Ensimag 2A **2016-17**

Modélisation en Biologie

Mini-projet : Algorithme d'optimisation de réseau inspiré d'une moisissure

Travail encadré en séance à remettre la semaine du 27 mars.

Les réseaux de transport sont un élément essentiel de nos sociétés modernes. Malgré leur importance, la plupart des réseaux ont vu le jour sans principes de conception globale clairs et sont limités par les priorités choisies à l'origine. Historiquement la principale motivation était d'atteindre une haute efficacité de transport à un coût raisonnable, sans se préoccuper de la tolérance à l'erreur. Introduire de la robustesse exige inévitablement des voies redondantes supplémentaires qui ne sont pas rentables à court terme. Le critère de robustesse, combiné à celui du coût minimal, est particulièrement difficile à optimiser.
Certains organismes vivants se développent sous la forme d'un réseau dans le cadre de leur stratégie d'alimentation. Pour découvrir et exploiter de nouvelles ressources ces systèmes s'adaptent en permanence à leur environnement et mettent en balance le coût de production d'un réseau efficace avec les conséquences d'un échec, même limité, dans un monde concurrentiel.
Dans ce projet nous allons voir comment l'observation expérimentale du comportement de la moisissure *Physarum polycephalum* permet de concevoir un nouveau type d'algorithme d'optimisation de réseau de transport. Ce type d'algorithme, dit *bio-inspiré*, est fondé sur l'idée que les espèces ont été soumis à la pression de la sélection naturelle pendant des millions d'années, et ont développé des capacités qui peuvent être exploitées pour résoudre des problèmes combinatoires en optimisant coût, efficacité, et robustesse.

Partie 1. L'expérience avec *P. polycephalum*

P. polycephalum est un organisme unicellulaire ressemblant à une amibe. La principale phase végétative de *P. polycephalum* est le plasmode. Un plasmode est une masse de cytoplasme contenant de nombreux noyaux. C'est au cours de cette étape que l'organisme explore et cherche de la nourriture. Il développe des protubérances et s'étale. Il entoure sa nourriture et sécrète des enzymes pour la digérer. Le corps du plasmode contient un réseau dynamique de tubes (des sortes de veines protoplasmiques), ce qui permet aux nutriments et signaux chimiques de circuler à travers l'organisme.

Des chercheurs japonais (Tero *et al.*, Science, 2010) ont utilisé cet être unicellulaire pour lui faire jouer le rôle d'un ingénieur devant concevoir le réseau ferroviaire de la région de Tokyo. L'expérience est la suivante : des sources de nourriture ont été placées en différents endroits d'une surface plane correspondant aux 36 villes principales de la région de Tokyo. Un plasmode de moisissure est ensuite lâché sur cette surface. Avec le temps un réseau de tubes se forme (Fig. 1).

1. Décrire les étapes de l'évolution (fig.1 et/ou vidéos). Comment évolue le réseau de veines ?

2. Comparer avec le réseau ferroviaire réel de la région de Tokyo (fig. 2 à gauche).

3. La partie droite de la figure 2 donne un arbre couvrant de poids minimal (*Minimum Spanning Tree*, MST) de l'ensemble de points représentant les villes (en prenant comme poids d'un lien la distance entre villes). Que représente cet arbre dans le contexte d'un réseau de transport ? Comparer cet arbre au réseau généré par *P. polycephalum*. Trouver un autre MST qui respecte le tracé de la côte maritime.

4. Construire une triangulation de Delaunay de l'ensemble de points et comparer avec le réseau généré par *P. polycephalum*.

5. Réfléchir à l'analogie entre le développement du réseau de veines de la moisissure et celui d'un réseau de voies ferrées (quels sont les points qui soutiennent cette analogie ? Quels sont les points qui l'affaiblissent ?).

Noter qu'il est possible d'augmenter le réalisme de l'analogie en prenant en compte la topographie du terrain (régions montagneuses). En effet, *P. polycephalum* ayant tendance à éviter la lumière, il suffit d'éclairer un peu plus les zones concernées.

