ALGEBRA LINEARE

L'algebra lineare si occupa dello studio e della risoluzione dei sistemi lineari, cercando dunque di stabilirne il numero di soluzioni (una, infinite o nessuna). Prendiamo in esame questi 3 sistemi come esempio:

$(1)\begin{cases} x-y=1 \\ 2x-y=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y=x-1 \\ 2x-x-1=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x=-1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ il sistema (1) ammette una sola soluzione

$(2)\begin{cases} x-y=0 \\ x-y=5 \end{cases} \longrightarrow 0=5 \Rightarrow$ il sistema (2) non ha soluzioni

$(3)\begin{cases} x-y=0 \\ 2x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow$ il sistema (3) ammette infinite soluzioni.

Un generico sistema può essere indicato con la seguente forma:

$$\Sigma\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,m}x_m = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,m}x_m = b_n \end{cases}$$

con $a_{i,j}$ coefficienti reali, b_i i termini noti, $x_1, x_2, \dots, x_m$ le incognite

L'algebra lineare fa spesso ricorso al metodo di Gauss, che consiste in diverse operazioni che semplificano il sistema senza alterarlo per renderlo triangolare superiore:

1 - Scambio della posizione delle equazioni

2 - Moltiplicazione di un'equazione per uno scalare $\lambda \in \mathbb{R} \wedge \lambda \neq 0$

3 - Somma di due equazioni tra loro

Vediamo subito un esempio pratico:

$$\alpha: * \begin{cases} x+2y-3z=4 \\ x+3y+z=11 \\ 2x+5y-4z=13 \\ 2x+6y+2z=22 \end{cases} \xrightarrow[\substack{3^a \text{ riga} - 2(1^a \text{ riga}) \\ 4^a \text{ riga} - 2(1^a \text{ riga})}]{2^a \text{ riga} - 1^a \text{ riga}} \begin{cases} x+2y-3z=4 \\ y+4z=7 \\ y+2z=5 \\ 2y+8z=14 \end{cases} \xrightarrow[4^a \text{ riga} - 2(2^a \text{ riga})]{3^a \text{ riga} - 2^a \text{ riga}} \begin{cases} x+2y-3z=4 \\ y+4z=7 \\ -2z=-2 \\ 0=0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \\ z=1 \\ 0=0 \end{cases}$$

Alcuni sistemi, però, risultano molto complessi da risolvere e si fa dunque uso dello strumento principale dell'algebra lineare: le matrici

MATRICI

Le matrici sono tabelle $n \times m$ (n righe ed m colonne) associate ad un sistema e si indicano $A \in \mathcal{M}(n \times m, \mathbb{K})$ dove $\mathbb{K}$ indica un campo numerico (in generale ci avvarremo di $\mathbb{R}$). Ad esempio:

$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix}$ è la matrice incompleta 4×3 associata ad α *

Sullo spazio delle matrici sono definite le operazioni di somma matrice+matrice e di prodotto matrice · scalare

$(A+B)_{ij} = (a_{ij} + b_{ij})$ $\quad \lambda(A)_{ij} = (\lambda a_{ij})$, con $A, B \in \mathcal{M}(n \times m, \mathbb{R})$ $\lambda \in \mathbb{R}$

Esempi: $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$ $\quad B = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}$ $\quad \lambda = 2$

$A+B = \begin{vmatrix} 1+0 & 2-1 \\ 3+1 & 4+2 \\ 5+3 & 6-7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 6 \\ 8 & -1 \end{vmatrix}$ $\quad 2A = \begin{vmatrix} 2\cdot1 & 2\cdot2 \\ 2\cdot3 & 2\cdot4 \\ 2\cdot5 & 2\cdot6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{vmatrix}$

DATE DUE MATRICI $A, B \in M(n\times m, \mathbb{R})$ E DUE SCALARI $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$, VALGONO LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

