



# SCF法による 無衝突恒星系の シミュレーション

穂積俊輔(滋賀大学教育学部)

# 無衝突系の特徴

- 個々の星は系の他のすべての星のつくる滑らかな平均重力場中を運動する
  - ➡ 各星にはたらく重力は2体の相対座標に依存しない
- 系は無衝突Boltzmann方程式で記述される
  - ➡  $df(r, v, t)/dt = 0$   
 $f(r, v, t)$  : 分布関数
  - ➡ 非圧縮性流体
  - ➡  $N \rightarrow \infty$  の系

# 現実の宇宙の系

## ■ 球状星団、銀河、銀河団等

- ➡  $N \rightarrow \infty$  の系ではなく有限  $N$  粒子系
- ➡ 重力相互作用:  $F_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{Gm_i m_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3}$

- ➡ 2体緩和のタイムスケールの評価:

●  $t_{\text{relax}} \approx \frac{0.1N}{\ln N} t_{\text{cross}}$  >> 宇宙年齢 = 13.8 Gyr  
を満たす系

● 銀河:  $N \sim 10^{11}$ ,  $t_{\text{cross}} \sim 10^8$  yr

➡  $t_{\text{relax}} \sim 10^{16}$  yr

➡ **無衝突系**

# $N$ 体シミュレーション

■ 銀河等を有限  $N$  粒子系で表現

- 典型的に  $N=10^5 \sim 10^6$

■ 重力相互作用の計算:

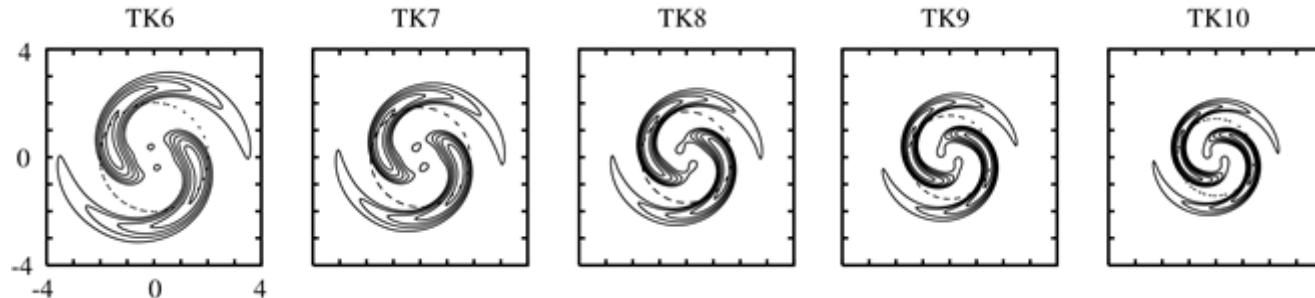
- $$\mathbf{F}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{Gm_i m_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2 + \varepsilon^2)^{3/2}}$$

→ 厳密な意味で ‘無衝突系’ を記述していない

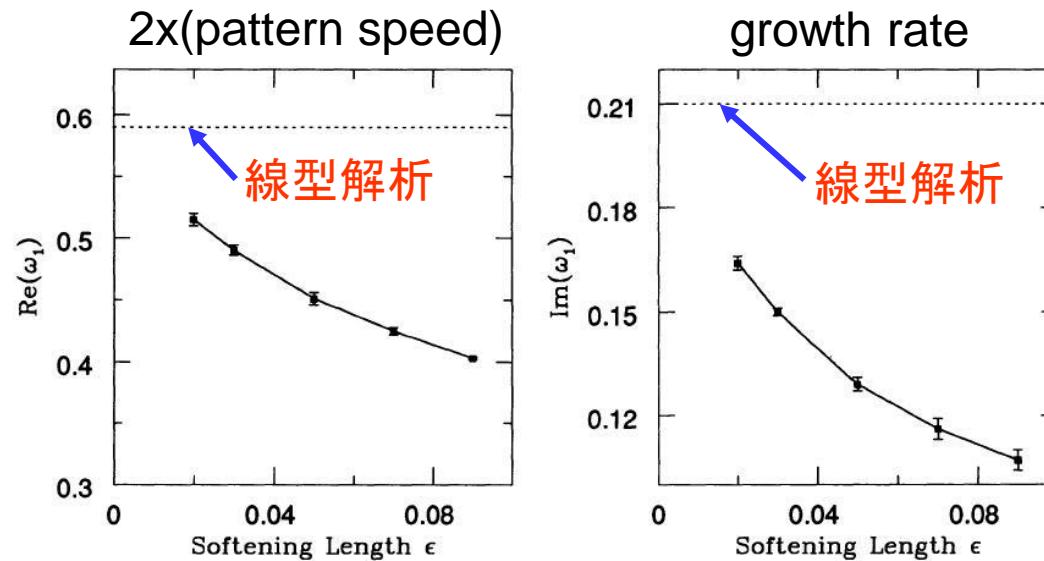
→ 重力 softening  $\varepsilon$  による 力の法則の変更

# 重力 softening の効果

■ 厚さゼロの2次元 Toomre 円盤の線型2本腕モード(自己重力不安定モード)



■ 2次元 isochrone 円盤の線型2本腕モード



Polar grid code  
with  $N=120,000$

Earn & Sellwood  
1995, ApJ, 451, 533

# ***Self-Consistent Field (SCF) 法***

系の密度( $\rho$ )とポテンシャル( $\Phi$ )を直交基底関数系で展開して *Poisson* 方程式を解く方法

*Clutton-Brock*, 1972, Ap&SS, 16, 101; *Clutton-Brock*, 1973, Ap&SS, 23, 55

*Hernquist & Ostriker*, 1992, ApJ, 386, 375

## ■ 正規直交基底関数 $(\rho_{nlm}, \Phi_{nlm})$

● *Poisson* 方程式:  $\nabla^2 \Phi_{nlm}(\mathbf{r}) = 4\pi G \rho_{nlm}(\mathbf{r})$

● 正規直交性: 
$$\begin{cases} \bullet \int \rho_{nlm}(\mathbf{r}) [\rho_{n'l'm'}(\mathbf{r})]^* d\mathbf{r} = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \\ \bullet \int \Phi_{nlm}(\mathbf{r}) [\Phi_{n'l'm'}(\mathbf{r})]^* d\mathbf{r} = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \\ \bullet \int \rho_{nlm}(\mathbf{r}) [\Phi_{n'l'm'}(\mathbf{r})]^* d\mathbf{r} = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \end{cases}$$
  
 $(n, l, m : r, \theta, \phi \text{ 方向の ‘量子数’})$

# SCF法によるPoisson方程式の解法

■ 直交基底関数系による展開

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\mathbf{r}) = \sum_{nlm} A_{nlm} \rho_{nlm}(\mathbf{r}) \\ \Phi(\mathbf{r}) = \sum_{nlm} A_{nlm} \Phi_{nlm}(\mathbf{r}) \end{array} \right. \quad (\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = 4\pi G \rho(\mathbf{r}))$$

■ 展開係数:  $A_{nlm} = \int \rho(\mathbf{r}) [\Phi_{nlm}(\mathbf{r})]^* d\mathbf{r}$

■ 質点系:  $\rho(r, \theta, \phi) = \sum_{k=1}^N m_k \frac{1}{r_k^2} \delta(r - r_k) \delta(\phi - \phi_k) \delta(\cos \theta - \cos \theta_k)$

$$\xrightarrow{\text{ }} A_{nlm} = \sum_{k=1}^N m_k \Phi_{nlm}(\mathbf{r}_k)$$

$$\xrightarrow{\text{ }} \mathbf{a}(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi(\mathbf{r}) = -\sum_{nlm} A_{nlm} \nabla \Phi_{nlm}(\mathbf{r})$$

$\xrightarrow{\text{ }} \text{重力場} \Rightarrow \text{Field Method}$

# SCFシミュレーション

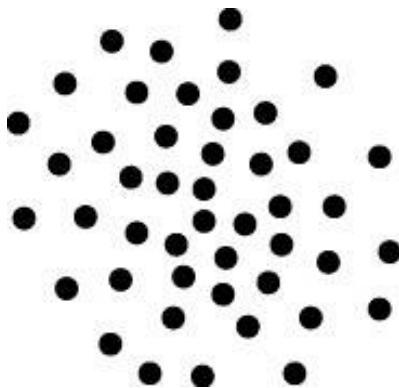
Basis Set  $(\rho_{nlm}, \Phi_{nlm})$  :  $\nabla^2 \Phi_{nlm} = 4\pi G \rho_{nlm}$

Particle Distribution at  $t$

$$\int \rho_{nlm}(\mathbf{r}) [\Phi_{n'l'm'}(\mathbf{r})]^* d\mathbf{r} = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{nlm} A_{nlm}(t) \rho_{nlm}(\mathbf{r})$$

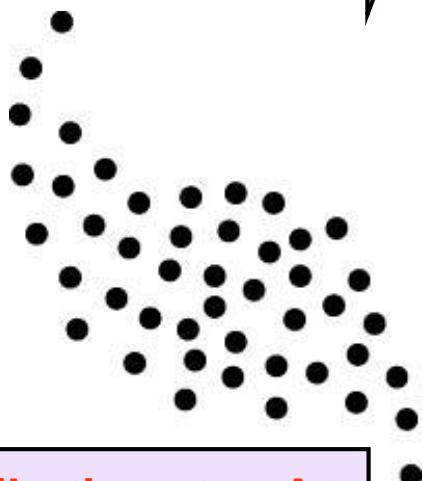
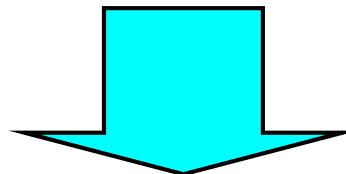
$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{nlm} A_{nlm}(t) \Phi_{nlm}(\mathbf{r})$$



Multiply by  
 $\Phi_{nlm}$

Obtain Expansion Coefficients  $A_{nlm}(t)$

$$A_{nlm} = \sum_{k=1}^N m_k \Phi_{nlm}(\mathbf{r}_k)$$



Suitable  
Integration  
Scheme

Compute Accelerations  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = - \sum_{nlm} A_{nlm}(t) \nabla \Phi_{nlm}(\mathbf{r})$$

Particle Distribution at  $t + \Delta t$

# Hernquist and Ostriker's Basis Set

● lowest-order members  $\Rightarrow$  Hernquist's models

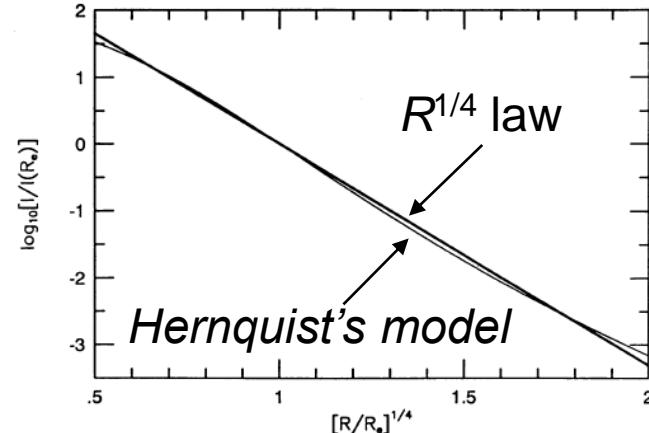
$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{000}(r) = \frac{M}{2\pi r} \frac{1}{(r+a)^3} \\ \Phi_{000}(r) = -\frac{GM}{r+a} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{nlm}(\mathbf{r}) = K_{nl} \frac{M}{2\pi} \frac{(r/a)^l}{(r/a)[1+(r/a)]^{2l+3}} C_n^{(2l+3/2)}(\xi) \sqrt{4\pi} Y_{lm}(\theta, \phi) \\ \Phi_{nlm}(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{a} \frac{(r/a)^l}{[1+(r/a)]^{2l+1}} C_n^{(2l+3/2)}(\xi) \sqrt{4\pi} Y_{lm}(\theta, \phi) \end{array} \right.$$

$$\xi = \frac{r-a}{r+a}$$

$C_n^{(a)}$ : ultra spherical polynomials

$Y_{lm}(\theta, \phi)$ : spherical harmonics



# **Clutton-Brock's Basis Set**

● lowest-order members  $\Rightarrow$  **Plummer's models**

$$\begin{cases} \rho_{000}(r) = \frac{3M}{4\pi a^3} \frac{1}{[1 + (r/a)^2]^{5/2}} \\ \Phi_{000}(r) = -\frac{GM}{a} \frac{1}{[1 + (r/a)^2]^{1/2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_{nlm}(\mathbf{r}) = K_{nl} \frac{M}{4\pi a^3} \frac{(r/a)^l}{[1 + (r/a)^2]^{l+5/2}} C_n^{(l+1)}(\xi) \sqrt{4\pi} Y_{lm}(\theta, \phi) \\ \Phi_{nlm}(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{a} \frac{(r/a)^l}{[1 + (r/a)^2]^{l+1/2}} C_n^{(l+1)}(\xi) \sqrt{4\pi} Y_{lm}(\theta, \phi) \end{cases}$$

$$\xi = \frac{r^2 - a^2}{r^2 + a^2}$$

$C_n^{(\alpha)}$ : ultra spherical polynomials

$Y_{lm}(\theta, \phi)$ : spherical harmonics

# SCF法の特徴

## ■ *Field method*

- ➔ 1個の  $N$  体問題は  $N$  個の 1 体問題に還元
- ➔ 完全な並列性
- ➔ 大規模計算に適合

## ■ CPU time $\propto N \times (n_{\max}+1) \times (l_{\max}+1) \times (m_{\max}+1)$

## ■ 展開係数の重ね合わせによる Poisson ノイズの軽減

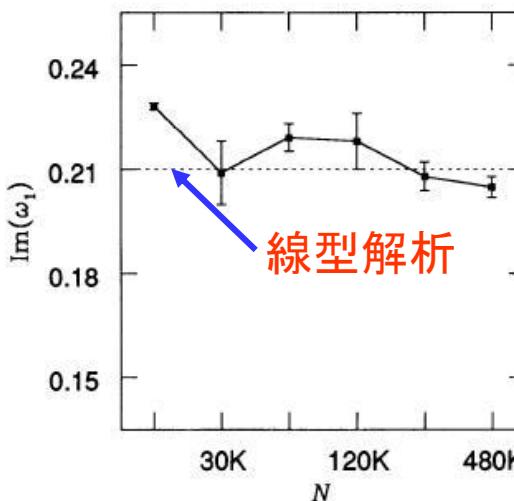
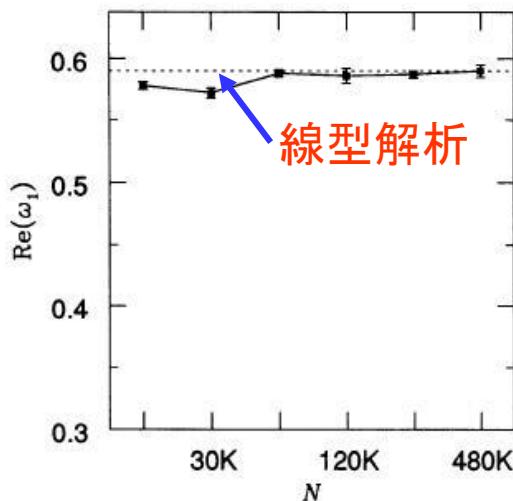
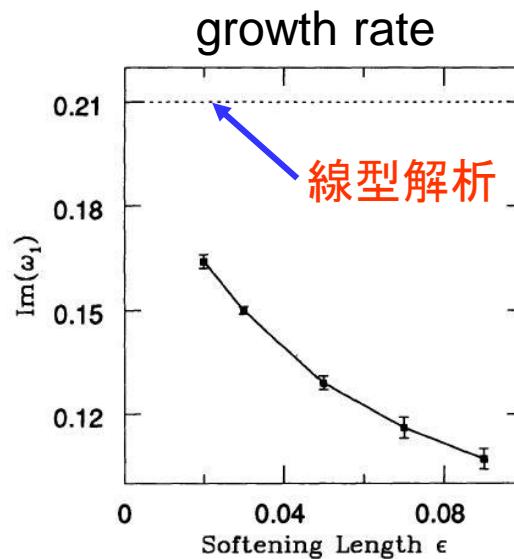
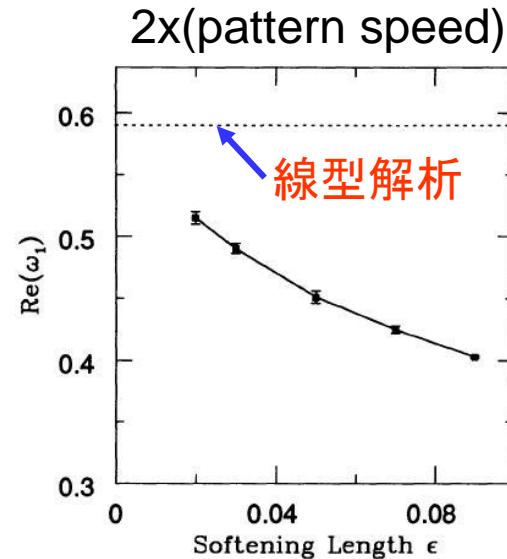
- ➔  $N$  体計算を  $n$  回行えば、実質的に  $n \times N$  体計算に相当

## ■ 重力 softening を含まない

- ➔ 純粹 *Newton* 力
- ➔ 冷たい系(円盤系、ビリアル比の小さい系)のシミュレーションに適合

# 重力 softening の効果

■ 2次元 *isochrone* 円盤の線型2本腕モード



Polar grid code  
with  $N=120,000$

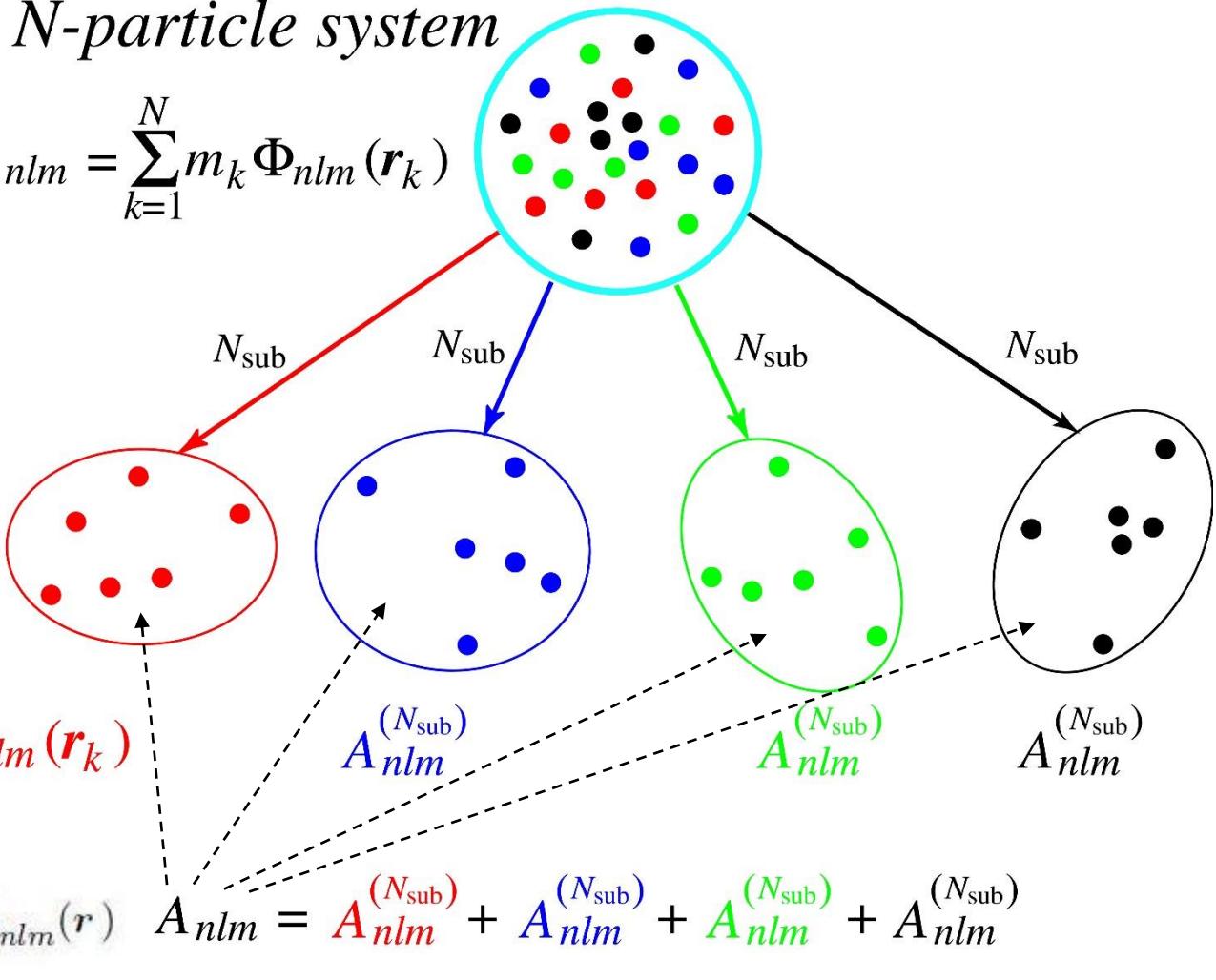
Earn & Sellwood  
1995, ApJ, 451, 533

SCF simulations ( $\epsilon=0$ )

# 完全な並列性

*N-particle system*

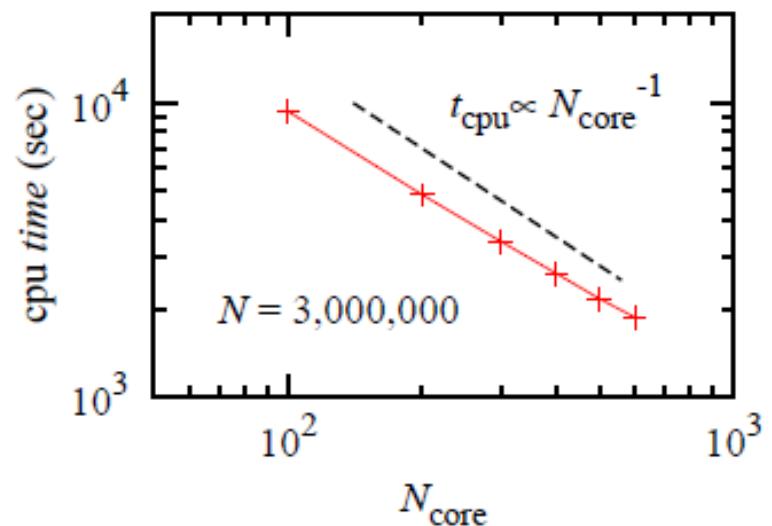
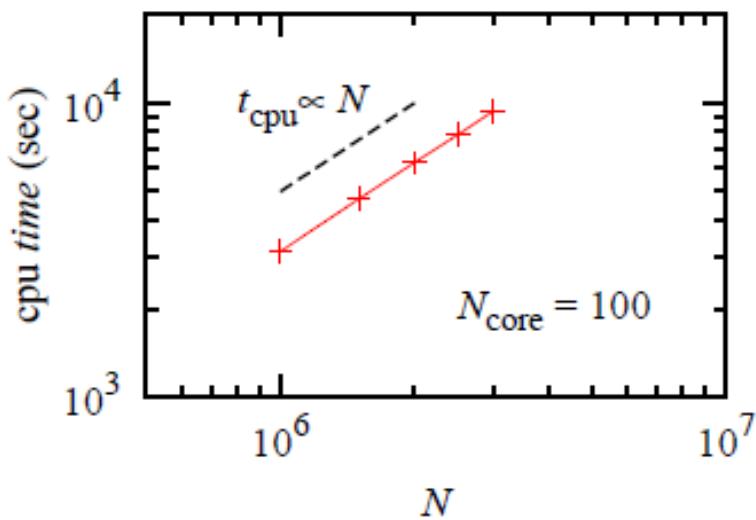
$$A_{nlm} = \sum_{k=1}^N m_k \Phi_{nlm}(\mathbf{r}_k)$$



$$a(\mathbf{r}) = - \sum_{nlm} A_{nlm}(t) \nabla \Phi_{nlm}(\mathbf{r})$$

# SCFシミュレーションの並列性

- 3次元円盤の SCFシミュレーション：
  - $k_{\max}=64, m_{\max}=12, h_{\max}=24$



- XC30でのシミュレーション：
  - 10,000個/core以上で通信の負荷は無視できる

# SCF法の問題点

- 密度分布が最低次の基底関数と大きく異なる系では多くの展開項数が必要
  - ➡ *numerical basis set* で最低次を系の密度分布に合致
    - 粒子位置での力は内挿が必要
    - 時間的変化の大きい系では *basis set* の更新が必要
- 局所的な密度構造のある系では多くの展開項数が必要
- 展開項数の打ち切りによる重力 *softening* と同様な効果あり
  - ➡ *implicit softening* のため、力の法則は純粹 *Newton* 力
- 基本的に *N* 体手法のため、2 体緩和の効果あり

