TEOREMA ARCHIMEDEO: DATI $m \in \mathbb{Z}$ E $n \in \mathbb{N}$ PRIMI TRA LORO, $\frac{m^2}{n^2} \neq 2$

PER ASSURDO, $\frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow$ ESSENDO IL DOPPIO DI UN ~~NATURALE~~ INTERO, m^2 È PARI

SI PRENDA UN $h \mid 2h = m \rightarrow (2h)^2 = 2n^2 \Rightarrow 2n^2 = 4h^2 \Rightarrow n^2 = 2h^2 \Rightarrow$ ESSENDO IL DOPPIO DI UN INTERO, n È PARI $\Rightarrow$ m E n SONO PARI MA, PER IPOTESI, I DUE NUMERI SONO PRIMI TRA LORO. ASSURDO NEGATO $\Rightarrow$ TESI VERIFICATA

DISEGUAGLIANZA TRIANGOLARE: $|x+y| \leq |x| + |y|$

SI CONSIDERINO DUE NUMERI x E y: $-|x| \leq x \leq |x|$, $-|y| \leq y \leq |y|$. SOMMANDO MEMBRO A MEMBRO SI OTTIENE: $-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y| \Rightarrow$ PER LA DEFINIZIONE DI VALORE ASSOLUTO, $|x+y| \leq |x|+|y|$

DATO $A \subseteq \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}$ È MAGGIORANTE DI $A \iff M \geq a \ \forall a \in A$. $m^+(A) = \{M \in \mathbb{R} \mid M \geq a \ \forall a$

DATO $A \subseteq \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}$ È MINORANTE DI $A \iff M \leq a \ \forall a \in A$. $m^-(A) = \{M \in \mathbb{R} \mid M \leq a \ \forall a \in A$

DATO $A \subseteq \mathbb{R}$, $\max(A) \in \mathbb{R}$ È MASSIMO DI $A \iff \max(A) \in m^+(A) \land \max(A) \in A$

DATO $A \subseteq \mathbb{R}$, $\min(A) \in \mathbb{R}$ È MINIMO DI $A \iff \min(A) \in m^-(A) \land \min(A) \in A$

UNICITÀ DEL MASSIMO/MINIMO: SE $A \subseteq \mathbb{R}$ AMMETTE UN MASSIMO/MINIMO, QUESTO È UNICO

SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE A AMMETTA DUE MASSIMI/MINIMI E INDICHIAMOLI CON M_1 E M_2. SI HA CHE $M_1 \in m^+(A)/m^-(A) \cap A \land M_2 \in m^+(A)/m^-(A) \cap A$. SE $M_1, M_2 \in A$:

- PER IL MASSIMO, $M_1 \geq a \ \forall a \in A \land M_2 \geq a \ \forall a \in A \Rightarrow M_1 \geq M_2 \land M_2 \geq M_1 \Rightarrow M_1 = M_2$
- PER IL MINIMO, $M_1 \leq a \ \forall a \in A \land M_2 \leq a \ \forall a \in A \Rightarrow M_1 \leq M_2 \land M_2 \leq M_1 \Rightarrow M_1 = M_2$

TEOREMA DI ESISTENZA DELL'ESTREMO SUPERIORE: SIA $A \subseteq \mathbb{R} \land A \neq \emptyset$. SE A È LIMITATO SUPERIORMENTE, $m^+(A)$ AMMETTE MINIMO E $\min(m^+(A)) = \sup(A)$ È L'ESTREMO SUPERIORE. INOLTRE, SE $B = m^+(A) \cap A \neq \emptyset$, $\sup(A) \equiv \max(A)$ È L'UNICO ELEMENTO DI $B \subseteq \mathbb{R}$

TEOREMA DI ESISTENZA DELL'ESTREMO INFERIORE: SIA $A \subseteq \mathbb{R} \land A \neq \emptyset$. SE A È LIMITATO INFERIORMENTE $m^-(A)$ AMMETTE MASSIMO E $\max(m^-(A)) = \inf(A)$, ~~NO~~ È L'ESTREMO INFERIORE. INOLTRE, SE $B = m^-(A) \cap A \neq \emptyset$, $\inf(A) \equiv \min(A)$ È L'UNICO ELEMENTO DI $B \subseteq \mathbb{R}$

$M \in \mathbb{R}$ È $\sup(A) \iff$ ~~$\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \land M \geq a$~~ $M \in m^+(A) \land \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \mid a > M - \varepsilon$

$M \in \mathbb{R}$ È $\inf(A) \iff M \in m^-(A) \land \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \mid a < M + \varepsilon$

PROPRIETÀ ARCHIMEDEA DEI NUMERI REALI: $\mathbb{N}$ NON È LIMITATO SUPERIORMENTE

PER ASSURDO, $\mathbb{N}$ È LIMITATO SUPERIORMENTE $\Rightarrow \exists \sup \mathbb{N} \mid \forall \varepsilon > 0 \land \exists n \in \mathbb{N} \Rightarrow n > \sup \mathbb{N} - \varepsilon \Rightarrow \exists n+1 \mid n+1 > \sup \mathbb{N} \rightsquigarrow$ MA $n+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow$ ASSURDO $\Rightarrow$ FALSO NEGATO $\Rightarrow$ TESI ~~IPOTESI~~ VERIFICATA

TEOREMA DI DENSITÀ DEI RAZIONALI NEI REALI: SE $x < y \in \mathbb{R} \ \exists q \in \mathbb{Q} \mid x < q < y$

SE $x < 0 \land y > 0$, SCELTO $q = 0$ IL TEOREMA ~~LA TESI~~ È DIMOSTRATO

SE $x \geq 0 \land y > 0$ BISOGNERÀ PROCEDERE IN MANIERA DIVERSA E, PER SIMMETRIA, SARÀ ANCHE VERIFICATO IL TEOREMA NEL CASO IN CUI $x < 0 \land y < 0$.

DATO $\frac{1}{y-x}$, DALLA PROPRIETÀ ARCHIMEDEA $\exists n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{y-x} < n \rightarrow x + \frac{1}{n} < y$. CONSIDERATO L'INSIEME $A = \{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid k \leq nx\}$, È SUPERIORMENTE LIMITATO $\Rightarrow$ AMMETTE MASSIMO. DETTO $m = \max(A)$, $m \in A$ E $m+1 \notin A \Rightarrow m \leq nx < m+1 \Rightarrow x < \frac{m+1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \leq x + \frac{1}{n} < y$. $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Q} \Rightarrow q = \frac{m+1}{n}$
$\Rightarrow x < q < y$

Principio di induzione: Sia $\{P_n, n\in\mathbb{N}\}$ una famiglia di proposizioni. Se P_1 è vera e, supponendo P_n vera si dimostra che P_{n+1} è vera, allora P_n è vera per ogni $n\in\mathbb{N}$

Disuguaglianza di Bernoulli (esempio del principio di induzione): $(1+x)^n \geq 1+nx$

• $n=1 \to (1+x)^1 \geq 1+x \to 1+x \geq 1+x$ ✓ vera

• n vera $\Rightarrow (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x \to \underbrace{(1+x)^n}_{\text{per supposizione verificata}}(1+x) \geq 1+nx+x \to (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$ ✓

Il limite di una successione è il valore a cui tendono i suoi termini. In particolare, per $n\to+\infty$, la successione si dice convergente se il limite l è finito. Se il limite è $+\infty$ la successione è positivamente divergente, se è $-\infty$ è negativamente divergente

Successione convergente: $\forall \varepsilon>0\ \exists \bar n\in\mathbb{N} \mid n\geq\bar n \Rightarrow |a_n-l|<\varepsilon$

Per la proprietà archimedea $\exists \bar n\in\mathbb{N} \mid 0<\frac{1}{\bar n}<\varepsilon$

$n\geq\bar n \Rightarrow 0<\frac{1}{n}\leq\frac{1}{\bar n}<\varepsilon$ ✓

Successione divergente: $\forall M>0\ \exists\bar n\in\mathbb{N}\mid n\geq\bar n \Rightarrow a_n>M$ se $n\to+\infty$; $a_n<-M$ se $n\to-\infty$

Proprietà di Cauchy: $\forall\varepsilon>0\ \exists\bar n\in\mathbb{N}\mid n>\bar n \wedge m>\bar n \Rightarrow |a_n-a_m|<\varepsilon$

Scelto $\varepsilon>0$, $a_n\to l \Rightarrow \exists\bar n\in\mathbb{N}\mid n\geq\bar n\Rightarrow|a_n-l|<\varepsilon/2$, $m\geq\bar n \Rightarrow |a_m-l|<\varepsilon/2 \Rightarrow n,m\geq\bar n \to |a_n-a_m| = |a_n-l+l-a_m| \leq |a_n-l|+|a_m-l| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \to |a_n-a_m|<\varepsilon$

Teorema di unicità del limite per successioni: Se $\{a_n\}\subseteq\mathbb{R} \wedge a_n\to l_1\in\bar{\mathbb{R}}\wedge a_n\to l_2\in\bar{\mathbb{R}}$, $l_1=l_2$

Si supponga $l_1\neq l_2$ e si fissi $\varepsilon>0$

- $\forall\varepsilon>0\ \exists n_1\in\mathbb{N}\mid n\geq n_1 \Rightarrow |a_n-l_1|<\varepsilon/2$
- $\forall\varepsilon>0\ \exists n_2\in\mathbb{N}\mid n\geq n_2 \Rightarrow |a_n-l_2|<\varepsilon/2$

Detto $\bar n=\max\{n_1,n_2\} \to |l_1-l_2| = 0 \Rightarrow |l_1-a_{\bar n}+a_{\bar n}-l_2| \leq |l_1-a_{\bar n}|+|l_2-a_{\bar n}| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$

$\to 0<|l_1-l_2|<\varepsilon \Rightarrow l_1=l_2$

Teorema della ~~grandezza~~ limitatezza di successioni convergenti: Se $\{a_n\}\subseteq\mathbb{R}\mid a_n\to l\in\mathbb{R}$, allora a_n è limitata

Fissato $\varepsilon>0$, $\forall\varepsilon>0\ \exists\bar n\in\mathbb{N}\mid n\geq\bar n\Rightarrow l-\varepsilon<a_n<l+\varepsilon$. Per $n<\bar n$, si ponga $M_+=\max\{a_1,a_2,\dots,a_{\bar n-1},l+\varepsilon\}$ ($M_-=\min$, $l-\varepsilon$). Avendo numeri finiti, questi ~~hanno~~ esiste un massimo M_+ (minimo M_-). In particolare, $M_+\geq a_n$ ($M_-\leq a_n$) $\forall n\in\{1,\dots,\bar n-1\}\wedge M_+\geq l+\varepsilon>a_n$ ($M_-\leq l-\varepsilon$) $\forall n\geq\bar n \Rightarrow a_n$ è limitata superiormente (inferiormente) $\to a_n$ è limitata

Teorema della limitatezza di successioni divergenti: Se $\{a_n\}\subseteq\mathbb{R}\mid a_n\to\pm\infty \Rightarrow a_n$ è limitata inferiormente (superiormente)

Fissato M (se), $\forall M>0\ \exists\bar n\in\mathbb{N}\mid n\geq\bar n\Rightarrow a_n>M$. Posto $M_-=\min\{a_1,\dots,a_{n-1},M\}$, $M_-\in\mathbb{R}\wedge M_-\leq a_n\ \forall n\leq\bar n-1$. Inoltre $M_-\leq M<a_n\ \forall n\geq\bar n \Rightarrow a_n>M$

Teorema della permanenza del segno: $\{a_n\}\subseteq\mathbb{R}$ è una successione convergente, $a\in\mathbb{R}$ $|a_n\to a$. Se $a>0\ \exists\bar n\in\mathbb{N}\mid n\geq\bar n\Rightarrow a_n>a/2$. Se $a<0\ \exists\bar n\in\mathbb{N}\mid n\geq\bar n\to a_n<a/2$

$a_n\to a>0$, $\varepsilon=a/2 \to \exists\bar n\in\mathbb{N}\mid n\geq\bar n\Rightarrow a-\frac{a}{2}<a_n<a+\frac{a}{2}\to\frac{1}{2}a<a_n<\frac{3}{2}a$

$a_n\to a<0$, $\varepsilon=-a/2\to\exists\bar n\in\mathbb{N}\mid n\geq\bar n\Rightarrow\frac{3}{2}a<a_n<\frac{1}{2}a$

