

6次元ボルツマン方程式による ブラックホール時空での 輻射輸送シミュレーション

高橋 労太 (国立高専機構苦小牧高専)

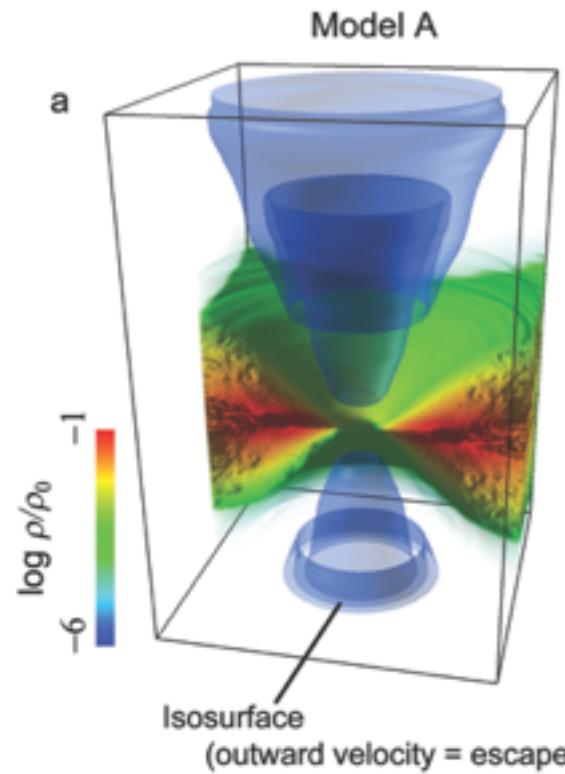
共同研究者
梅村 雅之 (筑波大)

- I. 導入
2. 輻射輸送の数値計算法
3. LC法のGR化
4. ART法のGR化
5. まとめ

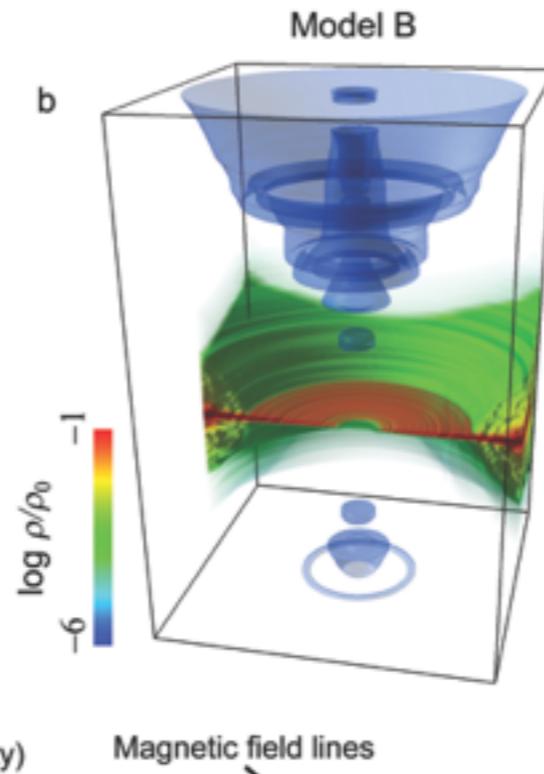
1. 導入
2. 輻射輸送の数値計算法
3. LC法のGR化
4. ART法のGR化
5. まとめ

Radiation MHD simulation : Ohsuga+09

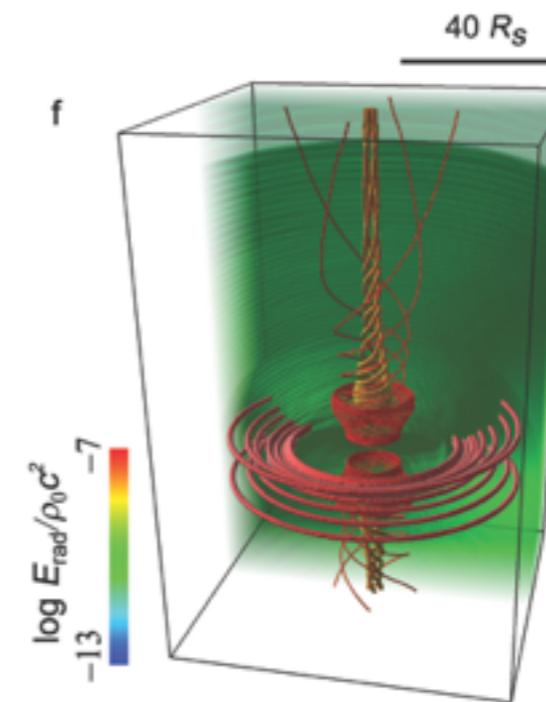
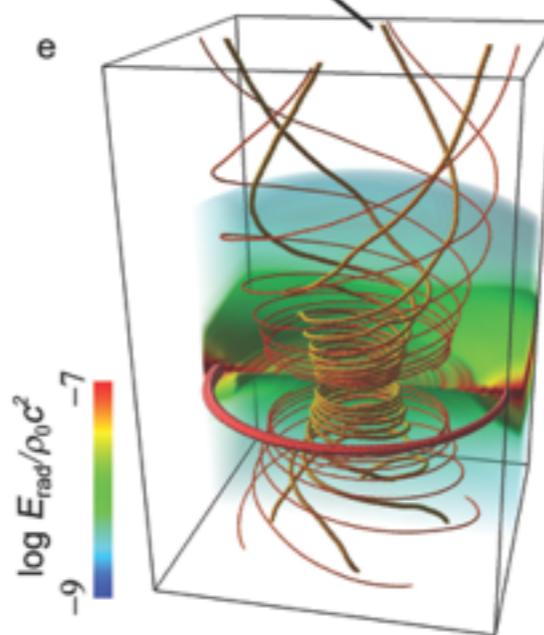
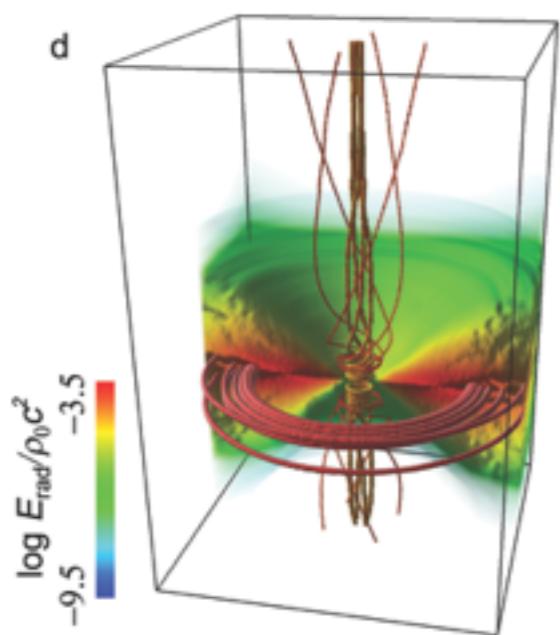
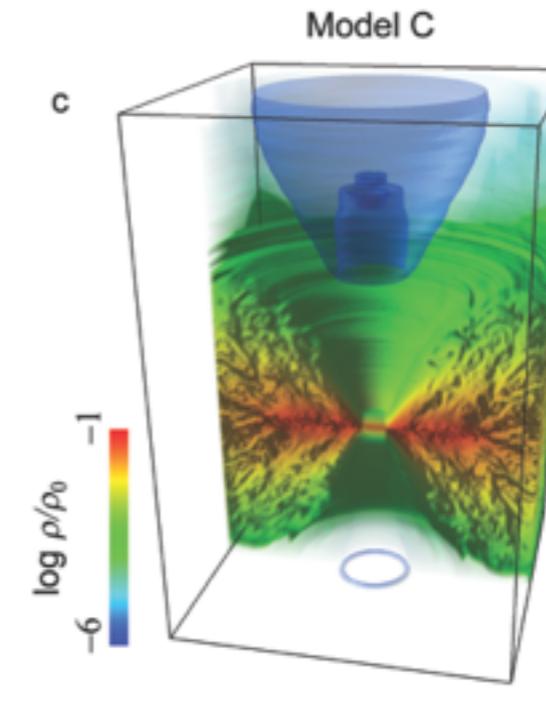
Slim disk type



Standard-type

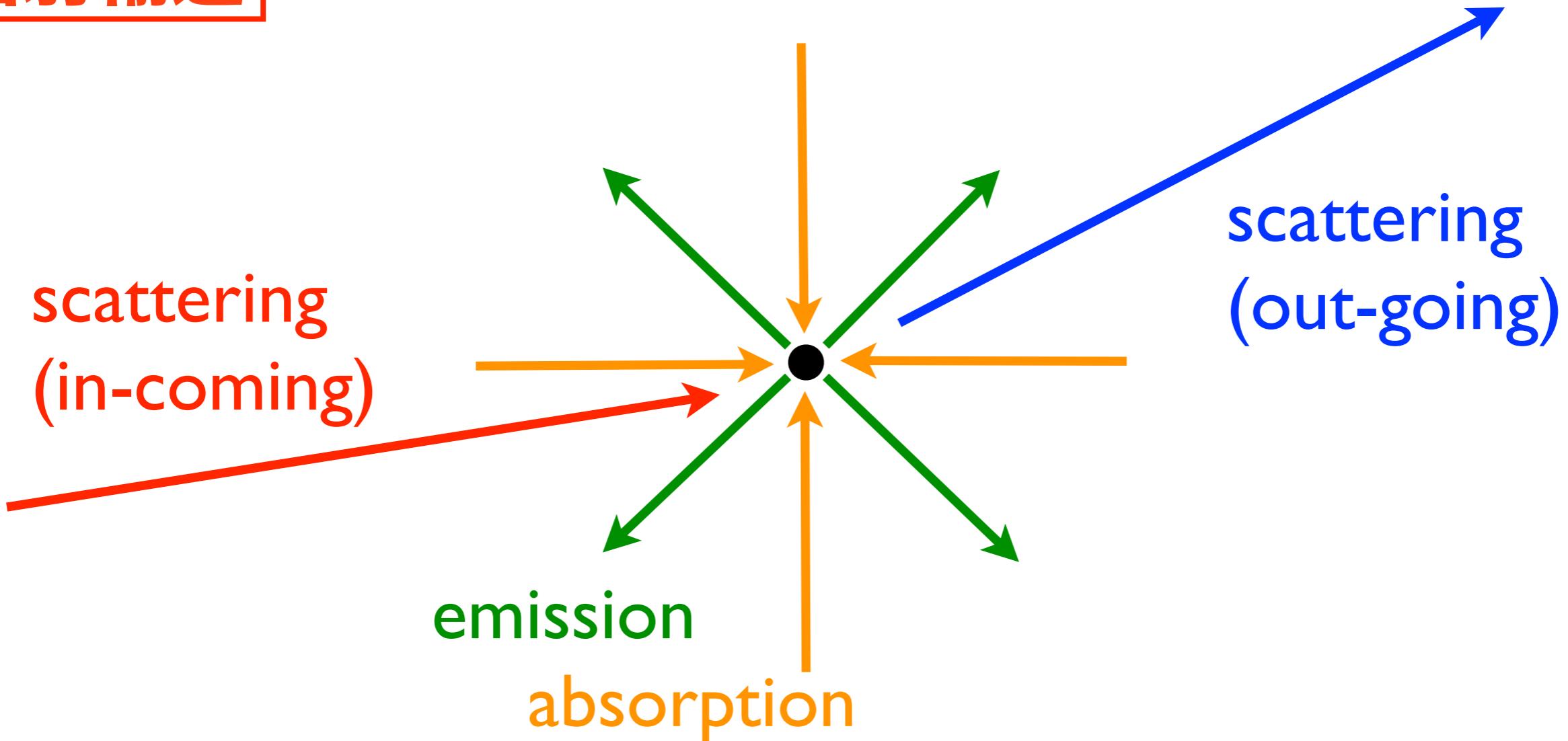


RIAF-type



流体 + 磁場 + 輻射場

輻射輸送



輻射輸送方程式 (空間3次元, 方向2次元, 振動数1次元の6次元方程式)

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu(\mathbf{n})}{\partial t} + \mathbf{n} \cdot \nabla I_\nu(\mathbf{n}) = \frac{\eta_\nu}{4\pi} - \kappa_\nu I_\nu(\mathbf{n}) - \sigma_\nu I_\nu(\mathbf{n}) + \sigma_\nu \int \phi(\mathbf{n}; \mathbf{n}') I_\nu(\mathbf{n}') d\Omega'$$

emission **scattering (out-going)**
absorption **scattering (in-coming)**

GR ray-tracing計算

GR輻射輸送方程式 (GR光子ボルツマン方程式)

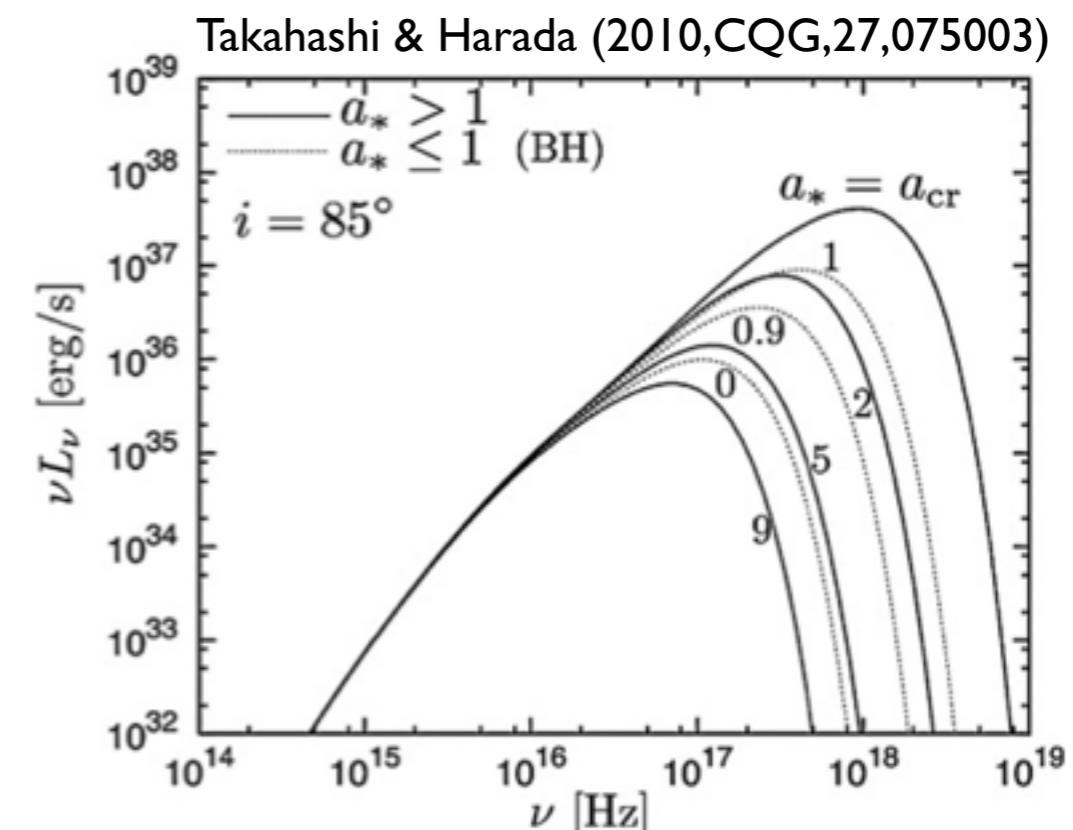
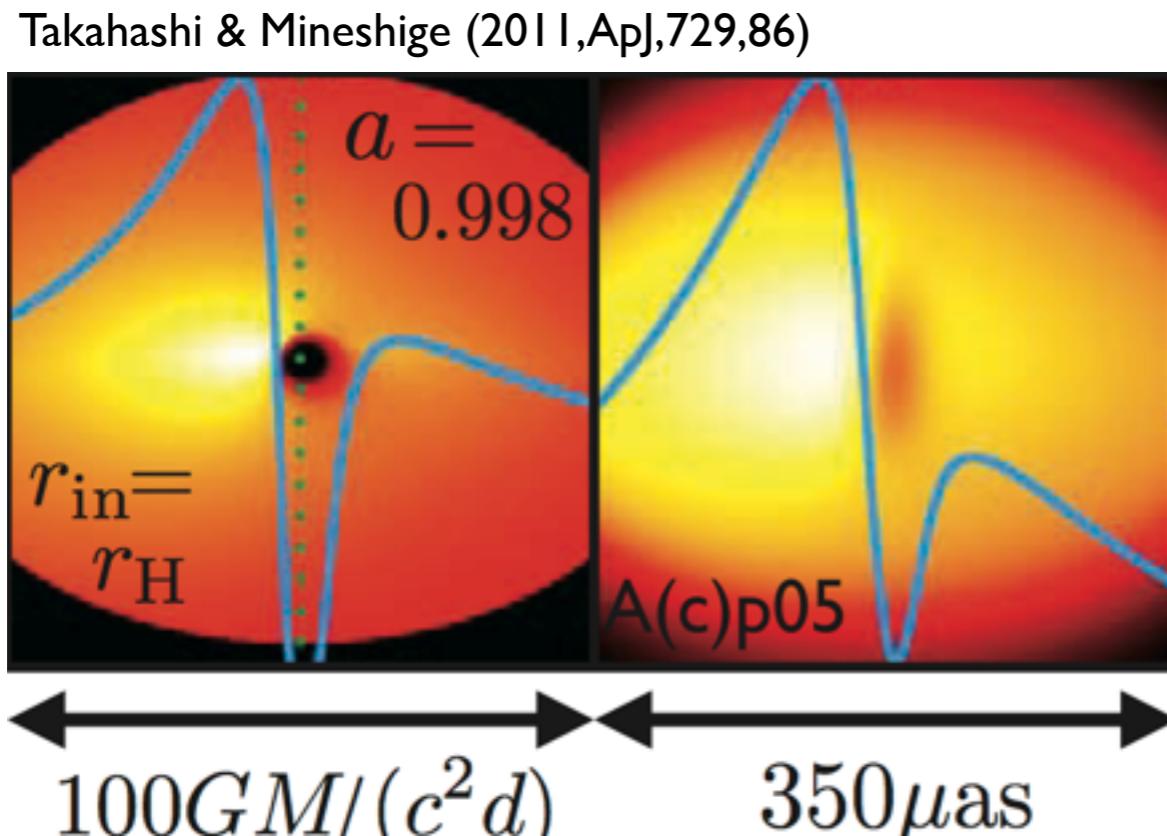
$$\frac{d\mathcal{I}}{d\lambda} = \mathcal{E} - \mathcal{A}\mathcal{I}$$