1. COMMUTATIVA DELLA SOMMA $A+B=B+A$
2. ASSOCIATIVA DELLA SOMMA $(A+B)+C=A+(B+C)$, $C\in M(n\times m,\mathbb{R})$
3. ESISTENZA DELLA MATRICE NULLA 0 $A+0=A$
4. ESISTENZA DELLA MATRICE OPPOSTA $\exists\, -A\in M(n\times m,\mathbb{R}) \mid A+(-A)=0$
5. ASSOCIATIVA DEL PRODOTTO PER SCALARE $\lambda(\nu A)=(\lambda\nu)A$ $\quad \nu\in\mathbb{R}$
6. DISTRIBUTIVA DEL PRODOTTO $(A+B)\nu=\nu A+\nu B$
7. DISTRIBUTIVA DELLA SOMMA $(\lambda+\nu)A=\lambda A+\nu A$
8. ELEMENTO NEUTRO DEL PRODOTTO PER SCALARE $1\cdot A=A$
9. PRODOTTO PER MATRICE NULLA $A\cdot 0=0$

LA TRASPOSIZIONE

LO SIMBOL[O]

LA TRASPOSIZIONE DI UNA MATRICE A, INDICATA A^T, È L'OPERAZIONE CHE CONSENTE IL PASSAGGIO DELLE RIGHE CON LE COLONNE E VICEVERSA. AD ESEMPIO, SE $A=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&3&5\end{vmatrix}$, $A^T=\begin{vmatrix}1&2\\0&3\\1&5\end{vmatrix}$

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE $(A+B)^T=A^T+B^T$. INFATTI, $a^T_{ij}=a_{ji}$ E $b^T_{ij}=b_{ji}$, $a^T+b^T=a_{ji}+b_{ji}$ E $(a_{ij}+b_{ij})^T=a_{ji}+b_{ji}$ ✓. INOLTRE, LA TRASPOSTA DELLA TRASPOSTA REST[ITUISCE] LA MATRICE DI PARTENZA

ESISTONO ANCHE CASI PARTICOLARI DI MATRICI, OSSIA:

1. MATRICI QUADRATE → STESSO NUMERO DI RIGHE E COLONNE, A LORO VOLTA DISTINTE IN:
   - DIAGONALI, $\forall\, i\neq j,\ a_{ij}=0$! CIÒ NON ESCLUDE ZERI PER $i=j$ (DIAGONALE PRINCIPALE
   - SIMMETRICHE, $a_{ij}=a_{ji}\ \forall\, i,j\in[[1,n]]$ MATRICE SIMMETRICA $\Longleftrightarrow A=A^T$
   - ANTISIMMETRICHE, $a_{ij}=-a_{ji}\ \forall\, i,j\in[[1,n]]$ MATRICE ANTISIMMETRICA $\Longleftrightarrow A=-A^T$
2. MATRICI TRIANGOLARI SUPERIORI/INFERIORI → I COEFFICIENTI AL DI SOTTO/SOPRA DELLA DIAGONALE PRINCIPALE SONO NULLI
3. MATRICE RIGA → $A\in M(1\times n,\mathbb{R})$
4. MATRICE COLONNA → $A\in M(m\times 1,\mathbb{R})$

UN'ESPRESSIONE DEL TIPO $\lambda_1A_1+\lambda_2A_2+\dots+\lambda_kA_k$, CON $A\in M(m\times n,\mathbb{R})$, $\lambda\in\mathbb{R}$ $\forall\, k\in[[1,n]]$ È DETTA COMBINAZIONE LINEARE

PRODOTTO RIGHE PER COLONNE

È UN PRODOTTO TRA MATRICI IN CUI È FONDAMENTALE RICORDARE CHE IL NUMERO DI RIGHE DEL PRIMO FATTORE E DI COLONNE DEL SECONDO COINCIDANO. IL RISULTATO $A\cdot B=a_{1,1}b_{1,1}+a_{1,2}b_{2,1}+\dots+a_{n,1}b_{1,n}+\dots$ PUÒ ESSERE RISCRITTO IN FORMA COMPATTA COME $A\cdot B=\sum_{k=1}^{n}a_{1,k}b_{k,1}+\sum_{k=1}^{n}a_{2,k}b_{k,2}+\dots+\sum_{k=1}^{n}a_{l,k}\cdot b_{k,l}$

CON l AD INDICARE IL NUMERO DI RIGHE DI A E QUINDI DI COLONNE DI B

AD ESEMPIO, PRESA LA MATRICE $A=\begin{vmatrix}1&0&-1&2\\3&1&0&4\end{vmatrix}$ E $B=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\-1&0&2\\0&1&0\end{vmatrix}$, SE SI VUOLE CALCOLARE

