OMAR NAJA 09/06/2021 S1097765

ANALISI 2 (6 CFU)

1 4
2 6
3 6
4 6
5 6

28

ESERCIZIO 1

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-y^3x}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

STUDIO DELLA CONTINUITÀ

È NECESSARIO CHE $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$

USIAMO LE COORDINATE POLARI

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}\qquad \theta\in[0,2\pi);\ \rho>0$$

$$\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho^3\cos^3\theta\cdot\rho\sin\theta-\rho^3\sin^3\theta\cdot\rho\cos\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho^4(\cos^3\theta\sin\theta-\sin^3\theta\cos\theta)}{\rho^2}=$$

$$=\lim_{\rho\to0^+}\rho^2(\cos^3\theta\sin\theta-\sin^3\theta\cos\theta)=0\cdot(\cos^3\theta\sin\theta-\sin^3\theta\cos\theta)=0$$

SI

LA FUNZIONE È CONTINUA

STUDIO DELLA DERIVABILITÀ

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^3\cdot0-0\cdot h}{h^2+0}-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{0\cdot h-h^3\cdot0}{0+h^2}-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=0$$

SI

LA FUNZIONE È DERIVABILE E $f_x(0,0)=0$; $f_y(0,0)=0$

STUDIO DELLA DIFFERENZIABILITÀ

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-f_x(0,0)\cdot h-f_y(0,0)\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\frac{h^3k-hk^3}{h^2+k^2}-0-0-0}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

USIAMO LA CONDIZIONE NECESSARIA PER L'ESISTENZA DEL LIMITE E VERIFICHIAMO L'ESISTENZA DEL LIMITE E, IN CASO AFFERMATIVO, LO DETERMINIAMO

$k=mh$

$$\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^4m-h^4m^3}{h^2+m^2h^2}}{\sqrt{h^2+m^2h^2}}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^4(m-m^3)}{h^2(1+m^2)}}{h\sqrt{1+m^2}}=\lim_{h\to0}\frac{h(m-m^3)}{(1+m^2)^{3/2}}=\frac{0}{(1+m^2)^{3/2}}=0$$

NO

LA FUNZIONE È DIFFERENZIABILE E IL DIFFERENZIALE È UGUALE A 0

ESERCIZIO 3

$f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy$

DETTO (x_p, y_p) UN PUNTO CRITICO, SE $\begin{cases} f_x(x_p,y_p) = f_y(x_p,y_p) = 0 \\ f_{xx}(x_p,y_p) \leq 0; f_{y}(x_p,y_p) \leq 0 \\ \det(H_f(x_p,y_p)) > 0 \end{cases}$

$(H_f(x_p,y_p))$ È LA MATRICE HESSIANA $\left(\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}\right)$ ALLORA SI HA UN PUNTO DI

MASSIMO RELATIVO. SE INVECE $\begin{cases} f_x(x_p,y_p) = f_y(x_p,y_p) = 0 \\ f_{xx}(x_p,y_p) \geq 0; f_{y}(x_p,y_p) > 0 \\ \det(H_f(x_p,y_p)) > 0 \end{cases}$ SI HA UN MINIMO RELATIVO

① $\rightarrow$ DETERMINARE I PUNTI CRITICI $\Rightarrow \underset{\text{GRADIENTE}}{\nabla f(x,y)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$

$f_x = 3x^2 - 6y$ $\quad\begin{cases} 3x^2 - 6y = 0 \\ 3y^2 - 6x = 0 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} x^2 - 2y = 0 \\ y^2 - 2x = 0 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ \frac{x^4}{4} - 2x = 0 \end{cases}$

$f_y = 3y^2 - 6x$

$\begin{cases} = \\ x^4 - 8x = 0 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} = \\ (x^3 - 8)x = 0 \end{cases}$ Ⓐ $x = 0 \rightarrow y = \frac{0}{2} = 0 \Rightarrow A(0,0)$ È UN PUNTO CRITICO

Ⓑ $x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow B(2,2)$ È UN PUNTO CRITICO

② $\Rightarrow$ VERIFICARE CHE $\det(H_f(x_A,y_A)) > 0$ E $\det(H_f(x_B,y_B)) > 0$

