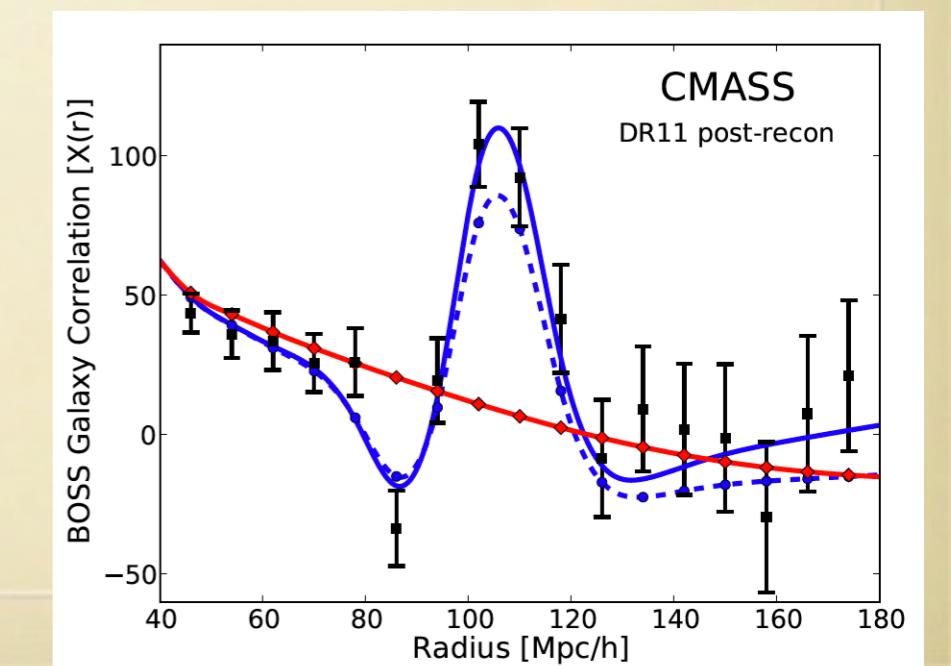
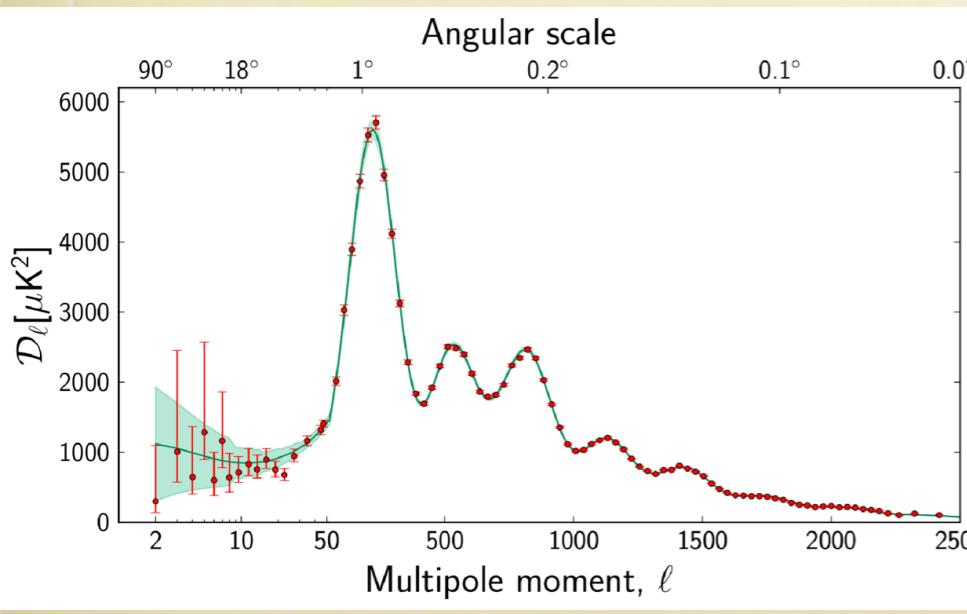
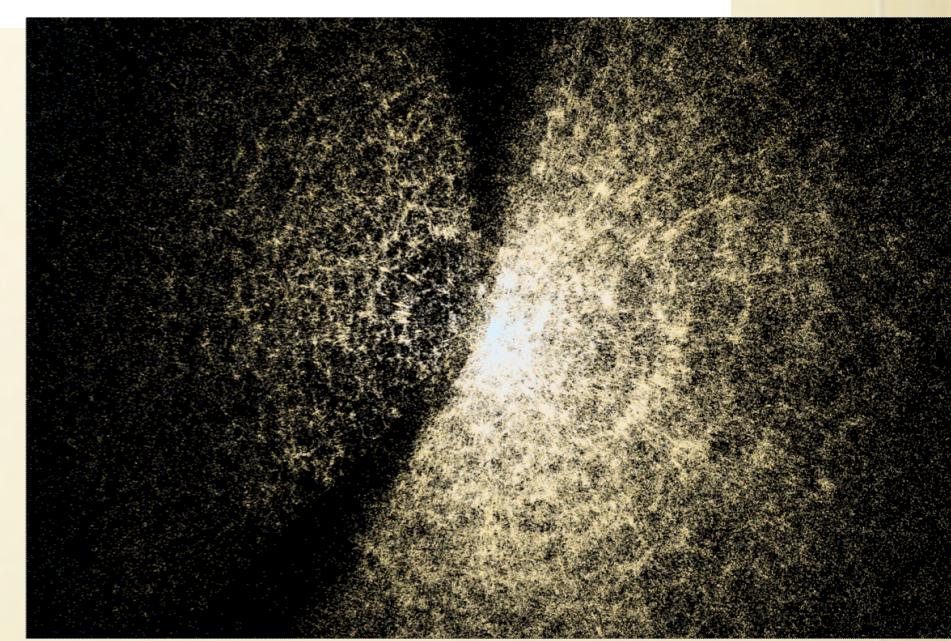
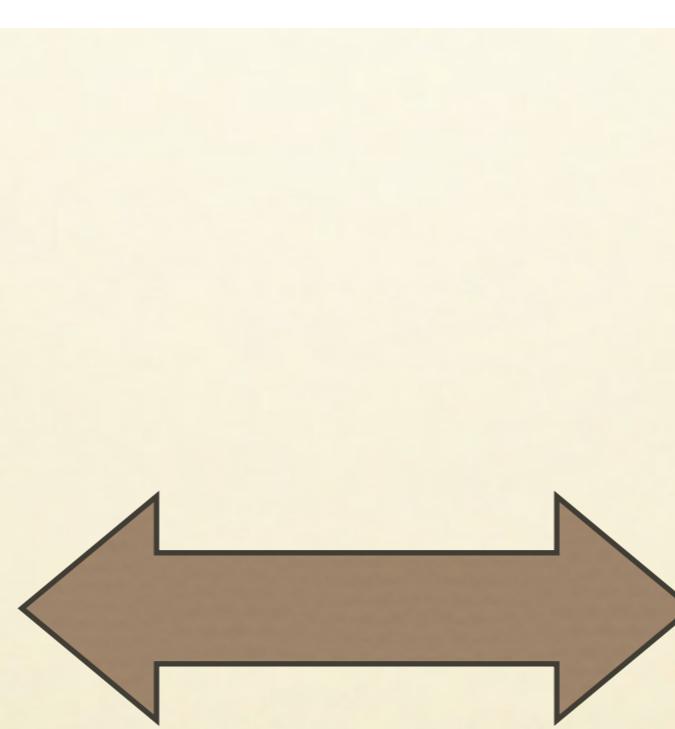
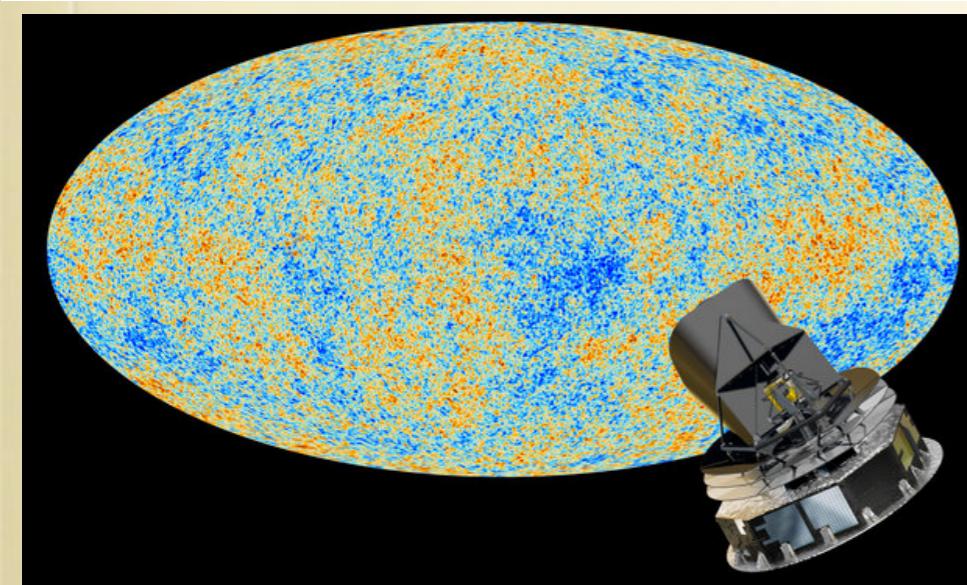
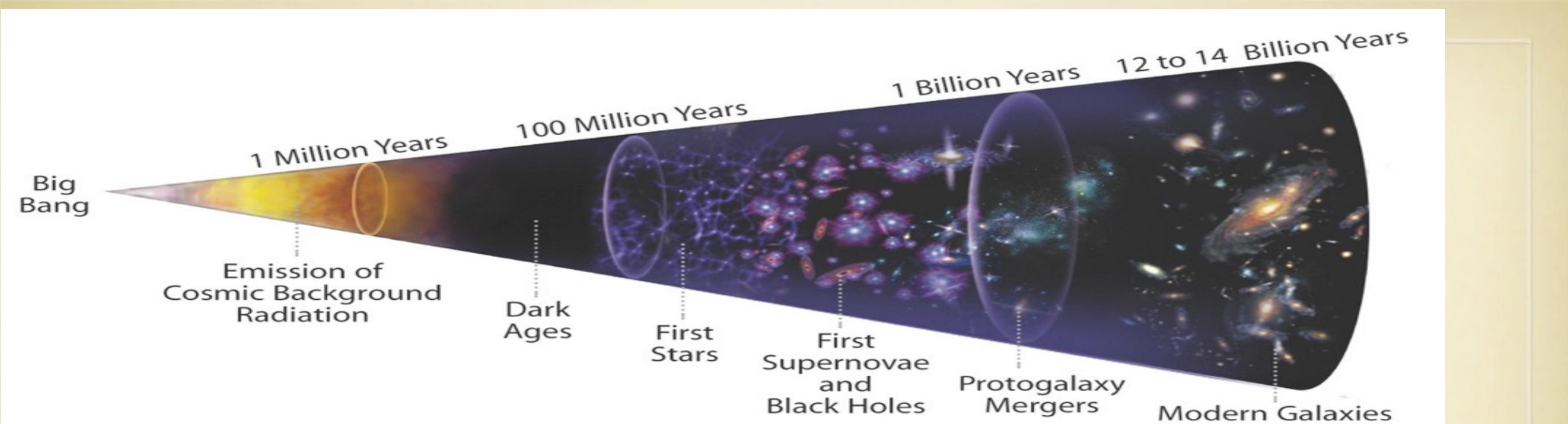


