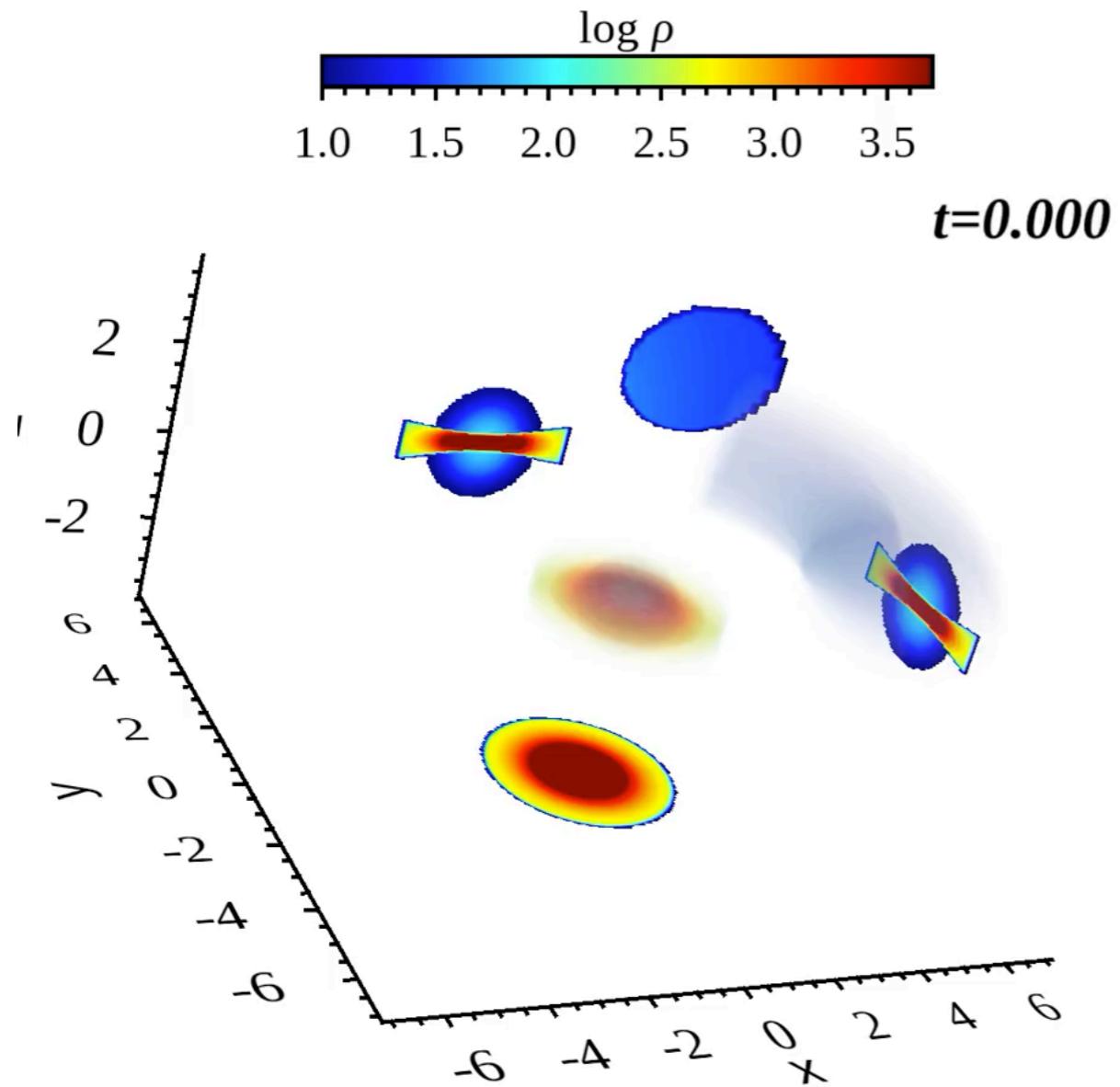


円筒座標系での見かけの特異点を取り除く数値シミュレーション法

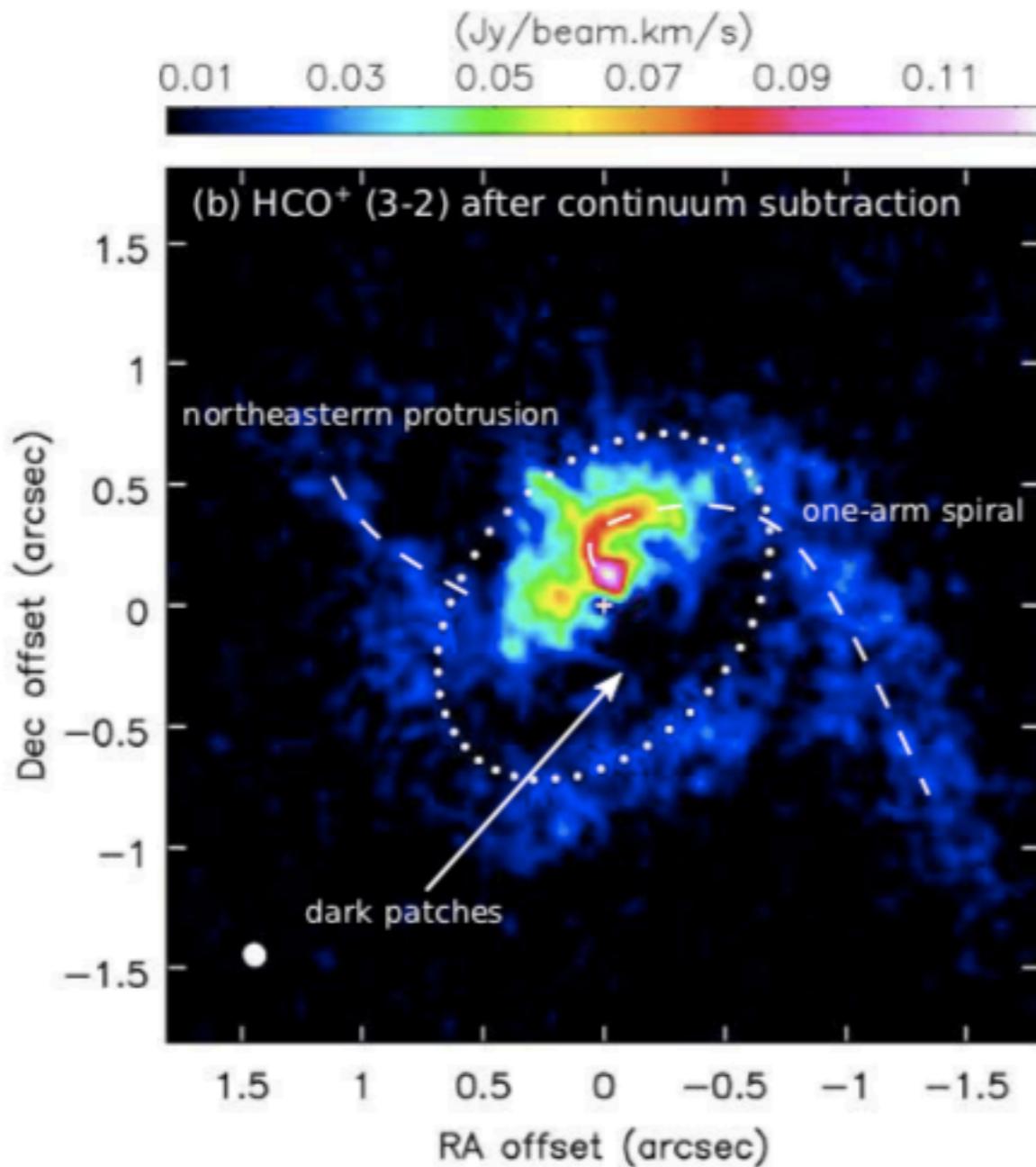
花輪 知幸, 松本 洋介(千葉大)