# Application of the SCF Method

1. Collapse simulation

# 一様密度球の球対称コラプス

## ■ 初期モデル

- $f = \rho_0 \left( \frac{1}{2\pi\sigma_0^2} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{(u^2 + j^2/r^2)}{2\sigma_0^2} \right], \quad \rho_0 = \frac{3M}{4\pi R_0^3}$
- $|2T/W|_0 \times R_0 = 1$  ( $|2T/W|_0$ :ビリアル比,  $R_0$ :系のサイズ)

## ■ SCFシミュレーション

- $N=10,000,000$
- *Hernquist & Ostriker's basis set* ( $n_{\max}=64$ ,  $l_{\max}=m_{\max}=0$ )

## ■ Vlasovシミュレーション

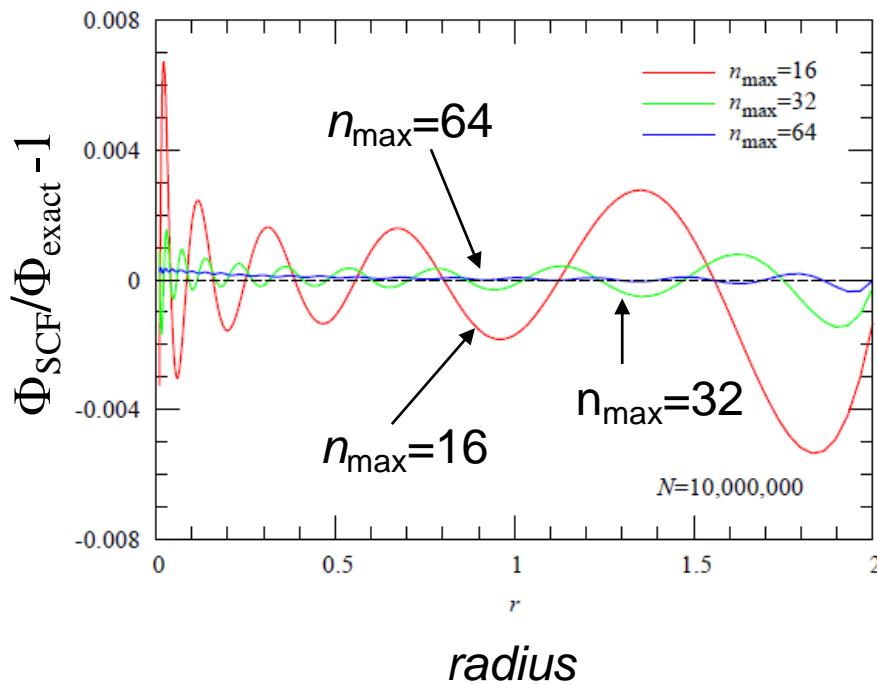
- $\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial r} + \left( \frac{j^2}{r^3} - \frac{GM_r}{r^2} \right) \frac{\partial f}{\partial u} = 0, \quad f = f(r, u, j, t)$
- $(N_r, N_u, N_j)=(300, 301, 50)$

(c.f., Fujiwara, 1983, PASJ, 35, 547)

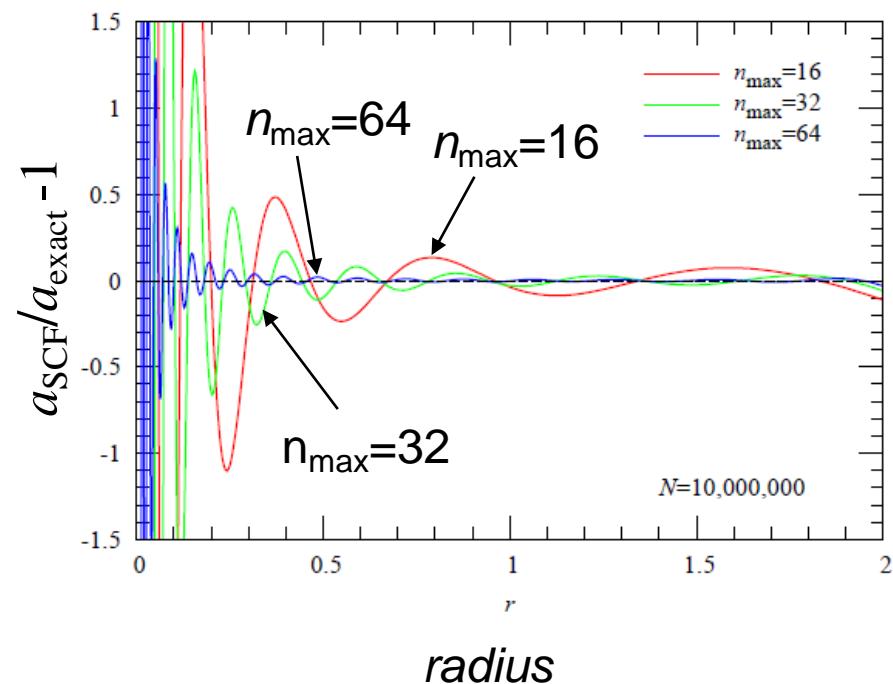
# ポテンシャルと加速度の精度

- 一様密度球 ( $2T/|W|=1/2$ ) のHernquist & Ostrikerの直交基底関数系による展開

ポテンシャル

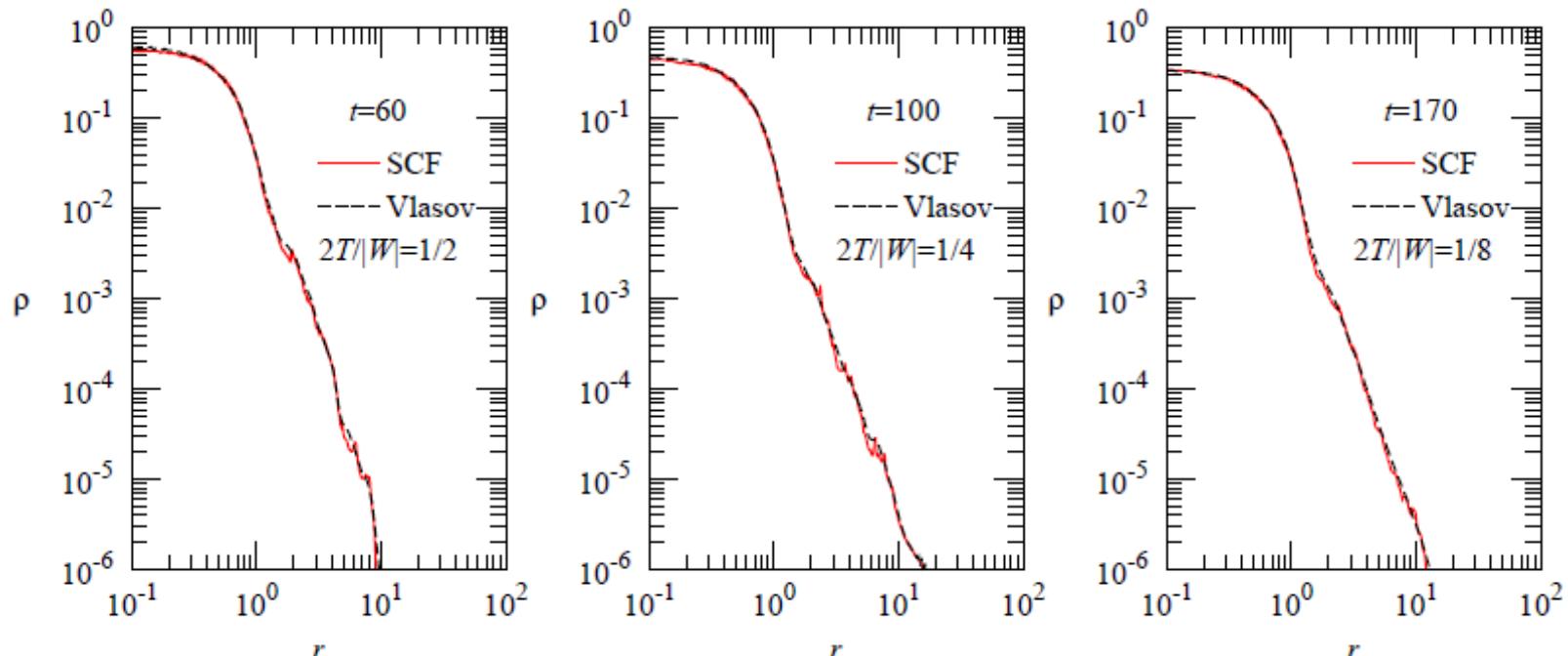


加速度



# 一様密度球の球対称コラプス

## (1) 緩和状態における密度分布

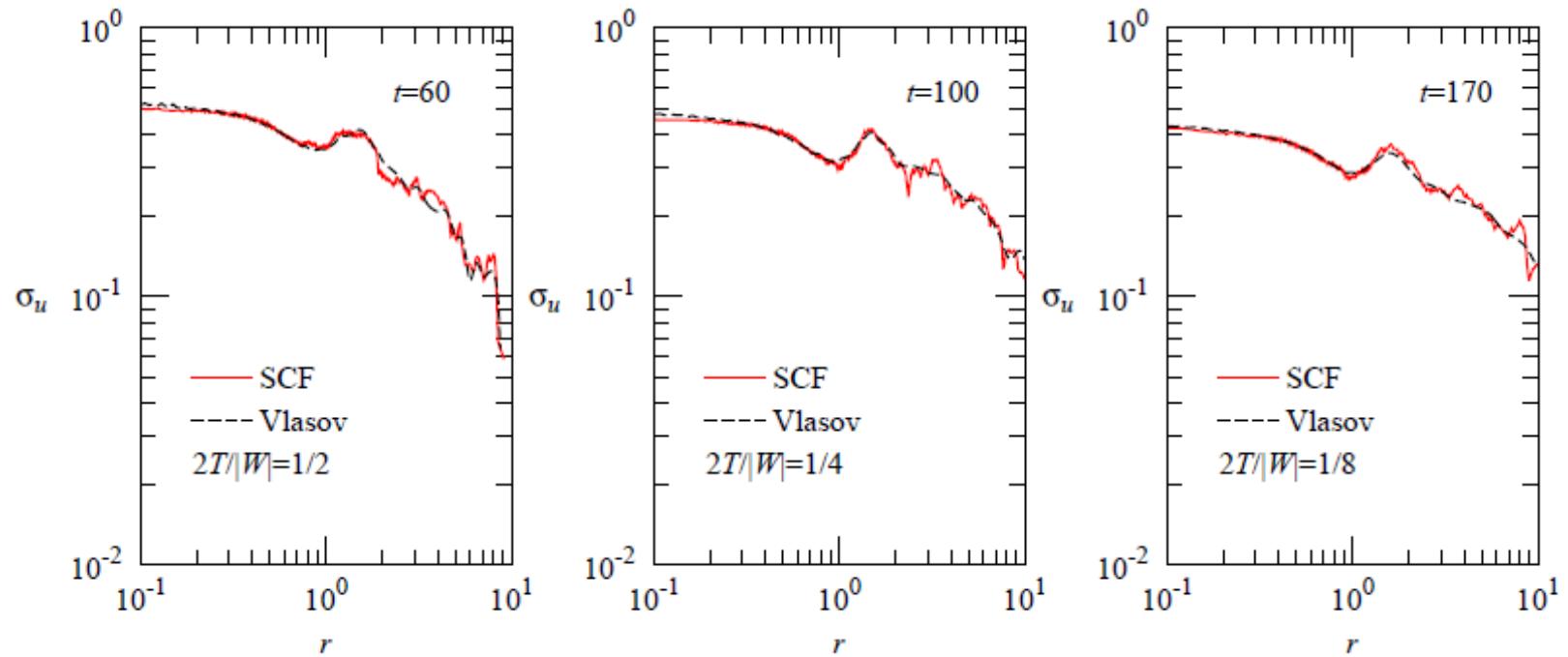


- SCF:  $N=10\ 000\ 000$ ,  $n_{\max}=64$ ,  $l_{\max}=m_{\max}=0$
- Vlasov:  $N_r=300$ ,  $N_u=301$ ,  $N_j=50$

(c.f., Hozumi & Hernquist, 1995, ApJ, 440, 60)

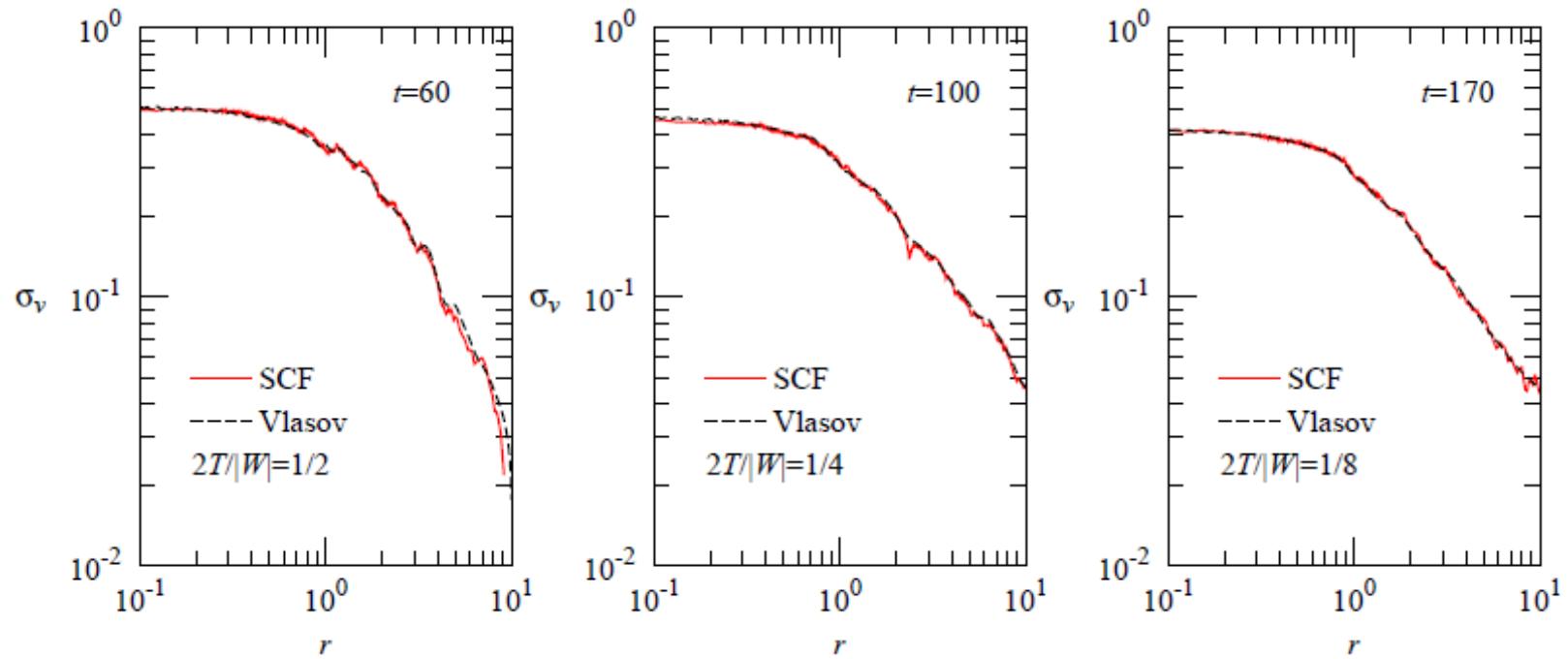
# 一様密度球の球対称コラプス

(2) 緩和状態における半径方向の速度分散分布



# 一様密度球の球対称コラプス

(3) 緩和状態における接線方向の速度分散分布



# Application of the SCF Method

2. Three-dimensional disk  
simulation within a fixed/live halo

# 3次元円盤の基底関数系

- Poisson方程式:  $\nabla^2\psi = \frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial R}\left(R\frac{\partial\psi}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \lambda\psi$   
(円柱座標系)  $\rho = (\lambda/4\pi G)\psi$

- 変数分離:  
 $\psi(R, \phi, z) = \mathcal{R}(R)\Phi(\phi)\mathcal{Z}(z)$  

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{1}{R}\frac{d}{dR}\left(R\frac{d\mathcal{R}}{dR}\right) + \left(k^2 - \frac{m^2}{R^2}\right)\mathcal{R} & = & 0 \\ \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m^2\Phi & = & 0 \\ \frac{d^2\mathcal{Z}}{dz^2} - (k^2 + \lambda)\mathcal{Z} & = & 0 \end{array} \right.$$

- Poisson方程式の解:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{R}(R) & = & J_m(kR) \quad (J_m(x): Bessel functions) \\ \Phi(\phi) & = & e^{im\phi} \\ \mathcal{Z}(z) & = & e^{ihz}, \lambda = -(k^2 + h^2) \quad (\mathcal{Z} \rightarrow 0 \text{ as } z \rightarrow \pm\infty) \end{array} \right.$$

# 円柱座標系の基底関数系

- *Earn* (1996, ApJ, 465, 91) の方法
- 基底関数系

$$\frac{d^2 \mathcal{Z}}{dz^2} - k^2 \mathcal{Z} = \rho_z(z)$$

を満たす  $\rho_z(z)$  と  $\mathcal{Z}(z)$  のペアがあれば ( $k, h$  は連続的に変化)

$$\begin{cases} \rho_{kmh}(R, \phi, z) = \frac{1}{4\pi G} J_m(kR) e^{im\phi} \underline{\rho_z(z-h)} \\ \psi_{kmh}(R, \phi, z) = J_m(kR) e^{im\phi} \underline{\mathcal{Z}(z-h)} \end{cases} \quad (J_m(x): \text{Bessel functions})$$

- 密度とポテンシャルの表現

$$\begin{cases} \rho(R, \phi, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_{kmh} \rho_{kmh}(R, \phi, z) dk dh \\ \psi(R, \phi, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_{kmh} \psi_{kmh}(R, \phi, z) dk dh \end{cases}$$

Pairs of  $\rho_z(z)$  and  $\mathcal{Z}(z)$  that satisfy  $\frac{d^2 \mathcal{Z}}{dz^2} - k^2 \mathcal{Z} = \rho_z(z)$

### SIMPLER SOLUTIONS WITH $\rho_z(z)$ DEPENDING ON $k$

---

Density Factor $\rho_z(z)$	Potential Factor $\mathcal{Z}(z)$
$k^2 e^{-k z }$ .....	$-\frac{1}{2}(1 + k z )e^{-k z }$
$k^2 e^{-(kz)^2}$ .....	$-\frac{1}{4}e^{1/4}\sqrt{\pi}[e^{kz} \operatorname{erfc}(1/2 + kz) + e^{-kz} \operatorname{erfc}(1/2 - kz)]$
$k^2 \operatorname{sech}(kz)$ .....	$kze^{kz} - \cosh(kz) \log(1 + e^{2kz})$
$k^2 \operatorname{sech}^2(kz)$ .....	$1 + \sinh(kz) \arctan[\sinh(kz)] - (\pi/2) \cosh(kz)$

---

Earn (1996, ApJ, 465, 91)

# $z$ 方向の基底関数系の正規直交化

## ■ 倍正規直交化の条件

$$\begin{aligned}\textcolor{red}{\circ} \quad \mathcal{M}_{kmhk'm'h'} &= \langle \rho_{kmh} | \psi_{k'm'h'} \rangle \\ &= \delta(k - k') \delta_{mm'} \delta(h - h') \\ &= \delta(k - k') \delta_{mm'} \mathcal{M}_{khk'}\end{aligned}$$

$$(\mathcal{M}_{khk'} = \frac{1}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_z(z - h) \mathcal{Z}^*(z - h') dz)$$

$$\textcolor{red}{\circ} \quad \mathcal{M}_{khk'} \text{ の逆行列 } \mathcal{M}_{khk'}^{-1} \text{ の計算: } \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}_{khk''}^{-1} \mathcal{M}_{kh''h'} dh'' = \delta(h - h')$$

$$\begin{aligned}\textcolor{red}{\circ} \quad \text{展開係数: } c_{kmh} &= \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}_{kmhk'm'h'}^{-1} \langle \rho | \psi_{k'm'h'} \rangle dk' dh' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}_{khk'}^{-1} \langle \rho | \psi_{kmh} \rangle dh'\end{aligned}$$

# 連続基底関数系の離散化

## ■ $k$ 積分 ( $R$ 方向) と $h$ 積分 ( $z$ 方向) の計算

$$\int_0^\infty f(k)dk \rightarrow \sum_{n=0}^{n_{\max}} w_n^k f(k_n) \quad \int_{-\infty}^\infty g(h)dh \rightarrow \sum_{l=0}^{l_{\max}} w_l^h g(h_l)$$

## ■ 逆行列の計算

$$\sum_{l''=0}^{l_{\max}} w_{l''}^h \mathcal{B}_{ll''}^n \mathcal{A}_{l'l'}^n = \frac{1}{w_l^h} \delta_{ll'} \quad (\mathcal{A}_{ll'}^n = \mathcal{M}_{k_n h_l h_l'}, \quad \mathcal{B}_{ll'}^n = \mathcal{M}_{k_n h_l h_l'}^{-1})$$

## ■ 展開係数の計算

$$c_{nml} = \sum_{l'} w_{l'}^h \mathcal{B}_{ll'}^n \langle \rho | \psi_{nml'} \rangle$$

## ■ ポテンシャルの展開

$$\psi(R, \phi, z) = \sum_m \sum_l w_l^h \sum_n w_n^k c_{nml} \psi_{nml}(R, \phi, z)$$