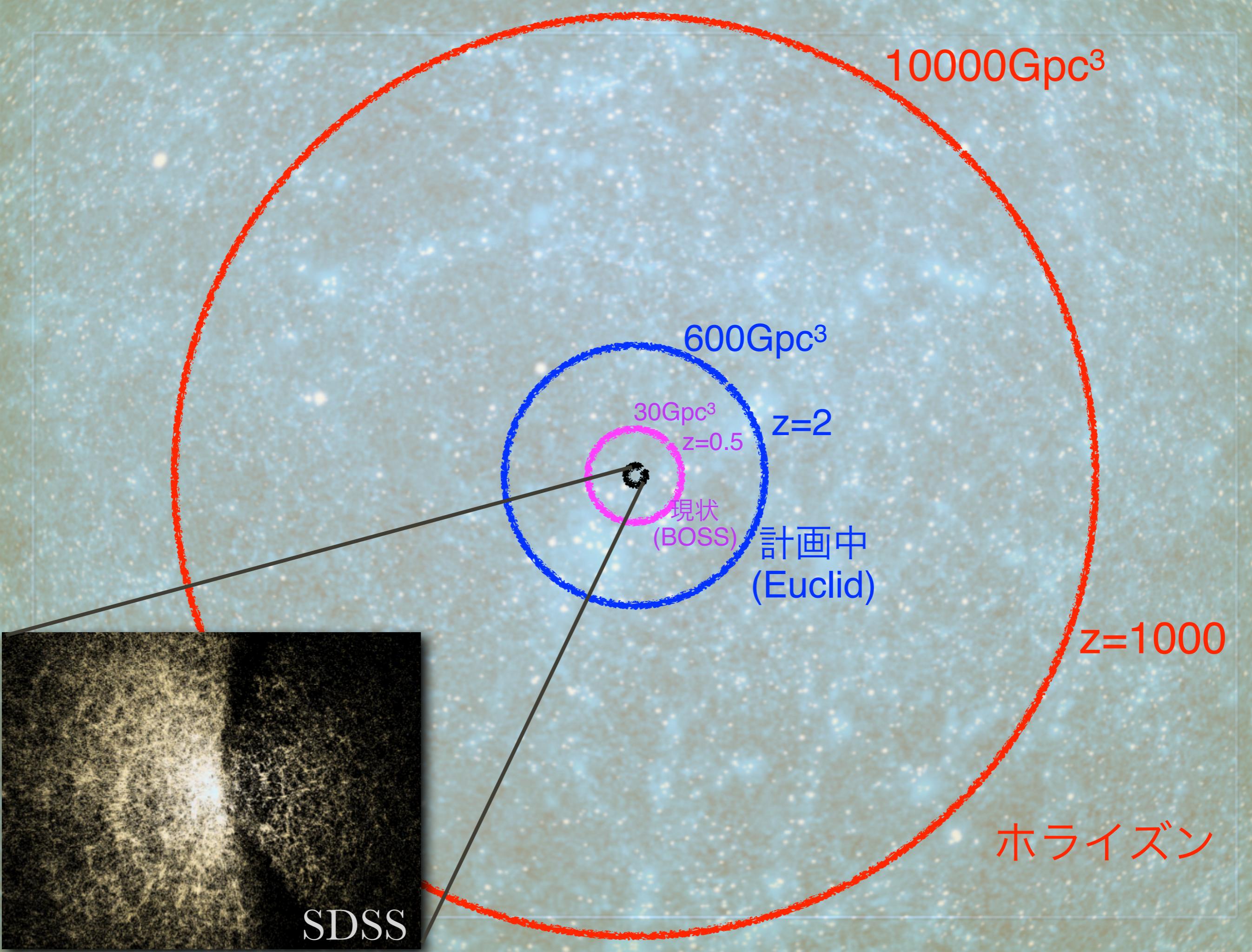
大規模構造の統合撮動論 とバイアス問題

松原隆彦

セミナー@筑波大学

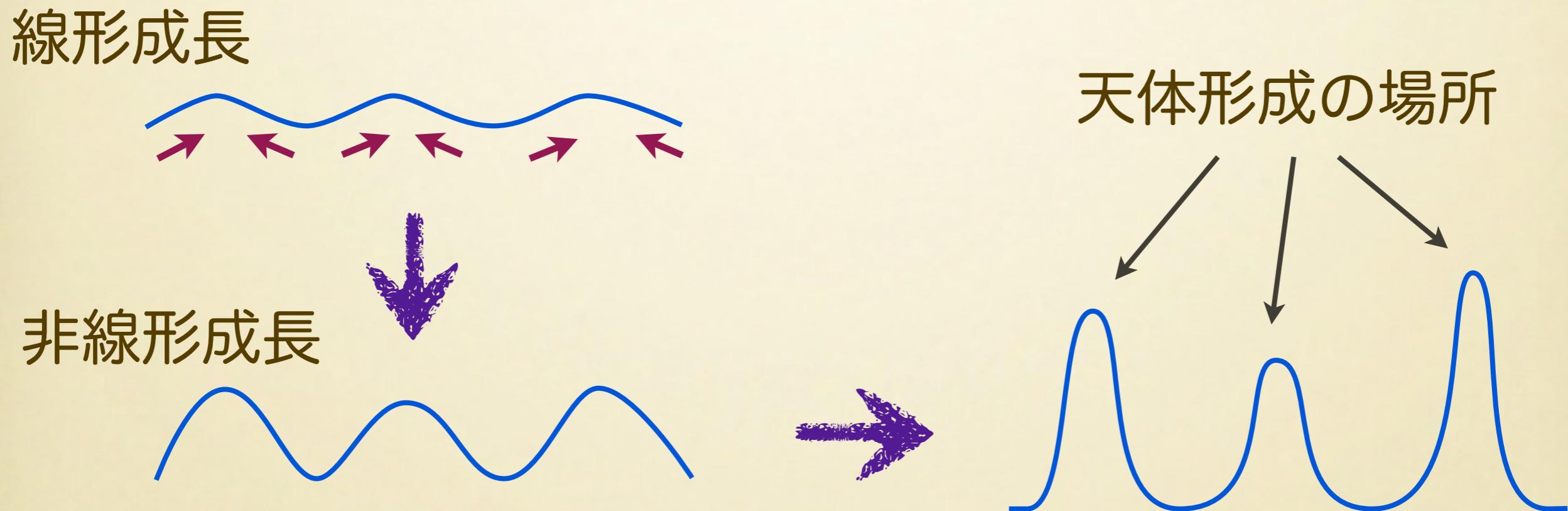
2018/10/10





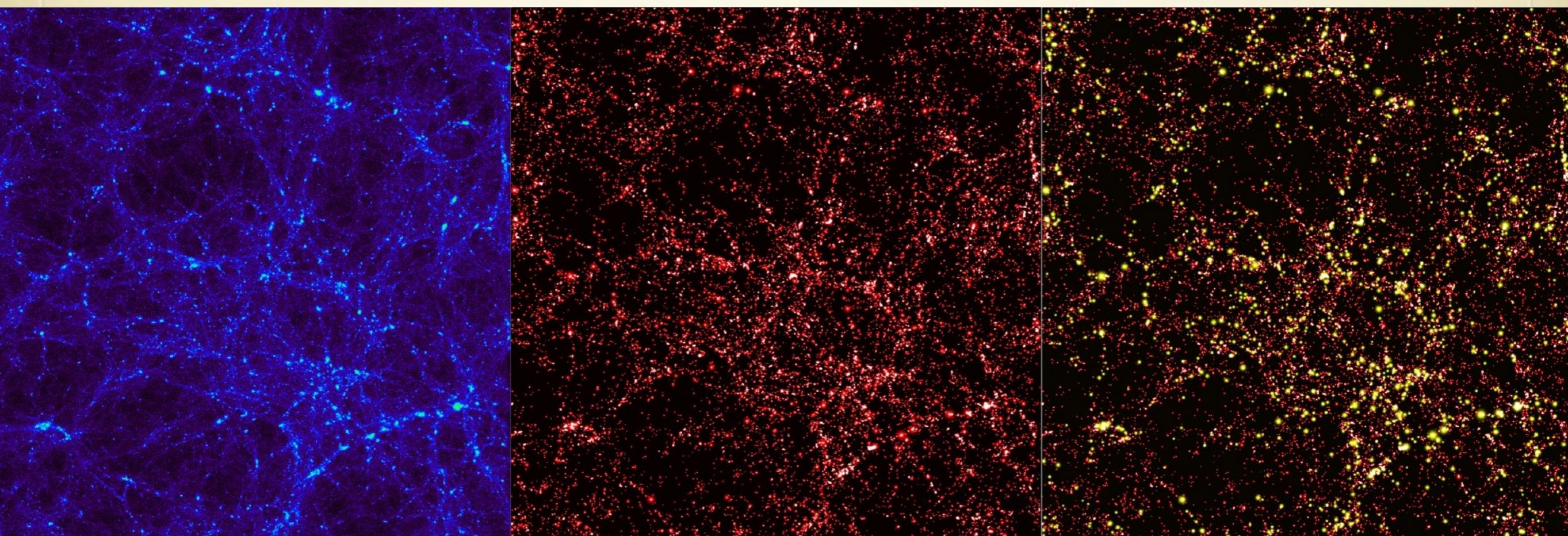
大規模構造の形成

- ・ゆらぎの線形成長と非線形成長、天体形成



精密宇宙論には精密な理論が必要

- ・ 非線形成長
 - ・ 精密宇宙論では、大スケールにも影響する
- ・ 赤方偏移変形
 - ・ 銀河の特異速度は赤方偏移空間の位置を視線方向へ移動
- ・ バイアス
 - ・ 銀河の数密度は質量密度とは異なる



