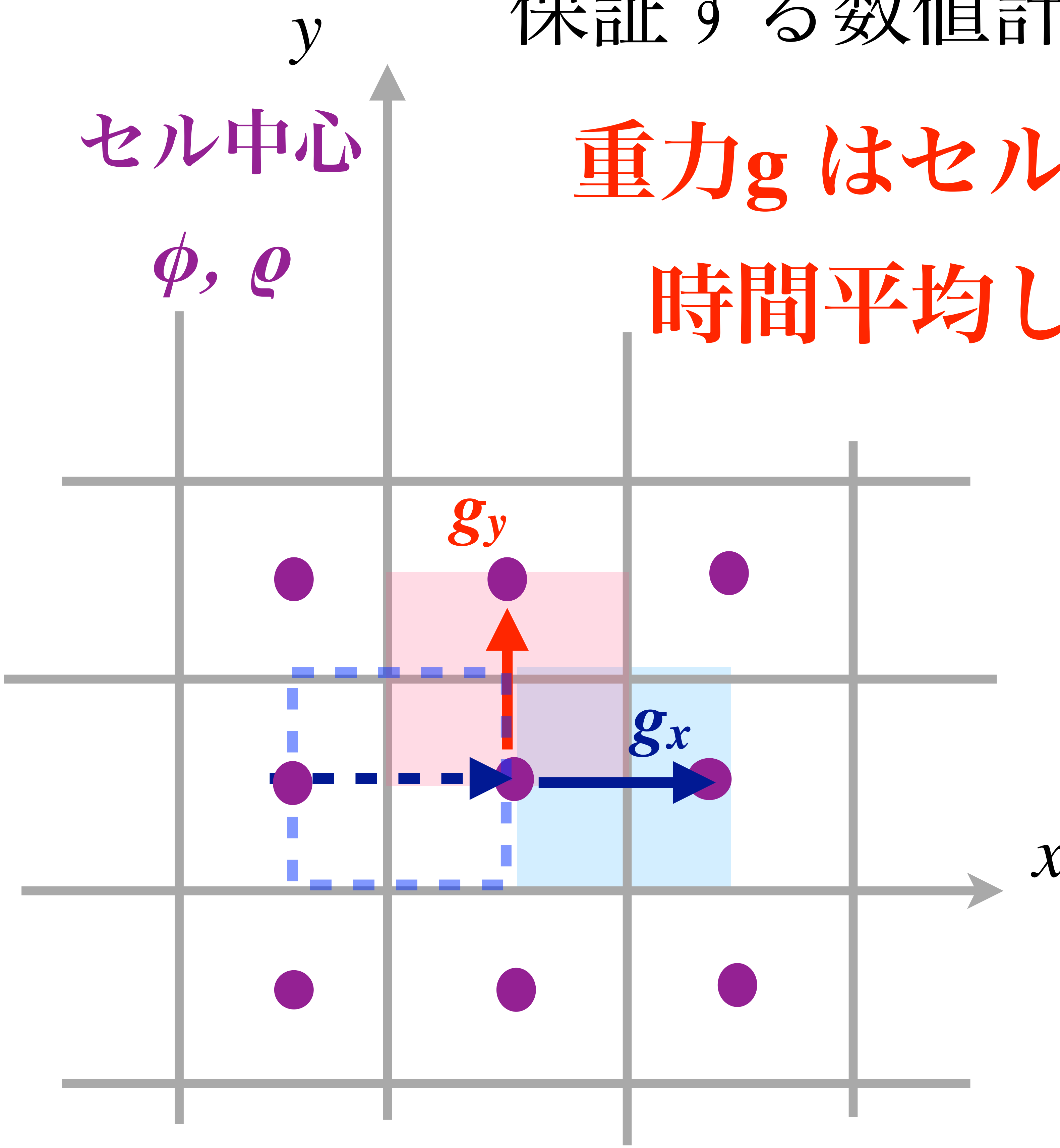
重力エネルギーも含めた全エネルギー保存を保証する数値計算法



重力g はセル表面で定義し、時間平均した値を使え。

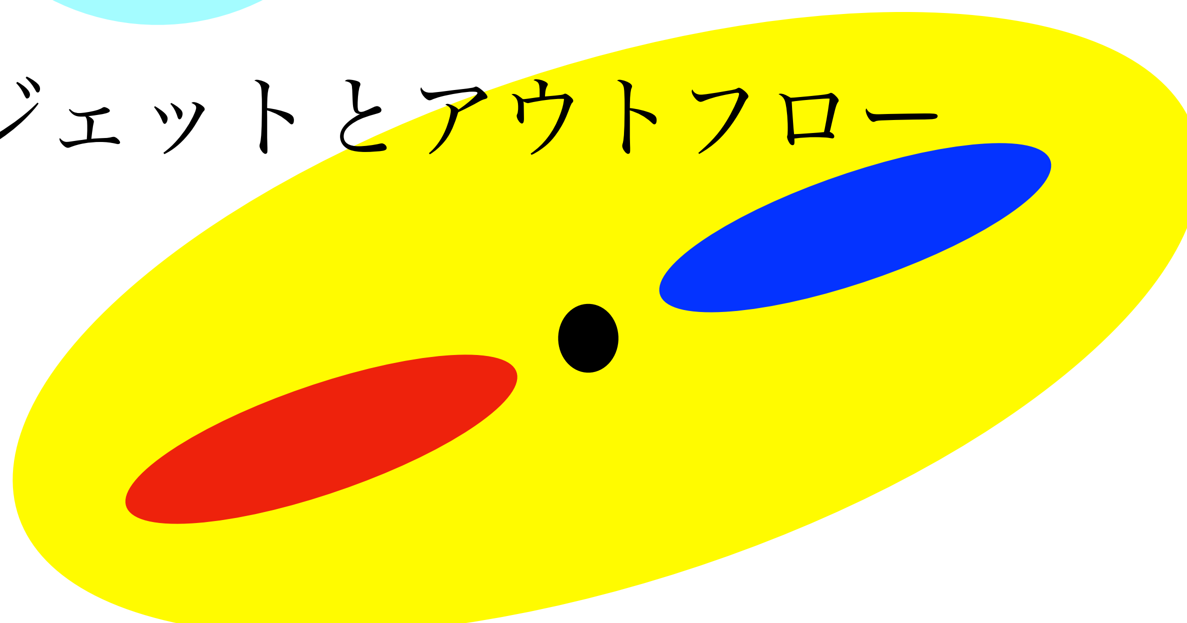
さすれば $E_{\rm tot}$ は保存する。

花輪 知幸 (千葉大学)

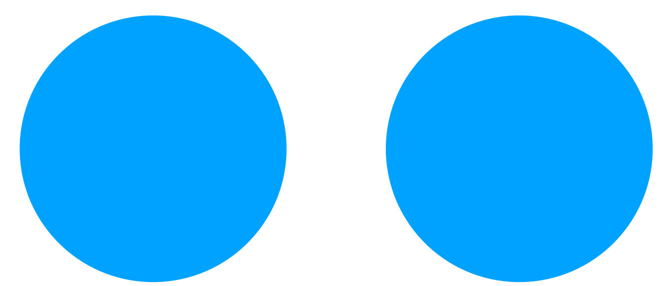
エネルギーは形を変えるが総量は保存する

(a) 崩壊と降着

(b) ジェットとアウトフロー



(c) 合体する中性子星



$$E_{\mathrm{tot}} = E_{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{th}} + E_{\mathrm{mag}} + E_{\mathrm{grav}}$$

簡単のため、ここでは磁場を無視する。

流体力学方程式

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v} + P\boldsymbol{I}) &= \rho \boldsymbol{g}, \\
\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v} H) &= \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{g} + \Gamma - \Lambda,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{g} &= -\boldsymbol{\nabla}\phi, \\
\boldsymbol{\nabla}^2 \phi &= 4\pi G \rho.
\end{aligned}
$$