Teorema del confronto (o dei carabinieri): Siano $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}\subseteq\mathbb{R}$ tre successioni. $\exists\bar n\in\mathbb{N}\mid n\geq\bar n\Rightarrow a_n\leq b_n\leq c_n$. Se $a_n\to l$ e $c_n\to l$ con $l\in\bar{\mathbb{R}}$ anche $b_n\to l$

• FISSATO $N_1>0$, $\exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid n \geq \bar{n} \Rightarrow l-N_1 < a_n < l+N_1$

• FISSATO $N_2>0$, $\exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid n \geq \bar{n} \Rightarrow l-N_2 < a_n < l+N_2$

DETTO $N=\max\{N_1,N_2\} \longrightarrow l-N < a_n \leq b_n \leq c_n < l+N \Rightarrow b_n \to l$

TEOREMA DELL'ALGEBRA DELLE SUCCESSIONI INFINITESIME: SIANO $\{a_n\}, \{b_n\} \subseteq \mathbb{R}$

① $a_n + b_n \to 0 \Leftarrow a_n \to 0 \wedge b_n \to 0$

② $a_n \cdot b_n \to 0 \Leftarrow a_n$ LIMITATA $\wedge b_n \to 0$ (O VICEVERSA)

① PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO, $|a_n+b_n| \to 0 \Rightarrow 0 \leq |a_n+b_n| \leq |a_n|+|b_n|$. FISSATO $\varepsilon>0$:

$a_n \to 0$ $\exists n_1 \in \mathbb{N} \mid n \geq n_1 \Rightarrow |a_n| < \varepsilon/2$

$b_n \to 0$ $\exists n_2 \in \mathbb{N} \mid n \geq n_2 \Rightarrow |b_n| < \varepsilon/2$

$\to$ DETTO $\bar{n}=\max\{n_1,n_2\}$, $n \geq \bar{n} \Rightarrow 0 \leq |a_n+b_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

$\Rightarrow 0 \leq |a_n+b_n| \leq \varepsilon$

② a_n LIMITATA $\Rightarrow \exists M>0 \mid a_n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$

$b_n \to 0 \Rightarrow$ FISSATO $\varepsilon>0$, $\exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid b_n < \varepsilon \ \forall \bar{n} \in \mathbb{N}$ $\to |a_n \cdot b_n| = |a_n||b_n| \leq M|b_n| = M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon =$

$\Rightarrow 0 \leq |a_n \cdot b_n| < \varepsilon$

TEOREMA DELL'ALGEBRA DELLE SUCCESSIONI CONVERGENTI: $\{a_n\}, \{b_n\} \subseteq \mathbb{R}$, $a_n \to a \wedge b_n \to b$, a, b

① $a_n \pm b_n \to a \pm b$ ~~② $a_n b_n \to ab$~~

② $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$

③ $a_n / b_n \to a/b$, $b \neq 0$

① $a_n \pm b_n \to a \pm b \Rightarrow |a_n \pm b_n - a \mp b| \to 0$ $\quad 0 \leq |a_n \pm b_n - a \mp b| \leq \overbrace{|\underset{\uparrow 0}{a_n - a}| + |\underset{\uparrow 0}{b_n - b}|}^{\to 0}$

PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO $|a_n \pm b_n - a \mp b| \to 0 \Rightarrow a_n \pm b_n \to a \pm b$

② $a_n \cdot b_n \to a \cdot b \Rightarrow 0 \leq |a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a b_n + a b_n - ab| \leq \overbrace{\underset{\text{LIMITATA}}{|b_n|}\,|\overset{\to 0}{a_n - a}| + \underset{\text{LIMITATA}}{|a|}\,|\overset{\to 0}{b_n - b}|}^{\to 0}$

PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO, $|a_n b_n - ab| \to 0 \Rightarrow a_n b_n \to ab$

③ $b \neq 0 \wedge b_n \to b \overset{\text{DAL TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO}}{\Rightarrow} \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid |b_n| \geq \frac{|b_n|}{2} \ \forall n \geq \bar{n} \longrightarrow \frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b_n|}$ $\quad \underset{\to 0}{b_n \neq 0} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n}$ DEFINI...

$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_n b - a b_n}{b_n b}\right| = \frac{1}{|b_n b|}|a_n b - a b_n - ab + ab| = \frac{1}{|b_n|} \cdot \frac{1}{|b|} \left[|\underbrace{b}_{\text{LIMITATA}}\underbrace{(a_n - a)}_{0} + \underbrace{a}_{\text{LIMITATA}}\underbrace{(b - b_n)}_{0}| \right]$

$\Rightarrow$ PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO, $\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \to 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

TEOREMA DELLA REGOLARITÀ DELLE SUCCESSIONI MONOTONE: SE $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ È MONOTONA, È REGOLARE. IN PARTICOLARE, SE $\{a_n\}$ È NON DECRESCENTE (CRESCENTE) E LIMITATA SUPERIORMENTE (INFERIORMENTE) ALLORA È CONVERGENTE. SE NON È LIMITATA SUPERIORMENTE (INFERIORMENTE) È POSITIVAMENTE (NEGATIVAMENTE) DIVERGENTE.

- LIMITATA SUPERIORMENTE (INFERIORMENTE) $\to$ DAL TEOREMA DI ESISTENZA DELL'ESTREMO SUPERIORE (INFERIORE), $l = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$

PER CARATTERIZZAZIONE DELL'ESTREMO SUPERIORE (INFERIORE)

• $l \geq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ (≤)

• $\exists \bar{n} \mid a_{\bar{n}} > l - \varepsilon$

$\to n \geq \bar{n} \Rightarrow \begin{matrix} a_n \leq l \\ l-\varepsilon < a_{\bar{n}} < l+\varepsilon \end{matrix} \Rightarrow l - \varepsilon < a_{\bar{n}} < a_n \leq l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid n \geq \bar{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow l - \varepsilon < a_n \leq l < l+\varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = l = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (inf)

- Non limitata superiormente → Fissato $M>0$, questo non è maggiorante di $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$
$\Rightarrow \exists \bar{n}\in\mathbb{N} \mid n\geq\bar{n} \Rightarrow a_{\bar{n}}>M \rightarrow a_n \geq a_{\bar{n}} > M \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

Il numero di Nepero e: $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Procedimenti:

① Data $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, dimostrare che è crescente, ossia $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} = \left(\frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} = \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}$$

$1 \geq 1-\frac{n+1}{(n+1)^2}$ } Per la disuguaglianza di Bernoulli

$$\Rightarrow \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} = 1 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \checkmark$$

② Data $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = a_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$, dimostrare che è decrescente, ossia $\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1$

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\cdot\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1} = \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1}$$

$$\geq \left(1+\frac{n+2}{n(n+2)}\right)\cdot\frac{n}{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)\cdot\frac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow \frac{b_n}{b_{n+1}} > 1 \checkmark$$

③ Essendo a_n crescente, è limitata dal teorema di regolarità delle successioni monotone

$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow e = \sup\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$. Essendo a_n strettamente crescente $\Rightarrow a_n < e \ \forall n\in\mathbb{N}$

Inoltre $b_n = a_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$ $b_n \to e\cdot 1 = e$. Essendo decrescente, $b_n > e$

$\Rightarrow a_n < e < b_n \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. e è proprio l'elemento separatore tra a_n e b_n

Criterio del rapporto: Sia $\{a_n\}\subseteq\mathbb{R} \wedge a_n>0 \ \forall n\in\mathbb{N} \ n\geq\bar{n} \mid \frac{a_{n+1}}{a_n}\to \ell\in\overline{\mathbb{R}}_+$.

1- $\ell<1 \Rightarrow a_n \to 0^+$

- $\ell=1$ non dà informazioni sul comportamento asintotico di a_n

2- $\ell>1 \Rightarrow a_n\to+\infty$

1. Fissato $\bar{\ell}\in(\ell;1)$, $\exists\bar{n}\in\mathbb{N} \mid n\geq\bar{n} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}<\bar{\ell}$

$n=\bar{n} \rightarrow a_{\bar{n}+1} < \bar{\ell}a_{\bar{n}}$

0^+ per proprietà esponenziale

$n=\bar{n}+1 \rightarrow a_{\bar{n}+2} < \bar{\ell}a_{\bar{n}+1} < \bar{\ell}\bar{\ell}a_{\bar{n}} = \bar{\ell}^2 a_{\bar{n}}$

$\vdots$

$n=\bar{n}+k \rightarrow a_{\bar{n}+k} < \bar{\ell}^k a_{\bar{n}} \Rightarrow$ Per induzione è vero $\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow k\in\mathbb{N} \Rightarrow a_{\bar{n}+k} < \bar{\ell}^k a_{\bar{n}}$

$\rightarrow a_n < \bar{\ell}^{n-\bar{n}}a_{\bar{n}} = \underbrace{\frac{a_{\bar{n}}}{\bar{\ell}^{\bar{n}}}}_{=c}\bar{\ell}^n \ \forall n\geq\bar{n}+1 \Rightarrow 0\leq a_n < c\bar{\ell}^n \Rightarrow$ Per carabinieri, $a_n\to 0^+$

2. Scritto $b_n = \frac{1}{a_n}$, se $b_n \to \ell>1$, $b_n\to\ell<1$. Dalla dimostrazione precedente $b_n\to 0^+ \Rightarrow$
$\Rightarrow a_n \to +\infty$

Teorema ponte (o di caratterizzazione sequenziale del limite): Dato un intervallo $I\subseteq\overline{\mathbb{R}}$ e un punto di accumulazione per I, $f: I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$, si ha che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell\in\overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall x_n\in I\setminus\{x_0\} \mid x_n\to x_0 \Rightarrow f(x_n)\to\ell$

Si consideri $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$. $x_n \in I\setminus\{x_0\} \mid x_n \to x_0$. Fissato $\varepsilon>0$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ si traduce come $\exists\, \delta>0 \mid x \in I\setminus\{x_0\} \wedge |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon \Rightarrow \exists\, \bar n \in \mathbb{N} \mid n\geq \bar n \to 0<|x_n-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x_n)-l|<\varepsilon \ \forall n\geq \bar n$

Per assurdo, affermiamo che $\exists\, \varepsilon_0>0 \mid \forall \delta>0 \ \exists\, x_n \in I\setminus\{x_0\} \mid 0<|\underset{x_n\to x_0}{x_n}-x_0|<\delta \wedge |\underset{f(x_\delta)\not\to l}{f(x_\delta)}-l|>\varepsilon$.
Dunque $f(x)\not\to l$ ma, per ipotesi, $f(x)\to l$. L'assurdo è negato $\Rightarrow$ il teorema è verificato

Limite destro e sinistro: $I\subseteq\overline{\mathbb{R}}$ e x_0 punto di accumulazione per I, $f: I\setminus\{x_0\}\to\overline{\mathbb{R}}$

$l=\lim_{x\to x_0} f(x) \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$

Sia $\varepsilon>0$. Da $l=\lim_{x\to x_0} f(x)$ si ha che $\exists\, \delta>0 \mid x\in I$ e $0<\underbrace{|x-x_0|}_{x\in(x_0-\delta;\,x_0+\delta)}<\delta \to 0<|f(x)-l|<\varepsilon$
$x\in\{(x_0-\delta;x_0)\cup(x_0;x_0+\delta)\} \to \lim_{x\to x_0^-} f(x)=l \wedge \lim_{x\to x_0^+} f(x)=l$. Per dimostrare il teorema, fissato $\varepsilon>0$ si ha che:

① $\exists\, \delta_1>0 \mid x-\delta_1<x<x_0 \wedge x\in I \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$

② $\exists\, \delta_2>0 \mid x_0<x<x_0+\delta_2 \wedge x\in I \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$

Detto $\delta=\max\{\delta_1,\delta_2\}$, $\to |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon = \lim_{x\to x_0} f(x)=l$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=l \longrightarrow \forall\varepsilon>0 \ \exists\, \bar x\in I_{x_0} \mid x\overset{<}{>}\bar x \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$ Asintoto orizzontale

$\lim_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty \longrightarrow \forall M>0 \ \exists\, \delta>0 \mid |x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)\overset{<-M}{>M}, \ x\in I\setminus\{x_0\}$ Asintoto verticale

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \longrightarrow \forall M>0 \ \exists\, \bar x\in I_{x_0} \mid x>\bar x \Rightarrow f(x)>M$