$\mathcal{I} \equiv \frac{I_\nu}{\nu^3}$: invariant specific intensity

$\mathcal{E} \equiv \frac{j_\nu}{\nu^2}$: invariant emission coefficient

$\mathcal{A} \equiv \nu\alpha_\nu$: invariant absorption coefficient

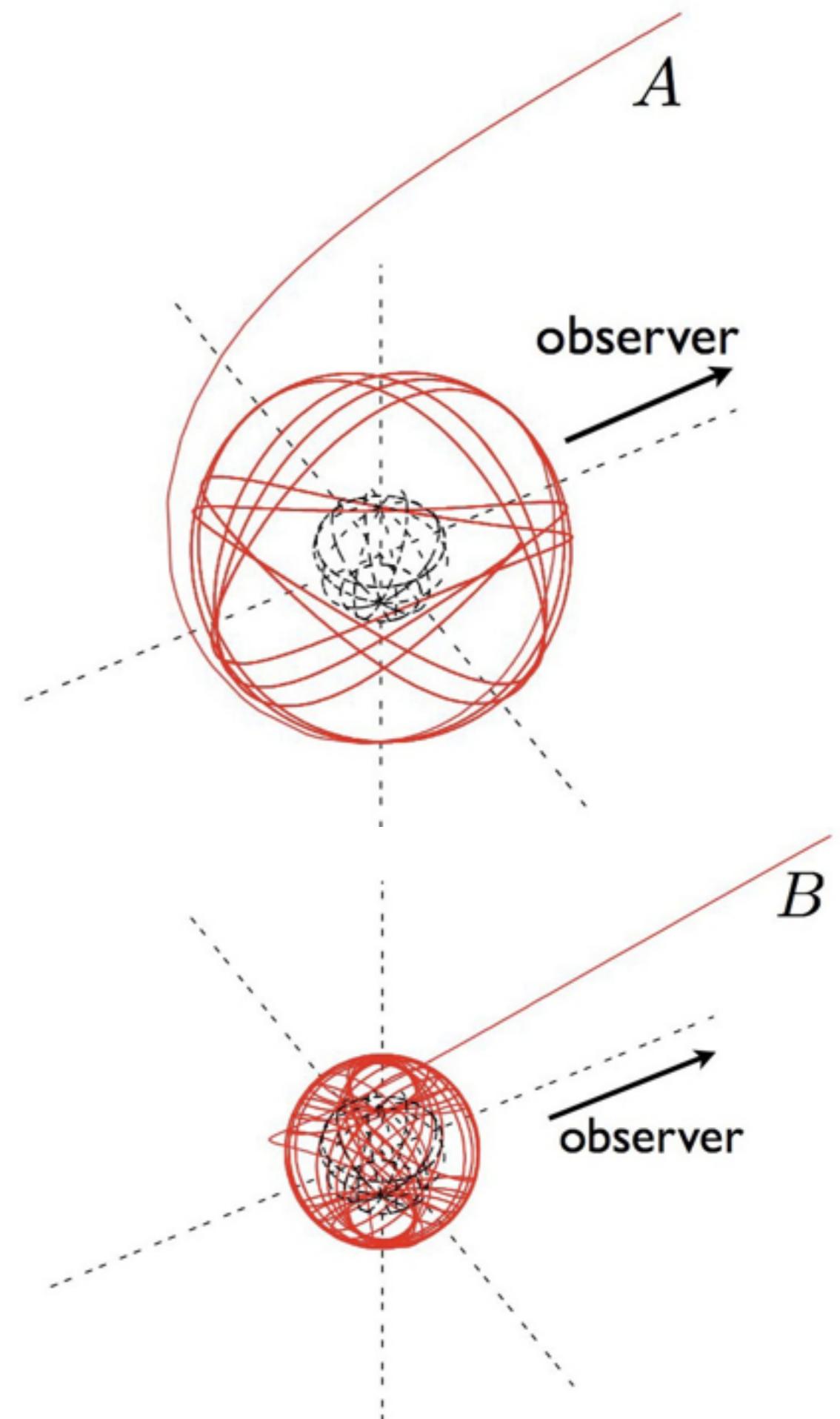
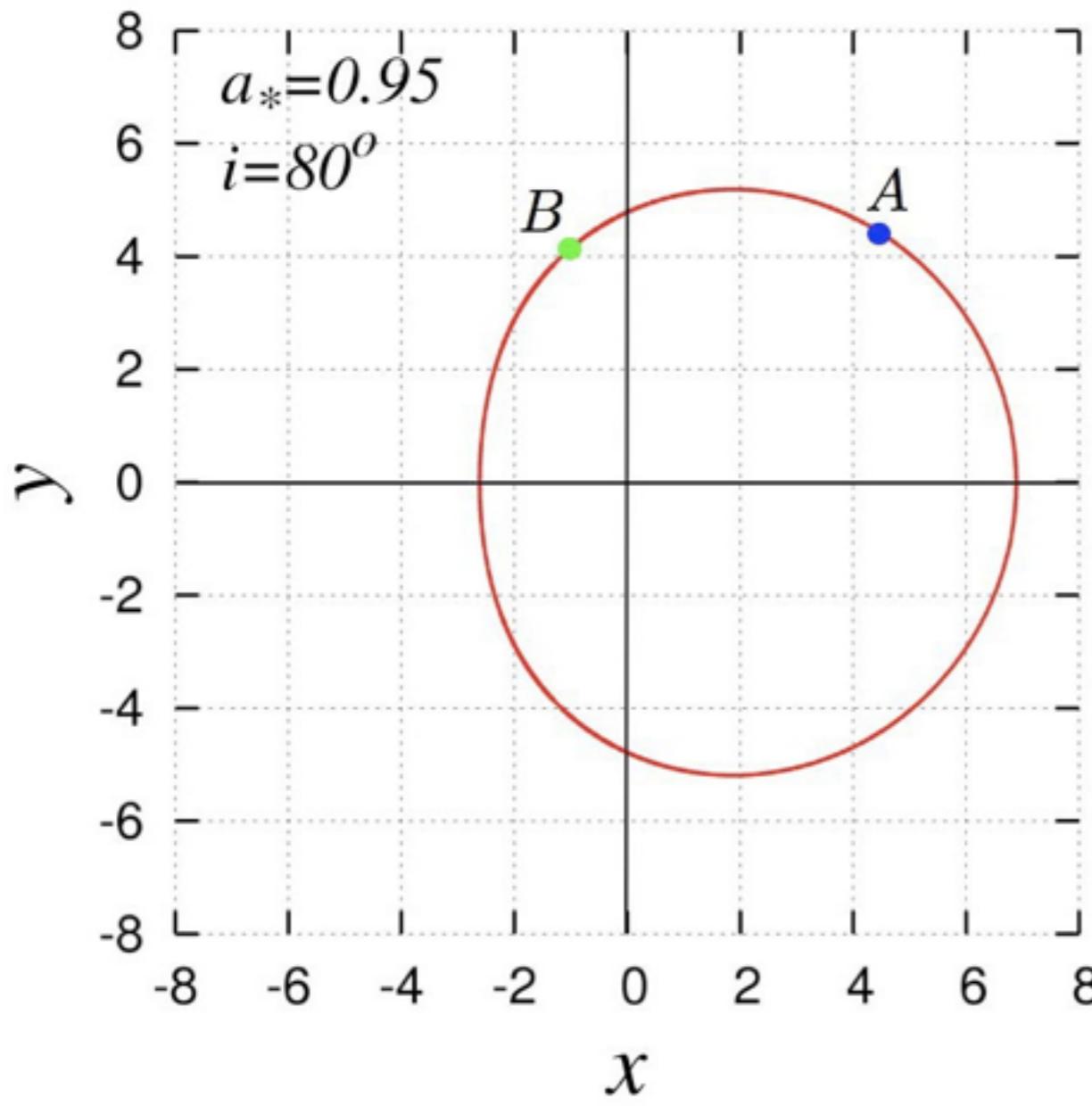
- ・測地線に沿って数値積分。invariant specific intensityを解く。
- ・空間3次元、方向2次元、振動数1次元の6次元空間の中で解を求める。



最内不安定光子円軌道 Photon Sphere

$$\dot{r}^2 \propto R(r)$$

$$R = \frac{dR}{dr} = 0, \quad \frac{d^2R}{dr^2} > 0 \text{ (unstable)}$$

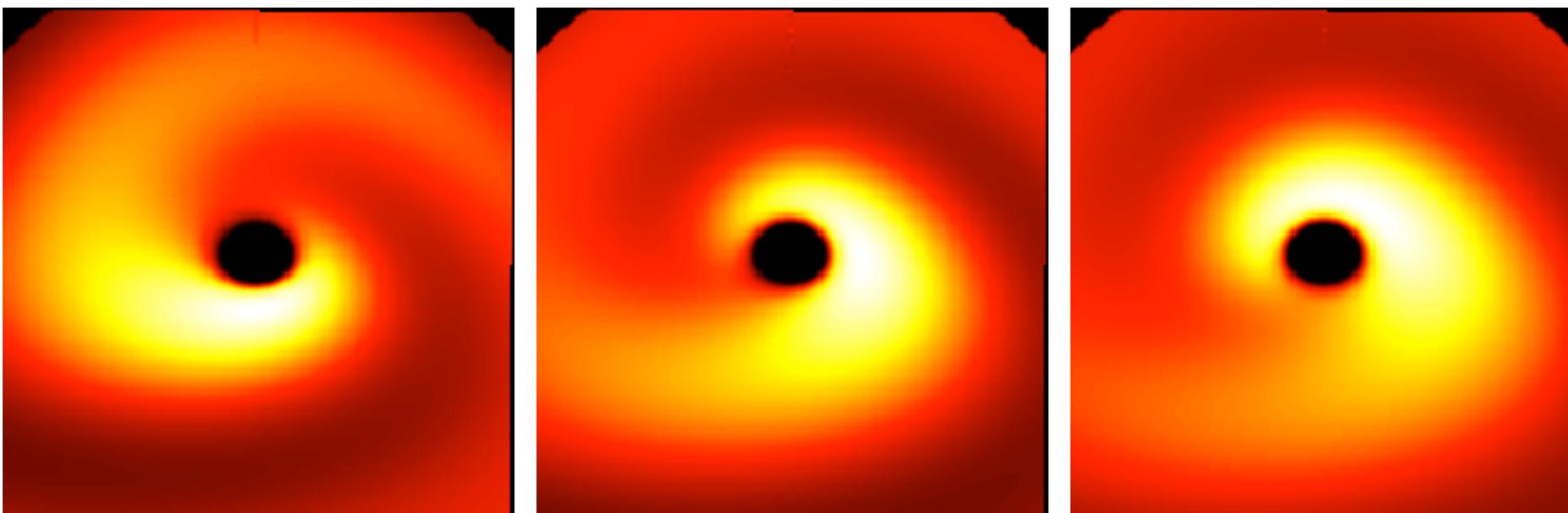


GR ray-tracing計算の得手・不得手

- 特殊および一般相対論効果はきちんと扱える。

光子軌道の湾曲、重力赤方偏移、時間の遅れ、ドップラー効果、時空の引きずり等。

- emission, absorption, scattering (out-going)はOK
 - > 時間変動もそこそこ扱える。



- **scattering (in-coming)が苦手**

- scattering (in-coming)が重要な問題 (e.g. Comptonization)

> Monte-Carlo計算がなされてきた。ただし、定常で。

> 流体シミュレーションと同時にはなされていない。

- I. 導入
2. 輻射輸送の数値計算法
3. LC法のGR化
4. ART法のGR化
5. まとめ

輻射輸送數值解法

散乱の効果を正確に取り入れられる数値解法

(非相対論的計算)

Tree 法

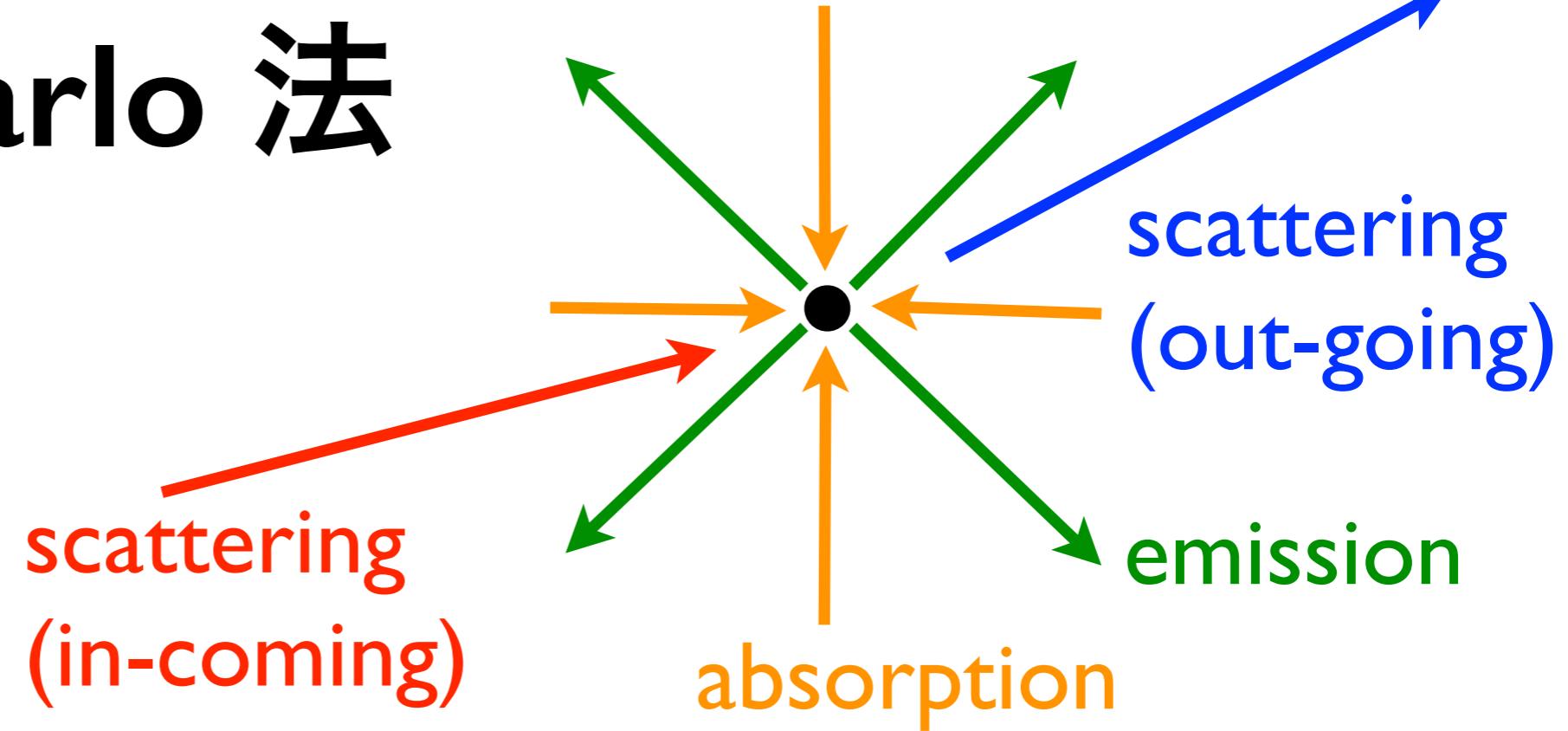
Short Characteristic 法

ART 法

Long Characteristic 法

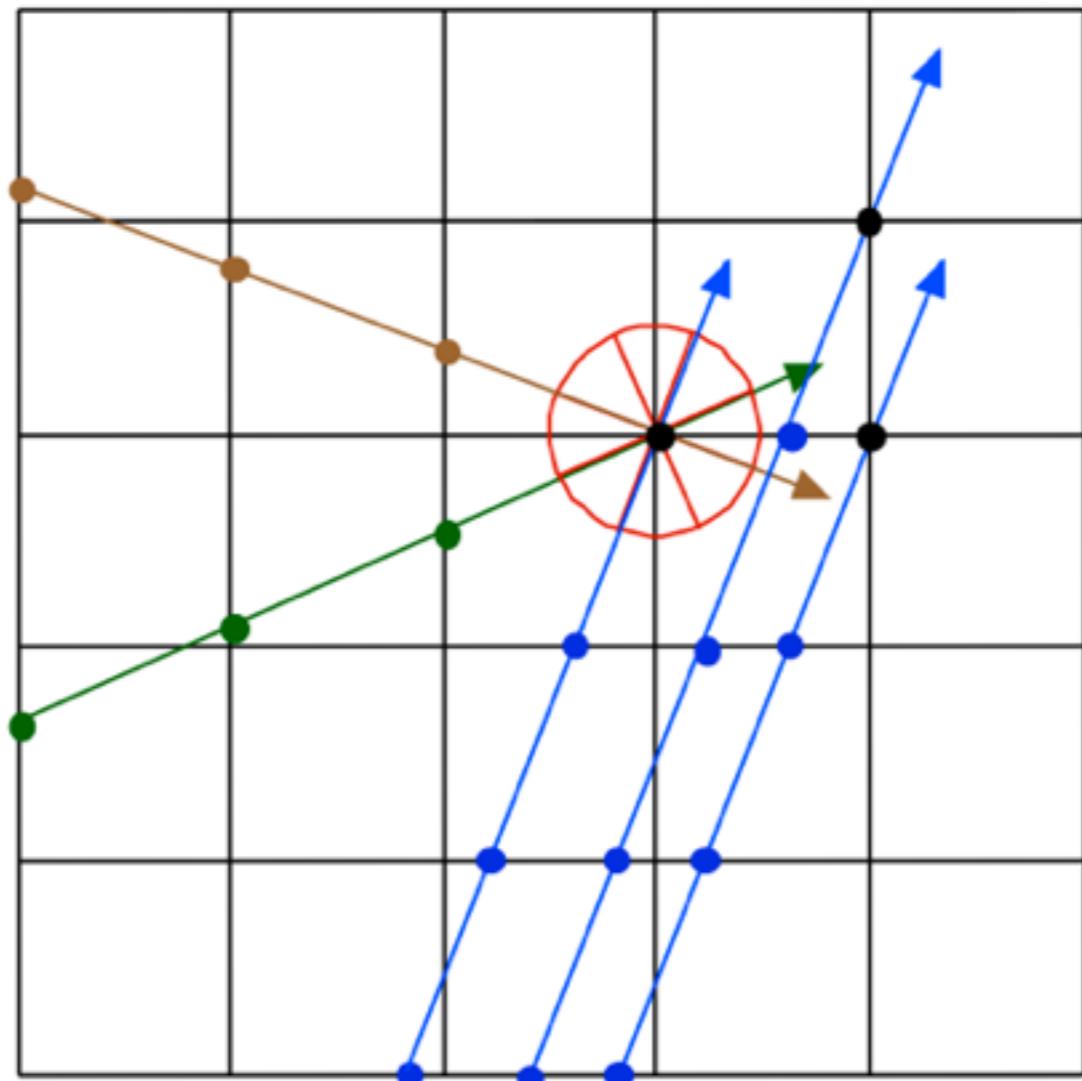
Monte Carlo 法

計算量大



Long Characteristics 法 (Ray Tracing法)