# 外場中の円盤シミュレーション

## ■ exponential disk

$$\rho_d(R, z) = \frac{M_d}{4\pi h^2 z_0} \exp(-R/h) \operatorname{sech}^2(z/z_0)$$

$$z_0=0.2h$$

## ■ NFW halo (as an external field)

$$\rho_h(r) = \frac{\rho_0}{(r/r_s)(1+r/r_s)^2}$$

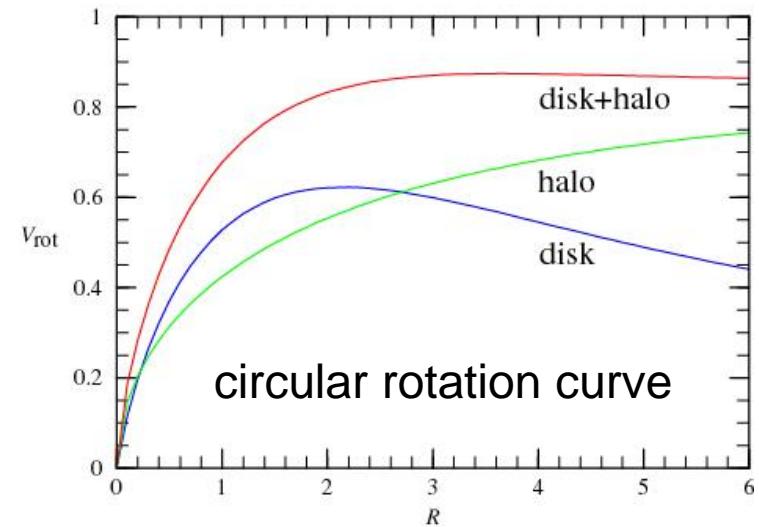
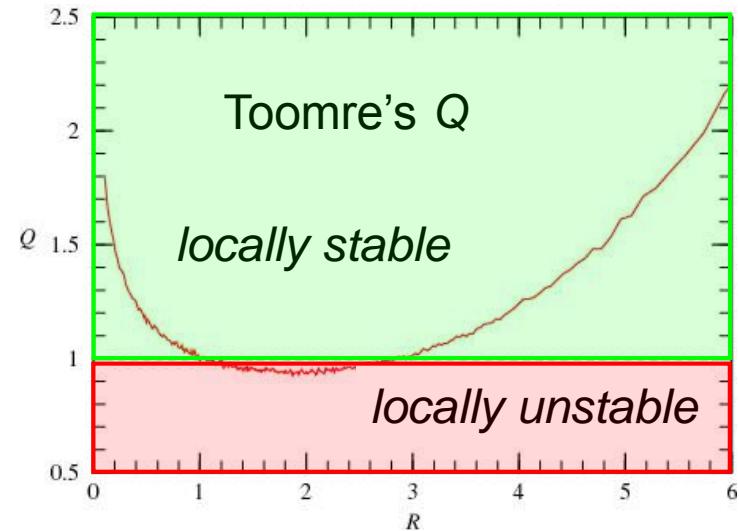
$$r_s=6.96h, M_h=20.0M_d \quad (R \leq 34.8h)$$

## ■ Computational Units:

$$G=M_d=h=1$$

$$(t_{\text{unit}}=1.31\times 10^7 \text{ yr}, v_{\text{unit}}=262 \text{ km s}^{-1})$$

$$\text{for } M_d=5.6\times 10^{10} M_{\text{sun}}, h=3.5 \text{ kpc}$$



# SCFシミュレーション

## ■ 基底関数系

$$\begin{cases} \rho_{kmh}(R, \phi, z) = \frac{1}{4\pi G} J_m(kR) e^{im\phi} \rho_z(z - h) \\ \psi_{kmh}(R, \phi, z) = J_m(kR) e^{im\phi} \mathcal{Z}(z - h) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{Z}(z) = -\frac{1}{2}(1 + k|z|)e^{-k|z|} \\ \rho_z(z) = k^2 e^{-k|z|} \end{cases}$$

解析的に  $\mathcal{M}_{khh'}$  が求まる:

$$\mathcal{M}_{khh'} = -\frac{1}{8}[k|h - h'|(k|h - h'| + 3) + 3] \times \exp(-k|h - h'|)$$

■  $N=3,000,000$

■ 展開項数

● 半径方向 :  $k_{\max} = 64$

● 方位角方向 :  $m_{\max} = 16$

●  $z$  方向 :  $h_{\max} = 24$

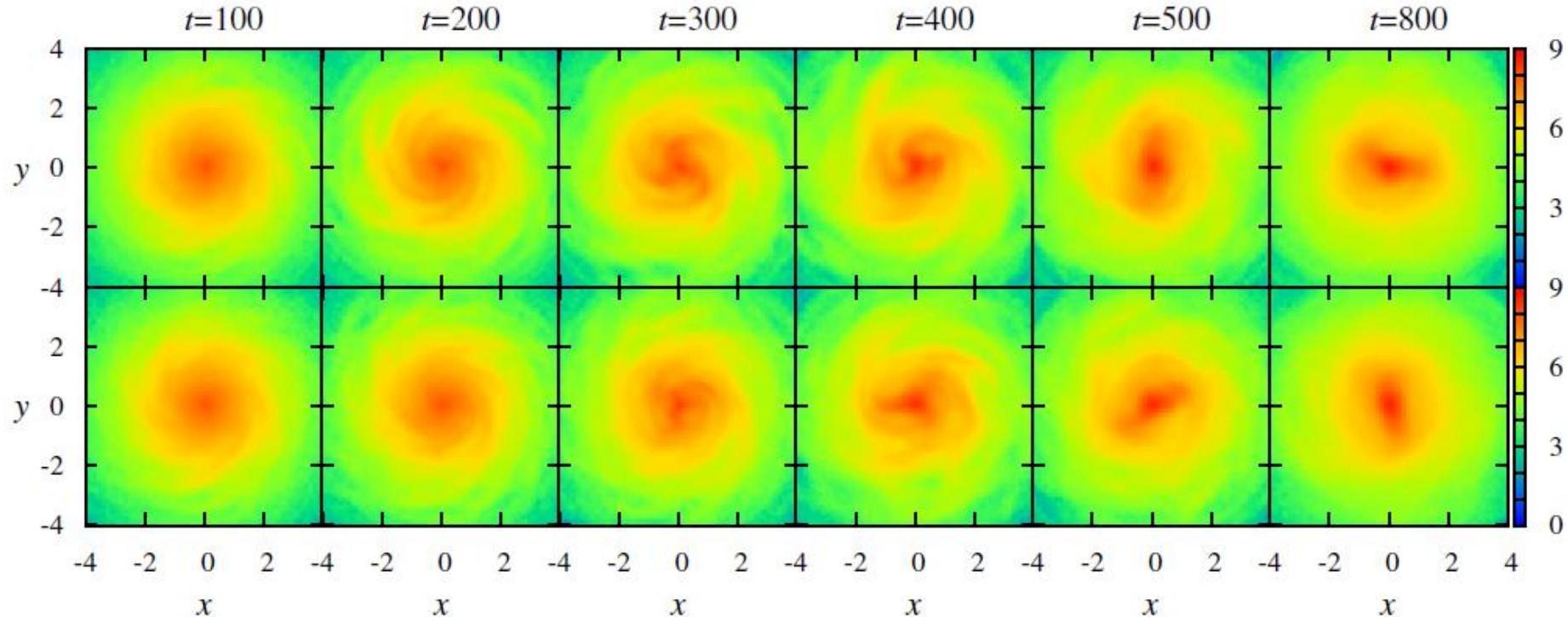
# *TREE*コードシミュレーション

- *gravitational softening*  
 $\epsilon=0.0227$  (*Plummer* softening)
- *Tolerance parameter*  
 $\theta=0.5$
- Including up to *quadrupole* terms
- $N=3,000,000$
- GRAPE-5

# 表面密度分布の時間進化

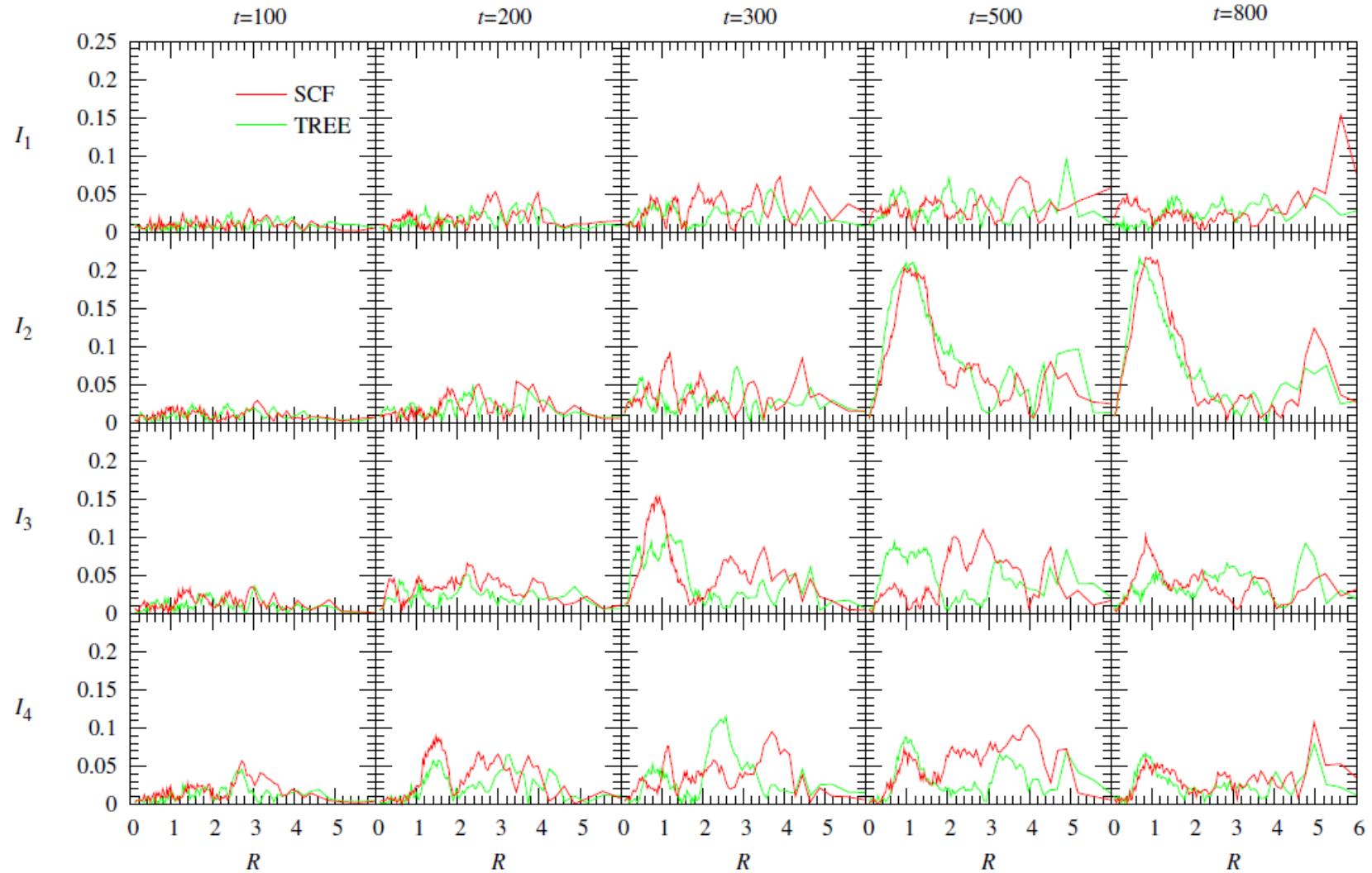
- exponential disk embedded in a fixed NFW halo
- $N_{\text{disk}}=3,000,000$