極めて非対称なガス
降着を解くために

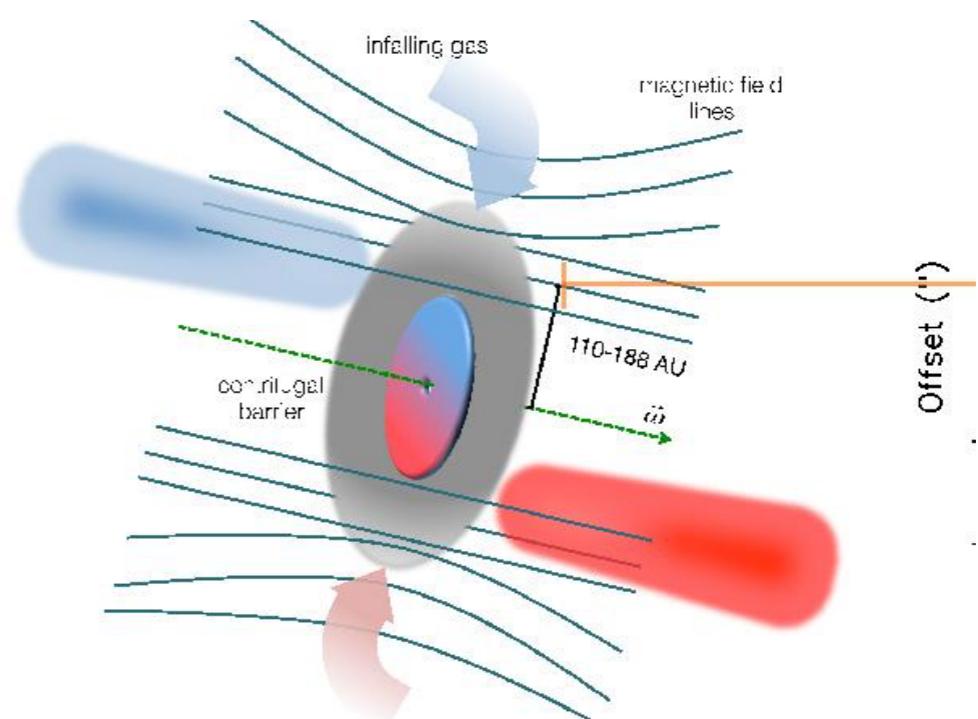
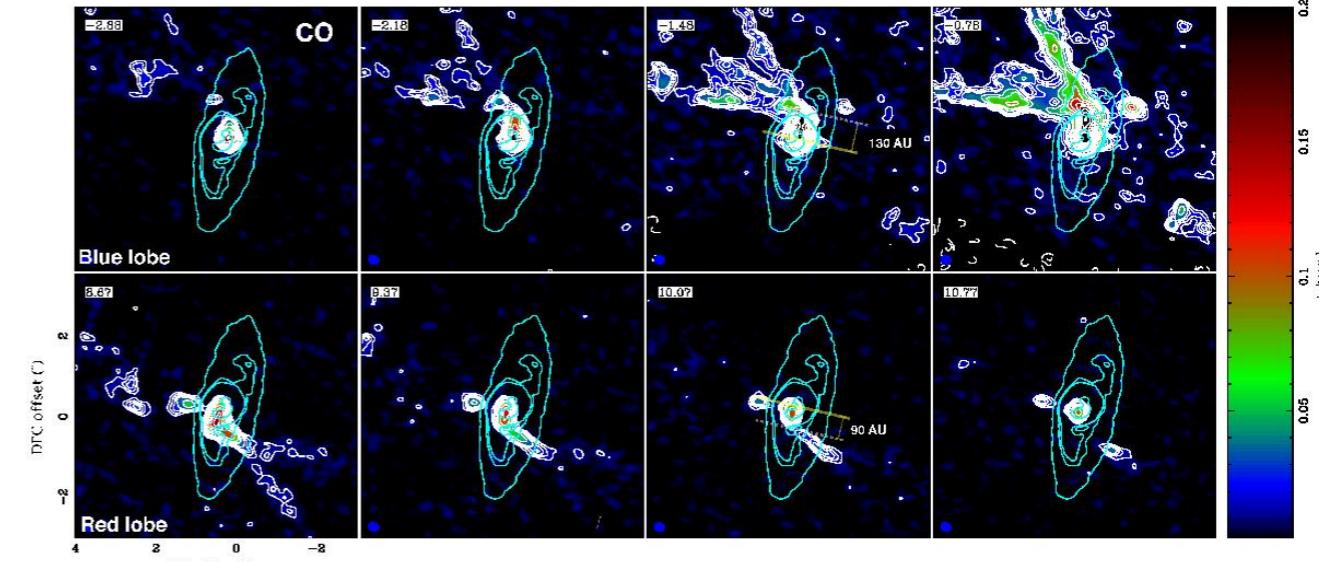
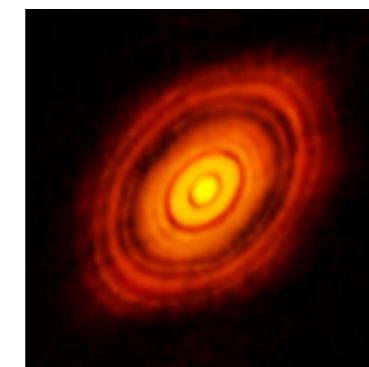
- 遠心力 v_ϕ^2/r を合理的に求める、
- CFL条件, $\Delta t < r \Delta\phi / |v + c|$ を緩める。

原始星へのガス降着や高速流もとても非対称



HL Tau
Yen+19

protrusions
spiral arm



BHB07-11 Alves+17

円筒座標 (r, φ, z) は回転の記述に優れているが、数值シミュレーションには技術的な困難をもたらす。

1. 遠心力が軸の近く ($r = 0$) で見かけ発散する。

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi + \ddot{z} \mathbf{e}_z \\ &= \left(\dot{v}_r - \frac{v_\varphi^2}{r} \right) \mathbf{e}_r + \left(\dot{v}_\varphi + \frac{v_r v_\varphi}{r} \right) \mathbf{e}_\varphi + \dot{v}_z \mathbf{e}_z \\ &= \left(\dot{v}_r - \frac{j^2}{r^3} \right) \mathbf{e}_r + \frac{j}{r} \mathbf{e}_\varphi + \dot{v}_z \mathbf{e}_z\end{aligned}$$