各格子点を通るすべての光線に沿って計算する。



特徴

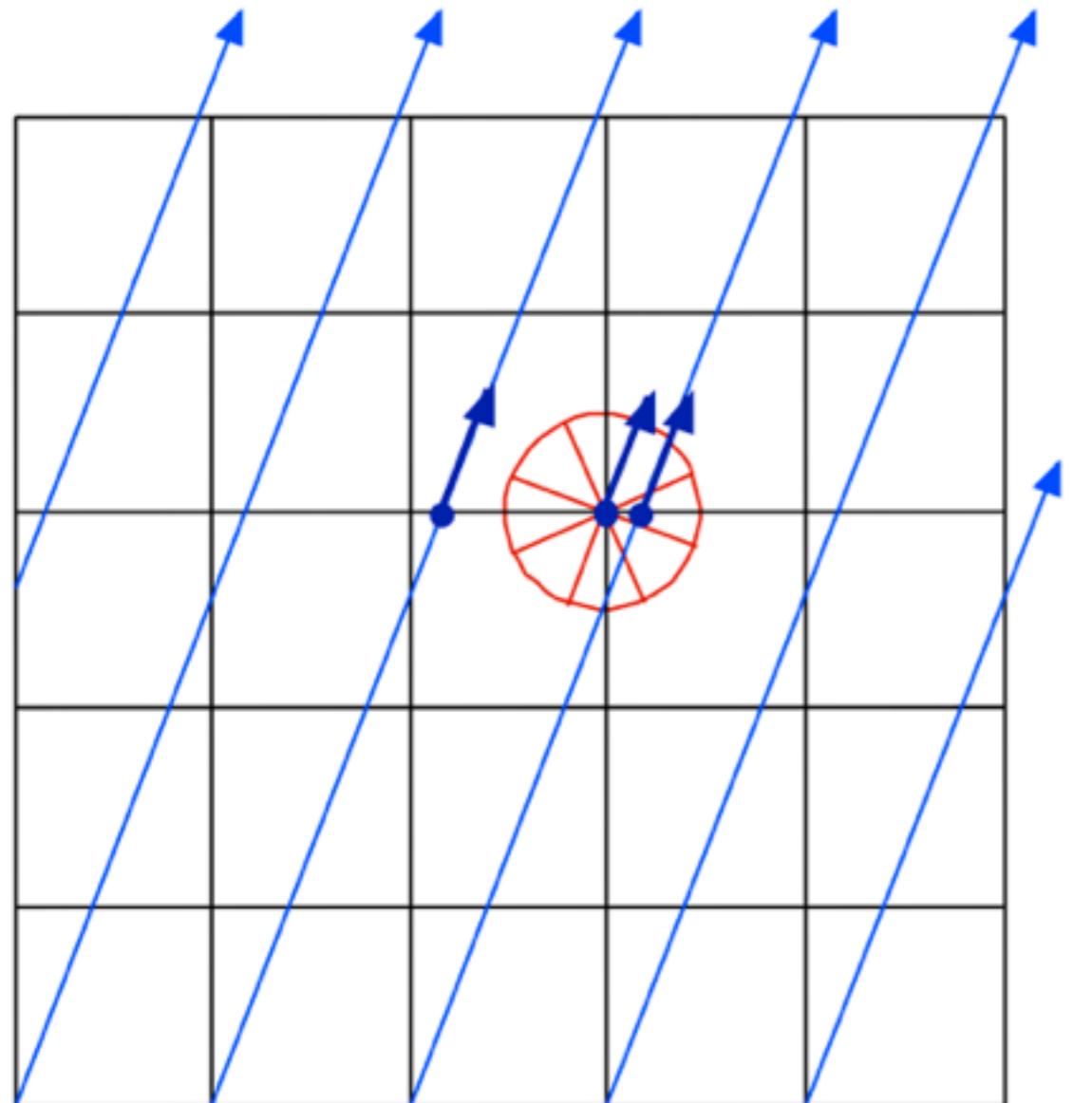
- ・正確
- ・演算量 大
- ・複雑

演算量

$$N \cdot N_x N_y N_z \cdot N_\theta N_\phi \cdot N_\nu$$

計算量が多く計算時間が長いため、大規模計算には向かない

Authentic Radiative Transfer (ART) 法



長い直線で構成する**輻射用格子**を張り、その上で輻射輸送を計算する。

流体格子上での値は、近傍の輻射格子上での値から補間により求める。

- 特徴
- ・演算量はShortと同等
 - ・やや複雑
 - ・精度はLongに近い

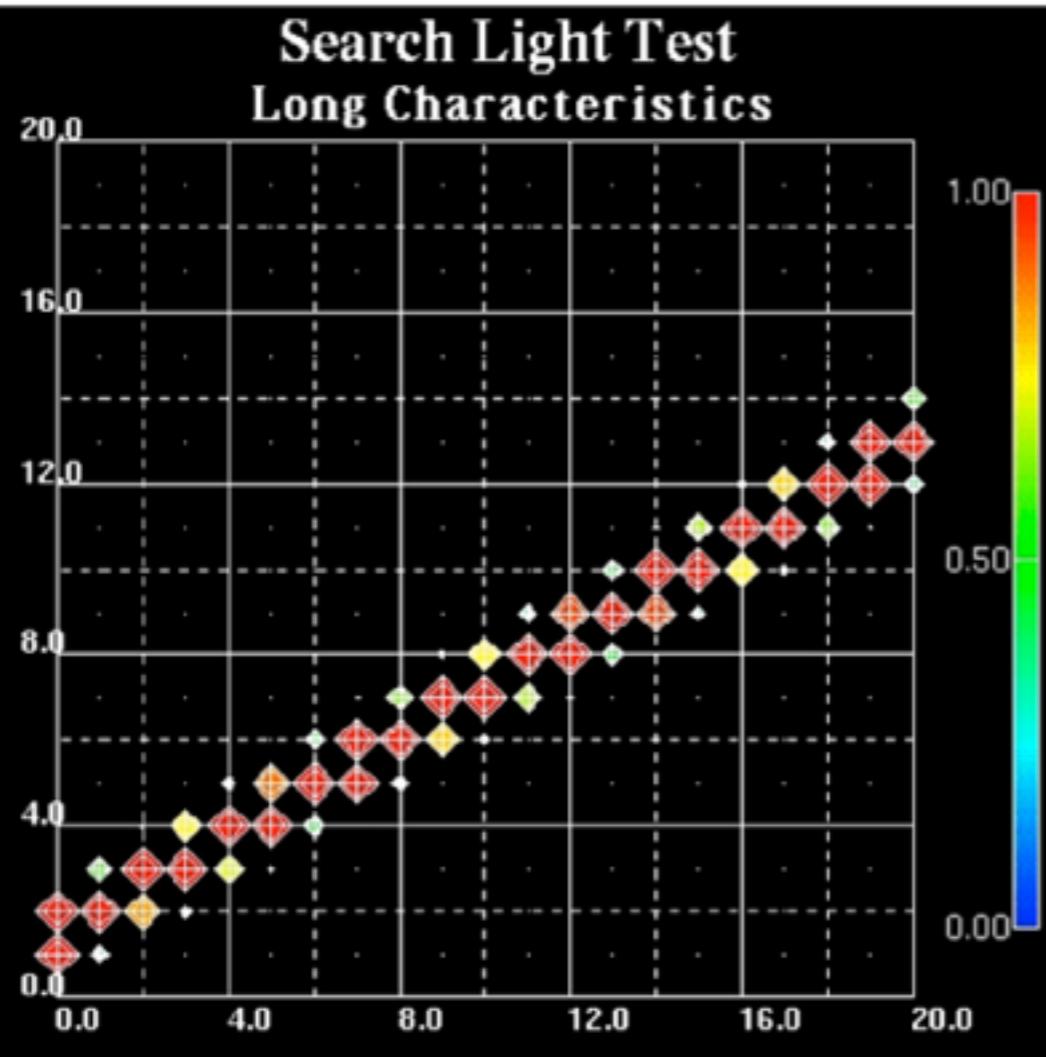
演算量 $N_x N_y N_z \cdot N_\theta N_\phi \cdot N_\nu$

Long Char. 法と Short Char. 法の長所を兼ね備えている。

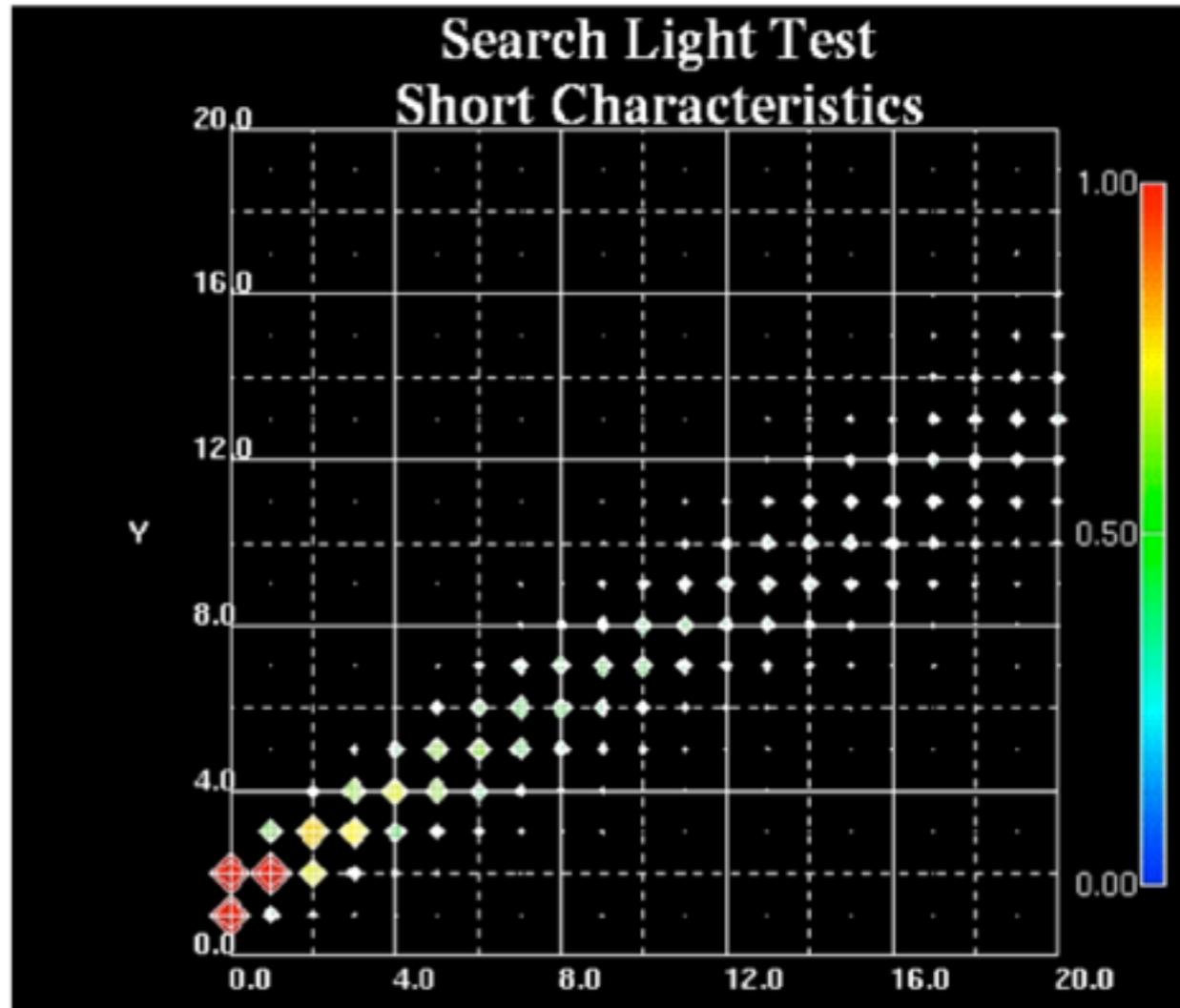
テスト結果：計算精度

by 中本

Long Char. 法



Short Char. 法



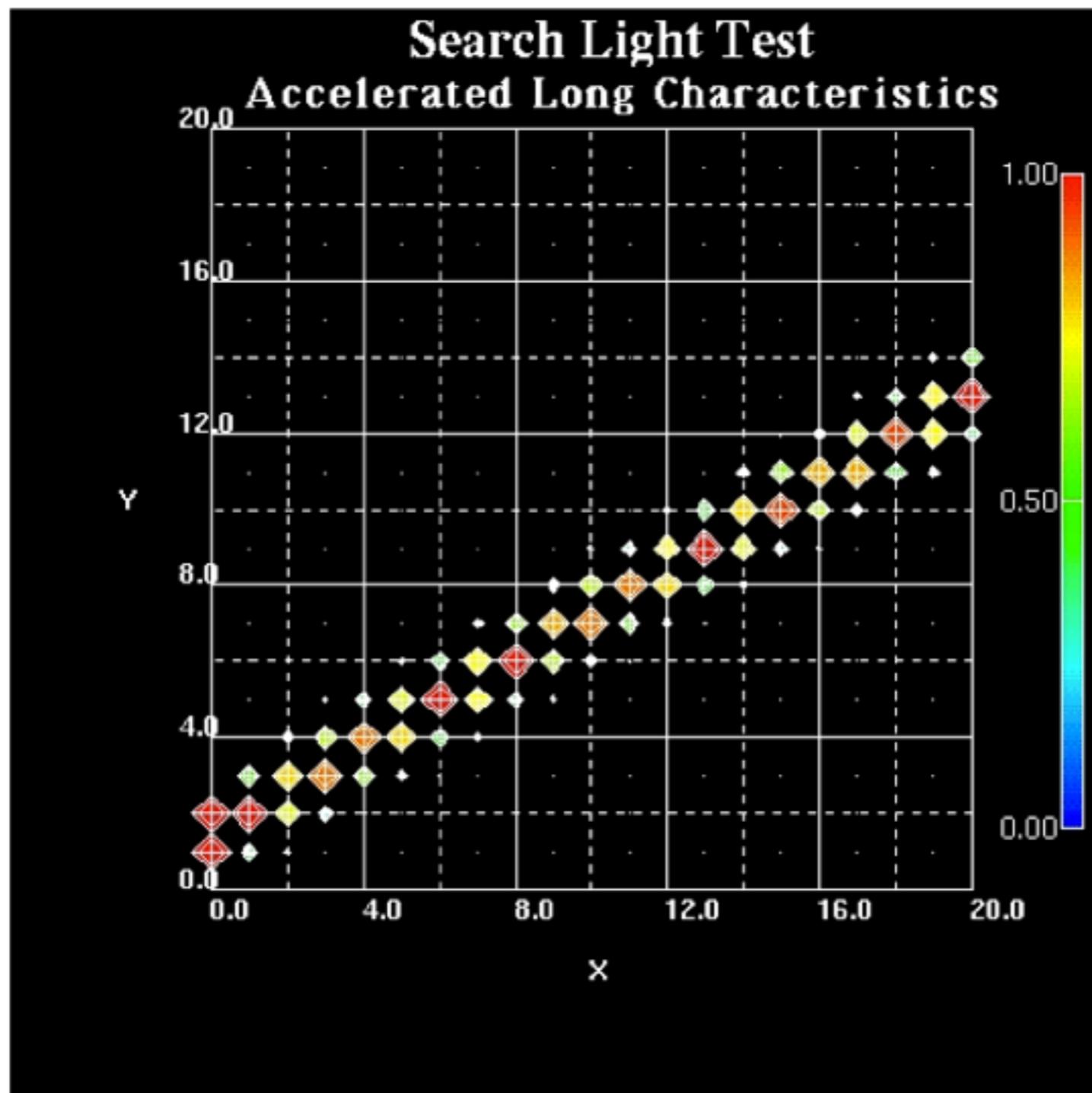
正確な値が得られている。

数値拡散が見られる。

梅村雅之氏のプレゼンファイルより

ART 法

by 中本



補間は流体格子上への mapping の際の 1 回だけなので、数値拡散が小さい。

Long Char.法の結果に近い
結果が得られている。

GR輻射流体

- 保存則

連続の式 $\nabla_\alpha(\rho u^\alpha) = 0$

エネルギー・運動量保存則 $\nabla_\beta(T_{\text{fluid}}^{\alpha\beta} + R^{\alpha\beta}) = 0$

流体 $T_{\text{fluid}}^{\alpha\beta} = \rho h u^\alpha u^\beta + p g^{\alpha\beta}$

輻射 $R^{\alpha\beta} = \int F p^\alpha p^\beta dP$ (輻射テンソル)
F: 分布関数

- 輻射テンソルをある特定のフレームで分解

$$R^{\alpha\beta} \implies E, F^i, P^{ij}$$

$$R^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} R^{00} & R^{0i} \\ R^{i0} & R^{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F^i \\ F^i & P^{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F^1 & F^2 & F^3 \\ F^1 & P^{11} & P^{12} & P^{13} \\ F^2 & P^{21} & P^{22} & P^{23} \\ F^3 & P^{31} & P^{32} & P^{33} \end{pmatrix}$$

既存の輻射輸送數値計算手法

①非相対論的輻射輸送

(Tree, SC, ART, LC, MC等)

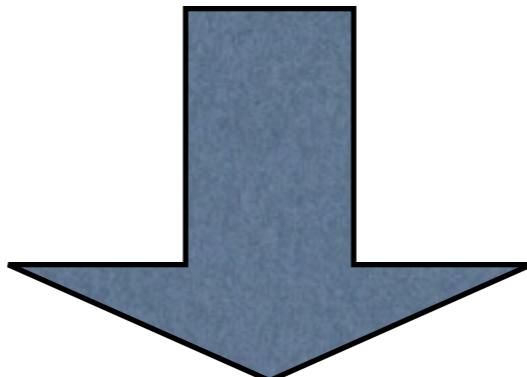
- * 光子の放射・吸収・散乱を完全に解ける
- * 輻射流体シミュレーション
- * 大規模並列計算

②GR輻射輸送

(GR ray-tracing計算)

- * 特殊・一般相対論効果を正確に考慮
- * 6次元位相空間で積分
- * 散乱が苦手

融合・発展



一般相対論的輻射流体の新しい數値計算手法

- * 6次元位相空間でGR光子ボルツマン方程式を解くことによる計算
- * 放射・吸収・散乱と一般・特殊相対論効果を完全に解く

GR化する際の困難

困難A) 相対論的流体では流体速度が光速に近い状況が起こるので、光子の伝搬時間を無視できない。

[過去のLC法などでは光速を無限大として扱う]

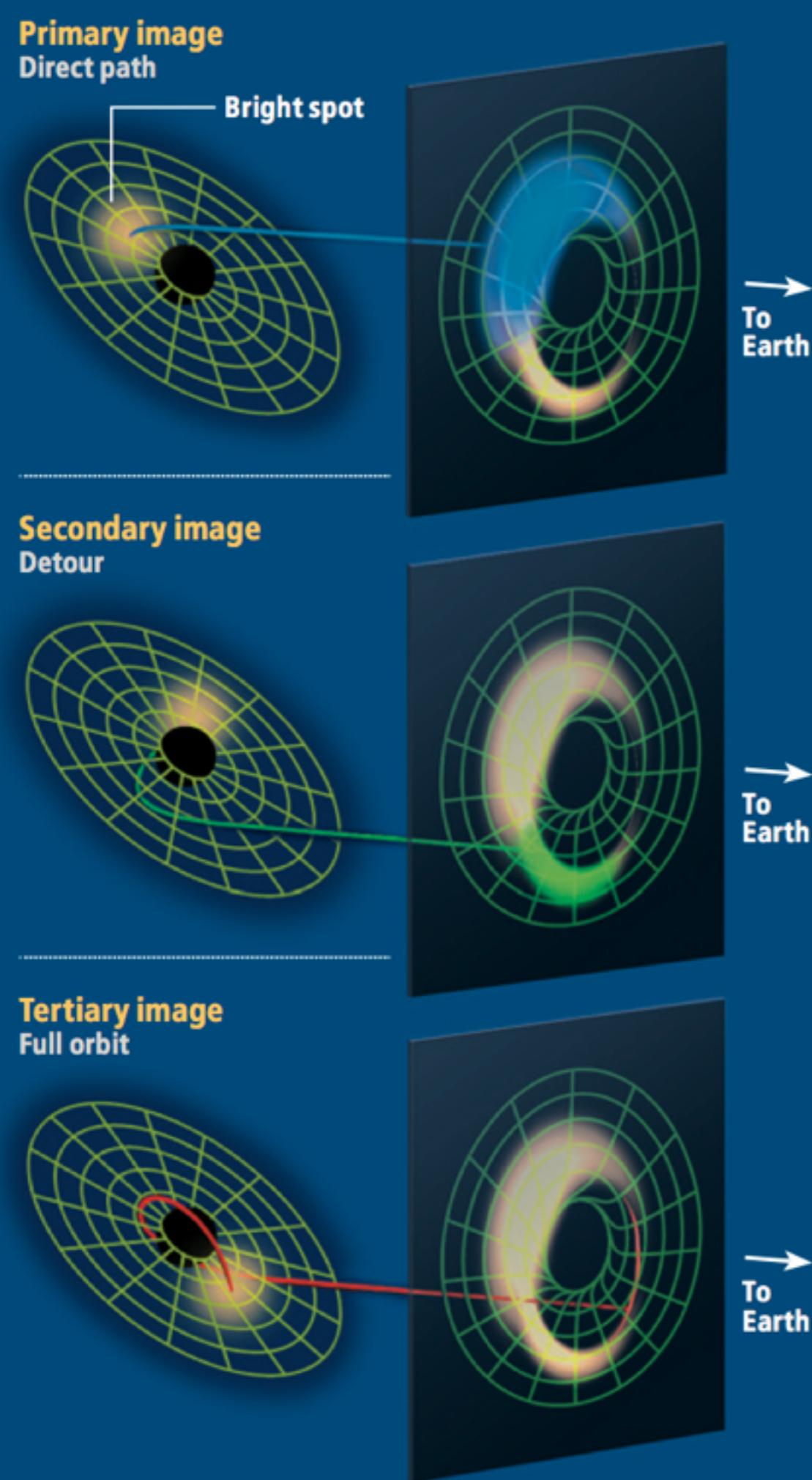
困難B) 光子の情報は厳密に光速で伝わるように解く必要がある。 [そうでないと、情報伝搬の順序が正しくなく、計算結果が非物理的になる]