**SCF:  $k_{\max}=64$ ,  $m_{\max}=16$ ,  $h_{\max}=24$**

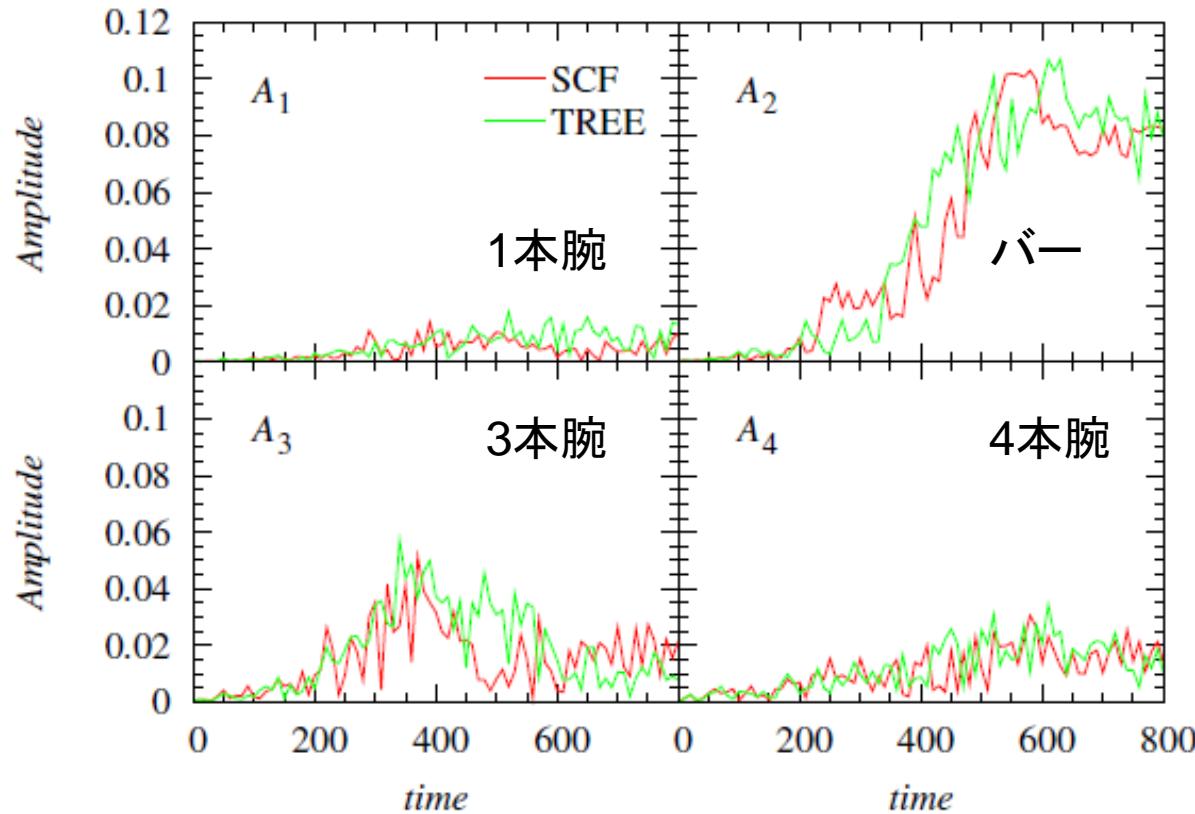


**TREE:  $\varepsilon=0.0227$ ,  $\theta=0.5$**

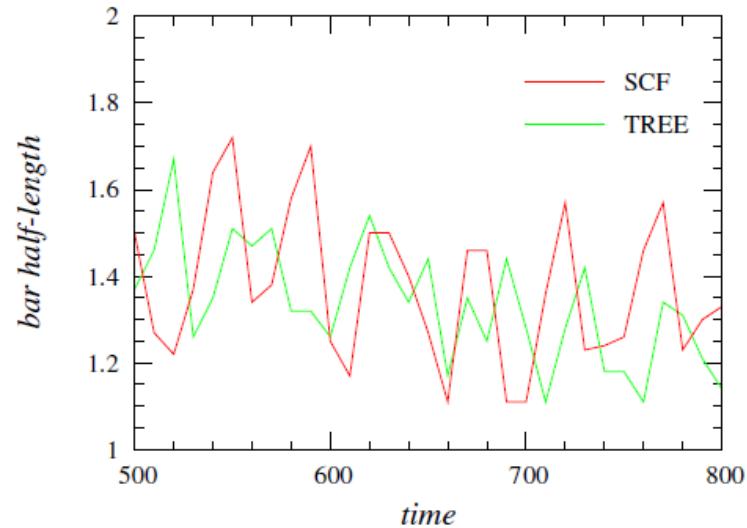
# 表面密度のフーリエ成分



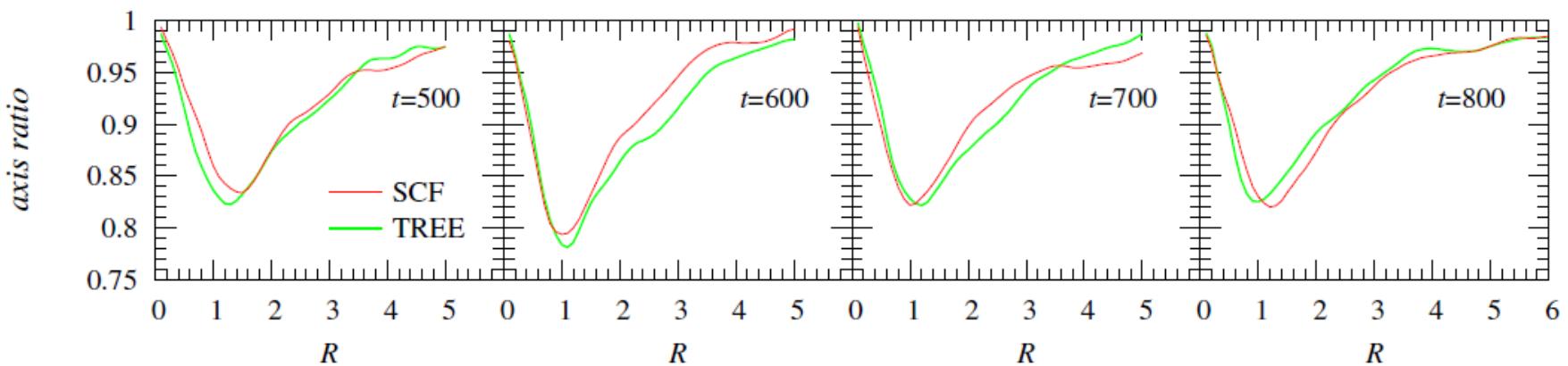
# 渦状腕の振幅の時間進化



# バーの長さ・軸比の時間進化

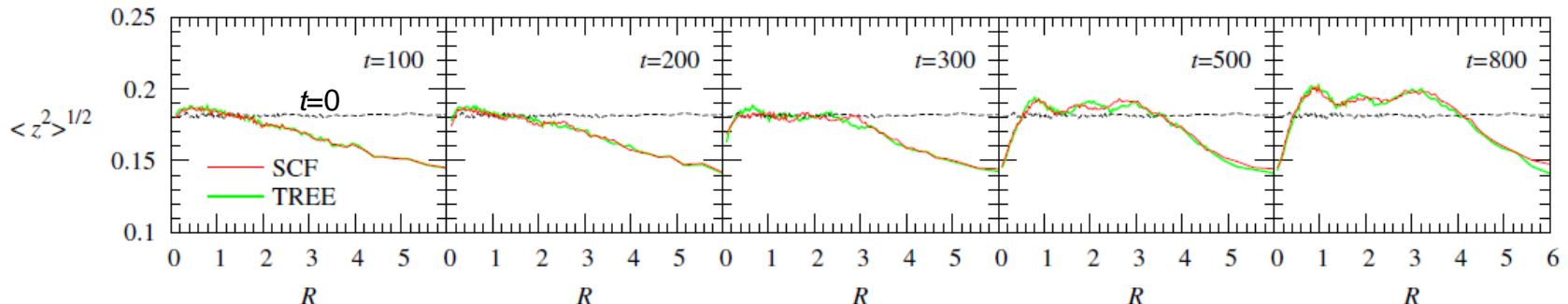


バーの長さの時間進化

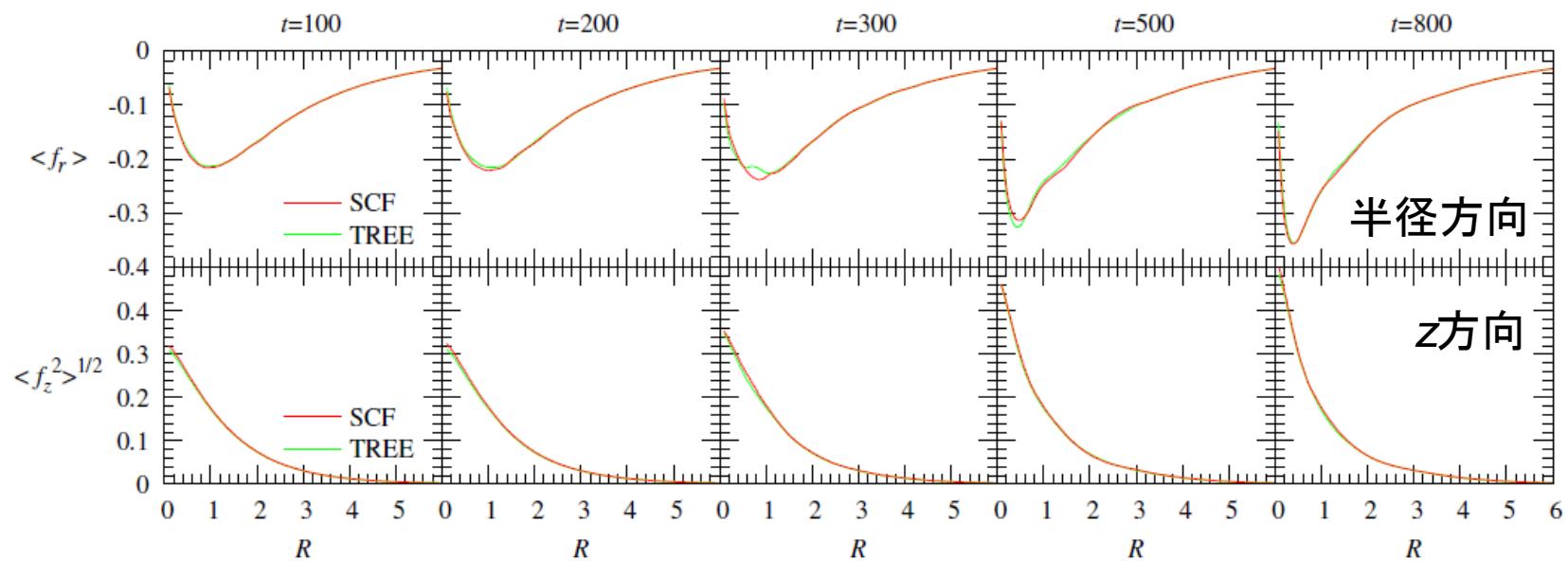


バーの軸比(短軸/長軸)の時間進化

# 円盤の厚み・力の時間進化

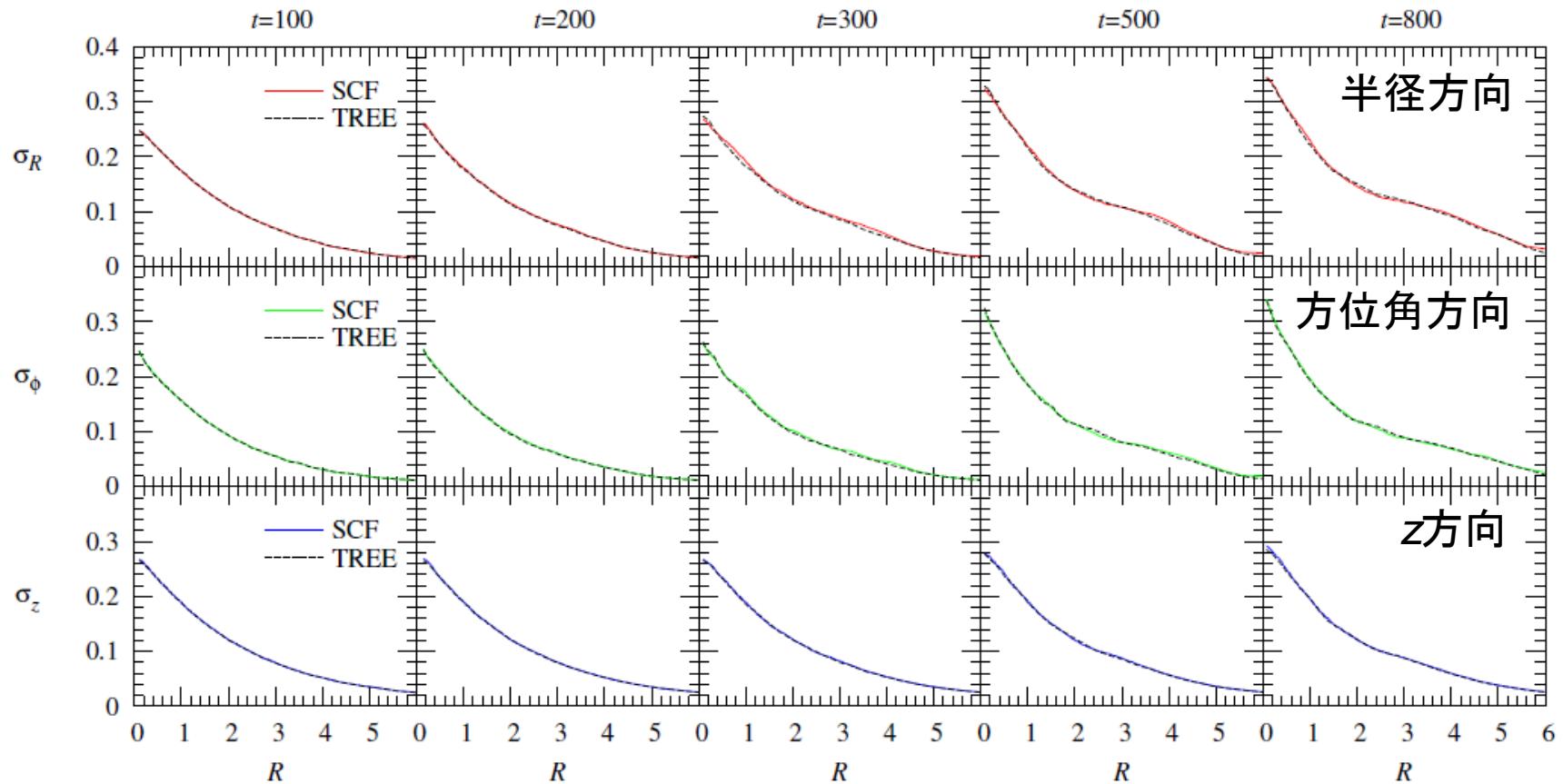


円盤の厚みの時間進化



$z$ 方向と方位角方向で平均化された力の時間進化

# 速度分散の時間進化



# 自己重力ハロー中の円盤シミュレーション

## ■ exponential disk

$$\rho_d(R, z) = \frac{M_d}{4\pi h^2 z_0} \exp(-R/h) \operatorname{sech}^2(z/z_0)$$

$$z_0=0.2h$$

## ■ NFW halo

$$\rho_h(r) = \frac{\rho_0}{(r/r_s)(1+r/r_s)^2}$$

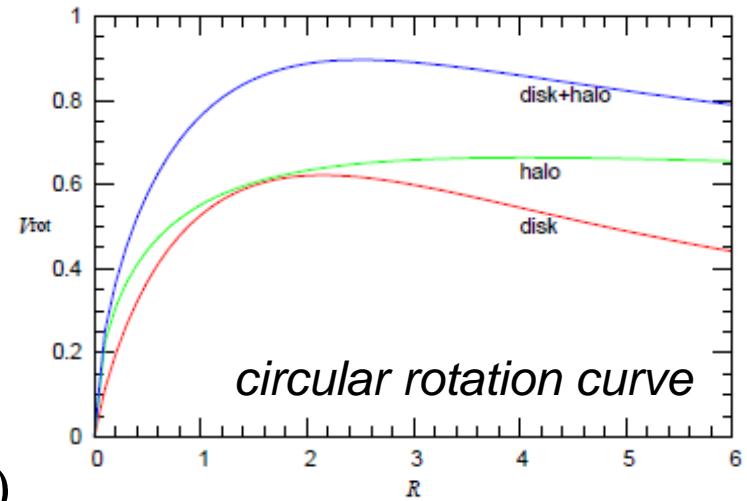
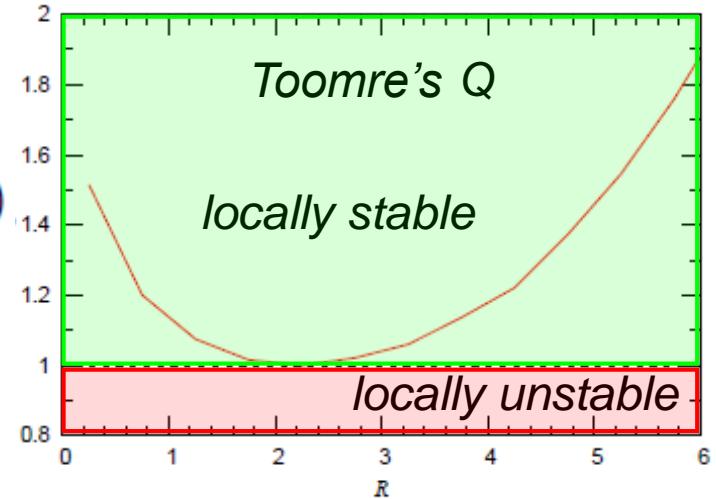
$$r_s=1.875h, M_h=5M_d \quad (R \leq 15 \text{ } h)$$

## ■ Computational Units:

$$G=M_d=h=1$$

$$(t_{\text{unit}}=1.31\times 10^7 \text{ yr}, v_{\text{unit}}=262 \text{ km s}^{-1})$$

$$\text{for } M_d=5.6\times 10^{10} M_{\text{sun}}, h=3.5 \text{ kpc}$$



# SCFシミュレーション

円盤

## ■ 基底関数系

$$\begin{cases} \rho_{kmh}(R, \phi, z) = \frac{1}{4\pi G} J_m(kR) e^{im\phi} \rho_z(z-h) \\ \Phi_{kmh}(R, \phi, z) = J_m(kR) e^{im\phi} \mathcal{Z}(z-h) \\ \mathcal{Z}(z) = -\frac{1}{2}(1 + k|z|) e^{-k|z|} \\ \rho_z(z) = k^2 e^{-k|z|} \end{cases}$$

■  $N_d=200,192$

## ■ 展開項数

- 半径方向 :  $k_{\max}=64$
- 方位角方向 :  $m_{\max}=24$
- $z$  方向 :  $h_{\max}=24$

ハロー

## ■ 基底関数系

$$\begin{cases} \rho_{nlm}(\mathbf{r}) = K_{nl} \frac{M}{2\pi} \frac{(r/a)^l}{(r/a)[1+(r/a)]^{2l+3}} C_n^{(2l+3/2)}(\xi) \sqrt{4\pi} Y_{lm}(\theta, \phi) \\ \Phi_{nlm}(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{a} \frac{(r/a)^l}{[1+(r/a)]^{2l+1}} C_n^{(2l+3/2)}(\xi) \sqrt{4\pi} Y_{lm}(\theta, \phi) \end{cases}$$

(Hernquist & Ostriker's basis set)

■  $N_h=1,000,960$

## ■ 展開項数

- 半径方向 :  $n_{\max}=32$
- 角度方向 :  $l_{\max}=m_{\max}=12$

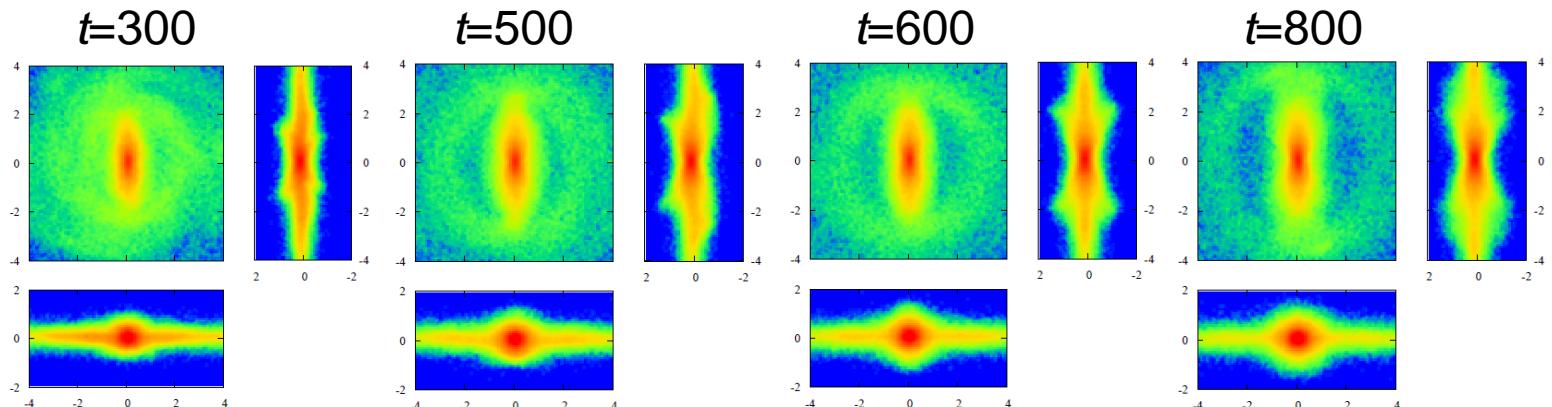
# *TREE*コードシミュレーション

- *gravitational softening*  
 $\epsilon=0.04$  (*Plummer* softening)
- *Tolerance parameter*  
 $\theta=0.5$
- Including up to *quadrupole* terms
- $N_d=200,192$  /  $N_h=1,000,960$
- ASURA

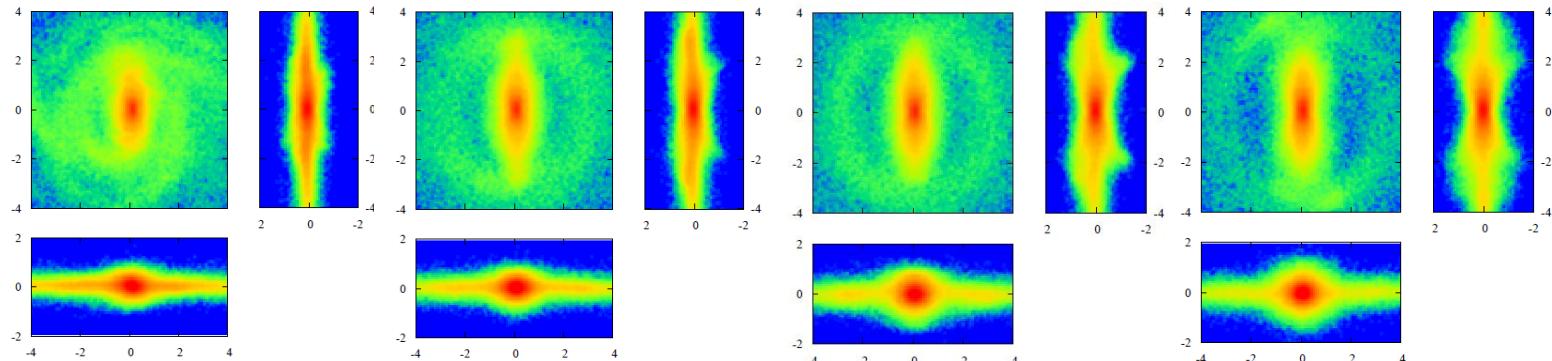
# 円盤の表面密度分布の時間進化

- exponential disk embedded in a live *NFW* halo
- $N_{\text{disk}}=200,192 / N_{\text{halo}}=1,000,960$

**SCF:**  
 $k_{\text{d,max}}=64$   
 $m_{\text{d,max}}=24$   
 $h_{\text{d,max}}=24$   
 $n_{\text{h,max}}=32$   
 $l_{\text{h,max}}=12$   
 $m_{\text{h,max}}=12$

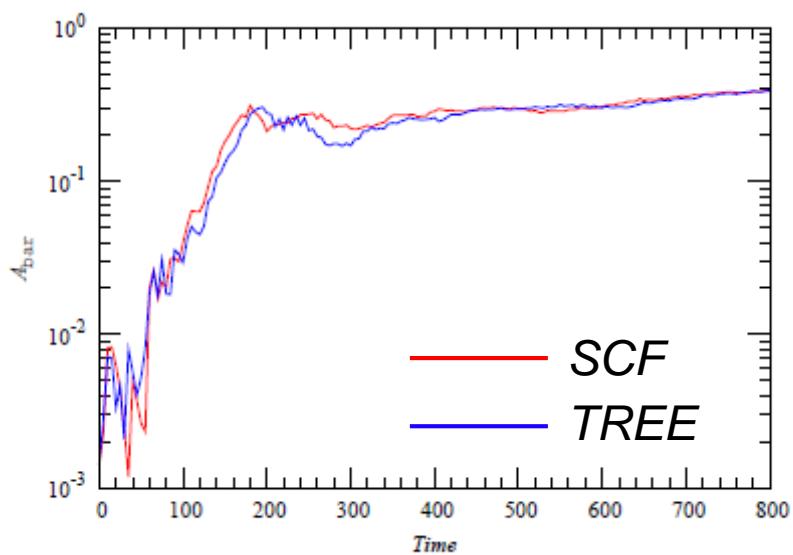


**TREE:**  
 $\varepsilon=0.04$   
 $\theta=0.5$

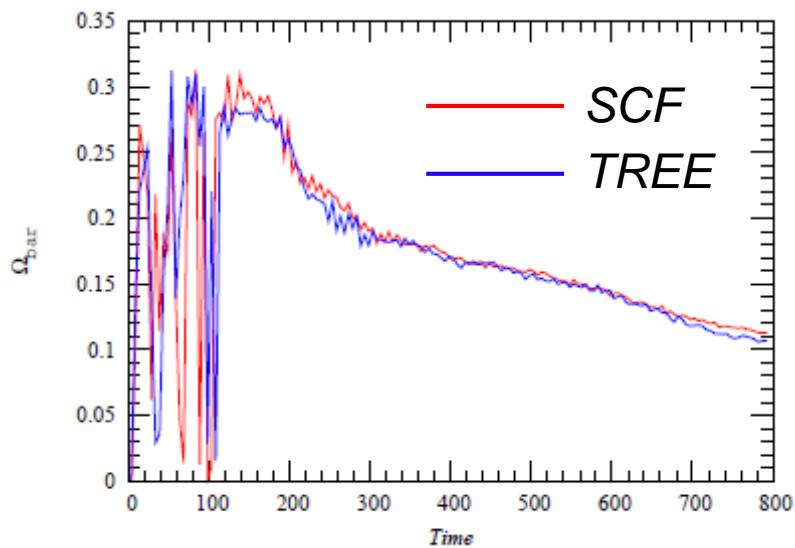


# 円盤のバー モード

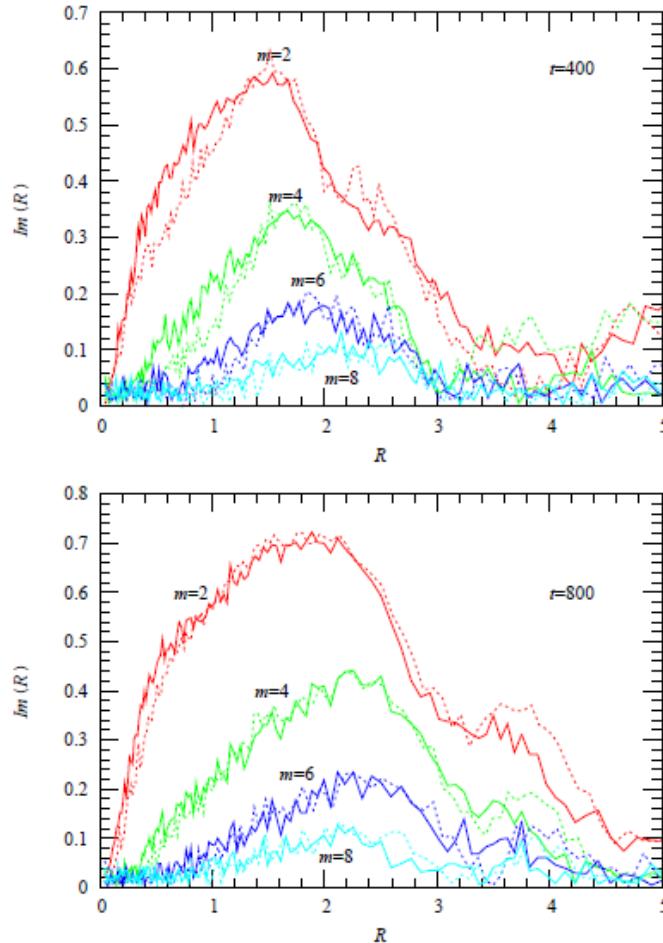
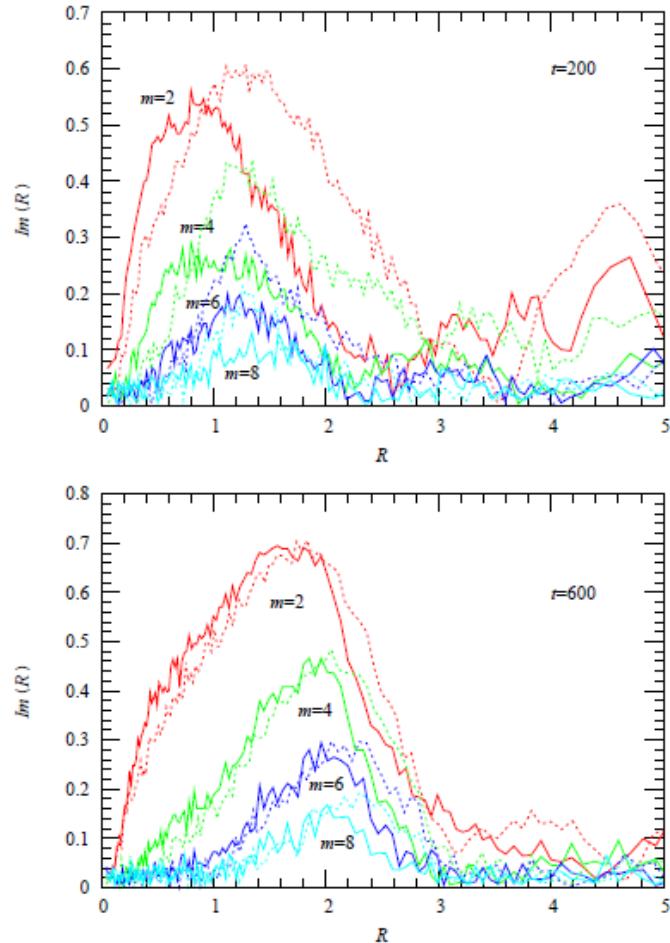
バー振幅の時間進化



バー・パターン速度の時間進化



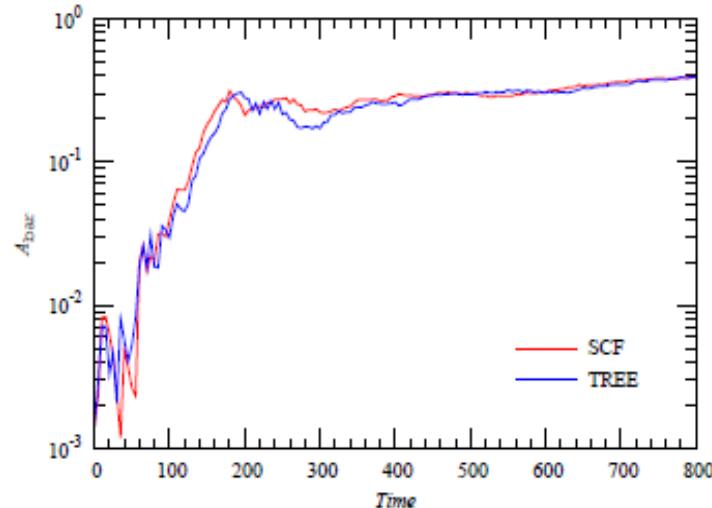
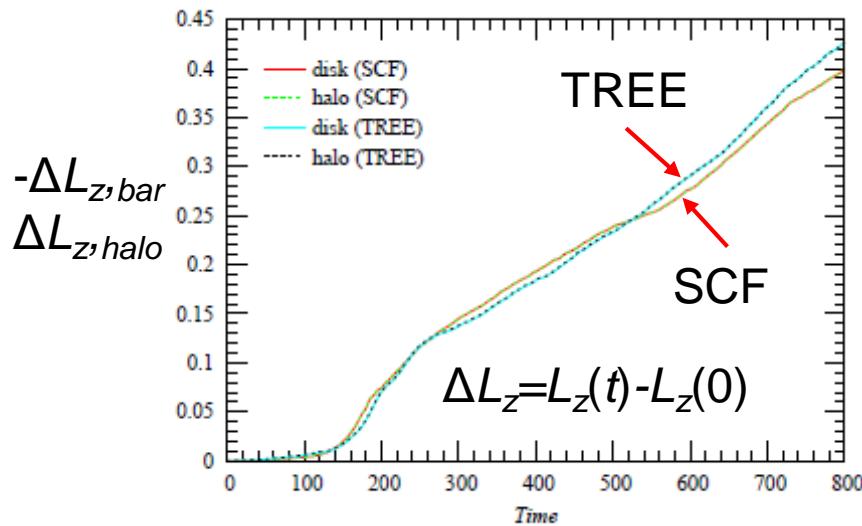
# 円盤の表面密度のフーリエ成分



