$$A^2B = A\cdot(AB) = \begin{vmatrix}0&2&1\\0&0&3\\0&0&0\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}2\\0\\0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{C} = \begin{vmatrix}1&2&0\\1&0&0\\0&0&0\end{vmatrix} \qquad rk(\mathcal{C}) = rk\begin{vmatrix}0&2&1\\0&0&1\\0&0&0\end{vmatrix} = 2$$

$$C_1 = \begin{vmatrix}1\\1\\0\end{vmatrix},\ C_2 = \begin{vmatrix}2\\0\\0\end{vmatrix},\ C_3 = \begin{vmatrix}a\\b\\c\end{vmatrix} \qquad \begin{cases}C_3 \perp C_1\\ C_3 \perp C_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\langle C_3, C_1\rangle = 0\\ \langle C_3, C_2\rangle = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}a+b=0\\ 2a=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=0\\ b=0\\ c\neq 0,\ \text{AD ESEMPIO } c=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow T^{-1} = \begin{vmatrix}1&2&0\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix} \qquad \det(T^{-1}) = -2$$

$$\Rightarrow T = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0&-2&0\\-1&1&0\\0&0&-2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0&1&0\\ \frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{vmatrix}$$

$$\hat{A} = T\cdot A\cdot T^{-1} = \begin{vmatrix}0&1&0\\ \frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0&2&1\\0&0&3\\0&0&0\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&2&0\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0&0&3\\0&1&-1\\0&0&0\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&2&0\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}$$

$$\hat{A} = \left|\begin{array}{cc|c}0&0&3\\1&0&-1\\ \hline 0&0&0\end{array}\right| \quad \hat{A}_c,\ \hat{A}_1,\ \hat{A}_{nc},\ 0 \qquad \hat{B} = T\cdot B = \begin{vmatrix}0&1&0\\ \frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1\\1\\0\end{vmatrix} \qquad \hat{B} = \begin{vmatrix}1\\0\\ \hline 0\end{vmatrix} \quad \hat{B}_c,\ 0$$

- $$A = \begin{vmatrix}0&2&1\\0&0&3\\0&0&\gamma\end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix}1\\1\\0\end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix}1&1&1\end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix}0\end{vmatrix}$$

$$\mathcal{C} = \begin{vmatrix}B & AB & A^2B\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&2&0\\1&0&0\\0&0&0\end{vmatrix} \qquad \det(\mathcal{C}) = 0 \Rightarrow \text{NON COMPLETAMENTE CONTROLLABILE}$$

$$\mathcal{O} = \begin{vmatrix}C\\CA\\CA^2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1\\0&2&4+\gamma\\0&0&\gamma^2+4\gamma+6\end{vmatrix}$$

$\det(\mathcal{O}) = 2\gamma^2+8\gamma+12 \neq 0$ PER TOTALE OSSERVABILITÀ

$\gamma^2+4\gamma+6=0$

$$\gamma = \frac{-4\pm\sqrt{-8}}{2} = -2\pm\sqrt{-2} = \begin{cases}-2+i\sqrt{2}\\ -2-i\sqrt{2}\end{cases}$$

$\Rightarrow$ IL SISTEMA È OSSERVABILE E NON COMPLETAMENTE CONTROLLABILE PER $\gamma \neq -2+i\sqrt{2}$ E $\gamma \neq -2-i\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ IL SISTEMA È NON COMPLETAMENTE OSSERVABILE E NON COMPLETAMENTE CONTROLLABILE PER $\gamma = -2\pm i\sqrt{2}$

ESAME DEL 08/06/2015

① SIA DATA LA RAPPRESENTAZIONE IN VARIABILI DI STATO DI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + 3x_3(t) + 6u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - 2x_2(t) + 2x_3(t) + 2u(t) \\ \dot{x}_3(t) = -x_3(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_3(t) \end{cases}$$

- STUDIARE LA STABILITÀ, LA CONTROLLABILITÀ E L'OSSERVABILITÀ
- NEL CASO IN CUI IL SISTEMA NON SIA COMPLETAMENTE CONTROLLABILE, STABILIRE SE I MODI NON CONTROLLABILI DEL SISTEMA SIANO STABILI O INSTABILI
- STABILIRE SE I MODI OSSERVABILI DEL SISTEMA SONO STABILI O INSTABILI
- STABILIRE QUALI SONO I MODI DEL SISTEMA CHE SONO CONTEMPORANEAMENTE CONTROLLABILI E OSSERVABILI E, INOLTRE, STABILIRE QUALI MODI SONO CONTEMPORANEAMENTE NON CONTROLLABILI E NON OSSERVABILI