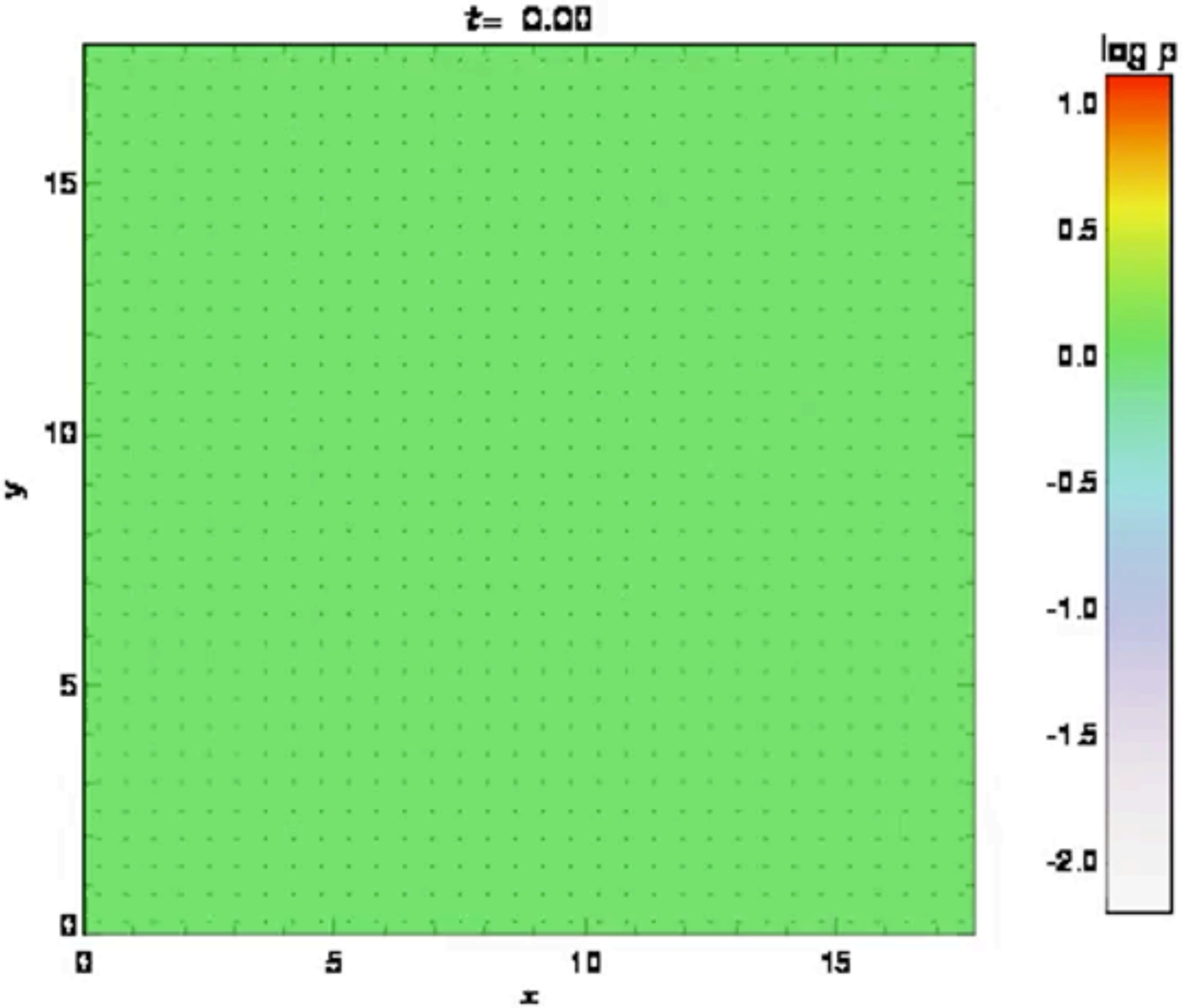
$$
E = \frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + \frac{P}{\rho(\gamma - 1)}, \qquad H = \frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + \frac{\gamma P}{\rho(\gamma - 1)},
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(E_{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{th}} + E_{\mathrm{grav}}) &= \int (\Gamma - \Lambda) dV \\
\frac{d}{dt} E_{\mathrm{grav}} &= \int \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{g} dV
\end{aligned}
$$

ここでは加熱(Γ)と冷却(Λ)を無視する

数値解でも厳密に保存するか?

2次元ジーンズ不安定 (32^2 cells)



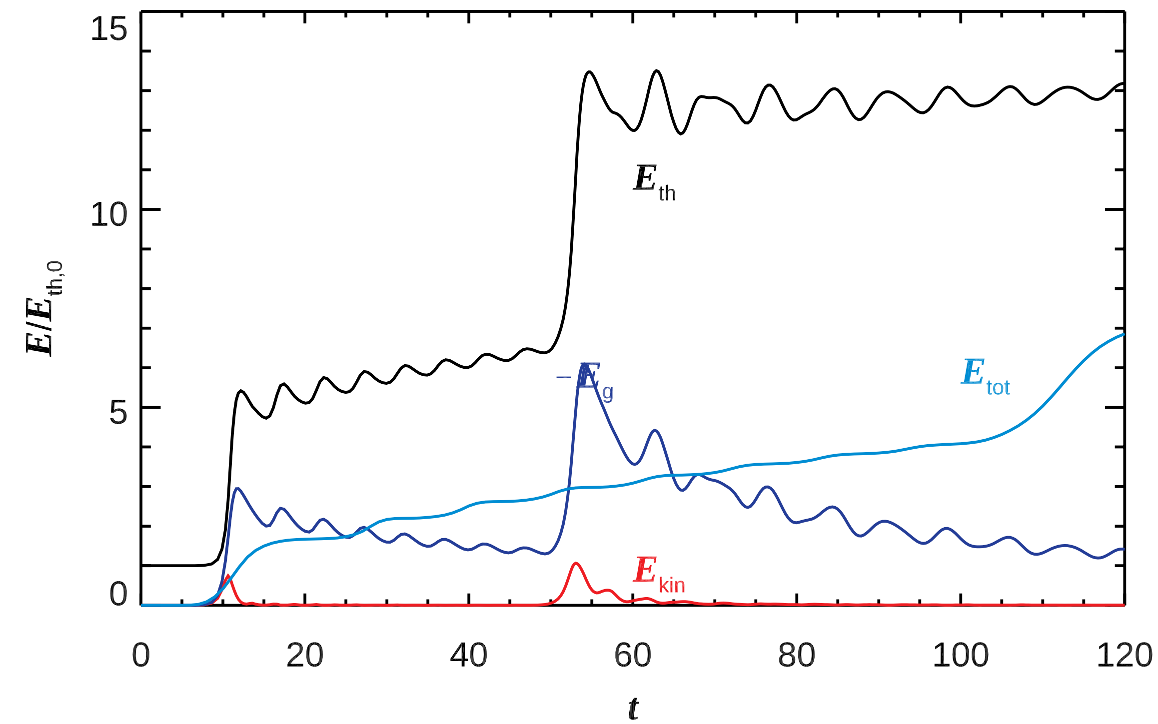
$\rho_0=1$, $L_x = L_y = 2.82\ \lambda_J$

