LOGICHE MODALI NORMALI

Abbiamo già mostrato che lo schema di formule K: $\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B)$ è valido, $\models K$. Adesso vediamo che lo schema di formule $def_\Diamond : \Diamond A \Leftrightarrow \neg\Box\neg A$ è valido, $\models def_\Diamond$

Sia (S,R) un frame, M un modello su (S,R) e $w \in S$. Allora

$M \models_w \Diamond A \Leftrightarrow \exists v \in S \mid (w,v) \in R \land M \models_v A$. $M \models_w \neg\Box\neg A \Leftrightarrow M \not\models_w \Box\neg A$

$\Leftrightarrow \exists v \in S \mid (w,v) \in R,\ M \not\models_v \neg A \Leftrightarrow \exists v \in S \mid (w,v) \in R \land M \models_v A$ ■

SOSTITUZIONE UNIFORME

Sia x una variabile e F una formula. Definiamo l'operazione di sostituzione uniforme di F al posto di x in una formula $G \Rightarrow$ indichiamo con $G[F/x]$ la formula ottenuta da G dove ogni occorrenza di x è sostituita con F

ESEMPIO: Sia G la formula $\Box x \Rightarrow x \land y$, e F la formula $\Diamond y \Leftrightarrow \neg\Box\neg y$.

Allora $G[F/x]$ è la formula $\Box(\Diamond y \Leftrightarrow \neg\Box\neg y) \Rightarrow (\Diamond y \Leftrightarrow \neg\Box\neg y)$.

Una logica modale normale è un insieme T di formule tale che:

- T contiene tutte le tautologia della logica proposizionale

- T CONTIENE TUTTE LE ISTANZE DELLO SCHEMA K: $\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B)$
- T CONTIENE TUTTE LE ISTANZE DELLO SCHEMA $def_{\Diamond}$: $\Diamond A \Leftrightarrow \neg \Box \neg A$
- È CHIUSO SOTTO MODUS PONENS: $A \in T \wedge (A \Rightarrow B) \in T \Rightarrow B \in T$
- È CHIUSO SOTTO NECESSITAZIONE: $A \in T \Rightarrow \Box A \in T$
- È CHIUSO SOTTO SOSTITUZIONE UNIFORME: $A \in T \Rightarrow A[B/x] \in T$

ESEMPI:

a) (S, R) È UN FRAME $\Rightarrow \{F \mid (S,R) \models F\}$ È UNA LOGICA NORMALE

b) $\{F \mid \models F\}$ È UNA LOGICA NORMALE

c) M È UN MODELLO SU UN FRAME $(S,R) \Rightarrow \{F \mid M \models F\}$ NON È UNA LOGICA NORMALE

LA LOGICA MODALE K È DEFINITA DAI SEGUENTI SCHEMI DI ASSIOMI E REGOLE:

a) SCHEMI DI ASSIOMI:
- TUTTE LE TAUTOLOGIE DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE
- K: $\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B)$
- $def_{\Diamond}$: $\Diamond A \Leftrightarrow \neg \Box \neg A$

b) REGOLE DI INFERENZA:
- MODUS PONENS
- NECESSITAZIONE
- SOSTITUZIONE UNIFORME

DEFINIZIONE) DATA UNA LOGICA MODALE L, UNA DIMOSTRAZIONE IN L È UNA SUCCESSIONE FINITA DI FORMULE | OGNUNA DI ESSE O È UN ASSIOMA O OTTENUTA DALLE FORMULE PRECEDENTI DELLA SUCCESSIONE VIA APPLICAZIONE DI UNA DELLE REGOLE DI INFERENZA

DEFINIZIONE) UNA FORMULA F SI DICE TEOREMA DI L E SCRIVIAMO $\vdash_L F$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ DIMOSTRAZIONE IN L LA CUI ULTIMA FORMULA É F

ESEMPIO: $\Box(A \wedge B) \Rightarrow \Box A$ È UN TEOREMA DELLA LOGICA K. INFATTI:

- $\vdash_K A \wedge B \Rightarrow A$ (TAUTOLOGIA)
- $\vdash_K \Box(A \wedge B \Rightarrow A)$ (NECESSITAZIONE)
- $\vdash_K \Box(A \wedge B \Rightarrow A) \Rightarrow (\Box(A \wedge B) \Rightarrow \Box A)$ (K)
- $\vdash_K \Box(A \wedge B) \Rightarrow \Box A$ (MODUS PONENS)

TEOREMA: L'INSIEME $\{F : \vdash_K F\}$ È CHIUSO SOTTO SOSTITUZIONE UNIFORME.

NELLE LOGICHE EPISTEMICHE SI ESTENDE LA LOGICA K AGGIUNGENDO LO SCHEMA DI ASSIOMI $\Box F \Rightarrow F$ CHE, COME GIÀ VISTO, NON VOGLIAMO COME ASSIOMA DI UNA LOGICA DEONTICA (SE F É OBBLIGATORIO, NON È DETTO CHE F VALGA). LA LOGICA K A CUI AGGIUNGIAMO L'ASSIOMA $\Box F \Rightarrow F$ È DETTA "LOGICA T". POICHÉ LO SCHEMA DI FORMULE $\Box F \Rightarrow F$, I TEOREMI DELLA LOGICA NORMALE T SONO