② SIA DATA LA RAPPRESENTAZIONE IN VARIABILI DI STATO DI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \cdot x(k) + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot u(k) \\ y(k) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot x(k) \end{cases}$$

- DATO LO STATO INIZIALE $x(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{vmatrix}$, DETERMINARE LA RISPOSTA LIBERA NELLO STATO E NELL'USCITA IN FUNZIONE DEL TEMPO
- STABILIRE SE È POSSIBILE DETERMINARE UNA OPPORTUNA LEGGE IN RETROAZIONE $u(k) = -K \cdot x(k)$ TALE PER CUI GLI AUTOVALORI DEL SISTEMA A CICLO CHIUSO SIANO ASSEGNABILI AD ARBITRIO. NEL CASO IN CUI QUESTO SIA POSSIBILE, SI DETERMINI LA MATRICE K TALE PER CUI GLI AUTOVALORI DEL SISTEMA A CICLO CHIUSO SIANO PARI A $\lambda_{1DES} = 0$, $\lambda_{2DES} = -1$, $\lambda_{3DES} = -2$

① STABILITÀ

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -3 \\ -1 & \lambda+2 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda+2) = (\lambda^2-1)(\lambda+2)$$

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2$$

- $\lambda_1 = -1$
- $\lambda_2 = 1 > 0 \Longrightarrow$ NON COMPLETAMENTE STABILE
- $\lambda_3 = -2$

CONTROLLABILITÀ

$$C = \begin{vmatrix} B & AB & A^2B \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad AB = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$A^2B = A \cdot AB = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$\Longrightarrow$ SISTEMA NON COMPLETAMENTE CONTROLLABILE POICHÉ $rk(C) = 1 < 3$

OSSERVABILITÀ

$$O = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad CA = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$CA^2 = CA \cdot A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad O = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow rk(O) = 2 < 3 \Rightarrow$ SISTEMA NON COMPLETAMENTE OSSERVABILE

- $$T^{-1} = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix} \quad t_1 = \begin{vmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \begin{cases} \langle t_1, t_3 \rangle = 0 \\ \langle t_1, t_2 \rangle = 0 \\ \langle t_2, t_3 \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow t_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad t_3 = \begin{vmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \det T^{-1} = -(6 \cdot 3 - 2 \cdot (-1)) = 20 \Rightarrow T = \frac{1}{\det T^{-1}} \cdot \begin{vmatrix} \det\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\det\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \det\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\det\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \det\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\det\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \det\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\det\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \det\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{vmatrix}^T$$

$$T = \begin{vmatrix} 0 & +\frac{1}{20} & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ -\frac{1}{10} & +\frac{3}{10} & 0 \end{vmatrix} \quad \hat{A} = T \cdot A \cdot T^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & +\frac{1}{20} & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ -\frac{1}{10} & +\frac{3}{10} & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{vmatrix} \frac{1}{20} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{3}{10} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{6} & -2 \end{vmatrix}$$

$\hat{A}_C$, $\hat{A}_{12}$, $\hat{A}_{NC}$

$\det(\lambda I - \hat{A}_{NC}) = (\lambda+1)(\lambda+2) = 0$ $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ STABILI

$\lambda_1, \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ I MODI NON CONTROLLABILI SONO

- $$T^{-1} = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix} \quad t_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad t_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix} \quad \begin{cases} \langle t_1, t_3 \rangle = 0 \\ \langle t_2, t_3 \rangle = 0 \end{cases} \quad t_3 = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a + 2c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = k \in \mathbb{R} \\ c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow T^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad \det(T^{-1}) = -1$$

$$T = \frac{1}{\det T^{-1}} \begin{vmatrix} -2 & +1 & 0 \\ 0 & & 1 \\ & -1 & 0 \end{vmatrix}^T = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\hat{A} = T \cdot A \cdot T^{-1} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{vmatrix} 9 & 16 & 0 \\ -5 & -9 & 0 \\ -\frac{}{3} & -\frac{}{5} & -2 \end{vmatrix}$$