天体バイアスの問題

- ・天体バイアスは一般に複雑な非線形問題であり、第一原理から完全に求めることは不可能
- ・かといって、宇宙論的情報をすべて覆い隠してしまうわけではない
- ・求めたい宇宙論的情報に対して、バイアスの不定性がどのように影響するのかを定量的に明らかにする必要

局所オイラーバイアス

- これまで非線形領域を表すとして使われてきた単純なバイアスのモデル：局所非線形バイアス
- 仮定：天体密度は（スムージングされた）質量密度の値から局所的な関数として決まる

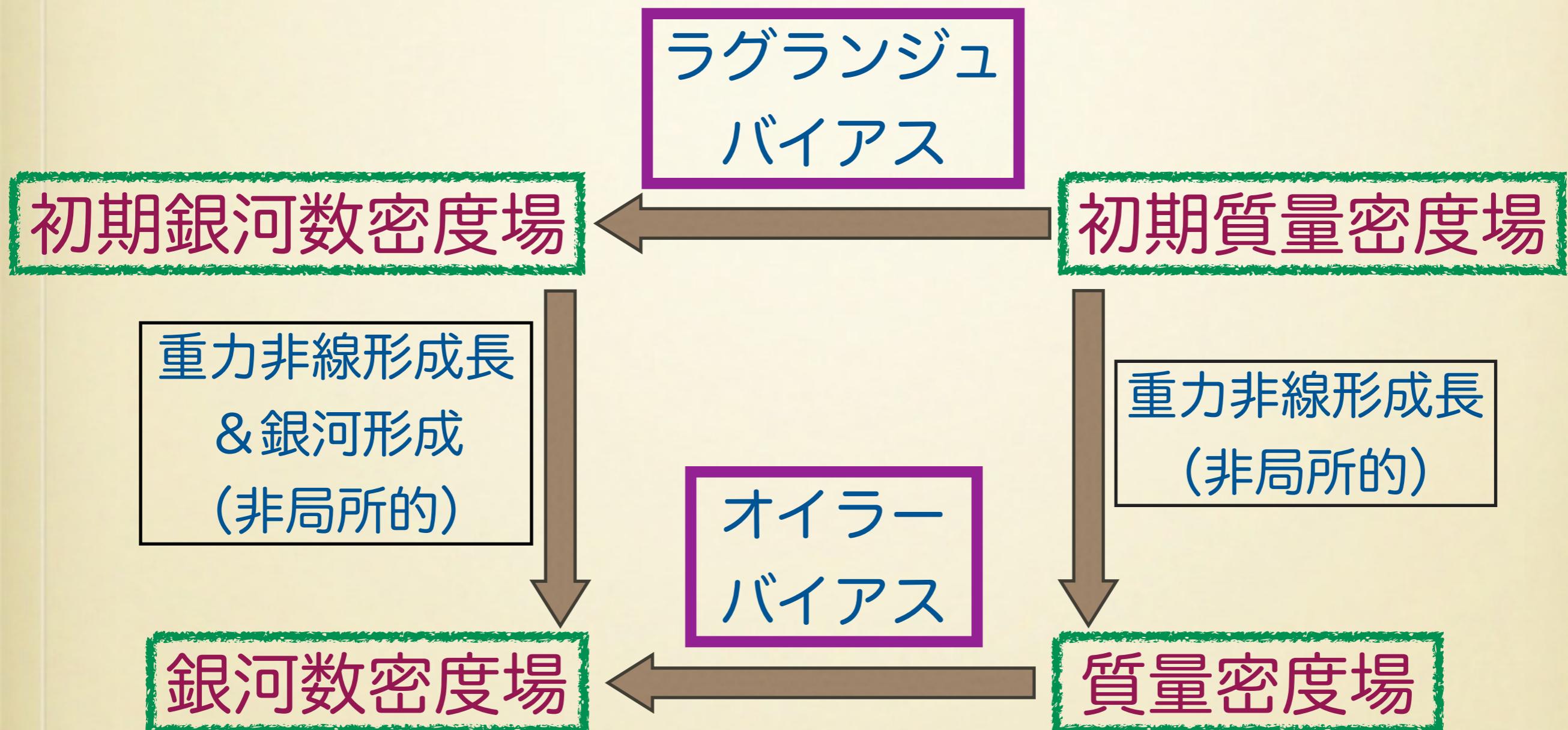
$$\delta_X(\mathbf{x}) = F_X(\delta_m(\mathbf{x}))$$

- 摂動解析のためにテイラー展開

$$\delta_X(\mathbf{x}) = b_0 + b_1 \delta_m(\mathbf{x}) + \frac{b_2}{2!} \delta_m^2(\mathbf{x}) + \dots$$

- 現象論的なモデル、線形バイアスの単純な拡張
- 非線形の高次で発散を導くという欠点（発散を「繰り込み」対処をする方法もあるが、高次の次数ごとに新しいパラメータが必要で、本質的な解決になってない？）

オイラーバイアスとラグランジュバイアス



非局所バイアスの枠組みでは、オイラーバイアスとラグランジュバイアスは表現が異なるのみ

Eulerian vs Lagrangian picture

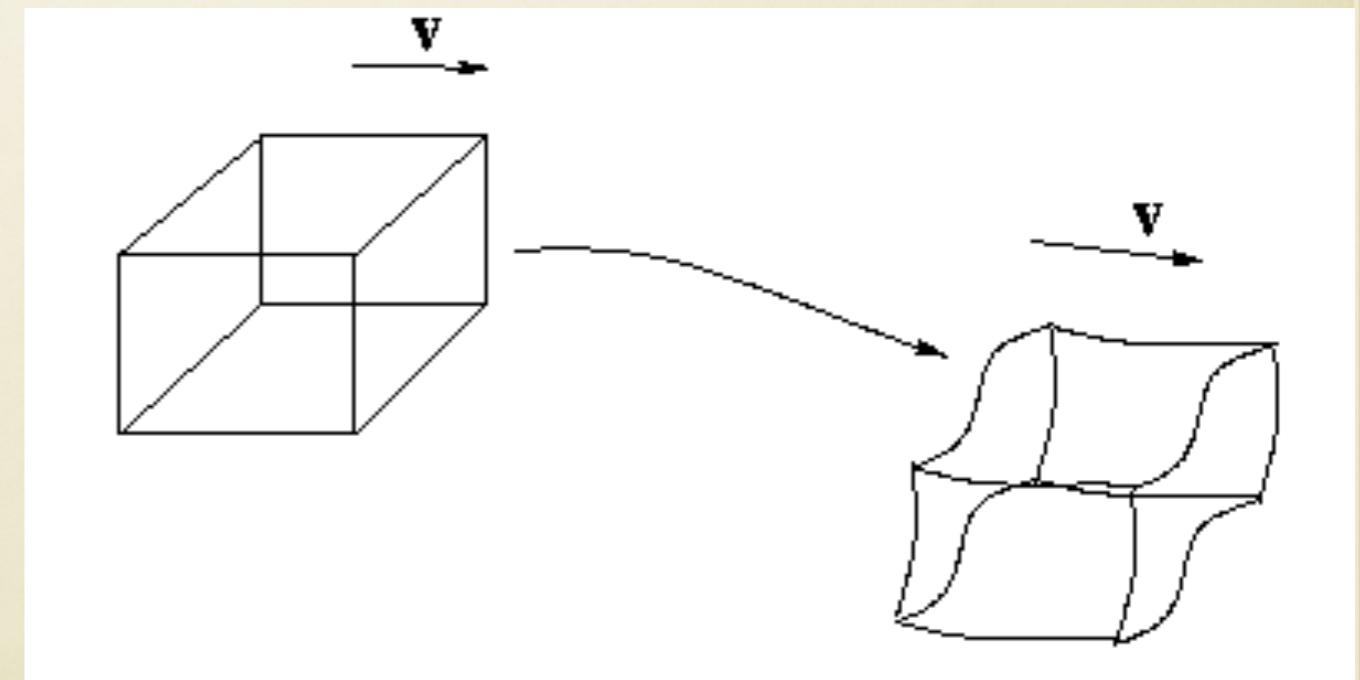
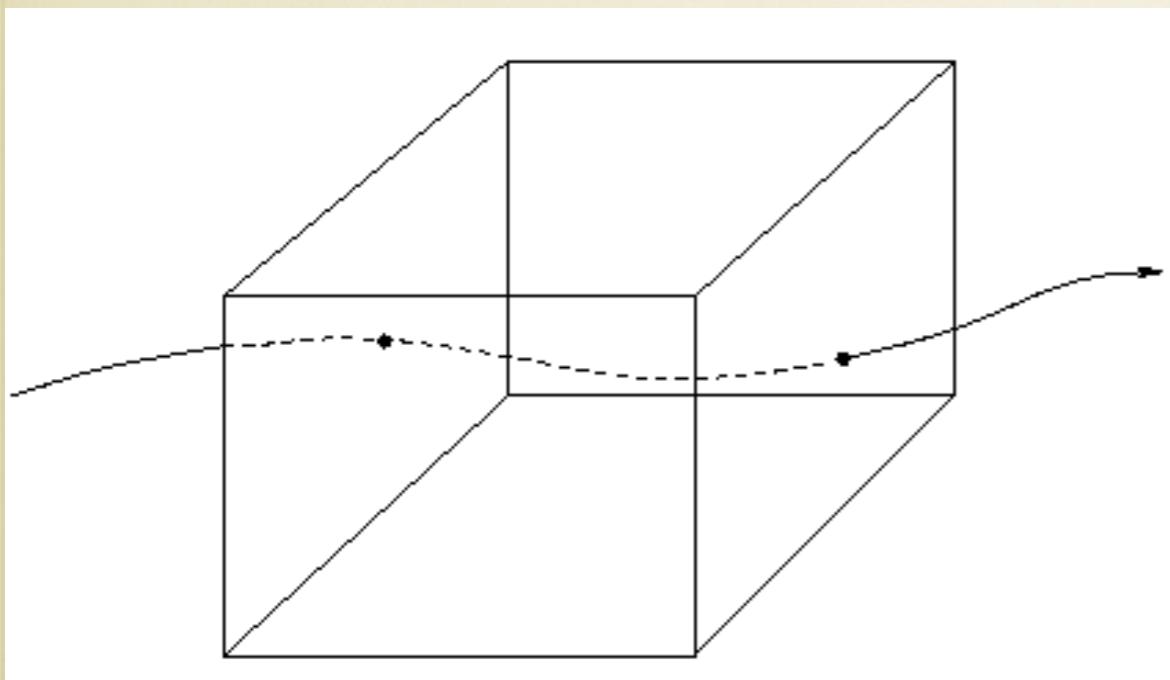
- Eulerian