1' 軸の近くで乱れが発生しやすい。

2. 軸付近で CFL 条件 ($\Delta t < r\Delta\varphi/|v+c|$) が厳しい。

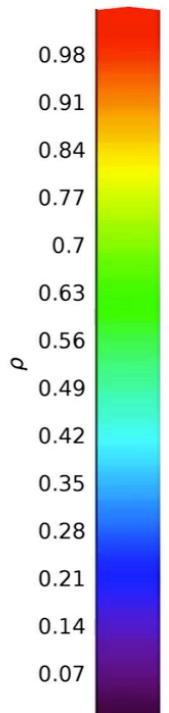
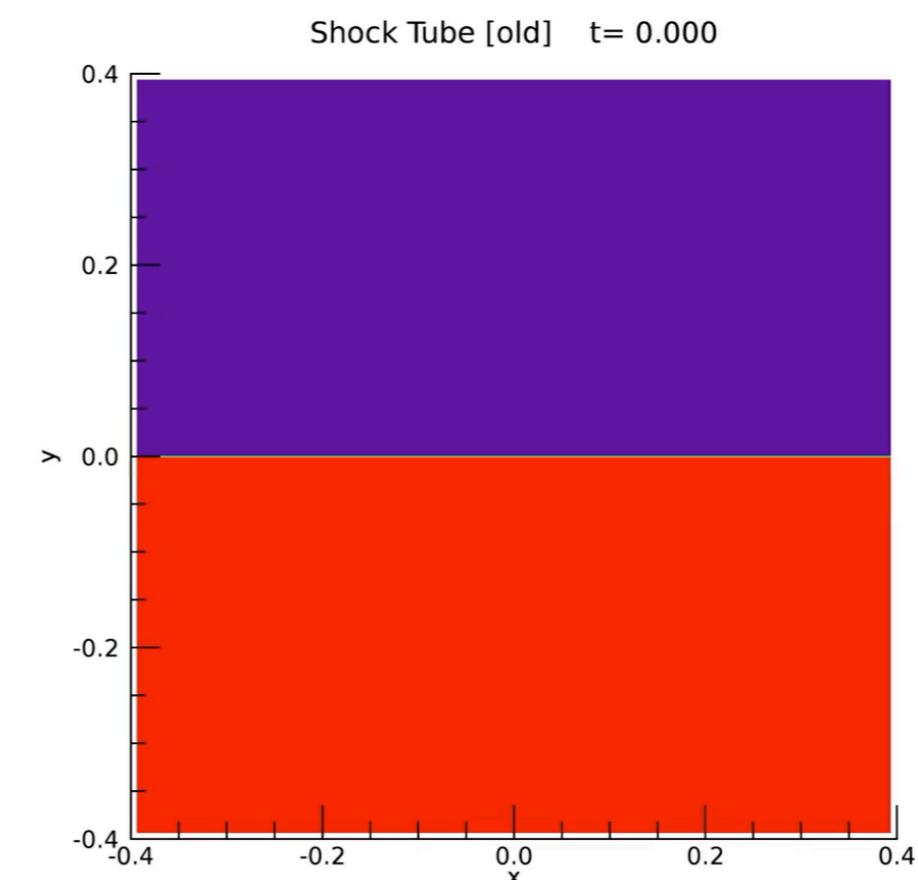
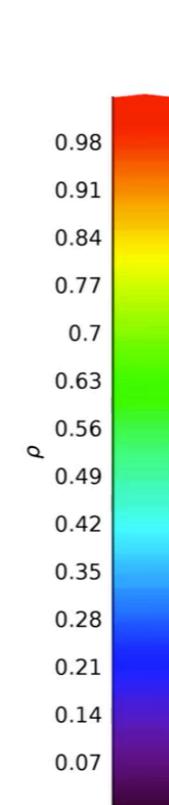
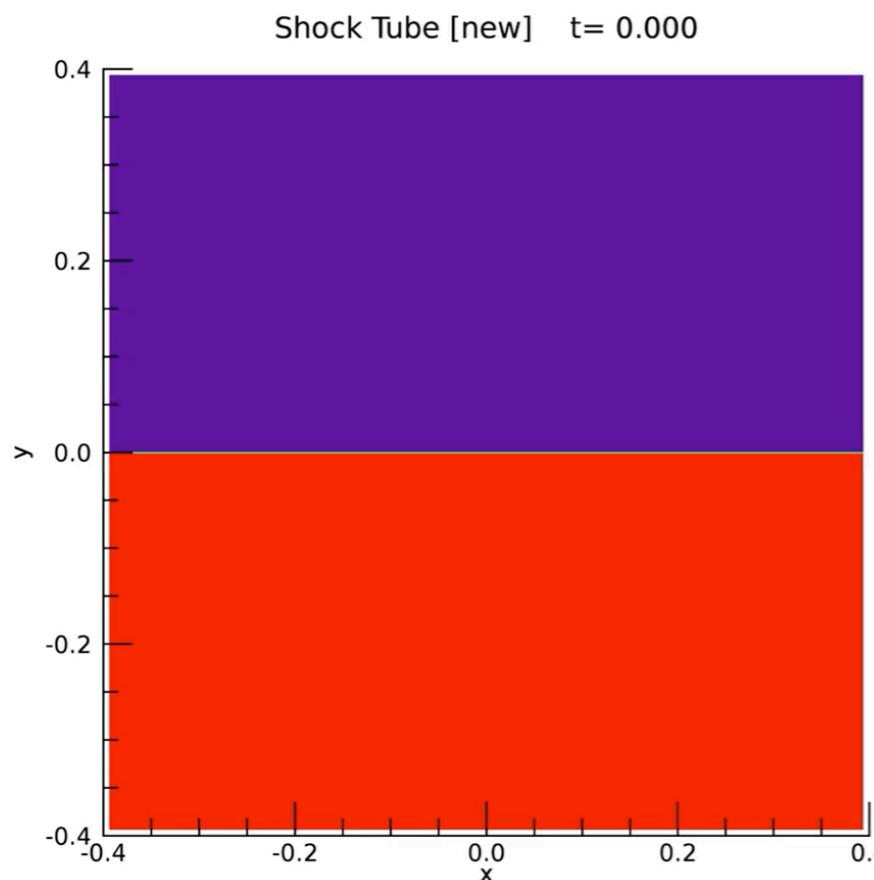
これらの問題は計算法を工夫すれば取り除ける。