Validi su frame riflessivi. Se accettiamo il principio di introspezione epistemica positiva, ossia se assumiamo che ogni volta che si sa qualcosa si sa di sapere, aggiungiamo l'assioma $\Box F \Rightarrow \Box\Box F$. Avremmo così definito la logica S_4. I teoremi della logica normale S_4 sono validi su frame riflessivi e transitivi, perché lo schema di formule $\Box F \Rightarrow \Box\Box F$ esprime la transitività. Se accettiamo anche il principio di introspezione epistemica negativa, ossia se ogni volta che non sappiamo qualcosa sappiamo di non saperla, aggiungiamo l'assioma $\neg\Box F \Rightarrow \Box\neg\Box F$. La logica K, con questi nuovi assiomi, è detta S_5. Ora, vediamo che i teoremi di questa logica sono validi su frame riflessivi, simmetrici e transitivi (ossia sulle relazioni di equivalenza). Dobbiamo solo far vedere la validità sui frame simmetrici. Deriviamo lo schema di formule $F \Rightarrow \Box\Diamond F$ da S_5:

- $\vdash_{S_5} \neg\Box\neg F \Rightarrow \Box\neg\Box\neg F$
- $\vdash_{S_5} \Diamond F \Rightarrow \Box\Diamond F$ — 1 + def$_\Diamond$
- $\vdash_{S_5} \Box\neg F \Rightarrow \neg F$ — assioma T
- $\vdash_{S_5} \neg\neg F \Rightarrow \neg\Box\neg F$ — 3 + tautologia
- $\vdash_{S_5} F \Rightarrow \Diamond F$ — 4 + def$_\Diamond$ + tautologia
- $\vdash_{S_5} F \Rightarrow \Box\Diamond F$ — transitività di $\Rightarrow$ + 5 + 2

$\Rightarrow$ $F \Rightarrow \Box\Diamond F$ è un teorema di S_5

ADESSO MOSTRIAMO CHE $\neg\Box F \Rightarrow \Box\neg\Box F$ È UN TEOREMA DI K+

$\Box F \Rightarrow F$	
$\Box F \Rightarrow \Box\Box F$	
$F \Rightarrow \Box\Diamond F$	
$\vdash \Box\Box F \Leftrightarrow \Box F$	$1 \wedge 2$
$\vdash \Box\neg\neg\Box\neg F \Leftrightarrow \neg\Box\neg F$	4 + TAUTOLOGIA
$\vdash \Diamond\Diamond F \Leftrightarrow \Diamond F$	$\text{def}_\Diamond$
$\vdash \Diamond F \Rightarrow \Box\Diamond\Diamond F$	3
$\vdash \Box(\Diamond\Diamond F \Rightarrow \Diamond F)$	6 + NECESSITAZIONE
$\vdash \Box\Diamond\Diamond F \Rightarrow \Box\Diamond F$	SCHEMA K + MODUS PONENS
$\vdash \Diamond F \Rightarrow \Box\Diamond F$	7 + 9
$\vdash \neg\Box\neg F \Rightarrow \Box\neg\Box\neg F$	$\text{def}_\Diamond$
$\vdash \neg\Box F \Rightarrow \Box\neg\Box F$	$\neg\neg \equiv \neg$, TAUTOLOGIA

$\Rightarrow$ LA LOGICA BASATA SUI PRINCIPI EPISTEMICI CHE ABBIAMO CONSIDERATO RAGIONEVOLI, SI SUPPORTA SU FRAME CHE SONO RELAZIONI DI EQUIVALENZA

DEFINIZIONE) UNA LOGICA L È VALIDA SE $\vdash_L A \Rightarrow \models A$

TEOREMA: LA LOGICA K È VALIDA

DIM

SIA $B_1, B_2, \dots, B_n$ UNA DIMOSTRAZIONE DI A IN K CON $B_n \equiv A$. B_1 È VALIDA PERCHÉ È UN ASSIOMA. SE $i > 1$, B_i È UN ASSIOMA E ALLORA È VALIDA, OPPURE È OTTENUTA DA B_j, CON $j < i$, VIA NECESSITAZIONE O DA B_j E B_h CON $j < i$ E $h < i$ VIA MODUS PONENS.

PRIMO CASO) $\vdash_K B_j$. PER INDUZIONE $\models B_j \Rightarrow \models \Box B_j \Rightarrow B_i \equiv \Box B_j$ È VALIDA

SECONDO CASO) $\vdash_K B_j$. $\vdash_K B_h$, DOVE $B_h \equiv B_j \Rightarrow B_i$. ALLORA, PER INDUZIONE, $\models B_j$. $\models B_j \Rightarrow B_i \Rightarrow \models B_i$

$\blacksquare$

DEFINIZIONE) UNA LOGICA L È COMPLETA SE $\models A \Rightarrow \vdash_L A$

TEOREMA: LA LOGICA K È COMPLETA

LOGICHE MULTIMODALI E CONNETTIVI MODALI n-ARI

FINORA ABBIAMO STUDIATO LOGICHE CON UN SOLO CONNETTIVO MODALE 1-ARIO $\Box$, E COME VISTO IN INTRODUZIONE DEFINIRE $\Diamond$ DI CONSEGUENZA. IL CONNETTIVO $\Box$ ERA 1-ARIO NEL SENSO CHE SI APPLICAVA AD UNA SOLA FORMULA. ADESSO, CONSIDERIAMO LOGICHE MODALI CON PIÙ DI UN CONNETTIVO MODALE $\Box_1, \Box_2 \dots$ E CONNETTIVI MODALI n-ARI, OSSIA $\Box(F_1, \dots, F_n)$ DOVE $F_1, \dots, F_n$ SONO FORMULE