困難C) 時空の歪みのために光線が湾曲する。
[過去のLC法などでは直線光線]

困難D) 光子・物質間の相互作用計算を行う時空の各点での
orthonormal frameごとにエネルギー・運動量が変化。

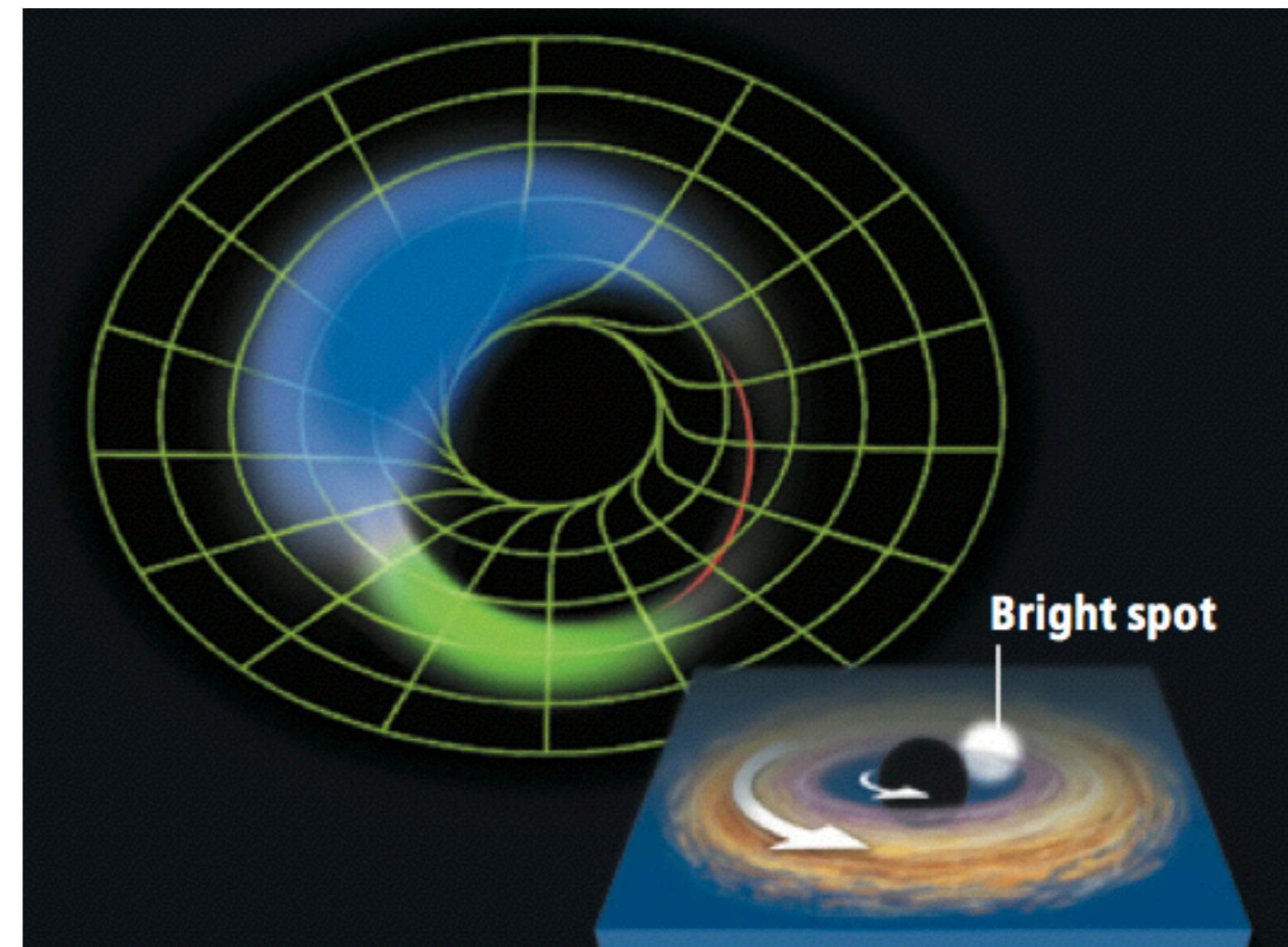
今回、これらの困難を全て克服した新たな数値計算方法の開発に成功した。

- I. 導入
2. 輻射輸送の数値計算法
3. LC法のGR化
4. ART法のGR化
5. まとめ

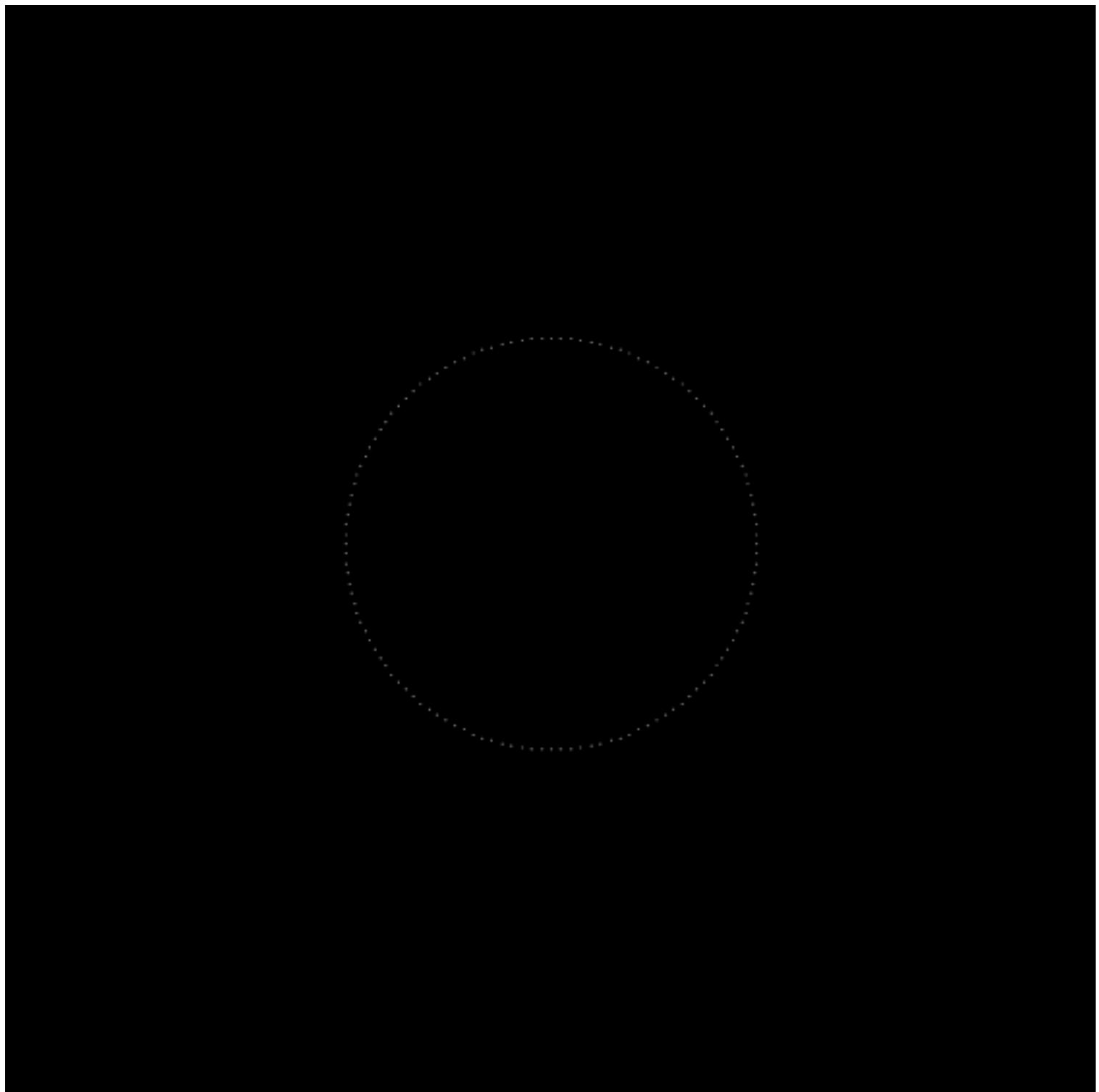


hot spot

Broderick & Loeb (2009)



テスト計算：LC法による hot spot からの輻射



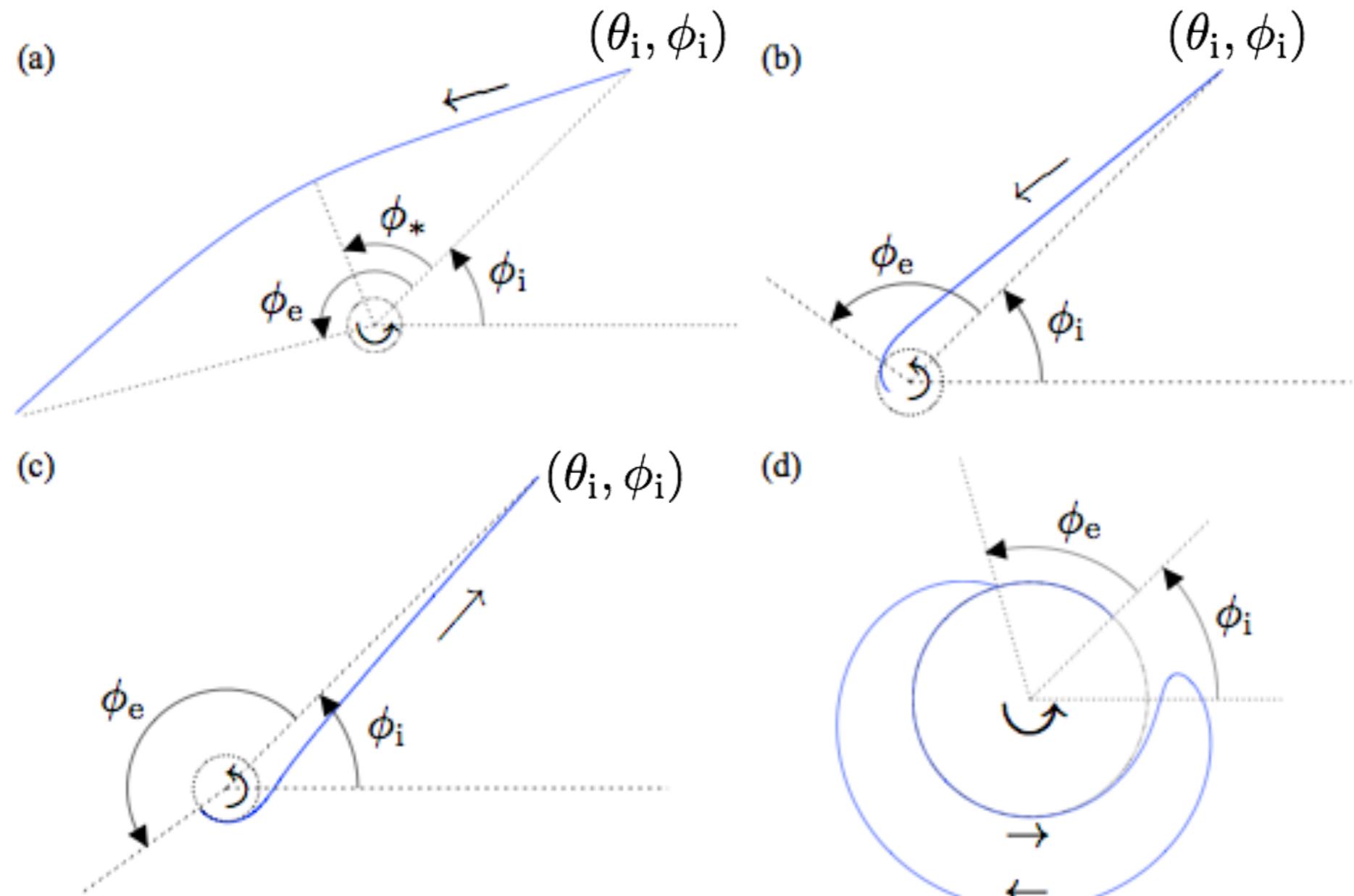
direct image と relativistic image

relativistic image が photon sphere (点線) に沿って移動
→ 正しくGR計算できていることを示す

- * Kerr-Schild座標 $a/M = 0.0$
- * 赤道面上のhot spotからの放射を $r = 10, \theta = \pi/4$ のメッシュまでLC法で輸送
- * 測地線は、メッシュ間をつなぐrayは6次元空間で張る
- * ただし、テスト計算なので上記のメッシュに接続するrayで計算
- * この計算により、LC法をGRに拡張可能であることがわかった。
- * この結果を踏まえ、計算量を落とすために、ART法のGR化を行った。

- I. 導入
2. 輻射輸送の数値計算法
3. LC法のGR化
4. ART法のGR化
5. まとめ

測地線パターンと位相空間でのグリッド



A. 測地線の端点での角度座標
 (θ_i, ϕ_i)

A. (θ_i, ϕ_i) から測った他端点の角度座標
 (θ_e, ϕ_e)

A. LNRFでの角度座標

$(\bar{\theta}, \bar{\phi})$

(測地線の方向を指定する)

A. (θ_i, ϕ_i) から測った角度座標
 (θ_*, ϕ_*)

測地線の計算のパラメータ $\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \theta_i \leq \pi, 0 \leq \phi_i \leq 2\pi \\ -3\pi \leq \phi_e \leq 3\pi \text{ for } 0 \leq \bar{\phi} \leq 2\pi \end{array} \right.$

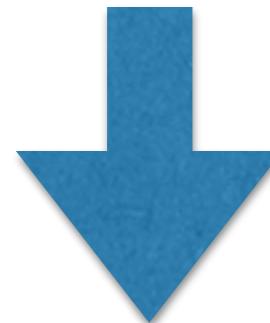
I. 位相空間での測地線を網羅

2. 相対論的軌道は $-3\pi \leq \phi_e \leq 3\pi$ の範囲で計算

輻射テンソルの計算

不变輝度 \mathcal{I} ●

(位相空間)



運動量空間で積分

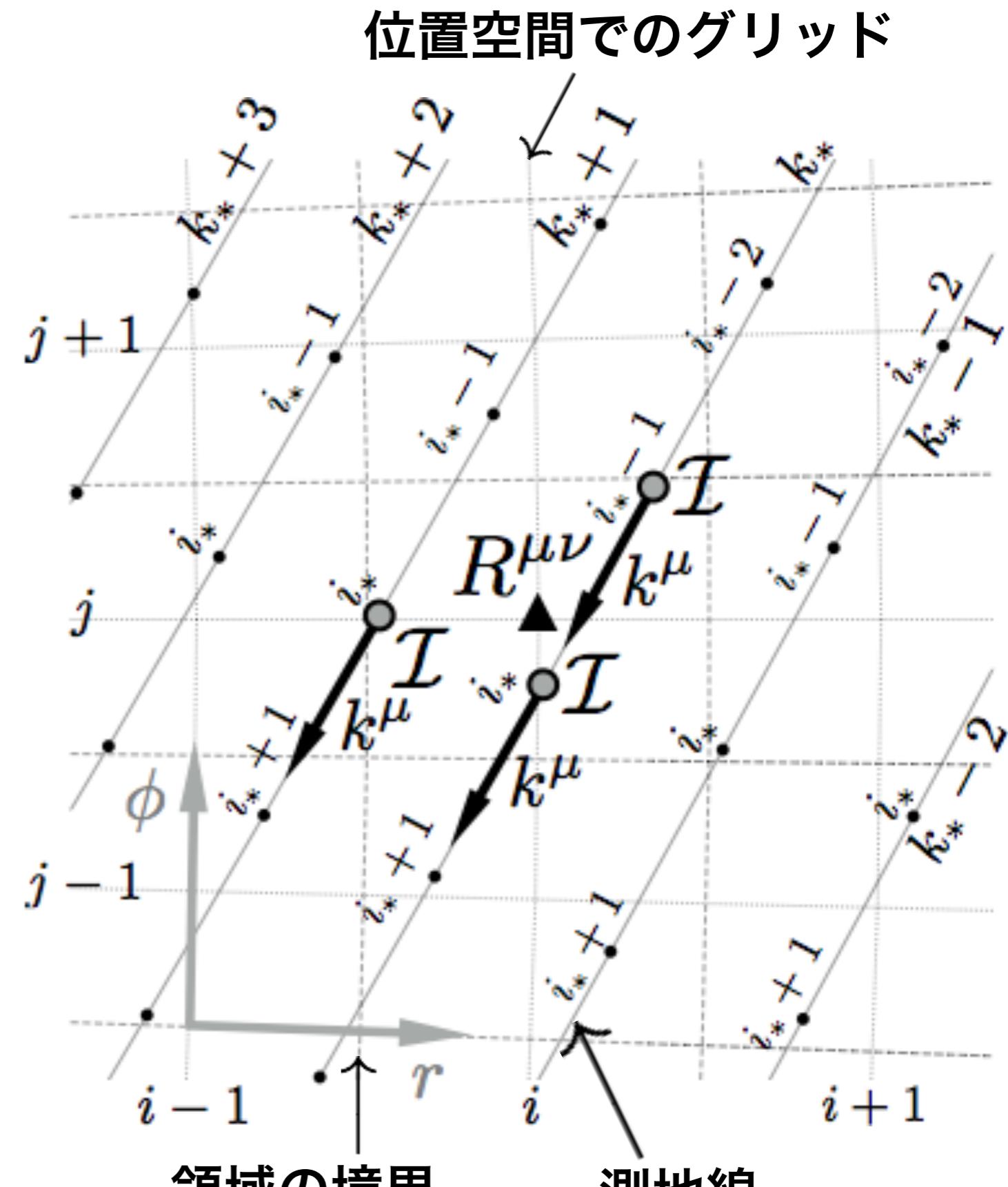
不变輝度 \mathcal{I} の最近接点での th

輻射テンソル $R^{\mu\nu}$ ▲

(位置空間)