衝擊波管問題

$(\rho, P) = (1.0, 1.0)$ $y < 0$, $(\rho, P) = (0.1, 0.125)$ $y > 0$,

改良型1

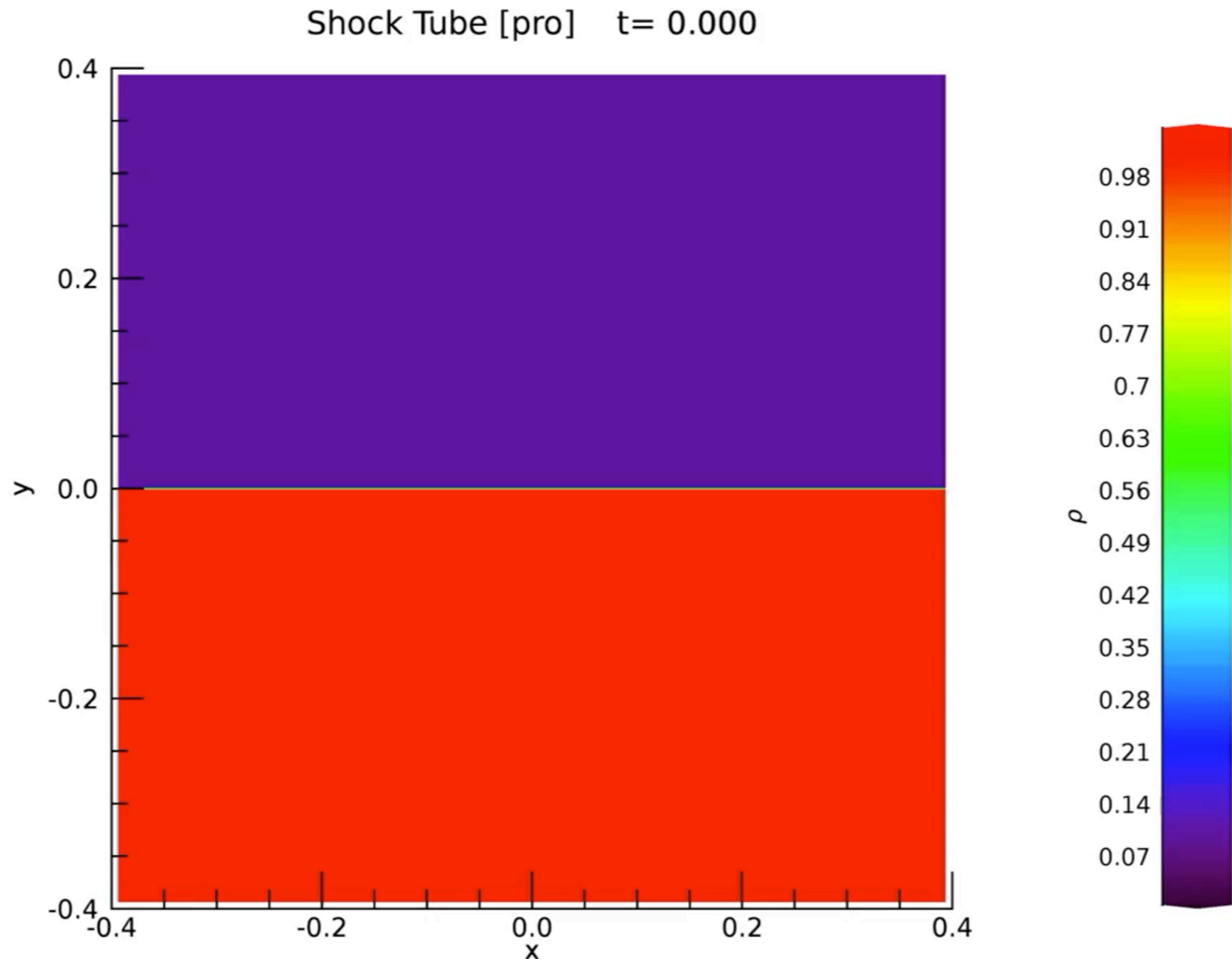
標準



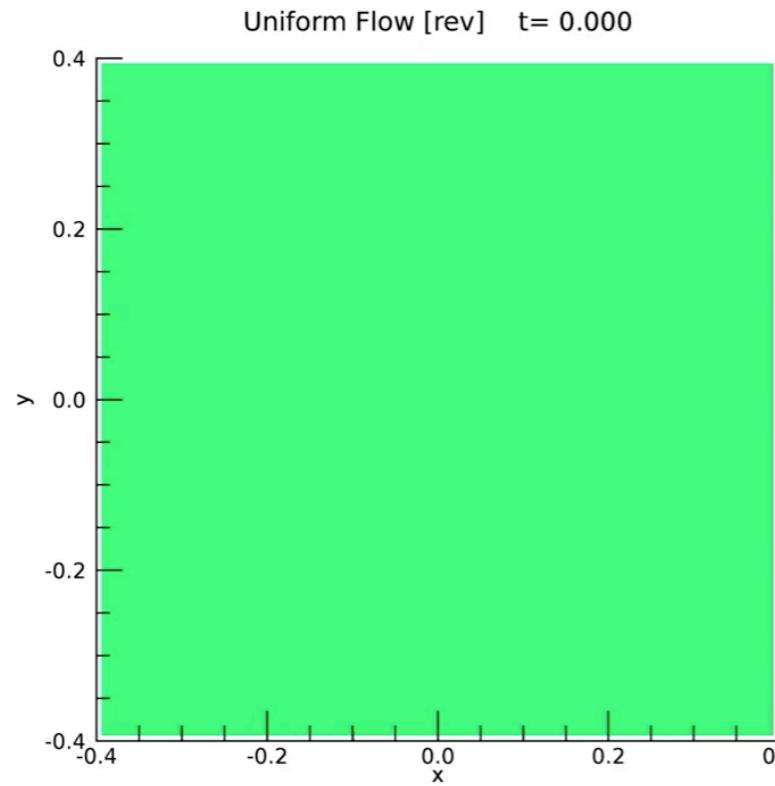
密度

原点の付近だけを表示 ($\Delta r = 0.02$)