$A\cdot B_{1,2}=1\cdot1+0\cdot0+(-1)\cdot0+2\cdot1=3$

PER IL PRODOTTO RIGHE PER COLONNE VALGONO LE SEGUENTI PROPRIETÀ (SI CONSIDERINO $A,B,C\in M(n\times n)$, $\lambda\in\mathbb{R}$

1. ASSOCIATIVA DEL PRODOTTO $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$
2. DISTRIBUTIVA $(A+B)\cdot C=AC+BC$
3. PRODOTTO PER UNO SCALARE $A\cdot(\lambda B)=\lambda(A\cdot B)$
4. NON VALE, IN GENERALE, LA PROPRIETÀ COMMUTATIVA. QUANDO SUCCEDE SI DICE CHE LE MATRICI COMMUTANO

MATRICE IDENTITÀ

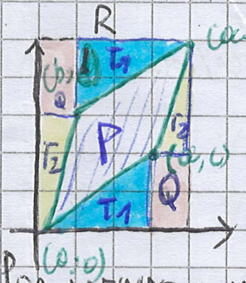
LA MATRICE IDENTITÀ DI ORDINE n È UNA PARTICOLARE MATRICE QUADRATA I CUI TERMINI NELLA DIAGONALE PRINCIPALE SONO PARI A 1 E TUTTI GLI ALTRI UGUALI A 0. ESEMPIO PER $n=3$ $I_3=\begin{vmatrix}1&0&\dots\\0&1&\dots\\0&0&\dots\end{vmatrix}$

UNA MATRICE QUADRATA A SI DICE INVERTIBILE QUANDO $\exists A^{-1} \mid A \cdot A^{-1} = I_n$. VALE, INOLTRE, CHE $A \cdot I_n = A$ $A \cdot I_n$ ...

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE L'INVERSA DI UNA MATRICE È UNICA. INFATTI, SE PER ASSURDO ESISTESSERO DUE INVERSE DI A, DENOMINATE B E C, PER DEFINIZIONE $A \cdot B = I_n$ E $A \cdot C = I_n$. PRESA LA PRIMA EQUAZIONE, MOLTIPLICO PRIMO E SECONDO MEMBRO PER C $\rightarrow$ $C \cdot (A \cdot B) = I_n \cdot C \longrightarrow (C \cdot A) \cdot B = C \rightarrow I_n \cdot B = C \rightarrow C = B$ CVD

IL DETERMINANTE

IL DETERMINANTE È UN NUMERO REALE ASSOCIATO AD UNA MATRICE QUADRATA CHE NE DEFINISCE DIVERSE IMPORTANTI PROPRIETÀ. NEL PIANO, PER $n=2$, QUESTO DEFINISCE IL MODULO DELL'AREA DI UN PARALLELOGRAMMA P COSÌ STRUTTURATO:



$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$P = R - 2Q - 2T_1 - 2T_2 = (a+b)(c+d) - 2(b \cdot c) - 2\left(\frac{a \cdot c}{2}\right) - 2\left(\frac{d \cdot b}{2}\right) =$$

$$= \cancel{ac} + ad + bc + \cancel{bd} - 2bc - \cancel{ac} - \cancel{bd} = ad - bc$$

SI PUÒ NOTARE CHE $\det A = \det A^T$. INFATTI $\det\begin{vmatrix} a & b \\ c & d\end{vmatrix} = ad - bc$ E $\det\begin{vmatrix} a & c \\ b & d\end{vmatrix} = ad - bc$

PER DEFINIRE LE MATRICI DI ORDINE SUPERIORE È NECESSARIO INTRODURRE LA MATRICE AGGIUNTA DEL TERMINE $a_{i,j}$ DELLA MATRICE A. LA MATRICE AGGIUNTA, INDICATA CON $A_{i,j}$, È LA MATRICE QUADRATA DI ORDINE $n-1$ CHE SI OTTIENE DA A LA RIGA i-ESIMA E LA COLONNA j-ESIMA. AD ESEMPIO, DA $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ E PRESO IL TERMINE DEL TERMINE $a_{1,2}$

$a_{1,2} = 2$, $A_{1,2} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$. IL DETERMINANTE DI UNA MATRICE $A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$ PUÒ ESSERE ORA DEFINITO COME $\det A = +a_{1,1}\det A_{1,1} - a_{1,2}\det A_{1,2} + \dots + (-1)^{n+1} a_{1,n} \det A_{1,n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1,k} \det A_{1,k}$