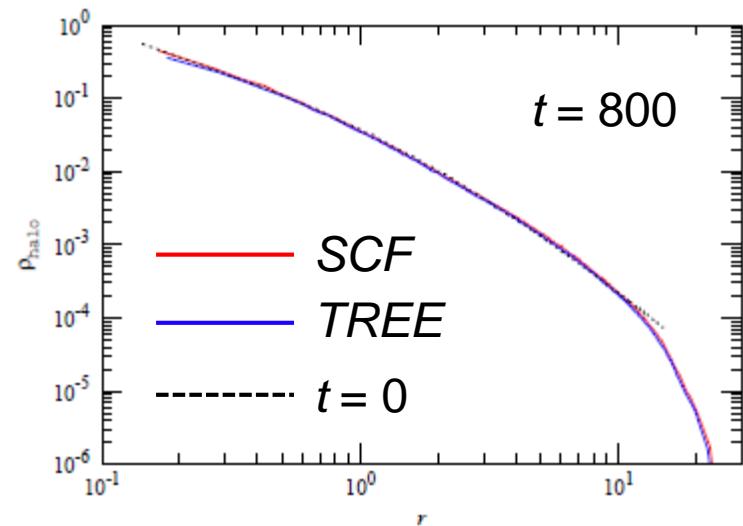
実線:  $SCF$ , 破線:  $TREE$

# 角運動量輸送・ハロー密度分布

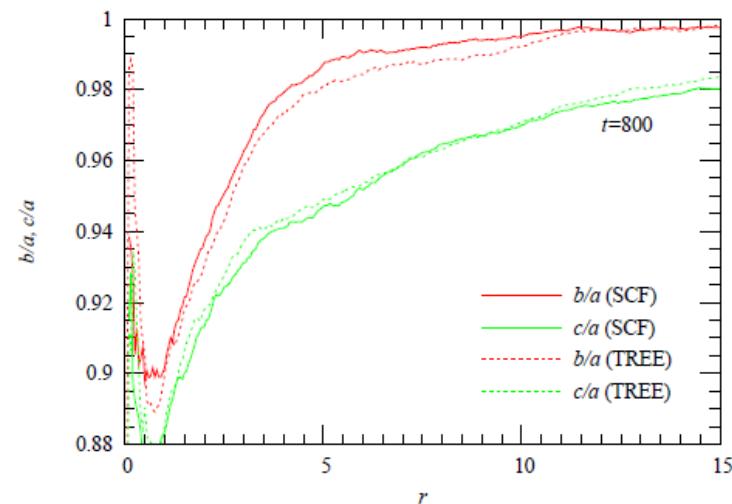
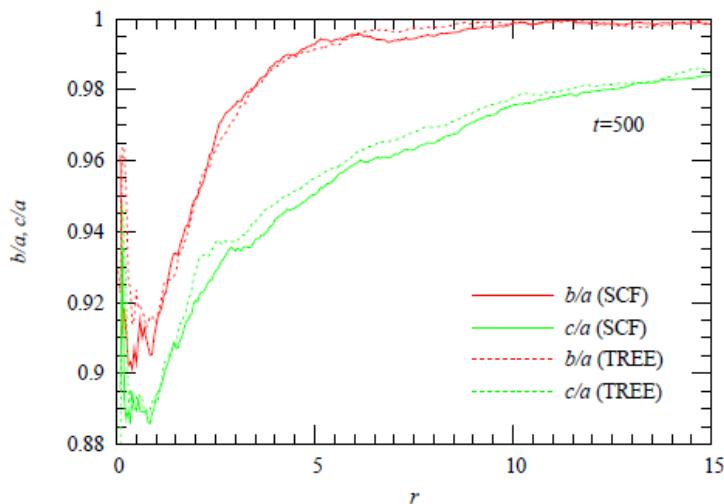
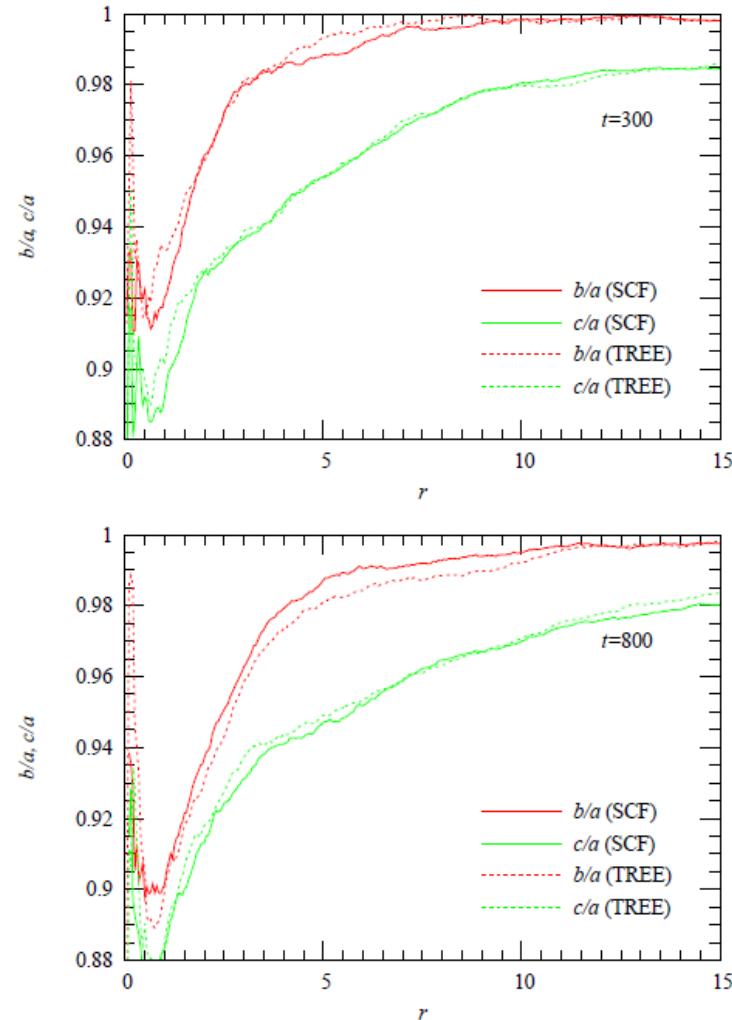
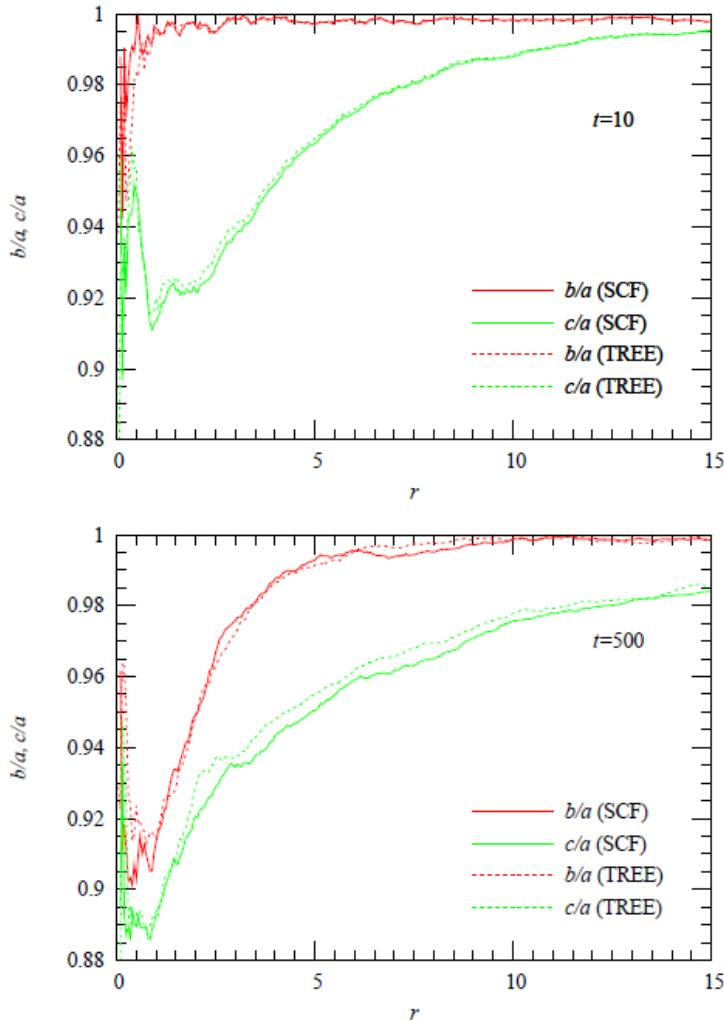
バーとハロー角運動量輸送



最終状態におけるハローの密度分布



# ハローの軸比の時間変化

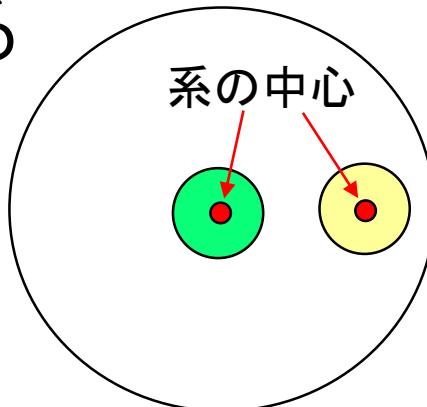


# Application of the SCF Method

## 3. Merging Simulation of Two Spherical Systems

# SCF法による合体シミュレーション

- 展開中心が時間的に移動する系
- 各系の中心(*potential minimum*)にテスト粒子を置く
- 各系のテスト粒子をその系の展開中心にする
- テスト粒子の軌道は毎ステップ他のすべての粒子からの力を計算して解く
- 相互作用は各系の展開係数を他の系の粒子に作用させて計算する



黄色の系の粒子が受ける緑の系の重力相互作用の計算  
→ 緑の系の中心で展開して得られた展開係数を黄色の系の粒子に作用させる

# 銀河モデル

## ■ Kingモデル

$$f(\mathcal{E}) = \begin{cases} \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}}(e^{\mathcal{E}/\sigma^2} - 1) & (\mathcal{E} > 0) \\ 0 & (\mathcal{E} \leq 0) \end{cases} \quad (\rho_1, \sigma : \text{定数})$$

$$\mathcal{E} = \Psi(r) - \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

$\Psi(r) = -\Phi(r)$  ,  $\Phi(r)$  : ポテンシャル

$$\bar{W} = \Psi(0)/\sigma^2, \quad W = 3$$

計算の単位 :  $G=M=r_0=1$  (  $r_0 \equiv 3\sigma/\sqrt{4\pi G\rho_0}$  ,  $\rho_0$  : 中心密度 )

# シミュレーションの詳細

同一銀河の合体,銀河中心の軌道は  $x$ - $y$ 面内

$N=10,000,584/\text{galaxy}$

中心座標:  $(-5, -y), (5, y)$  with  $y=0, 1, 2, 3, 4, 5$

中心速度:  $(0.2, 0), (-0.2, 0)$

## SCF

### ■ 基底関数系

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{nlm}(\mathbf{r}) = K_{nl} \frac{M}{4\pi a^3} \frac{(r/a)^l}{[1 + (r/a)^2]^{l+5/2}} C_n^{(l+1)}(\xi) \sqrt{4\pi} Y_{lm}(\theta, \phi) \\ \Phi_{nlm}(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{a} \frac{(r/a)^l}{[1 + (r/a)^2]^{l+1/2}} C_n^{(l+1)}(\xi) \sqrt{4\pi} Y_{lm}(\theta, \phi) \end{array} \right.$$

(Clutton-Brock's basis set)

### ■ 展開項数

● 半径方向 :  $n_{\max} = 16$

● 角度方向 :  $l_{\max} = m_{\max} = 10$

## TREE

### ■ 重力softening

$\varepsilon = 0.0074$  (Plummer softening)