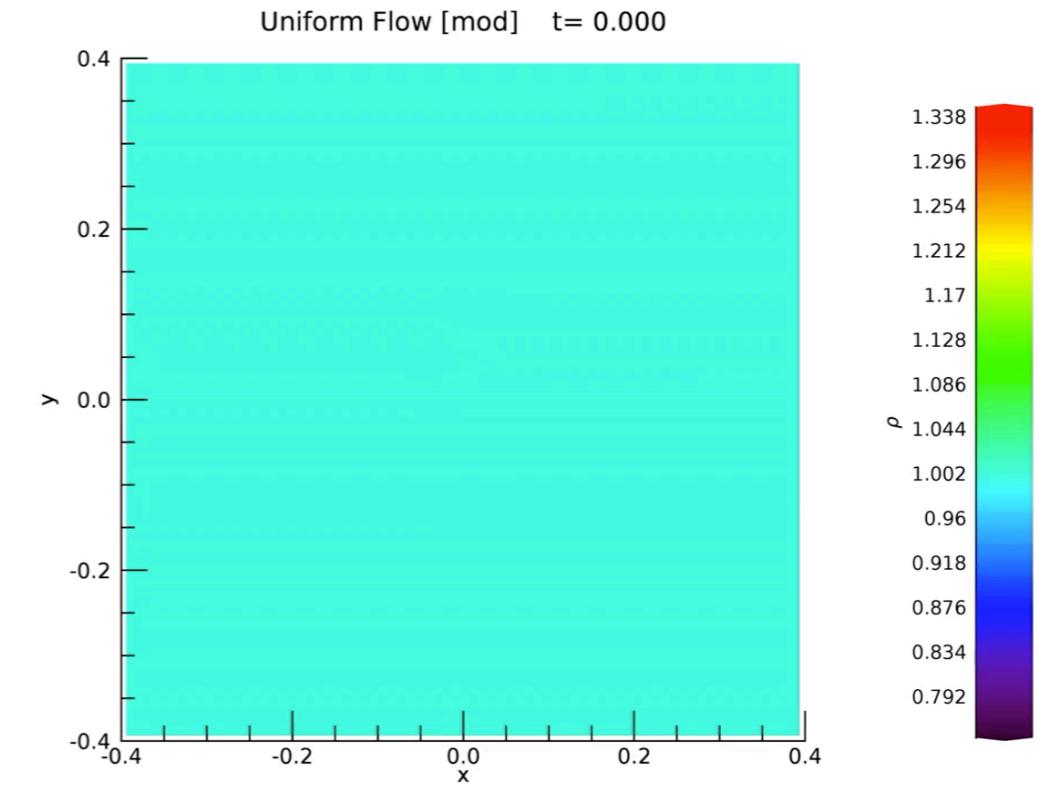
より適切な差分法で求めた衝撃波管問題



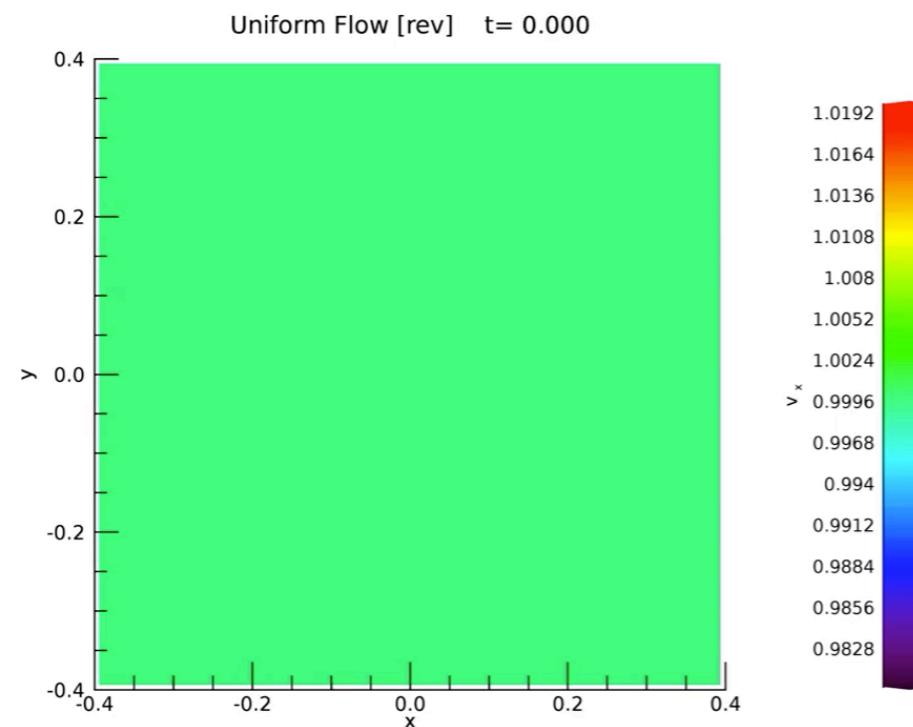
改良型1 一様流 $P = 1, \rho = 1, v_x = 1, v_y = v_z = 0$ 通常



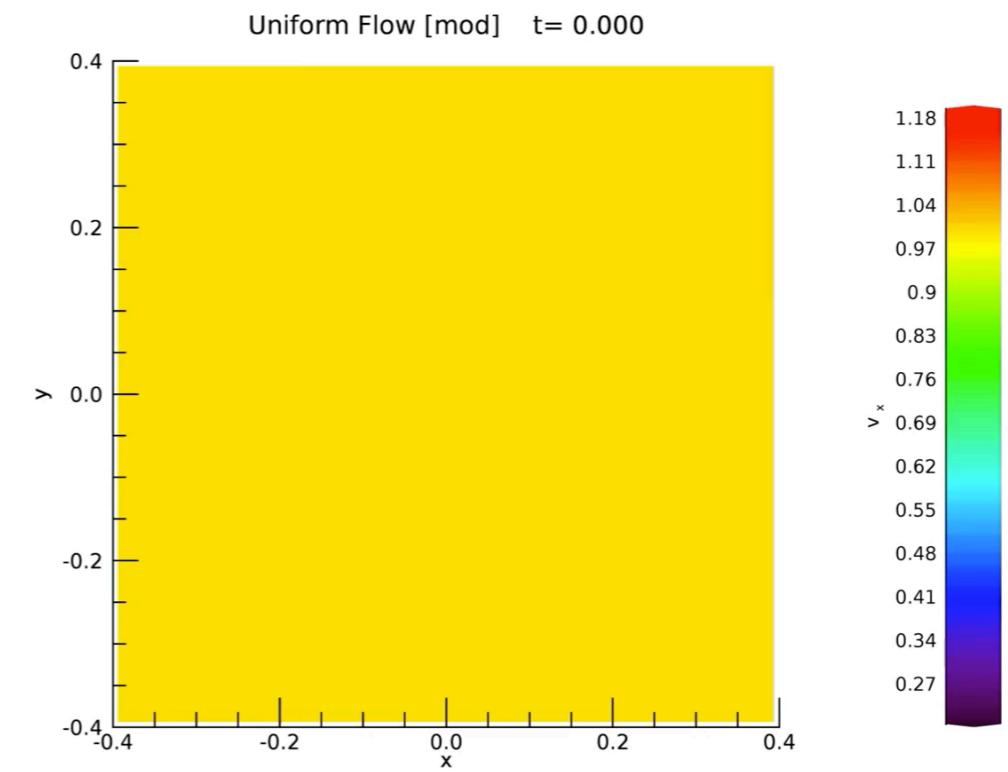
$$\rho_{\min} = 0.9856, \rho_{\max} = 1.0087$$



$$\rho_{\min} = 0.7956, \rho_{\max} = 1.129$$



$$v_{x\min} = 0.4380, v_{\max} = 1.0545$$



有限体積法: 流体力学方程式の数値解法, MUSCL:

Monotonic **U**pwind **S**cheme for **C**onservation **L**aw

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + P \mathbf{I}) = \rho \mathbf{g}$$