Teorema del cambiamento di variabile: Siano $I, J\subseteq\overline{\mathbb{R}}$ due intervalli e i loro punti di accumulazione, rispettivamente, x_0 e y_0. $f: I\setminus\{x_0\}\to\overline{\mathbb{R}}$ $g: J\setminus\{y_0\}\to\overline{\mathbb{R}}$. Sia, inoltre, che $\lim_{x\to x_0} f(x)=l\in\overline{\mathbb{R}}$ e $\lim_{y\to y_0} g(x)=x_0$. Allora $\lim_{y\to y_0} f(g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)=l$

$y_n\in J\setminus\{y_0\} \mid y_n\to y_0 \xRightarrow{\text{PONTE}} g(y_n)\to x_0 \xRightarrow{\text{PONTE}} f(g(y_n))=\text{PONTE}$

Teorema dell'esistenza di limite destro e sinistro per funzioni monotone

Sia $f: I\ \xrightarrow{} \overline{\mathbb{R}}$ monotona e $x_0\in I \Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0^-} f(x)\in\overline{\mathbb{R}} \wedge \exists \lim_{x\to x_0^+} f(x)\in\overline{\mathbb{R}}$. Se f è non decrescente (crescente) non è detto che esistano. Infatti si ha $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\overset{\inf}{\sup}\{f(x)\mid x\in I, x<x_0\}=l_-$ e $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\overset{\sup}{\inf}\{f(x)\mid x\in I, x<x_0\}=l_+ \longrightarrow l_-\leq f(x_0)\leq l_+$ ($l_+\leq f(x_0)\leq l_-$)

Per la non decrescenza (analogamente si dimostra la crescenza). Se $\{x<x_0\mid x\in I\}\neq\emptyset$. $f(x)\leq f(x_0)$ $\forall x<x_0 \wedge x\in I$. Per definizione di estremo superiore, $l_-\leq f(x_0)$. Considerato un $\varepsilon>0$. Per definizione e caratterizzazione di sup, $l-\varepsilon$ non è un maggiorante $\to \exists\, \bar x<x_0, \bar x\in I \mid f(\bar x)>l-\varepsilon$

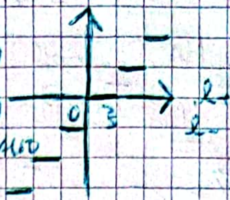
Per monotonia $x\in(\bar x;x_0) \to l-\varepsilon\leq f(\bar x)\leq f(x) \Rightarrow \forall\varepsilon>0 \ \exists\, x\in(\bar x;x_0)\subseteq I \mid \bar x<x<x_0 \Rightarrow l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=l_-$. Analogamente $l_+=\inf\{f(x)\mid x>x_0, x\in I\}=\lim_{x\to x_0^-} f(x)\geq f(x_0)$

Funzione continua in $x_0\in I$ in un intervallo $I\subseteq\mathbb{R}$ se ① $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\in\mathbb{R}$ ② $\exists\, f(x_0)\in\mathbb{R}$ ③ $\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$. Dato $\{x_n\}\subseteq I$ $x_n\to x_0 \Rightarrow f(x_n)\to f(x_0) \Rightarrow \forall\varepsilon>0 \ \exists\, \delta>0 \mid x\in I \mid |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

PUNTI DI DISCONTINUITÀ: Data $f(x): I \subseteq \mathbb{R}$, in x_0 ha una discontinuità se in x_0 $f(x)$ risulta non continua. 3 punti di discontinuità:

- Discontinuità di 1ª specie (salto) $\rightarrow \nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$ ma $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_- \land \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_+$, $l_- \neq l_+$ e $|l_- - l_+| =$ salto

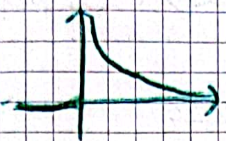
Funzione mantissa $f(x) = [x] = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$



$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$ $\quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ $\quad 0 \neq -1$ $\quad |0-(-1)| = 1 =$ salto

- Discontinuità di 2ª specie $\rightarrow \nexists \lim_{x \to x_0^-} f(x) \lor \nexists \lim_{x \to x_0^+} f(x) \in \mathbb{R}$

$f(x) = \begin{cases} 1/x & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

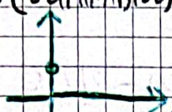


$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = 0 \in \mathbb{R}$ ✓

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \notin \mathbb{R}$ ✗

- Discontinuità di 3ª specie (eliminabile) $\rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ ma $l \neq f(x_0)$

$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$



Modificando $f(x)$ in x_0 si ottiene una nuova $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in I \\ \lim_{x \to x_0} f(x) & x = x_0 \end{cases}$

Discontinuità eliminata

Continuità ed operazioni elementari: Sia $x_0 \in I$, se $f(x)$ e $g(x)$ sono continue in x_0:

- $f(x) \pm g(x)$ continua in x_0
- $f(x) \cdot g(x)$ continua in x_0
- $f(x)/g(x)$ continua in x_0, $g(x_0) \neq 0 \longrightarrow$ Dal teorema della permanenza del segno, $\exists \delta > 0 \mid g(x) \neq 0 \; \forall x \in I \land |x - x_0| < \delta$

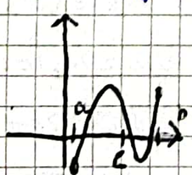
Sia $\{x_n\} \subseteq I \mid x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0) \land g(x_n) \rightarrow g(x_0)$

- $f(x_n) \pm g(x_n) \rightarrow f(x_0) \pm g(x_0)$
- $f(x_n) \cdot g(x_n) \rightarrow f(x_0) \cdot g(x_0)$ — ALGEBRA DEI LIMITI
- $f(x_n)/g(x_n) \rightarrow f(x_0)/g(x_0)$

- $f(x): I \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in I$ e $g(x): J \rightarrow I$, $y_0 \in J$ con $g(y_0) = x_0$ e g è continua $\Rightarrow f(g(x))$ è continua in y_0 — COMPOSIZIONE

$y_n \in J \rightarrow y_0 \Rightarrow g(y_n) \rightarrow g(y_0) = x_0 \Rightarrow f(g(y_n)) = f(x_0)$

Teorema dell'esistenza degli zeri: Sia $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$
$\exists$ almeno un $c \in (a,b) \mid f(c) = 0$



Con il metodo di bisezione. Dato $f(a) < 0 \land f(b) > 0$

$a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$

1 - $f(c_0) = 0 \rightarrow$ lo zero è trovato
2 - $f(c_0) > 0 \rightarrow$ nuovo sottointervallo con $a_0 = a_1$, $c_0 = b_1$. $[c_0, a_0]$
3 - $f(c_0) < 0 \rightarrow$ nuovo sottointervallo con $c_0 = a_1$, $b_0 = b_1$ $[c_0, b_0]$

$\alpha)$ $a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0$
$\beta)$ $b_1 - a_1 = (b_0 - a_0)/2$
$\gamma)$ $f(a_1) < 0 < f(b_1)$

Nel nuovo intervallo $[a_1, b_1]$ si definisce il nuovo $c_1 =$

E SI ITERA LA PRECEDENTE ANALISI. PROCEDENDO RICORSIVAMENTE, SE $f(c_j) \neq 0$ $j=1,\dots,n$ ALLORA

CHE RISULTANO DEFINITE LE SUCCESSIONI $(a_j)(b_j)$ CHE RISPETTANO LE PROPRIETÀ α, β, γ:

α) $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq \dots \leq b_1 \leq b_0$

β) $b_n - a_n = \dfrac{b_0 - a_0}{2}$

γ) $f(a_n) < 0 < f(b_n)$

DA α $\Rightarrow a_n$ È NON DECRESCENTE E LIMITATA $\Rightarrow$ PER LA REGOLARITÀ DELLE SUCCESSIONI MONOTONE, $a_n \xrightarrow{n\to+\infty} c$ CON $c \in [a_0, b_0]$

DA β, $b_n - a_n \to 0 \Rightarrow b_n \to \overset{c}{a_n} + \overset{0}{(b_n - a_n)} \to c$

DA γ:

$$\left.\begin{aligned} f(a_n) < 0 &\Rightarrow f(c) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) \leq 0 \quad f(c) \leq 0 \\ f(b_n) > 0 &\Rightarrow f(c) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) \geq 0 \quad f(c) \geq 0 \end{aligned}\right] \rightarrow f(c) = 0$$

$c \in [a, b]$. $f(c) = 0 \Rightarrow f(c) \neq \overset{<0}{f(a)} \land f(c) \neq \overset{>0}{f(b)} \rightarrow c \in (a, b)$

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI (1^a FORMA): SIA $f(x): [a, b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a, b]$. SE y È INTERMEDIO AI VALORI $f(a)$ E $f(b)$, OSSIA $y \in (y_1, y_2) \Rightarrow (y - y_1)(y - y_2) < 0$ $\exists c \in [a, b] \mid f(c) = y$

$(y - f(a))(y - f(b)) \leq 0$ SE $y = f(a) \lor y = f(b)$ IL TEOREMA È DIMOSTRATO

SE $(y - f(a))(y - f(b)) < 0$, SI DEFINISCA $g(x) = f(x) - y$. $g(x): [a, b] \to \mathbb{R}$ ED È CONTINUA SU $[a, b]$. $(f(a) - y) \cdot (f(b) - y) \longrightarrow g(a) \cdot g(b) < 0$ $g(c) = 0$ PER IL TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI $\Rightarrow f(c) = g(c) + y$ $f(c) = y$

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI (2^a FORMA): SIA I UN CERTO INTERVALLO E $f(x): I \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE CONTINUA SU I. SE $y \in \left(\inf_I f(x), \sup_I f(x)\right)$ $\exists c \in I \mid f(c) = y$

$y > \inf_I f(x) \Rightarrow y$ NON È MINORANTE DI $\{f(x) \mid x \in I\}$ $(\equiv \{f(I)\}) \Rightarrow \exists x_1 \in I \mid f(x_1) < y$

$y < \sup_I f(x) \Rightarrow y$ NON È MAGGIORANTE DI $\{f(x) \mid x \in I\}$ $(\equiv \{f(I)\}) \Rightarrow \exists x_2 \in I \mid f(x_2) > y$

DETTO $a = \min(x_1, x_2)$ E $b = \max(x_1, x_2)$, $[a, b] \subseteq I \Rightarrow f(x): [a, b] \to \mathbb{R}$ È CONTINUA SU $[a, b]$. INOLTRE $(f(a) - y)(f(b) - y) < 0 \Rightarrow y$ È INTERMEDIO A $f(a)$ E $f(b)$ $\Rightarrow \exists c \in [a, b] \subseteq I \mid f(c) = y$

TEOREMA DI ESISTENZA DELLA RADICE N-ESIMA: SE $n \in \mathbb{N}$ E $y > 0$ $\exists!\, x > 0 \mid x^n = y$. x SI DICE RADICE N-ESIMA DI y ED È INDICATO COME $x = \sqrt[n]{y}$

$\sup_{[0;+\infty)} x^n = +\infty$, $\inf_{[0;+\infty)} x^n = 0$ x^n È CONTINUA SU $[0; +\infty)$ SE $y > 0$, $y \in \left(\inf_{[0;+\infty)} x^n; \sup_{[0;+\infty)} x^n\right)$

PER IL TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI, $\exists x > 0 \mid x^n = y$. ESSENDO x^n CRESCENTE SU $[0; +\infty)$, LA RADICE N-ESIMA È UNICA PER MONOTONIA STRETTA E QUINDI INIETTIVA $\Rightarrow x^n$ È UNICA

x_0 È PUNTO DI MASSIMO DI $f(I)$ (= IMMAGINE DI I ATTRAVERSO $f(x)$) SE $f(x_0) \geq f(x) \ \forall x \in I \Rightarrow f(x_0) = \max\{f(I)\}$

x_0 È PUNTO DI MINIMO DI $f(I)$ SE $f(x_0) \leq f(x) \ \forall x \in I \Rightarrow f(x_0) = \min\{f(I)\}$

TEOREMA DI WEIERSTRASS: SE $f(x): [a,b] \to \mathbb{R}$ È CONTINUA IN TUTTO $[a,b]$, ALLORA $\exists \ x_0, x_1 \in [a,b] \mid f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \ \forall x \in [a,b]$