- density and velocity fields on a fixed space



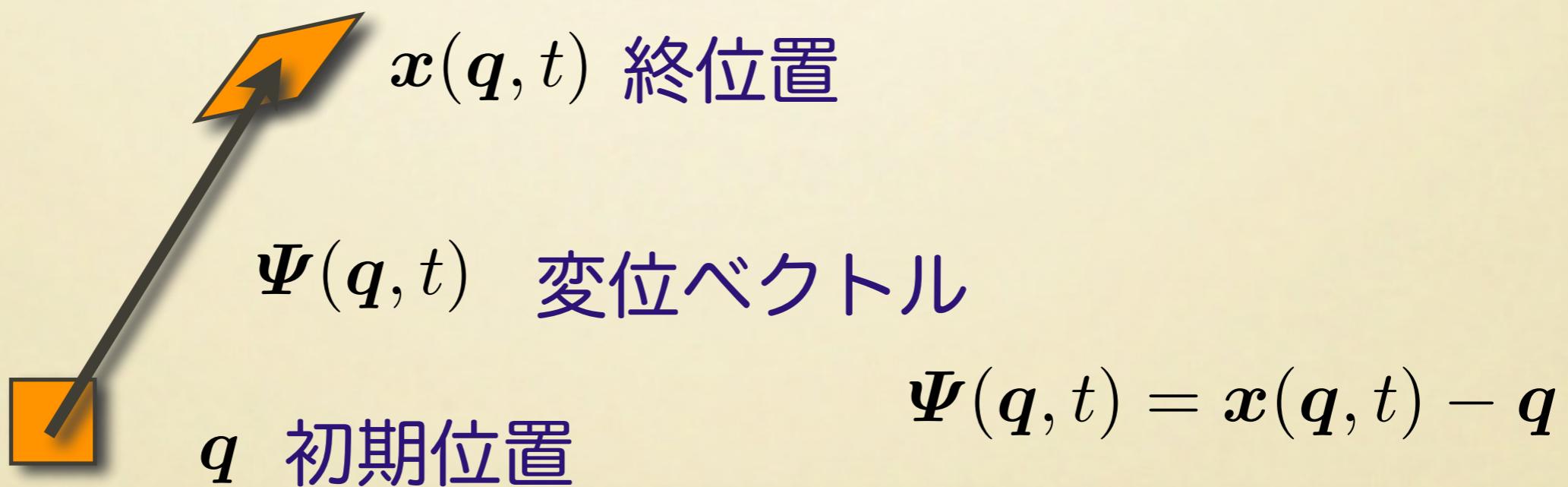
- Lagrangian

- follows a trajectory of a fluid element



ラグランジュ摂動論

- ラグランジュバイアスを扱うため、ラグランジュ摂動論を適用する
- ラグランジュ描像における基本変数：
 - ある物質素片が初期位置からどれだけ移動したかを表すベクトル： **Displacement field** Buchert (1989)



ラグランジュ摂動論の再帰的解法

TM (2015)

$$\ddot{x} + 2H\dot{x} = -\frac{1}{a^2}\nabla_x\phi(x, t),$$

$$\Delta_x\phi(x, t) = 4\pi G\bar{\rho}a^2\delta(x, t),$$

$$\hat{\mathcal{T}} \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2H\frac{\partial}{\partial t},$$



$$x(q, t) = q + \Psi(q, t).$$

$$\nabla \cdot \Psi = D_+(t)A_+ + D_-(t)A_- - (\hat{\mathcal{T}} - 4\pi G\bar{\rho})^{-1} \left[\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ipq}\Psi_{j,p}(\hat{\mathcal{T}} - 2\pi G\bar{\rho})\Psi_{k,q} + \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}\Psi_{i,p}\Psi_{j,q}\left(\hat{\mathcal{T}} - \frac{4\pi G}{3}\bar{\rho}\right)\Psi_{k,r} \right],$$

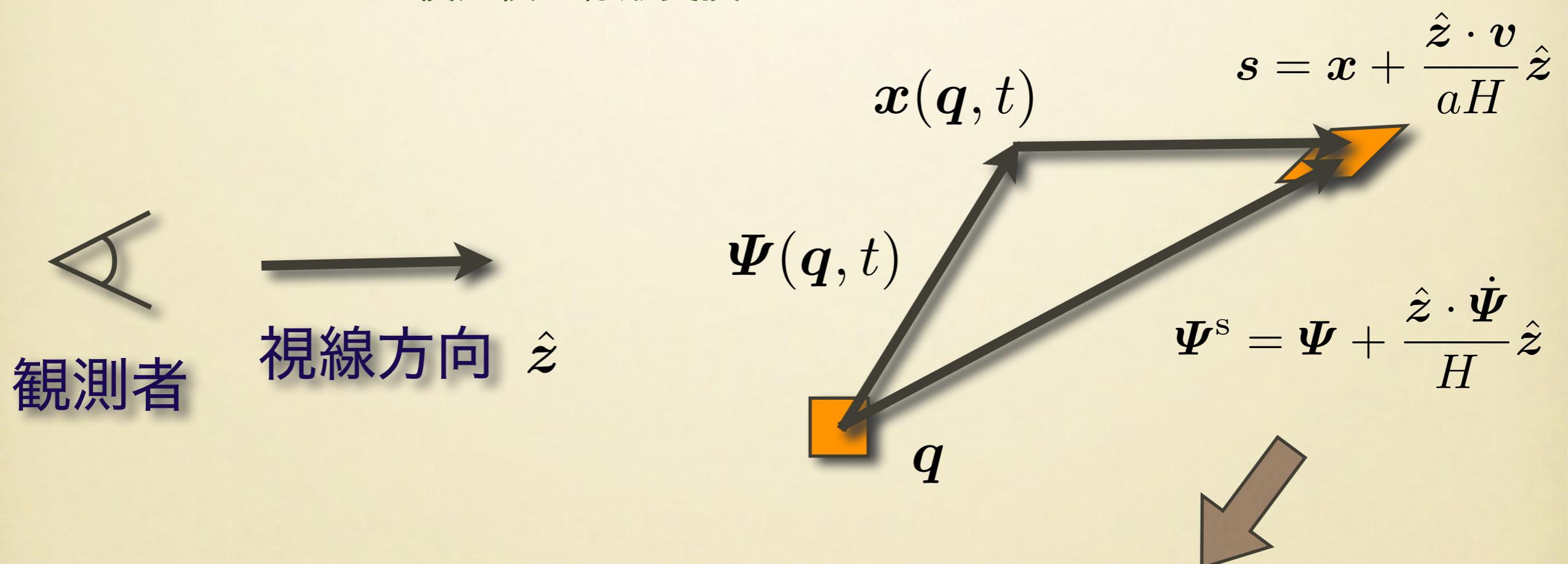
$$\nabla \times \Psi = \mathbf{B}_0 + E_-(t)\mathbf{B}_- + \hat{\mathcal{T}}^{-1}(\nabla\Psi_i \times \hat{\mathcal{T}}\nabla\Psi_i),$$

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi^{(n)} = \Psi^{(1)} + \Psi^{(2)} + \Psi^{(3)} + \dots,$$

$$\Psi = \Delta^{-1} [\nabla(\nabla \cdot \Psi) - \nabla \times (\nabla \times \Psi)],$$

赤方偏移空間

- ・ ラグランジュ摂動論：赤方偏移空間への拡張が容易
 - ・ ラグランジュ変数では、実空間から赤方偏移空間への写像が厳密に線形
c.f.) オイラー変数では非線形写像
 - ・ ラグランジュ積分核を線形変換したものにするだけで**OK**



$$\Psi^{s(n)} = \Psi^{(n)} + \frac{\dot{\hat{z}} \cdot \dot{\Psi}^{(n)}}{H} \hat{z} \simeq \Psi^{(n)} + n f(\hat{z} \cdot \Psi^{(n)}) \hat{z}$$

iPT

- 統合擾動論
- integrated Perturbation Theory

統合摂動論 (iPT) 要約

- オイラー空間の密度ゆらぎ（観測量）とラグランジュ変数の関係

$$1 + \delta_X(x) = \int d^3q [1 + \delta_X^L(q)] \delta_D^3[x - q - \Psi(q)]$$

オイラー空間
密度ゆらぎ

ラグランジュ空間
バイアス

変位ベクトル
(& 赤方偏移変形)

- フーリエ空間における摂動展開

$$\delta_X^L(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \cdots \frac{d^3k_n}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta_D^3(k_{1\dots n} - k) b_n^L(k_1, \dots, k_n) \delta_L(k_1) \cdots \delta_L(k_n)$$

$$\tilde{\Psi}(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n!} \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \cdots \frac{d^3k_n}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta_D^3(k_{1\dots n} - k) L_n(k_1, \dots, k_n) \delta_L(k_1) \cdots \delta_L(k_n)$$

$$k_{1\dots n} \equiv k_1 + \cdots + k_n$$

ラグランジュ・バイアスの積分核

変位ベクトル (& 赤方偏移変形) の積分核

図形的方法

初期スペクトル

力学的進化とバイアス
+ resummation

Propagators

$$\begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{\otimes} \text{---} \\ k \qquad -k \end{array} \Leftrightarrow P_L(k)$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{\otimes} \text{---} \\ k_1 \qquad k_n \end{array} \Leftrightarrow P_L^{(n)}(k_1, k_2, \dots, k_n)$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{\otimes} \text{---} \\ k_1 \qquad k_n \end{array} \Leftrightarrow \Pi(\mathbf{k}) c_X^{(n)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) k_{i_1} \cdots k_{i_m}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{\otimes} \text{---} \\ k_1 \qquad k_2 \end{array} \Leftrightarrow L_i^{(n)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n)$$

$$\begin{array}{l} \text{---} = \text{---} + \text{---} + \text{---} \\ + \text{---} + \text{---} + \text{---} \\ + \text{---} + \text{---} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{---} = \text{---} + \text{---} + \text{---} \\ + \text{---} + \text{---} \end{array}$$

$$P(k) = \text{---} \xrightarrow{\otimes} \text{---} + \text{---} \xrightarrow{\otimes} \text{---}$$

$$+ \text{---} \xrightarrow{\otimes} \text{---} + \text{---} \xrightarrow{\otimes} \text{---}$$