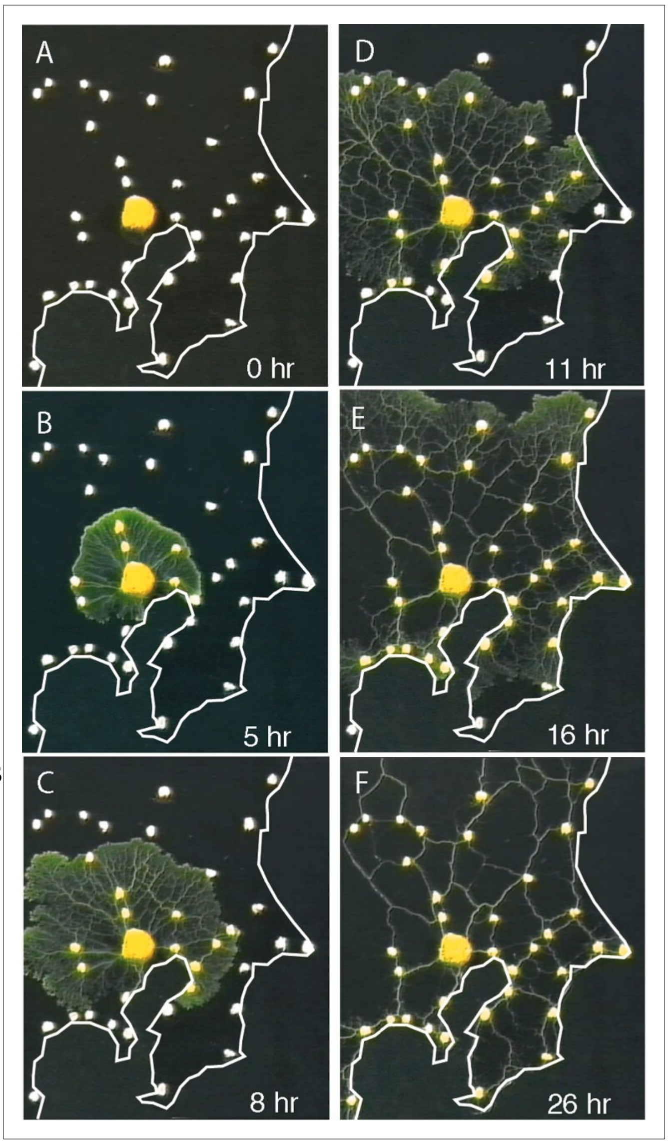

Figure 1 : (**A**) À t = 0, un plasmode *P. polycephalum* de petite taille a été placé sur l'emplacement de Tokyo (tache jaune) sur un plan expérimental délimité par la côte du Pacifique (bordure blanche) et complété par des sources alimentaires supplémentaires correspondant à chacune des grandes villes de la région (points blancs). La largeur horizontale de chaque panneau est de 17 cm. (**B** à **F**) Le plasmode s'est développé à partir de la source d'alimentation initiale et a progressivement colonisé chacune des sources d'alimentation. Derrière le front de croissance un réseau de tubes reliant les sources de nourriture s'est établi.