$4\pi G = 1$, $\gamma = 5/3$, $P_0=3/5$

contours, $s = \log (P/P_0) - \gamma \log (\rho/\rho_0)$

成分ごとのエネルギー

$E_{\rm th}$, $E_{\rm g}$, $E_{\rm kin}$



重力エネルギー解放率

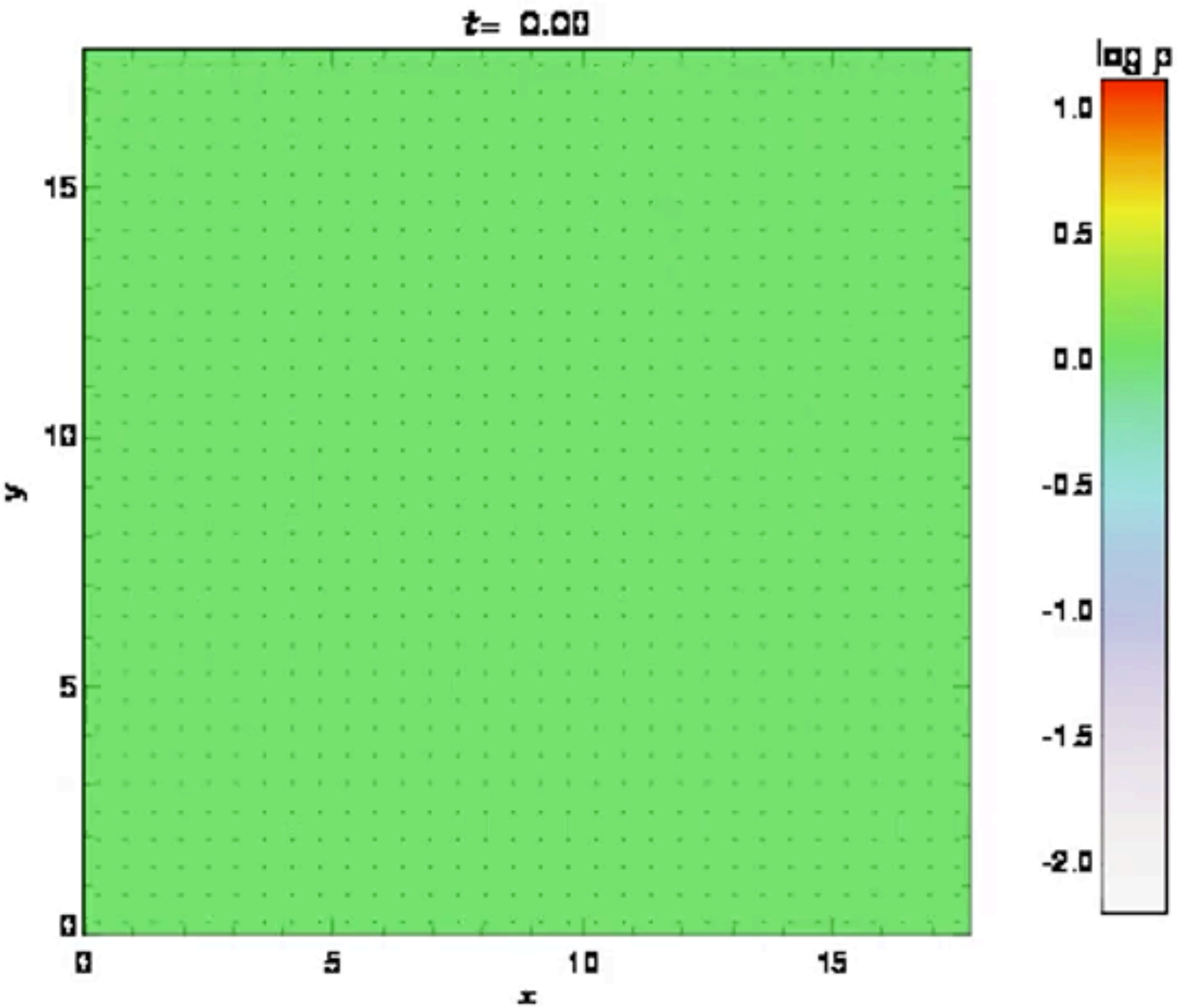
$$\rho \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{v}$$

をセル中心で計算

時間空間2次精度

全エネルギーが増加し続ける?

2次元ジーンズ不安定 (32^2 cells)



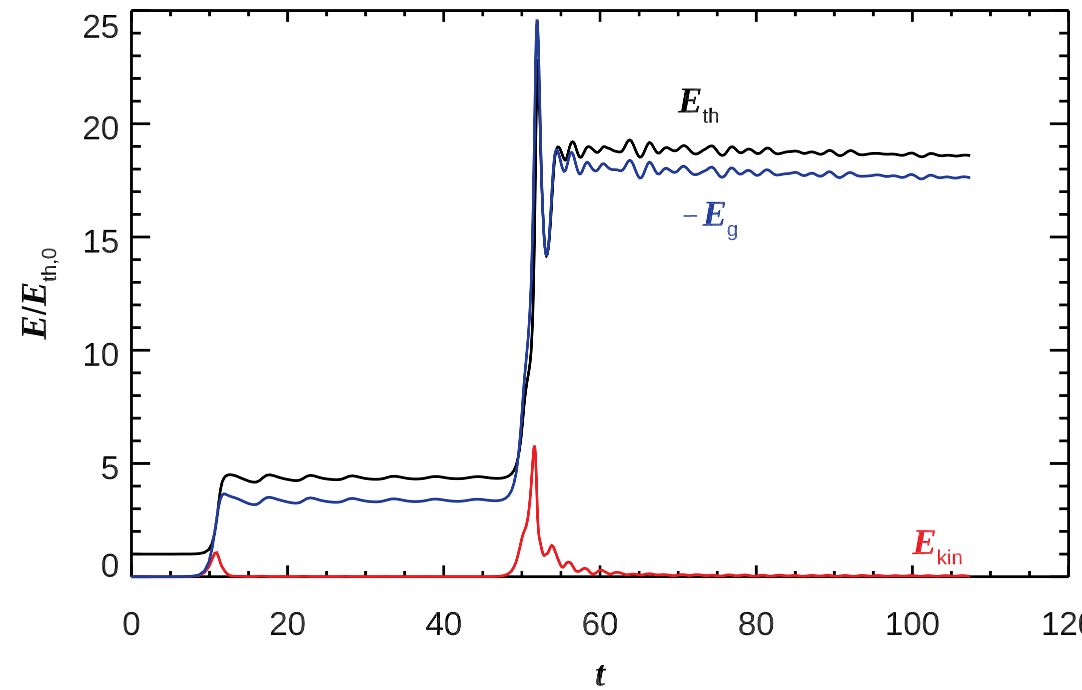
$\rho_0=1$, $L_x = L_y = 2.82\ \lambda_J$

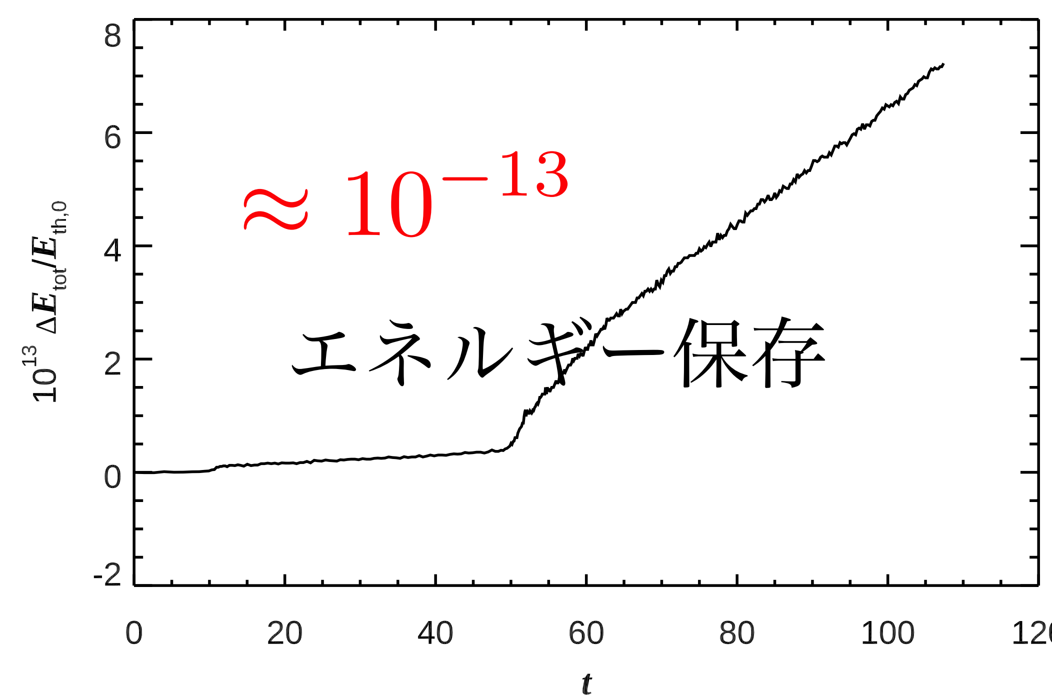
$4\pi G = 1$, $\gamma = 5/3$, $P_0=3/5$

contours, $s = \log(P/P_0) - \gamma \log(\rho/\rho_0)$

成分ごとのエネルギー

E_{th}, E_g, E_{kin}





時間空間2次精度

どうしてエネルギーは保存しないか?

