SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Basi di Dati, Modulo 2

Sapienza Università di Roma
Facoltà di Ing. dell'Informazione, Informatica e Statistica
Laurea in Informatica
Prof. Toni Mancini, Prof. Federico Mari
http://tmancini.di.uniroma1.it
http://mari.di.uniroma1.it

Esercitazione A.3.3.3.1 (E.A.3.3.3.1)

Analisi Concettuale

Logica del Primo Ordine (FOL)

Semantica

Valutazione delle Formule

Programmi ricorsivi

– Testo e Soluzione –

Versione 2016-02-03

Obiettivi

Modellare, mediante una formula in logica del primo ordine, la seguente affermazione, dopo aver progettato opportuni insiemi di simboli di predicato e/o funzione:

"Tutti i programmi che non sono ricorsivi sono graditi agli studenti."

Determinare inoltre una interpretazione che sia un *modello* della formula.

1 Una Possibile Soluzione

1.1 Alfabeto

Definiamo i seguenti insiemi di simboli di predicato $\mathcal{P}$ e funzione $\mathcal{F}$:

- $\mathcal{P} = \{\text{Prog}/1, \text{Ric}/1, \text{Studente}/1, \text{gradisce}/2\}$
  Il significato intuitivo dei simboli di predicato è il seguente (X e Y sono termini):
  - Prog(X) rappresenta il fatto che X è un programma
  - Ric(X) rappresenta il fatto che X è un programma ricorsivo
  - Studente(X) rappresenta il fatto che X è uno studente
  - gradisce(X, Y) rappresenta il fatto che X gradisce Y
- $\mathcal{F} = \emptyset$.

1.2 Formalizzazione Iniziale in FOL

Si può esprimere la frase in logica del primo ordine come segue:

$$\forall X\ [(\mathsf{Prog}(X) \land \neg\mathsf{Ric}(X)) \rightarrow (\forall Y\ (\mathsf{Studente}(Y) \rightarrow \mathsf{gradisce}(Y, X)))] \tag{1.1}$$

Valutazione della Formula

Si consideri adesso la seguente interpretazione M:

Pre-Interpretazione:

Dominio di interpretazione: $\mathcal{D} = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$

Interpretazione dei simboli in $\mathcal{F}$: –

Interpretazione dei simboli in $\mathcal{P}$:

- $M(\text{Programma}) = \{\alpha, \beta, \gamma\}$
- $M(\text{Ricorsivo}) = \{\beta, \gamma, \delta\}$
- $M(\text{Studente}) = \{\gamma, \delta\}$
- $M(\text{gradisce}) = \{(\gamma, \alpha), (\delta, \alpha), (\delta, \beta)\}$

Per dimostrare che M è un modello della formula (1.1), dobbiamo dimostrare che:

$$\text{eval}^{M,A}\,(1.1) = \text{true} \tag{1.2}$$

per un arbitrario assegnamento di variabili A (che, essendo tutte le variabili della formula quantificate, non gioca alcun ruolo). Affinché (1.2) sussista, devono sussistere tutte le seguenti:

1. $\text{eval}^{M,A[X=\alpha]}\,((\text{Prog}(X) \wedge \neg\text{Ric}(X)) \rightarrow (\forall Y\ (\text{Studente}(Y) \rightarrow \text{gradisce}(Y, X)))) =$
$\text{eval}^{M,A[X=\alpha]}\,((\text{true} \wedge \text{true}) \rightarrow (\forall Y\ (\text{Studente}(Y) \rightarrow \text{gradisce}(Y, X)))) =$
$\text{eval}^{M,A[X=\alpha]}\,(\forall Y\ \text{Studente}(Y) \rightarrow \text{gradisce}(Y, X)) = \text{true}$.

   Affinché quest'ultima espressione sussista, devono sussistere tutte le seguenti:

   1.1. $\text{eval}^{M,A[X=\alpha,Y=\alpha]}\,(\text{Studente}(Y) \rightarrow \text{gradisce}(Y, X)) =$
   $\text{eval}^{M,A[X=\alpha,Y=\alpha]}\,(\text{false} \rightarrow \text{gradisce}(Y, X)) = \text{true}$.
   Questa espressione sussiste, perché l'antecedente dell'implicazione è falso in M.

   1.2. $\text{eval}^{M,A[X=\alpha,Y=\beta]}\,(\text{Studente}(Y) \rightarrow \text{gradisce}(Y, X)) =$
   $\text{eval}^{M,A[X=\alpha,Y=\beta]}\,(\text{false} \rightarrow \text{gradisce}(Y, X)) = \text{true}$.
   Questa espressione sussiste, perché l'antecedente dell'implicazione è falso in M.