$$R^{\mu\nu} = \int k^\mu k^\nu \mathcal{I} dP$$

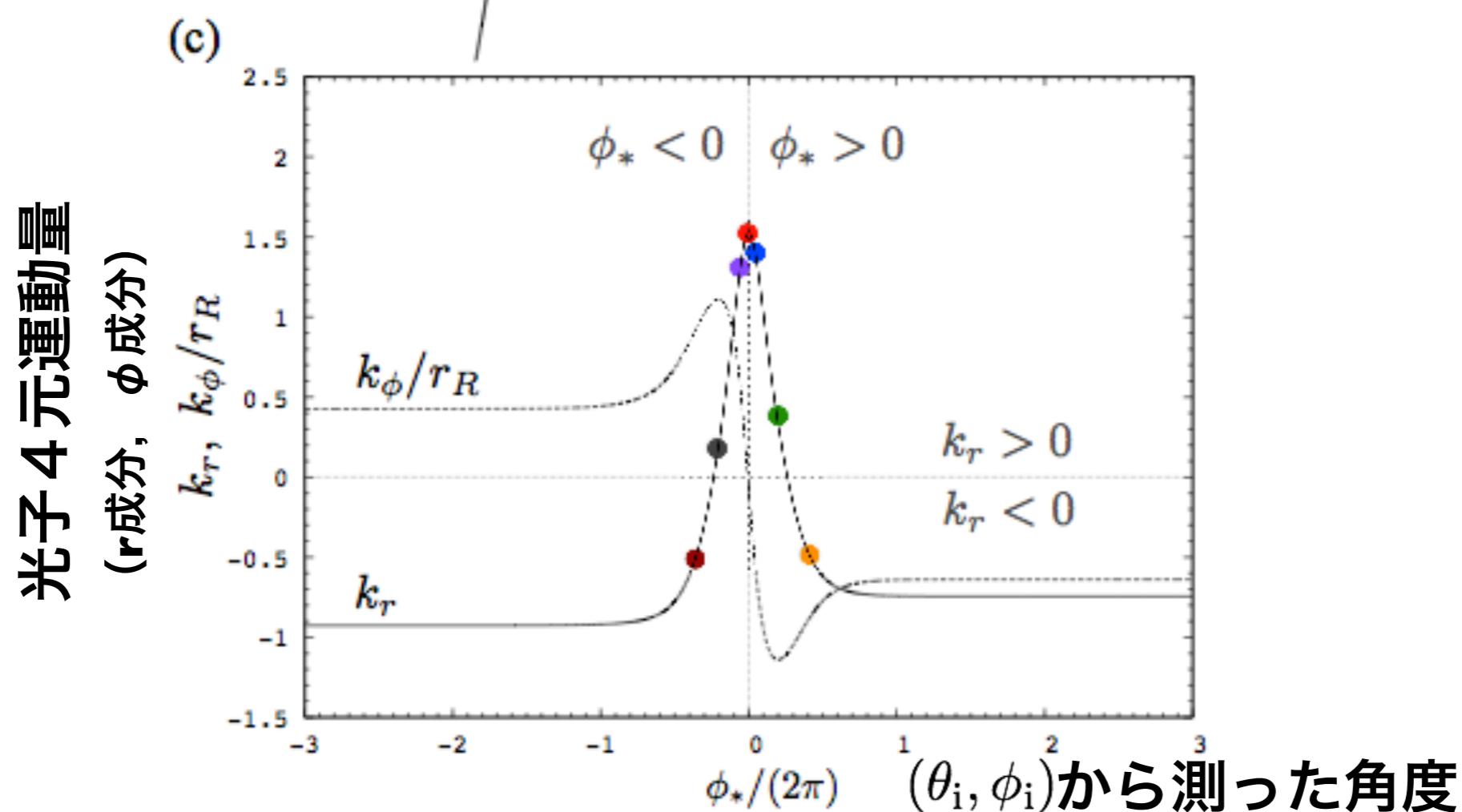
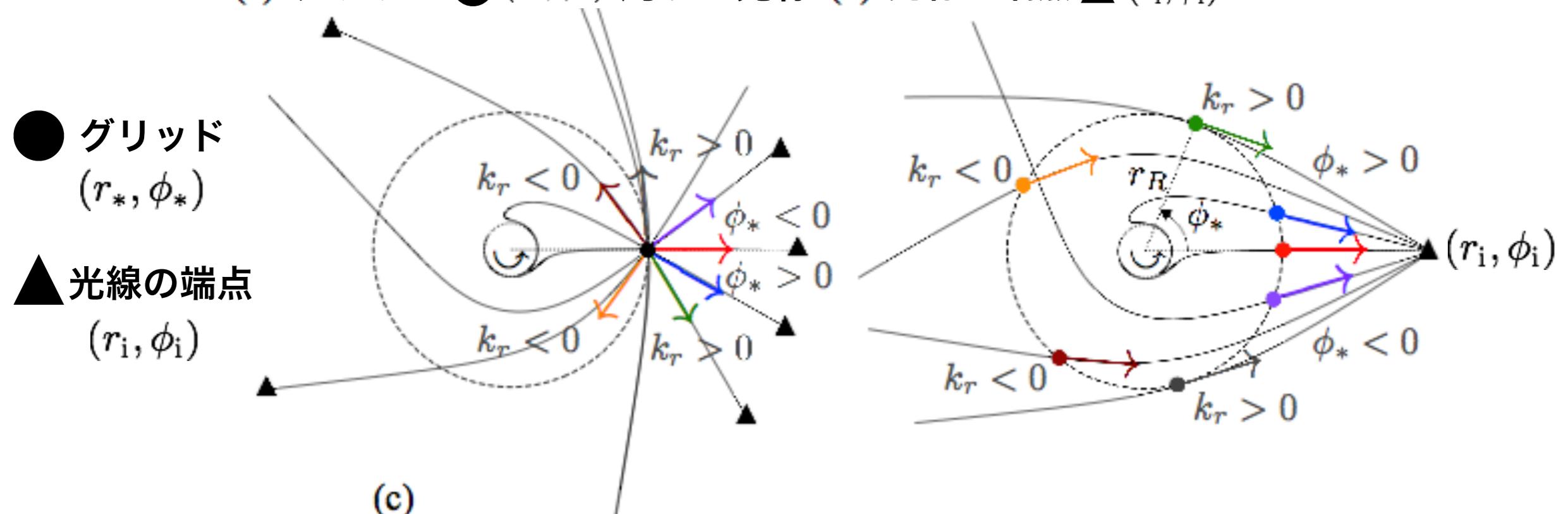
領域の境界
(位置空間)



輻射テンソルを評価するグリッド周りの測地線と光子4元運動量

ART法のGR化

(a) グリッド $\bullet (r_*, \phi_*)$ 周りの光線 (b) 光線の端点 $\blacktriangle (r_i, \phi_i)$ をそろえたプロット



wave-front propagation (1)

for Schwarzschild BH
Hanni (1977) Fig.1, Fig.2

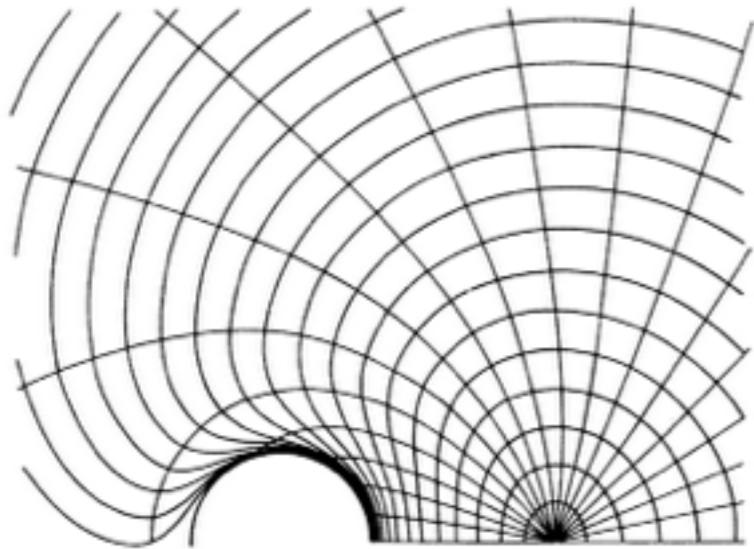


FIG. 1. Photon trajectories emitted isotropically from an event at $r=6M$ are graphed in Schwarzschild coordinates. The closed curves are the wave fronts associated with time intervals $t=M$. The relation of the light rays to the wave fronts is analyzed in Secs. IV and V through analogies with material media.

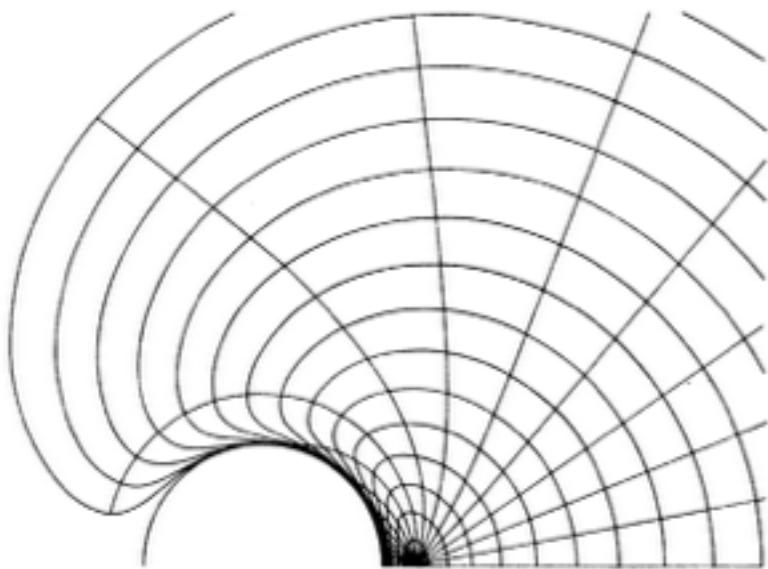


FIG. 2. The same phenomena as Fig. 1 with the emission event in the stronger spacetime curvature at $r=2.5M$. Scale is indicated by the circle placing the event horizon at $r=2M$.

for Kerr BH
Hanni (1977) Fig.3, Fig.4

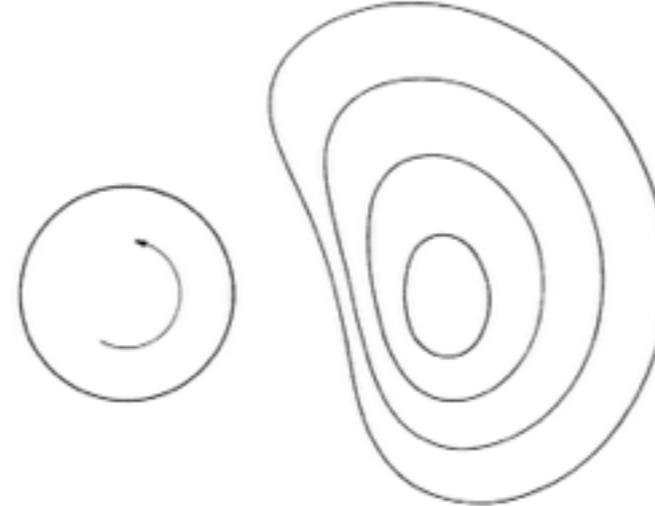


FIG. 3. Intersection of the wave fronts associated with an emission event at $r=3M$ and time intervals $M/2$ with the equatorial plane of a maximally rotating Kerr hole are graphed in Boyer-Lindquist coordinates. The event horizon is located by the circle and the direction of rotation is indicated by the arrow contained within.

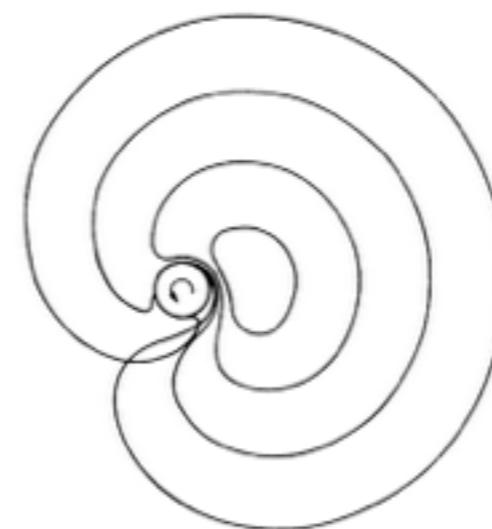


FIG. 4. Wave fronts associated with the emission event of Fig. 3, but with time intervals of $2M$. The scale is indicated by the circle representing the event horizon at $r=2M$.

Takahashi et al.(1990) Fig.5, Fig.8

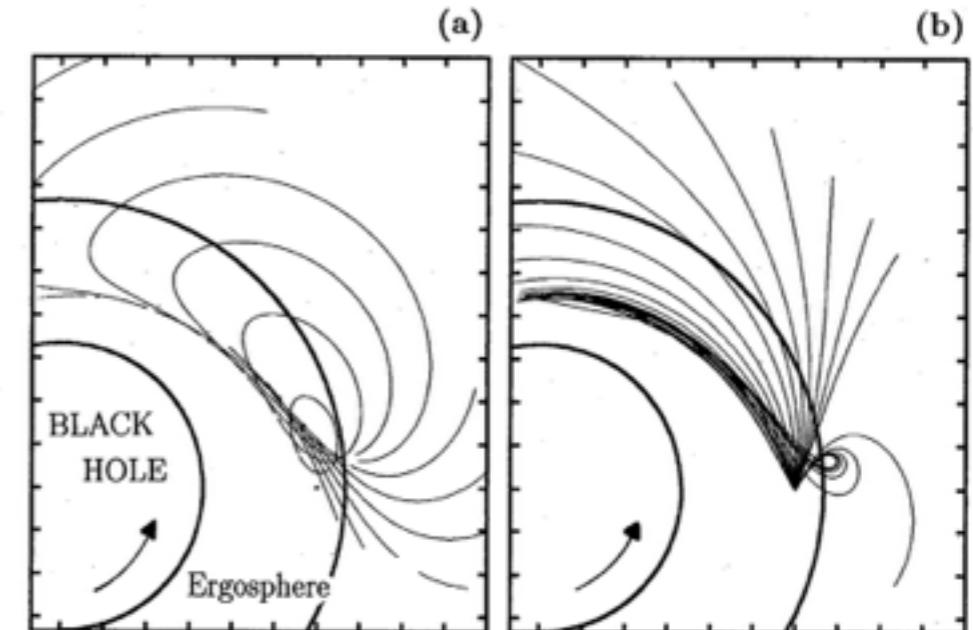


Fig. 5. Light rays propagating in the equatorial plane emitted from the ergosphere ($r=1.8m$, $a/m=1$): (a) the paths and (b) the wave fronts (the time interval $\Delta t=10m$). The outgoing rays escaping from the ergosphere can propagate toward the counter rotating direction and some of them return to the ergosphere. The wave front will be elongated as it approaches the event horizon because of the strong dragging effect.

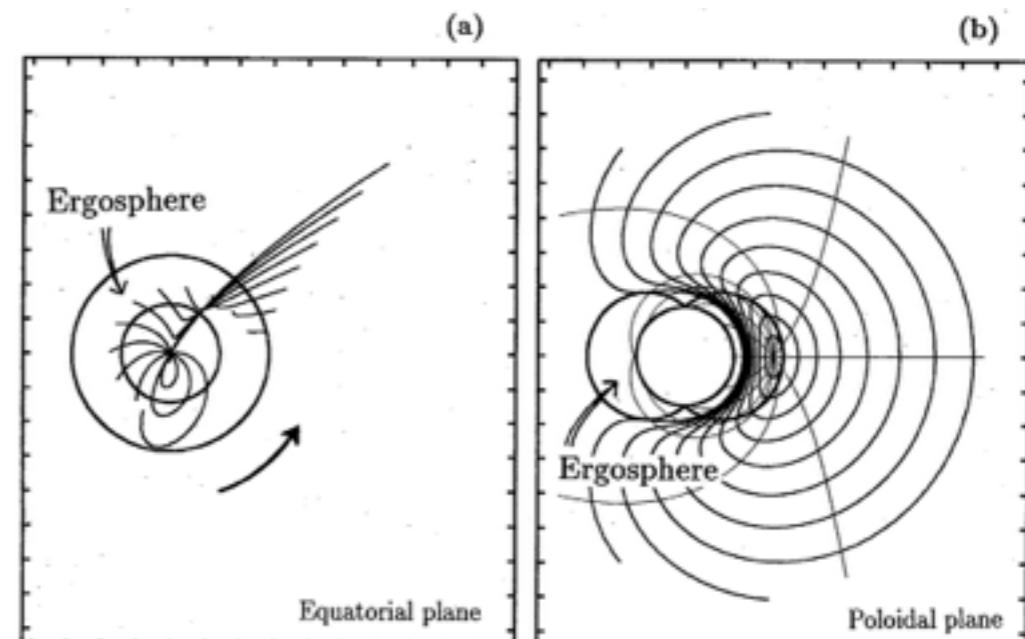
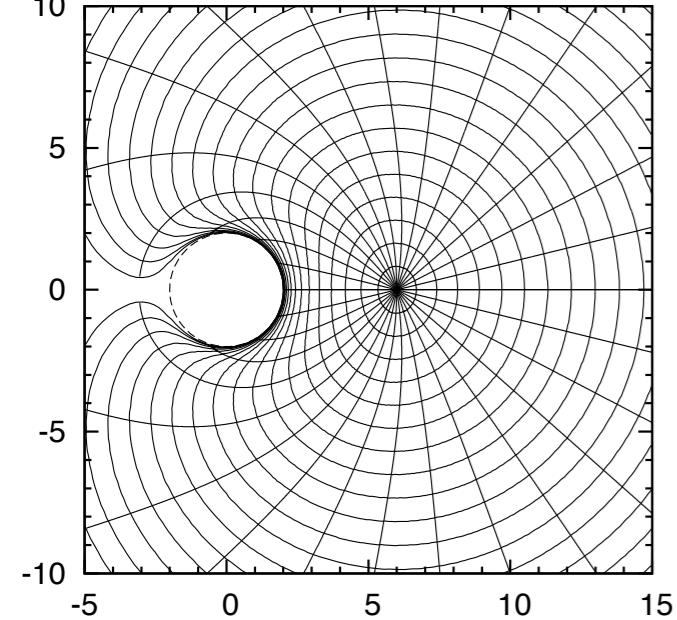


Fig. 8. Propagation of a light ray emitted at $(r,\theta,\phi)=(1.8m, \pi/2, 0)$ the poloidal plane. (a) and (b) show projection onto the equatorial plane and the poloidal plane, respectively. Solid curves denote wave fronts and thin curves in (b) denote ray-paths. The strong dragging effect shifts the wave front in the rotating direction and winds it around the event horizon. Near the pole region the wave fronts are twisted violently. ($a/m=1$, $\Delta t=1.2m$)

wave-front propagation (2)

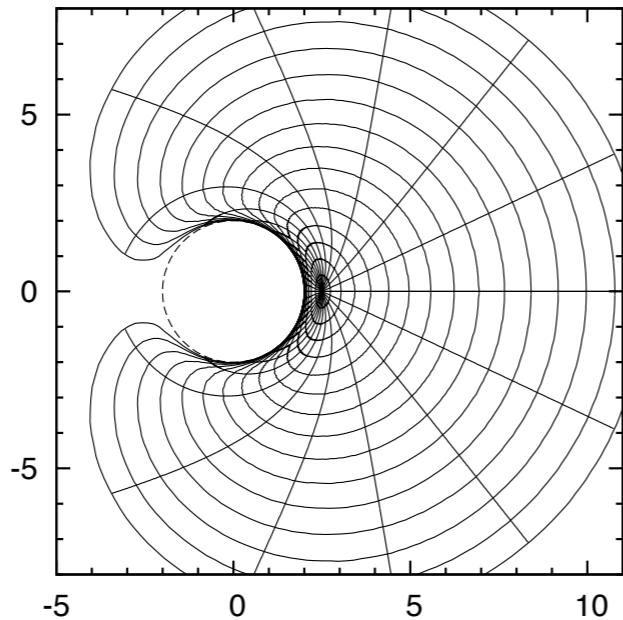
Boyer-Lindquist

$$a/M = 0, r = 6M$$



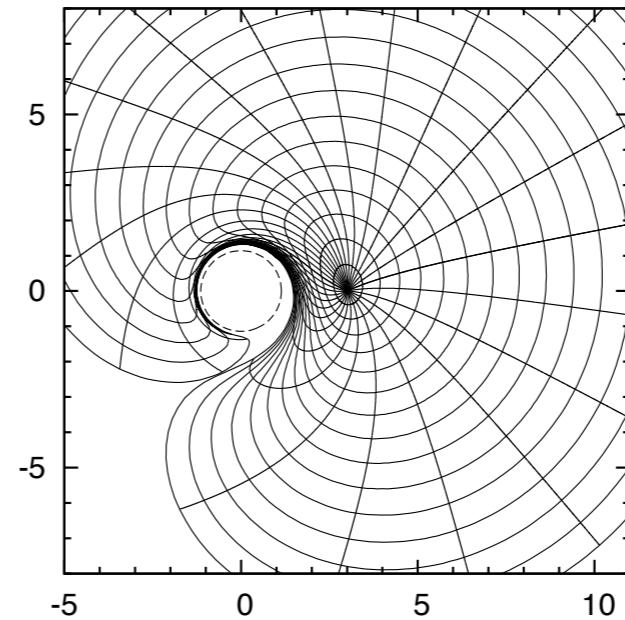
Compare to Figure 1 of Hanni (1977).

$$a/M = 0, r = 2.5M$$



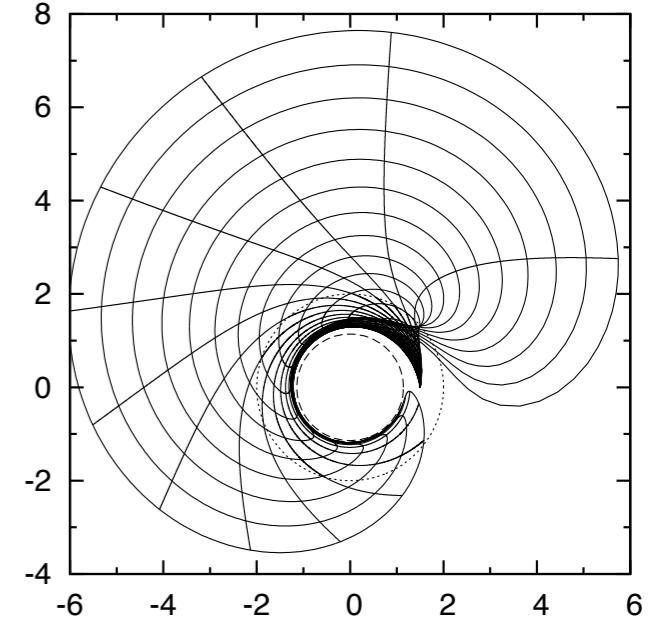
Compare to Figure 2 of Hanni (1977).

$$a/M = 0.99, r = 3M$$



See also Figures 3 and 4 of Hanni (1977).