1. 質量保存
2. 運動量保存
3. エネルギー保存

作用反作用

$$\frac{d}{dt}\left(\int \rho dV\right) = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\int \rho \boldsymbol{v} dV\right) = \int \rho \boldsymbol{g} dV = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(E_{\rm kin} + E_{\rm th} + E_{\rm g}) = \int (\Gamma - \Lambda) dV,$$

$$\frac{d}{dt}E_{\rm g} = \int \rho \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g} dV.$$

$$E_{\rm g} = \begin{cases} \int \rho\phi dV & \textbf{(外場)} \\ \frac{1}{2}\int \rho\phi dV & \textbf{(自己重力)} \end{cases}$$

cf.　Springel 10,
Jiang+13, Katz+16

源泉項なしなら、保存は完璧

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0,$$

重力場 E_{g}

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v} + P\boldsymbol{I} + \boldsymbol{T}_g) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho E - \boxed{\frac{\boldsymbol{g}^2}{8\pi G}}\right) + \boldsymbol{\nabla} \cdot \left\{\rho \boldsymbol{v} H + \phi \boxed{\left[\rho \boldsymbol{v} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{g}}{4\pi G}\right)\right]}\right\} = 0,$$

発散なし

重力テンソル

$$\boldsymbol{T}_g = \frac{1}{4\pi G}\left[\boldsymbol{\nabla}\phi\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\phi) \cdot (\boldsymbol{\nabla})\,\phi\boldsymbol{I}\right] = \frac{1}{4\pi G}\left[\boldsymbol{g}\boldsymbol{g} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{g})\,\boldsymbol{I}\right],$$

重要な関係式

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\rho \boldsymbol{v} - \frac{1}{4\pi G}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{g}\right) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\rho \boldsymbol{v} + \frac{1}{4\pi G}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\phi\right) = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{g}^2}{8\pi G}\right) = -\boldsymbol{\nabla}\phi \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{g}}{4\pi G}\right)$$

$\boldsymbol{\nabla}\phi \cdot \rho \boldsymbol{v}$ が残る

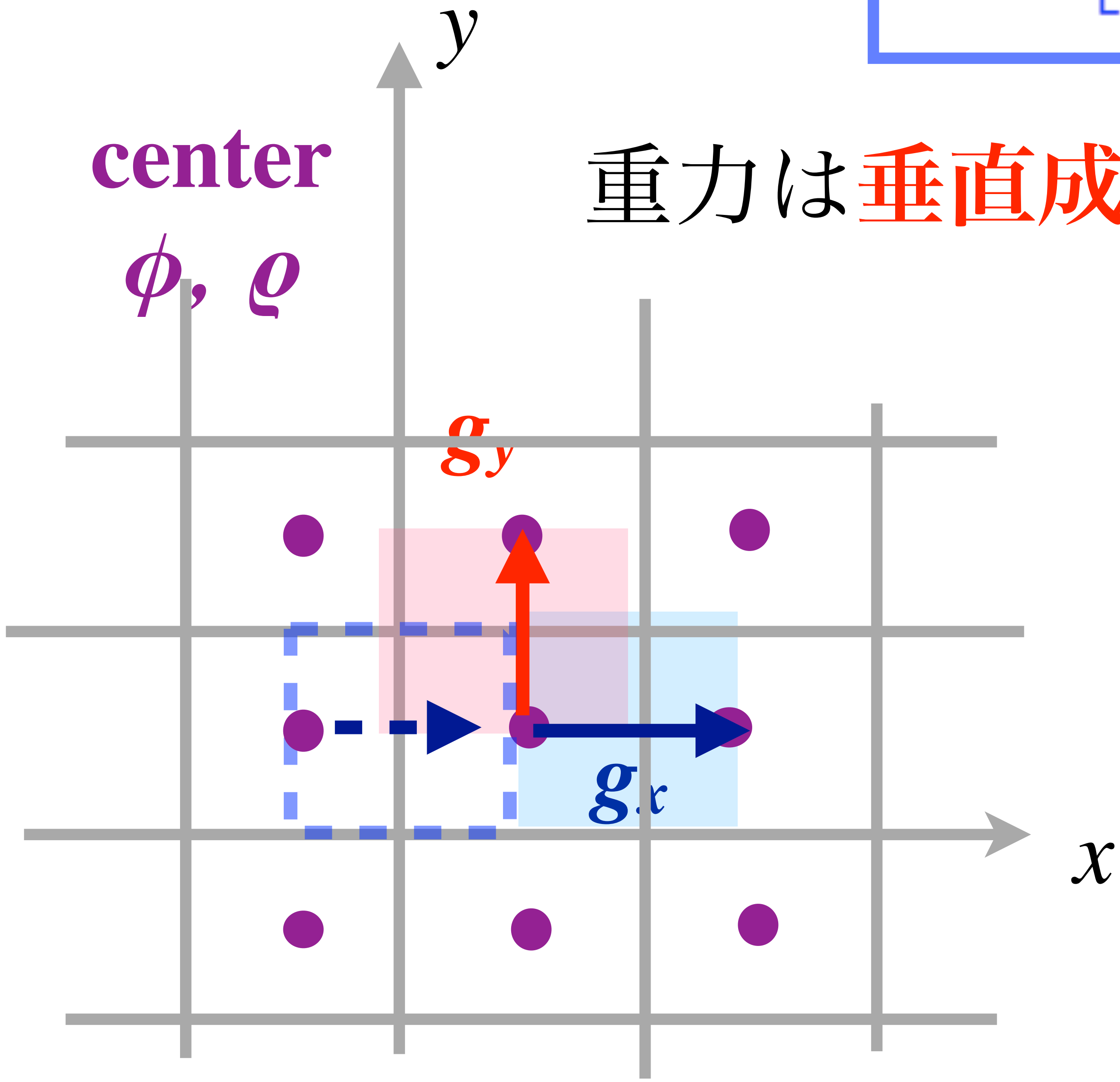
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0,$$

「正しい」源泉項

$$\frac{\partial\rho\boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v} + P\boldsymbol{I}) = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T}_{\mathrm{g}}, \quad (= \rho\boldsymbol{g})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho H\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\phi\left(\rho\boldsymbol{v} - \frac{1}{4\pi G}\frac{\partial\boldsymbol{g}}{\partial t}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{g}}{8\pi}\right). \quad (= \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g})$$

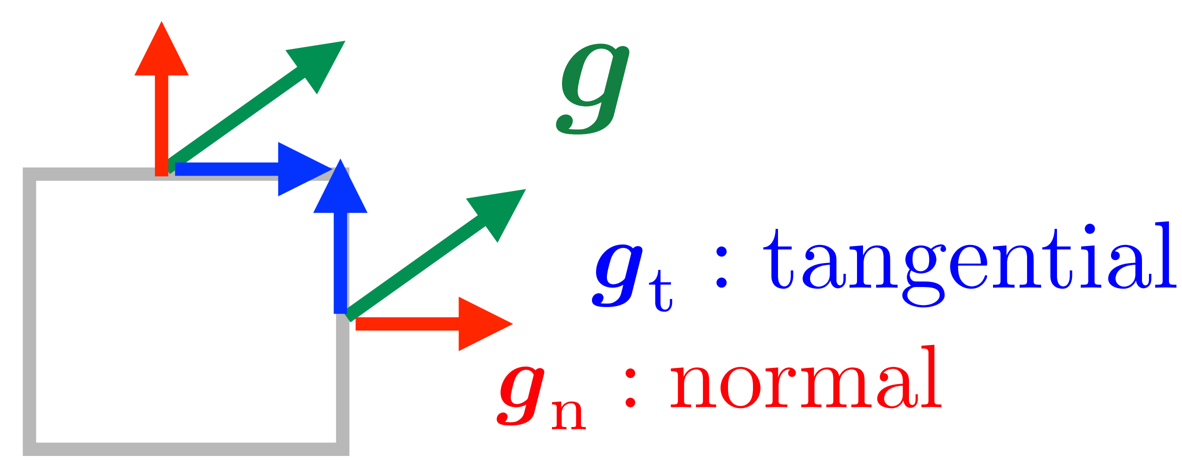
重力は**垂直成分**の**時間平均**を使え。



$$\frac{1}{\Delta t}\left[\frac{|\boldsymbol{g}(t+\Delta t)|^2 - |\boldsymbol{g}(t)|^2}{8\pi G}\right]$$

$$= \left[\frac{\boldsymbol{g}(t+\Delta t) - \boldsymbol{g}(t)}{8\pi G}\right]\cdot\left[\frac{\boldsymbol{g}(t+\Delta t) - \boldsymbol{g}(t)}{\Delta t}\right]$$

Gauss's $\quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{g} = -4\pi G\rho$