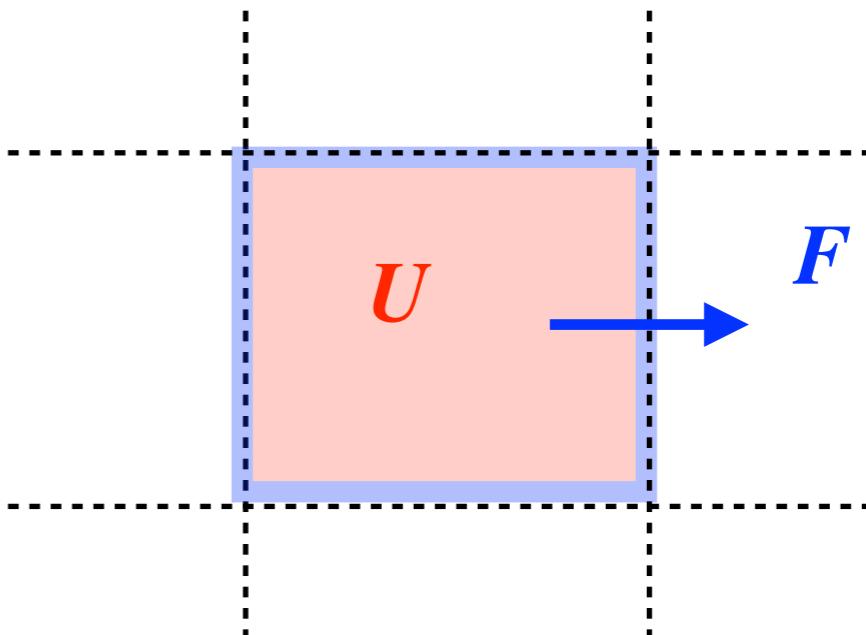
$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \nabla \cdot [(\rho E + P) \mathbf{v}] = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}$$

$$E = \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{P}{\rho(\gamma - 1)}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$$

↓
体積積分

$$\int \frac{\partial U}{\partial t} dV + \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$$



円筒座標系での質量保存則

$$dV = r dr d\varphi dz$$

$$F_r = \rho v_r \quad F_\varphi = \rho v_\varphi$$

差分化した方程式

$$\begin{aligned} \rho_{i,j,k}(t + \Delta t) \Delta V_{i,j,k} &= \rho_{i,j,k}(t) \Delta V_{i,j,k} \\ &\quad - \left[(\rho v_r)_{i+1/2,j,k} \Delta S_{r,i+1/2,j,k} - (\rho v_r)_{i-1/2,j,k} \Delta S_{r,i-1/2,j,k} \right] \Delta t \\ &\quad - \left[(\rho v_\varphi)_{i,j+1/2,k} \Delta S_{\varphi,i,j+1/2,k} - (\rho v_\varphi)_{i,j-1/2,k} \Delta S_{\varphi,i,j-1/2,k} \right] \Delta t \\ &\quad - \left[(\rho v_z)_{i,j,k+1/2} \Delta S_{z,i,j,k+1/2} - (\rho v_z)_{i,j,k-1/2} \Delta S_{z,i,j,k-1/2} \right] \Delta t \end{aligned}$$

セル体積と表面

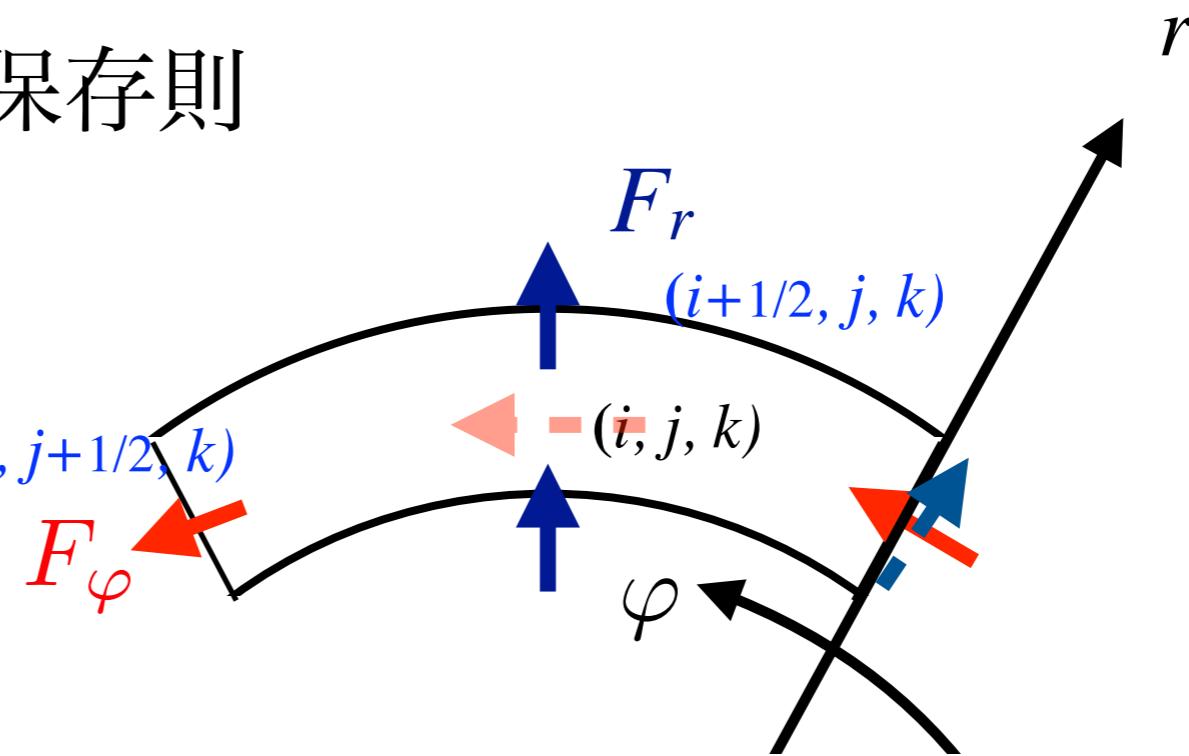
$$\begin{aligned} (\rho \mathbf{v})_{i,j+1/2,k} &= (\rho v_r)_{i,j+1/2,k} \mathbf{e}_{r,i,j+1/2,k} (\varphi_j + \Delta\varphi/2) \\ &\quad + (\rho v_\varphi)_{i,j+1/2,k} \mathbf{e}_{\varphi,i,j+1/2,k} (\varphi_j + \Delta\varphi/2) \\ &\quad + (\rho v_r)_{i,j+1/2,k} \mathbf{e}_{r,i,j+1/2,k} \end{aligned}$$

$$\Delta V_{i,j,k} = r_i \Delta r_i \Delta \varphi_j \Delta z$$

$$\Delta S_{r,i+1/2,j,k} = r_{i+1} \Delta \varphi_j \Delta z_k$$

$$\Delta S_{\varphi,i,j+1/2,k} = \Delta r_i \Delta z_k \mathbf{e}_{r,i+1/2,j,k} (\varphi_j + \Delta\varphi/2)$$

$$\Delta S_{z,i,j,k+1/2} = r_i \Delta r_i \Delta \varphi_j \mathbf{e}_{z,i,j,k+1/2}$$



円筒座標系での流体力学方程式の保存形式(標準)