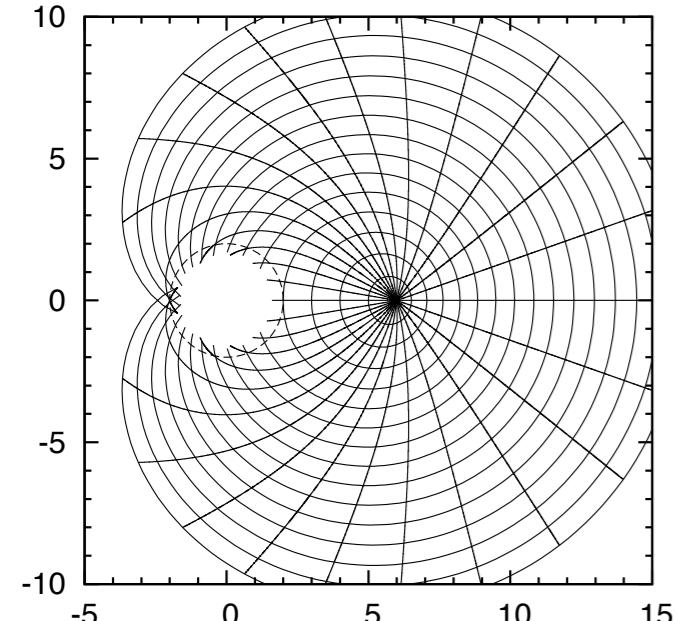
$$a/M = 0.99, r = 1.5M$$



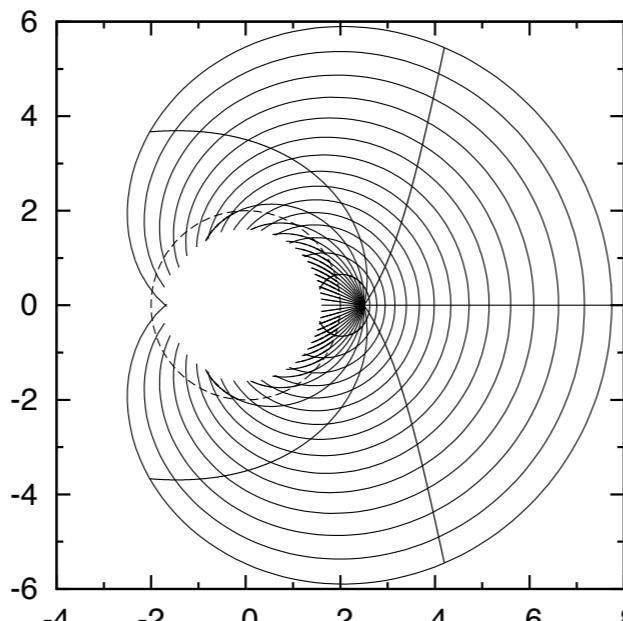
See also Figures 5 of Takahashi et al. (1990).