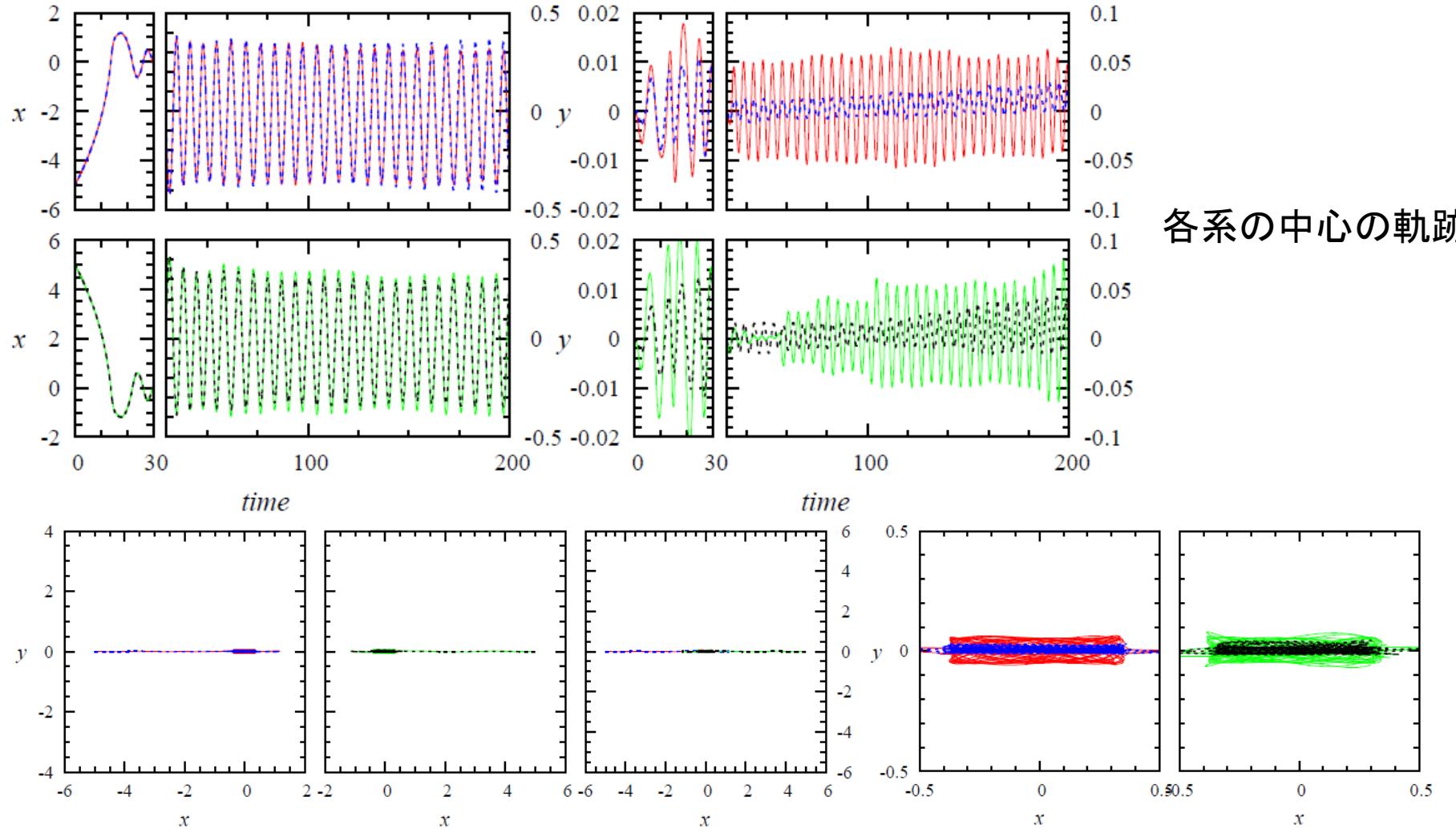
### ■ Tolerance parameter

$\theta = 0.5$

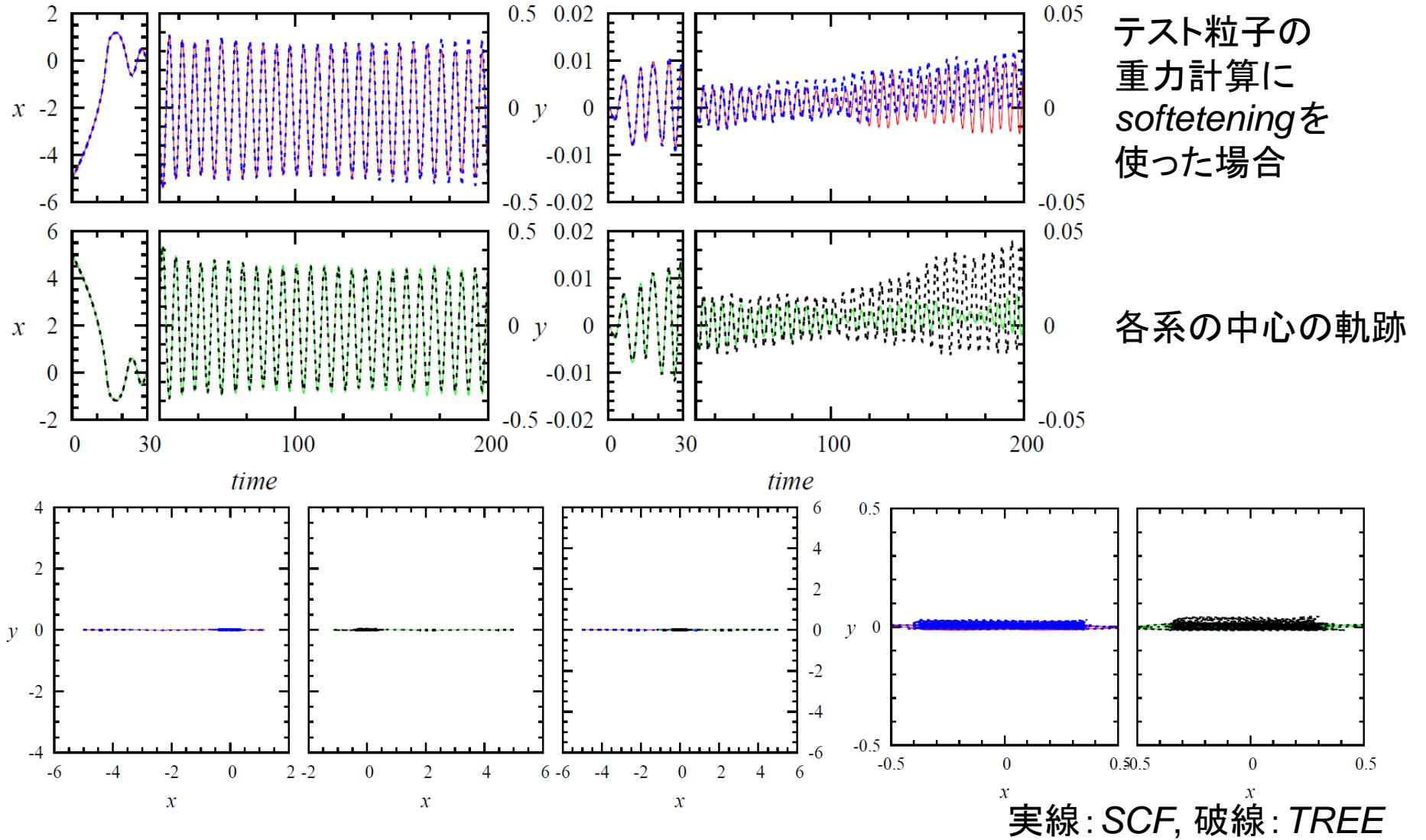
### ■ Including up to quadrupole terms

### ■ FDPS

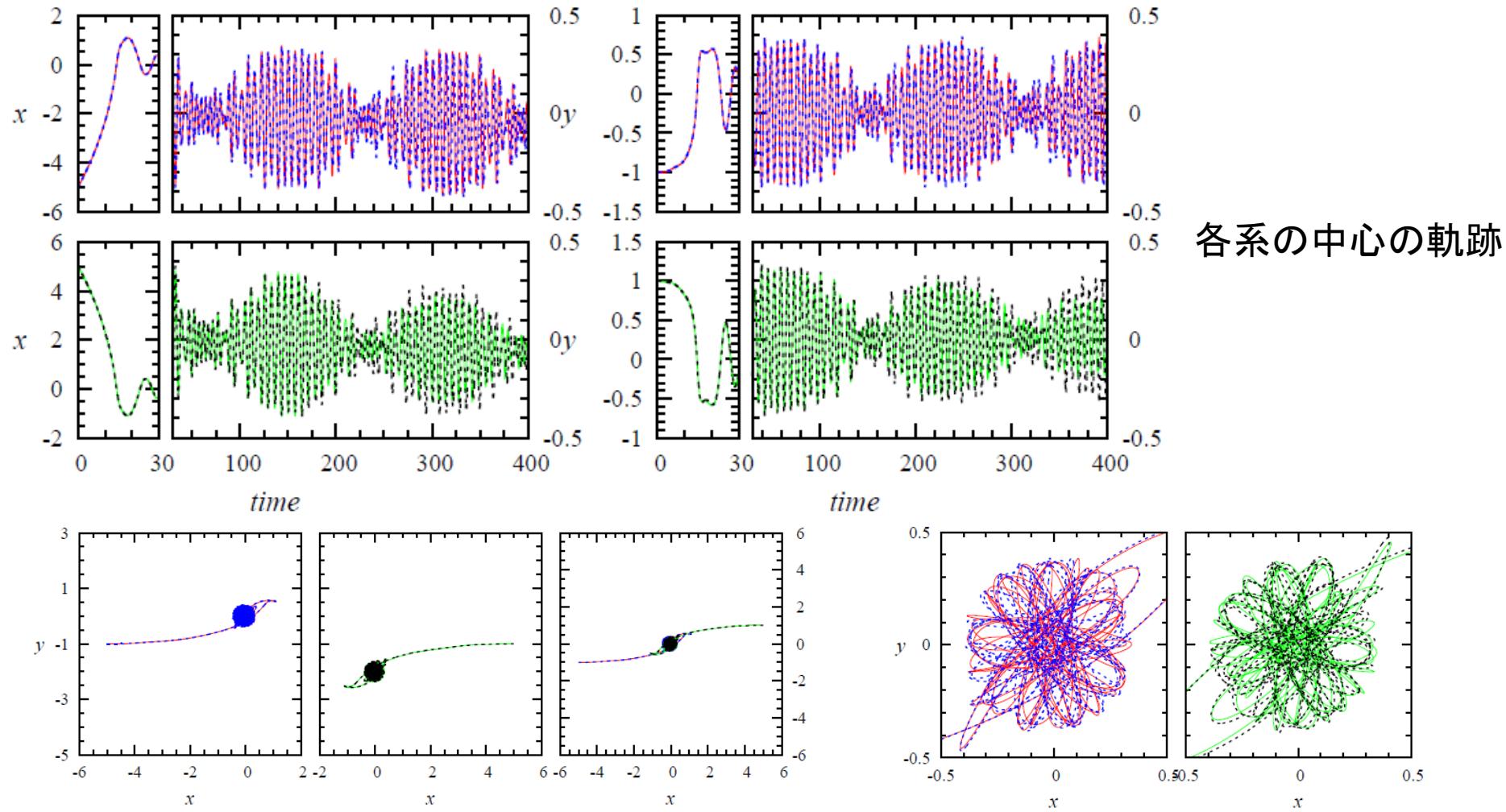
# *Impact parameter =0*



# *Impact parameter =0*

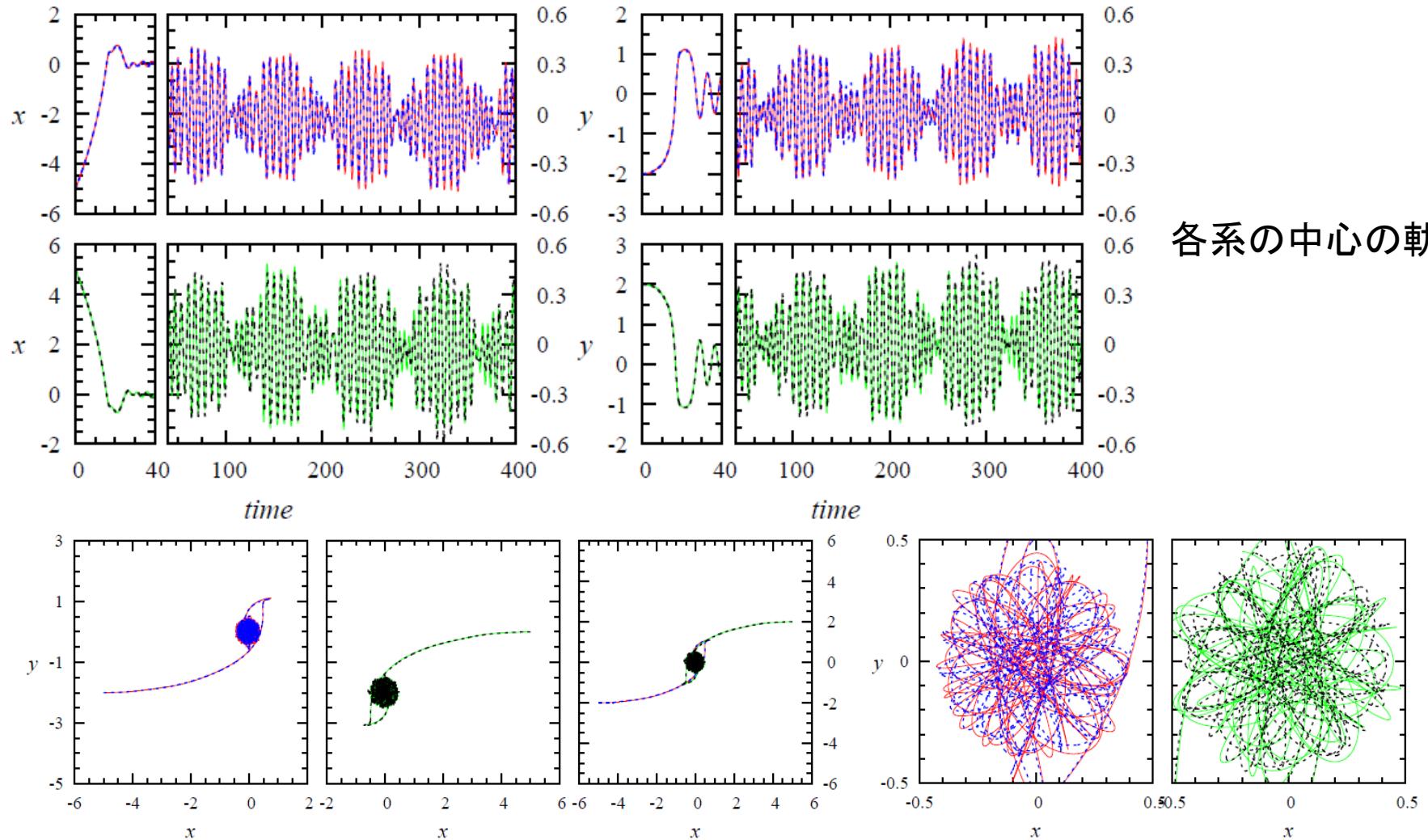


# *Impact parameter =2*



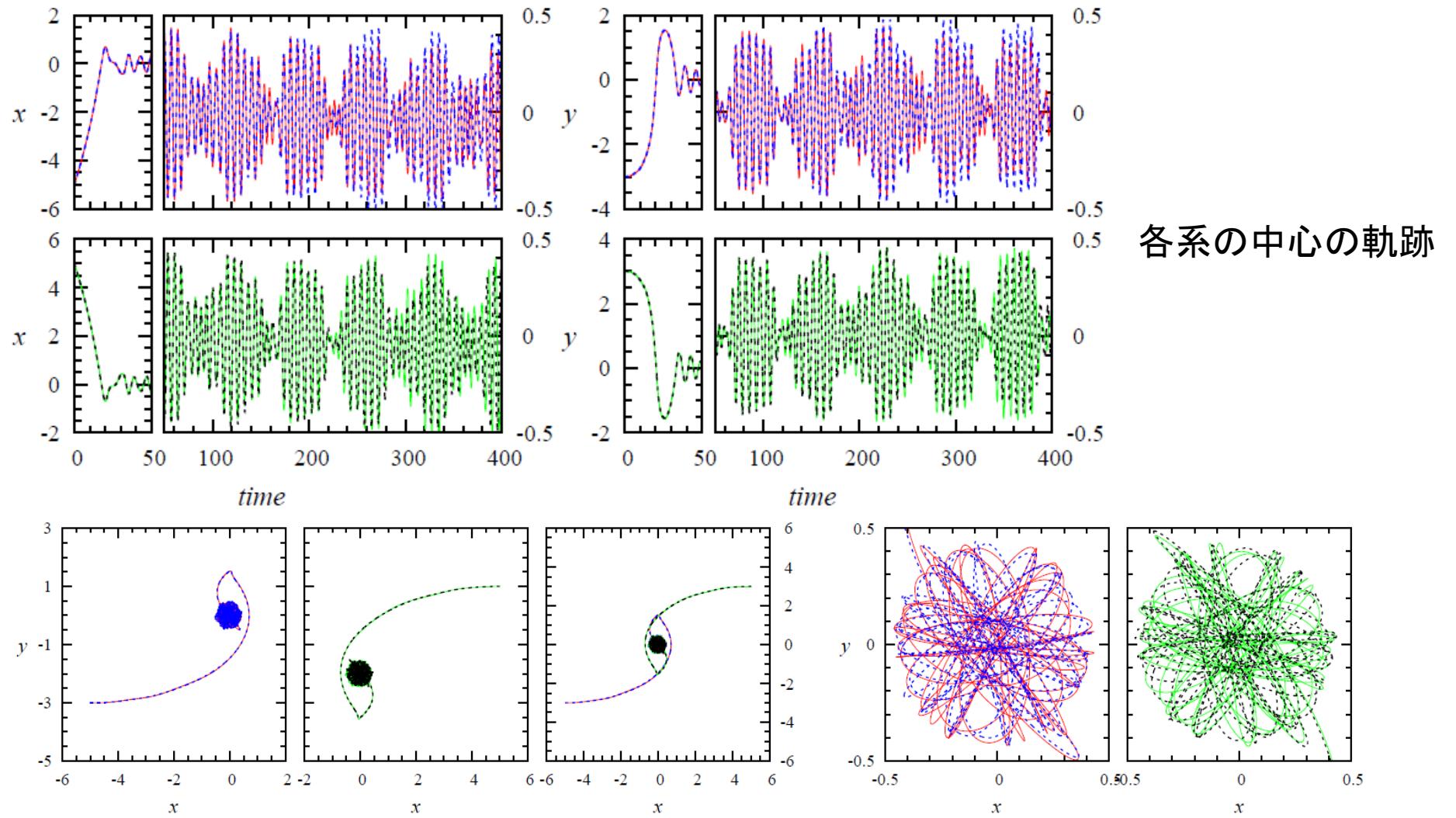
実線: SCF, 破線: TREE

# *Impact parameter =4*



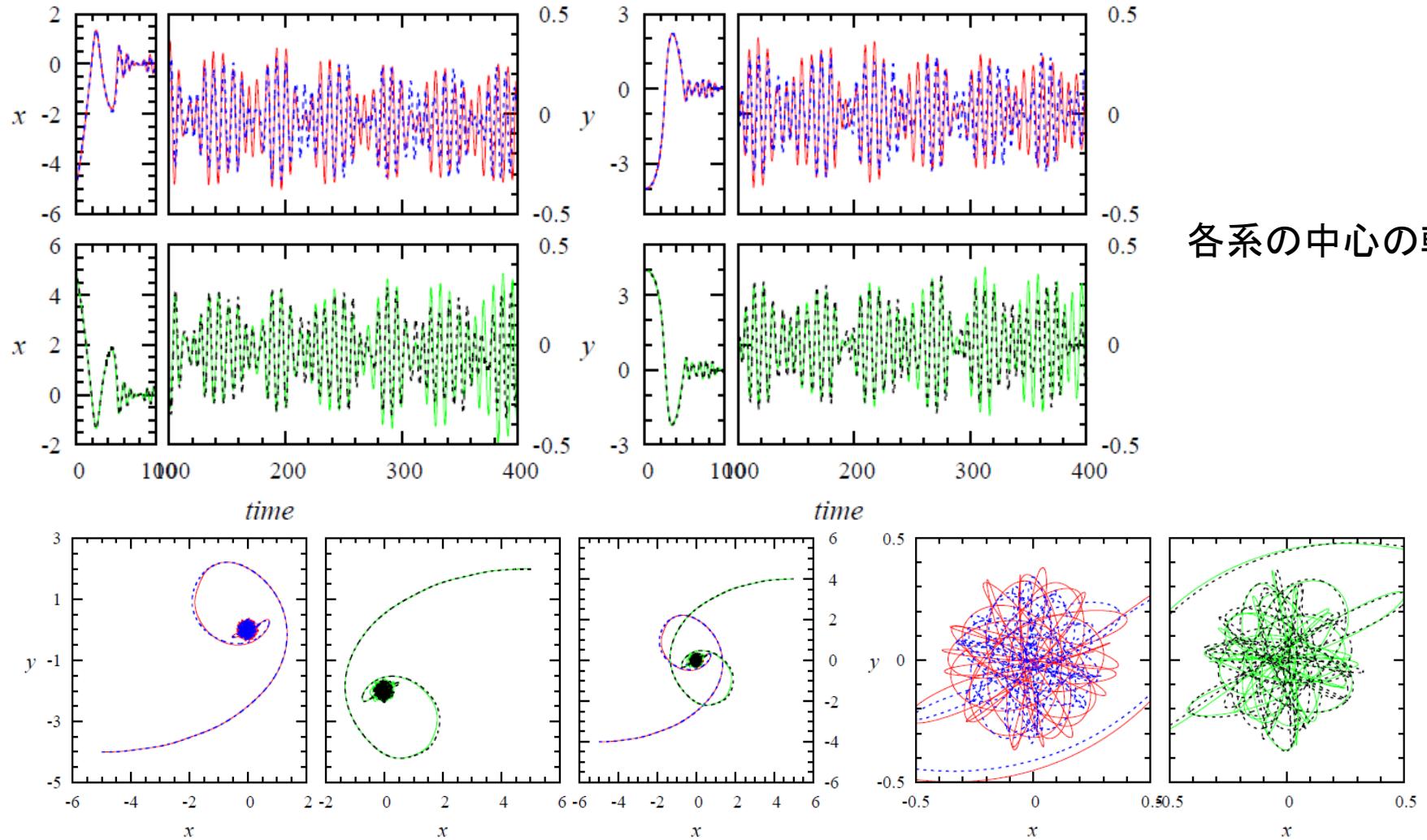
実線: SCF, 破線: TREE

# *Impact parameter = 6*



実線: SCF, 破線: TREE

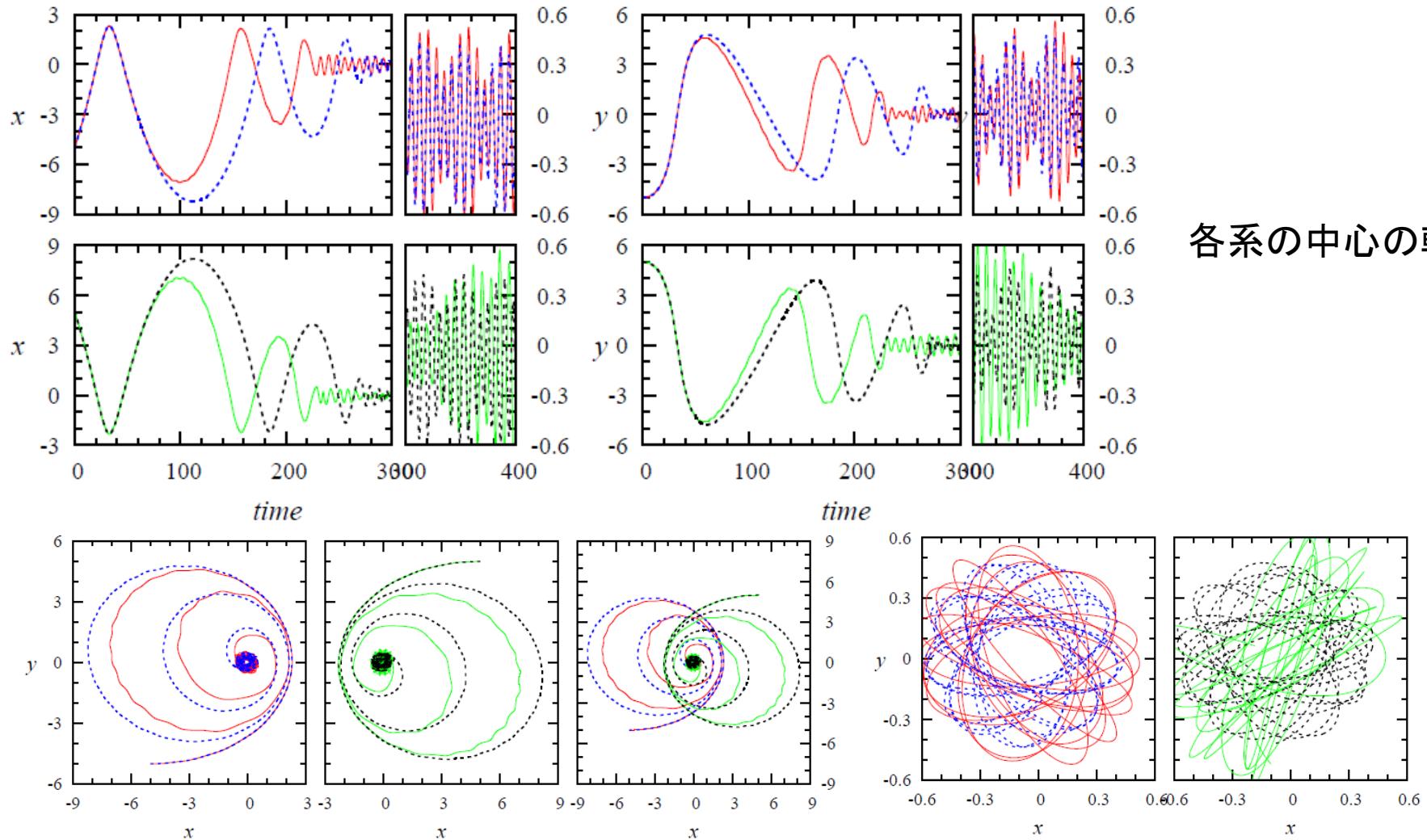
# *Impact parameter =8*



各系の中心の軌跡

実線: *SCF*, 破線: *TREE*

# *Impact parameter = 10*



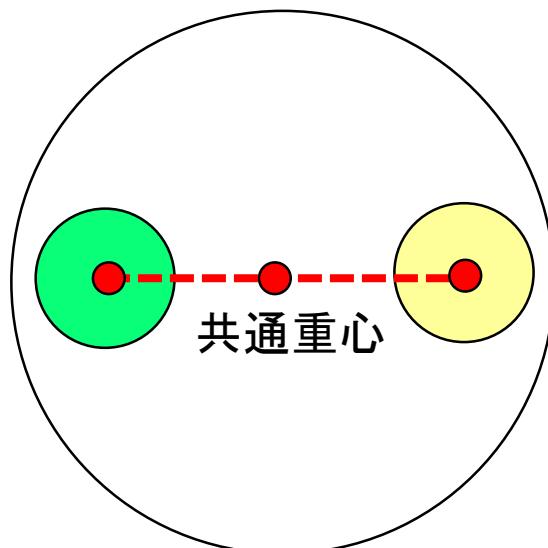
各系の中心の軌跡

実線:SCF, 破線:TREE

# 相互作用の計算

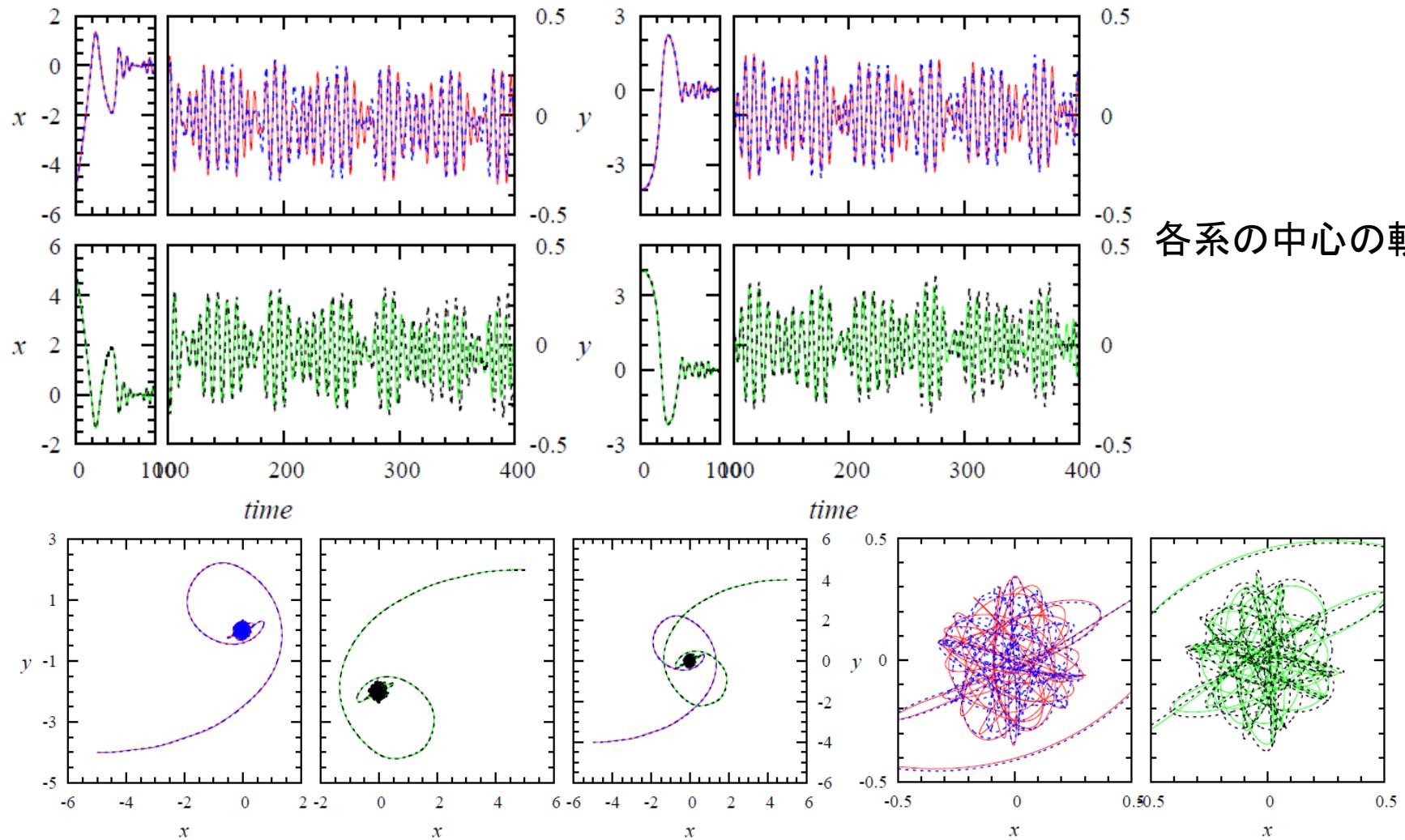
- 自己重力は各系の重心まわりの展開係数で計算
  - 展開項数:  $n_{\max}=16, l_{\max}=m_{\max}=10$
- 相互作用は各系を共通重心まわりで展開した係数で相手の系の粒子にはたらく力を計算
  - 展開項数:  $n_{\max}=28, l_{\max}=m_{\max}=28$