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI (3^a FORMA): DATA $f(x): [a,b] \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE CONTINUA. L'IMMAGINE $f([a,b]) = \left[\min_{[a,b]} f(x), \max_{[a,b]} f(x)\right]$

MONOTONIA ED INIETTIVITÀ: SE I È UN INTERVALLO E $f(x)$ È UNA FUNZIONE CONTINUA SU I, ESSA È STRETTAMENTE MONOTONA SU I $\Leftrightarrow$ $f(x)$ È INIETTIVA

$\Rightarrow$ SCELTI $x_1 < x_2 \in I \to \begin{cases} f(x_1) < f(x_2) & \text{CRESCENZA} \\ f(x_1) > f(x_2) & \text{DECRESCENZA} \end{cases} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow$ INIETTIVA

$\Leftarrow$ PER ASSURDO, $f(x)$ NON È MONOTONA. ALLORA $\exists \ x_1 < x_2 < x_3$ E SI POSSONO VERIFICARE 2 CASI:

$\boxed{1}$ $f(x_2) \notin [x_1, x_3] \Rightarrow f(x_2) > \max[f(x_1), f(x_3)]$

$\boxed{2}$ $f(x_2) \in [x_1, x_3] \Rightarrow f(x_2) < \min[f(x_1), f(x_3)]$

$\boxed{1}$ $y \in (\max[f(x_1), f(x_3)], f(x_2)) \Rightarrow y \in (f(x_1), f(x_2))$ E $f(x)$ CONTINUA IN $[x_1, x_2]$

PER IL TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI (1^a FORMA), $\exists \ \bar{x}_1 \in (x_1, x_2) \mid f(\bar{x}_1) = y$

INOLTRE, $y \in (f(x_3), f(x_2))$ E, ANALOGAMENTE AL CASO PRECEDENTE, $y = f(\bar{x}_2)$, CON $\bar{x}_2 \in (x_2, x_3)$

$\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ MA LE IMMAGINI SONO UGUALI, IN CONTRADDIZIONE CON L'INIETTIVITÀ IPOTIZZATA $\Rightarrow$ TEOREMA DIMOSTRATO

ANALOGAMENTE SI DIMOSTRA $\boxed{2}$

MONOTONIA E CONTINUITÀ: SIA $f(x): I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ MONOTONA NON DECRESCENTE / CRESCENTE. DAL TEOREMA DI ESISTENZA DEL LIMITE DESTRO E SINISTRO, SI HA CHE $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ / $\underbrace{\lim_{x \to x_0^-} f(x)}_{\sup\{f(x) \mid x < x_0\}} \leq f(x_0) \leq \underbrace{\lim_{x \to x_0^+} f(x)}_{\inf\{f(x) \mid x > x_0\}}$

NON DECRESCENTE. $\lim_{x \to x_0^+} f(x) > f(x_0) \Rightarrow \{x \in I \mid x > x_0\} = \emptyset$. DETTO $l^+ = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ L'ESTREMO INFERIORE, SI HA CHE $y \in (f(x_0), l_+) \Rightarrow y \notin I$ PERCHÉ:

- $x \leq x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) < y \Rightarrow f(x) < y \to y \neq f(x)$
- $x \geq x_0 \Rightarrow y < l_+ \leq f(x) \Rightarrow y < f(x) \to y \neq f(x)$

MA $\exists \ y_1 \geq l_+$ CON $y_1 \in f(I) \Rightarrow f(x_0) < y < y_1$ MA $y \notin I$ $\Rightarrow f(I)$ NON È UN INTERVALLO

$f(x)$ È CONTINUA IN I $\Leftrightarrow$ $f(I)$ È UN INTERVALLO

$\Rightarrow f(x)$ CONTINUA $\wedge$ $y_1, y_2 \in f(I)$. SCELTO $y \mid y_1 < y < y_2 \vee y_2 < y < y_1 \xrightarrow{\text{TEOREMA VALORI INTERMEDI}} y \in f(I)$. INTERVALLO ✓

$\Leftarrow$ $f(I)$ È UN INTERVALLO, $f(x)$ MONOTONA $\Rightarrow$ SE NON È CONTINUA, SI AVRÀ SEMPRE CHE $f(I)$ NON È UN INTERVALLO

$\Rightarrow$ SE $f(I)$ È UN INTERVALLO E $f(x)$ È MONOTONA, ALLORA È CONTINUA IN I

INVERTIBILITÀ E CONTINUITÀ: DATA $f(x): [a,b] \to [c,d]$ INVERTIBILE E CONTINUA IN $[a,b]$ $\exists \ f^{-1}(x) \mid f^{-1}(x): [c,d] \to [a,b]$ CONTINUA IN $[c,d]$

$f(x)$ CONTINUA E INVERTIBILE $\Rightarrow$ STRETTAMENTE MONOTONA $\Rightarrow f^{-1}(x)$ STRETTAMENTE MONOTONA CON LO STESSO CARATTERE DI $f(x)$. INOLTRE $f^{-1}([c,d]) = [a,b]$ È UN INTERVALLO E, PER LA CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI MONOTONE, $f^{-1}(x)$ RISULTA CONTINUA IN $[c,d]$

FUNZIONE DERIVABILE: $f(x): [a,b] \to \mathbb{R}$ È DERIVABILE IN $x_0 \in (a,b)$ SE $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$

TALE LIMITE PRENDE IL NOME DI DERIVATA DI $f(x)$ E SI INDICA $D[f(x_0)]$, $f'(x_0)$, $\frac{d}{dx_0} f(x_0)$

EQUAZIONE DELLA RETTA TANGENTE IN x_0 DI $f(x)$: $y = f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

DERIVATA DA DESTRA E DA SINISTRA: UNA FUNZIONE $f(x): I \to \mathbb{R}$ È DERIVABILE A $\overset{SX}{DX}$ IN $x_0 \in I$ SE $\exists \lim_{x \to x_0^\pm} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$ E SARÀ INDICATA COME $D^\pm[f(x_0)]$. GEOMETRICAMENTE SI STA CONSIDERANDO IL ~~m~~ DELLE SOLE RETTE SECANTI DA $\overset{SX}{DX}$ $\Rightarrow$ SI DEFINISCE LA RETTA TANGENTE A $f(x)$ IN $x_0^\pm$ DI EQUAZIONE $y = D^\pm[f(x_0)](x-x_0)+f(x_0)$

DERIVABILITÀ E CONTINUITÀ: SE $f(x): [a,b] \to \mathbb{R}$ $\wedge$ $x_0 \in (a,b)$ $\wedge$ $f(x)$ È DERIVABILE IN x_0, ALLORA $f(x)$ È CONTINUA SU x_0

$$f(x)-f(x_0) = \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{f'(x_0) \in \mathbb{R}} \underbrace{(x-x_0)}_{\to 0} = f'(x_0)\cdot 0 = 0$$

TEOREMA DEL DIFFERENZIALE: SIA $f(x): (a,b) \to \mathbb{R}$ E $x_0 \in (a,b)$. $f(x)$ È DERIVABILE IN x_0, CON $f'(x_0) = l$, $\Longleftrightarrow$ $f(x) = f(x_0) + l(x-x_0) + o(x-x_0)$

$f(x)$ È DERIVABILE IN x_0 E $f'(x_0) = l \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to l$

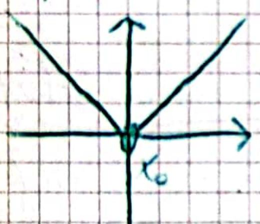
- $l \neq 0 \quad f(x)-f(x_0) \sim l(x-x_0)$
- $l = 0 \quad f(x)-f(x_0) = o(x-x_0)$

$\longrightarrow f(x) = f(x_0) + l(x-x_0) + o(x-x_0)$

PUNTI DI NON DERIVABILITÀ: ~~IN~~ UNA FUNZIONE CONTINUA IN x_0 SI POSSONO TROVARE 3 ~~TIPI~~ POSSIBILI PUNTI DI NON DERIVABILITÀ:

- PUNTO ANGOLOSO: $\exists D^+[f(x_0)] \wedge \exists D^-[f(x_0)]$ MA $D^+[f(x_0)] \neq D^-[f(x_0)]$

$f(x) = |x|$, $x_0 = 0$ È UN PUNTO ANGOLOSO

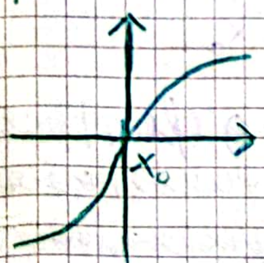


$$|x| = \begin{cases} x & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

$$R_{|x|,0}(x) = \frac{|x|-0}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

- PUNTO A TANGENTE VERTICALE: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty \vee \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$

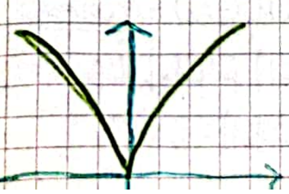
$f(x) = \sqrt[3]{x}$



$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2/3}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

- CUSPIDE: $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty \wedge \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \mp\infty$

$f(x) = \sqrt{|x|}$



$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sqrt{-x}}{x} = \frac{-1}{\sqrt{-x}} = -\infty$$

REGOLE DI DERIVAZIONE: DATE $f(x), g(x): (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, $f(x) \wedge g(x)$

① $D[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$

② DAL TEOREMA DEL DIFFERENZIALE, $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$

SOTTRAENDO

SOMMANDO MEMBRO A MEMBRO

$$f(x) \pm g(x) = (f(x_0) \pm g(x_0)) + (f'(x_0) \pm g'(x_0))(x-x_0) + o(x-x_0)$$

DETTO $f'(x_0) \pm g'(x_0) = l$, PER IL TEOREMA DEL DIFFERENZIALE $f(x) \pm g(x)$ È DERIVABILE IN x_0 E $D[f(x) \pm g(x)] = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

② $D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

② DAL TEOREMA DEL DIFFERENZIALE, $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$

MOLTIPLICANDO MEMBRO A MEMBRO E SEMPLIFICANDO GLI o PICCOLI

$$f(x)\,g(x) = f(x_0)\,g(x_0) + \underbrace{(f(x_0)\,g'(x_0) + f'(x_0)\,g(x_0))}_{l}(x-x_0) + f'(x_0)\,g'(x_0)(x-x_0)$$

DETTO $f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0) = l$, PER IL TEOREMA DEL DIFFERENZIALE $f(x) \cdot g(x)$ È ~~$= f(x_0)g(x_0)+$~~ DERIVABILE E $D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

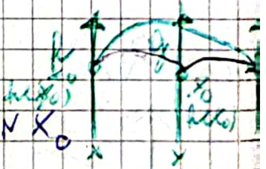
③ SE $g(x)$ È DEFINITA $\forall x_0 \in D_{g(x)} \mid g(x_0) \neq 0$, $D\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

③ 1- $\exists\, \delta > 0 \mid x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \Longrightarrow g(x) \neq 0$

2- $$\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\,\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)\,g(x_0)} = \frac{1}{x-x_0}\,\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f\ldots}{g^2(x)}$$

$$= \frac{1}{g^2(x)} \cdot \left(g(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \right) = \frac{1}{g^2(x)}\left(f'(x)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0) \right)$$

④ SIANO $g(x): (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ E $g(x)$ DERIVABILE IN x_0



$f(x): (c,d) \to (a,b)$, $x_0 \in (c,d)$. $f(x_0) = y_0 \Longrightarrow f(x)$ DERIVABILE IN x_0

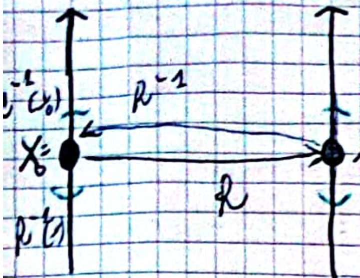
SI HA CHE $g(x) \circ f(x)$ È DERIVABILE E $D[f(x) \circ g(x)]\big|_{x_0} = g'(f(x_0))\,f'(x_0)$

④ 1- $g(x)$ DERIVABILE IN $y_0 = f(x_0) \Longrightarrow$ DAL TEOREMA DEL DIFFERENZIALE, PER $y \to y_0$, $g(y) = g(y_0) + g'(y_0)(y-y_0) + o(y-y_0)$

2- $f(x)$ DERIVABILE IN $x_0 = f(x_0) \Longrightarrow$ DAL TEOREMA DEL DIFFERENZIALE, $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(\ldots)$