Kerr-Schild

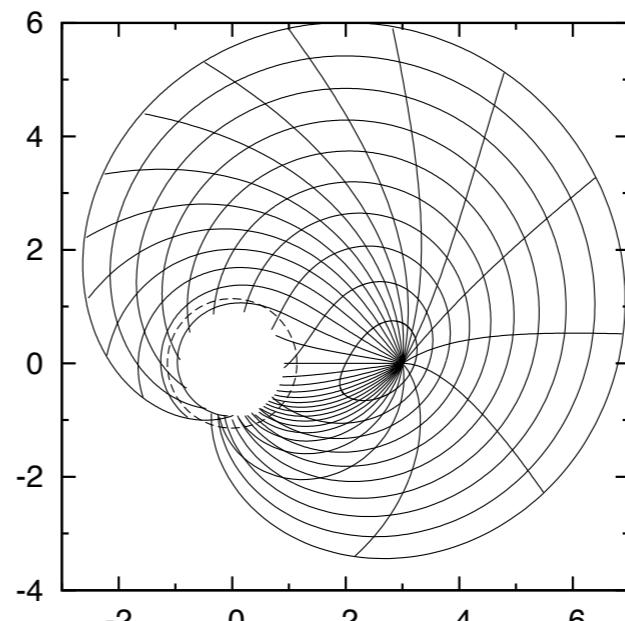
$$a/M = 0, r = 6M$$



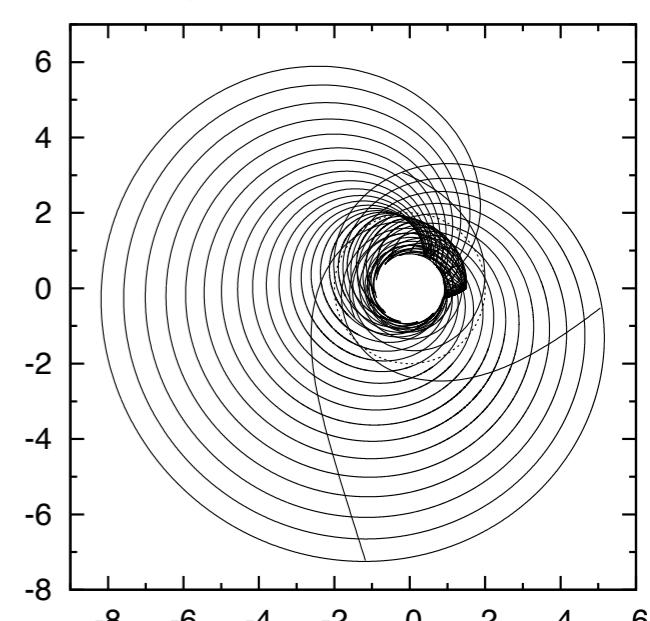
$$a/M = 0, r = 2.5M$$



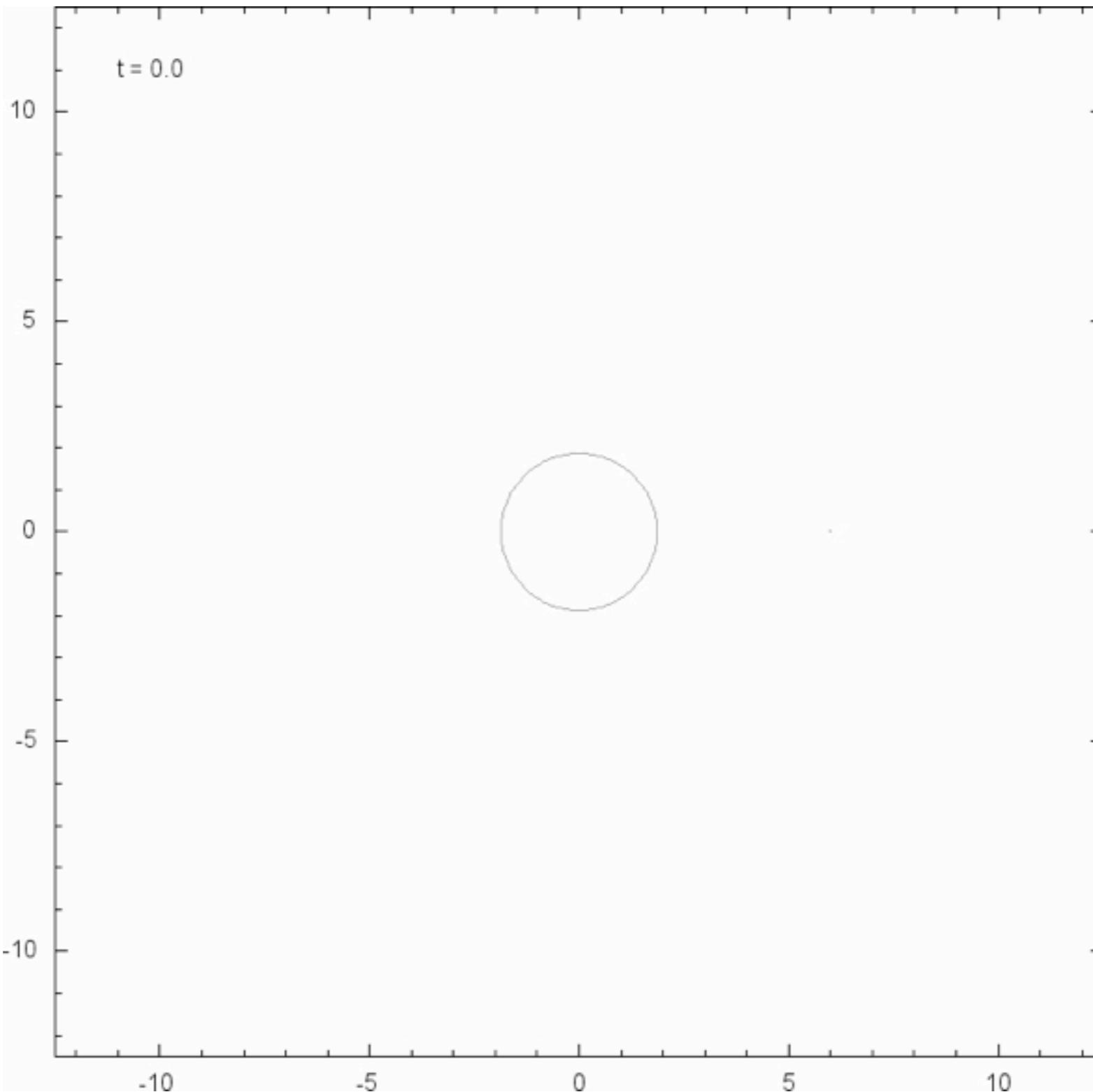
$$a/M = 0.99, r = 3M$$



$$a/M = 0.99, r = 1.5M$$

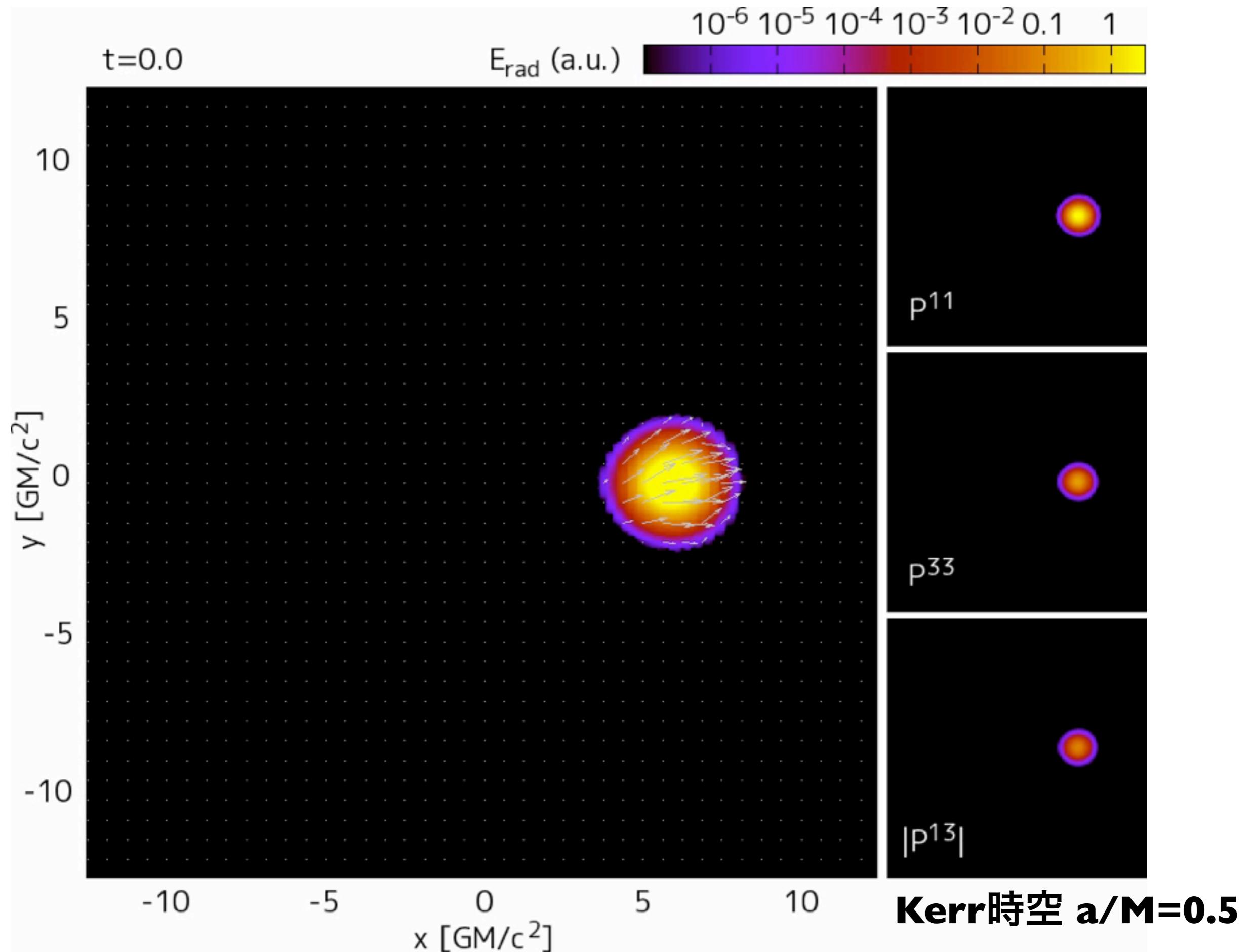


Ray-tracing による計算



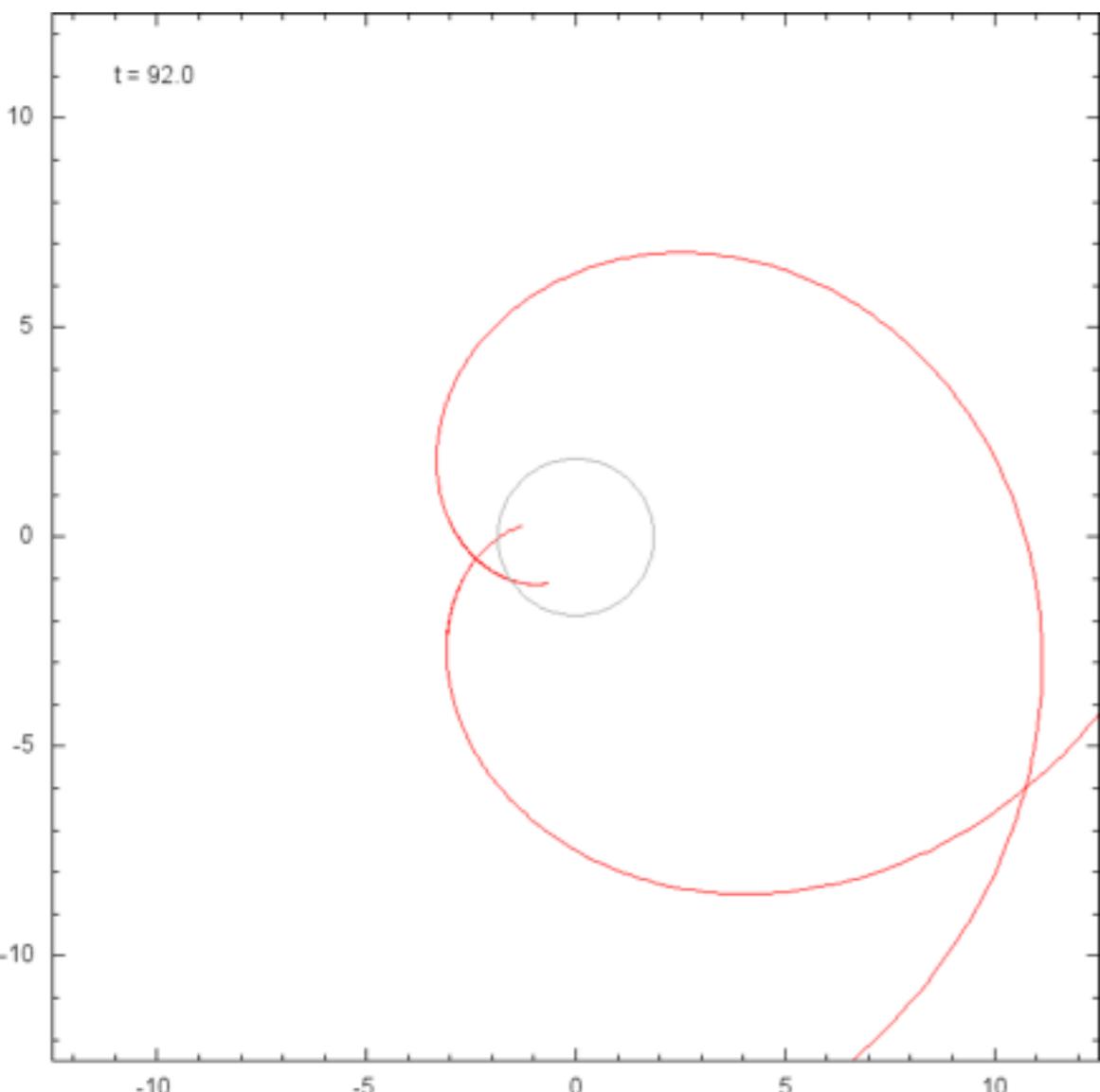
Kerr時空 $a/M=0.5$

GRボルツマン方程式による計算

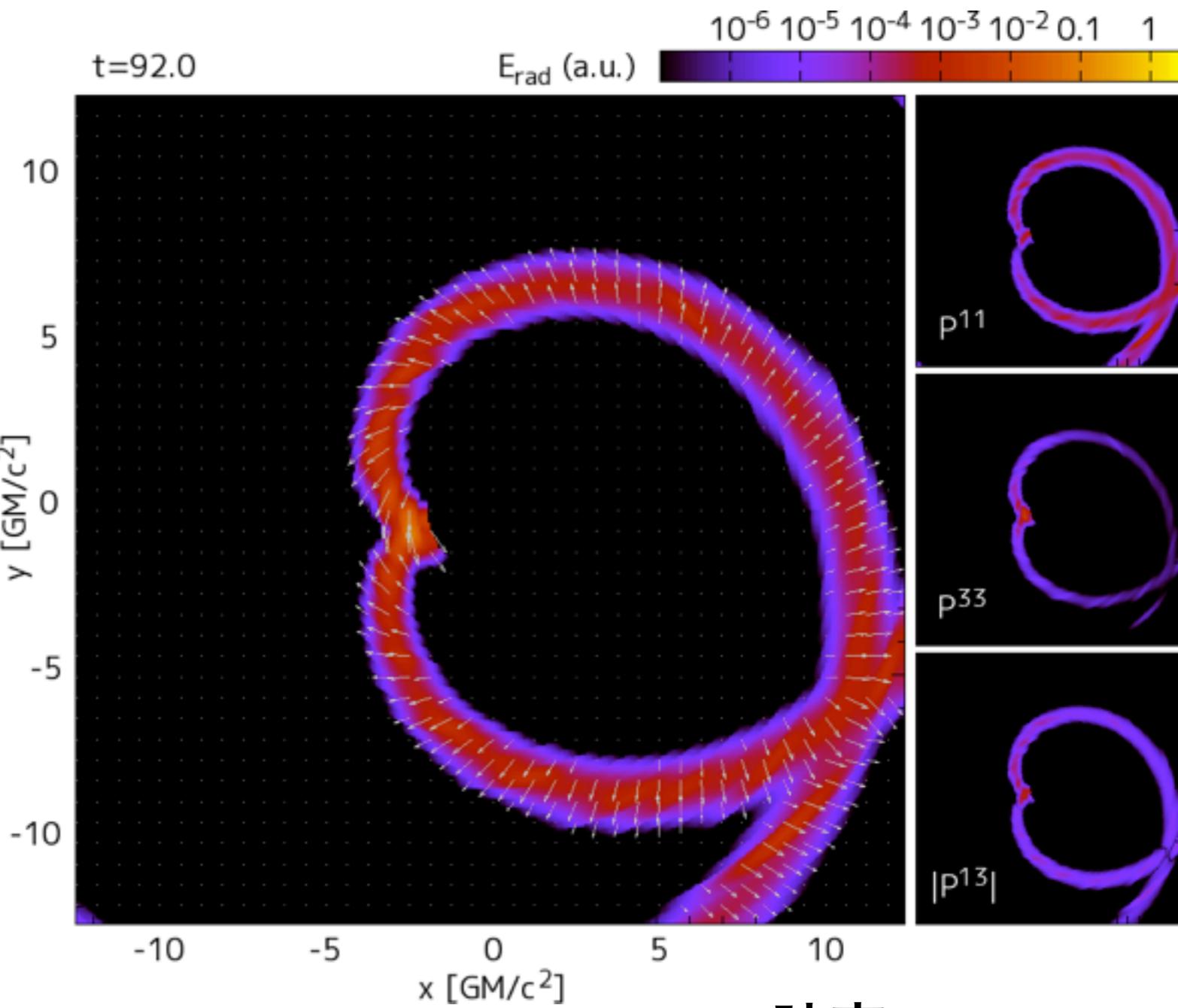


比較：wave-front propagation

ray-tracingによる計算



ボルツマン方程式による計算

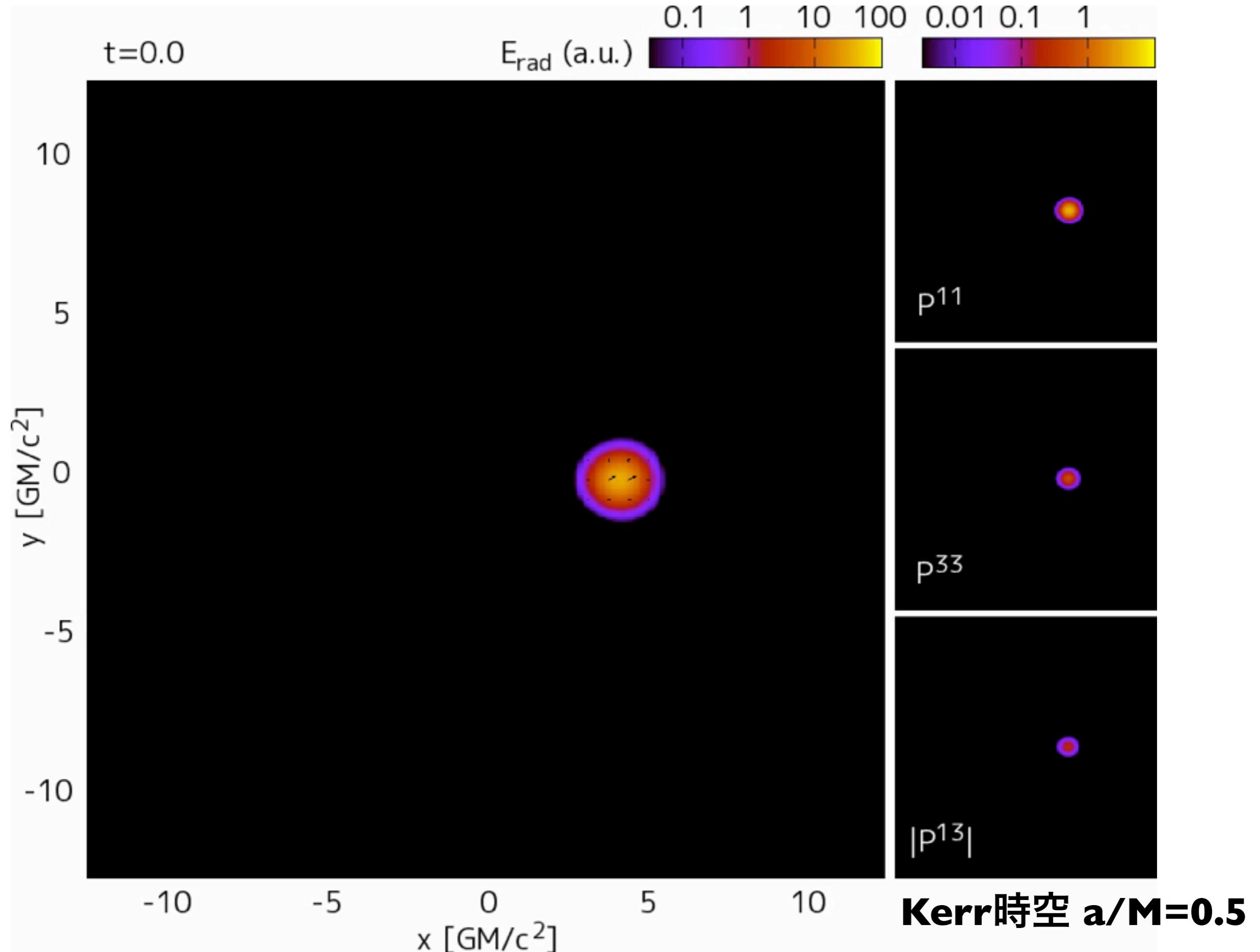


ray-tracingの結果と一致

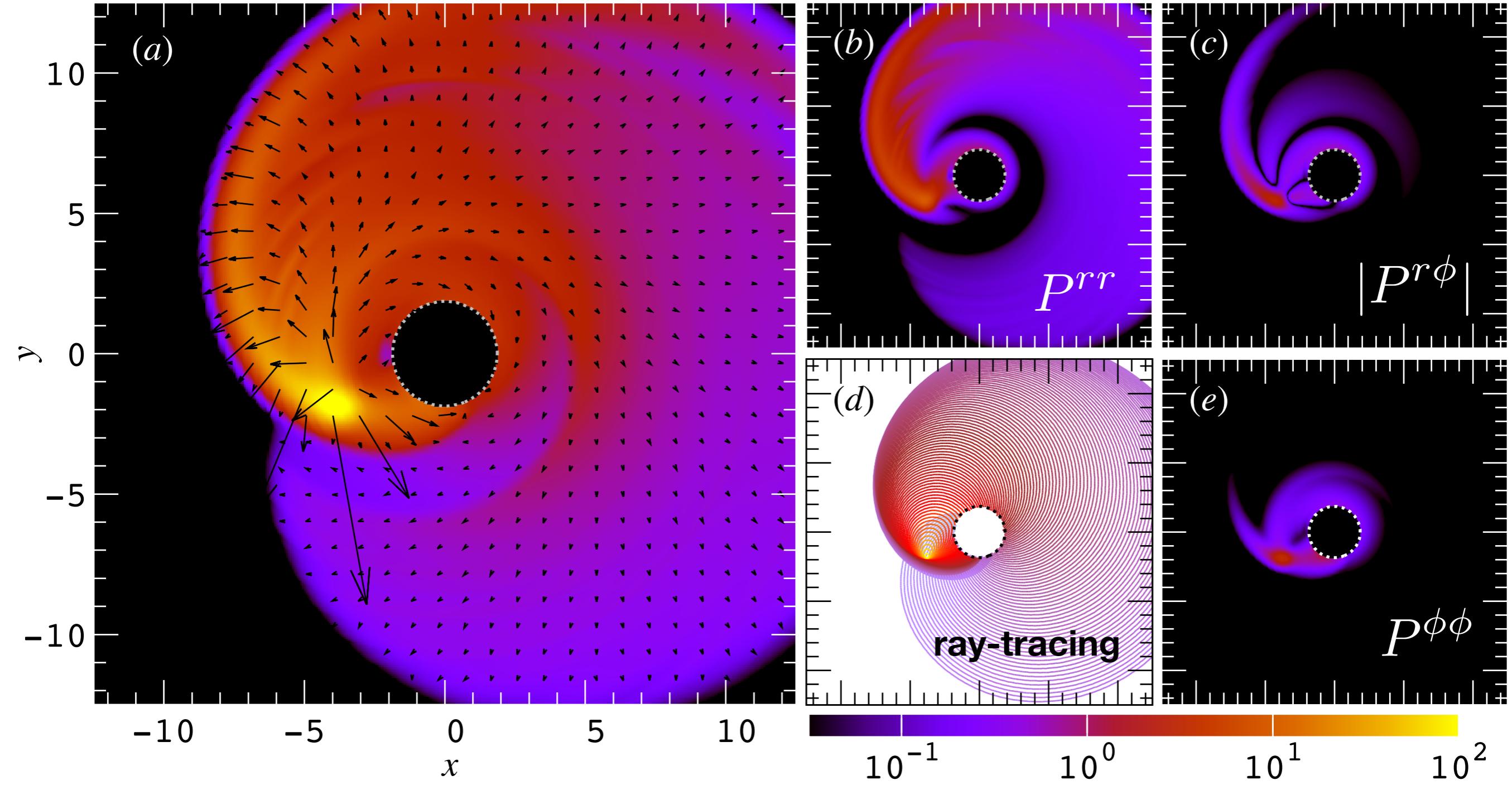
5回の輻射衝突の後でも波面は一切壊れない

Kerr時空 $a/M=0.5$

hot spotからの放射



radiation energy & radiation flux



ray-tracingの結果と一致

Kerr時空 $a/M=0.5$

まとめ

光子ボルツマン方程式(輻射輸送方程式)を直接数値計算

ブラックホール時空中 での一般相対論的な光子輻射場を計算した。

位相空間(位置空間と運動量空間)で定義される不变輝度 (invariant intensity) を計算した。

数値的に計算した不变輝度を運動量空間で積分(つまり、エネルギー積分と 方向積分)することにより、輻射テンソルの全成分を計算した。

→ 今回の計算はclosure relation を仮定する必要がない

回転ブラックホール時空中でテスト計算

(1) 光子波面の伝搬 (wave-front propagation)

→ 波面がBH周囲を3周以上した後でも波面の形状は ray-tracing 計算と一致

→ 一般相対論的效果がきちんと計算されていることを確認

(a) 厳密に光速での波面の伝搬

(b) 光の軌道の湾曲 (photon sphereを反映した相対論的軌道もきちんと反映)

(c) 輻射衝突 (5回以上の衝突後でも波面は一切壊れない)

(2) BHの背景光の伝搬問題

(3) hot spotからの光子場を解く問題

おしまい

Mixed-frame-approach

全局的な運動

☞ 大局的な座標系で記述

物質と輻射場の相互作用

☞ 局所正規直交系で記述

$$R^{\alpha\beta}$$

$$G^\alpha$$



テトラドで変換

$$R^{\alpha\beta} = e_{\hat{\mu}}^{\alpha} e_{\hat{\mu}}^{\beta} R^{\hat{\mu}\hat{\nu}}$$

$$G^\alpha = e_{\hat{\mu}}^{\alpha} G^{\hat{\mu}}$$

$$R^{\hat{\mu}\hat{\nu}}$$

$$G^{\hat{\mu}}$$

- 発展方程式などは省略

ref.

D. Miharas, 1980, ApJ, 237, 574 (はじめて提案した論文)

M. G. Park, 2006, MNRAS, 367, 1739 (Schwarzschild 時空)

RT, 2007, MNRAS, 382, 1041 (Kerr 時空, Park 2006をKerrにしたもの)

RT, 2008, MNRAS, 383, 1155 (Kerr 時空, Horizon-penetrating coordinate)

放射・吸収・放射

- 観測されているようなブラックホール天体では、
(相互作用のスケール) \ll (時空湾曲の曲率半径)
- テトラドによる変換 $G^\alpha = e_{\hat{\beta}}^\alpha G^\beta$
曲がった時空 \Leftrightarrow 局所ミンコフスキ時空
- 相互作用 Hamiltonian H_{int}

例：電子・電磁場相互作用 (non-relativistic) [Heitler 1954]

$$H_{\text{int}} = - \sum_k \left(\frac{e_k}{\mu_k} \mathbf{p}_k \cdot \mathbf{A} - \frac{e_k^2}{2\mu_k} A^2 \right) + \sum_{i>k} \frac{e_i e_k}{r_{ik}}$$

電子運動量とベクトル・
ポテンシャルの相互作用項

吸收 放射

(ベクトル・ポテンシャル) 2
の項

散乱

closure relation (輻射テンソル) $R^{\alpha\beta} = \int F p^\alpha p^\beta dP$

- 輻射テンソルをある特定のフレームで分解 F : 分布関数

$$R^{\alpha\beta} \implies E, F^i, P^{ij}$$

$$R^{(\alpha)(\beta)} = \begin{pmatrix} E & F^1 & F^2 & F^3 \\ F^1 & P^{11} & P^{12} & P^{13} \\ F^2 & P^{21} & P^{22} & P^{23} \\ F^3 & P^{31} & P^{32} & P^{33} \end{pmatrix}$$

球面調和関数

$l = 0$

$l = 1$

$l > 2$

closure relation FLD

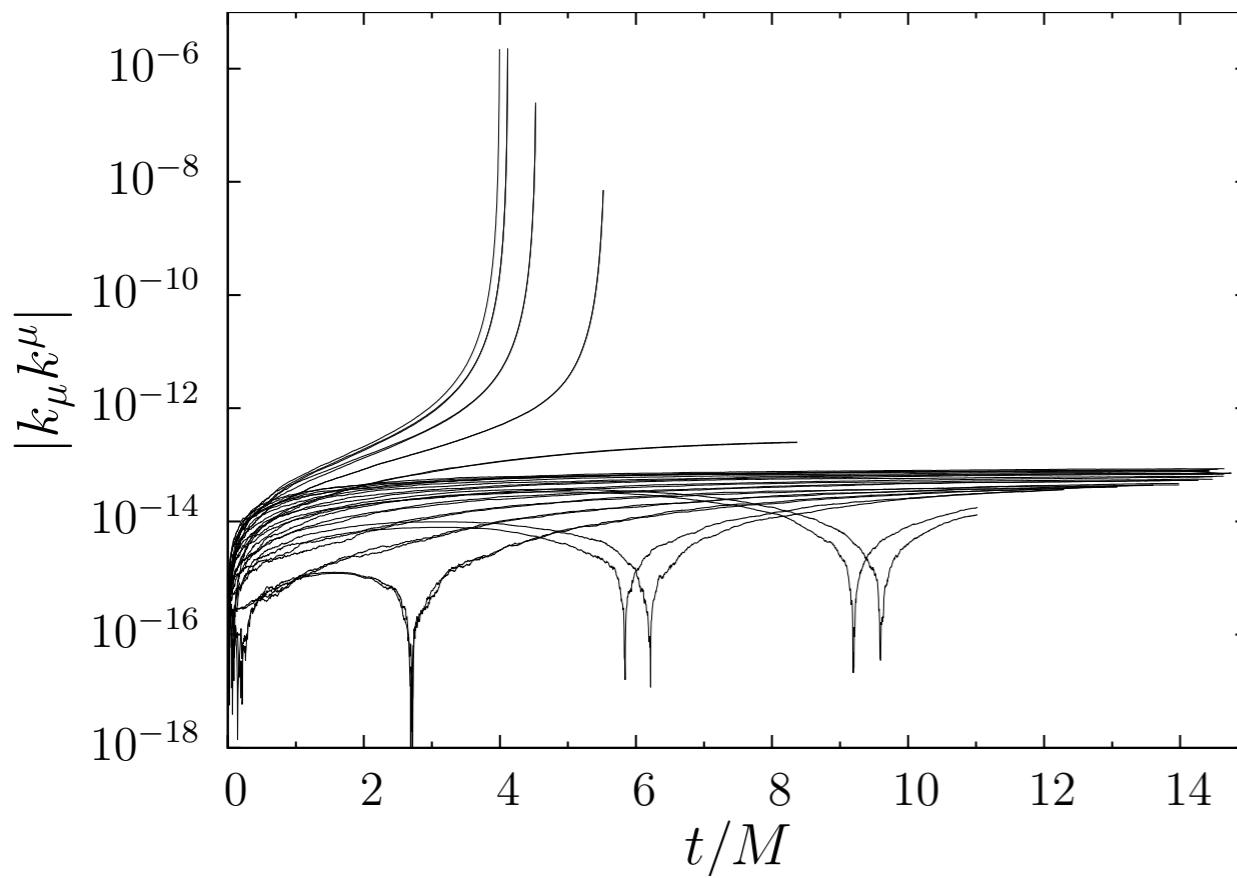
Mlclosure
(Levermore 1984, etc.)