緑の系を共通重心まわりで展開して得られた展開係数を黄色の系の粒子に作用させる

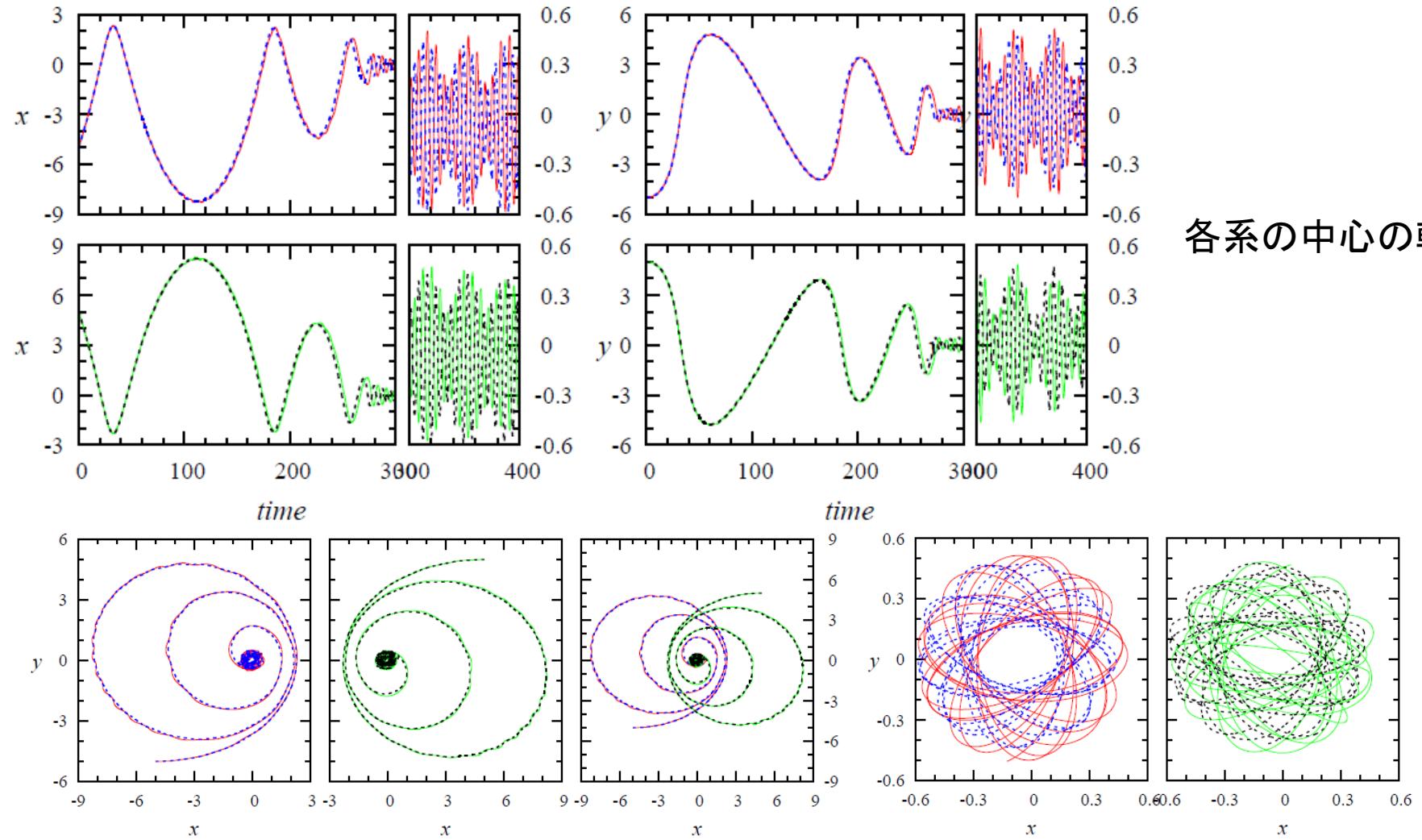


黄色の系を共通重心まわりで展開して得られた展開係数を緑の系の粒子に作用させる

# *Impact parameter =8*



# *Impact parameter = 10*

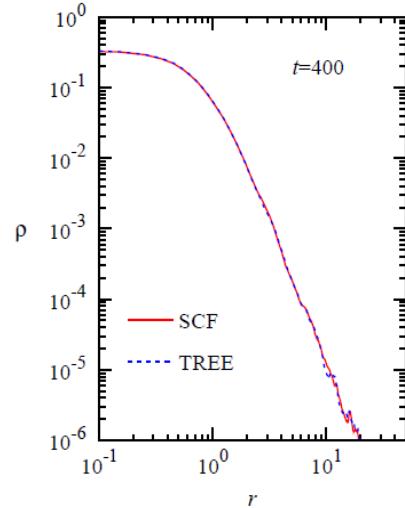


各系の中心の軌跡

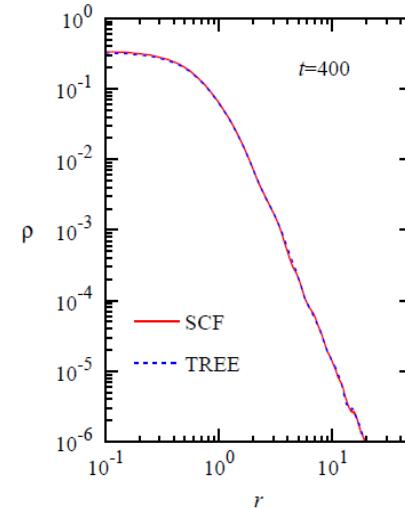
実線: SCF, 破線: TREE

# 合体後の密度分布・速度分散分布

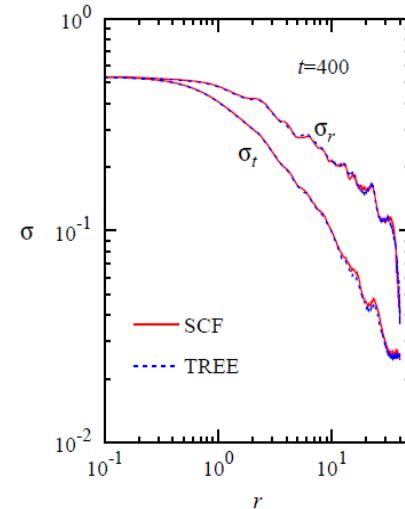
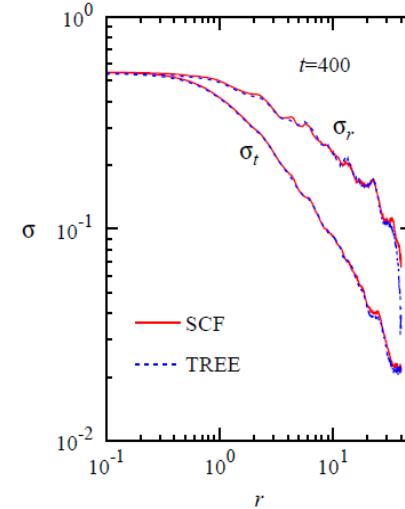
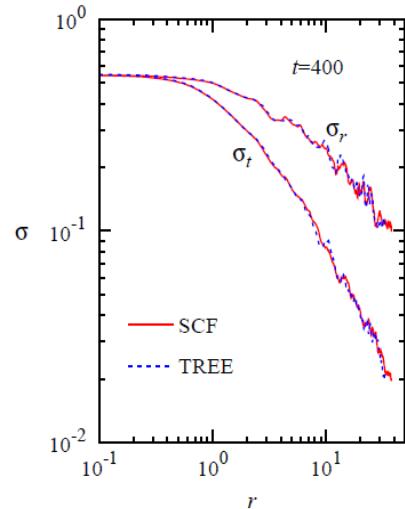
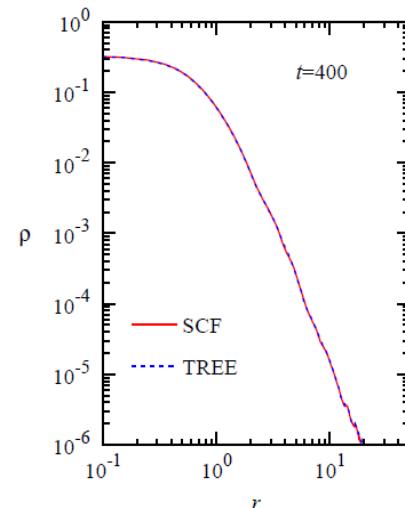
Impact parameter = 0



Impact parameter = 2

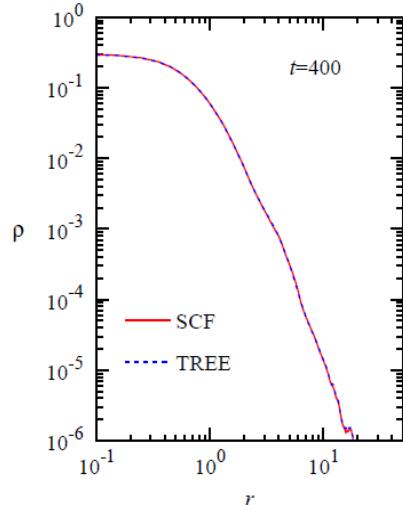


Impact parameter = 4

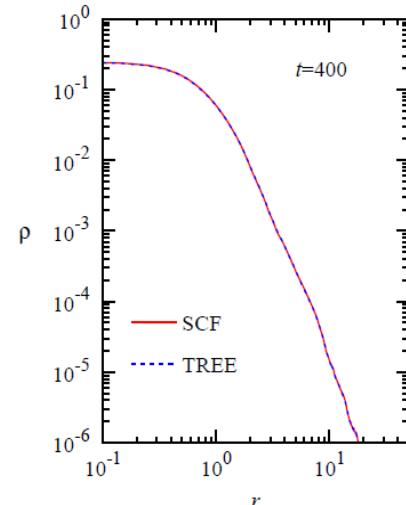


# 合体後の密度分布・速度分散分布

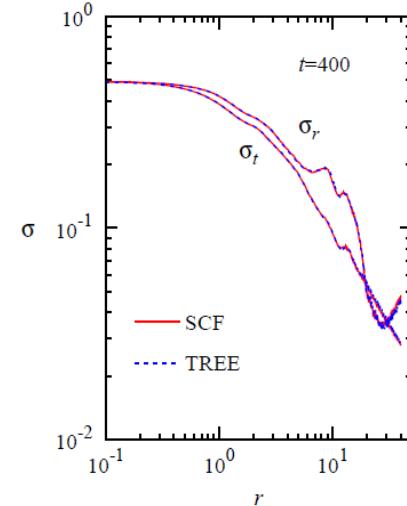
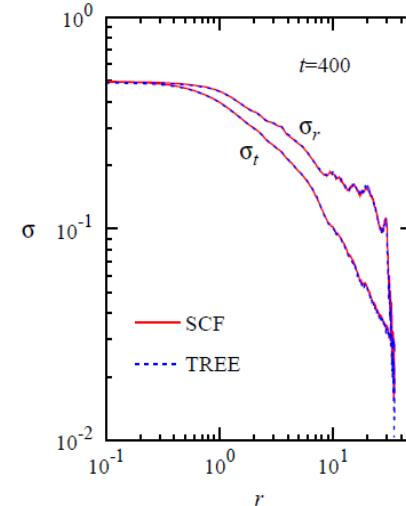
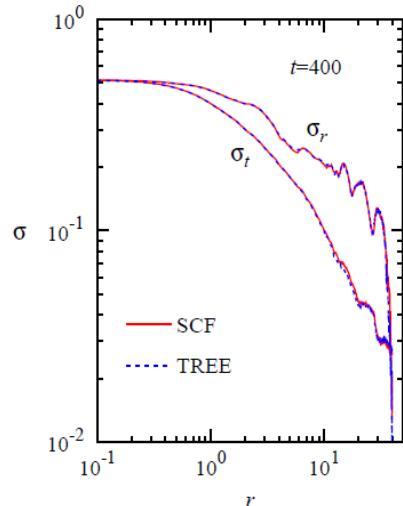
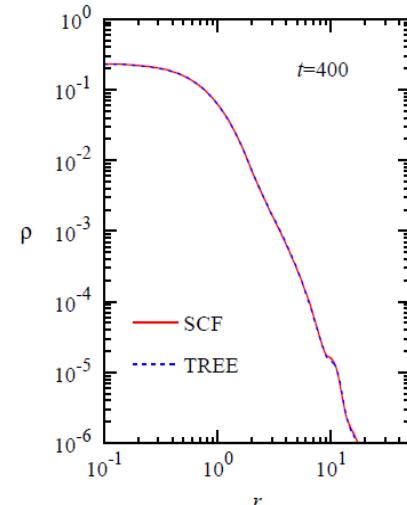
Impact parameter = 6



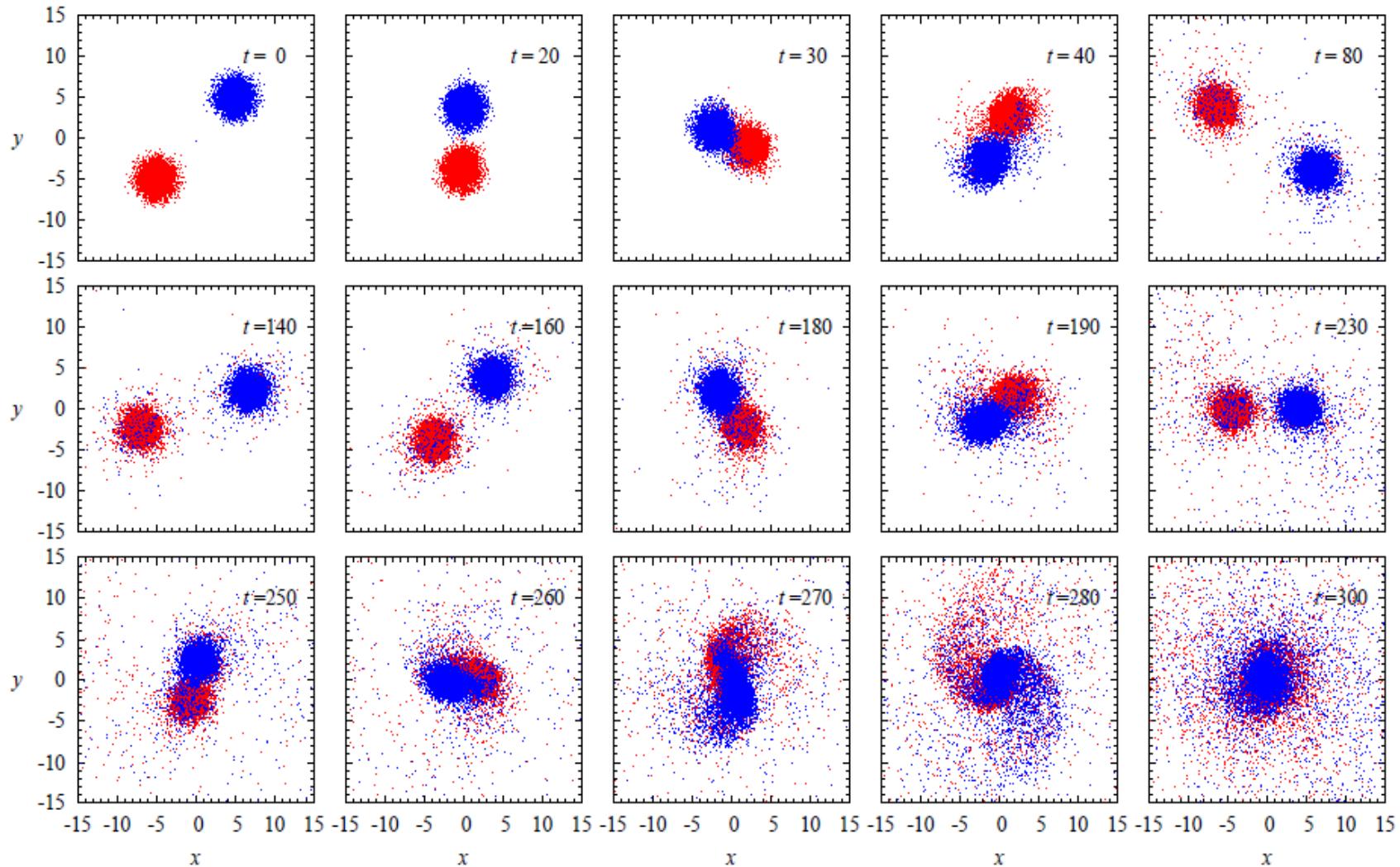
Impact parameter = 8



Impact parameter = 10



# 合体の時間進化



# 計算時間

■ XC30, 648 cores

■  $SCF$

- 各系の中心で展開: 0.276 sec/step

- 共通重心で展開: 1.64 sec/step

■  $TREE$

- $FDPS$ : 3.03 sec/step

# Application of the SCF Method

## 4. Reproduction of Phase Space

# SCF法による位相空間の進化

## ■ 粒子法による位相空間の再現

(Hozumi, 1997, ApJ, 487, 617)

- *Liouville's theorem*:  $df/dt = 0$

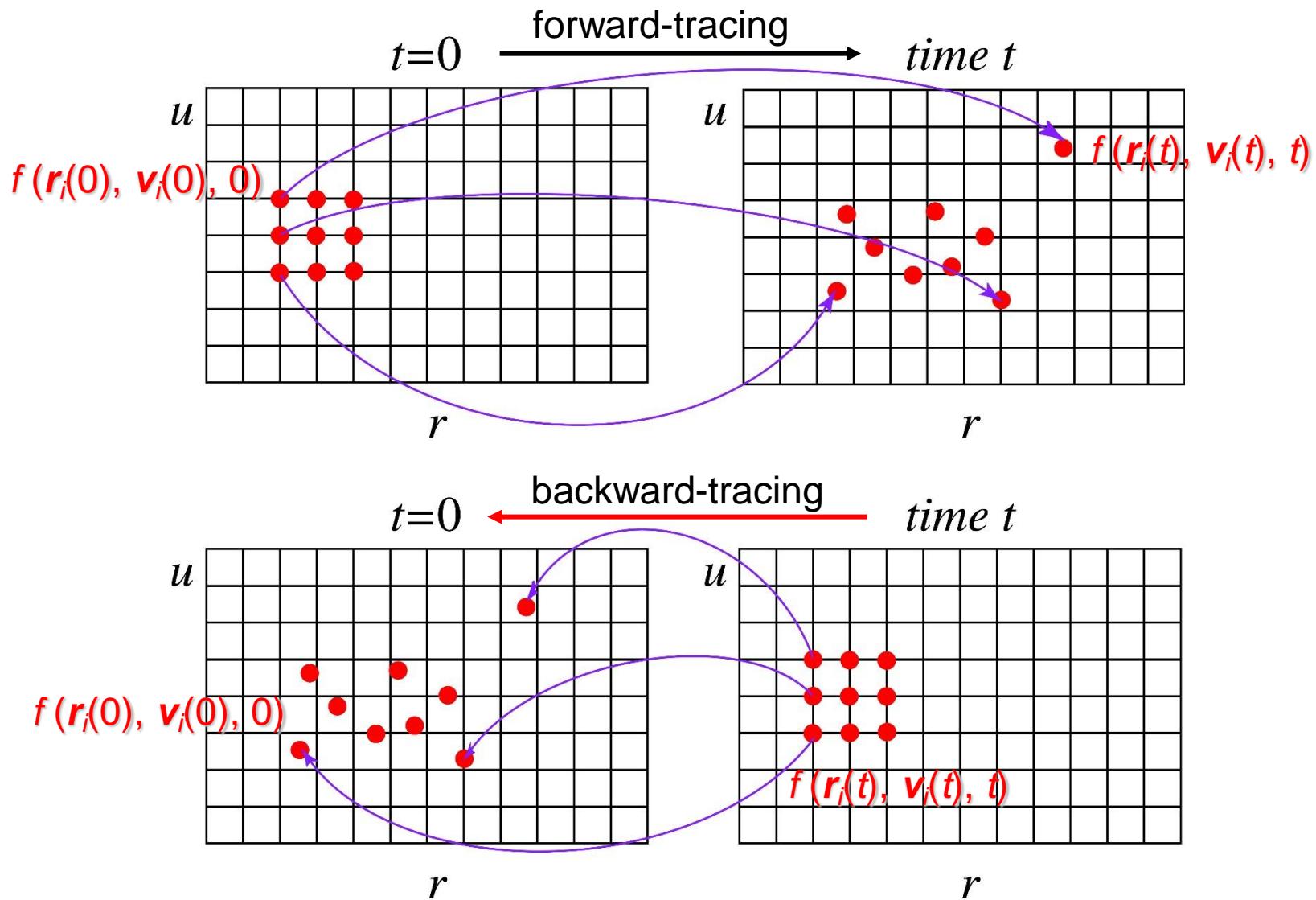
$$\Rightarrow f[r_i(t), v_i(t), t] = f[r_i(0), v_i(0), 0]$$

$i$  : 時刻  $t$  における  $i$  番目の位相空間点

- SCF法の適用

$\Rightarrow$  滑らかな重力場(任意の位置の重力)

# 位相空間の再現

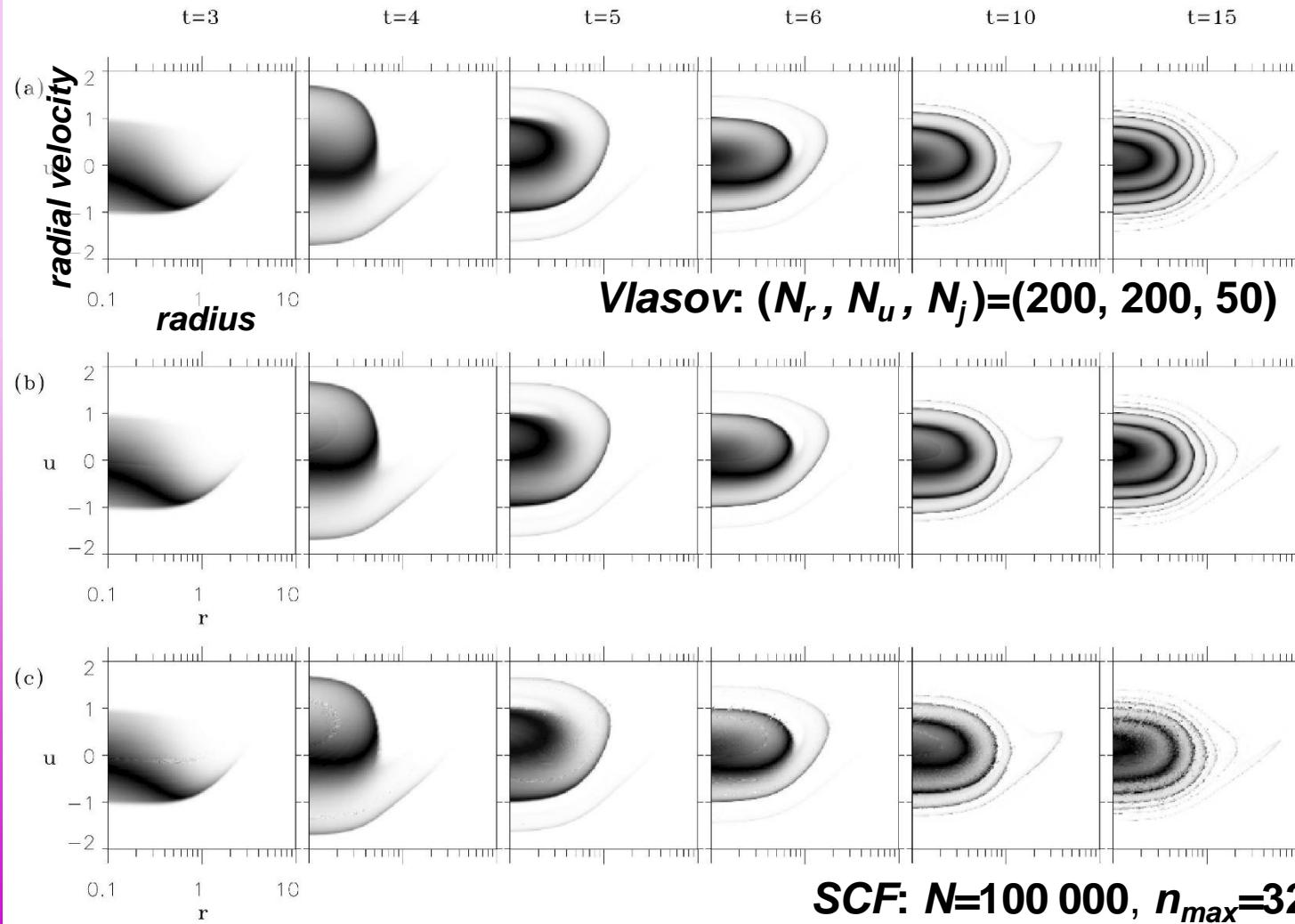


# 位相空間の再現手順

1. タイムステップごとに  $A_{nlm}$  を保存しながら SCF シミュレーションを実行する。
2. 時刻  $t$  における位相空間上で必要となる粒子の軌道を時刻  $t=0$  まで  $A_{nlm}$  を使って遡る。  
$$( \quad a(r) = - \sum_{nlm} A_{nlm}(t) \nabla \Phi_{nlm}(r) \quad )$$
3. Liouville の定理  $\textcolor{brown}{f}[r_i(t), v_i(t), t] = f[\textcolor{brown}{r}_i(0), v_i(0), 0]$  に従って、遡った  $t=0$  での位相空間点での分布関数を計算する。

# 一様密度球のコラプスの位相空間での進化

*Spherical Symmetry : Evolution of  $f(r, u, j, t)$  at  $j=0.00068$  for  $|2T/W|=1/2$*