$f_{xx} = 6x \qquad f_{xy} = -6$

$f_{yx} = -6 \qquad f_{yy} = 6y$

Ⓐ $f_{xx} = 0;\ f_{xy} = f_{yx} = -6;\ f_{yy} = 0 \rightarrow \det\begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 0 - ((-6)(-6)) = -36 < 0$

$\Rightarrow \det(H_f(x_A,y_A)) < 0 \rightarrow$ Ⓐ NON È NÈ MASSIMO NÈ MINIMO

Ⓑ $f_{xx} = 12 \qquad f_{xy} = f_{yx} = -6 \qquad f_{yy} = 12 \rightarrow \det\begin{vmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 12 \end{vmatrix} = 154 - 36 = 118 > 0$

$\Rightarrow \det(H_f(x_B,y_B)) > 0$. INOLTRE $f_{xx}(2,2) > 0$ E $f_{yy}(2,2) > 0 \Rightarrow$ Ⓑ È UN PUNTO DI MINIMO RELATIVO. IN PARTICOLARE $f(2,2) = 2^3 + 2^3 - 6 \cdot 2 \cdot 2 = 8 + 8 - 24 = -8$

SI

ESERCIZIO 2

$$\iiint_E \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz \qquad E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le z\le 2x\}$$

SFRUTTIAMO LE TRASFORMAZIONI CILINDRICHE

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \quad , z\in\mathbb{R},\ \rho\ge 0,\ \theta\in[0,2\pi] \\ z=z \end{cases}$$

DETERMINANTE JACOBIANO

$$\sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow \sqrt{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}\cdot\rho = \sqrt{\rho^2}\cdot\rho=\rho^2$$

$$x^2+y^2\le z\le 2x \longrightarrow \boxed{\rho^2\le z\le 2\rho\cos\theta}$$

$$x^2+y^2\le 2x \longrightarrow \rho^2\le 2\rho\cos\theta \Longrightarrow \boxed{0\le\rho\le 2\cos\theta}$$

$$2x\ge 0 \longrightarrow 2\rho\cos\theta\ge 0 \Longrightarrow \cos\theta\ge 0 \Longrightarrow \boxed{-\pi\le\theta\le\pi}$$

$$\Longrightarrow E'=\{(\rho,\theta,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le\rho\le 2\cos\theta,\ -\pi\le\theta\le\pi,\ \rho^2\le z\le 2\rho\cos\theta\}$$

$$\to \iiint_{E'}\rho^2\,d\rho\,d\theta\,dz=\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\int_0^{2\cos\theta}d\rho\int_{\rho^2}^{2\rho\cos\theta}\rho^2\,dz=\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\left[z\right]_{\rho^2}^{2\rho\cos\theta}d\rho =$$

$$\left[z\right]_{\rho^2}^{2\rho\cos\theta}=2\rho\cos\theta-\rho^2 \quad =\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2(2\rho\cos\theta-\rho^2)\,d\rho=I_1+I_2$$

$$I_1=\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\int_0^{2\cos\theta}2\rho^3\cos\theta\,d\rho=\int_{-\pi}^{\pi}\cancel{2}\cos\theta\cdot\left[\frac{\rho^4}{\cancel{4}_2}\right]_0^{2\cos\theta}d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}16\cos^5\theta\,d\theta=$$

$$=4\int_{-\pi}^{\pi}\cos^5\theta\,d\theta=4\int_{-\pi}^{\pi}\cos^3\theta\,(\underbrace{1-\sin^2\theta}_{\cos^2\theta})\,d\theta=4\int_{-\pi}^{\pi}\cos^3\theta\,d\theta-4\int_{-\pi}^{\pi}\cos^3\theta\sin^2\theta\,d\theta=I_1'-I_2'$$

$$I_1'=4\int_{-\pi}^{\pi}\cos\theta\,(1-\sin^2\theta)\,d\theta=4\int_{-\pi}^{\pi}\cos\theta\,d\theta-4\int_{-\pi}^{\pi}\cos\theta\sin^2\theta\,d\theta=4\left(\left[\sin\theta\right]_{-\pi}^{\pi}-\left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$=4\left(1-(-1)-\frac{1}{3}-\left(-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)\right)=4\left(1+1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{16}{3}$$

$$I_2'=4\int_{-\pi}^{\pi}\cos^3\theta\sin^2\theta\,d\theta=4\int_{-\pi}^{\pi}\cos\theta\cdot(1-\sin^2\theta)\sin^2\theta=4\int_{-\pi}^{\pi}-\cos\theta\sin^4\theta\,d\theta+4\int_{-\pi}^{\pi}\cos\theta$$