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} r\rho \\ r\rho v_r \\ r^2 \rho v_\varphi \\ r\rho v_z \\ r\rho E \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial r} \begin{bmatrix} r\rho v_r \\ r(\rho v_r^2 + P) \\ r^2 \rho v_r v_\varphi \\ r\rho v_r v_z \\ r\rho v_r H \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \begin{bmatrix} \rho v_\varphi \\ \rho v_\varphi v_r \\ r(\rho v_\varphi^2 + P) \\ \rho v_\varphi v_z \\ \rho v_\varphi H \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} r\rho v_z \\ r\rho v_z v_r \\ r^2 \rho v_z v_\varphi \\ \rho v_\varphi v_z \\ \rho v_\varphi H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\rho g_r + \cancel{\rho v_\varphi^2 + P} \\ r^2 \rho g_\varphi \\ r\rho g_z \\ r\rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad \text{遠心力}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \quad \xrightarrow{\text{体積積分}} \quad dV = r \, dr \, d\varphi \, dz \quad \int \frac{\partial U}{\partial t} dV + \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

MUSCL: Monotonic Upwind Scheme for Conservation Law

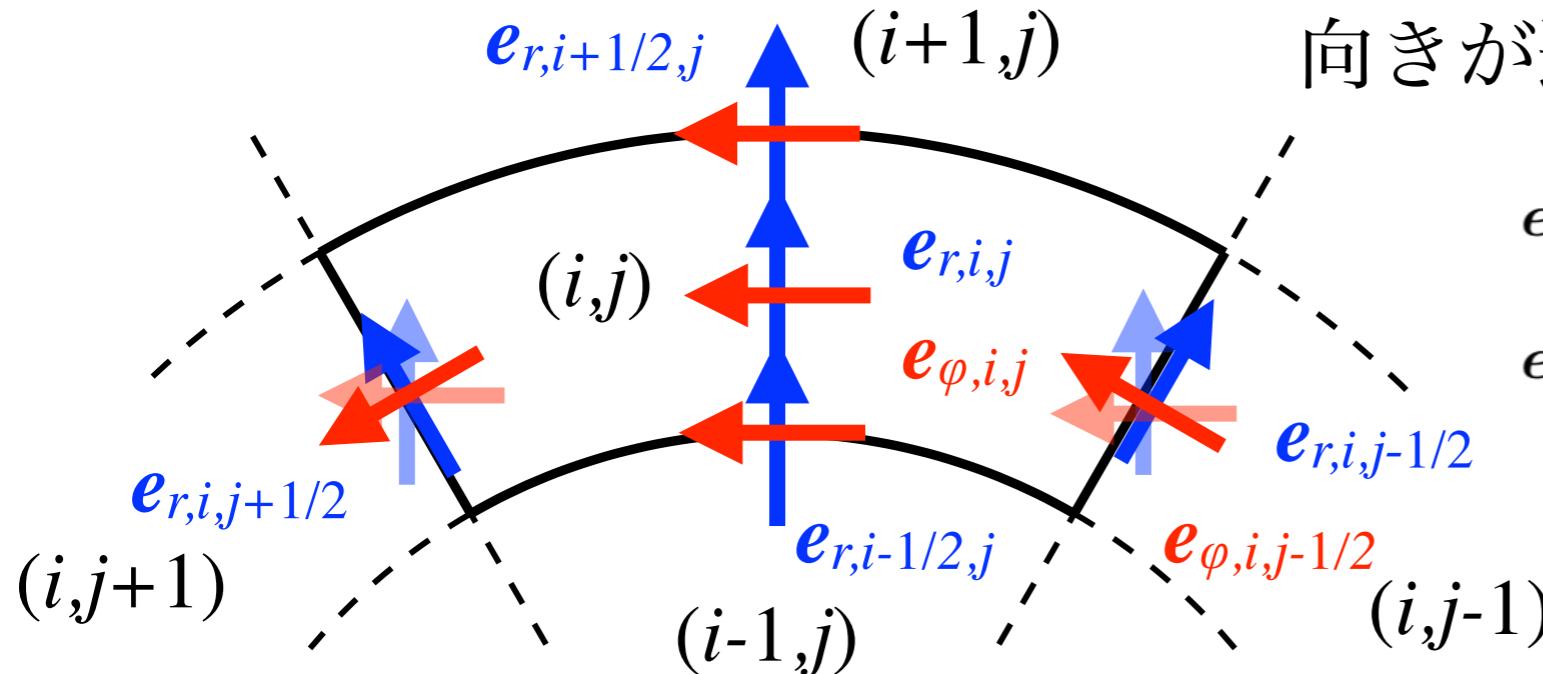
ベクトル

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + P \mathbf{I}) = \rho \mathbf{g},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_j} \rho \mathbf{v} dV + \iint_{\partial V_j} (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + P \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{V_j} \rho \mathbf{g} dV.$$

注意! 単位ベクトル, $e_r(\varphi)$, $e_\varphi(\varphi)$, は φ に依る.

セル中心と境界では単位ベクトルの
向きが違う.



$$e_{r,i,j \pm 1/2} = \cos \frac{\Delta\varphi}{2} e_{r,i,j} \mp \sin \frac{\Delta\varphi}{2} e_{\varphi,i,j}$$

$$e_{r,i,j \pm 1/2} = \pm \sin \frac{\Delta\varphi}{2} e_{r,i,j} + \cos \frac{\Delta\varphi}{2} e_{\varphi,i,j}$$

単位ベクトルの回転

$$(P + \rho v_\varphi v_\varphi)_{i,j+1/2,k} e_{\varphi,i,j+1/2,k} e_{\varphi,i,j+1/2,k} =$$

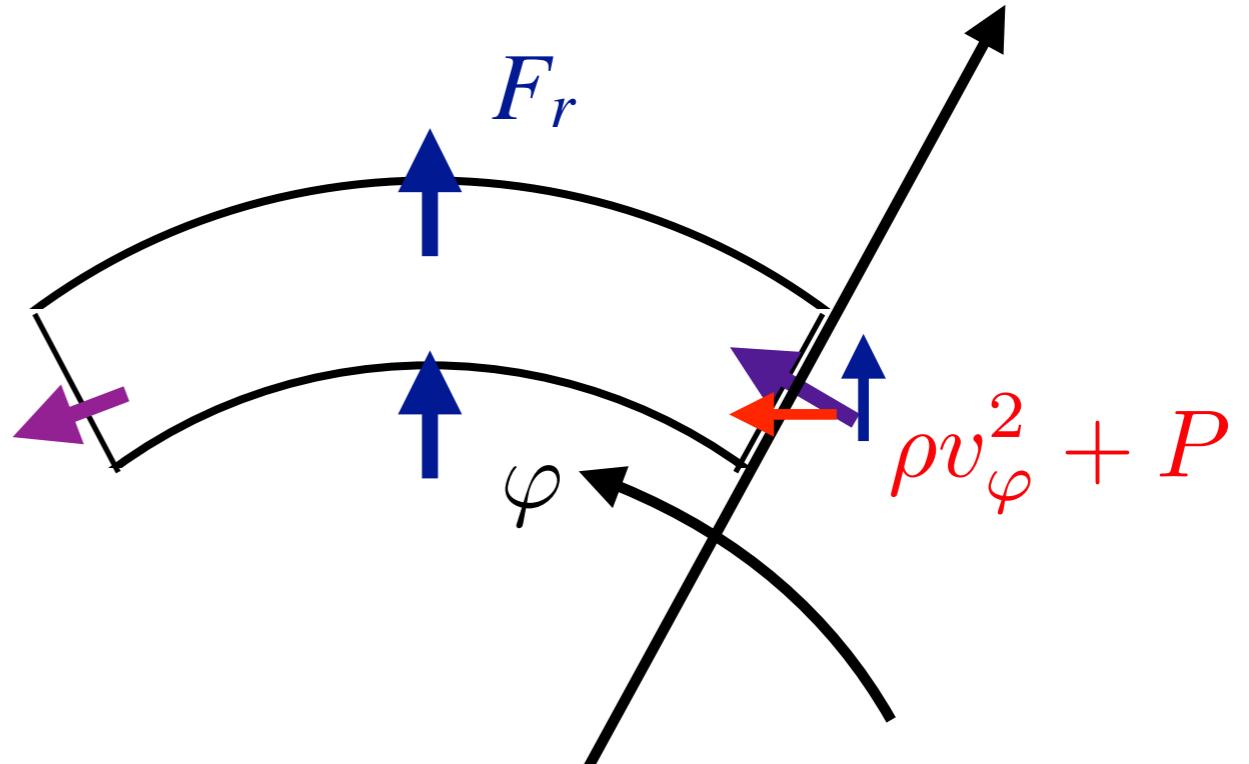
$$(P + \rho v_\varphi v_\varphi)_{i,j+1/2,k} e_{\varphi,i,j+1/2,k} \left(\cos \frac{\Delta\varphi_j}{2} e_{\varphi,i,j,k} - \sin \frac{\Delta\varphi_j}{2} e_{r,i,jk} \right)$$