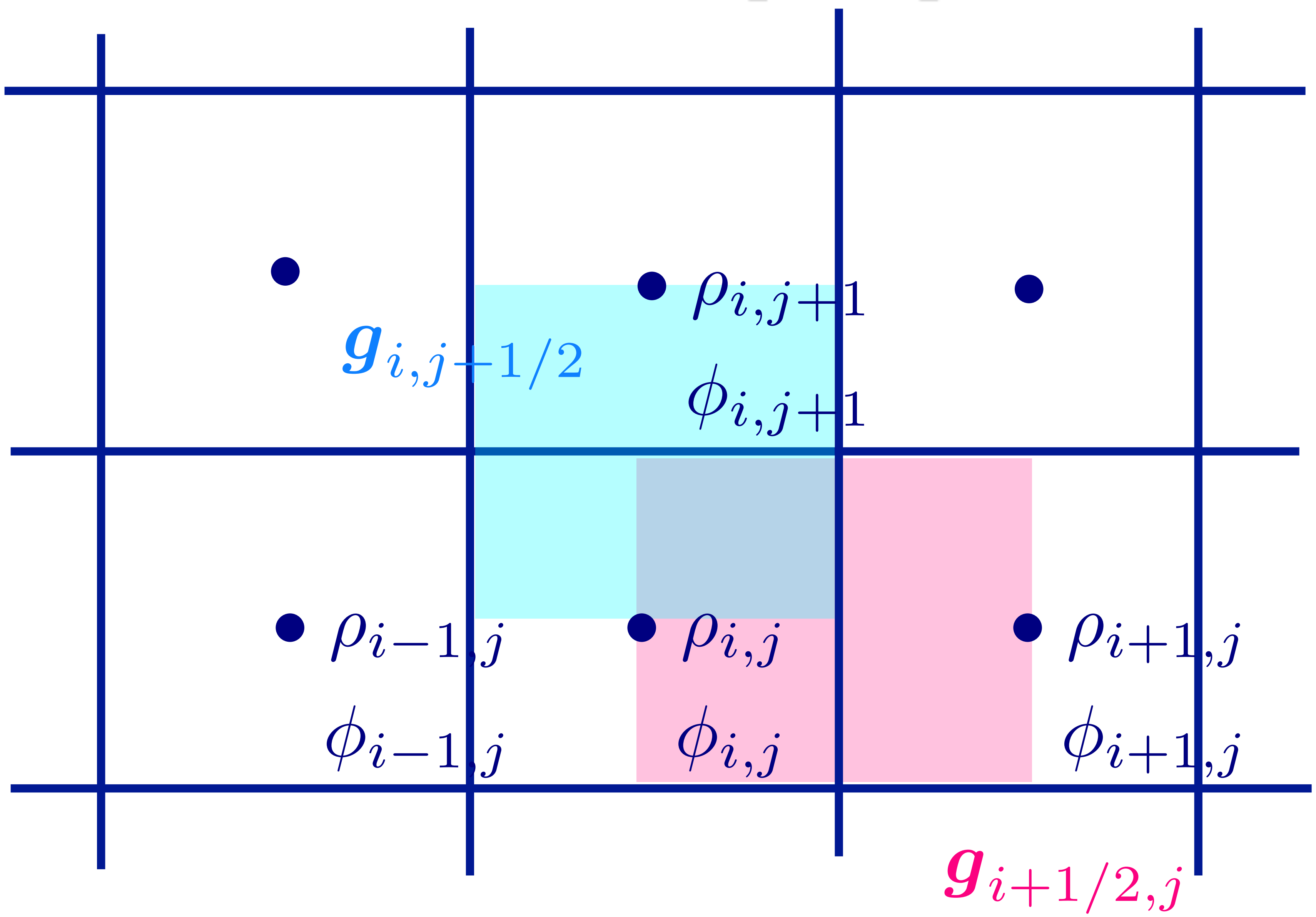


重力場のエネルギー

$$\frac{1}{2}\iiint \rho\phi dV = -\iiint \frac{\boldsymbol{g}^2}{8\pi G}dV + \frac{1}{2}\iint_S \phi\boldsymbol{\nabla}\phi dS$$

cf. Katz+16

$$-\frac{\boldsymbol{g}^2}{8\pi G} = \frac{\rho\phi}{2} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\frac{(\phi\boldsymbol{g})}{8\pi G}\right]$$



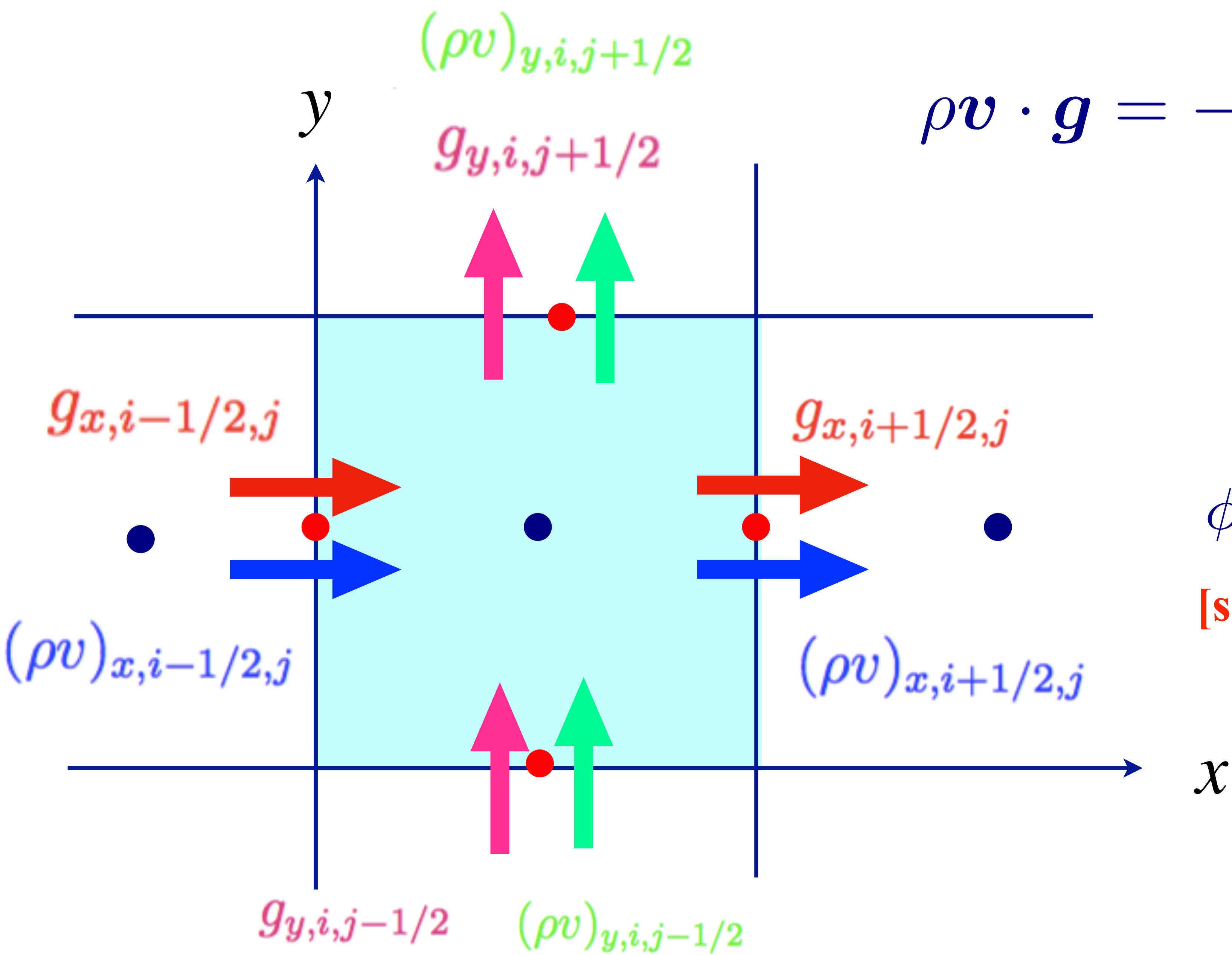
- 重力加速度, $\boldsymbol{g}$, はセル表面で.
- $\boldsymbol{g}$の垂直成分だけを考慮する。

$$\int \boldsymbol{g}\cdot d\boldsymbol{S} = -4\pi G\int \rho dV$$

質量流束に基づく源泉項

cf. Mikami+08, Springel 10, Katz+16

$$\rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{g} \quad = \quad (\text{mass flux}) \cdot (\text{gravity}) \;\neq\; (\text{density}) \times (\text{velocity}) \cdot (\text{gravity})$$



$$\rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{g} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boxed{(\phi \rho \boldsymbol{v})} + \boxed{\phi} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boxed{(\rho \boldsymbol{v})}$$

cell surface

cell center

$$\phi_{i+1/2,j} = \phi_{i,j} - \frac{g_{x,i+1/2,j}}{2} \Delta x$$

[surface] [center]

具体的な計算法 (例)　陽解法

1. 密度 $\rho(t_0)$ から $\boldsymbol{g}(t_0)$ を計算する。

2. 時刻 $t = t_0 + \Delta t$ での密度 $\rho^*(t_0 + \Delta t)$ を時間 1 次精度で求める。

3. 密度 $\rho^*(t_0 + \Delta t)$ から $\boldsymbol{g}^*(t_0 + \Delta t)$ を求める。

4. $\bar{\boldsymbol{g}}^*(t_0 + \Delta t/2) = [\boldsymbol{g}(t_0) + \boldsymbol{g}^*(t_0 + \Delta t)]/2$ を使って、時間 1 次精度で速度 $\boldsymbol{v}^*(t_0 + \Delta t)$ と圧力 $\boldsymbol{P}^*(t_0 + \Delta t)$ を求める。