LA DERIVABILITÀ DI $f(x)$ DICE CHE $y = f(x) \Longrightarrow f(x_0) = y_0$. POSTO $y = f(x)$, DA "1-" PER
$g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(f(x))(f(x) - f(x_0)) + o(f(x) - f(x_0))$. INOLTRE, PER $y \to y_0$, DA "2-"
$f(x) - f(x_0) = f'(x)(x-x_0) + o(x-x_0)$ SI HA CHE $g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(f'(x)(x-x_0) + o(x-x_0))$ TRASCURABILE RISPETTO A $f(x)(x-x_0)$
$+ o(x-x_0) = g(f(x_0)) + \underbrace{g'(f(x))\,f'(x_0)}_{l}(x-x_0)$ (o PICCOLI SEMPLIFICATI). DETTO $l = g'(f(x_0))\,f'(x_0)$, DAL TEOREMA DEL DIFFERENZIALE $g(f(x))$ È DERIVABILE IN x_0 E $D[g(f(x))]\big|_{x_0} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Sia $f(x)$: ... invertibile $(\ldots)$ continua in (a,b). Supponiamo $x_0 \in (a,b)$ e $f(x)$ ha derivata in x_0 con $f'(x_0) \neq 0$. Allora $f^{-1}(x)$ è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ con $D[f^{-1}(y_0)] = \frac{1}{f'(x_0)}$



Rapporto incrementale di $f^{-1}(x)$ continua in y_0

$y_0 = f(x_0)$ $f^{-1}(y_0) = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$. Si nota che $f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f(x)} =$

se $f(x)$ continua,

$\Rightarrow D[f^{-1}(y_0)] = \frac{1}{\overset{\text{dentro}}{f(x_0)}}$

Una funzione $f(x): I \to \mathbb{R}$ ha massimo in x_0 se $\exists\, \delta > 0 \mid f(x_0) \geq f(x)\ \forall\, x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \cap I$

Una funzione $f(x): I \to \mathbb{R}$ ha minimo relativo in x_0 se $\exists\, \delta > 0 \mid f(x_0) \leq f(x)\ \forall\, x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \cap I$

Teorema di Fermat: Sia $f(x): I \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \overset{\in I}{}$ un massimo (minimo) relativo per $f(x)$ in I. Se $f(x)$ è derivabile in x_0, $f'(x_0) = 0$

Dalla definizione di massimo (minimo) relativo, $\exists\, \delta > 0 \mid f(x_0) \geq f(x)\ \forall\, x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) - f(x_0) \leq 0$

Il rapporto incrementale $R_{f, x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$

$$= \begin{cases} \frac{\leq 0}{\leq 0} & x < x_0 \quad \geq 0 \xrightarrow[x \to x_0^-]{} f'(x_0) \geq 0 \quad \text{per la permanenza del segno} \\ \frac{\leq 0}{\geq 0} & x > x_0 \quad \leq 0 \xrightarrow[x \to x_0^+]{} f'(x_0) \leq 0 \quad \text{per la permanenza del segno} \end{cases}$$

$\Rightarrow 0 \leq f'(x_0) \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$

Teorema di Rolle: Sia $f(x): [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a;b]$ e derivabile in (a,b). Se $f(a) = f(b)$, $\exists\, c \in (a,b) \mid f'(c) = 0$

Essendo continua, dal teorema di Weierstrass $\exists\, x_0, x_1 \in [a;b] \mid f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)\ \forall x \in [a;b]$

Se $x_0 \in [a;b] \vee x_1 \in [a;b]$, dal teorema di Fermat $f'(x_0) = 0 \vee f'(x_1) = 0$. Se $x_0 \wedge x_1 \in \{a, b\}$, essendo $f(a) = f(b)$, si ottiene che $f(x_0) = f(x_1) \rightarrow f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$

$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \Rightarrow f(x_0) = f(x_1)$. La derivata di una costante è nulla e preso un $c \in (a,b)$, si ottiene $0 \leq f'(c) \leq 0 \Rightarrow f'(c) = 0$

Teorema di Lagrange: Sia $f(x): [a;b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a;b]$ e derivabile in $(a;b)$. $\exists\, c \in (a,b) \mid f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Si osservi che, se $f(a) = f(b)$, $f'(c) = 0$ e dunque il teorema di Rolle consegue da quello di Lagrange.

Si consideri $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$. Tale $g(x)$ è definita, continua e derivabile in $[a;b]$ con lo stesso carattere di $f(x)$.

$- g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) - f(a) = 0$

$- g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) - f(a) = \cancel{f(b)} - \cancel{f(b)} + \cancel{f(a)} - \cancel{f(a)} = 0$

$g(a) = g(b) \Rightarrow \exists\, c \in (a,b) \mid g'(c) = 0$ da Rolle $\Rightarrow g'(c) = f'(c) - 0 - 0 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

1° Corollario di Lagrange $\rightarrow$ caratterizzazione differenziale delle costanti: Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ e $f(x): I \to \mathbb{R}$. Se $f(x)$ è costante in I, essa risulta:

① $f(x)$ È CONTINUA IN I ② $f(x)$ È DERIVABILE NEI PUNTI INTERNI DI I ③ $f'(x)=0$; $x \in I$

SIANO $x_1 < x_2 \in I$. L'INTERVALLO $[x_1;x_2] \subseteq I$ E QUINDI $f(x): [x_1;x_2] \to \mathbb{R}$. TALE FUNZIONE, DUNQUE, RISULTA:

① CONTINUA IN $[x_1;x_2]$

② DERIVABILE IN $(x_1;x_2)$

③ PER LAGRANGE $\exists\, c \in (x_1;x_2) \mid f'(c) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \Rightarrow f'(c)(x_2-x_1) = f(x_2)-f(x_1)$

$f'(c)=0 \Rightarrow f'(c)(x_2-x_1) = f(x_2)-f(x_1) = 0$

TEOREMA DELLE PRIMITIVE: SIA I UN INTERVALLO E $f(x): I \to \mathbb{R}$, $F(x)$ E $G(x): I \to \mathbb{R}$ SONO PRIMITIVE DI $f(x)$ IN I. ALLORA $\exists\, c \in \mathbb{R} \mid F(x)-G(x)=c \quad \forall x \in I$

SI CONSIDERI $\Psi(x) = F(x)-G(x)$. ALLORA $\Psi(x): I \to \mathbb{R}$ E TALE FUNZIONE:

- È CONTINUA IN I
- È DERIVABILE NEI PUNTI INTERNI DI I
- $\Psi'(x) = F'(x)-G'(x) = f(x)-f(x) = 0 \ \forall x \in I$

$\Rightarrow$ SODDISFATTE LE IPOTESI DEL CRITERIO DI CARATTERIZZAZIONE DIFFERENZIALE DELLE COSTANTI $\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R} \mid \Psi(x)=c \ \forall x \in I$

CRITERIO DI MONOTONIA LARGA: SIA DATO UN INTERVALLO $I \subseteq \mathbb{R}$ ED $f(x)$ CONTINUA IN I E DERIVABILE NEI PUNTI INTERNI DI I. IN QUESTO INTERVALLO, $f(x)$ È NON DECRESCENTE (CRESCENTE) $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ ($\leq$) $\forall x \in I$

($\Rightarrow$) $f(x)$ È NON DECRESCENTE E DUNQUE $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$. SI CONSIDERI $x_0 \in \mathrm{int}(I)$ E $x \neq x_0$. $R_{f,x_0}(x) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{cases} \geq 0 & x > x_0 \geq 0 \\ \geq 0 & x < x_0 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$ ($\leq$)

($\Leftarrow$) $f'(x) \geq 0$ ($\leq$) $\forall x \in I$. SIANO $x_1 < x_2 \in I \wedge f(x): [x_1,x_2] \to \mathbb{R}$. $f(x)$ È CONTINUA IN $[x_1,x_2]$ E DERIVABILE IN $(x_1,x_2) \Rightarrow \exists\, c \in (x_1,x_2) \mid f(x_2)-f(x_1) = \underbrace{f'(x)}_{\geq 0}\,\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0} \geq 0$ (≤ 0)

CRITERIO DI MONOTONIA STRETTA: SIA DATO UN INTERVALLO $I \subseteq \mathbb{R}$. $f(x): I \to \mathbb{R}$ È CONTINUA IN I E DERIVABILE NEI PUNTI INTERNI DI I. ALLORA $f(x)$ È STRETTAMENTE CRESCENTE (DECRESCENTE) $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ (≤ 0) $\forall x \in I \wedge$ $\wedge$ $f'(x)$ NON È IDENTICAMENTE NULLO IN OGNI SOTTOINTERVALLO $J \subseteq I$

($\Rightarrow$) ANALOGO ALLA DIMOSTRAZIONE PER MONOTONIA LARGA

($\Leftarrow$) PER ASSURDO, SIA $f(x)$ NON STRETTAMENTE CRESCENTE. DAL CRITERIO DI MONOTONIA LARGA $f(x)$ $\Rightarrow f(x)$ È NON DECRESCENTE. SE $f(x)$ NON È STRETTAMENTE CRESCENTE ED È NON DECRESCENTE, ALLORA È COSTANTE. OSSIA $\exists\, x_1, x_2 \in I \mid f(x_1)=f(x_2)$ E $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \ \forall x \in (x_1,x_2)$ $\Rightarrow f'(x)=0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ DAL TEOREMA DI ROLLE, MA PER IPOTESI $f'(x)$ NON È IDENTICAMENTE NULLA. CONTRADDIZIONE $\Rightarrow$ ASSURDO NEGATO $\Rightarrow$ TESI VERIFICATA

CRITERIO DI CONVESSITÀ: SIA $f(x): I \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN I E DERIVABILE NEI PUNTI INTERNI DI I. $f(x)$ RISULTA CONVESSA (CONCAVA) IN $I \Leftrightarrow f'(x)$ È NON DECRESCENTE (CRESCENTE) NEI PUNTI INTERNI DI I

($\Rightarrow$) PRESI $x_1 < x_2 \in I$, BISOGNA VERIFICARE CHE $f'(x_1) \leq f'(x_2)$. PER LA CONVESSITÀ, SI HA $f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1-x_2) \wedge f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2-x_1)$. SOMMANDO MEMBRO A MEMBRO $(\cancel{f(x_1)}+\cancel{f(x_2)}) \geq (\cancel{f(x_1)}+\cancel{f(x_2)}) + \underbrace{(x_2-x_1)}_{>0}\underbrace{(f'(x_1)-f'(x_2))}_{\leq 0} \to f'(x_1) \leq f'(x_2)$ ($\geq$)

($\Leftarrow$) SIA $f'(x)$ UNA FUNZIONE NON DECRESCENTE (CRESCENTE) NEI PUNTI INTERNI DI I E $x_0 < x$ ($>$) IN I. $f(x): [x_0,x] \to \mathbb{R}$ ($[x;x_0]$) È CONTINUA IN $[x_0;x]$ ($[x;x_0]$) E DERIVABILE IN $(x_0;x)$ ($(x;x_0)$) $\xRightarrow{\text{LAGRANGE}} \exists\, c \in (x_0,x) \mid f(x)-f(x_0) ? f'(c)(x-x_0) \Rightarrow f'(c) \geq$ ($\leq$)

$\Rightarrow f(x)-f(x_0) \geq f'(x_0)(x-x_0) \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \quad \forall x \neq x_0$

$x_0 \in D_{f(x)}$ È UN PUNTO DI FLESSO PER $f(x)$ SE $\exists \delta>0 \mid f(x)$ È CONCAVA IN $(x_0-\delta; x_0]$ E CONVESSA IN $[x_0; x_0+\delta)$

CRITERIO DI CONVESSITÀ AL SECONDO ORDINE: $f(x): I \to \mathbb{R}$ È CONTINUA SU I E DERIVABILE DUE VOLTE IN $x_0 \in int(I)$. $f(x)$ È CONVESSA SU $I \Leftrightarrow f'(x)$ È CRESCENTE $\forall x \in int(I) \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \ \forall x \in int(I)$

TEOREMA DI CAUCHY: SIANO DATE DUE $f(x)$ E $g(x): [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUE IN $[a,b]$ E DERIVABILI IN (a,b) E SIA $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$. ALLORA $\exists c \in (a,b) \mid \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

- SE $g(a)=g(b)$, PER ROLLE $\exists \mu \in (a,b) \mid g'(\mu)=0$, IN CONTRADDIZIONE CON LE IPOTESI
- NEL CASO PARTICOLARE $g(x)=x$, $g'(x)=1 \ \forall x \in (a,b) \to \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$, OSSIA LAGRANGE