IL TEOREMA DI LAPLACE CI CONSENTE DI FARE IL CALCOLO DEL DETERMINANTE INDIPENDENTEMENTE DALLA RIGA O COLONNA SCELTA. INFATTI, DATA $A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$, VALE CHE:

① $\forall i = 1, \dots, n \rightarrow \det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{i,k} \det A_{i,k}$

② $\forall j = 1, \dots, n \rightarrow \det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,j} \det A_{k,j}$

PER LE MATRICI QUADRATE DI ORDINE 3 SI PUÒ UTILIZZARE LA REGOLA DI SARRUS:

$$A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$$

DIAGONALI PARALLELE ALLA PRINCIPALE — DIAGONALI ANTIPARALLELE ALLA PRINCIPALE

$\det A = (a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} + a_{1,2} a_{2,3} a_{3,1} + a_{1,3} a_{2,1} a_{3,2}) - (a_{3,1} a_{2,2} \cdot a_{1,3} + a_{3,2} a_{2,3} a_{1,1} + a_{3,3} a_{2,1} a_{1,2}) = a_{1,1}(a_{2,2} a_{3,3} - a_{3,2} a_{2,3}) - a_{1,2}(a_{2,1} a_{3,3} - a_{2,3} a_{3,1}) + a_{1,3}(a_{2,1} a_{3,2} - a_{2,2} a_{3,1}) = a_{1,1}\det A_{1,1} - a_{1,2}\det A_{1,2} + a_{1,3}\det A_{1,3}$

GRAZIE AL TEOREMA DI LAPLACE È POSSIBILE DEFINIRE LE SEGUENTI PROPRIETÀ DEL DETERMINANTE:

① PER LE MATRICI TRIANGOLARI SUPERIORI, $\det A = a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n}$

LA DIMOSTRAZIONE AVVIENE PER IL PRINCIPIO DI INDUZIONE:

PASSO ZERO) $n=2 \rightarrow \det\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad$ ✓

SVILUPPO LUNGO LA PRIMA RIGA PER INDUZIONE

PASSO INDUTTIVO) $n-1$ VERA $\Rightarrow n$? $\rightarrow \det A = a_{1,1} \cdot \det A_{1,1} = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} \cdot \dots \cdot a_{n,n}$ ✓

② IL DETERMINANTE DELLA MATRICE IDENTITÀ È PARI AD 1

③ $\det A = \det A^T$ INFATTI, SVILUPPANDO A LUNGO LA PRIMA RIGA E A^T LUNGO LA PRIMA COLONNA SI OTTERRÀ LO STESSO RISULTATO

④ SE UNA RIGA (O COLONNA) DELLA MATRICE È NULLA, $\det A = 0$ INFATTI, SVILUPPANDO LUNGO TALE RIGA/COLONNA, TUTTI GLI OGGETTI SARANNO MOLTIPLICATI PER ZERO $\Rightarrow \det A = 0$

⑤ MOLTIPLICANDO UNA RIGA/COLONNA PER λ, ANCHE IL DETERMINANTE ANDRÀ MOLTIPLICATO PER TALE $\lambda \in \mathbb{R}$

INFATTI, SVILUPPANDO LUNGO TALE RIGA/COLONNA, SI NOTERÀ COME OLTRE AD a $\det A$ COMPARIRÀ ANCHE UN λ PER TUTTI I TERMINI

⑥ IL DETERMINANTE COMMUTA CON LA SOMMA DI RIGHE/COLONNE

INFATTI, SVILUPPANDO LUNGO LA RIGA i-ESIMA (ANALOGO PER LE COLONNE), $(-1)^{i+k}(b_{i,k}+c_{i,k})\det A_{i,k} = (-1)^{i+k} b_{i,k}\det A_{i,k} + (-1)^{i+k} c_{i,k}\det A_{i,k}$ $\forall k=1\ldots n$

$$\det\begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{i,n}+c_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ b_{i,1} & \cdots & b_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} + \det\begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ c_{i,1} & \cdots & c_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