$$\cdot\sin^2\theta\,d\theta=4\left(-\left[\frac{\sin^5\theta}{5}\right]_{-\pi}^{\pi}+\left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_{-\pi}^{\pi}\right)=4\left(-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=4\left(-\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\right)$$

$$=\frac{16}{15} \Longrightarrow I_1=I_1'-I_2'=\frac{16}{3}-\frac{16}{15}=\frac{\cancel{70}}{15}\ \frac{64}{15}$$

$$I_2=\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^4 d\rho = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta = \frac{32}{5}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^5\theta\, d\theta.$$ IL CALCOLO È ANALOGO

A PRIMA, CON LA DIFFERENZA CHE L'INTEGRALE NON VA MOLTIPLICATO PER 4 MA PER $\frac{32}{5}$

$$\Rightarrow I_2=\frac{32}{5}\left(\frac{4}{3}\right)-\frac{32}{5}\left(\frac{4}{15}\right)=\frac{32}{5}\left(\frac{4}{3}-\frac{4}{15}\right)=\frac{32}{5}\left(\frac{16}{15}\right)=\frac{32\cdot 16}{15\cdot 5}$$

$$I=\frac{64}{15}-\frac{2^9}{65}=\frac{2^6}{15}-\frac{2^9}{5\cdot 15}=\frac{1}{15}\left(2^6-\frac{2^9}{5}\right)=\frac{2^6}{15}\left(1-\frac{2^3}{5}\right)=\frac{64}{15}\left(\frac{5-8}{5}\right)=$$

$$=\frac{64}{15}\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{-192}{65}$$

ERRORE DI CALCOLO

DOMANDA 1

TEOREMA SULLE FUNZIONI CON GRADIENTE NULLO IN UN CONNESSO: SE f AMMETTE GRADIENTE NULLO IN TUTTI I PUNTI DI UN CONNESSO $A\subset\mathbb{R}^2$, f RISULTA COSTANTE IN A

DIM

SE IL GRADIENTE È NULLO, ALLORA LE DERIVATE PARZIALI $f_x=0$ E $f_y=0$ SONO NULLE. CIÒ SIGNIFICA CHE f È DIFFERENZIABILE: FISSATO $(x_0,y_0)\in A$, DEFINIAMO DUE INSIEMI: $A_1=\{(x,y)\in A \mid f(x,y)=f(x_0,y_0)\}$ E $A_2=\{(x,y)\in A \mid f(x,y)\neq f(x_0,y_0)\}=\emptyset$ PERCHÉ f È COSTANTE. NON RESTA ALTRO CHE VERIFICARE CHE A_1 E A_2 SONO INSIEMI APERTI: A_2 LO È PER PROPRIETÀ TOPOLOGICHE. VERIFICHIAMO A_1: PRESO $P=(x_1,y_1)\in A_1$. $f(x_0,y_0)=f(x_1,y_1)$. SIA $I_\delta(P)$ L'INTORNO CIRCOLARE DI CENTRO P E RAGGIO $\delta\subset A$. VERIFICHIAMO CHE $I_\delta(P)=A$: $f(x,y)=f(x_0,y_0)=f(x_1,y_1)\ \forall (x,y)\in I_\delta(P)$. SE $(x,y)=(x_1,y_1)$ ALLORA IL TEOREMA È DIMOSTRATO, ALTRIMENTI DEFINIAMO $\varphi(t)=f((x_1,y_1)+t((x,y)-(x_1,y_1)))\ \forall t\in[0,1]$. ~~SE $t=0$, $\varphi(0)=f(x_1,y_1)$. SE $t=1$ $\varphi(1)=f(x_1$~~ SI

SE $t=0$, $\varphi(t)=f(x_1,y_1)$. SE $t=1$, $\varphi(t)=f(x,y)$

$\varphi'(t)=\left(\nabla f(x_1,y_1)+t(x,y)-t(x_1,y_1)\right)$. $(x,y)=(x_1,y_1)\Rightarrow (x,y)-(x_1,y_1)=0$ E $\nabla f=0$

COME DIMOSTRATO IN PRECEDENZA $\Rightarrow \varphi(t)$ COSTANTE IN $A\Rightarrow \varphi(0)=\varphi(1)$