RSD and nG included

くり込まれたバイアス関数

- ・ くり込まれたバイアス関数 (TM 2011)
 - ・ Renormalized bias functions $c_n(\cdots)$
 - ・ 非局所バイアスを特徴づける重要な関数群

$$\left\langle \frac{\delta^n \delta_X^L(k)}{\delta \delta_L(k_1) \cdots \delta \delta_L(k_n)} \right\rangle = (2\pi)^{3-3n} \delta_D^3(\mathbf{k}_{1 \dots n} - \mathbf{k}) c_n^L(k_1, \dots, k_n). \quad (4)$$

iPT approach to the bias

- Power spectrum (e.g.)

$$\begin{aligned}
 P_X(\mathbf{k}) = & \left[\Gamma_X^{(1)}(\mathbf{k}) \right]^2 P_L(k) \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{k}_{12}=\mathbf{k}} \left[\Gamma_X^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \right]^2 P_L(k_1) P_L(k_2) \\
 & + \Gamma_X^{(1)}(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{k}_{12}=\mathbf{k}} \Gamma_X^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) B_L(k, k_1, k_2),
 \end{aligned}$$

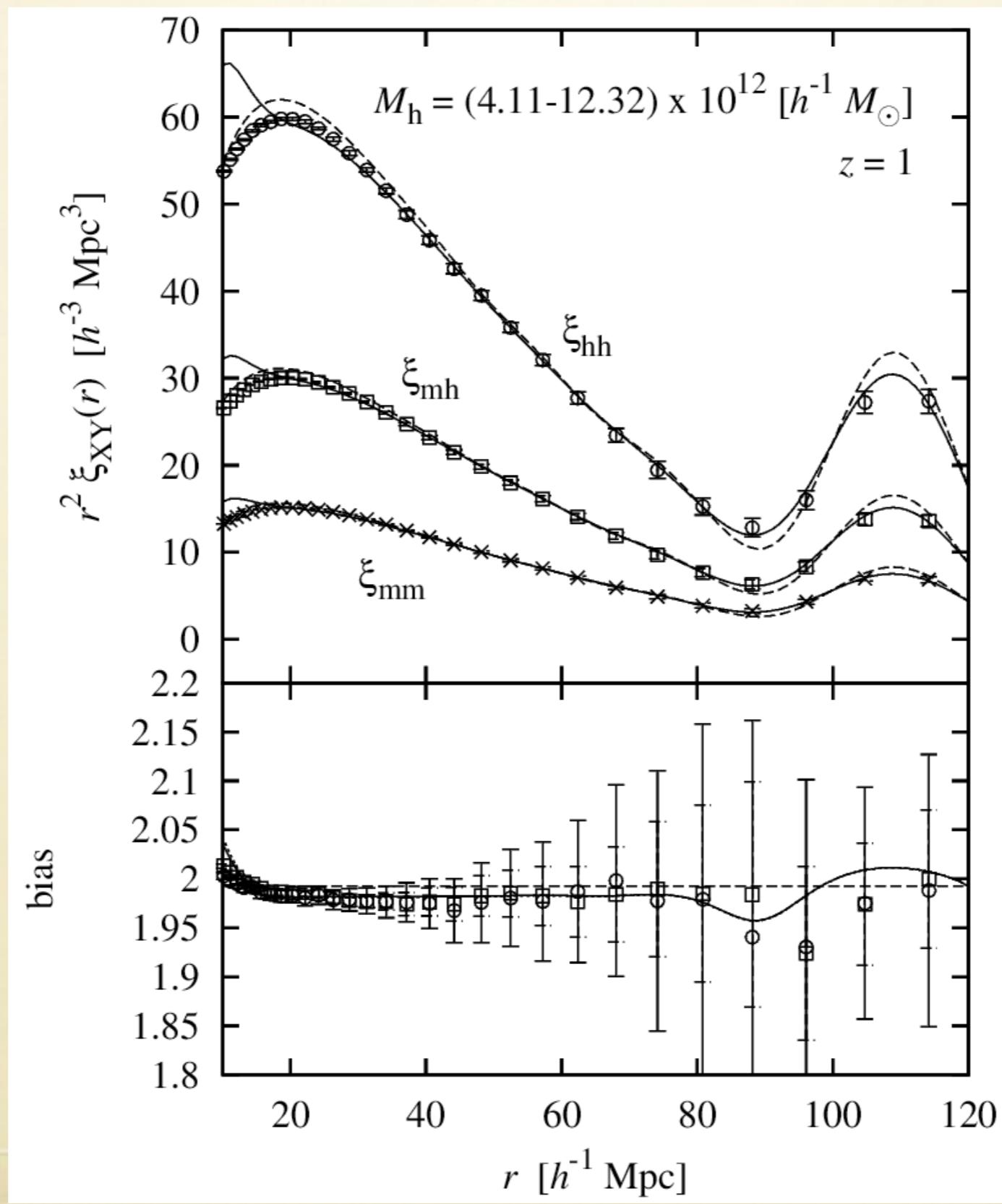
$$\begin{aligned}
 \hat{\Gamma}_X^{(1)}(\mathbf{k}) = & c_X^{(1)}(\mathbf{k}) + \mathbf{k} \cdot \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{k}) \\
 & + \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} P_L(p) \left\{ c_X^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) [\mathbf{k} \cdot \mathbf{L}^{(1)}(-\mathbf{p})] \right. \\
 & + c_X^{(1)}(\mathbf{p}) [\mathbf{k} \cdot \mathbf{L}^{(1)}(-\mathbf{p})] [\mathbf{k} \cdot \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{k})] \\
 & + \frac{1}{2} \mathbf{k} \cdot \mathbf{L}^{(3)}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, -\mathbf{p}) \\
 & + c_X^{(1)}(\mathbf{p}) [\mathbf{k} \cdot \mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{k}, -\mathbf{p})] \\
 & \left. + [\mathbf{k} \cdot \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{p})] [\mathbf{k} \cdot \mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{k}, -\mathbf{p})] \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\Gamma}_X^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = & c_X^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) + c_X^{(1)}(\mathbf{k}_1) [\mathbf{k} \cdot \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{k}_2)] \\
 & + c_X^{(1)}(\mathbf{k}_2) [\mathbf{k} \cdot \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{k}_1)] + [\mathbf{k} \cdot \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{k}_1)] [\mathbf{k} \cdot \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{k}_2)] \\
 & + \mathbf{k} \cdot \mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2),
 \end{aligned}$$

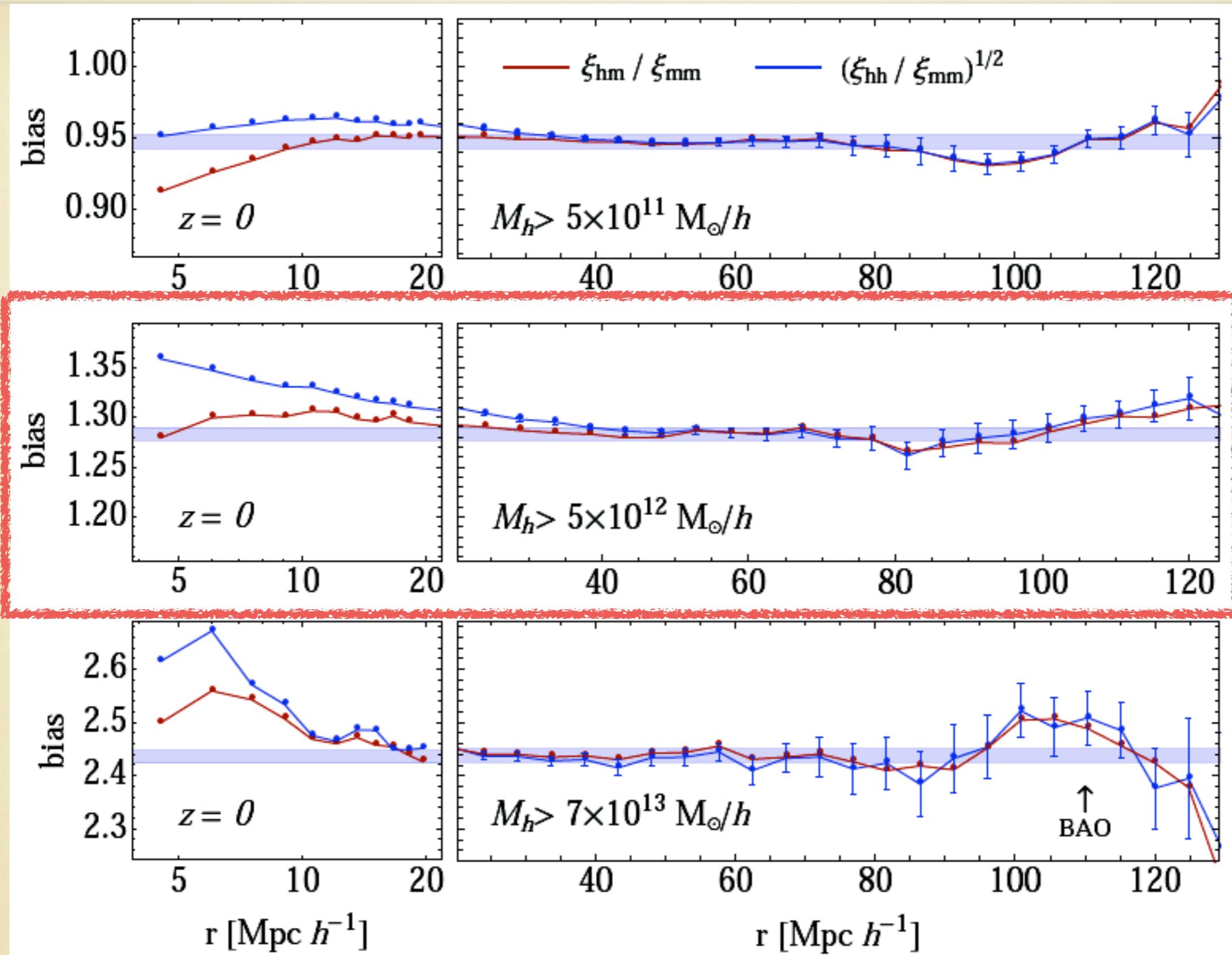
$$\Gamma_X^{(n)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = \Pi(\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_n) \hat{\Gamma}_X^{(n)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n),$$

$$\Pi(\mathbf{k}) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [\mathbf{k} \cdot \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{p})]^2 P_L(p) \right\},$$

