- $$\begin{cases} X_1(t) = Y(t) \\ X_2(t) = X_1'(t) = Y'(t) \\ X_3(t) = X_2'(t) = Y''(t) \\ X_3'(t) = Y'''(t) = -9X_3(t) - 24X_2(t) - 16X_1(t) - 9U(t) + 18U'(t) \end{cases}$$

CASO $n > m > 0$ $\quad A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -16 & -24 & -9 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -9 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} -9 & 18 & 0 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$

② $A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$

- $Y_F(z) = C \cdot (zI - A)^{-1} \cdot B \cdot U(z) \qquad U(k) = \varepsilon(t)$

$zI - A = \begin{vmatrix} z & 0 & 0 \\ -3 & z & 0 \\ -2 & -1 & z \end{vmatrix} \qquad \det(zI - A) = z^3 \qquad (zI - A)^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{z} & 0 & 0 \\ \frac{3}{z^2} & \frac{1}{z} & 0 \\ \frac{2z+3}{z^3} & \frac{1}{z^2} & \frac{1}{z} \end{vmatrix}$

$Y_F(z) = \left(\frac{3}{z^3} + \frac{6}{z^2} + \frac{2}{z}\right) \frac{z}{z-1}$

- $A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$

$\mathcal{C} = \begin{vmatrix} B & AB & A^2B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \quad rk(\mathcal{C}) = 2 < 3 \quad c_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad c_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{vmatrix} \quad c_3 \begin{cases} \langle c_1, c_3 \rangle = 0 \\ \langle c_2, c_3 \rangle = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a + b = 0 \\ 3c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -b \in \mathbb{R} \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow c_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow T =$

$\rightarrow T = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} \qquad \hat{A} = T \cdot A \cdot T^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$\hat{A}_c \quad \hat{A}_1 \quad \hat{A}_{nc}$

- $A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix} \qquad B^T = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad C^T = |1\ 1\ 0| \quad \mathcal{O} = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{vmatrix}$

IL DUALE È CONTROLLABILE ~~OSSERVABILE~~ SE $\mathcal{C}_1 = \mathcal{O}_2^T$ E OSSERVABILE $\mathcal{O}_1 = \mathcal{C}_2^T$ $\quad A^T = \begin{vmatrix} 0 & \gamma & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \mathcal{C} = |B\ AB\ A^2B|$

$\mathcal{C}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \gamma & 3 \\ 0 & 3 & \gamma \end{vmatrix} \quad \mathcal{O}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \gamma+2 & 1 & 1 \\ \gamma+2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \mathcal{C}_2 = \begin{vmatrix} 1 & \gamma+2 & \gamma+2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \mathcal{O}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \gamma & 3 \\ 0 & 3 & \gamma \end{vmatrix}$

- CONTROLLABILE ~~PER NESSUN $\gamma \in \mathbb{R}$~~ $\forall \gamma \in \mathbb{R}$
- OSSERVABILE ~~PER NESSUN $\gamma \in \mathbb{R}$~~ $\forall \gamma \in \mathbb{R}$

Scansionato con CamScanner

ESAME DEL 19/04/2021

① ~~SIA~~ SIA DATA LA RAPPRESENTAZIONE IN VARIABILI DI STATO DI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2\alpha x_1(t) + 4x_3(t) + (\alpha+1)u(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) - 2x_2(t) + 2x_3(t) - \alpha u(t) \\ \dot{x}_3(t) = -2x_1(t) \\ y(t) = 2x_2(t) \end{cases}$$

IN CUI $\alpha \in \mathbb{R}$ È UN PARAMETRO REALE DEL SISTEMA

- DETERMINARE I VALORI DEL PARAMETRO $\alpha \in \mathbb{R}$ PER CUI IL SISTEMA È ASINTOTICAMENTE STABILE
- DETERMINARE I VALORI DEL PARAMETRO $\alpha \in \mathbb{R}$ PER CUI IL SISTEMA È COMPLETAMENTE CONTROLLABILE
- DETERMINARE I VALORI DEL PARAMETRO $\alpha \in \mathbb{R}$ PER CUI IL SISTEMA È COMPLETAMENTE OSSERVABILE
- POSTO $\alpha = -1$, DETERMINARE IL MOVIMENTO LIBERO E FORZATO DELL'USCITA ASSOCIATI A $x(0) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ E $u(t) = 1$ PER $t \geq 0$

② SIA DATA LA RAPPRESENTAZIONE IN VARIABILI DI STATO DI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2\alpha \end{vmatrix} x(k) + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \end{vmatrix} x(k) \end{cases}$$

- STUDIARE LA STABILITÀ, LA CONTROLLABILITÀ E L'OSSERVABILITÀ DEL SISTEMA AL VARIARE DI $\alpha \in \mathbb{R}$
- POSTO $\alpha = -3$, DETERMINARE LA ~~DE~~ DECOMPOSIZIONE CANONICA OSSERVABILE DI KALMAN DEL SISTEMA, METTENDO IN EVIDENZA GLI EVENTUALI MODI OSSERVABILI E NON OSSERVABILI
- POSTO $\alpha = 1$, E DATO $x(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$, DETERMINARE LA RISPOSTA LIBERA NELLO STATO E NELL'USCITA