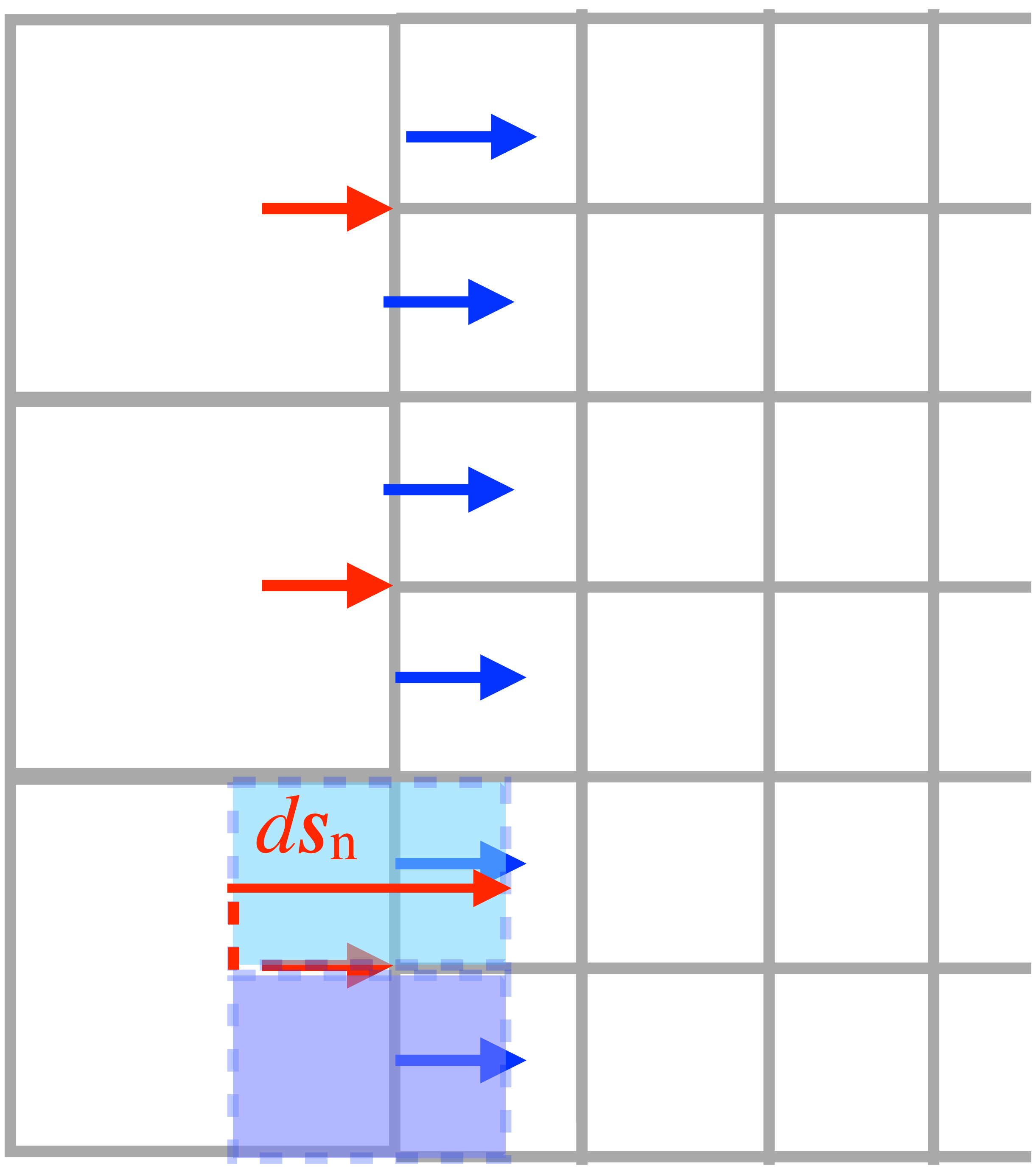
5. 時間 2 次精度の密度 $\rho(t_0 + \Delta t)$ を求める。

6. 密度 $\rho(t_0 + \Delta t)$ から $\boldsymbol{g}(t_0 + \Delta t)$ を求める。

7. $\bar{\boldsymbol{g}}(t_0 + \Delta t/2) = [\boldsymbol{g}(t_0) + \boldsymbol{g}(t_0 + \Delta t)]/2$ を使って、時間 1 次精度で速度 $\boldsymbol{v}(t_0 + \Delta t)$ と圧力 $\boldsymbol{P}(t_0 + \Delta t)$ を求める。

2-7を繰り返す。

AMR:　粗い-細いメッシュの境界



流束の保存

$$F_{\mathrm{coarse}} = \sum F_{\mathrm{fine}}$$

流束:

質量, ϱv

運動量, $\varrho vv+P$

エネルギー, $\varrho v\phi$

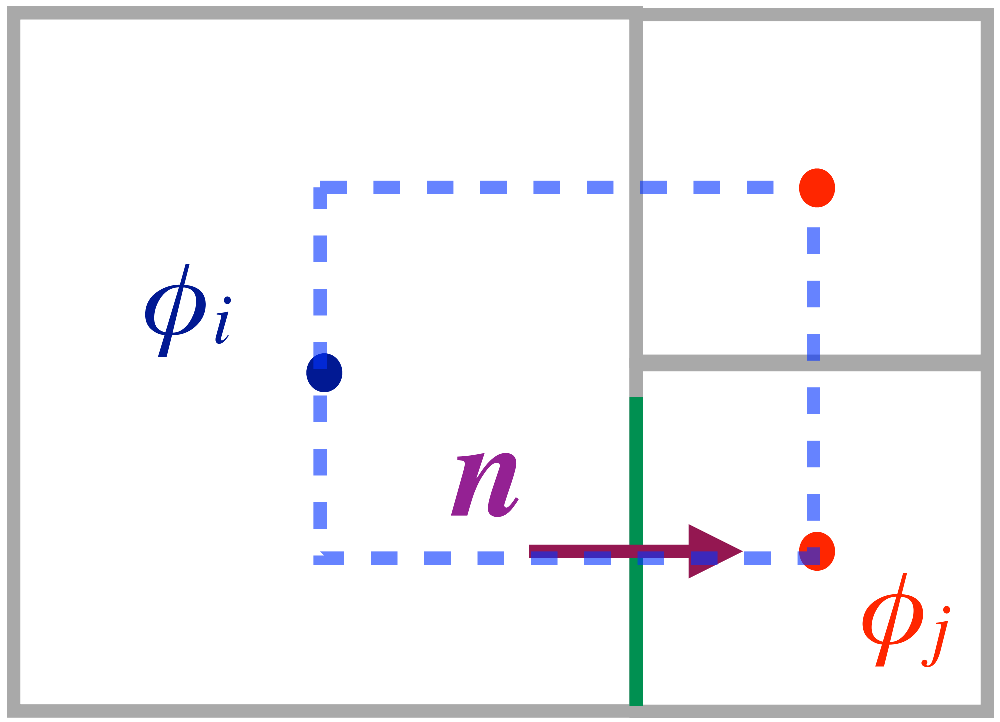
重力, g

重力ストレス, $\boldsymbol{T}\mathrm{g}$

$$\phi_{\mathrm{f}} = \phi_{\mathrm{c}} - \boldsymbol{g}_{\mathrm{n}} \cdot \boxed{\boldsymbol{ds}_{\mathrm{n}}}$$

離散化した Poisson 方程式

$$
\begin{aligned}
\int \boldsymbol{g} \cdot d\boldsymbol{S} &= -\int 4\pi G \rho dV, \\
\sum_{\mathrm{f}} \boldsymbol{g}_{\mathrm{f}} \cdot d\boldsymbol{S}_{\mathrm{f}} &= -4\pi G \rho_i dV_i
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{g} &= -\boldsymbol{\nabla}\phi, \\
\boldsymbol{g}_{\mathrm{f}} &= -\frac{\phi_i - \phi_j}{(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)\cdot \boldsymbol{n}_{\mathrm{f}}} \boldsymbol{n}_{\mathrm{f}}, \\
\boldsymbol{n} &= \frac{d\boldsymbol{S}_{\mathrm{f}}}{|d\boldsymbol{S}_{\mathrm{f}}|}.
\end{aligned}
$$