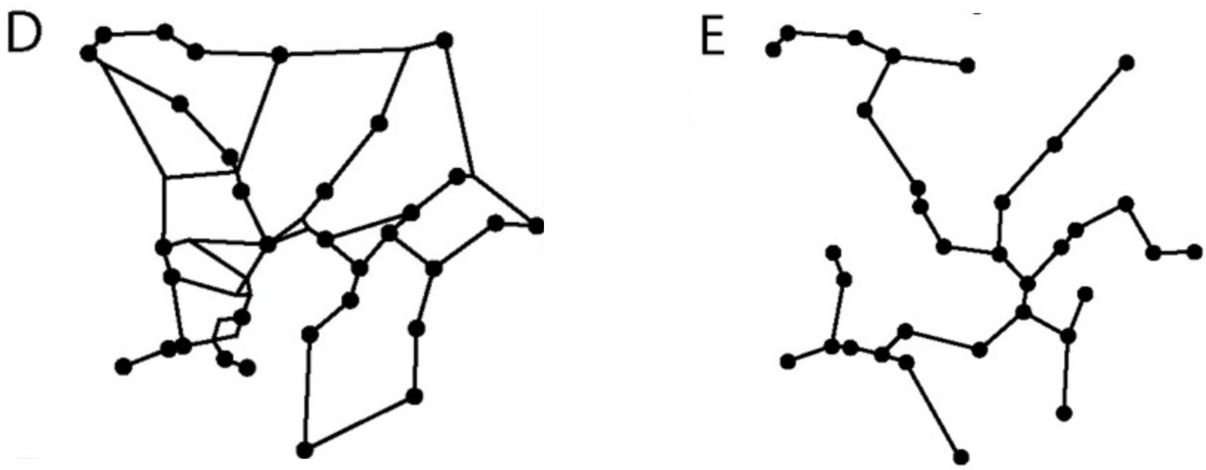

Figure 2 : À gauche (étiqueté 'D'), le réseau ferroviaire de la région de Tokyo. À droite (étiqueté 'E'), un arbre couvrant de poids minimal de l'ensemble de points représentant les villes.

Partie 2. Modélisation de la dynamique du réseau de veines

Nous allons travailler sur un calcul plus simple que l'optimisation d'un réseau de transport : la recherche du plus court chemin reliant l'entrée et la sortie d'un **labyrinthe**.

1. Supposons que vous vouliez résoudre le labyrinthe de la fig. 3 expérimentalement. Vous disposez d'une réserve de cellules de *P. polycephalum*. Expliquez comment vous allez procéder pour inciter la moisissure à réaliser ce travail pour vous.

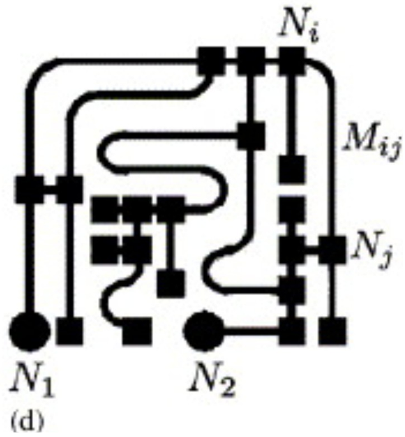

Figure 3 : le labyrinthe (entrée = N_1 ; sortie = N_2).

Il est quand même plus pratique de faire une simulation sur ordinateur, en concevant un algorithme qui s'inspire de cette forme naturelle de calcul. Pour cela nous devons modéliser la dynamique du réseau de tubes. Un tube devient plus gros lorsque le flux de protoplasme persiste à l'intérieur de ce tube pendant un certain temps. Les expériences révèlent les deux règles empiriques suivantes : (i) les tubes qui sont des impasses ont tendance à disparaître rapidement ; (ii) quand il existe plusieurs tubes alternatifs entre deux points donnés les tubes les plus longs tendent à disparaître.
Le modèle est basé sur des idées classiques de dynamique des fluides (loi de Poiseuille). Des équations simples régissent la quantité de fluide pouvant passer à travers chaque tube par seconde : cette quantité est proportionnelle à la différence de pression entre les deux extrémités d'un tube, proportionnelle à sa conductivité (une mesure de la grosseur du tube), et inversement proportionnelle à sa longueur. Plus formellement notons les noeuds N_i, et notons M_{ij} le tube joignant N_i et N_j. La pression qui s'exerce au nœud N_i est notée p_i. Le flux circulant dans le tube M_{ij}, la longueur du tube, et sa conductivité sont notés respectivement Q_{ij}, L_{ij}, D_{ij}. L'équation liant ces quantités s'écrit :

$$Q_{ij}=\frac{D_{ij}}{L_{ij}}(p_i-p_j) \qquad (1)$$

Il s'agit d'une relation linéaire analogue à celle reliant l'intensité et la tension aux bornes d'un conducteur électrique. À cela il faut ajouter la loi de conservation du flux (analogue à la loi de Kirchhoff en électricité). Pour simplifier nous supposons qu'il n'existe qu'une seule source (nœud N_1), par laquelle un flux Q_0 entre dans le réseau, et un seul puits N_2, par lequel sort Q_0 ($Q_0 > 0$).

