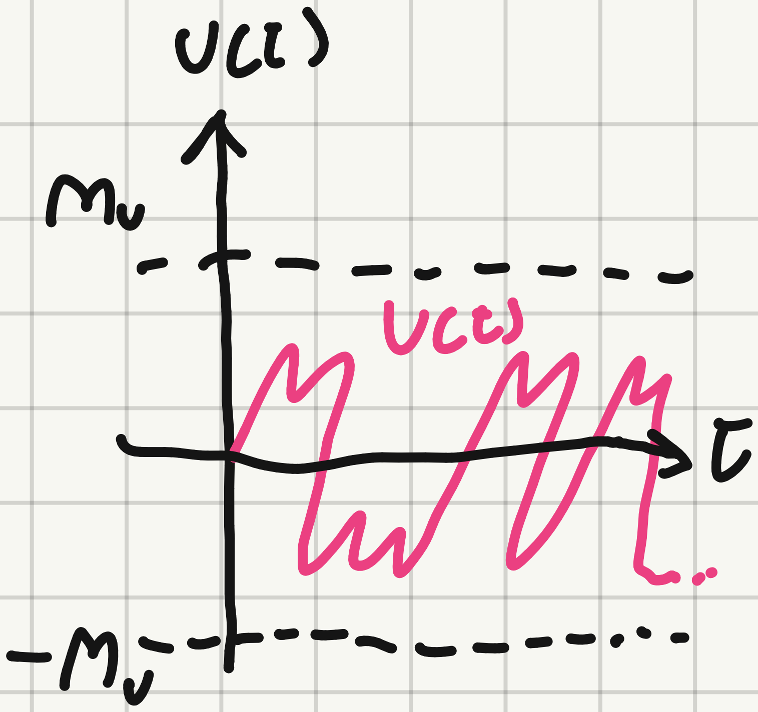
- **Esterna** → ingresso-uscita limitati BIBO
- **Interna** → stabilità di Lyapunov

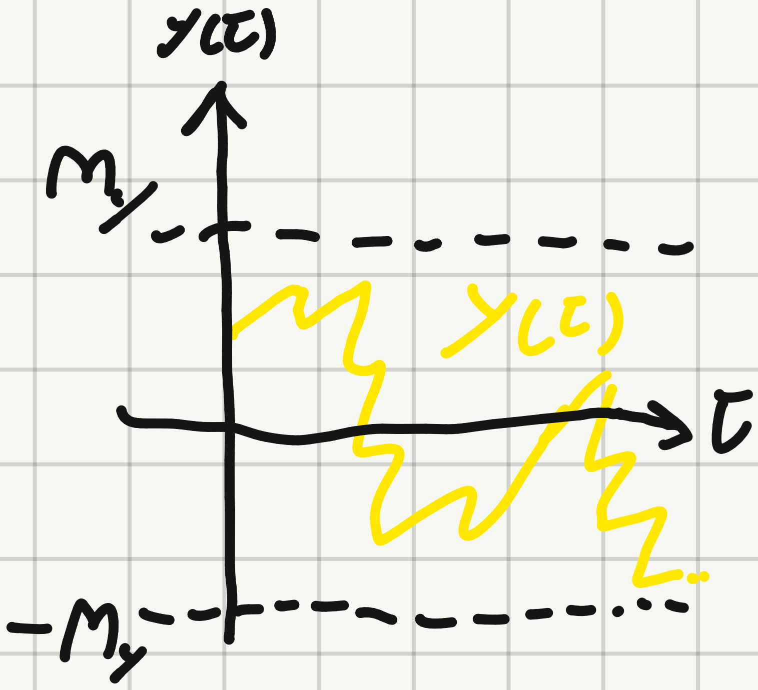
Stabilità esterna

$$u(t) \to \boxed{\Sigma_{SISO}} \to y(t)$$

$$|u(t)| \le M_u < +\infty \implies |y(t)| \le M_y < +\infty$$

Se l'ingresso è limitato, si mantiene tale anche l'uscita





$$|y(t)| \le M_y < +\infty \Rightarrow$$

$y_L(t)$ LIMITATA
$y_F(t)$ FORZATA

$$\begin{cases} |C \cdot e^{A(t-t_0)} \cdot x(t_0)| < +\infty \\ |C \cdot \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau)\,d\tau + D \cdot u(t)| < +\infty \end{cases}$$