$\hat{A}_O$, $\hat{A}_1$, $\hat{A}_{NO}$

$$\det(\lambda I - \hat{A}_O) = \det \begin{vmatrix} \lambda - 9 & -16 \\ 5 & \lambda + 9 \end{vmatrix} = \left(\lambda^2 - 81 - (16 \cdot 5)\right)$$

$$= \lambda^2 - 81 - (-80) = \lambda^2 - 1 = (\lambda+1)(\lambda-1)$$

$\lambda_1 = -1$ MODO STABILE

$\lambda_2 = 1$ MODO INSTABILE

Scansionato con CamScanner

- $\lambda = 1$ È CONTEMPORANEAMENTE OSSERVABILE E CONTROLLABILE

  $\lambda = -2$ È CONTEMPORANEAMENTE NON OSSERVABILE E NON CONTROLLABILE

② $A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

- $X(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} X_L(z) = \Phi(z) \cdot X(0) = z \cdot (zI - A)^{-1} \cdot X(0) \\ Y_L(z) = C \cdot X_L(z) \end{array}\right\} \begin{array}{l} X_L(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X_L(z)] \\ Y_L(k) = \mathcal{Z}^{-1}[Y_L(z)] \end{array}$

$$(zI - A) = \begin{vmatrix} z & 1 & -1 \\ -1 & z & -2 \\ 0 & 0 & z+2 \end{vmatrix} \qquad \det(zI - A) = (z+2)(z^2+1)$$

$$(zI-A)^{-1} = \frac{1}{(z+2)(z^2+1)} \cdot \begin{vmatrix} z(z+2) & -(z+2) & z-2 \\ z+2 & z(z+2) & \cancel{2z}+1 \\ 0 & 0 & z^2+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{z}{z^2+1} & -\frac{1}{z^2+1} & \frac{z-2}{(z+2)(z^2+1)} \\ \frac{1}{z^2+1} & \frac{z}{z^2+1} & \frac{z+1}{(z+2)(z^2+1)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{z+2} \end{vmatrix}$$

$$X_L(k) = z \cdot (zI-A)^{-1} \cdot X(0) = \begin{vmatrix} \frac{z^2}{z^2+1} & -\frac{z}{z^2+1} & \frac{z^2-2z}{(z+2)(z^2+1)} \\ \frac{z}{z^2+1} & \frac{z^2}{z^2+1} & \frac{z^2+z}{(z+2)(z^2+1)} \\ 0 & 0 & \frac{z}{z+2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{z}{z^2+1} \\ \frac{z^2}{z^2+1} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\frac{z}{z^2+1} = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+i} = \frac{(z+i)A + (z-i)B}{z^2+1} \quad \begin{cases} (A+B) = 1 \\ (Ai - iB) = 0 \end{cases} \begin{cases} 2A = 1 \\ A = B \end{cases} \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$X_L(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\begin{vmatrix} \frac{1}{2i(z-i)} - \frac{1}{2i(z+i)} \\ \frac{z}{2(z+i)} + \frac{z}{2(z+i)} \\ 0 \end{vmatrix}\right] = \begin{vmatrix} \frac{1}{2i}(-i)^k - \frac{1}{2i}(i)^k \\ \frac{1}{2i}(-i)^k + \frac{1}{2i}(i)^k \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$Y_L(k) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2i}(-i)^k - \frac{1}{2i}(i)^k \\ \frac{1}{2i}(-i)^k + \frac{1}{2i}(i)^k \\ 0 \end{vmatrix} = (-i)^k - (i)^k - \frac{1}{2i}(-i)^k - \frac{1}{2i}(i)^k$$

- $\det(\lambda I - A) = \det \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -1 & \lambda & -2 \\ 0 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda^2+1) \qquad \begin{array}{l} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_{2,3} = \pm 1 \end{array} \neq \lambda_{DES}$

$P(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 2 \qquad \alpha_0 = 2 \quad \alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 2$

$$\mathcal{C} = \begin{vmatrix} B & AB & A^2B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} \qquad \det(\mathcal{C}) = -6 + 8 = 2 \Rightarrow \text{CONTROLLABILE}$$

$q(\lambda) = (\lambda - \lambda_{1DES})(\lambda - \lambda_{2DES})(\lambda - \lambda_{3DES}) = \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)$