①

$$A = \begin{vmatrix} 2\alpha & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} \alpha+1 \\ -\alpha \\ 0 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$$

- $$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{vmatrix} -2\alpha+\lambda & 0 & -4 \\ -2 & \lambda+2 & -2 \\ 2 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda^2 - 2\alpha\lambda + 8)$$

$\lambda_1 = -2, \ \nu_1 = 1$ ✓

$\lambda^2 - 2\alpha\lambda + 8$ ~~CRITERIO DI JURY $P(\lambda=1) > 0 \Rightarrow \alpha < \frac{9}{2}$~~ $\qquad \lambda_{1,2} = \dfrac{2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 32}}{2}$

$\mathrm{Re}[\lambda_{1,2}] < 0 \Longrightarrow$ SISTEMA ASINTOTICAMENTE STABILE PER $\alpha < 0$

- $$\mathcal{C} = \begin{vmatrix} B & AB & A^2B \end{vmatrix} \quad AB = \begin{vmatrix} 2\alpha & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha+1 \\ -\alpha \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\alpha^2+2\alpha \\ 4\alpha+2 \\ -2\alpha-2 \end{vmatrix} \quad A^2B = \begin{vmatrix} 2\alpha & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2\alpha^2+2\alpha \\ 4\alpha+2 \\ -2\alpha-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4\alpha^3-4\alpha-8 \\ 4\alpha^3-4\alpha-8 \\ -4\alpha^2-4\alpha \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{C} = \begin{vmatrix} \alpha+1 & 2\alpha^2+2\alpha & 4\alpha^3-4\alpha-8 \\ -\alpha & 4\alpha+2 & 4\alpha^3-4\alpha-8 \\ 0 & -2\alpha-2 & -4\alpha^2-4\alpha \end{vmatrix}$$

$4\alpha^4 - 2\alpha^2 - 12\alpha + 4\alpha^3 - 8$

$\det \mathcal{C} = (2\alpha+2)(\ldots) - (4\alpha^2+4\alpha)(2\alpha^3+6\alpha^2+\ldots)$

$6\alpha^5 - 4\alpha^3 - 29\alpha^2 + 12\alpha^4 - 16\alpha + 8\alpha^4 - 4\alpha^2 - 24\alpha + 12\alpha^3 - 16 - 8\alpha^5 - 24\alpha^4 - 20\alpha^3 - 8\alpha^2 - 8\alpha^4 - 24\alpha^3 - 24 - 8\alpha$

$\det(\mathcal{C}) = -2\alpha^5 - 12\alpha^4 - 36\alpha^3 - 56\alpha^2 - 48\alpha - 16$

- $$\mathcal{O} = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{vmatrix} \quad \mathcal{O} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 4 \\ 8\alpha-16 & 8 & 8 \end{vmatrix}$$

$\det(\mathcal{O}) = 2(32 - 32\alpha - 64) \neq 0 \quad -32\alpha - 32 \neq 0 \quad \alpha \neq 1$

Scansionato con CamScanner

- $Y_L(s) = C \cdot (sI-A)^{-1} \cdot X(0)$ $\qquad Y_F(s) = C \cdot (sI-A)^{-1} \cdot B + D$

$A = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix} \quad X(0) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ $u(t)=1$

$(sI-A) = \begin{vmatrix} 2+s & 0 & -4 \\ -2 & 2+s & -2 \\ 2 & 0 & s \end{vmatrix} \longrightarrow (sI-A)^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{s}{s^2+2s+8} & 0 & \frac{-4}{s^2+2s+8} \\ \frac{2(s-2)}{(s+2)(s^2+2s+8)} & \frac{1}{s+2} & \frac{2(s+6)}{(s+2)(s^2+2s+8)} \\ \frac{-2}{s^2+2s+8} & 0 & \frac{s+2}{s^2+2s+8} \end{vmatrix}$

$Y_L(s) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \cdot (sI-A)^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{2}{s+2} \Longrightarrow Y_L(t) = 2 \cdot e^{-2t}$

$Y_F(s) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \cdot (sI-A)^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{2}{s+2} \Longrightarrow Y_F(t) = 2e^{-2t}$

② $A = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2\alpha \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & -1 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$

- STABILITÀ $P(z) = \det \begin{vmatrix} z+2 & 2 \\ -2 & z-2\alpha \end{vmatrix} = z^2 - 2\alpha z + 2z - 4\alpha + 4 = z^2 + (-2\alpha+2)z + (-4\alpha+4)$

CRITERIO DI JURY $\quad P(z=1) > 0 \quad 5-6\alpha > 0 \quad \alpha < \frac{5}{6}$
$P(z=-1)\cdot(-1)^2 > 0 \quad -2\alpha+3>0 \quad \alpha < \frac{3}{2}$
$a_n > a_0 \quad 1 > -4\alpha+4 \quad \alpha > \frac{4}{3}$
} STABILITÀ PER NESSUN $\alpha \in \mathbb{R}$