IL CALCOLO PUÒ RISULTARE COMPLESSO, E SI LAVORA QUINDI NEL DOMINIO DI LAPLACE $\rightarrow \begin{cases} |Y(s)| < +\infty \\ |W(s) \cdot U(s)| < +\infty \end{cases}$, DA CUI SI RICAVA IL SEGUENTE TEOREMA: UN SISTEMA SI DICE STABILE DI TIPO BIBO SE E SOLO SE:

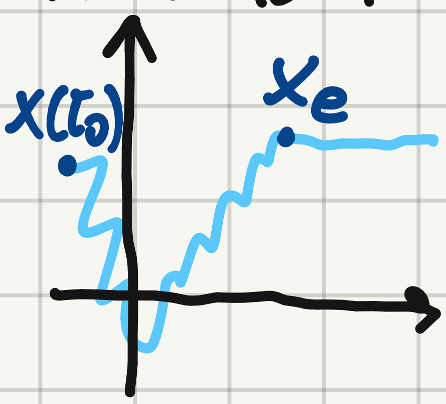
1. TUTTI I POLI SEMPLICI DI $Y(s)$ HANNO PARTE REALE ≤ 0
2. TUTTI I POLI SEMPLICI E MULTIPLI DI $W(s)$ HANNO PARTE REALE < 0

STABILITÀ INTERNA

STATO DI EQUILIBRIO

UNO STATO x_e SI DICE STATO DI EQUILIBRIO SE, PER IL

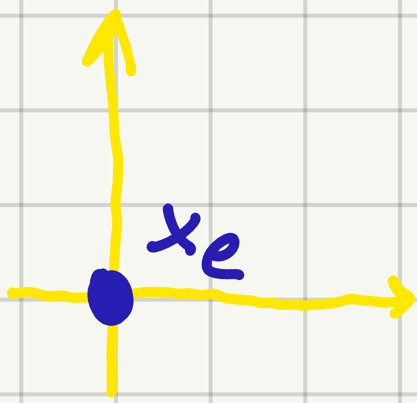
MOVIMENTO LIBERO DELLO STATO, SI OTTIENE $x(t) = x_e \ \forall t \geq \tau;\ x(\tau) = x_e$.

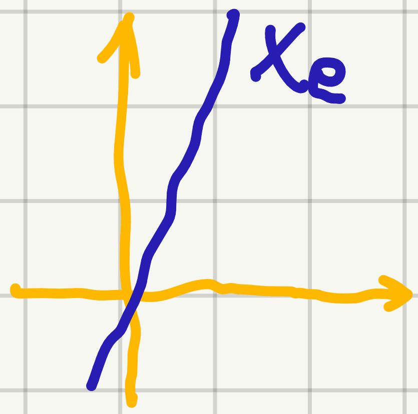


CALCOLO DELLO STATO DI EQUILIBRIO:
$$\begin{cases} \dot{x}_L(t) = A \cdot x_L(t) \\ y_L(t) = C \cdot x_L(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{x}_e = A \cdot x_e = 0:$$

- $\det A \neq 0 \rightarrow$ SI HA UN PUNTO DI EQUILIBRIO IN $x_e = 0$
- $\det A = 0 \rightarrow$ SI HANNO INFINITI PUNTI DI EQUILIBRIO RACCHIUSI IN UN SOTTOSPAZIO DELLO SPAZIO DIMENSIONE





ESERCIZIO: RICAVARE LO STATO DI EQUILIBRIO DEL SISTEMA

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases},$$ NEI SEGUENTI CASI:

1) $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ 2) $A = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

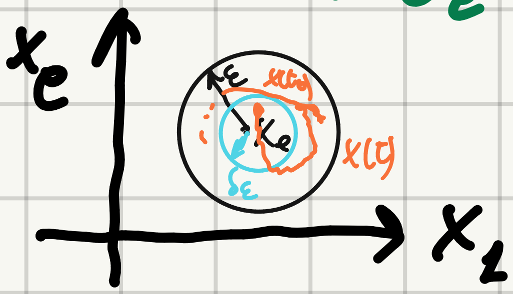
1) $\det A = 1 \Rightarrow A \cdot x_e = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_{e_1} \\ x_{e_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

$$\begin{cases} x_{e_1} = 0 \\ x_{e_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow x_e = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

2) $\det A = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_{e_1} \\ x_{e_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x_{e_1} = -x_{e_2} \end{cases}$

- STATO DI EQUILIBRIO STABILE → UNO STATO $x_e \in \mathbb{R}^n$ SI DICE STABILE SE $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon(t_0, \varepsilon) \mid \|x(t_0) - x_e\| \le \delta_\varepsilon(t_0, \varepsilon)$