$\Rightarrow f(x,y)=f(x_1,y_1)\Rightarrow f$ È COSTANTE

CVD

DOMANDA 2

TEOREMA SULLE FORMULE DI GAUSS-GREEN: SIA D UN DOMINIO REGOLARE E $f(x,y):D\to\mathbb{R}\in C^1$

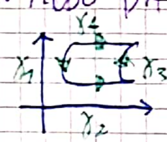
ALLORA: (1) $\iint_D \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx\,dy=\int_{+\partial D} f\,dy$ (2) $\iint_D \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy=-\int_{+\partial D} f\,dD$

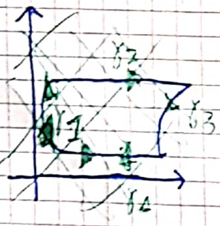
DIM (1), ANALOGA DIMOSTRAZIONE PER (2)

SI CONSIDERI, PER SEMPLICITÀ, $(x,y):D\to\mathbb{R}\in C^1(A)$, DOVE $A\subset D$ È UN APERTO CONTENUTO IN D. CIÒ CONSENTE DI DIRE CHE $\frac{\partial f}{\partial x}$ E $\frac{\partial f}{\partial y}$ SONO NULLE LUNGO LA FRONTIERA DI D

a) D È UN DOMINIO NORMALE RISPETTO ALL'ASSE y. $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid c\le y\le d,\ \rho(y)\le x\le\delta(y),$ $\rho,\delta\in C^1([c,d]),\ \rho(y)\le\delta(y)\ \forall y\in[c,d]\}$. DALLE FORMULE DI RIDUZIONE, $\iint_D \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy=$ $=\int_c^d dy\int_{\rho(y)}^{\delta(y)}\frac{\partial f}{\partial x}\,dx=\int_c^d\left[f(x,y)\right]_{\rho(y)}^{\delta(y)}dy=\int_c^d\left[f(\delta(y),y)-f(\rho(y),y)\right]dy.$

PARAMETRIZZIAMO LA FRONTIERA DI D IN MODO DA AVERE UN'ORIENTAZIONE POSITIVA $\Rightarrow \partial D=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4$





$-\gamma_1:\begin{cases}x=\rho(t)\\ y=t\end{cases}\ t\in[c,d];\quad \gamma_2:\begin{cases}x=t\\ y=c\end{cases}\ t\in[\rho(c),\delta(c)]$

$\gamma_3:\begin{cases}x=\delta(t)\\ y=t\end{cases}\ t\in[c,d];\quad -\gamma_4:\begin{cases}y=c\\ y=c\end{cases}\ t\in[\rho(d),\delta(d)]$

$\int_{+\partial D} f\,dy=-\int_{-\gamma_1} f\,dy+\int_{\gamma_2} f\,dy+\int_{\gamma_3} f\,dy-\int_{\gamma_4} f\,dy$. IN γ_2 E $-\gamma_4$ $dy=0$ POICHÈ $y=c$ È QUINDI COSTANTE $\Rightarrow$ L'INTEGRALE SI RIDUCE A $\int_{+\partial D} f\,dy=\int_c^d f(\rho(t),t)\,dt+\int_c^d f(\delta(t),t)\,dt=$ $=\int_c^d\left[f(\delta(t),t)-f(\rho(t),t)\right]dt$

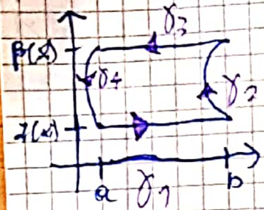
$\Rightarrow \iint_D \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx\,dy=\int_{+\partial D} f\,dy$ ✓

b) D È UN DOMINIO NORMALE RISPETTO ALL'ASSE x. $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b,\ \alpha(x)\le y\le\beta(x),$ $\alpha,\beta\in C^1([a,b]),\ \alpha(x)<\beta(x)\ \forall x\in[a,b]\}$ $F(x,y)=\int_\gamma f\,dy$ E, ANALOGAMENTE A PRIMA, PARAMETRIZZIAMO $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2$. $\gamma_1=\begin{cases}x(t)=t\\ y(t)=\alpha(t)\end{cases}\ t\in[a,\cancel{b}(x)];\ \gamma_2=\begin{cases}x(t)=x\\ y(t)=t\end{cases}\ t\in[\alpha(x),y]$