CONTROLLABILITÀ $\mathcal{C} = \begin{vmatrix} B & AB & \cancel{A^2B} \end{vmatrix} \quad \mathcal{C} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2\alpha \end{vmatrix} \quad \det \mathcal{C} = 2 \neq 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$ CONTROLLABILE PER $\alpha \in \mathbb{R}$

$\mathcal{C} = \begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix}$

OSSERVABILITÀ $\mathcal{O} = \begin{vmatrix} C \\ CA \end{vmatrix} \quad \mathcal{O} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & -2-2\alpha \end{vmatrix} \quad \det \mathcal{O} = -6-2\alpha \rightarrow$ OSSERVABILITÀ PER $\alpha \neq -3$

- $\alpha = -3 \rightarrow A = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & -1 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$

$\mathcal{O} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} \quad t_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} \quad t_2 = \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} \rightarrow \langle t_1, t_2 \rangle = 0 \rightarrow a = b$

$T^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \longrightarrow T = \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} \quad \hat{A} = T \cdot A \cdot T^{-1} = \left|\begin{array}{c:c} -4 & 0 \\ \hdashline 4 & -4 \end{array}\right|$ $\quad (\hat{A}_o, 0, \hat{A}_1, \hat{A}_{no})$

$P(\hat{A}_o) = z = -4, \ Y_1 = 1 \rightarrow C(t) = e^{-4t}$

$P(\hat{A}_{no}) = z = -4, \ Y_1 = 1 \rightarrow C(t) = e^{-4t}$

- $\alpha = 1 \rightarrow A = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & -1 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix} \quad X(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$

$X_L(z) = z \cdot (zI-A)^{-1} \cdot X(0) \qquad X_L(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X_L(z)] \qquad Y_L(k) = C \cdot X_L(k)$

$(zI-A) = \begin{vmatrix} z+2 & 2 \\ -2 & z-2 \end{vmatrix} \longrightarrow (zI-A)^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{z-2}{z^2} & -\frac{2}{z^2} \\ \frac{2}{z^2} & \frac{z+2}{z^2} \end{vmatrix} \longrightarrow X_L(z) = \begin{vmatrix} \frac{-2}{z} \\ \frac{z+2}{z} \end{vmatrix}$

$Y_L(z) = -\frac{4}{z} - 1$

Scansionato con CamScanner

ESAME DEL 11/06/2021

① Sia data la rappresentazione in variabili di stato di un sistema lineare e stazionario

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t) + \alpha x_3(t) - \alpha u(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_2(t) - x_3(t) \\ y(t) = x_3(t) \end{cases}$$

- Posto $\alpha = 0$ e noto $x(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$, calcolare la risposta libera nello stato e nell'uscita
- Posto $\alpha = 0$ determinare, se possibile, l'ingresso che porta il sistema dallo stato iniziale $x(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ allo stato finale $x(5) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{vmatrix}$
- Posto $\alpha = 2$ e condizioni iniziali nulle, determinare il modello ingresso-uscita del sistema ②

② Sia data la rappresentazione in variabili di stato di un sistema lineare e stazionario

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -x_2(k) + x_3(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) + 2x_3(k) \\ x_3(k+1) = -2x_1(k) + x_2(k) \\ y(k) = 2x_1(k) - x_2(k) \end{cases}$$

- Studiare la stabilità, la controllabilità e l'osservabilità del sistema
- Dato lo stato iniziale $x(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$, determinare la risposta libera nello stato e nell'uscita in funzione del tempo
- Stabilire se è possibile determinare una opportuna legge in retroazione $u(k) = -K \cdot x(k)$ tale per cui gli autovalori del sistema a ciclo chiuso siano assegnabili ad arbitrio. Nel caso in cui questo sia possibile, si determini la matrice K tale per cui gli autovalori del sistema a ciclo chiuso siano pari a $\lambda_{1des} = 0$, $\lambda_{2des} = 0$, $\lambda_{3des} = -1$

①

- $\alpha = 0$ $\quad A = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ $\quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad C = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$ $\quad x(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$

$X_L(s) = (sI - A)^{-1} \cdot x(0) \qquad x_L(t) = \mathcal{L}^{-1}[X_L(s)] \qquad y_L(t) = C \cdot x_L(t)$

$$sI - A = \begin{vmatrix} s+2 & 1 & 0 \\ -1 & s+1 & 0 \\ 0 & -1 & s+1 \end{vmatrix} \Rightarrow (sI-A)^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{s+1}{s^2+3s+3} & -\frac{1}{s^2+3s+3} & 0 \\ \frac{1}{s^2+3s+3} & \frac{s+2}{s^2+3s+3} & 0 \\ \frac{1}{(s+1)(s^2+3s+3)} & \frac{s+2}{(s+1)(s^2+3s+3)} & \frac{1}{s+1} \end{vmatrix}$$

$$X_L(s) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{s+1} \end{vmatrix} \Rightarrow x_L(t) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-t} \end{vmatrix} \Rightarrow y_L(t) = e^{-t}$$