Halo clustering: slight scale-dependence of bias around BAO



TM (2014)



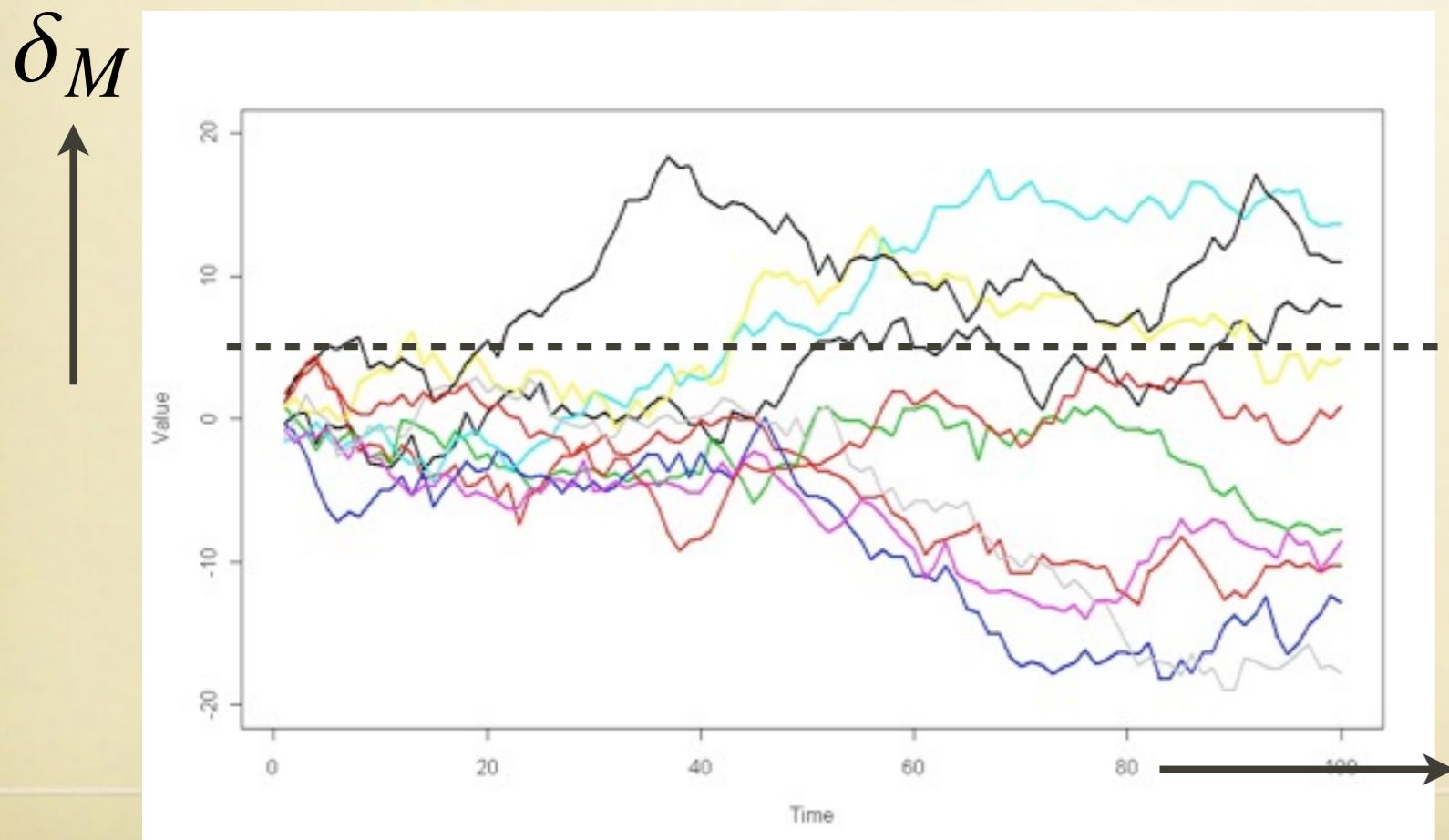
- 摂動論に基づく非線形力学進化には理論的な不定性はない（非線形領域へ外挿しなければ）
- バイアスの不定性は制御可能
 - 大スケールの振る舞いはバイアスの詳細にはよらない
 - 非線形領域へ行くほど、バイアスを正確に表すよいモデルが必要

くり込まれたバイアス関数のモデル計算 1： PS theory に基づいたハローモデル

- ・ハローモデルの考え方を元にした簡単なモデルにおいて、くり込まれたバイアス関数を導出した結果：

$$c_1^L(k) = b_1^L W(kR) + \frac{1}{\delta_c} \frac{\partial W(kR)}{\partial \ln \sigma_M}$$

$$c_2^L(k_1, k_2) = b_2^L W(k_1 R) W(k_2 R) + \frac{\delta_c b_1^L + 1}{\delta_c^2} \frac{\partial}{\partial \ln \sigma_M} [W(k_1 R) W(k_2 R)]$$



bias nonlocality

ハローモデル：
質量スケールで平均したゆ
らぎが臨界値を上回ったら
その質量スケールの天体が
形成されたと考える

$1/R$

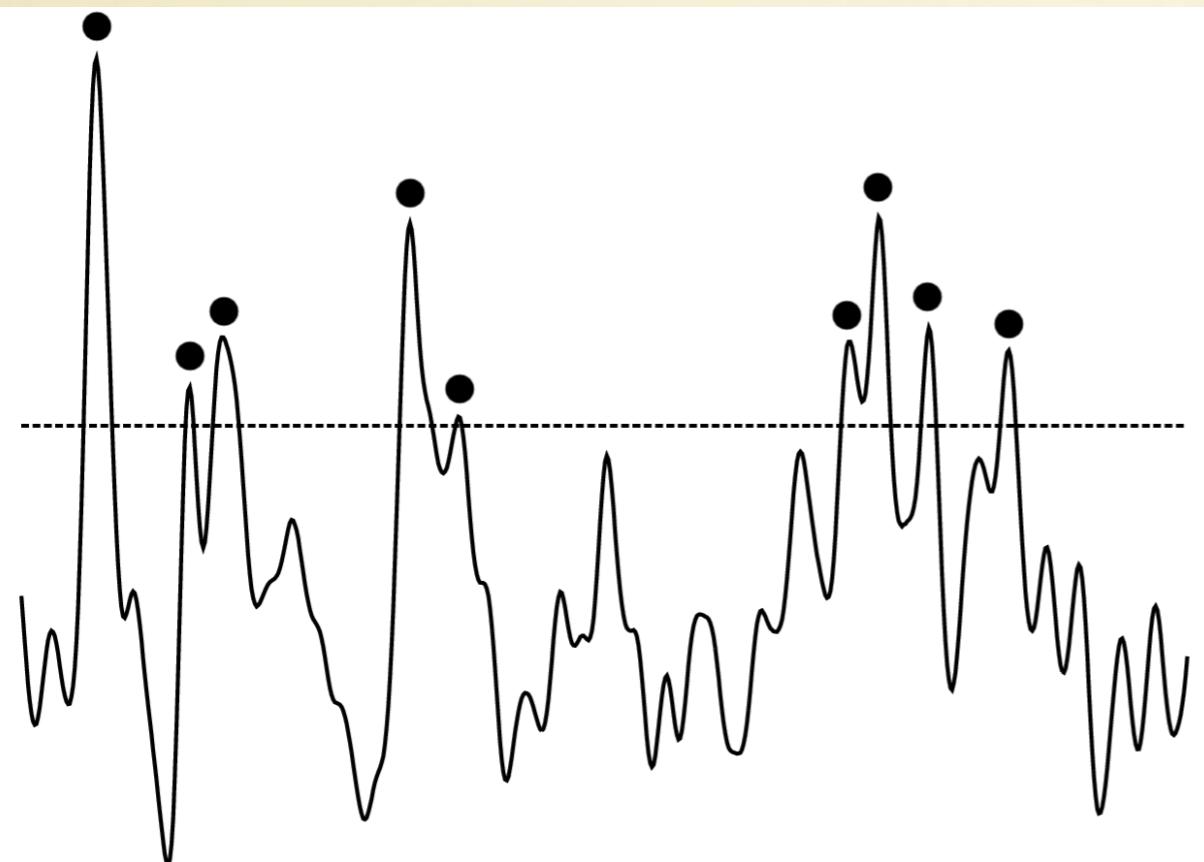
くり込まれたバイアス関数のモデル計算：2

Peaks モデル

- ある質量スケールでスムージングした密度ゆらぎのピークが天体になっているというピーク・モデルにおいて、くり込まれたバイアス関数を導出した結果：

$$c_1^L(k) = W(kR) [b_{10} + b_{11}k^2]$$

$$\begin{aligned} c_2^L(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = & W(k_1 R) W(k_2 R) \left\{ b_{20} + b_{11} (k_1^2 + k_2^2) \right. \\ & \left. + b_{02} k_1^2 k_2^2 - 2\chi_1(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) + \omega_{10} [3(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2 - k_1^2 k_2^2] \right\} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} b_{ij} &\equiv \frac{1}{\sigma_0^i \sigma_2^j \bar{n}_{\text{pk}}} \int d^{10}y n_{\text{pk}} H_{ij}(\nu, J_1) \mathcal{P}, \\ \chi_k &\equiv \frac{(-1)^k}{\sigma_1^{2k} \bar{n}_{\text{pk}}} \int d^{10}y n_{\text{pk}} L_k^{(1/2)} \left(\frac{3}{2} \eta^2 \right) \mathcal{P}, \\ \omega_{l0} &\equiv \frac{(-1)^l}{\sigma_2^{2l} \bar{n}_{\text{pk}}} \int d^{10}y n_{\text{pk}} L_l^{(3/2)} \left(\frac{5}{2} J_2 \right) \mathcal{P}. \end{aligned}$$