⑦ IL DETERMINANTE NON CAMBIA SE SI SOMMA AD UNA RIGA/COLONNA UN MULTIPLO DI UN'ALTRA RIGA/COLONNA

INFATTI, PER MATRICE DI ORDINE 2, $\det\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} a & b \\ c+2a & d+2b \end{vmatrix}$

$$ad - cb = ad + \cancel{2ab} - cb - \cancel{2ab}$$

⑧ UNA MATRICE CON DUE RIGHE/COLONNE UGUALI HA DETERMINANTE NULLO

INFATTI, DALLE PROPRIETÀ ④ E ⑦, SOTTRAENDONE UNA CON L'ALTRA (⑦) SI OTTIENE UNA RIGA NULLA $\Rightarrow$ DA ③, $\det = 0$

⑨ SCAMBIANDO TRA LORO RIGHE E/O COLONNE, IL SEGNO DEL DETERMINANTE CAMBIA PER OGNI SCAMBIO

$$\det\begin{vmatrix} \vdots \\ A_j + A_k \\ \vdots \\ A_k + A_j \\ \vdots \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \end{vmatrix} + \det\begin{vmatrix} \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \end{vmatrix} = 0 \text{ PER SEMPLICITÀ} \Rightarrow \det\begin{vmatrix} \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \end{vmatrix} = -\det\begin{vmatrix} \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \end{vmatrix}$$

QUESTE PROPRIETÀ CONSENTONO DI APPLICARE L'ALGORITMO DI GAUSS ALLO STUDIO DEL DETERMINANTE

ESEMPIO: $\det\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 8 \\ 2 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{matrix} = -\det\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ TRIANGOLARE SUPERIORE $= -(1 \cdot 2 \cdot 3) = -6$

RIGHE/COLONNE LINEARMENTE DIPENDENTI/INDIPENDENTI

DATA UNA MATRICE $A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$, LE SUE RIGHE (O COLONNE) SONO LINEARMENTE DIPENDENTI SE ESISTE UNA COMBINAZIONE LINEARE DI COEFFICIENTI NON TUTTI NULLI ($a \in \mathbb{R}$) TALI CHE $a_1 A_1 + a_2 A_2 + \ldots + a_n A_n = 0$ (NUMERO DELLA RIGA/COLONNA) E SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI SE $a_1 A_1 + a_2 A_2 + \ldots + a_n A_n = 0 \iff a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$

AD ESEMPIO, VOGLIAMO VERIFICARE SE LE COLONNE DI A SONO LINEARMENTE DIPENDENTI, CON $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$$\alpha\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \beta\begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} + \gamma\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 2\beta \\ -\beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma \\ 0 \\ \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \alpha + \gamma \\ \alpha + 2\beta \\ -\beta + \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ -\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ -\beta + 2\beta = 0 \\ \gamma = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{LE COLONNE DI A RISULTANO LINEARMENTE INDIPENDENTI}$$

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE SE LE RIGHE/COLONNE DI UNA MATRICE SONO LINEARMENTE DIPENDENTI, ALLORA HA DETERMINANTE NULLO. INFATTI DIRE CHE SONO LINEARMENTE DIPENDENTI È UN ALTRO MODO DI DIRE CHE SONO UNA IL MULTIPLO DELL'ALTRA E, USANDO L'ALGORITMO DI GAUSS, SI OTTIENE RIGA/COLONNA NULLA E QUINDI DETERMINANTE NULLO.

TEOREMA DI BINET: DATE DUE MATRICI A, B QUADRATE DELLO STESSO ORDINE, $\det A \cdot B = \det A \cdot \det B$

SI PUÒ ORA DIMOSTRARE QUANDO UNA MATRICE A RISULTA INVERTIBILE: $\det A \neq 0 \land \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

INFATTI, DAL TEOREMA DI BINET $\det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$ E SAPPIAMO CHE $A \cdot A^{-1} = I_n \Rightarrow \det A \cdot \det A^{-1} = 1$

$\Rightarrow$ CON $\det A \neq 0$, $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

PRIMA DI DEFINIRE GLI ELEMENTI DI A^{-1}, È NECESSARIO INTRODURRE IL COMPLEMENTO ALGEBRICO DEL TERMINE $a_{i,j} \in A$: SI TRATTA DEL NUMERO REALE $(-1)^{i+j} \det A_{j,i}$

ORA POSSIAMO DIMOSTRARE CHE GLI ELEMENTI DELL'INVERSA SI DEFINISCONO COME $A^{-1} = \left(\dfrac{(-1)^{i+j} \det A_{j,i}}{\det A} \right)^T_{i,j}$