$q(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda \qquad \beta_0 = 0 \quad \beta_1 = 2 \quad \beta_2 = 3$

$$T^{-1} = \mathcal{C} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \det(T^{-1}) = -5$$

$$T = \frac{1}{-5} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2/5 & 1/5 & 0 \\ 1/5 & 2/5 & 0 \\ 2/5 & -1/5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$K = \left[(\beta_0 - \alpha_0) \quad (\beta_1 - \alpha_1) \quad (\beta_2 - \alpha_2) \right] \cdot T = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2/5 & 1/5 & 0 \\ 1/5 & 2/5 & 0 \\ 2/5 & -1/5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \end{vmatrix}$$

ESAME DEL 27/07/2015

① SIA DATA LA RAPPRESENTAZIONE IN VARIABILI DI STATO DI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+3 & \alpha-1 \\ \alpha+2 & \alpha+1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{vmatrix} \end{cases}$$

- STUDIARE LA STABILITÀ, LA CONTROLLABILITÀ E L'OSSERVABILITÀ DEL SISTEMA AL VARIARE DI $\alpha \in \mathbb{R}$
- POSTO $\alpha = 0$, CALCOLARE LA RISPOSTA LIBERA NELLO STATO E NELL'USCITA, TENENDO CONTO CHE $x(0) = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}$
- POSTO $\alpha = 2$, STABILIRE SE È POSSIBILE DETERMINARE UNA OPPORTUNA LEGGE IN RETROAZIONE $u(t) = -K \cdot x(t)$ TALE PER CUI GLI AUTOVALORI DEL SISTEMA A CICLO CHIUSO SIANO ASSEGNABILI AD ARBITRIO. NEL CASO IN CUI QUESTO SIA POSSIBILE, SI DETERMINI LA MATRICE K TALE PER CUI GLI AUTOVALORI DEL SISTEMA A CICLO CHIUSO SIANO PARI A $\lambda_{1DES} = -3$, $\lambda_{2DES} = -3$

② SIA DATA LA RAPPRESENTAZIONE IN VARIABILI DI STATO DI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 3x_3(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = 2\alpha x_2(k) + 3\gamma u(k) \\ x_3(k+1) = 2x_1(k) \\ y(k) = 2x_1(k) + \beta x_3(k) \end{cases}$$

CON $x(0) = \begin{vmatrix} 1 \\ 3\gamma \\ 0 \end{vmatrix}$

- DETERMINARE IL VALORE DELLA RISPOSTA LIBERA NELLO STATO ALL'ISTANTE DI TEMPO $k=7$
- DETERMINARE IL VALORE DELLA RISPOSTA FORZATA NELL'USCITA ALL'ISTANTE DI TEMPO $k=4$, RELATIVA ALL'INGRESSO $u(k)=1$ PER $k \geq 0$
- POSTO $\alpha = \beta = \gamma = 0$, DETERMINARE IL VALORE DELLA RISPOSTA TOTALE NELL'USCITA ALL'ISTANTE DI TEMPO $k=4$, RELATIVA ALL'INGRESSO $u(k) = \sin(k\pi)$ PER $k \geq 0$

①

$$A = \begin{vmatrix} \alpha+3 & \alpha-1 \\ \alpha+2 & \alpha+1 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$$

- STABILITÀ

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{vmatrix} \lambda-(\alpha+3) & -(\alpha-1) \\ -(\alpha+2) & \lambda-(\alpha+1) \end{vmatrix} = \Big((\lambda-(\alpha+3))(\lambda-(\alpha+1)) - (\alpha+2)(\alpha-1) \Big) =$$

$$= \lambda^2 - 2\alpha\lambda - 4\lambda + \alpha^2 + 4\alpha + 3 - \alpha^2 + \alpha + 2 \qquad P(\lambda) = \lambda^2 + (2(-\alpha-2))\lambda + (3\alpha+5)$$

TABELLA DI ROUTH

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 3\alpha+5 \\ 1 & -2\alpha-4 & 0 \\ 0 & -3\alpha-5 & \end{array} \qquad -\frac{1}{-2\alpha-4} \det \begin{vmatrix} 1 & 3\alpha+5 \\ -2\alpha-4 & 0 \end{vmatrix} = -3\alpha-5$$

NO CAMBIO DI SEGNO PER $\begin{cases} -2\alpha-4 > 0 \\ 3\alpha+5 > 0 \\ -3\alpha-5 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha < -2 \\ \alpha > -5/3 \\ \alpha < -5/3 \end{cases} \Longrightarrow$ SISTEMA INSTABILE $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