$F(x,y)=\int_{\gamma_1} f\,dy+\int_{\gamma_2} f\,dy=\int_a^{\alpha(x)} f(t,\alpha(t))\,dt+\int_{\alpha(x)}^{y}(f(x,t)-1)\,dt$

SI CALCOLA L'INTEGRALE SFRUTTANDO IL SEGUENTE TEOREMA: SIA $f: A\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ UNA FUNZIONE CHE VA DALL'APERTO $A\subset\mathbb{R}^n$ ($A\in C^1$) A VALORI IN $\mathbb{R}$ E SIANO $\alpha(x),\beta(x)\in C^1(A)$. ALLORA $\varphi(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)\,dt\in C^1$ E $\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}=f(x,\beta(x))$ E $\cancel{\frac{\partial h}{\partial x_k}}=$ $\frac{\partial h(x)}{\partial x_k}=f(x,\alpha(x))$ E $\frac{\partial h(x)}{\partial x_k}+\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\frac{\partial f}{\partial x_k}=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\frac{\partial f}{\partial x_k}(x,t)\,dt.$

IN PARTICOLARE $\frac{\partial F}{\partial x_k}(x,y)=f(x,\alpha(x))+\int_{\alpha(x)}^{y}\frac{\partial f}{\partial x_k}(x,t)\,dt-f(x,\alpha(x))\cdot\alpha'(x)$ E QUINDI $\frac{\partial F}{\partial x_k}(x,y)=f(x,y)$. LA FORMA DIFFERENZIALE $\omega=F_x\,dx+F_y\,dy$ È ESATTA SU $D\Rightarrow\int_{+\partial D}\frac{\partial F}{\partial x}\,dx+\frac{\partial F}{\partial y}\,dy=0$



$$\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$$

$\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \alpha(t) \end{cases} \quad t \in [a,b] \qquad \gamma_2 : \begin{cases} x(t) = b \\ y(t) = t \end{cases} \quad t \in [a,b]$

$-\gamma_3 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \beta(t) \end{cases} \quad t \in [a,b] \qquad -\gamma_4 : \begin{cases} x(t) = a \\ y(t) = t \end{cases} \quad t \in [a,b]$

$\int_{+\partial D} \frac{\partial F}{\partial x} dx = -\int_{+\partial D} \frac{\partial F}{\partial y} dy$ (COME CI SUGGERISCE IL RISULTATO PRECEDENTE)

$\int_{+\partial D} \frac{\partial F}{\partial x} dx = \int_{\gamma_1} F_x dx + \int_{\gamma_2} F_x dx - \int_{\gamma_3} F_x dx - \int_{\gamma_4} F_x dx$. SU γ_2 E γ_4 $dx = 0$

$\Rightarrow$ L'INTEGRALE SI RIDUCE A $\int_{+\partial D} \frac{\partial F}{\partial x} dx = \int_{\gamma_1} F_x dx - \int_{\gamma_3} F_x dx =$

$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(t, \alpha(t)) dt - \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(t, \beta(t)) dt = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial x}(t, \beta(t)) - \frac{\partial F}{\partial x}(t, \alpha(t)) \right] =$

$= \int_a^b dt \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t,s)\, ds = \int_{+\partial D}$ DALLE FORMULE DI RIDUZIONE, $\iint_D \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, dx\, dy =$

$= \int_a^b dt \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t,s)\, ds = \int_{+\partial D} f\, dy$ ✓

(c) D È COSTITUITO DA UN NUMERO FINITO n DI DOMINI REGOLARI RISPETTO AGLI ASSI X E Y A DUE A DUE PRIVI DI PUNTI IN COMUNE. POSSIAMO SCRIVERE $\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dx\, dy = \sum_{k=1}^{n} \iint_{D_k} \frac{\partial f}{\partial x} dx\, dy$. PER GAUSS-GREEN, $\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dx\, dy = \sum_{k=1}^{n} \int_{+\partial D_k} f\, dy$. LE ORIENTAZIONI GRAFICHE SONO FRA LORO OPPOSTE, QUINDI GLI INTEGRALI DEI DOMINI SI CANCELLANO E RIMANGONO SOLO GLI INTEGRALI DELLE CURVE

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \int_{+\partial D_k} f\, dy = \int_{+\partial D} f\, dy$

SI