- $\mathcal{C} = \begin{vmatrix} B & AB & A^2B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ $\qquad x(0) \in \text{span}(\mathcal{C});\ x(5) \notin \text{span}(\mathcal{C})$

$$\Rightarrow \nexists\, a \in \mathbb{R} \mid a \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{vmatrix}$$

Scansionato con CamScanner

- $W(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D$

$A = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$

$sI - A = \begin{vmatrix} s+2 & s+1 & 0 \\ -1 & s+1 & -2 \\ 0 & -1 & s+1 \end{vmatrix} \Rightarrow (sI-A)^{-1} = \begin{vmatrix} +\frac{s-1}{s(s+2)} & +\frac{(s+1)^2}{s(s+2)(s+3)} & -\frac{2(s+1)}{s(s+2)(s+3)} \\ +\frac{s+1}{s(s+2)(s+3)} & +\frac{s+1}{s(s+3)} & +\frac{2}{s(s+3)} \\ +\frac{1}{s(s+2)(s+3)} & +\frac{2}{s(s+3)} & +\frac{s+1}{s(s+1)} \end{vmatrix}$

$W(s) = \frac{\bar{4}4}{s^2+3s} \longrightarrow y''(t) + 3y'(t) = \bar{4}4\, u(t)$

② $A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$

- STABILITÀ $P(z) = \det(zI - A) = \det \begin{vmatrix} z & 1 & -3 \\ -1 & z & -2 \\ 0 & 0 & z+2 \end{vmatrix} = (z+2)(z^2+1)$

$z_1 = -2 < 0,\ \mu_1 = 1$

$Re[z_2, z_3] = 0 \,/\, \mu_2, \mu_3 = 1$

$Im[z_2, z_3] = \pm 1 \Rightarrow |z| = 1$

SISTEMA SEMPLICEMENTE STABILE

CONTROLLABILITÀ $\mathcal{C} = \begin{vmatrix} B & AB & A^2B \end{vmatrix} \quad \mathcal{C} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -8 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} \quad \det(\mathcal{C}) = 19$ SISTEMA COMPLETAMENTE CONTROLLABILE

OSSERVABILITÀ $\mathcal{O} = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{vmatrix} \quad \mathcal{O} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -25 \end{vmatrix} \quad \det(\mathcal{O}) = 2(-30-1) + (15+8) = -45$

SISTEMA COMPLETAMENTE OSSERVABILE

- $X_L(z) = z \cdot (zI - A)^{-1} \cdot x(0) \longrightarrow x_L(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X_L(z)] \longrightarrow y_L(k) = C \cdot x_L(k)$

$(zI - A) = \begin{vmatrix} z & 1 & -3 \\ -1 & z & -2 \\ 0 & 0 & z+2 \end{vmatrix} \longrightarrow (zI-A)^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{z}{z^2+1} & \frac{-1}{z^2+1} & \frac{3z-2}{(z+2)(z^2+1)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{z}{z^2+1} & +\frac{1}{z^2+1} & -\frac{z-2}{(z+2)(z^2+1)} \\ -\frac{z}{z^2+1} & -\frac{z}{z^2+1} & \frac{2z+3}{(z+2)(z^2+1)} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{z+2} \end{vmatrix}$

$X_L(z) = \begin{vmatrix} +\frac{z^2}{z^2+1} \\ -\frac{z^2}{z^2+1} \\ 0 \end{vmatrix} \qquad Y_L(z) = \frac{+z^2+2z}{z^2+1}$

- IL SISTEMA È CONTROLLABILE $\Rightarrow$ È POSSIBILE DEFINIRE K

$P(z) = (z+2)(z^2+1) \qquad z \neq z_{DES}$

$P(z) = z^3 + 2z^2 + z + 1 \qquad \alpha_0 = 1 \quad \alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 2$

$q(z) = (z - z_{1DES})(z - z_{2DES})(z - z_{3DES})$

$q(z) = z^3 + z^2 \qquad \beta_0 = 0 \quad \beta_1 = 0 \quad \beta_2 = 1$

$T^{-1} = \mathcal{C} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow T = \begin{vmatrix} -\frac{2}{13} & +\frac{3}{13} & +\frac{2}{13} \\ +\frac{3}{13} & +\frac{2}{13} & -\frac{3}{13} \\ 0 & 0 & +\frac{13}{13} \end{vmatrix}$

$K = \left[(\beta_0 - \alpha_0) \quad (\beta_1 - \alpha_1) \quad (\beta_2 - \alpha_2) \right] \cdot T \Rightarrow \begin{vmatrix} -\frac{1}{13} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{5} \end{vmatrix}$

