Basi di Dati, Modulo 2

Sapienza Università di Roma
Facoltà di Ing. dell'Informazione, Informatica e Statistica
Laurea in Informatica
Prof. Toni Mancini, Prof. Federico Mari
http://tmancini.di.uniroma1.it
http://mari.di.uniroma1.it

Esercitazione A.3.3.3.2 (E.A.3.3.3.2)

Analisi Concettuale

Logica del Primo Ordine (FOL)

Semantica

Valutazione delle Formule

Dipendenti

– Testo e Soluzione –

Versione 2016-02-03

Obiettivi

Modellare, mediante formule in logica del primo ordine, le seguenti affermazioni, dopo aver progettato opportuni insiemi di simboli di predicato e/o funzione:

1. Tutte le persone hanno almeno un numero di telefono
2. Ogni persona ha esattamente un nome
3. Non ci sono dipendenti che lavorano in più di due dipartimenti
4. Ogni dipartimento ha esattamente un direttore che è una persona.

Per ogni formula, determinare una interpretazione che sia un suo *modello*.

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

1 Una Possibile Soluzione

Definiamo i seguenti insiemi (iniziali) di simboli di predicato $\mathcal{P}$ e funzione $\mathcal{F}$:

- $\mathcal{P} = \{\text{Persona}/1, \text{telefono}/2, \text{nome}/2, \text{Dipendente}/1, \text{Dipartimento}/1, \text{lavora}/2, \text{dirige}/2\}$
  Il significato intuitivo dei simboli di predicato è il seguente (X e Y sono termini):
  - Persona(X) rappresenta il fatto che X è una persona
  - telefono(X, Y) rappresenta il fatto che il numero di telefono di X è Y
  - nome(X, Y) rappresenta il fatto che il nome di X è Y
  - Dipendente(X) rappresenta il fatto che X è un dipendente
  - Dipartimento(X) rappresenta il fatto che X è un dipartimento
  - lavora(X, Y) rappresenta il fatto che X lavora presso Y
  - dirige(X, Y) rappresenta il fatto che X dirige Y.
- $\mathcal{F} = \emptyset$.

Frase 1

Una prima possibile formalizzazione di questa frase è:

$$\forall p\ \mathsf{Persona}(p) \ \rightarrow\ \exists t\ \mathsf{telefono}(p,t) \tag{1.1}$$

Una interpretazione $M_{(1.1)}$ modello della formula (1.1) è la seguente:

Pre-Interpretazione:

Dominio di interpretazione: $\mathcal{D} = \{\alpha, \beta\}$

Interpretazione dei simboli in $\mathcal{F}$: –

Interpretazione dei simboli in $\mathcal{P}$:

- $M_{(1.1)}(\mathsf{Persona}) = \{\alpha, \beta\}$
- $M_{(1.1)}(\mathsf{telefono}) = \{(\alpha, \beta), (\beta, \beta)\}$
- Irrilevante per gli altri simboli di predicato

Per dimostrare che $M_{(1.1)}$ è un modello della formula (1.1), dobbiamo dimostrare che:

$$\mathsf{eval}^{M_{(1.1)},A}\left(\forall p\ \mathsf{Persona}(p) \ \rightarrow\ \exists t\ \mathsf{telefono}(p,t)\right) = \mathsf{true} \tag{1.2}$$

per un arbitrario assegnamento di variabili A (che, essendo tutte le variabili della formula quantificate, non gioca alcun ruolo). Affinché (1.2) sussista, devono sussistere tutte le seguenti:

1. $\mathsf{eval}^{M_{(1.1)},A[p=\alpha]}\left(\mathsf{Persona}(p) \ \rightarrow\ \exists t\ \mathsf{telefono}(p,t)\right) =$
   $\mathsf{eval}^{M_{(1.1)},A[p=\alpha]}\left(\mathsf{true} \ \rightarrow\ \exists t\ \mathsf{telefono}(p,t)\right) =$
   $\mathsf{eval}^{M_{(1.1)},A[p=\alpha]}\left(\exists t\ \mathsf{telefono}(p,t)\right) = \mathsf{true}$

   Affinché quest'ultima espressione sussista, deve essere:

   1.1. $\mathsf{eval}^{M_{(1.1)},A[p=\alpha,t=\alpha]}\left(\mathsf{telefono}(p,t)\right) = \mathsf{true}$ oppure

   1.2. $\mathsf{eval}^{M_{(1.1)},A[p=\alpha,t=\beta]}\left(\mathsf{telefono}(p,t)\right) = \mathsf{true}$

   La seconda espressione difatti sussiste.