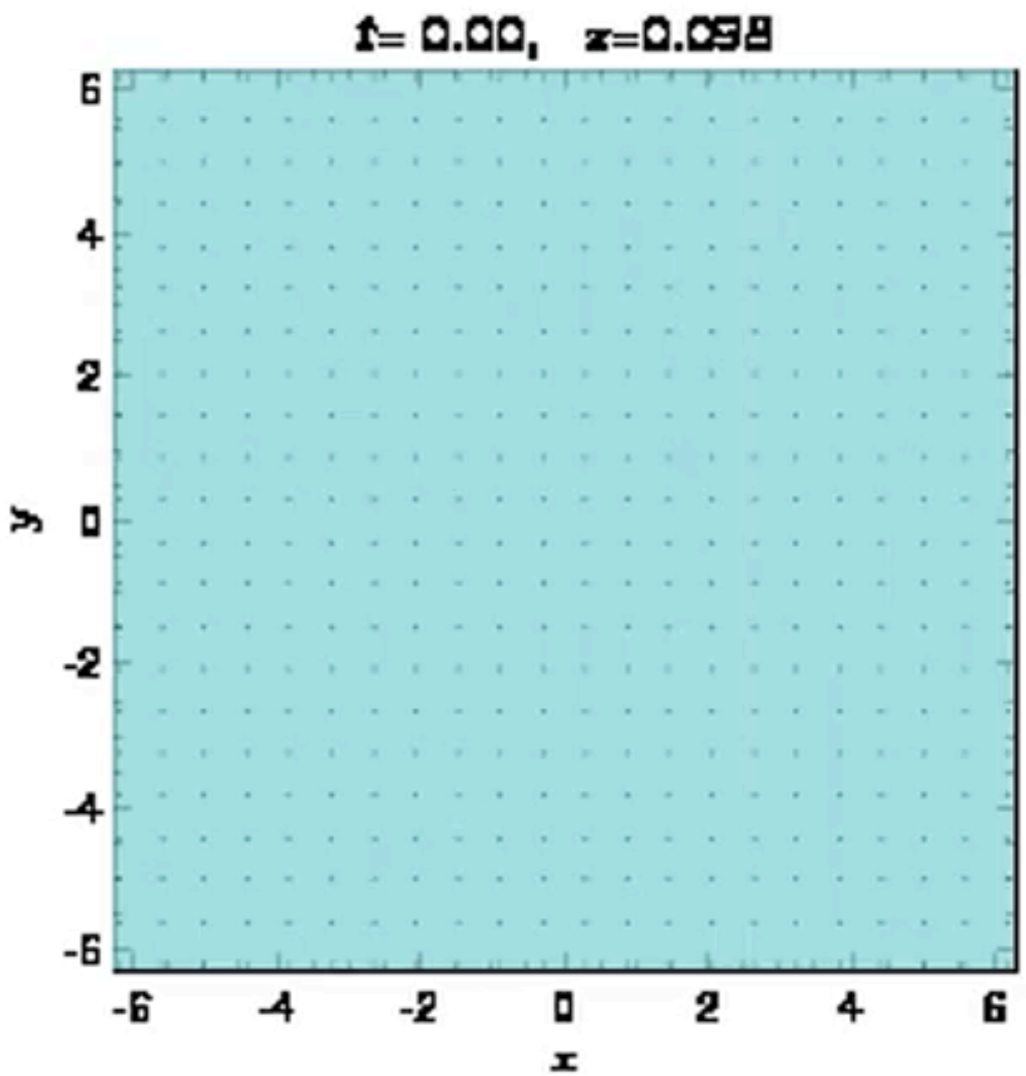
$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_{\mathrm{f}}$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{g} = 0$$

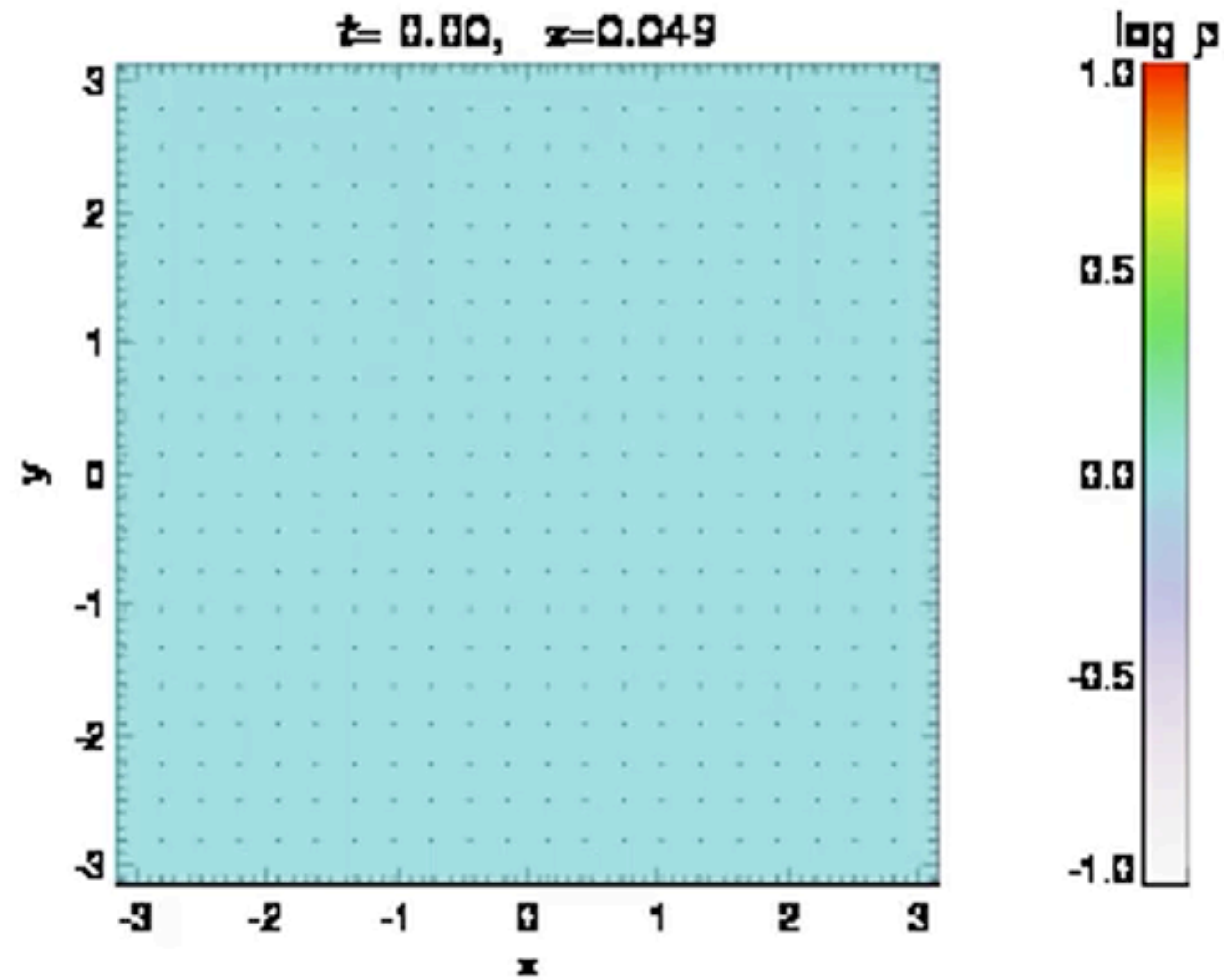
$$\oint \boldsymbol{g} \cdot d\boldsymbol{s} = 0$$

3次元 入れ子格子 (外場)

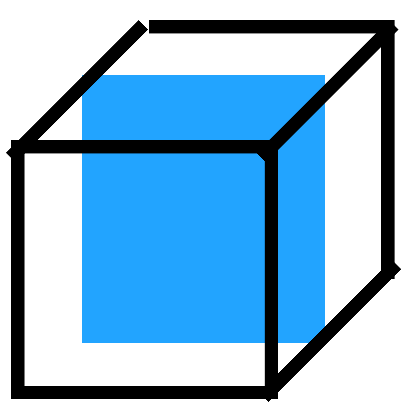
64x64(x64)　*l*=1　(粗)



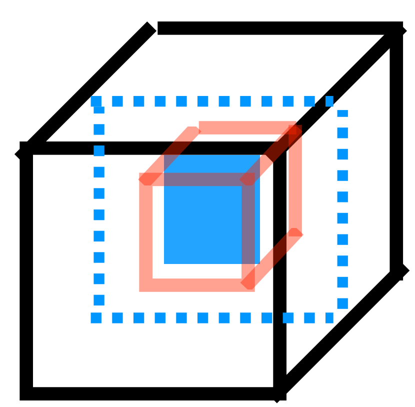
64x64(x64)　*l*=2　(細)