Scansionato con CamScanner

ESAME DEL 22/07/2021

① SIA DATA LA RAPPRESENTAZIONE INGRESSO-USCITA DI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$y'''(t) + 11y''(t) + 40y'(t) + 48y(t) = 2u(t)$

- DETERMINARE ~~L'EVOLUZIONE LIBERA~~ I MODI DEL SISTEMA E QUALI DI ESSI DIVERGONO
- DETERMINARE L'EVOLUZIONE LIBERA DEL SISTEMA A PARTIRE DALL'ISTANTE $t_0=0$ DATE LE CONDIZIONI INIZIALI $y(t_0)=2$, $y'(t_0)=-1$, $y''(t_0)=-1$
- DETERMINARE LA RISPOSTA IMPULSIVA DEL SISTEMA
- DETERMINARE LA RISPOSTA FORZATA DEL SISTEMA CONSEGUENTE ALL'AZIONE DI UN INGRESSO $u(t)=\delta_{-1}(t)$ PER $t \geq 0$
- DETERMINARE LE MATRICI (A, B, C, D)

② SIA DATA LA RAPPRESENTAZIONE IN VARIABILI DI STATO DI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 3x_1(k) + \alpha x_2(k) + 6u(k) \\ x_2(k+1) = (\alpha+3)x_2(k) + 10u(k) \\ y(k) = (\alpha+4)x_1(k) + (\alpha-4)x_2(k) + 14u(k) \end{cases}$$

- DETERMINARE IL VALORE DI $\alpha \in \mathbb{R}$ AFFINCHÉ IL SISTEMA SIA COMPLETAMENTE CONTROLLABILE E OSSERVABILE
- DETERMINARE PER QUALI VALORI DI $\alpha \in \mathbb{R}$ IL SISTEMA RISULTA SEMPLICEMENTE STABILE E PER QUALI RISULTA ASINTOTICAMENTE STABILE
- PER $\alpha = 0$, DETERMINARE IL VALORE DELLA RISPOSTA NELL'USCITA SUPPONENDO $x(0) = \begin{vmatrix} 4 \\ -4 \end{vmatrix}$ ED INGRESSO $u(k) = 2$ PER ...

①

- $P(\lambda) = \lambda^3 + 11\lambda^2 + 40\lambda + 48 = (\lambda+4)^2(\lambda+3)$

$\lambda_1 = -4,\ \mu_1 = 2 \rightarrow c_1(t) = A_{1,1}e^{-4t} + A_{1,2}te^{-4t}$

$\lambda_2 = -3,\ \mu_2 = 1 \rightarrow c_2(t) = A_2 e^{-3t}$

ENTRAMBI I MODI CONVERGONO

- $y_L(t) = c(t)\Big|_{y(0)=2,\ y'(0)=-1,\ y''(0)=-1}$

$c(t) = A_{1,1}e^{-4t} + A_{1,2}te^{-4t} + A_2 e^{-3t}$

$c'(t) = -4A_{1,1}e^{-4t} + A_{1,2}e^{-4t} - 4A_{1,2}te^{-4t} - 3A_2e^{-3t}$

$c''(t) = 16A_{1,1}e^{-4t} - 8A_{1,2}e^{-4t} + 16A_{1,2}te^{-4t} + 9A_2e^{-3t}$

$$\begin{cases} A_{1,1} + A_2 = 2 \\ -4A_{1,1} + A_{1,2} - 3A_2 = -1 \\ 16A_{1,1} - 8A_{1,2} + 9A_2 = -1 \end{cases} \quad \det A = \det\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & -3 \\ 16 & -8 & 9 \end{vmatrix} = 1$$

$A_{1,1} = \det(A|A_{1,1}) = -21$

$A_{1,2} = \det(A|A_{1,2}) = -16$

$A_2 = \det(A|A_2) = 23$

$\Longrightarrow y_L(t) = -21e^{-4t} - 16te^{-4t} + 23e^{-3t}$

- $y_\delta(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ c(t)\cdot\delta_{-1}(t) + A_0\,\delta(t) & t \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} A_0 \\ c(0) \\ c'(0) \\ c''(0) \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 48 & 12 & 11 & 16 \\ 40 & 7 & 1 & 8 \\ 11 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} A_0 \\ A_{1,1} \\ A_{1,2} \\ A_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 48A_0 + 12A_{1,1} + 11A_{1,2} + 16A_2 = 2 \\ 40A_0 + 7A_{1,1} + A_{1,2} + 8A_2 = 0 \\ 11A_0 + A_{1,1} + A_2 = 0 \\ A_0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 12A_{1,1} + 11A_{1,2} + 16A_2 = 2 \\ 7A_{1,1} + A_{1,2} + 8A_2 = 0 \\ A_{1,1} + A_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -7A_2 = 2 \\ A_{1,2} = -A_2 \\ A_{1,1} = -A_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_{1,1} = -\frac{2}{7} \\ A_{1,2} = \frac{2}{7} \\ A_2 = \frac{2}{7} \end{cases}$$