CONTROLLABILITÀ $\mathcal{C} = \begin{vmatrix} B & AB \end{vmatrix}$

$$\mathcal{C} = \begin{vmatrix} 1 & 4\alpha \\ 3 & 4\alpha+5 \end{vmatrix} \qquad \det \mathcal{C} = 4\alpha+5-12\alpha = 5-8\alpha \neq 0 \rightarrow \alpha \neq \frac{5}{8} \Longrightarrow \text{SISTEMA CONTROLLABILE } \forall \alpha \neq \frac{5}{8}$$

OSSERVABILITÀ $\mathcal{O} = \begin{vmatrix} C \\ CA \end{vmatrix}$

$$\mathcal{O} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3\alpha+8 & 3\alpha+1 \end{vmatrix} \qquad \det \mathcal{O} = 6\alpha-2-3\alpha-8 = 3\alpha-10 \neq 0 \rightarrow \alpha \neq \frac{10}{3} \Longrightarrow \text{SISTEMA COMPLETAMENTE OSSERVABILE } \forall \alpha \neq \frac{10}{3}$$

- $Y_L(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot X(0) \qquad Y_L(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_L(s)]$

$$\alpha = 0 \rightarrow A = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 2 & 1 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$$

$$(sI - A) = \begin{vmatrix} s-3 & 1 \\ -2 & s-1 \end{vmatrix} \qquad \det(sI-A) = s^2 - 4s + 3 + 2 = s^2 - 4s + 5 \quad s = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2-4s+5} \cdot \begin{vmatrix} s-1 & 2 \\ -1 & -(s-3) \end{vmatrix}^T = \begin{vmatrix} \frac{s-1}{s^2-4s+5} & -\frac{1}{s^2-4s+5} \\ \frac{2}{s^2-4s+5} & -\frac{s-3}{s^2-4s+5} \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow Y_L(s) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{s-1}{s^2-4s+5} & -\frac{1}{s^2-4s+5} \\ \frac{2}{s^2-4s+5} & -\frac{s-3}{s^2-4s+5} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2s}{s^2-4s+5} & -\frac{s-1}{s^2-4s+5} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix},$$

$$Y_L(s) = \frac{3s+1}{s^2-4s+5} = \frac{A}{(s-2+i)} + \frac{B}{(s-2-i)} = \frac{(s-2-i)A + (s-2+i)B}{s^2-4s+5}$$

$$\begin{cases} A+B = 3 \\ A-B = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = B \\ 2B = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 3/2 \\ B = 3/2 \end{cases}$$

$$Y_L(s) = \frac{3}{2(s-2+i)} + \frac{3}{2(s-2+i)}$$

$$\Longrightarrow Y_L(t) = \frac{3}{2} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2+i} + \frac{1}{s-2+i} \right] = \frac{3}{2} e^{(2-i)t} + \frac{3}{2} e^{(2+i)t}$$

•

$\alpha = 2 \longrightarrow A = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 2 & 1 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$

$P(\lambda) = \lambda^2 + (2(-2-2))\lambda + (3\cdot 2+5) \Rightarrow P(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 11 \qquad \lambda = \dfrac{16 \pm \sqrt{64-44}}{2} = 4 \pm \sqrt{5}$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 4+\sqrt{5} \neq \lambda_{1DES} = -3 \\ \lambda_2 = 4-\sqrt{5} \neq \lambda_{DES} = -3 \end{cases}$

$\alpha_0 = 11 \qquad \alpha_1 = -8$

GIÀ VERIFICATA LA CONTROLLABILITÀ

$q(\lambda) = (\lambda - \lambda_{1DES})(\lambda - \lambda_{2DES}) = (\lambda+3)(\lambda+3) = (\lambda+3)^2 = \lambda^2 + 6\lambda + 9$

$\beta_0 = 9 \qquad \beta_1 = 6$

$T^{-1} = C \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 13 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -8 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -11 & 3 \end{vmatrix} \qquad \det(T^{-1}) = 11$

$\Rightarrow T = \dfrac{1}{11} \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}^T = \begin{vmatrix} 3/11 & -1/11 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

$K = \left[(\beta_0 - \alpha_0) \quad (\beta_1 - \alpha_1) \right] \cdot T = \begin{vmatrix} -2 & 14 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3/11 & -1/11 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{148}{11} & \frac{2}{11} \end{vmatrix}$

②

$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2\alpha & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 3\gamma \\ 0 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \beta \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$