$\Rightarrow \|x(t) - x_e\| \le \varepsilon \quad \forall t \ge t_0$



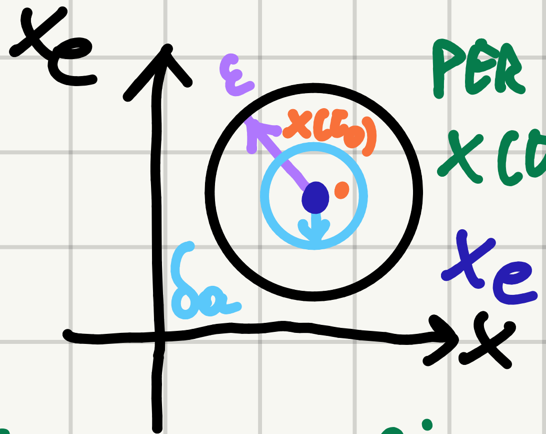
NOTE:

— $\delta_\varepsilon(t_0, \varepsilon)$ → LA DIPENDENZA DALL'ISTANTE DI TEMPO INIZIALE SI HA PER SISTEMI NON-STAZIONARI

— $\delta_\varepsilon(t)$ → NON C'È DIPENDENZA DALL'ISTANTE DI TEMPO INIZIALE NEI SISTEMI STAZIONARI. x_e SI DICE STABILE UNIFORMEMENTE

— NEI SISTEMI STAZIONARI, LA STAZIONARIETÀ È SEMPRE UNIFORME POICHÉ $\delta_\varepsilon(t_0, \varepsilon)$ NON DIPENDE DA t_0

- STATO DI EQUILIBRIO ASINTOTICAMENTE STABILE → UNO STATO x_e SI DICE ASINTOTICAMENTE STABILE SE:



PER $t >> 0$
$x(t_0) = x_e$

- x_e È STABILE
- $\exists \delta_a(t_0) \mid \|x(t_0) - x_e\| < \delta_a(t_0) \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \|x(t_0) - x_e\| = 0$

NOTE:

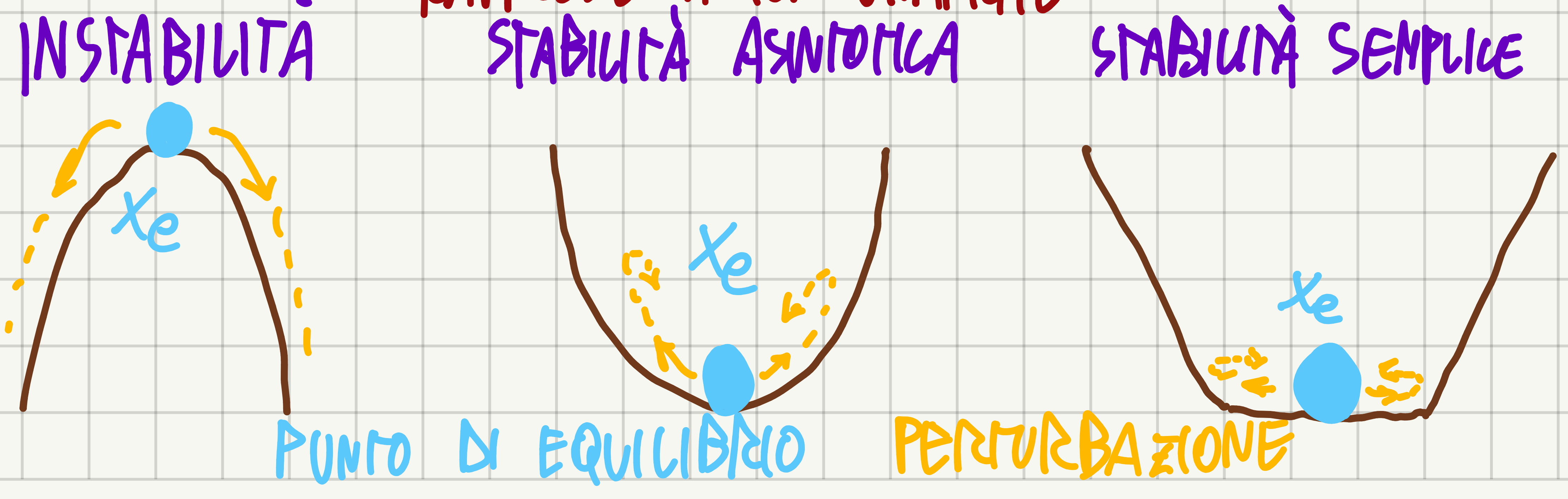
- Si parla di QUASI-STABILITÀ ASINTOTICA quando x_e, pur NON ESSENDO UN PUNTO DI EQUILIBRIO STABILE, RISPETTA la condizione
$\exists \delta_a(t_0) \mid \|x(t_0)-x_e\| < \delta_a(t_0) \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \|x(t)-x_e\| = 0$
- Si parla di QUASI-STABILITÀ ASINTOTICA UNIFORME quando $\delta_a(t_0)$ NON DIPENDE DA t_0 E $\exists \delta_a(t_0) \mid \|x(t_0)-x_e\| < \delta_a(t_0) \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \|x(t)-x_e\| = 0$
- Si parla di stabilità asintotica uniforme quando lo stato è asintoticamente stabile e $\delta_a(t_0)$ non dipende da t_0