$\rightarrow y_\delta(t) = \left(-\frac{2}{7}e^{-4t} + \frac{2}{7}te^{-4t} + \frac{2}{7}e^{-3t}\right)\delta_{-1}(t)$

Scansionato con CamScanner

- $Y_F(t) = \int_0^t U(\tau)\cdot Y_\delta(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t \left(-\frac{2}{7} e^{-4(t-\tau)} + \frac{2}{7}\tau e^{-4(t-\tau)} + \frac{2}{7} e^{-3(t-\tau)}\, d\tau\right) =$

  $= \frac{2}{28} e^{-4t} - \frac{1}{14} t e^{-4t} + \frac{1}{56} e^{-4t} - \frac{2}{21} e^{-3t} + \frac{29}{336}$

- $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -18 & -40 & -11 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} \text{[illegible]} \\ 0 \\ \text{[illegible]} \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$

(2)

$A = \begin{vmatrix} 3 & \alpha \\ 0 & \alpha+3 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 6 \\ 10 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} \alpha+4 & \alpha-4 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 14 \end{vmatrix}$

- $\mathcal{C} = \begin{vmatrix} B & AB \end{vmatrix} \quad \mathcal{C} = \begin{vmatrix} 6 & 10\alpha+18 \\ 10 & 10\alpha+30 \end{vmatrix} \quad \mathcal{O} = \begin{vmatrix} C \\ CA \end{vmatrix} \quad \mathcal{O} = \begin{vmatrix} \alpha+4 & \alpha-4 \\ 3\alpha+12 & 2\alpha^2+3\alpha-12 \end{vmatrix}$

$\det\mathcal{C} = -40\alpha - \dots \neq 0 \rightarrow \alpha \neq 0$; $\quad \det(\mathcal{O}) = 2\alpha^3 + 8\alpha^2 \neq 0 \quad \alpha \neq 0;\ \alpha \neq -4$

- $P(z) = \det(zI - A) = \det\begin{vmatrix} z-3 & -\alpha \\ 0 & z-\alpha-3 \end{vmatrix} = z^2 + (-6-\alpha)z + (3\alpha+9)$

CRITERIO DI JURY

- $P(z=1) > 0 \rightarrow 2\alpha+4 > 0 \qquad \alpha > -2$
- $P(z=-1)\cdot(-1)^2 > 0 \rightarrow 4\alpha+16 > 0 \qquad \alpha > -4$
- $1 > 3\alpha+9 \longrightarrow \qquad \alpha < 8/3$

ASINTOTICAMENTE STABILE PER $-2 < \alpha < 8/3$

SEMPLICEMENTE STABILE: $z=1, t=1 \rightarrow \alpha = -2$

- $\alpha = 0 \rightarrow A = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 6 \\ 10 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 4 & -4 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 14 \end{vmatrix} \quad U(z) = \frac{2z}{z-1}$

$Y_{TOT}(k) = Y_L(k) + Y_F(k)$

$X_L(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[Cz\cdot(zI-A)^{-1}\cdot X(0)\right] \qquad X_F(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[C\cdot(zI-A)^{-1}\cdot B\cdot U(z) + D\cdot U(z)\right]$

$zI - A = \begin{vmatrix} z-3 & 0 \\ 0 & z-3 \end{vmatrix} \rightarrow (zI-A)^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{z-3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-3} \end{vmatrix}$

$Y_L(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[z\cdot C\cdot\begin{vmatrix} \frac{1}{z-3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-3} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 4 \\ -4 \end{vmatrix}\right] = \mathcal{Z}^{-1}\left[32\frac{z}{z-3}\right] = 32(+3)^k$

$Y_F(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[C\cdot\begin{vmatrix} \frac{1}{z-3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-3} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 4 \\ 10 \end{vmatrix}\cdot\frac{2z}{z-1} + 14\cdot 2\frac{z}{z-1}\right] = \mathcal{Z}^{-1}\left[-32\frac{z^2}{(z-3)(z-1)} + 28\frac{z}{z-1}\right] = \frac{3}{2}\cdot(3)^k + 28\,\varepsilon(k)$

$27,5$

$\frac{z^2}{(z-3)(z-1)} = z\cdot\left(\frac{A}{z-3} + \frac{B}{z-1}\right) \qquad A = 3/2 \quad B = -1/2$

$X_{TOT}(k) = 33,5\cdot(3)^k + 27,5\,\varepsilon(k)$

Scansionato con CamScanner

ESAME DEL 17/09/2021

① SIA DATA LA RAPPRESENTAZIONE IN VARIABILI DI STATO DI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \frac{1}{3}\alpha x_1(t) + \frac{1}{3}\alpha x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{2}{3}\alpha x_1(t) + \frac{2}{3}\alpha x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t) + x_2(t) + \frac{1}{3}\alpha x_3(t) \\ y(t) = x_2(t) - \frac{1}{3}\alpha x_3(t) \end{cases}$$