全領域



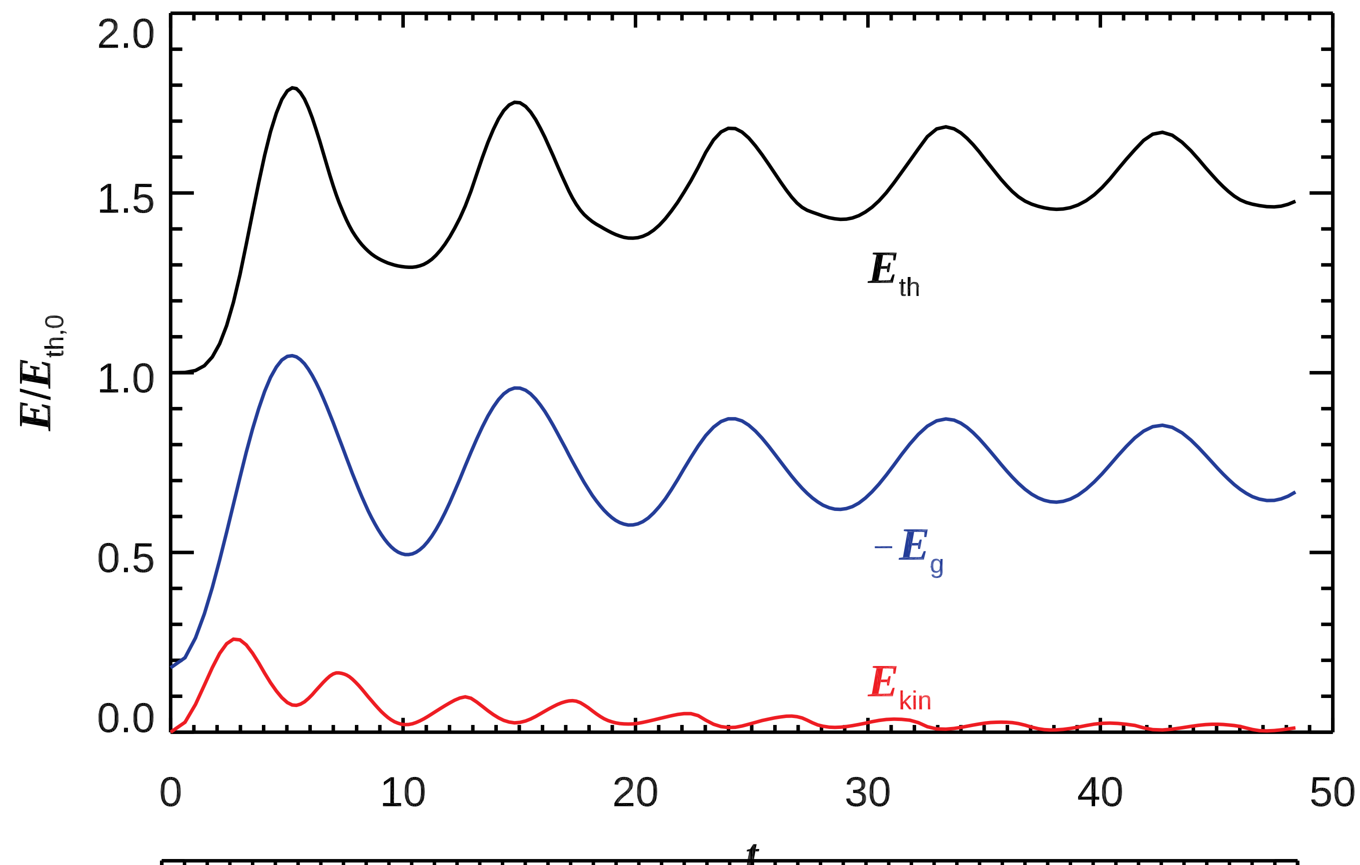
内殻 1/8

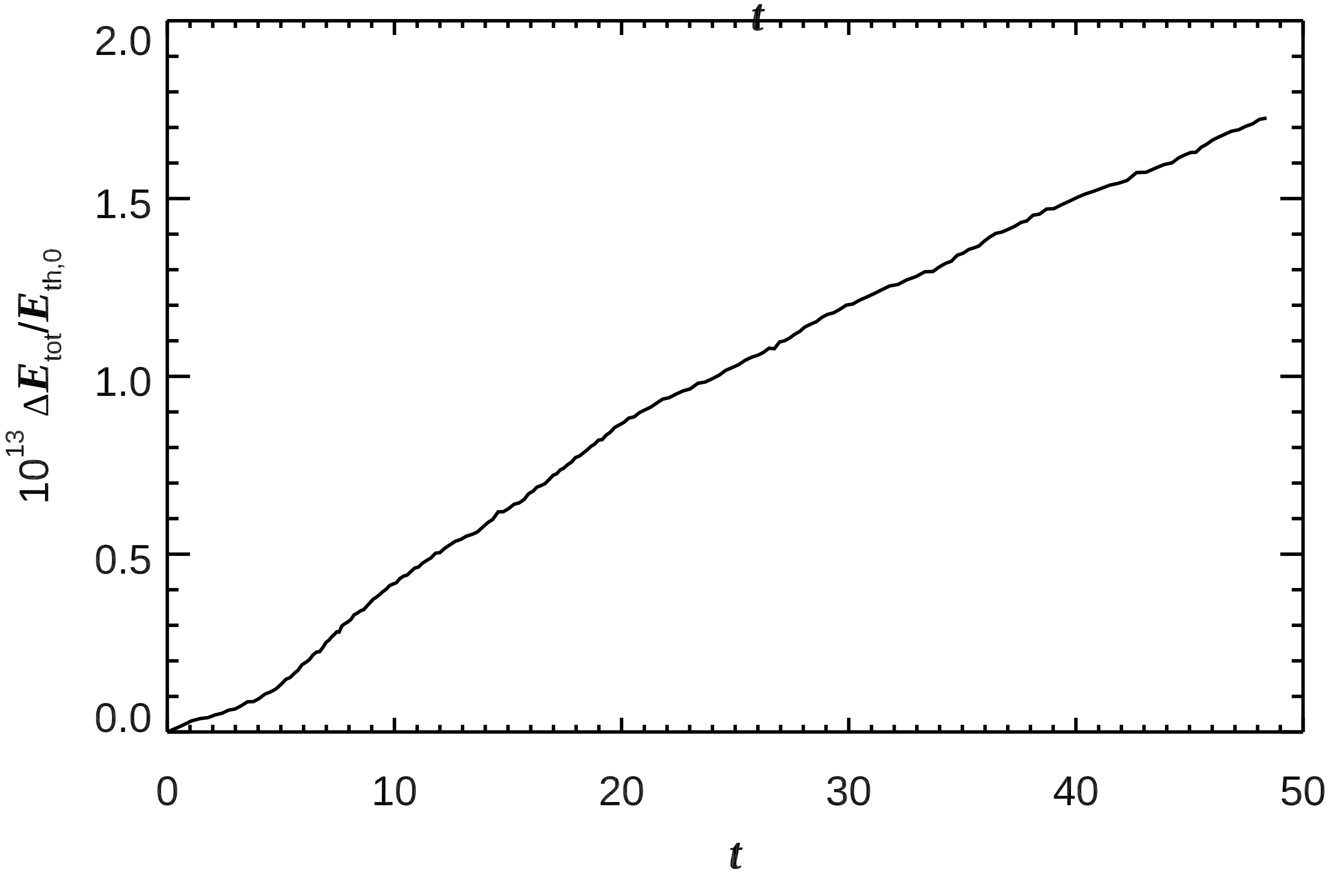


$$\rho_0 = 1,\ p_0 = 0.6,$$
$$\gamma = 5/3$$

$$\phi = -0.6\left(\cos\frac{x}{2} + \cos\frac{y}{2} + \cos\frac{z}{2}\right)$$

３次元入れ子格子でのエネルギー保存





Nested grid

$N_x = N_y = N_z = 64$

$l = 2$

$10^{13}\ \Delta E_{\mathrm{tot}}/E_{\mathrm{th,0}}$

Summary

1. エネルギー保存は簡単に実現。
2. セル表面で定義された重力の時間平均が正しい値を与える。
3. 重力エネルギー解放は質量流束で計算。
4. 速度や圧力を更新する前に重力を計算。