• $K = 7$

$X_L(k) = A^k \cdot X(0)$ POICHÉ DIAGONALE, $A^k = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3^k \\ 0 & 2\alpha^k & 0 \\ 2^k & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad X(0) = \begin{vmatrix} 1 \\ 3\gamma \\ 0 \end{vmatrix}$

$X_L(7) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3^7 \\ 0 & (2\alpha)^7 & 0 \\ 2^7 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 3\gamma \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ (2^7\cdot 3)(\alpha^7\gamma) \\ 2^7 \end{vmatrix}$

• $K = 4 \qquad U(k) = 1$

$Y_F(k) = C \cdot X_F(k)$

$X_F(4) = \sum_{i=0}^{3 = k-1} A^{k-i+1} \cdot B \cdot U(k) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2\alpha & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 3\gamma \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 3\gamma \\ 0 \end{vmatrix}$

$+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 18 \\ 0 & 8\alpha^3 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 3\gamma \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 2\alpha\gamma \\ 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 \\ 12\alpha^2\gamma \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 24\alpha^3\gamma \\ 12 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 6 \\ 2\alpha\gamma + 12\alpha^2\gamma + 24\alpha^3\gamma \\ 14 \end{vmatrix} \qquad Y_F(k) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \beta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 6 \\ 2\alpha\gamma + 12\alpha^2\gamma + 24\alpha^3\gamma \\ 14 \end{vmatrix} = 12 + 14\beta$

- $K=4 \quad \alpha=\beta=\gamma=0$

$$A=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad B=\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad C=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad D=\begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$$

$$Y_L = C \cdot X_L = C \cdot A^4 \cdot X(0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = 72$$

$$Y_F = C \cdot X_F = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \left(A^3 \cdot B \cdot \sin(0) + A^2 \cdot B \cdot \sin(\pi) + A \cdot B \cdot \sin(2\pi) \right) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow Y_{tot}(K) = 72$

ESAME DEL 17/09/2015

① SIA DATA LA RAPPRESENTAZIONE IN VARIABILI DI STATO DI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_3(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t) + x_2(t) + 2x_3(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) + 4x_3(t) \end{cases}$$

- STUDIARE LA STABILITÀ, LA CONTROLLABILITÀ E L'OSSERVABILITÀ DEL SISTEMA
- POSTO $X(0) = \begin{vmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$, CALCOLARE LA RISPOSTA LIBERA NELLO STATO E NELL'USCITA
- CALCOLARE LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO INGRESSO-USCITA

② SIA DATA LA RAPPRESENTAZIONE IN VARIABILI DI STATO DI UN SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + x_3(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = x_3(k) + u(k) \\ x_3(k+1) = 0 \\ y(k) = x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) \end{cases}$$

- DETERMINARE LA RISPOSTA FORZATA IN USCITA DEL SISTEMA SOLLECITATO DA UN INGRESSO A GRADINO UNITARIO
- SCOMPORRE IL SISTEMA NELLA FORMA CANONICA (controllabile) DI KALMAN
- POSTO $x_3(k+1) = \gamma x_2(k)$, DETERMINARE PER QUALI VALORI DI $\gamma \in \mathbb{R}$ IL SISTEMA DUALE RISULTA CONTROLLABILE E/O OSSERVABILE

① $A=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad B=\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad C=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \quad D=\begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$

- STABILITÀ

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)\left((\lambda+1)(\lambda-2) - 1\right) = (\lambda+1)(\lambda^2-\lambda-3)$$

Scansionato con CamScanner

$\lambda_1 = -1 \quad < 0$

$\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \quad > 0 \implies$ SISTEMA INSTABILE

$\lambda_3 = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \quad < 0$

CONTROLLABILITÀ $\mathcal{C} = \begin{vmatrix} B & AB & A^2B \end{vmatrix}$

$$AB = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix} \qquad A^2B = A \cdot AB = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}$$

$$\implies \mathcal{C} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \quad \det(\mathcal{C}) = 1 \cdot (-4) + 1 \cdot (2) + 3 \cdot (2) = 4 \neq 0 \implies \text{SISTEMA COMPLETAMENTE CONTROLLABILE}$$

OSSERVABILITÀ $\mathcal{O} = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{vmatrix}$

$$CA = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

$$CA^2 = CA \cdot A = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 9 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 6 & 21 \end{vmatrix}$$

$$\implies \mathcal{O} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 9 \\ 6 & 6 & 21 \end{vmatrix} \quad \det(\mathcal{O}) = \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 = 0 \implies \text{SISTEMA NON COMPLETAMENTE OSSERVABILE}$$

$$rk(\mathcal{O}) = rk \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = rk \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = rk \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