- STUDIARE LA STABILITÀ, LA CONTROLLABILITÀ E L'OSSERVABILITÀ DEL SISTEMA AL VARIARE DI $\alpha \in \mathbb{R}$
- POSTO $\alpha = -3$ E $x(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ \gamma \\ 0 \end{vmatrix}$ CON $\gamma \in \{0, 1\}$, CALCOLARE LA RISPOSTA LIBERA NELLO STATO E NELL'USCITA
- POSTO $\alpha = -3$, SI STABILISCA SE È POSSIBILE DETERMINARE UNA OPPORTUNA LEGGE IN RETROAZIONE $u(t) = -K\,x(t)$ TALE PER CUI GLI AUTOVALORI DEL SISTEMA A CICLO CHIUSO SIANO ASSEGNABILI AD ARBITRIO. NEL CASO IN CUI QUESTO SIA POSSIBILE, SI DETERMINI LA MATRICE K TALE PER CUI GLI AUTOVALORI DEL SISTEMA A CICLO CHIUSO SIANO PARI A $\lambda_{1DES} = 0, \lambda_{2DES} = -1, \lambda_{3DES} = -3$

② SIA DATA LA RAPPRESENTAZIONE IN VARIABILI DI STATO DI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 2x_2(k) + x_3(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = 3x_3(k) + u(k) \\ x_3(k+1) = 0 \\ y(k) = x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) \end{cases}$$

- DETERMINARE LA RISPOSTA FORZATA IN USCITA DEL SISTEMA SOLLECITATO DA UN INGRESSO A GRADINO UNITARIO
- SCOMPORRE IL SISTEMA NELLA FORMA CANONICA CONTROLLABILE DI KALMAN
- ~~SCOMPORRE IL~~ DETERMINARE PER QUALI VALORI DI $\beta \in \mathbb{R}$ IL SISTEMA DUALE RISULTA CONTROLLABILE B/O ~~STABILE~~ OSSERVABILE, SOSTITUENDO $x_3(k+1) = (\beta+1)\cdot x_3(k)$

①

$$A = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}\alpha & \frac{1}{3}\alpha & 0 \\ \frac{2}{3}\alpha & \frac{2}{3}\alpha & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{3}\alpha \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{3}\alpha \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$$

- STABILITÀ: $P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{3}\alpha & -\frac{1}{3}\alpha & 0 \\ -\frac{2}{3}\alpha & \lambda - \frac{2}{3}\alpha & 0 \\ -1 & -1 & \lambda - \frac{1}{3}\alpha \end{vmatrix} = (\lambda - \frac{1}{3}\alpha)\left(\lambda^2 - \frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{9}\alpha - \frac{2}{9}\alpha\right)$

$P(\lambda) = (\lambda - \frac{1}{3}\alpha)(\lambda^2 - \alpha\lambda) = \lambda(\lambda - \frac{1}{3}\alpha)(\lambda - \alpha)$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0, \ \gamma_1 = 1 \ ✓ \\ \lambda_2 = \frac{1}{3}\alpha, \ \gamma_2 = 1 \\ \lambda_3 = 2\alpha \ \ \gamma_3 = 1 \end{cases}$$

SISTEMA: SEMPLICEMENTE STABILE PER $\alpha \leq 0$ / INSTABILE PER $\alpha > 0$

COMMUTABILITÀ: $\mathcal{C} = \begin{vmatrix} B & AB & A^2B \end{vmatrix}$ $\quad \mathcal{C} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3}\alpha & \frac{1}{3}\alpha^2 \\ 0 & \frac{2}{3}\alpha & \frac{4}{9}\alpha^2 \\ 0 & 1 & \alpha + \frac{1}{3}\alpha \end{vmatrix}$ $\quad \det(\mathcal{C}) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9}\alpha^2$ SISTEMA COMPLETAMENTE CONTROLLABILE $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

OSSERVABILITÀ: $\mathcal{O} = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{vmatrix}$ $\quad \mathcal{O} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{3}\alpha \\ \frac{1}{3}\alpha & \frac{1}{3}\alpha & -\frac{1}{9}\alpha^2 \\ \frac{2}{3}\alpha^2 & \frac{2}{3}\alpha^2 & -\frac{1}{27}\alpha^2 \end{vmatrix}$ $\quad \det(\mathcal{O}) = -\left(-\frac{1}{81}\alpha^4 + \frac{1}{81}\alpha^4\right) - \frac{1}{3}\alpha\left(\frac{2}{9}\alpha^3 - \ldots\right)$

$\Rightarrow$ SISTEMA NON COMPLETAMENTE OSSERVABILE $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha = -3 \Rightarrow A = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$

- $X(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ \gamma \\ 0 \end{vmatrix}, \ \gamma \in \{0, 1\} \qquad X_L(s) = (sI - A)^{-1} \cdot X(0) \rightarrow X_L(t) = \mathcal{L}^{-1}[X_L(s)]$