INFATTI, DETTA $\hat{A}$ LA MATRICE DEI COMPLEMENTI ALGEBRICI, BISOGNA DIMOSTRARE CHE

$A \cdot \dfrac{1}{\det A} \cdot \hat{A} = I_n \Longrightarrow \left(\dfrac{1}{\det A}\right) A \cdot \hat{A} = I_n \qquad (A \cdot \hat{A})_{i,j} = a_{i1} A_{j,1} + a_{i2} A_{j,2} + \dots + a_{in} A_{j,n}$

$= \begin{cases} 0 & \forall\, i \neq j \\ \det A & \forall\, i = j \end{cases}$ DIVIDENDO I VARI TERMINI PER IL COEFFICIENTE $\dfrac{1}{\det A}$, SI OTTIENE I_n ✓

ESERCIZIO D'ESEMPIO: DETERMINARE PER QUALI $\lambda \in \mathbb{R}$ $A = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 0 & 2 \\ 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$ RISULTA INVERTIBILE.

BASTA CALCOLARE $\det A_\lambda$ E DETERMINARE QUANDO NON È NULLO

$\det A = 0 - (\lambda^2 - 2) + 0$ $\quad \det A \neq 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2 \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq \pm\sqrt{2} \Rightarrow$ MATRICE INVERTIBILE $\forall \lambda \neq \pm\sqrt{2}$

UNA MATRICE DI DETERMINANTE NULLO È DETTA MATRICE SINGOLARE, MENTRE CON DETERMINANTE NON NULLO È DETTA MATRICE NON SINGOLARE

L'INSIEME DELLE MATRICI INVERTIBILI $n \times n$ È DETTO GRUPPO LINEARE $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$

È UTILE DIMOSTRARE CHE, DATE DUE MATRICI INVERTIBILI A E B, ANCHE $A \cdot B$ È INVERTIBILE E $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

INFATTI, PER DIMOSTRARE CHE $A \cdot B$ È INVERTIBILE BASTA USARE IL TEOREMA DI BINET: $\det A \cdot \det B = \det A \cdot B$, SAPENDO PER IPOTESI CHE $\det A \neq 0 \wedge \det B \neq 0$, SI CONCLUDE CHE $\det A \cdot B \neq 0$ ✓

ORA NON RESTA CHE VERIFICARE CHE $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = I_n \rightarrow A \cdot \overbrace{(B \cdot B^{-1})}^{I_n} \cdot A^{-1} = I_n \rightarrow A \cdot I_n \cdot A^{-1} = I_n$ $\rightarrow A \cdot A^{-1} = I_n \rightarrow I_n = I_n$ ✓

ALTRE RELAZIONI UTILI DA DIMOSTRARE DATE DUE MATRICI DI GRADO n A, B SONO:

- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

  $a_{i,k} \cdot b_{k,j} \in A \cdot B \quad \forall k: 1, \dots, n$

  $b_{j,k} \cdot a_{k,i} \in B^T \cdot A^T \quad \forall k: 1, \dots, n$

  $\longrightarrow (a_{i,k} \cdot b_{k,j})^T = (b_{j,k} \cdot a_{k,i})$?? $\Longrightarrow (a_{k,i} \cdot b_{j,k}) = (b_{j,k} \cdot a_{k,i})$ ✓

- SE A È INVERTIBILE, ANCHE A^T È INVERTIBILE E $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

  $\underbrace{\det A}_{\neq 0 \text{ PER IP.}} = \det A^T \Rightarrow \det A^T \neq 0 \Rightarrow A^T$ È INVERTIBILE

  BISOGNA DIMOSTRARE CHE $A^T \cdot (A^{-1})^T = I_n \xrightarrow{\text{DALLA PROPRIETÀ PRECEDENTE}} A^{-1} \cdot A = I_n$ ✓

RANGO

PRESA $A \in M(n \times m, \mathbb{R})$ E $k \mid 1 \leq k \leq \min\{n, m\}$, UN MINORE DI A DI ORDINE k È UNA SOTTOMATRICE DI A DI ORDINE k OTTENUTA INTERSECANDO k RIGHE E k COLONNE NON NECESSARIAMENTE CONSECUTIVE. AD ESEMPIO, PRESA

$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$ E CERCATO UN MINORE DI ORDINE 2, $m_A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$ ED IL RANGO DI A, $rk(A)$, È DATO DALLA