「 E, F^i を時間発展させて、 P^{ij} をclosure relationより決定」

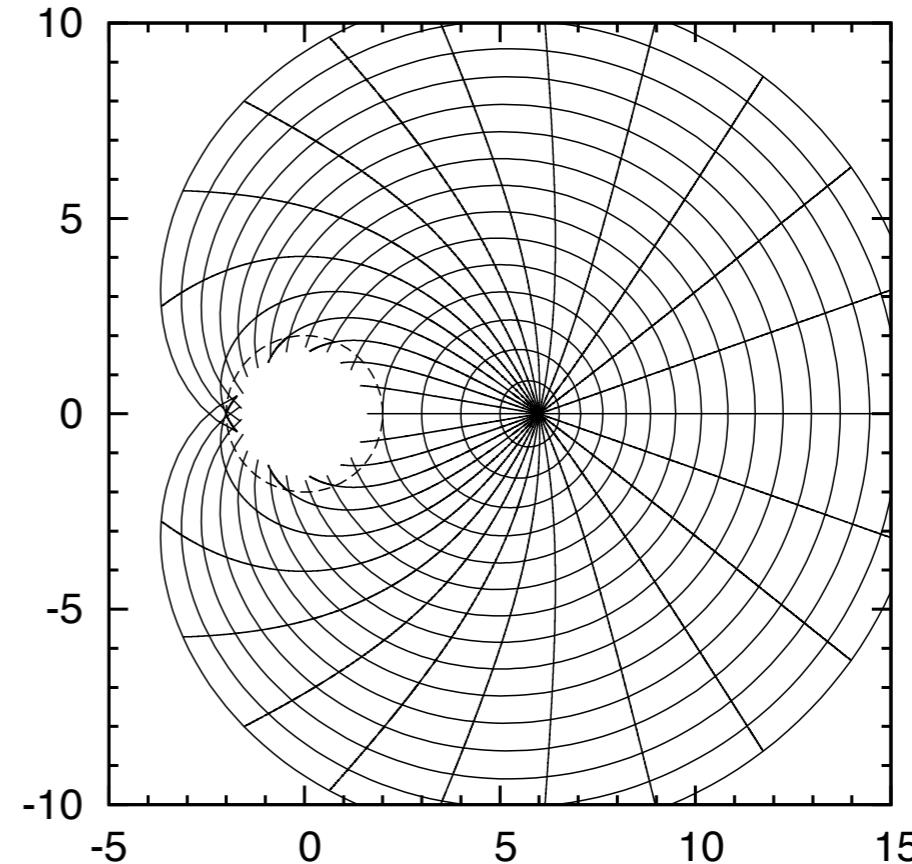
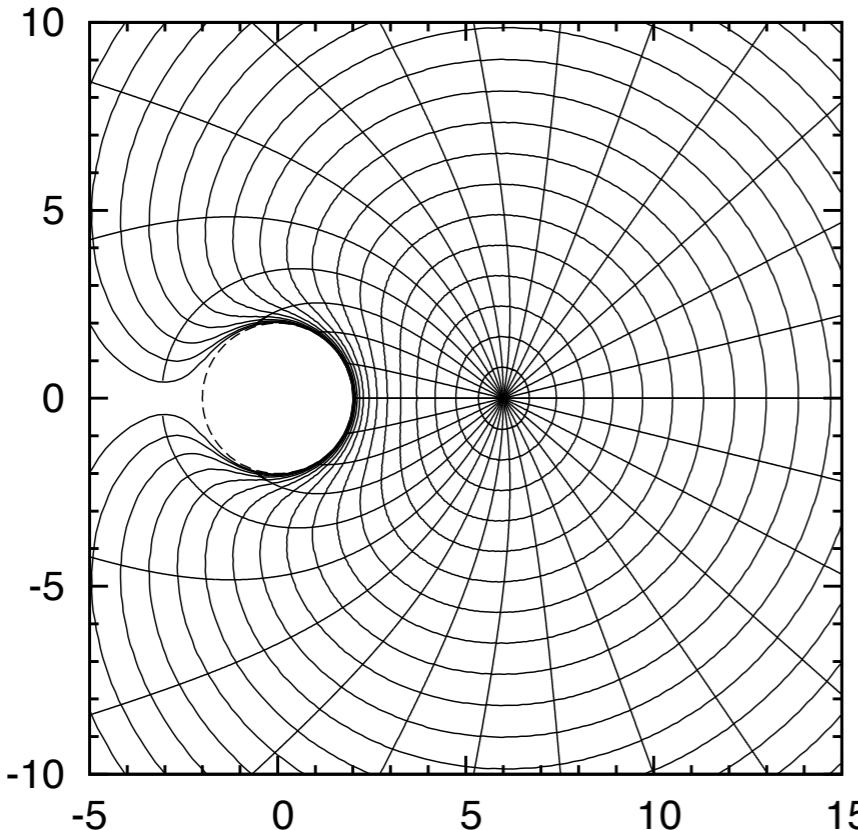
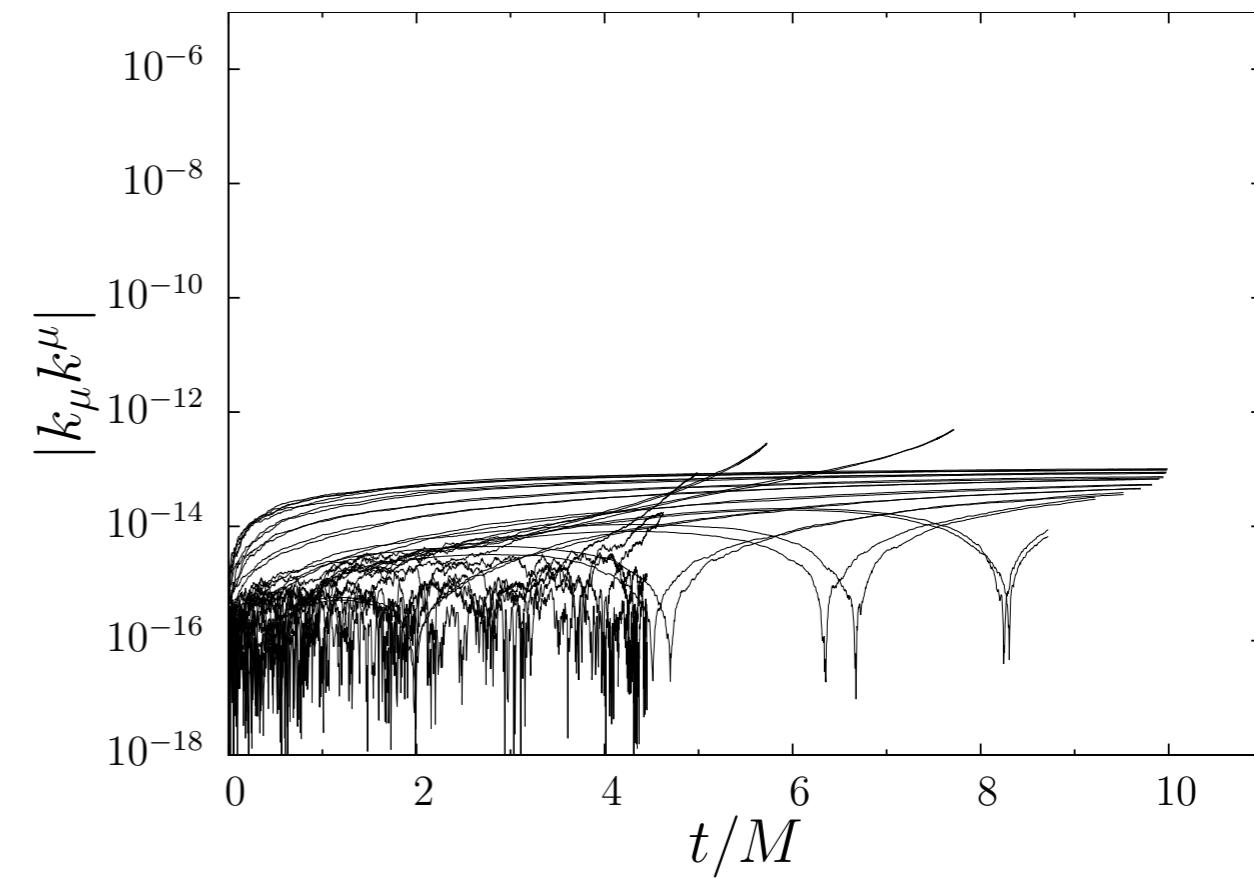
\Leftrightarrow 「 $l = 0, 1$ の成分を時間発展させて、高次成分($l > 2$)は、closure relationより決定」

fractional errors in constant

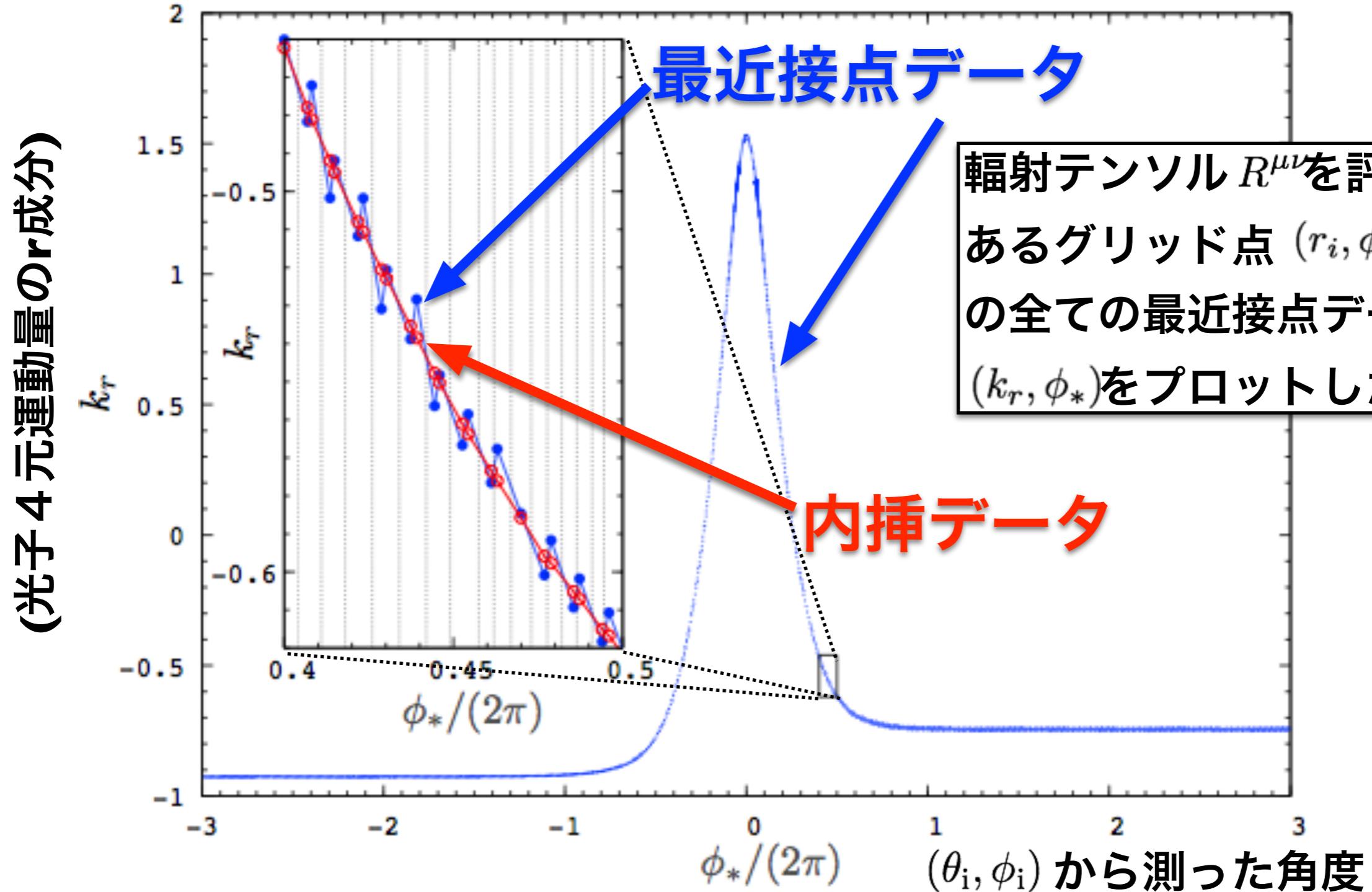
Boyer-Lindquist



Kerr-Schild



最近接点データの内挿

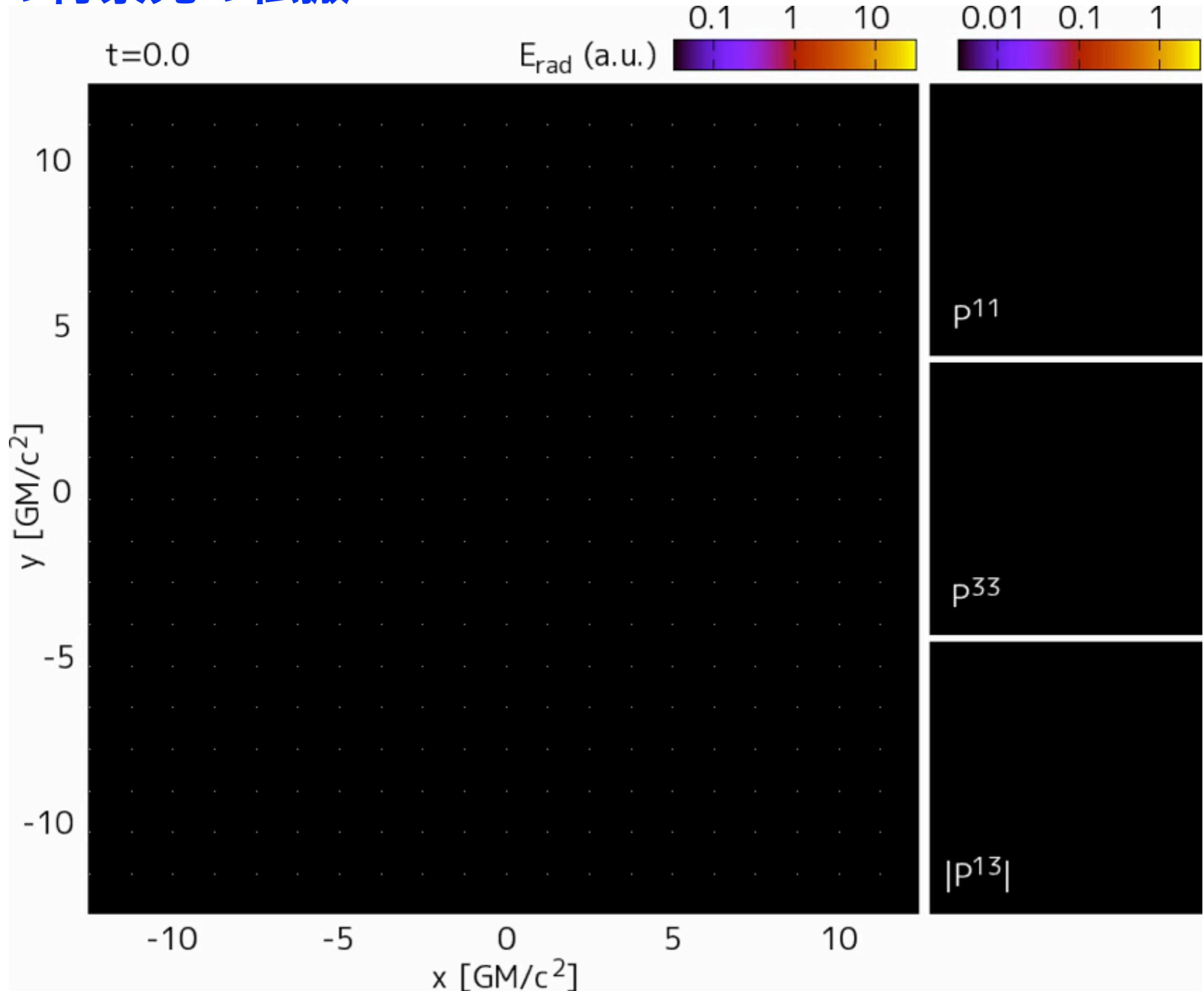


最近接点データ：滑らかでなく、ぎざぎざの曲線

内挿データは曲線フィッティングにより計算

k^μ の内挿データは輻射テンソル $R^{\mu\nu}$ の計算に用いる

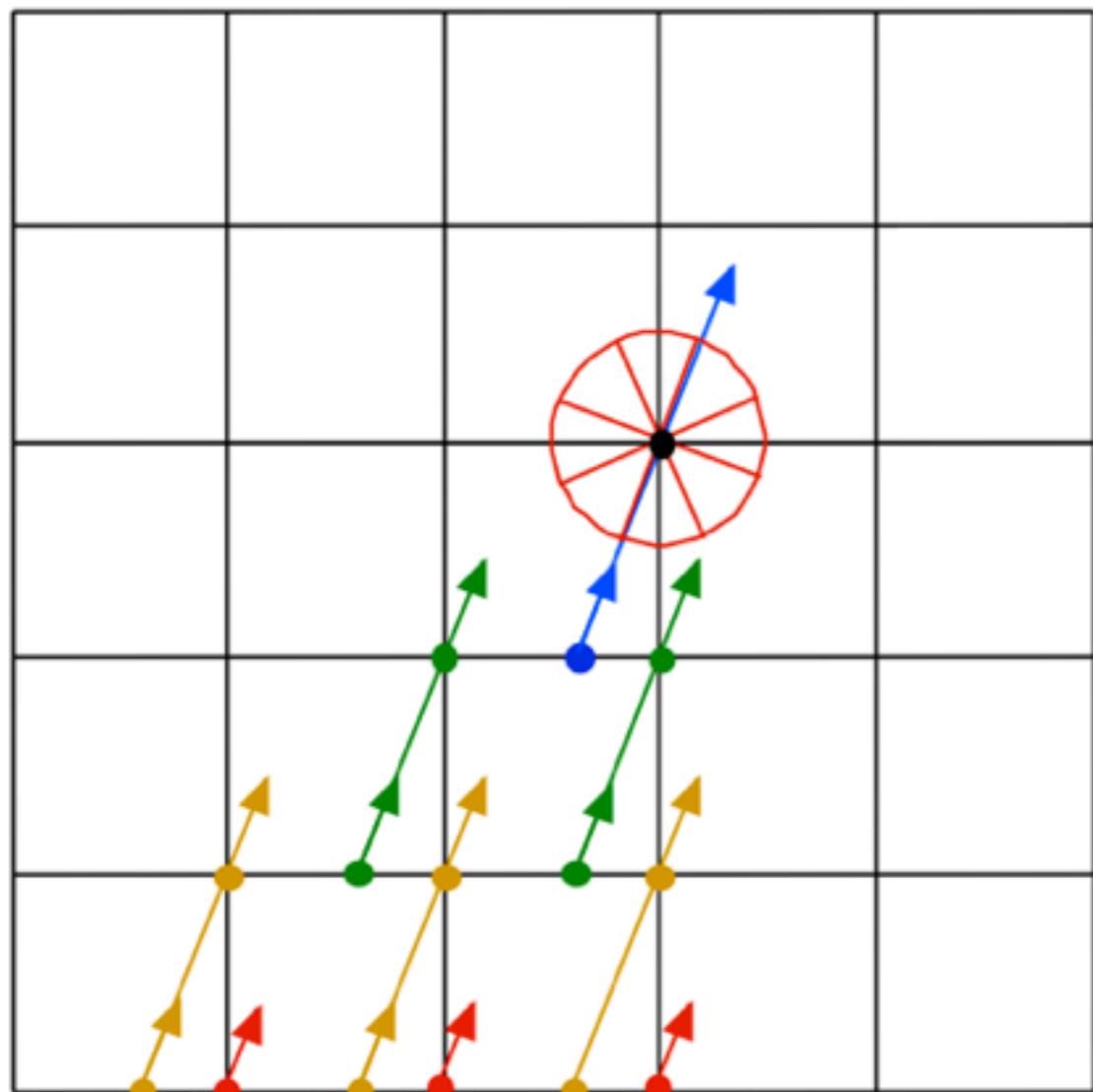
BHの背景光の伝搬



Short Characteristics 法

(Kunasz&Auer1988)

隣のセルに達するまでの光線のみに沿って計算する。



各セル境界での初期値は、
周囲の値から補間により求める。

- 特徴
- ・演算量 小
 - ・単純
 - ・数値拡散が大きい

演算量

$$N_x N_y N_z \cdot N_\theta N_\phi \cdot N_\nu$$

計算量が比較的少ないため、大規模計算に利用できる。
しかし、高い精度が必要な計算には不向き。