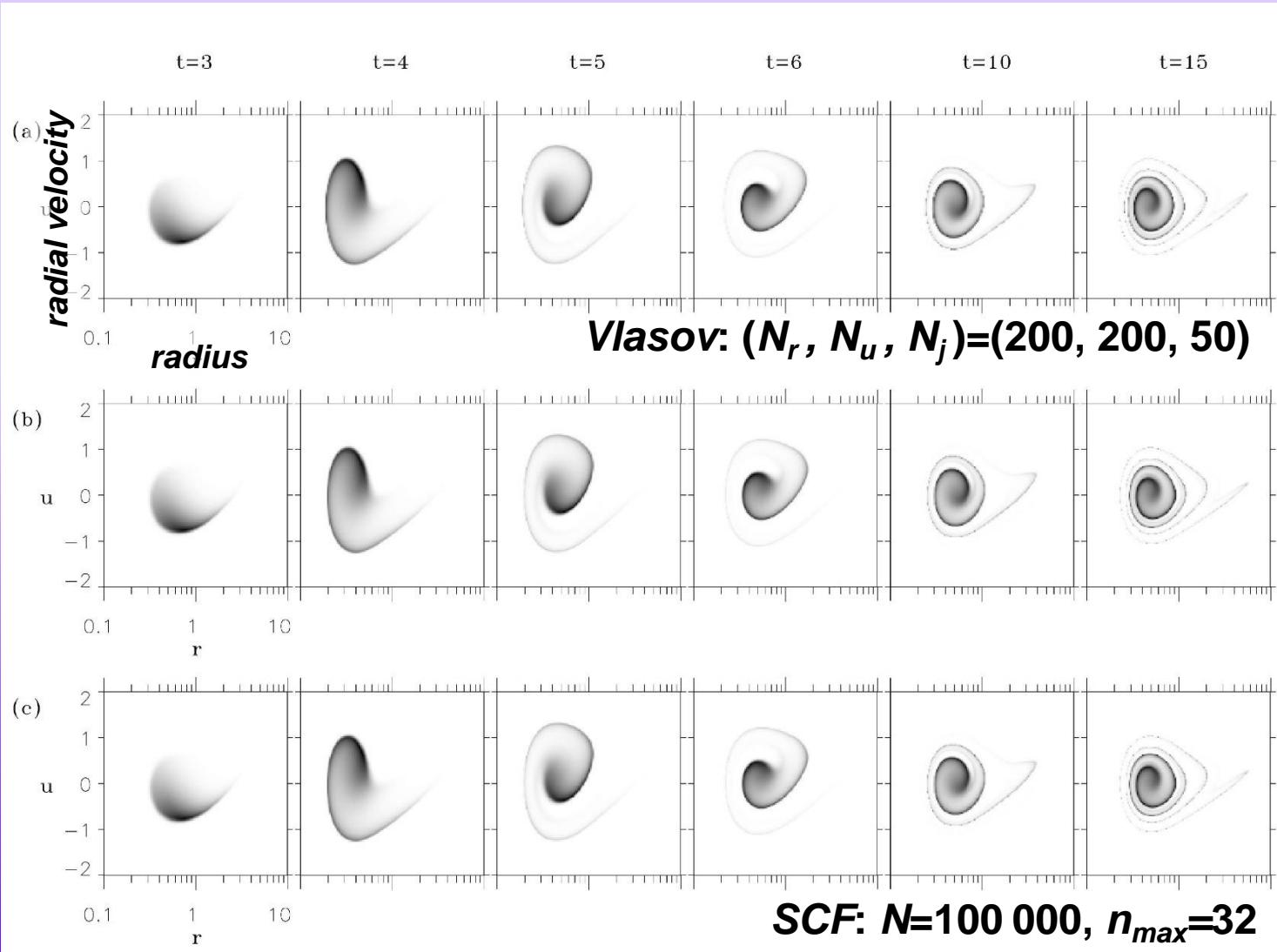
*Vlasov  
simulation*

*SCF method with  
Clutton-Brock's  
basis set*

*SCF method  
with Hernquist  
and Ostriker's  
basis set*

# 一様密度球のコラプスの位相空間での進化

*Spherical Symmetry : Evolution of  $f(r, u, j, t)$  at  $j=0.329$  for  $|2T/W|=1/2$*



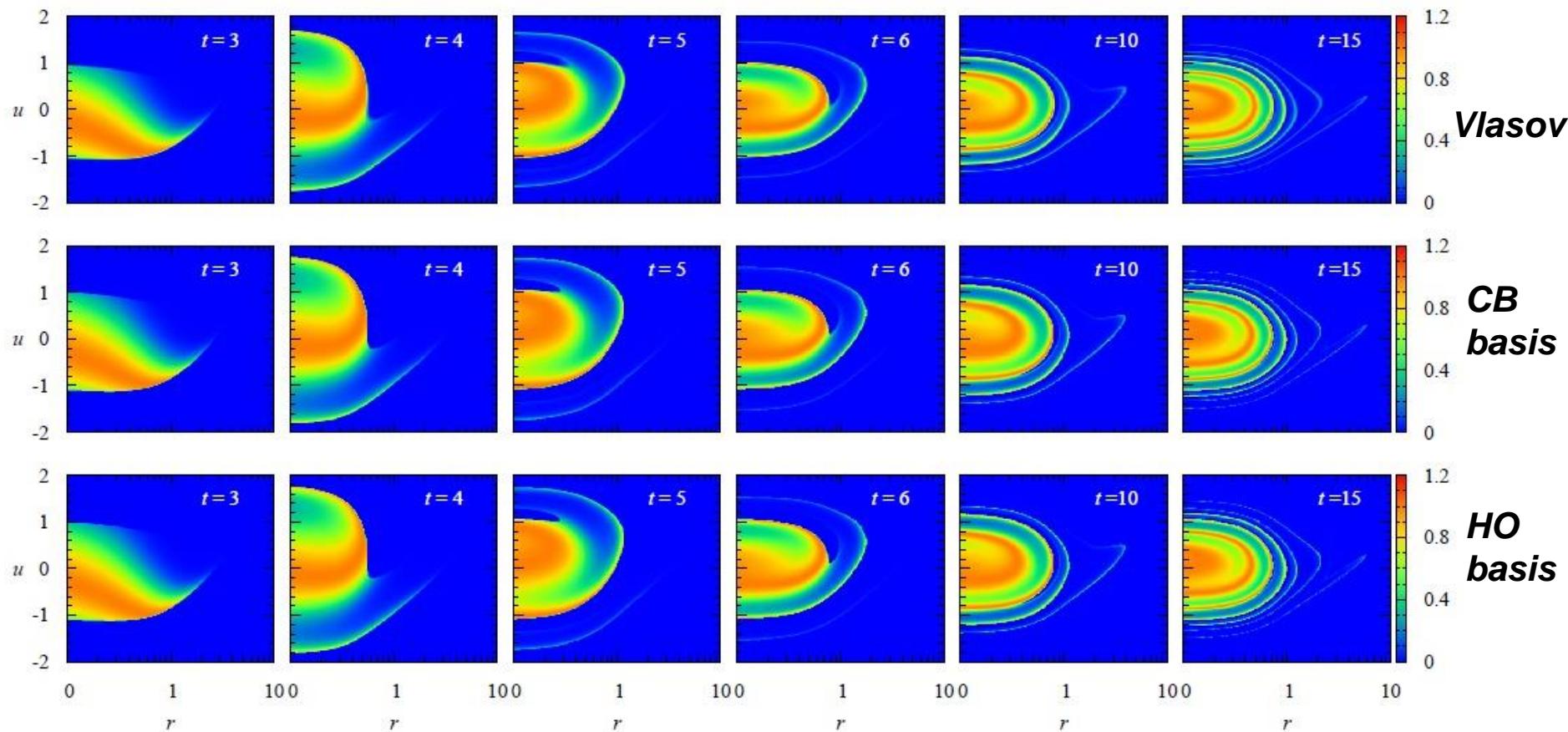
**Vlasov  
simulation**

**SCF method with  
Clutton-Brock's  
basis set**

**SCF method  
with Hernquist  
and Ostriker's  
basis set**

# 一様密度球のコラプスの位相空間での進化

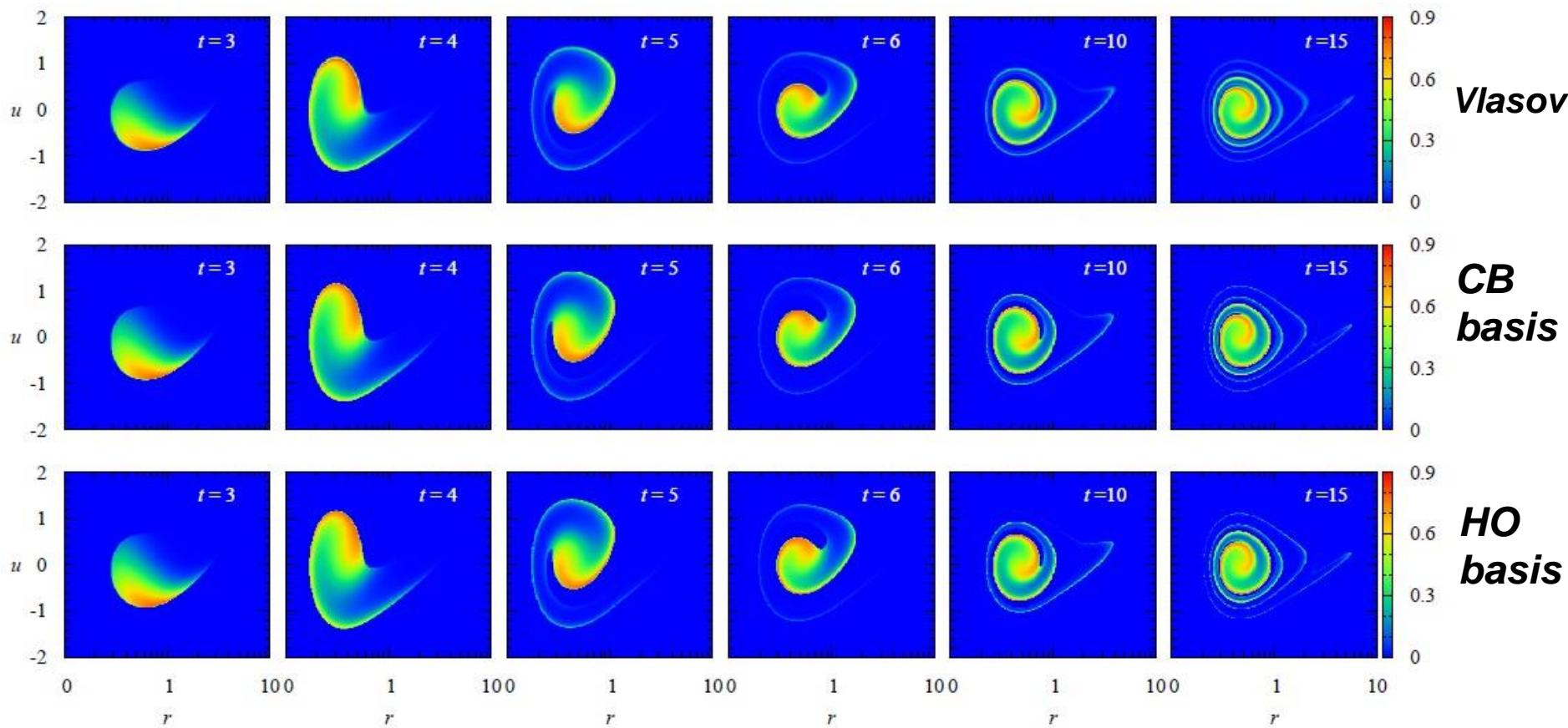
*Spherical Symmetry : Evolution of  $f(r, u, j, t)$  at  $j=0.0015$  for  $|2T/W|=1/2$*



**Vlasov:**  $(N_r, N_u, N_j) = (400, 401, 50)$ , **SCF:**  $N = 10\,000\,000, n_{max} = 64$

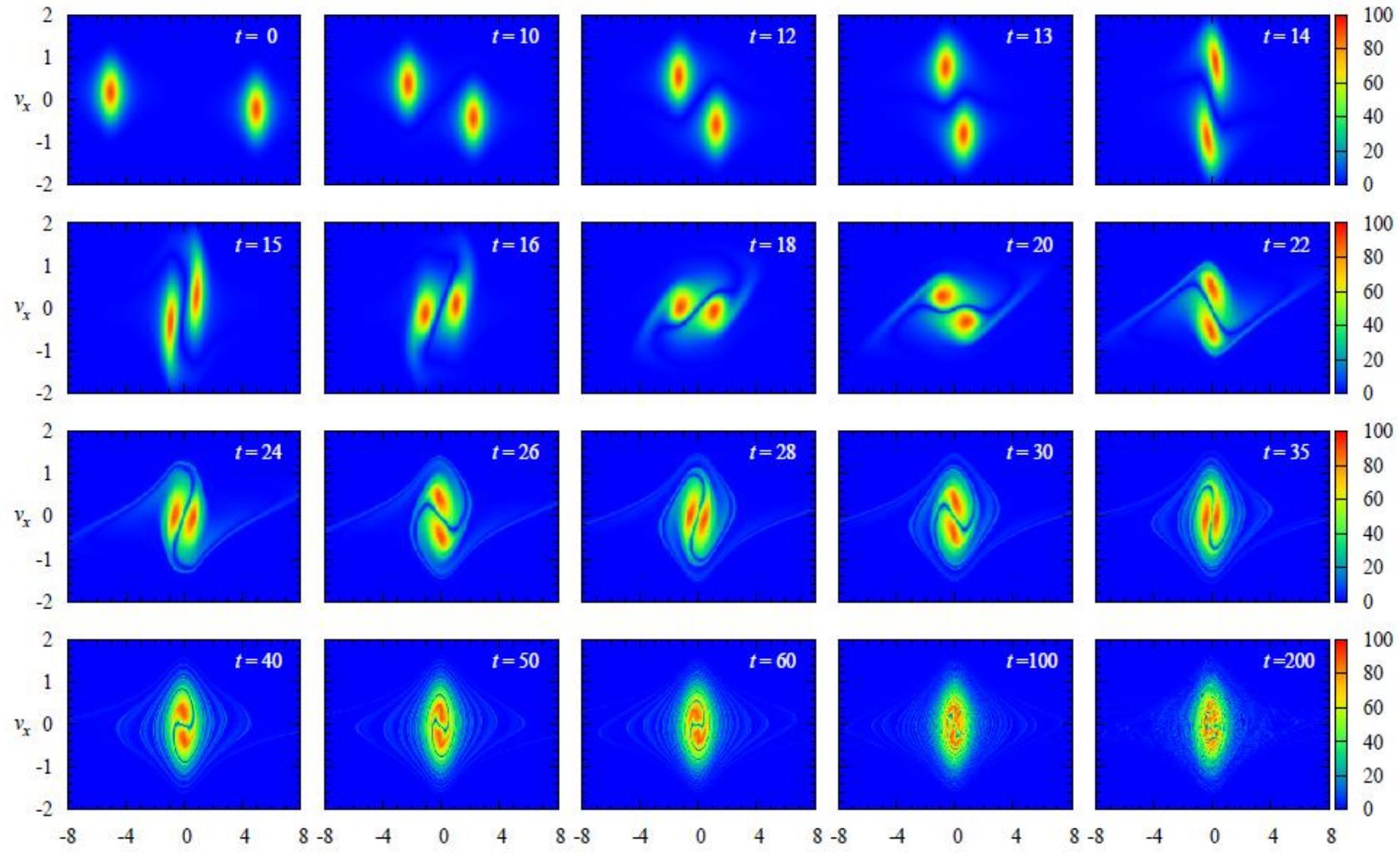
# 一様密度球のコラプスの位相空間での進化

*Spherical Symmetry : Evolution of  $f(r, u, j, t)$  at  $j=0.3$  for  $|2T/W|=1/2$*



**Vlasov:**  $(N_r, N_u, N_j) = (400, 401, 50)$ , **SCF:**  $N=10\ 000\ 000$ ,  $n_{max}=64$

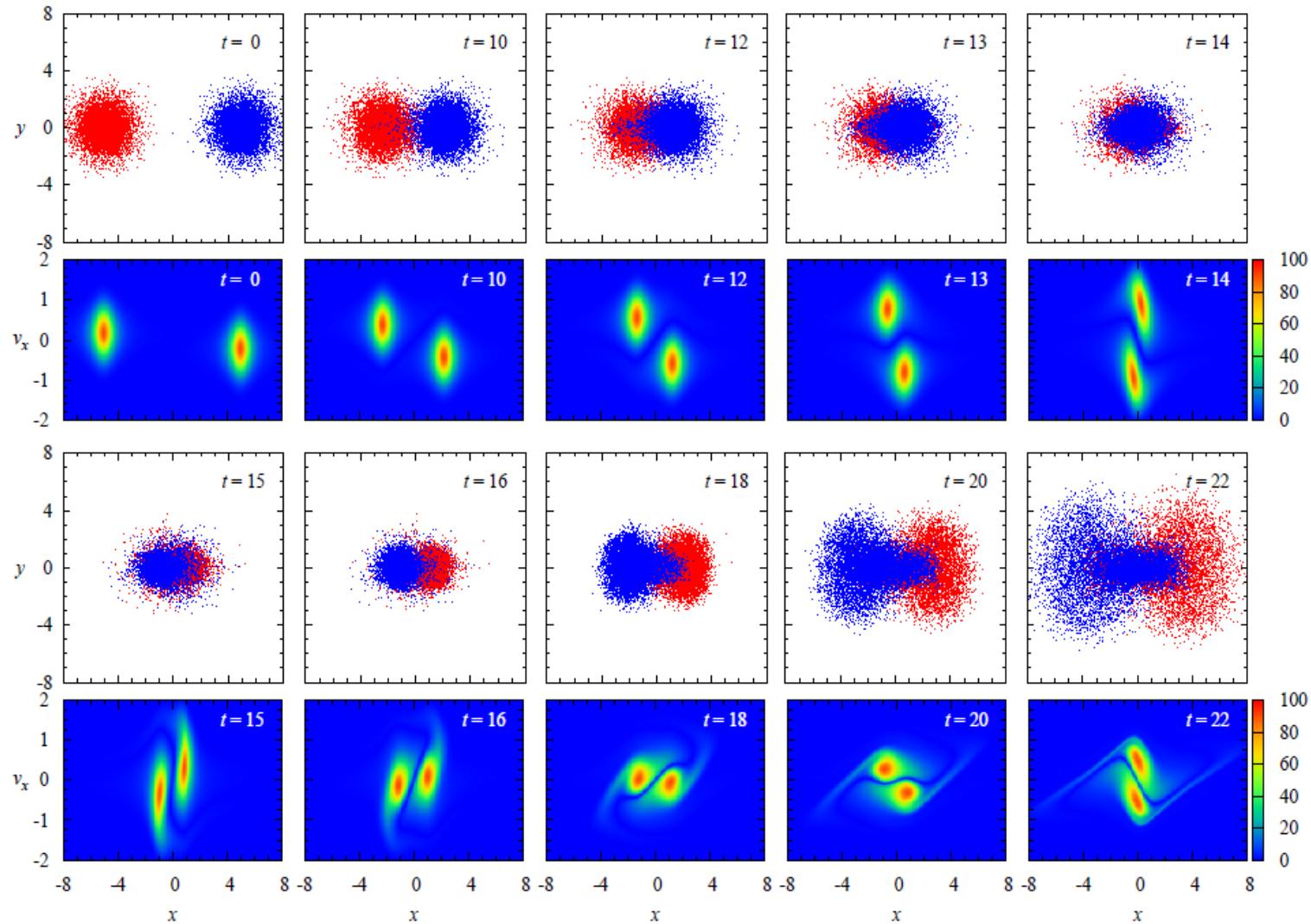
# 正面衝突の位相空間での時間進化



**SCF:  $N=10\,000\,584/\text{galaxy}$ ,  $n_{\max}=16$ ,  $I_{\max}=m_{\max}=10$**

$y=z=0$ ,  $v_y=v_z=0$

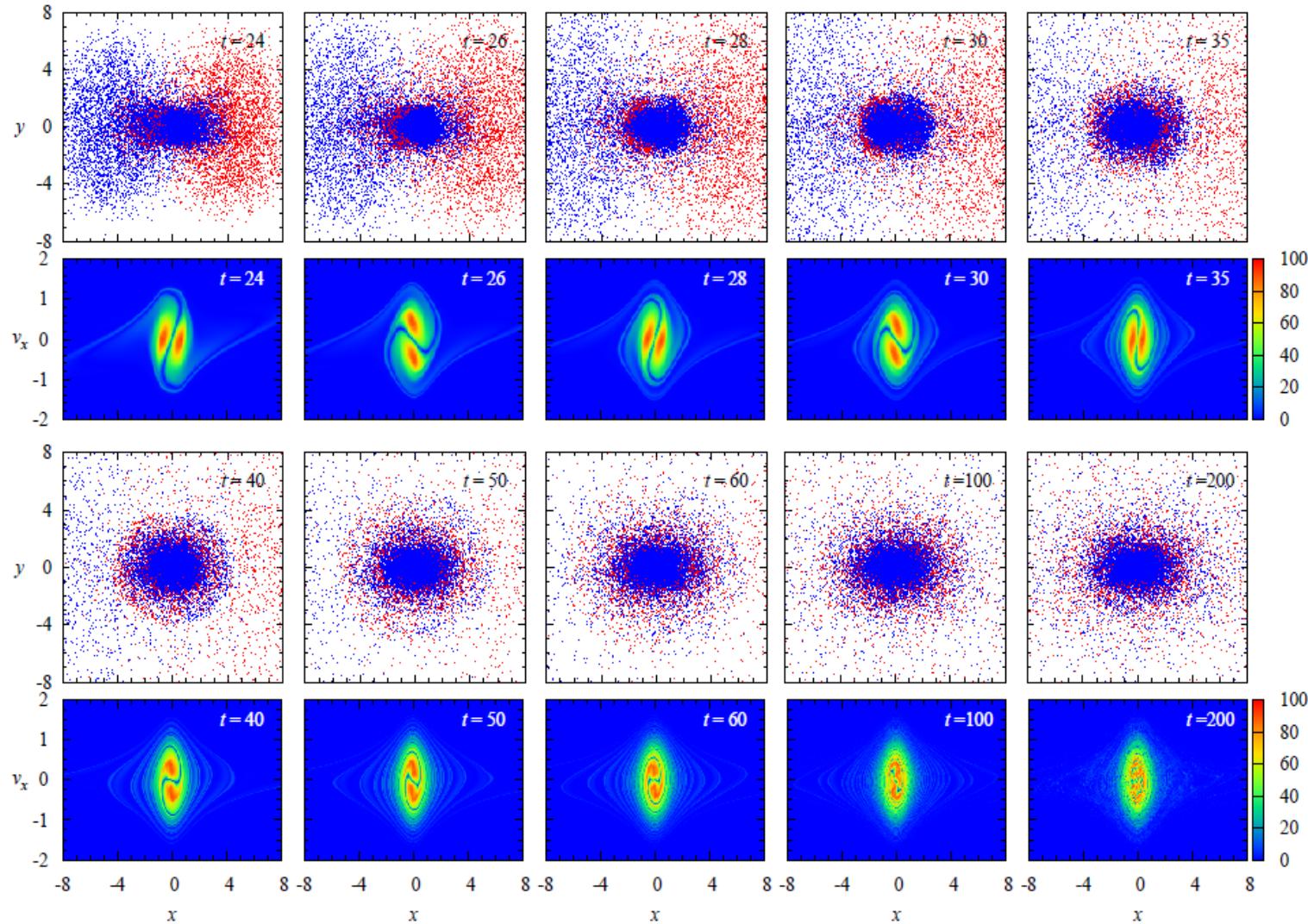
# 配置空間と位相空間の対応



$$y = z = 0, \\ v_y = v_z = 0$$

$$y = z = 0, \\ v_y = v_z = 0$$

# 配置空間と位相空間の対応



$y = z = 0,$   
 $v_y = v_z = 0$

# SCF法が有効な力学問題

- 中心に大質量BHをもつ銀河どうしの合体
- 中心の大質量BHによる棒渦状銀河のバーの減衰と破壊
- 円盤銀河のリアルサイズシミュレーション
  - 円盤:  $10^{11}$ 個, ハロー:> $5 \times 10^{11}$ 個(, +バルジ)
    - ➡ 太陽近傍におけるバーの痕跡探し
    - ➡ Gaiaデータとの比較
  - 恒星系の時間進化を外場とした自己重力ガス系
- 位相空間で探る *radial-orbit instability* のメカニズム