$\rightarrow Y_L(t) = C \cdot X_L(t)$

$sI - A = \begin{vmatrix} s+1 & 1 & 0 \\ 2 & s+2 & 0 \\ -1 & -1 & s+1 \end{vmatrix} \rightarrow (sI - A)^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{s+2}{s(s+3)} & -\frac{1}{s(s+3)} & 0 \\ \frac{-2}{s(s+3)} & \frac{s+1}{s(s+3)} & 0 \\ \frac{1}{(s+1)(s+3)} & \frac{1}{(s+1)(s+3)} & \frac{1}{s+1} \end{vmatrix}$

$X_L(s) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{s(s+3)}\gamma \\ \frac{s+1}{s(s+3)}\gamma \\ \frac{1}{(s+1)(s+3)}\gamma \end{vmatrix} \qquad \gamma = 0 \Rightarrow X_L(t) = 0 \Rightarrow Y_L(t) = 0$

$\begin{cases} (A+B) = 0 \\ 3A = -1 \end{cases}$

$\gamma = 1 \Rightarrow X_L(s) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{s(s+3)} \\ \frac{s+1}{s(s+3)} \\ \frac{1}{(s+1)(s+3)} \end{vmatrix} \qquad -\frac{1}{s(s+3)} = \frac{(A+B)s + 3A}{s(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3} = -\frac{1}{3s} + \frac{1}{3(s+3)}$

ANALOGAMENTE

$\frac{s+1}{s(s+3)} = \frac{1}{3s} + \frac{2}{3(s+3)} \qquad \frac{1}{(s+1)(s+3)} = \frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{2(s+3)}$

$\Rightarrow X_L(t) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3}\varepsilon(t) + \frac{1}{3}e^{-3t} \\ \frac{1}{3}\varepsilon(t) + \frac{2}{3}e^{-3t} \\ \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \end{vmatrix} \Rightarrow Y_L(t) = -\frac{1}{3}\varepsilon(t) + \frac{1}{3}e^{-3t}$

- GIÀ VERIFICATA LA CONTROLLABILITÀ $\Rightarrow$ SI PUÒ DEFINIRE T^{-1}, DA CUI $K = [(\beta_0 - \alpha_0)\ (\beta_1 - \alpha_1)\ (\beta_2 - \alpha_2)] \cdot T$

$P(z) = z(z+1)(z+3) \quad \begin{matrix} z_1 = 0 \\ z_2 = -1 \\ z_3 = -3 \end{matrix} \Big\} \neq z_{DES}$

② $A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$

- $Y_F(z) = C \cdot (zI - A)^{-1} \cdot B \cdot U(z) \qquad U(k) = \varepsilon(k) \Rightarrow U(z) = \frac{z}{z-1}$

$zI - A = \begin{vmatrix} z & -2 & -1 \\ 0 & z & -3 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} \qquad \det(zI - A) = z^3 \Rightarrow (zI - A)^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{z} & \frac{2}{z^2} & \frac{6+z}{z^3} \\ 0 & 1/z & 3/z^2 \\ 0 & 0 & 1/z \end{vmatrix}$

$Y_F(z) = z\left(\frac{2}{z} + \frac{2}{z^2}\right)\frac{z}{z-1} = \frac{2z}{(z-1)} + \frac{2z}{z(z-1)} = \ldots \frac{2z}{z-1} - 2 + \frac{2z}{z-1}$

$= \frac{4z}{z-1} - 2 \Rightarrow Y_F(k) = 4\varepsilon(k) - \delta(k)$

- $\mathcal{C} = \begin{vmatrix} B & AB & A^2B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \det(\mathcal{C}) = 0 \quad C_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad C_2 = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad C_3 = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}, \ \begin{cases} \langle C_1, C_3 \rangle = 0 \\ \langle C_2, C_3 \rangle = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases} \quad (c \in \mathbb{R})$

Scansionato con CamScanner

$$T^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Longrightarrow T = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \hat{A}_2 & \hat{A}_1 \end{array} \\ \hat{A} = T \cdot A \cdot T^{-1} = & \left|\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \\ & \begin{array}{cc} 0 & \hat{A}_{NC} \end{array} \end{array}$$

- $A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \beta+1 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$

IL DUALE È CONTROLLABILE SE $C_1 = O_2^T$, OSSERVABILE SE $O_1 = C_2^T$

$$C_1 = \begin{vmatrix} B & AB & A^2B \end{vmatrix} \qquad O_1 = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{vmatrix} \qquad C_2 = \begin{vmatrix} C^T & A^TC^T & (A^T)^2C^T \end{vmatrix} \qquad O_2 = \begin{vmatrix} B^T \\ B^TA^T \\ B^T(A^T)^2 \end{vmatrix}$$

$$C_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad O_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5+\beta \\ 0 & 0 & \beta^2+6\beta+11 \end{vmatrix} \qquad C_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5+\beta & \beta^2+6\beta+11 \end{vmatrix} \qquad O_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

IL DUALE È CONTROLLABILE $\forall \beta \in \mathbb{R}$

IL DUALE È OSSERVABILE $\forall \beta \in \mathbb{R}$

Scansionato con CamScanner