SI DEFINISCA $\varphi(x) = f(x)(g(b)-g(a)) - g(x)(f(b)-f(a))$. $\varphi(x): [a,b] \to \mathbb{R}$ È CONTINUA IN $[a,b]$ E DERIVABILE IN (a,b). E $\varphi(a) = f(a)g(b) - \cancel{f(a)g(a)} - g(b)g(a) + \cancel{f(a)g(a)}$

$\varphi(b) = \cancel{f(b)g(b)} - f(b)g(a) - \cancel{g(b)f(b)} + f(a)g(a)$

$\varphi(x)$ VERIFICA LE CONDIZIONI DEL TEOREMA DI ROLLE $\Rightarrow \exists c \in (a,b) \mid \varphi'(c)=0$

$\varphi(c) = \varphi'(c) = f'(c)(g(b)-g(a)) - g'(c)(f(b)-f(a)) \Rightarrow f'(c)(g(b)-g(a)) = g'(c)(f(b)-f(a))$

DIVIDENDO MEMBRO A MEMBRO PER $g'(c)(g(b)-g(a))$ ($\neq 0$ PER IPOTESI), $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

TEOREMA DI DE L'HOSPITAL PER $[\frac{0}{0}]$: SIANO $f(x), g(x): (a,b) \to \mathbb{R}$. ENTRAMBE SONO DERIVABILI IN (a,b) E $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$. SE $f(x) \to 0$ E $g(x) \to 0$ PER $x \to a^+ \vee x \to b^-$.
ALLORA SE $\exists \lim_{\substack{x \to a^+ \\ x \to b^-}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{\substack{x \to a^+ \\ x \to b^-}} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

SIA $x_j \in (a,b) \mid x_j \to a^+$ (ANALOGA DIMOSTRAZIONE PER $x_j \to b^-$). DEFINIAMO $\widetilde{f(x)} = \begin{cases} f(x) & x \in (a,b) \\ 0 & x=a \end{cases}$

E $\widetilde{g(x)} = \begin{cases} g(x) & x \in (a,b) \\ 0 & x=a \end{cases}$ $\quad f(x)$ E $g(x) \to 0$ PER $x \to a^+ \Rightarrow \lim_{x \to a^+} \widetilde{f(x)} = \lim_{x \to a^+} f(x) = 0$

$\Rightarrow \widetilde{f(x)}$ È CONTINUA IN a. $\widetilde{f(x)} = f(x)$ IN $(a,b) \Rightarrow \widetilde{f(x)}$ CONTINUA IN $(a,b) \Rightarrow \widetilde{f(x)}$ È CONTINUA IN $[a,b)$ E, ANALOGAMENTE, SI DIMOSTRA CHE $\widetilde{g(x)}$ CONTINUA IN $[a,b)$. IN PARTICOLARE, $\widetilde{f(x)}$ E $\widetilde{g(x)}$ SONO DEFINITE IN $[a, x_j]$ SONO CONTINUE IN $[a, x_j]$ E DERIVABILI IN (a, x_j) CON $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in [a, x_j]$. IN ALTRI TERMINI, $\forall j \in \mathbb{N}$ $\widetilde{f(x)}$ E $\widetilde{g'(x)}$ SODDISFANO IN $[a, x_j]$, LE IPOTESI DEL TEOREMA DI CAUCHY $\Rightarrow \exists \mu_j \in (a, x_j) \mid \frac{f'(\mu_j)}{g'(\mu_j)} = \frac{\widetilde{f}(x_j) + \widetilde{f}(a)}{\widetilde{g}(x_j) + g(a)} \Rightarrow \frac{\widetilde{f}(x_j)}{\widetilde{g}(x_j)} = \frac{f(\ldots)}{f(\ldots)}$

$\Rightarrow \widetilde{f'(x)} = f'(x) \wedge \widetilde{g'(x)} = g'(x) \neq 0$

$a < \mu_j < x_j \xrightarrow{j \to +\infty} x_j \to a \Rightarrow$ PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO $x_j < \mu_j < x_j \Rightarrow \mu_j \to x_j$

$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \xrightarrow{\text{POICHÉ}} \frac{f(x)}{g'(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \Rightarrow \underset{\in(a,b)}{x_j} \to a^+ \Rightarrow \frac{f(x_j)}{g(x_j)} = \frac{f'(\mu_j)}{g'(\mu_j)} \to \ell$

$\forall j \to +\infty \xRightarrow{\text{DONDE}} \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

TEOREMA DI DE L'HOSPITAL PER $[\frac{\infty}{\infty}]$: SIANO $f(x), g(x): (a,b) \to \mathbb{R}$ DUE FUNZIONI DERIVABILI IN (a,b) E $g'(x) \neq 0$. $f(x) \to \pm\infty \wedge g(x) \to \pm\infty$ PER $x \to b^- \vee x \to a^+$. ALLORA SE $\exists \lim_{\substack{x \to b^- \\ x \to a^+}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{\substack{x \to b^- \\ x \to a^+}} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

POLINOMIO DI TAYLOR PER $f(x)$ CON CENTRO IN x_0 E GRADO n: $f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

CRITERIO DI DERIVABILITÀ: SIA $f(x): (a,b) \to \mathbb{R}$ E SI PRENDA UN $x_0 \mid f(x)$ SIA CONTINUA IN (a,b) E DERIVABILE IN $(a,b) / \{x_0\}$. $\exists \lim_{x \to x_0^+} f'(x) = l \in \mathbb{R} \land \lim_{x \to x_0^-} f'(x) = l$

$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{0}{0}$ [FI] $\overset{H}{\Longrightarrow} \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{1} = l$. ANALOGAMENTE $\lim_{\substack{x \to x_0^- \\ \text{continua in } (a,b)}} f'(x) = l$

FORMULA DI TAYLOR CON IL RESTO DI PEANO: SIA $f(x): (a,b) \to \mathbb{R}$ E $x_0 \in (a,b)$. $f(x)$ RISULTA DERIVABILE $n-1$ VOLTE IN (a,b) E n VOLTE IN x_0. ALLORA

$f(x) - P_{f,x_0,n}(x) = o((x-x_0)^n)$ PER $x \to x_0$ $\left(= f(x) - P_{f,x_0,n}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) \right)$

QUANDO $f(0) = 0$

↓

FORMULA DI MCLAURIN

PER INDUZIONE:

$n = 1$ $\quad f(x) - P_{f,x_0,n}(x) = o(x - x_0)$ ✓

SUPPOSTO $n-1$ VERA, $\longrightarrow \frac{f(x) - P_{f,x_0,n}(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{0}{0}$ [FI]

$\overset{H}{\Longrightarrow} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - P_{f',x_0,n-1}(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \lim_{x \to x_0} \frac{o((x-x_0)^{n-1})}{n(x-x_0)^{n-1}} = 0$

FORMULA DI TAYLOR CON IL RESTO DI LAGRANGE: SIA $f(x): (a,b) \to \mathbb{R}$ DERIVABILE $n+1$ VOLTE A DESTRA E A SINISTRA DI UN $x_0 \in (a,b)$ ($\Rightarrow$ DERIVABILE $n+1$ VOLTE IN $(a,b) \setminus \{x_0\}$) E DERIVABILE n VOLTE IN (a,b). ALLORA $\forall x \in (a,b) \setminus \{x_0\} \; \exists \varphi \in (x, x_0) \mid f(x) - P_{f,x_0,n}(x) = \frac{f^{n+1}(\varphi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

DATO $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, LA PARTIZIONE P DI $[a,b]$ È UN INSIEME $P = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < b = x_n\}$.

$\mathcal{P}([a,b])$ INDICA L'INSIEME DI TUTTE LE PARTIZIONI POSSIBILI

LA SOMMA INFERIORE DI $f(x)$ RELATIVA A P È $s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1})$

LA SOMMA SUPERIORE DI $f(x)$ RELATIVA A P È $S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1})$

$s(f,P) \leq S(f,P) \; \forall P \in \mathcal{P}([a,b])$ DATE DUE PARTIZIONI P, Q. $P \subseteq Q \to Q$ È UN RAFFINAMENTO DI P. $s(f,P) \leq s(f,Q)$, $S(f,P) \geq S(f,Q)$

LEMMA DELLA PARTIZIONE: DATE $P_1, P_2 \in \mathcal{P}([a,b])$, SI HA CHE $s(f,P_1) \leq S(f,P_2)$

DETTO $Q = P_1 \cup P_2$ E $Q \subseteq \mathcal{P}([a,b])$. ALLORA $P_1 \subseteq Q \land P_2 \subseteq Q \Rightarrow Q$ È UN RAFFINAMENTO COMUNE. DALLE PROPRIETÀ DEL RAFFINAMENTO E DELLE SOMME INFERIORI E SUPERIORI

$s(f,P_1) \leq s(f,Q) \land S(f,Q) \leq S(f,P_2) \land s(f,Q) \leq S(f,Q)$

$\to s(f,P_1) \leq s(f,Q) \leq S(f,Q) \leq S(f,P_2)$

INTEGRABILITÀ SECONDO RIEMANN: UNA FUNZIONE $f(x): [a,b] \to \mathbb{R}$ LIMITATA È INTEGRABILE SE $\underline{\int_{[a,b]}} f(x)\,dx = \overline{\int_{[a,b]}} f(x)\,dx$

CRITERIO DI INTEGRABILITÀ: SIA $f(x): [a,b] \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE LIMITATA. $f(x)$ È INTEGRABILE PER RIEMANN $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists P \in \mathcal{P}([a,b]) \mid S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$

$\Longrightarrow$ $\overline{\int_{[a,b]}} f(x)\,dx = \underline{\int_{[a,b]}} f(x)\,dx$. FISSATO UN $\varepsilon > 0$, DALLA DEFINIZIONE DI SUP E INF

$\exists P_1 \in \mathcal{P}([a,b]) \mid S(f,P_1) \leq \int_{[a,b]} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} \land \exists P_2 \in \mathcal{P}([a,b]) \mid s(f,P_2) \geq \int f(x)$ ...

SI CONSIDERI LA PARTIZIONE $P = P_1 \cup P_2$, IL RAFFINAMENTO COMUNE A P_1 E P_2
SI HA CHE $S(f,P) - s(f,P) \leq S(f,P_1) - s(f,P_2) \leq \int^{-[a,b]} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} - \int_{-[a,b]} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}$
$\Rightarrow S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$

$\Leftarrow$ SI FISSI $\varepsilon > 0$ E SI SCELGA $P \in \mathcal{P}([a,b]) \mid S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ 0 \leq \int^{-[a,b]} f(x)dx - \int_{-[a,b]} f(x)dx \Rightarrow \int^{-[a,b]} f(x)dx - \int_{-[a,b]} f(x)dx = 0$

TEOREMA DI INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE: SIA $f(x):[a,b] \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE CONTINUA. ALLORA $f(x)$ È INTEGRABILE PER RIEMANN

TEOREMA DI INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI MONOTONE: SIA $f(x):[a,b] \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE MONOTONA. ALLORA $f(x)$ È INTEGRABILE PER RIEMANN

SI CONSIDERI UNA FUNZIONE $f(x)$ NON DECRESCENTE (SIMMETRICAMENTE SI DIMOSTRA IL CASO DELLA NON CRESCENZA). CIÒ SIGNIFICA CHE PRESI $a < b$ NEL DOMINIO DI $f(x)$, $f(a) \leq f(b)$. SE $f(a) = f(b)$ LA FUNZIONE È COSTANTE E QUINDI INTEGRABILE.