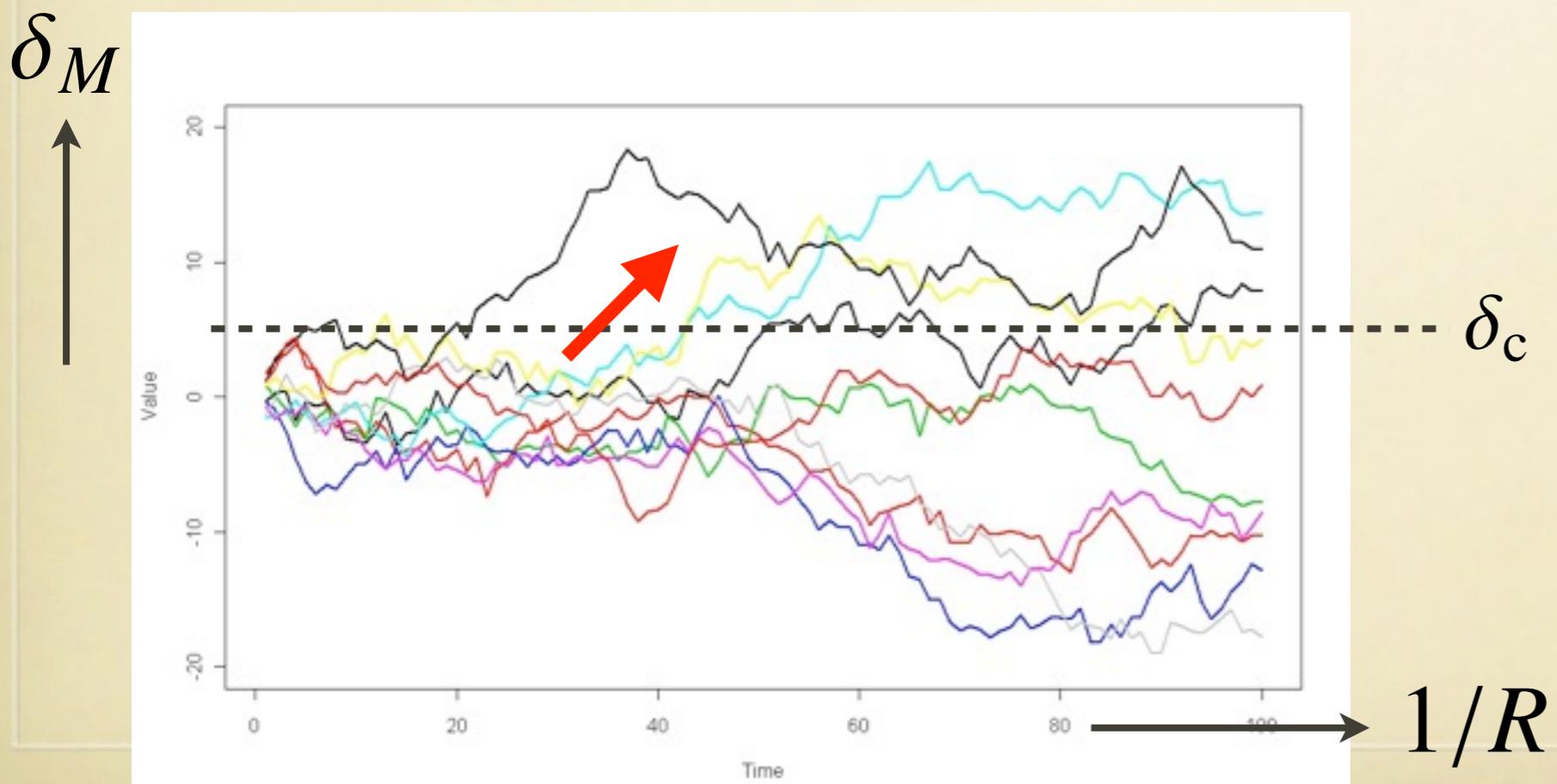
$$n_{\text{pk}} = \frac{3^{3/2}}{R_*^3} \delta_D(\nu - \nu_c) \delta_D^3(\boldsymbol{\eta}) \Theta(\lambda_3) |\det \boldsymbol{\zeta}|,$$

くり込まれたバイアス関数のモデル計算：3

Excursion Set Peaks モデル

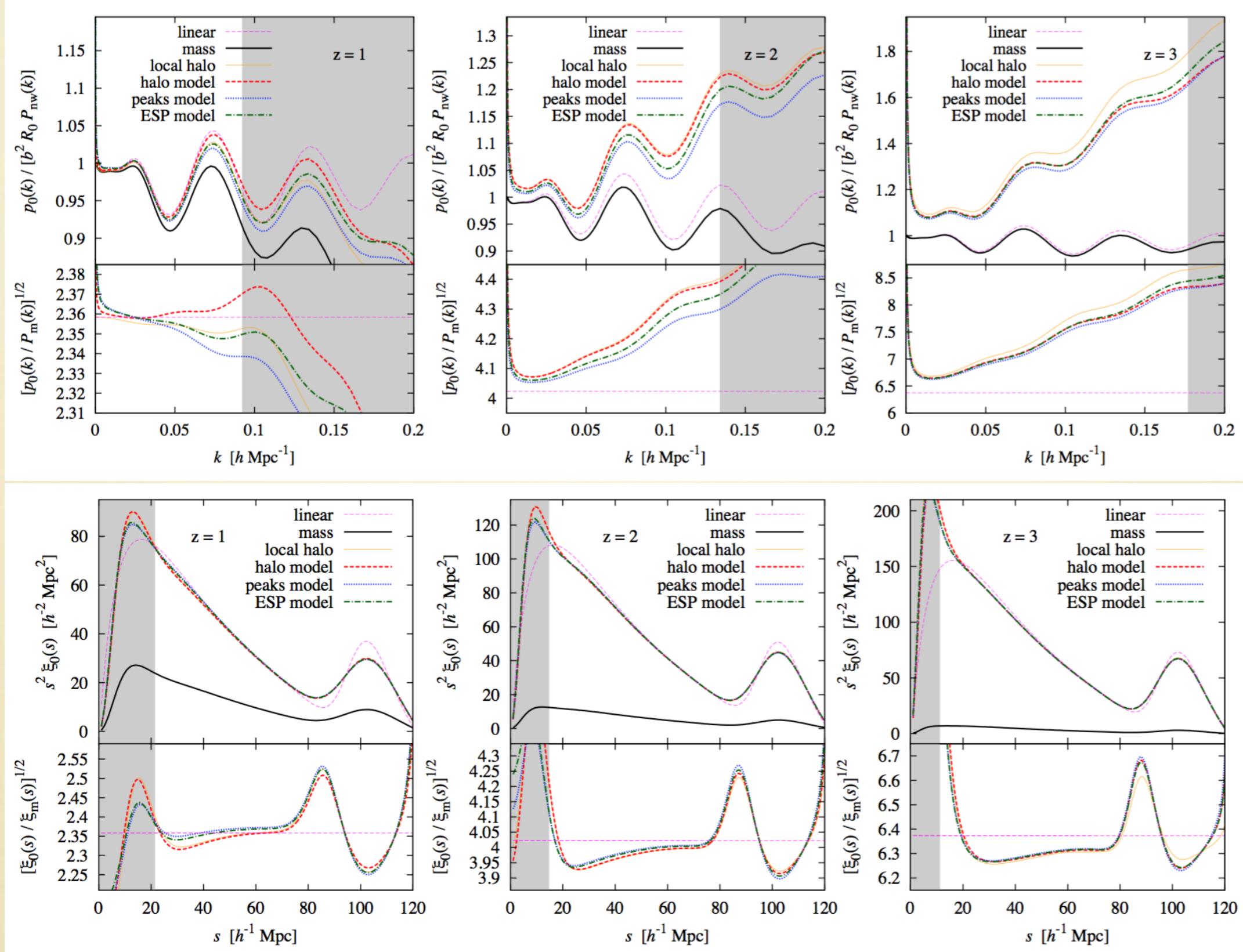
- ハローモデルとピーク理論の考え方を組み合わせたExcursion Set Peaks (ESP) モデルにおいて、くり込まれたバイアス関数を導出した結果：

$$c_X^{(1)}(k) = b_{100}W(kR) + b_{010}k^2\bar{W}(k\bar{R}) - b_{001}kW'(kR),$$
$$c_X^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = b_{200}W(k_1R)W(k_2R) + b_{110}\left[k_2^2W(k_1R)\bar{W}(k_2\bar{R}) + (1 \leftrightarrow 2)\right]$$
$$+ \left\{b_{020}k_1^2k_2^2 + \omega_{10}\left[3(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2 - k_1^2k_2^2\right] - 2\chi_1(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)\right\}\bar{W}(k_1\bar{R})\bar{W}(k_2\bar{R})$$
$$- b_{101}[k_1W'(k_1R)W(k_2R) + (1 \leftrightarrow 2)] - b_{011}\left[k_1k_2^2W'(k_1R)\bar{W}(k_2\bar{R}) + (1 \leftrightarrow 2)\right] + b_{002}k_1k_2W'(k_1R)W'(k_2R),$$