2. $\mathsf{eval}^{M_{(1.1)},A[p=\beta]}\left(\mathsf{Persona}(p) \ \rightarrow\ \exists t\ \mathsf{telefono}(p,t)\right) =$
   $\mathsf{eval}^{M_{(1.1)},A[p=\alpha]}\left(\mathsf{true} \ \rightarrow\ \exists t\ \mathsf{telefono}(p,t)\right) =$
   $\mathsf{eval}^{M_{(1.1)},A[p=\alpha]}\left(\exists t\ \mathsf{telefono}(p,t)\right) = \mathsf{true}$

   Affinché quest'ultima espressione sussista, deve essere:

2.1. $\mathsf{eval}^{M_{(1.1)},A[p=\beta,t=\alpha]}(\mathsf{telefono}(p,t)) = \mathsf{true}$ oppure
2.2. $\mathsf{eval}^{M_{(1.1)},A[p=\beta,t=\beta]}(\mathsf{telefono}(p,t)) = \mathsf{true}$

La seconda espressione difatti sussiste.

Si noti come, sebbene l'elemento $\beta \in \mathcal{D}$ è sia una persona che un numero di telefono, $M_{(1.1)}$ è un modello della formula (1.1). Il fatto che una persona non possa essere un numero di telefono di una qualche persona non è esplicitamente menzionato nella frase, tuttavia possiamo inferire, mediante un'attività di raffinamento, che deve valere.

Per risolvere il problema, procediamo come segue:

1. Estendiamo l'insieme dei simboli di predicato $\mathcal{P}$ includendo un nuovo simbolo domTel/1, la cui estensione definisce il dominio dei valori dei numeri di telefono
2. Miglioriamo la formula in:

$$\forall p\ \mathsf{Persona}(p) \rightarrow \exists t\ \mathsf{telefono}(p,t) \wedge \tag{1.3}$$
$$\forall p,t\ (\mathsf{Persona}(p) \wedge \mathsf{telefono}(p,t)) \rightarrow \mathsf{domTel}(t) \wedge \tag{1.4}$$
$$\forall t\ \mathsf{domTel}(t) \rightarrow \neg\mathsf{Persona}(t). \tag{1.5}$$

La sottoformula (1.4) afferma che i numeri di telefono delle persone sono valori nel dominio domTel, mentre la sottoformula (1.5) impone la disgiunzione tra persone e valori di numeri di telefono.

Una interpretazione $M_{(1.3)-(1.5)}$ modello della formula (1.3)–(1.5) è la seguente:

Pre-Interpretazione:

Dominio di interpretazione: $\mathcal{D} = \{\alpha, \beta\}$

Interpretazione dei simboli in $\mathcal{F}$: –

Interpretazione dei simboli in $\mathcal{P}$:

- $M_{(1.3)-(1.5)}(\mathsf{Persona}) = \{\alpha\}$
- $M_{(1.3)-(1.5)}(\mathsf{domTel}) = \{\beta\}$
- $M_{(1.3)-(1.5)}(\mathsf{telefono}) = \{(\alpha, \beta)\}$
- Ignorata per gli altri simboli di predicato.

La dimostrazione che $M_{(1.3)-(1.5)}$ è un modello della formula (1.3)–(1.5) può essere effettuata in modo simile a quanto fatto per $M_{(1.1)}$.

Frase 2

Estendiamo l'insieme dei simboli di predicato $\mathcal{P}$ includendo un nuovo simbolo domNome/1, la cui estensione definisce il dominio dei valori dei nomi di persona.

Una possibile formalizzazione di questa frase è:

$$\forall p \ \mathsf{Persona}(p) \ \rightarrow \ \exists n \ \mathsf{nome}(p,n) \ \wedge \tag{1.6}$$
$$\forall p \ \mathsf{Persona}(p) \ \rightarrow \ \neg\,(\exists n_1, n_2 \ n_1 \neq n_2 \wedge \mathsf{nome}(p,n_1) \wedge \mathsf{nome}(p,n_2)) \ \wedge \tag{1.7}$$
$$\forall p, n \ \mathsf{Persona}(p) \wedge \mathsf{nome}(p,n) \ \rightarrow \ \mathsf{domNome}(n) \ \wedge \tag{1.8}$$
$$\forall n \ \mathsf{domNome}(n) \ \rightarrow \ \neg\mathsf{Persona}(n). \tag{1.9}$$

Una interpretazione $M_{(1.6)-(1.9)}$ modello della formula (1.6)–(1.9) è la seguente:

Pre-Interpretazione:

Dominio di interpretazione: $\mathcal{D} = \{\alpha, \beta\}$

Interpretazione dei simboli in $\mathcal{F}$: –

Interpretazione dei simboli in $\mathcal{P}$:

- $M_{(1.6)-(1.9)}(\mathsf{Persona}) = \{\alpha, \beta\}$
- $M_{(1.6)-(1.9)}(\mathsf{nome}) = \{(\alpha, \beta)\}$
- Ignorata per gli altri simboli di predicato.

SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

Frase 3

Una possibile formalizzazione di questa frase è:

$$
\forall d\ \text{Dipendente}(d) \ \rightarrow\ \neg \left(\begin{array}{ll} \exists t_1, t_2, t_3 & \text{Dipendente}(t_1) \wedge \\ & \text{Dipartimento}(t_2) \wedge \\ & \text{Dipartimento}(t_3) \wedge \\ & t_1 \neq t_2 \wedge t_1 \neq t_3 \wedge t_2 \neq t_3 \wedge \\ & \text{lavora}(d, t_1) \wedge \\ & \text{lavora}(d, t_2) \wedge \\ & \text{lavora}(d, t_3) \end{array} \right) \wedge \quad (1.10)
$$

$$
\forall d\ \text{Dipendente}(d) \ \rightarrow\ \neg\text{Dipartimento}(d) \quad (1.11)
$$

Una interpretazione $M_{(1.10)-(1.11)}$ modello della formula (1.10)–(1.11) è la seguente:

Pre-Interpretazione:

Dominio di interpretazione: $\mathcal{D} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

Interpretazione dei simboli in $\mathcal{F}$: –

Interpretazione dei simboli in $\mathcal{P}$:

- $M_{(1.10)-(1.11)}(\text{Dipendente}) = \{\alpha\}$
- $M_{(1.10)-(1.11)}(\text{Dipartimento}) = \{\beta\}$
- $M_{(1.10)-(1.11)}(\text{lavora}) = \{(\alpha, \beta)\}$
- Ignorata per gli altri simboli di predicato.

Si consideri ora un contesto in cui la formula (1.10)–(1.11) deve essere considerata insieme alle formule precedenti (nelle quali, tra gli altri, occorre il simbolo di predicato Persona/1). Si consideri ora una interpretazione $M'_{(1.10)-(1.11)}$ identica a $M_{(1.10)-(1.11)}$, ma che definisce la seguente relazione per il simbolo di predicato Persona:

- $M'_{(1.10)-(1.11)}(\text{Persona}) = \{\gamma\}$

Tale interpretazione $M'_{(1.10)-(1.11)}$ sarebbe un modello della formula (1.10)–(1.11) sebbene definisca un dipendente (α) che non è una persona.

Sebbene il fatto che tutti i dipendenti sono persone non sia menzionato esplicitamente nelle frasi da modellare, possiamo inferire, mediante un'attività di raffinamento, che deve valere.

Per risolvere il problema, possiamo migliorare (1.10)–(1.11) come segue:

$$\forall d\ \mathsf{Dipendente}(d) \rightarrow \neg \left(\begin{array}{ll} \exists t_1, t_2, t_3 & \mathsf{Dipartimento}(t_1) \land \\ & \mathsf{Dipartimento}(t_2) \land \\ & \mathsf{Dipartimento}(t_3) \land \\ & t_1 \neq t_2 \land t_1 \neq t_3 \land t_2 \neq t_3 \land \\ & \mathsf{lavora}(d, t_1) \land \\ & \mathsf{lavora}(d, t_2) \land \\ & \mathsf{lavora}(d, t_3) \end{array} \right) \land \tag{1.12}$$

$$\forall d\ \mathsf{Dipendente}(d) \rightarrow \neg \mathsf{Dipartimento}(d) \land \tag{1.13}$$

$$\forall d\ \mathsf{Dipendente}(d) \rightarrow \mathsf{Persona}(d) \land \tag{1.14}$$

$$\forall t\ \mathsf{Dipartimento}(d) \rightarrow \neg \mathsf{Persona}(t). \tag{1.15}$$

Frase 4

Una possibile formalizzazione di questa frase è:

$$\forall t \; \mathsf{Dipartimento}(t) \;\; \rightarrow \;\; \exists d \; \mathsf{dirige}(d, t) \; \wedge \tag{1.16}$$

$$\forall t \; \mathsf{Dipartimento}(t) \;\; \rightarrow \;\; \neg \, (\exists d_1, d_2 \; d_1 \neq d_2 \wedge \mathsf{dirige}(d_1, t) \wedge \mathsf{dirige}(d_2, t)) \;\; \wedge \tag{1.17}$$

$$\forall t, d \; \mathsf{Dipartimento}(t) \wedge \mathsf{dirige}(d, t) \;\; \rightarrow \;\; \mathsf{Persona}(d) \; \wedge \tag{1.18}$$

$$\forall d \; \mathsf{Persona}(d) \;\; \rightarrow \;\; \neg \mathsf{Dipartimento}(d) \tag{1.19}$$

Una interpretazione $M_{(1.16)-(1.19)}$ modello della formula (1.16)–(1.19) è la seguente:

Pre-Interpretazione:

Dominio di interpretazione: $\mathcal{D} = \{\alpha, \beta\}$

Interpretazione dei simboli in $\mathcal{F}$: –

Interpretazione dei simboli in $\mathcal{P}$:

- $M_{(1.16)-(1.19)}(\mathsf{Dipartimento}) = \{\alpha\}$
- $M_{(1.16)-(1.19)}(\mathsf{Persona}) = \{\beta\}$
- $M_{(1.16)-(1.19)}(\mathsf{dirige}) = \{(\beta, \alpha)\}$
- Ignorata per gli altri simboli di predicato.