SE $f(a) < f(b)$, SI FISSI UN $\varepsilon > 0$ E SI PRENDA UNA PARTIZIONE $P = \{x_0^{a} < x_1 < \dots < x_n^{b}\} \mid \max_{j=1,\dots,n}(x_j - x_{j-1}) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. RELATIVAMENTE A TALE PARTIZIONE SI OTTIENE $S(f,P) - s(f,P)$

$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sup_{[x_{j-1},x_j]} \overset{f(x_j)}{f(x)} - \inf_{[x_{j-1},x_j]} \overset{f(x_{j-1})}{f(x)} \right)(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(f(x_j) - f(x_{j-1})\right)}_{\geq 0} \underbrace{(x_j - x_{j-1})}_{\leq \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}} \leq \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \cdot$

$\cdot \sum_{j=1}^{n} (f(x_j) - f(x_{j-1})) = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \left[f(x_1) - f(\overset{a}{x_0}) + \cancel{f(x_2)} - \cancel{f(x_1)} + \dots + f(\overset{b}{x_n}) - \cancel{f(x_{n-1})} \right] =$

$= \frac{\varepsilon}{\cancel{f(b)-f(a)}} \cancel{f(b)-f(a)} = \varepsilon \Rightarrow S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$

INTEGRALE DEFINITO: $f(x):[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ INTEGRABILE. $a,b \in [\alpha,\beta]$, $f(x)$ È INTEGRABILE IN $[a,b]$

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \begin{cases} \int_{[a,b]} f(x)dx & a < b \\ 0 & a = b \\ -\int_{[a,b]} f(x)dx & a > b \end{cases}$$

(b: 2° ESTREMO DI INTEGRAZIONE; a: 1° ESTREMO DI INTEGRAZIONE)

TEOREMA DELLA MEDIA: SIA $f(x):[a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN TUTTO $[a,b]$. ALLORA $\exists\, \psi \in [a,b] \mid f(\psi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

DAL TEOREMA DI WEIERSTRASS $\exists\, x_0, x_1 \in [a,b] \mid f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)\ \forall x \in [a,b]$. ALLORA, PER LA MONOTONIA/POSITIVITÀ DEGLI INTEGRALI, $\int_{[a,b]} f(x_0)dx \leq \int_{[a,b]} f(x)dx \leq \int_{[a,b]} f(x_1)dx$. DIVIDENDO TUTTO PER $b-a$, $\frac{\int_{[a,b]} f(x_0)dx}{b-a} \leq \frac{\int_{[a,b]} f(x)dx}{b-a} \leq \frac{\int_{[a,b]} f(x_1)dx}{b-a}$. PER LA DEFINIZIONE DI INTEGRALE DEFINITO,

$f(x_0) \leq \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f(x)dx \leq f(x_1) \Rightarrow \frac{\int_{[a,b]} f(x)dx}{b-a}$ È INTERMEDIO A $f(x_0)$ E $f(x_1)$. ESSENDO $f(x)$ CONTINUA IN $[a,b]$, TALE VALORE VIENE ASSUNTO PER LA TERZA FORMA DEL TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

Scansionato con CamScanner

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE: Sia $f(x):[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua. Allora la funzione integrabile di punto iniziale a $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ è la primitiva di $f(x)$ su $[a,b]$, $\forall x\in[a,b]$ e $F(x):[a,b]\to\mathbb{R}$. Risulta che:

1) $F(x)$ è continua in $[a,b]$
2) $F(x)$ è derivabile su $[a,b]$ e $F'(x)=f(x)$ $\forall x\in(a,b)$

~~1) Osserviamo che, essendo F(x)~~

2) Sia $x_0\in(a,b)$. Dal teorema ponte, presa $(x_j)\subseteq(a,b)\setminus\{x_0\}$ $|$ $x_j\to x_0$, notiamo che $f(x)$ è continua nell'intervallo di estremi x_0 e x_j $\Rightarrow$ dal teorema della media, $\exists\psi_j$ $|$ $x_0<\psi_j<x_j$ $\Rightarrow$ $f(\psi_j)=\frac{1}{x_j-x_0}\int_{x_0}^{x_j}f(t)dt$. $x_0\to x_j\xrightarrow{\text{carabinieri}}\psi_j\to x_0\Rightarrow$ Per continuità di $f(x)$ si deriva che $\frac{\int_{x_0}^{x_j}f(t)dt}{x_j-x_0}=f(\psi_j)\overset{*}{=}f(x_0)$. RAPPORTO INCREMENTALE DI F CENTRO x_0 CALCOLATO IN x_j

$$\frac{F(x_j)-F(x_0)}{x_j-x_0}=\frac{1}{x_j-x_0}\left(\int_a^{x_j}f(t)dt-\int_a^{x_0}f(t)dt\right)=\frac{1}{x_j-x_0}\int_{x_0}^{x_j}f(t)dt\xrightarrow{*}f(x_0)$$

1) Osserviamo che, essendo $F(x)$ derivabile in (a,b), risulta continua nei punti interni dell'intervallo. Basta dunque verificare la continuità agli estremi.

- Continua in $a\iff F(x)-F(a)\to0\iff|F(x)-F(a)|\to0\Rightarrow\left|\int_a^x f(t)dt-\int_a^a f(t)dt\right|\dots$

Dal teorema di Weierstrass $\exists M>0$ $|$ $|f(x)|\le M$ $\forall x\in[a,b]\Rightarrow\left|\int_a^x f(t)dt\right|\le\int_a^x|f(t)|dt\le\int_a^x M\,dt=M(x-a)\xrightarrow[x\to a^+]{}0$. Dal teorema del confronto, $\int_a^x f(t)dt\xrightarrow[x\to a^+]{}0\Rightarrow F(x)$ continua in $[a,b)$

Analogamente $F(b)-F(x)=\left|\int_x^b f(t)dt\right|\le\int_x^b|f(t)|dt\le\int_x^b M\,dt=M(b-x)\xrightarrow[x\to b^-]{}0\Rightarrow F(x)$ continua in $(a,b]$

Unendo i due risultati, $F(x)$ è continua in $[a,b]$

Corollario: FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE: Sia $f(x):[a,b]\to\mathbb{R}$ continua e sia $G(x):[a,b]\to\mathbb{R}$ una primitiva di $f(x)$. Allora $\int_a^b f(x)dx=[G(x)]_a^b=G(b)-G(a)$

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale, essendo $f(x)$ continua in $[a,b]$ sappiamo che F è una primitiva di $f(x)$ su $[a,b]$. Per caratterizzazione differenziale delle costanti, essendo $G(x)$ primitiva di $f(x)$ su $[a,b]$, deriviamo che $\exists\, c\in\mathbb{R}$ $|$ $G(x)-F(x)=c$ $\forall x\in[a,b]$. In particolare $G(b)-G(a)=F_b(c)-F_a(c)=\int_c^b f(x)dx-\int_c^a f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$

Integrale improprio tra a e b, con intervallo $[a,b)$: $\int_a^b f(t)dt=\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt$

Integrale improprio su intervallo illimitato: $\int_{-\infty}^a f(t)dt=\lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)dt$; $\int_a^{+\infty}f(t)dt=\lim_{x\to+\infty}$

Se esiste il limite in $\mathbb{R}$, l'integrale è detto convergente. Se il limite è $\pm\infty$, l'integrale è detto positivamente/negativamente divergente

Classificazione dell'integrale improprio $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt$ dato dalla somma di due integrali

- Entrambi gli integrali sono convergenti $\Longrightarrow$ CONVERGENTE
- Entrambi gli integrali divergono con lo stesso carattere $\vee$ uno è convergente $\Longrightarrow$ POSITIVAMENTE/NEGATIVAMENTE DIVERGENTE

- UNO DEI DUE INTEGRALI DIVERGE POSITIVAMENTE E NEGATIVAMENTE $\Longrightarrow$ INDETERMINATO
- UNO DEI DUE INTEGRALI (O ENTRAMBI) È IRREGOLARE $\Longrightarrow$ IRREGOLARE

TEOREMA DEL CONFRONTO PER FUNZIONI DI SEGNO COSTANTE (CASO $f(x): [a,b) \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$)

SIA $f(x): [a,b) \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b)$. $\int_a^b f(x)dx$ È CONVERGENTE O POSITIVAMENTE DIVERGENTE

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$. ESSENDO $f(x) \geq 0$ NEL DOMINIO, $F(x)$ È NON DECRESCENTE $\Rightarrow$ PRESI $x_1, x_2 \in [a,b)$ $F(x_2) - F(x_1) = \int_a^{x_2} f(t)dt - \int_a^{x_1} f(t)dt = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \geq 0$. DALL'ESISTENZA DEL LIMITE DESTRO E SINISTRO PER LE FUNZIONI MONOTONE SI HA CHE $\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)dt =$

$= \sup_{x\in[a,b)} \int_a^x f(t)dt \begin{cases} \in \mathbb{R} \\ \vee \\ +\infty \end{cases}$

CONSEGUENZA: $\int_a^c f(t)dt$ E $\int_c^b f(t)dt$ HANNO LO STESSO CARATTERE. $c \in [a,b)$

PRESO $\int_a^x f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \lim_{x\to b^-} \left[\int_a^c f(t)dt + \int_c^x f(t)dt\right]$

TEOREMA DEL CONFRONTO: SIANO $f(x), g(x): [a,b) \to \mathbb{R}$ CONTINUE E TALI CHE $\exists c \in [a,b) \mid 0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [c,b)$. ALLORA ① $\int_a^b g(t)dt < +\infty \Rightarrow \int_a^b f(t)dt < +\infty$ ② $\int_a^b g(t)dt = +\infty \Rightarrow \int_a^b f(t)dt = +\infty$

① $\int_c^x f(t)dt \leq \int_c^x g(t)dt \leq \sup_{x\in[c,b)} \int_c^x g(t)dt = \int_c^b g(t)dt < +\infty$ $\forall x \in [c,b)$

$\Rightarrow \int_c^b f(t)dt < +\infty$

$0 \leq \int_c^b f(t)dt \leq \int_c^b g(t)dt \Rightarrow$ ENTRAMBI $\int_c^b f(t)dt = +\infty$

$\int_a^b g(t)dt = +\infty \Rightarrow$

- $\int_a^b g(x)dx < +\infty \Rightarrow \int_a^b f(x)dx < +\infty$

② ~~$\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$ (CIOÈ $f(x) = o(g(x))$, PER $x \to b$ SI HA~~

- $\int_a^b g(x)dx = +\infty \Rightarrow \int_a^b f(t)dt = +\infty$

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO: SIANO $f(x), g(x): [a,b) \to \mathbb{R}$ CONTINUE E TALI CHE $\exists c \in [a,b)$ TALE CHE $0 < f(x) \wedge 0 < g(x)$ $\forall x \in [c,b)$. ALLORA:

① $\exists \ell > 0 \mid \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to b^-]{} \ell \Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ E $\int_a^b g(x)dx$ HANNO LO STESSO CARATTERE

② $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$ $(f(x) = o(g(x)))$ $\xRightarrow[x\to b^-]{}$
- $\int_a^b g(x)dx < +\infty \Rightarrow \int_a^b f(x)dx < +\infty$
- $\int_a^b g(x)dx = +\infty \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = +\infty$

① POSTO $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$, OTTENIAMO CHE $\exists \bar{x} \in (c,b) \mid \frac{\ell}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}\ell$ $\forall x \in [\bar{x},b)$. ~~RICORDIAMO~~

$\Rightarrow g(x) > 0 \Rightarrow \frac{\ell}{2} g(x) < f(x) < \frac{3}{2} g(x)$

$\Rightarrow \int_a^b g(x)dx < +\infty \to \int_a^b \frac{3}{2}\ell g(x)dx = \frac{3}{2}\ell \int_a^b g(x)dx < +\infty \Rightarrow \int_{\bar{x}}^b f(x)dx < +\infty \Rightarrow \int_a^b f(x)dx$

② $\exists \bar{x} \in (c,b) \mid 0 < \frac{f(x)}{g(x)} < 1$ $\forall x \in [\bar{x},b)$ $\quad 0 < f(x) < g(x)$

$\int_a^b g(x)dx < +\infty \Rightarrow \int_{\bar{x}}^b g(x)dx < +\infty \Rightarrow \int_{\bar{x}}^b f(x)dx < +\infty = \int_a^b f(x)dx < +\infty$

TEOREMA DI ASSOLUTA CONVERGENZA DELL'INTEGRALE IMPROPRIO: UNA FUNZIONE $f(x): [a,b) \to \mathbb{R}$ CONTINUA È CONVERGENTE SE CONVERGE $\int_a^b |f(x)|dx$ (SE $\exists c \in [a,b) | [c,b) \Rightarrow f(x) \geq 0$) $\int_a^b f(x)dx$ CONVERGE $\Leftrightarrow$ È ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE

$|f(x)| = f(x)$ ($-f(x)$) $\forall x \in [c,b) \Rightarrow \int_c^b |f(x)|dx = \int_c^b f(x)dx$)

TEOREMA DI SEMPLICE E ASSOLUTA CONVERGENZA DELL'INTEGRALE IMPROPRIO: SIA $f(x): [a,b) \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE CONTINUA. SE $\int_a^b |f(x)|dx < +\infty \Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ (CONVERGENZA ASSOLUTA $\Rightarrow$ CONVERGENZA SEMPLICE, $\not\Leftarrow$ NON SEMPRE VALE IL VICEVERSA)

DICIAMO PARTE POSITIVA $f_+(x): [a,b) \to \mathbb{R}$ $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$ E PARTE NEGATIVA $f_-(x)$: $f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$. $\forall x \in [a,b)$ VALE CHE $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ E $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$.