- $X_L(s) = (sI-A)^{-1} \cdot X(0) \implies X_L(t) = \mathcal{L}^{-1}[X_L(s)] \qquad Y_L(t) = C \cdot X_L(t)$

$$(sI-A) = \begin{vmatrix} s+1 & 0 & -1 \\ 0 & s+1 & 0 \\ s+1 & -1 & s-2 \end{vmatrix} \quad \det(sI-A) = (s+1)(s^2-s-3)$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s^2-s-3)} \cdot \begin{vmatrix} (s+1)(s-2) & 1 & s+1 \\ 0 & \underbrace{s^2-s-2+s+1}_{=(s-1)(s+1)} & 0 \\ (s+1)^2 & -(s+1) & (s+1)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/(s^2-s-3) & \frac{1}{(s+1)(s^2-s-3)} & \frac{1}{s^2-s-3} \\ 0 & \frac{s-1}{s^2-s-3} & 0 \\ \frac{s+1}{s^2-s-3} & -\frac{1}{s^2-s-3} & \frac{s+1}{s^2-s-3} \end{vmatrix}$$

$$X_L(s) = (sI-A)^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/(s+1)(s^2-s-3) \\ (s-1)/(s^2-s-3) \\ -1/(s^2-s-3) \end{vmatrix}$$

$$Y_L(s) = C \cdot X_L(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2-s-3)} + \frac{s-1}{s^2-s-3} - \frac{4}{s^2-s-3} = \frac{s^2-s-3+s-1-1}{(s+1)(s^2-s-3)} = \frac{s^2-8}{(s+1)(s^2-s-3)}$$

- $W(s) = C\cdot(sI-A)^{-1}\cdot B \qquad W(t) = \mathcal{L}^{-1}[W(s)]$

$$W(s) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1/(s^2-s-3) & 1/(s+1)(s^2-s-3) & 1/(s^2-s-3) \\ 0 & (s-1)/(s^2-s-3) & 0 \\ (s+1)/(s^2-s-3) & -1/(s^2-s-3) & (s+1)/(s^2-s-3) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\frac{2(s+1)-1}{s^2-s-1}$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{2(s+1)+1}{(s+1)(s^2-s-3)} & \dfrac{s-1}{s^2-s-3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{2(s+1)+1}{(s+1)(s^2-s-3)} + \frac{s-1}{s^2-s-3} = \frac{2s+3+s^2-1}{(s+1)(s^2-s-3)} = \frac{s^2+2s+2}{(s+1)(s^2-s-3)} = \frac{s+1}{s^2-s-3}$$

$$\rightarrow y''(t) - y'(t) - 3y(t) = u(t) + u'(t)$$

② $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$

- $Y_F(z) = C\cdot(zI-A)^{-1}\cdot B\cdot U(z) \qquad U(z)=1 \qquad Y_F(k) = \mathcal{Z}^{-1}[Y_F(z)]$

$$(zI-A) = \begin{vmatrix} z-1 & 0 & -1 \\ 0 & z & -1 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} \qquad \det(zI-A) = z^2(z-1)$$

$$\rightarrow (zI-A)^{-1} = \frac{1}{z^2(z-1)} \begin{vmatrix} z^2 & 0 & +z \\ 0 & z(z-1) & z-1 \\ 0 & 0 & z(z-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{z-1} & 0 & \frac{1}{z(z-1)} \\ 0 & \frac{1}{z} & \frac{1}{z^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{z} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow Y_F(z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{z-1} & 0 & \frac{1}{z(z-1)} \\ 0 & 1/z & 1/z^2 \\ 0 & 0 & 1/z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{z-1} & \frac{1}{z} & \frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z} \Rightarrow Y_F(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z-1}\right] + \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z}\right]$$

- $\mathcal{C} = \begin{vmatrix} B & AB & A^2B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad rk(\mathcal{C}) = 2 < 3$

$$t_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad t_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{cases} \langle t_1, t_3 \rangle = 0 \\ \langle t_2, t_3 \rangle = 0 \end{cases} \quad \text{DOVE} \quad t_3 = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} a+b = 0 \\ a = 0 \\ c \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases} \rightarrow t_3 = 1 \Rightarrow T^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(T^{-1}) = -1 \Rightarrow T = -\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\tilde{A} = T\cdot A\cdot T^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$