- **Stato di Equilibrio Globalmente Asintoticamente Stabile (G.A.S.)**

→ Uno stato di equilibrio $x_e \in \mathbb{R}^n$ si dice G.A.S. se:

- x_e è STABILE
- $\forall x(t_0) \in \mathbb{R}^n, \lim_{t\to+\infty} \|x(t)-x_e\| = 0$

RAPPRESENTAZIONI GRAFICHE



ALCUNE NOTE CONCLUSIVE:

- SI PARLA DI STATO DI EQUILIBRIO ESPONENZIALMENTE STABILE SE $\exists \alpha, \beta > 0$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon(t_0, \varepsilon) > 0 \mid \|x(t_0) - x_e\| < \delta_\varepsilon(t_0, \varepsilon) \Rightarrow$$

$$\|x(t) - x_e\| \leq \alpha \cdot \|x(t_0) - x_e\| e^{-\beta t}$$

- LE DEFINIZIONI E PROPRIETÀ FORNITE SONO RIFERITE AL SINGOLO STATO DI EQUILIBRIO E HANNO DUNQUE VALIDITÀ LOCALI

ESERCIZIO: TROVARE LO STATO DI EQUILIBRIO DEL SISTEMA

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{vmatrix} \sin(x_1(t)) & 0 \\ 0 & \cos(x_2(t)) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot u(t) \\ y(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \Rightarrow \dot{x}_e = f(x_e) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \sin(x_{e_1}) & 0 \\ 0 & \cos(x_{e_2}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{cases} \sin(x_{e_1}) = 0 \\ \cos(x_{e_2}) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{e_1} = k\pi \\ x_{e_2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z}$$

STABILITÀ DEI SISTEMI LINEARI

DATO IL SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO $\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$,

È POSSIBILE STUDIARE LA STABILITÀ DEL SISTEMA PARTENDO DALLE PRECEDENTI DEFINIZIONI ED UNA SERIE DI PROPOSIZIONI.

PROPOSIZIONE 1: IN UN SISTEMA LINEARE, L'INSIEME DEGLI STATI DI EQUILIBRIO È UN SOTTOSPAZIO DELLO SPAZIO DI STATO. IN PARTICOLARE, L'ORIGINE DELLO SPAZIO DI STATO È SEMPRE UNO STATO DI EQUILIBRIO.

$$A \cdot x_e = 0 \begin{cases} \det A \neq 0 \Longrightarrow x_e \neq 0 \\ \det A = 0 \end{cases}$$

PROPOSIZIONE 2: IN UN SISTEMA LINEARE, SE ESISTE PIÙ DI UNO STATO DI EQUILIBRIO LA STABILITÀ DI UNO IMPLICA ED È IMPLICATA DALLA STABILITÀ DEGLI ALTRI

PROPOSIZIONE 3: IN UN SISTEMA LINEARE:

1. SI PUÒ AVERE UNA STABILITÀ ASINTOTICA SOLO PER LO STATO DI EQUILIBRIO $x_e \neq 0$, CHE È ANCHE L'UNICO STATO DI EQUILIBRIO DEL SISTEMA
2. LA STABILITÀ ASINTOTICA LOCALE DI UNO STATO DI EQUILIBRIO $x_e \neq 0$ IMPLICA LA SUA STABILITÀ ASINTOTICA GLOBALE

PROPOSIZIONE 4: IN UN SISTEMA LINEARE:

1. SE UNO STATO DI EQUILIBRIO x_e È STABILE, LO SONO ANCHE TUTTI GLI ALTRI STATI DI EQUILIBRIO