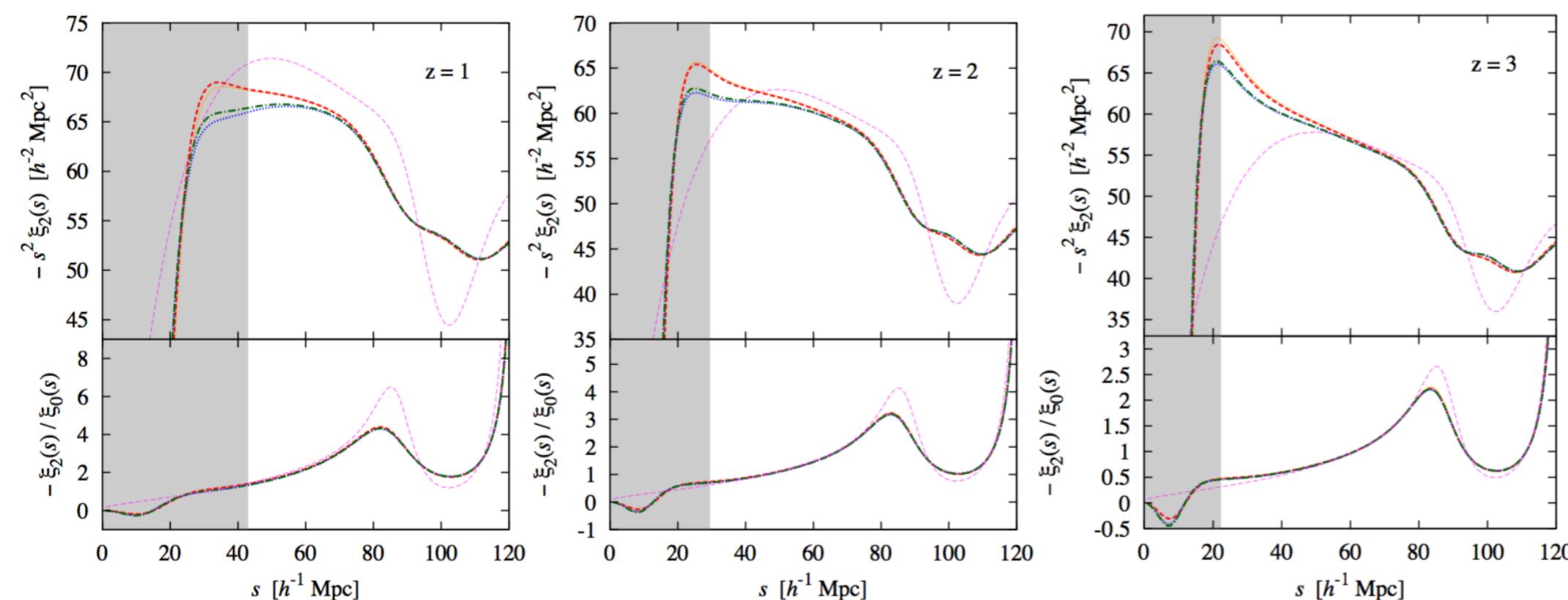
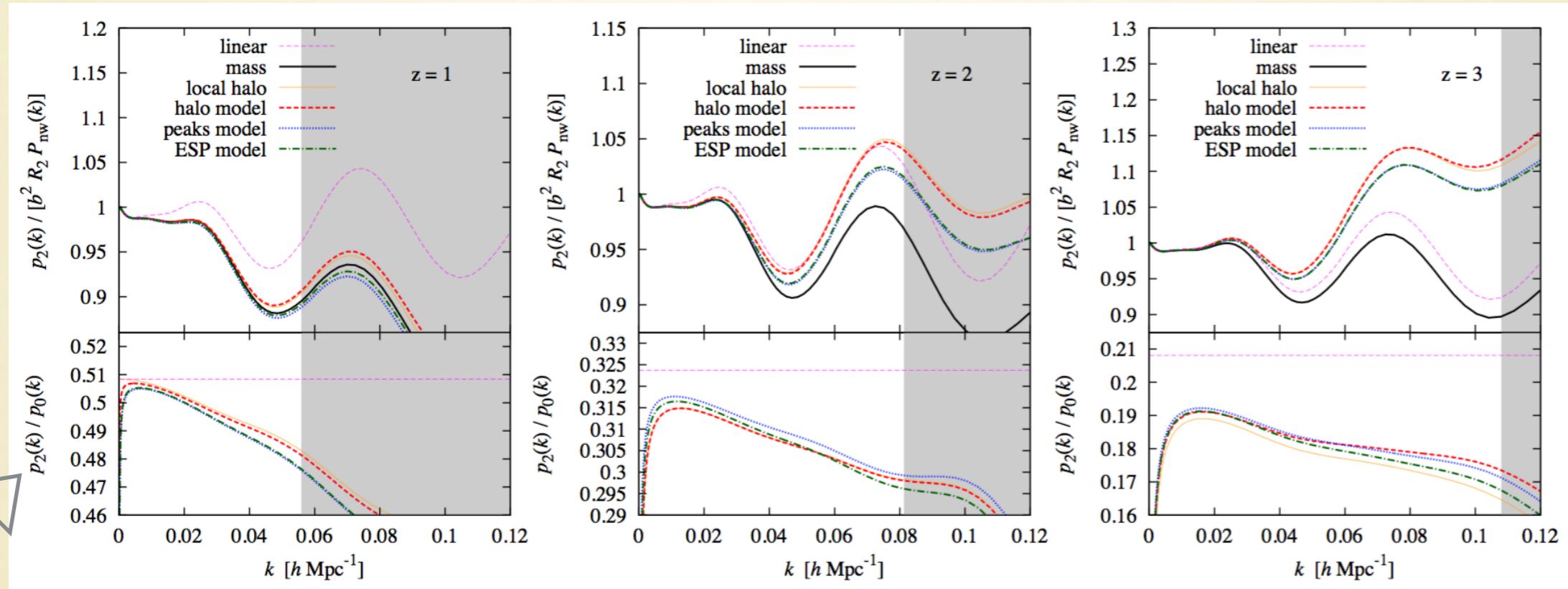
PeaksモデルにExcursion set theory (Press-Schechter理論の拡張)を組み合わせてup-crossing条件を取り入れたモデル：最近注目
Apple&Jones1990,
Desjacques2013,
Paranjape&Seth2013, Gong,
Biagetti, Riotto,⋯.

Redshift space, monopole



Redshift-space distortions, quadrupole

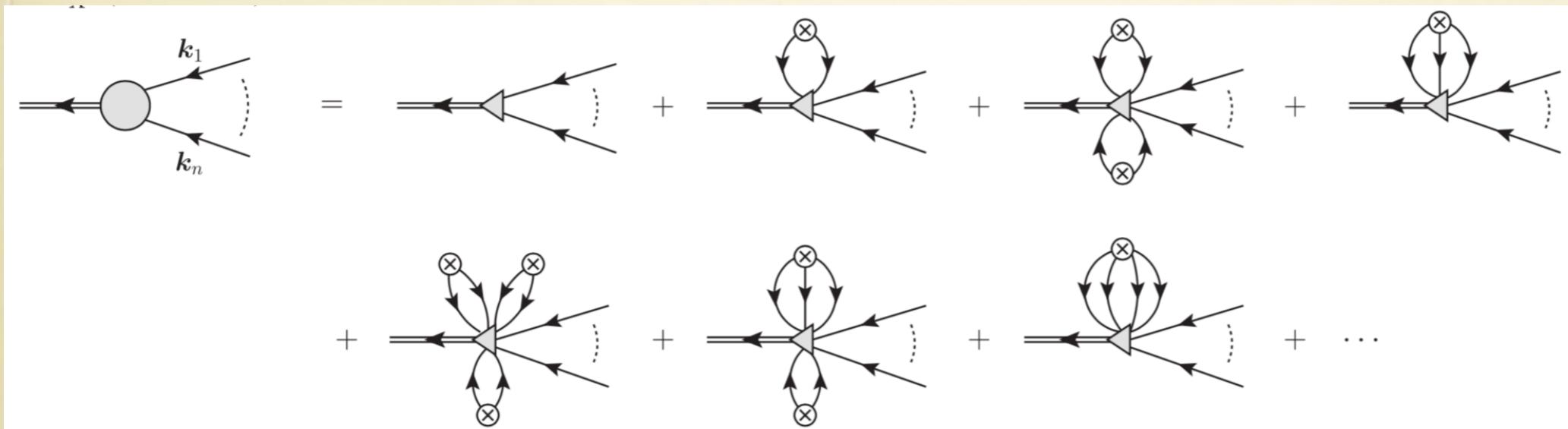
$f \sigma_8$



iPT formalismによるピーク統計へのさらなる応用

- ・ ピーク統計

- ・ Bardeen et al. (BBKS, 1986)による有名な仕事
- ・ Propagator & iPT formalismにより、ピーク統計の相関解析に新しい風 ← くりこまれたバイアス関数



TM (2011)

$$P_X(\mathbf{k}) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Diagram}_n$$

The diagram on the right shows a vertex with two outgoing lines labeled k_1 and k_n . It is connected to a central loop consisting of two nodes. The top node has two outgoing lines labeled k_1 and k_n , and two incoming lines from the loop. The bottom node also has two outgoing lines and two incoming lines from the loop. Arrows indicate the flow of momentum through the loop and the vertex.

ピークのパワースペクトルと相関関数

- Propagator & iPT formalismで計算

$$\left\langle \frac{\delta^n n_{\text{pk}}}{\delta \delta_L(\mathbf{k}_1) \cdots \delta \delta_L(\mathbf{k}_n)} \right\rangle = \frac{\bar{n}_{\text{pk}}}{(2\pi)^{3n}} (2\pi)^3 \delta_D^3(\mathbf{k}_{1\dots n} - \mathbf{k}) c_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n)$$

$$P_{\text{pk}}(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbf{k}_{1\dots n} = \mathbf{k}} [\hat{c}_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n)]^2 W^2(k_1 R) \cdots W^2(k_n R) P(k_1) \cdots P(k_n)$$

$$\hat{c}_1(\mathbf{k}) = b_{10} + b_{01} k^2$$

$$\hat{c}_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = b_{20} + b_{11} (k_1^2 + k_2^2) + b_{02} k_1^2 k_2^2 - 2\chi_1(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) + \omega_{10} [3(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2 - k_1^2 k_2^2]$$

$$\begin{aligned} \hat{c}_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = & b_{30} + b_{21} (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) + b_{12} (k_1^2 k_2^2 + \text{cyc.}) + b_{03} k_1^2 k_2^2 k_3^2 - 2b_{10} \chi_1 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 + \text{cyc.}) \\ & - 2b_{01} \chi_1 [(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) k_3^2 + \text{cyc.}] + c_{10010} \{ [3(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2 - k_1^2 k_2^2] + \text{cyc.} \} \\ & + 3c_{01010} [(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2 k_3^2 + \text{cyc.} - k_1^2 k_2^2 k_3^2] \\ & - 3\varpi_{01} \left[(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_3)(\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{k}_1) - \frac{1}{3} [(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2 k_3^2 + \text{cyc.}] + \frac{2}{9} k_1^2 k_2^2 k_3^2 \right] \end{aligned}$$

$$c_{ijqlm}(\nu_c) = (-1)^q \sqrt{\frac{\Gamma(l+5/2)\Gamma(3m+5/2)}{\Gamma(l+3m+5/2)\Gamma(5/2)}} \frac{\langle n_{\text{pk}}(\nu_c) H_{ij}(\nu, J_1) L_q^{(1/2)}(3\eta^2/2) F_{lm}(5J_2, J_3) \rangle}{\sigma_0^i \sigma_1^{2q} \sigma_2^{j+2l+3m} \bar{n}_{\text{pk}}(\nu_c)}$$

まとめ

- iPT
- ラグランジュ描像に基づいた、大規模構造の擾動論の一般論
- 大スケールの相関に対するバイアスの影響を系統的に調べられる
- iPT formalismを用いたピーク統計
- 原始ブラックホールのクラスタリング