   1.3. $\text{eval}^{M,A[X=\alpha,Y=\gamma]}\,(\text{Studente}(Y) \rightarrow \text{gradisce}(Y, X)) =$
   $\text{eval}^{M,A[X=\alpha,Y=\gamma]}\,(\text{true} \rightarrow \text{gradisce}(Y, X)) =$
   $\text{eval}^{M,A[X=\alpha,Y=\gamma]}\,(\text{gradisce}(Y, X)) = \text{true}$.
   Questa espressione sussiste perché $(\gamma, \alpha) \in M(\text{gradisce})$.

1.4. $\mathsf{eval}^{M,A[X=\alpha,Y=\delta]}\,(\mathsf{Studente}(Y) \rightarrow \mathsf{gradisce}(Y,X)) =$
$\mathsf{eval}^{M,A[X=\alpha,Y=\delta]}\,(\mathsf{true} \rightarrow \mathsf{gradisce}(Y,X)) =$
$\mathsf{eval}^{M,A[X=\alpha,Y=\delta]}\,(\mathsf{gradisce}(Y,X)) = \mathsf{true}$.
Questa espressione sussiste perché $(\delta,\alpha) \in M(\mathsf{gradisce})$.

2. $\mathsf{eval}^{M,A[X=\beta]}\,((\mathsf{Prog}(X) \wedge \neg\mathsf{Ric}(X)) \rightarrow (\forall Y\ (\mathsf{Studente}(Y) \rightarrow \mathsf{gradisce}(Y,X)))) =$
$\mathsf{eval}^{M,A[X=\beta]}\,((\mathsf{true} \wedge \mathsf{false}) \rightarrow (\forall Y\ (\mathsf{Studente}(Y) \rightarrow \mathsf{gradisce}(Y,X)))) = \mathsf{true}$.
Questa espressione sussiste, perché l'antecedente dell'implicazione è falso in M.

3. $\mathsf{eval}^{M,A[X=\gamma]}\,((\mathsf{Prog}(X) \wedge \neg\mathsf{Ric}(X)) \rightarrow (\forall Y\ (\mathsf{Studente}(Y) \rightarrow \mathsf{gradisce}(Y,X)))) =$
$\mathsf{eval}^{M,A[X=\gamma]}\,((\mathsf{true} \wedge \mathsf{false}) \rightarrow (\forall Y\ (\mathsf{Studente}(Y) \rightarrow \mathsf{gradisce}(Y,X)))) = \mathsf{true}$.
Questa espressione sussiste, perché l'antecedente dell'implicazione è falso in M.

4. $\mathsf{eval}^{M,A[X=\delta]}\,((\mathsf{Prog}(X) \wedge \neg\mathsf{Ric}(X)) \rightarrow (\forall Y\ (\mathsf{Studente}(Y) \rightarrow \mathsf{gradisce}(Y,X)))) =$
$\mathsf{eval}^{M,A[X=\delta]}\,((\mathsf{false} \wedge \mathsf{false}) \rightarrow (\forall Y\ (\mathsf{Studente}(Y) \rightarrow \mathsf{gradisce}(Y,X)))) = \mathsf{true}$.
Questa espressione sussiste, perché l'antecedente dell'implicazione è falso in M.

Formulazione Definitiva in FOL

Si noti come, sebbene:

- l'elemento $\gamma \in \mathcal{D}$ è sia un programma che uno studente e
- l'elemento $\delta \in \mathcal{D}$ è ricorsivo ma non un programma

M è un modello della formula (1.1). Il fatto che un programma non possa essere uno studente e il fatto che solo i programmi possano essere ricorsivi non sono esplicitamente menzionati nella frase, tuttavia possiamo inferire, mediante un'attività di raffinamento, che devono valere.

Per risolvere il problema, procediamo modificando la formula (1.1) come segue:

$$\begin{array}{ll} \forall X & [\ (\mathsf{Prog}(X) \land \neg \mathsf{Ric}(X)) \ \rightarrow \\ & \quad (\forall Y\ (\mathsf{Studente}(Y) \rightarrow \mathsf{gradisce}(Y, X)))\ ] \land \\ \forall Z & (\mathsf{Prog}(Z) \rightarrow \neg \mathsf{Studente}(Z)) \land \\ \forall W & (\mathsf{Ric}(W) \rightarrow \mathsf{Programma}(W)) \end{array} \tag{1.3}$$