DA CUI RICAVIAMO CHE $f_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}$ E $f_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}$ $\forall x \in [a,b) \Rightarrow f_+(x)$ E $f_-(x)$ SONO CONTINUE E NON NEGATIVE NELL'INTERVALLO $[a,b)$. INOLTRE NOTIAMO $0 \leq f_+(x) \wedge f_-(x) \leq |f(x)|$ $\forall x \in [a,b)$ *

SUPPONENDO $\int_a^b |f(x)|dx < +\infty$, PER CONFRONTO $\int_a^b f_-(x)dx < +\infty$ * $\wedge \int_a^b f_+(x)dx < +\infty$

$\Rightarrow \int_a^x f(t)dt = \int_a^x [f_+(t) - f_-(t)]dt \xRightarrow{x \to b^-} \int_a^b f_+(x)dx - \int_a^b f_-(x)dx \in \mathbb{R}$.

SE $\int_a^b |f(x)|dx < +\infty$, ALLORA $\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt = \int_a^b f_+(t)dt - \int_a^b f_-(t)dt \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \int_a^b f(t)dt$ È SEMPLICEMENTE CONVERGENTE

CONSEGUENZA 1 SIA $f(x): [a,b) \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE CONTINUA E LIMITATA. $\int_a^b f(x)dx$ È ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE

DALLA DEFINIZIONE DI LIMITE SUPERIORE, SI HA CHE $\exists M > 0 | 0 \leq |f(x)| \leq M$ $\forall x \in [a,b)$.
$\int_a^b M dx = \lim_{x \to b^-} \int_a^x M dx = (b-a)M < +\infty$. DAL CRITERIO DEL CONFRONTO $\int_a^b |f(x)|dx < +\infty$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ È CONVERGENTE ASSOLUTAMENTE CONV.

CONSEGUENZA 2 SIA $f(x): [a,b) \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE CONTINUA $| \lim_{x \to b^-} f(x) = l \in \mathbb{R}$. $\int_a^b f(x)dx$

$f(x)$ CONTINUA IN $[a,b)$ E $\lim_{x \to b^-} f(x) = l \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ È LIMITATA IN $[a,b)$. DALLA DEFINIZIONE DI LIMITE $\exists c \in [a,b) | l - 1 < f(x) < l + 1$ $\forall x \in [c,b)$. $f(x)$ RISULTA OV. CONTINUA IN $[a,c]$ E QUINDI LIMITATA IN $[a,c]$. $\Rightarrow f(x)$ LIMITATA IN $[a,c] \wedge [c,b)$
$\Rightarrow$ IN $[a,b) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ È ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE

TALI OSSERVAZIONI VALGONO ANCHE PER $(a,b]$; $(-\infty; a]$; $[a, +\infty)$

DECRESCENTE

CRITERIO INTEGRALE PER SERIE: Sia $f(x): [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua, non decrescente e negativa. Allora $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ ha lo stesso carattere di $\sum_{j=1}^{+\infty} f(j)$

CRESCENTE

Si prenda un $x \in [j, j+1]$. Essendo $f(x)$ non decrescente, si ha $f(j) \geq f(x) \geq f(j+1)$

Integrando i termini di tale disequazione in $[j, j+1]$ e ricordando che $f(j)$ e $f(j+1)$ sono costanti,

$$f(j) \geq \int_j^{j+1} f(x)\,dx \geq f(j+1) \quad \forall j \in \mathbb{N} \xRightarrow[\text{sommatoria}]{\text{facendo}} s_n = \sum_{j=1}^{n} f(j) \geq \int_1^{n} f(x)\,dx \geq \sum_{j=1}^{n} f(j+1) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} f(j) - f(j) = s_{n+1} - f(j)$$

Analizzando per la convergenza (divergenza) $\left(\int_j^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty\right)$, dal teorema ponte $\lim_{j\to+\infty} \int_1^{n+1} f(x)\,dx \geq \int_1 f(x)\,dx \geq$ $\geq \int_1^{n+1} f(x)\,dx$. In particolare $\sum_{j=1}^{n+1} f(j) - f(1) \leq \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$. Da come supposto, $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{+\infty} f(j) < +\infty$$

TEOREMA DEL CONFRONTO PER SERIE A TERMINI POSITIVI (per negativi basta estrarre il "−" dalla somma parziale): Siano $(a_n), (b_n) \subseteq \mathbb{R}$ due serie tali che $a_n \leq b_n$ definitivamente. Allora $\sum_{j=1}^{+\infty} b_j < +\infty \Rightarrow \sum_{j=1}^{+\infty} a_j < +\infty \wedge \sum_{j=1}^{+\infty} a_j = +\infty \Rightarrow \sum_{j=1}^{+\infty} b_j = +\infty$

Supponiamo che $0 \leq a_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, ~~pertanto~~ che $a_n = b_n = 0 \ \forall n \in \{1, \dots, \bar{n}-1\}$

- Chiamiamo $S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$ e $T_n = \sum_{j=1}^{n} b_j \Rightarrow S_n \leq T_n$ visto che $0 \leq a_j \leq b_j \wedge S_n, T_n > 0$. Se $T_n \to t \in \mathbb{R}$, allora $T_n \leq t \ \forall n \Rightarrow S_n \leq t \ (\in \mathbb{R} \Rightarrow S_n < +\infty) \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_n < +\infty$
- Supposto $\sum_{j=1}^{n} a_n = +\infty$, $S_n \to +\infty \Rightarrow T_n \to +\infty \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} b_j = +\infty$

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO: Si prendano due successioni strettamente positive $(a_n) \wedge (b_n) \subseteq \mathbb{R}$

- Se $\exists\, l > 0 \mid \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ hanno lo stesso carattere

- Se $a_n = o(b_n)$ per $n \to +\infty$ $\begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty \\ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty \end{cases}$

- $\frac{a_n}{b_n} \to l > 0$. Fissato $\varepsilon = \frac{l}{2}$, dalla definizione di limite $\frac{l}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2} l \quad \forall n \geq \bar{n}$ ($\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$)

Se b_n converge, anche $\frac{l}{2} b_n < a_n < \frac{3}{2} l\, b_n$ convergono $\Rightarrow$ dal teorema del confronto, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n <$

- $a_n = o(b_n) \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = \frac{o(b_n)}{b_n} = 0$ per $n \to +\infty$. Dalla definizione di limite fissato $\varepsilon = 1$ $0 < \frac{a_n}{b_n} < 1$

$b_n > 0 \Rightarrow 0 < a_n < b_n \Rightarrow$ se b_n converge, a_n converge; se a_n diverge positivamente, b_n diverge positivamente

CRITERIO DEGLI INFINITI: Sia $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ e $a_n > 0$ definitivamente.

- $\exists\, l > 0 \mid n^p a_n \to l \Rightarrow \begin{cases} p > 1 & a_n \text{ converge} \\ p < 1 & a_n \text{ diverge positivamente} \end{cases}$

- $a_n = o\left(\frac{1}{n^p}\right)$ per $n \to +\infty$ e $p > 1 \Rightarrow a_n$ convergente ; $\frac{1}{n^p} = o(a_n)$ per $n \to +\infty$ e $p \leq 1 \Rightarrow a_n$ divergente

CRITERIO DEL RAPPORTO: SIA $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ E $a_n > 0$ DEFINITIVAMENTE $\mid \frac{a_{n+1}}{a_n} \to l$

- $l < 1 \Rightarrow a_n$ CONVERGE
- $l > 1 \Rightarrow a_n$ DIVERGE

- $\forall q \in (l,1] \; \exists \; \nu > 0 \mid 0 < a_n < q^n$, $q < 1 \Rightarrow \sum q^n = \sum q^n - 1 = \frac{1}{1-q} - 1 < +\infty$

$\Rightarrow \sum q^n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$

- $l > 1$: $\cancel{a_n \to +\infty} \Rightarrow a_{n+1} \to a_n l \Rightarrow \cancel{a_n \to +\infty}$ $a_{n+1} \to +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$

CRITERIO DELLA RADICE: SIA $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ E $a_n > 0$ DEFINITIVAMENTE E TALE CHE $\sqrt[n]{a_n} \to l$

- $l < 1 \Rightarrow a_n$ CONVERGE
- $l > 1 \Rightarrow a_n$ DIVERGE

- $\sqrt[n]{a_n} < l < 1 \Longrightarrow$ DALLA DEFINIZIONE DI LIMITE, FISSATO $q \in (l,1)$ $0 < \sqrt[n]{a_n} < q \; \forall n \geq \nu$

$\to 0 < a_n < q^n$ $\quad 0 < q < 1 \Rightarrow q^n$ CONVERGE $\Longrightarrow$ PER CONFRONTO a_n CONVERGE

- FISSATO $q \in (1,l)$, $\sqrt[n]{a_n} > q \Rightarrow a_n > q^n$. POICHÉ q^n DIVERGE $\Rightarrow a_n$ DIVERGE

TEOREMA DI CONVERGENZA SEMPLICE E ASSOLUTA PER LE SERIE NUMERICHE: SE $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ E $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$

ALLORA $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ È CONVERGENTE ($\Longrightarrow$ CONV. ASSOLUTA $\Longrightarrow$ CONV. SEMPLICE)

DEFINIAMO $a_n^+ = \max\{a_n, 0\}$, $a_n^- = \max\{-a_n, 0\} \Rightarrow a_n^+ \wedge a_n^- \geq 0$

$a_n = a_n^+ - a_n^-$; $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$ $\quad a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2}$ $\quad a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2}$

$\Rightarrow 0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$, $0 \leq a_n^- \leq |a_n|$

SE $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$, PER CONFRONTO $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^+ + a_n^-) < +\infty$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (\underbrace{a_n^+}_{<+\infty} - \underbrace{a_n^-}_{<+\infty}) \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ È CONVERGENTE

CRITERIO DI LEIBNIZ: SIA $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$, $a_n > 0$, $\overset{\text{DECRESCENTE}}{a_n > a_{n+1}}$, $a_n \to 0$. $\underset{\text{DISPARI}}{\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n}$ E $\underset{\text{PARI}}{\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n}$ SERIE A TERMINI DI SEGNO ALTERNO

SONO CONVERGENTI CIOÈ HA LIMITE REALE

$S_n = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j a_j$ E $S_{2n+1} = \sum_{j=1}^{2n+1} (-1)^j a_j$

$S_{2n+1} = \sum_{j=1}^{2n} (-1)^j a_j - a_{2n+1} = S_{2n} - \overset{>0}{a_{2n+1}} \Rightarrow S_{2n+1} < S_{2n}$ E $S_{2n+1} - S_{2n} = -a_{2n+1} \to 0$

INOLTRE $S_{2n+1} = \sum_{j=1}^{2n} (-1)^j a_j - a_{2n+1} = \underbrace{\sum_{j=1}^{2n-1} (-1)^j a_j}_{\geq S_{2n-1}} + \underbrace{a_{2n} - a_{2n+1}}_{\geq 0}$

$\Rightarrow S_1 \leq S_3 \leq \dots \leq S_{2n+1} \leq S_{2n}$

ANALOGAMENTE $S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq S_{2n} \Rightarrow S_1 \leq S_3 \leq \dots \leq S_{2n+1} \leq S_{2n} \leq \dots \leq S_4 \leq S_2$

$\Rightarrow S_{2n+1} \to S$, $S_{2n} \to S$ $\Rightarrow S_n \to S \Rightarrow$ CONVERGONO

FORMULA DI EULERO: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \rightarrow e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} (i)^n \frac{\theta^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (i)^{2n} \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} i\,(i)^{2n+1} \cdot \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} \Rightarrow$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos\theta + i\sin\theta$$

IN PARTICOLARE, $e^{i\pi} = -1$. INFATTI $e^{i\pi} = \overset{-1}{\cos\pi} + i\overset{0}{\sin\pi} = -1$