Conservation des flux sur le nœud i : la somme des flux entrant sur i est égale à la somme des flux sortant de i. On suppose pour cela que chaque arête (i,j) est orientée conventionnellement, et que $Q_{ij} > 0$ lorsque le flux va effectivement de i vers j. En équation : $\Sigma_j Q_{ji} = \Sigma_k Q_{ik}$ (2)

Ces équations permettent de décrire la répartition des flux dans un réseau de tubes de caractéristiques L_{ij} et D_{ij} fixées. Dans le cas de la moisissure le réseau est dynamique. Il nous faut donc une équation d'évolution du réseau. Les longueurs L_{ij} étant constantes ce sont les 'grosseurs de tube' (conductivités) D_{ij} qui vont varier :

$$\frac{dD_{ij}}{dt}=f(|Q_{ij}|)-g\,D_{ij} \qquad (3)$$

où la fonction f(Q) est continue et strictement croissante, avec f(0) = 0, et g est une constante positive. Pour rester simple nous considérerons ici la fonction $f(Q) = \alpha.Q$ (avec $\alpha > 0$), mais d'autres fonctions peuvent être utilisées. En combinant (1), (2) et (3) nous obtenons donc un système algébro-différentiel. Les conductivités évoluent, et à chaque instant les flux et les pressions se réajustent pour respecter (1) et (2).

2. Supposons qu'on ait une chaîne linéaire $i \rightarrow j \rightarrow k$ (i.e. le nœud j n'a qu'un arc entrant et un arc sortant). On souhaite éliminer le nœud intermédiaire j pour réduire le graphe. Exprimez (en fonction de D_{ij}, D_{jk}, L_{ij}, L_{jk}) le paramètre équivalent E_{ik} défini par la relation : $Q_{ik} = E_{ik} (p_i - p_k)$.

3. Montrer que les pressions $\mathbf{p} = (p_i)$ sont solutions d'un système linéaire $\mathbf{A}.\mathbf{p} = \mathbf{b}$ où la matrice $\mathbf{A}$ ne dépend que des D_{ij}/L_{ij}, et $\mathbf{b}$ ne dépend que de Q_0.

Partie 3. Algorithme 'bio-inspiré' de recherche du plus court chemin dans un labyrinthe

L'algorithme consiste simplement, à partir d'un état initial où les conductivités sont toutes égales entre elles ($D_{ij} = 1$), et à résoudre les équations d'évolution pas à pas.

Pseudo-code :

```
Initialisation du labyrinthe (graphe des longueurs Lij)
Initialisation de Q0 et des conductivités (pour tout i et j :  Dij = Dinit)

Itérer :
   Résoudre le système linéaire des pi
   Calculer les Qij correspondants
   Faire quelques pas d'intégration de l'équation différentielle (3)
   Si l'état est stationnaire, lister les Qij, Dij, et sortir de la boucle.
```

Nous prenons comme exemple test le labyrinthe de la figure 3. Considérer que la pression de sortie p_2 est nulle.

1. Implémentez l'algorithme (en python ou scilab ou matlab ou C...) et testez-le sur l'exemple. Explicitez vos **critères d'arrêt** (en particulier l'équation (3) doit pas être intégrée pendant un temps limité de façon à ce que les équations algébriques ne soient pas trop violées). Testez plusieurs jeux de valeurs des paramètres Q_0, D_{init}, α, g. Essayez en tirant aléatoirement les D_{ij} entre 0.5 et 1.

2. Commentez vos résultats. Le système converge-t-il toujours vers le même état stationnaire ?

3. Est-ce que la règle empirique (i) mentionnée ci-dessus est vérifiée dans vos simulations ? Démontrer cette propriété à partir des équations.

4. Comment adapter le pseudo-code ci-dessus pour résoudre le problème initial : l'optimisation d'un réseau de transport ?

5. S'il vous reste du temps, testez une autre fonction f croissante (par exemple $f(Q) = Q^\gamma / (1+Q^\gamma)$ avec $\gamma > 1$).

6. Quel est votre sentiment sur l'idée initiale des chercehurs japonais ? Citez un (ou plusieurs) autre(s) exemple(s) d'algorithme(s) bio-inspiré(s). Comment définir de manière générale ce qu'est un (processus de) 'calcul' ?