全圧力, $\rho v_\varphi^2 + P$, には**動径** 成分が含まれる.

遠心力は φ 方向のセル境界に働く動圧 の一部.

遠心力は φ 方向のセル境界

に働く動圧 の一部.



$$dV_{i,j,k} = r_i \Delta r_i \Delta \varphi_j dz_k$$

$$dS_{r,i+1/2,j,k} = r_i \Delta \varphi_j dz_k$$

$$\varphi_{j+1/2} = \varphi_j + \frac{\Delta \varphi_j}{2}$$

$$dS_{\varphi,i,j+1/2,k} = \Delta r_i dz_k$$

$$\varphi_{j+1/2} = \varphi_{j+1} - \frac{\Delta \varphi_{j+1}}{2}$$

$$dS_{r,i,j,k+1/2} = r_i \Delta r_i \Delta \varphi_j$$

Unit vectors change their directions depending on φ .

$$\mathbf{e}_r(\varphi + \Delta\varphi) = \cos \Delta\varphi \mathbf{e}_r(\varphi) + \sin \Delta\varphi \mathbf{e}_\varphi(\varphi)$$

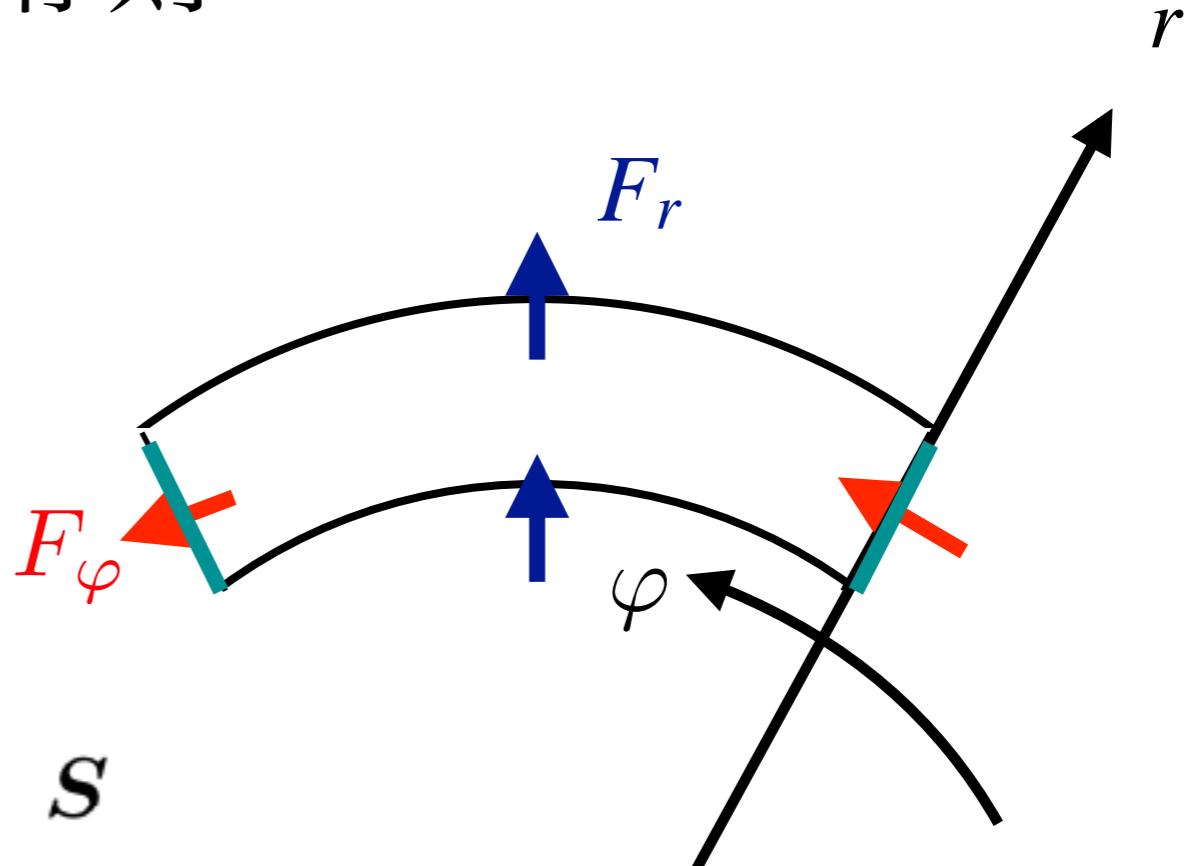
$$\mathbf{e}_\varphi(\varphi + \Delta\varphi) = -\sin \Delta\varphi \mathbf{e}_r(\varphi) + \cos \Delta\varphi \mathbf{e}_\varphi(\varphi)$$

角運動量保存則

$$\rho v_\varphi^2 + P \quad : \text{運動量流束}$$

$$e_\varphi(\varphi + \Delta\varphi/2) = e_\varphi(\varphi) - \frac{\Delta\varphi}{2} e_r(\varphi)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_r}{\partial r} + \frac{\partial \mathbf{F}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathbf{F}_z}{\partial z} = \mathbf{S}$$



$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} r\rho v_r \\ r\rho \mathbf{j} \\ r\rho v_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_r = \begin{bmatrix} r(\rho v_r^2 + P) \\ r^2 \rho v_r v_\varphi \\ r \rho v_r v_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_\varphi = \begin{bmatrix} \rho v_\varphi v_r \\ r(\rho v_\varphi^2 + P) \\ \rho v_\varphi v_z \end{bmatrix},$$

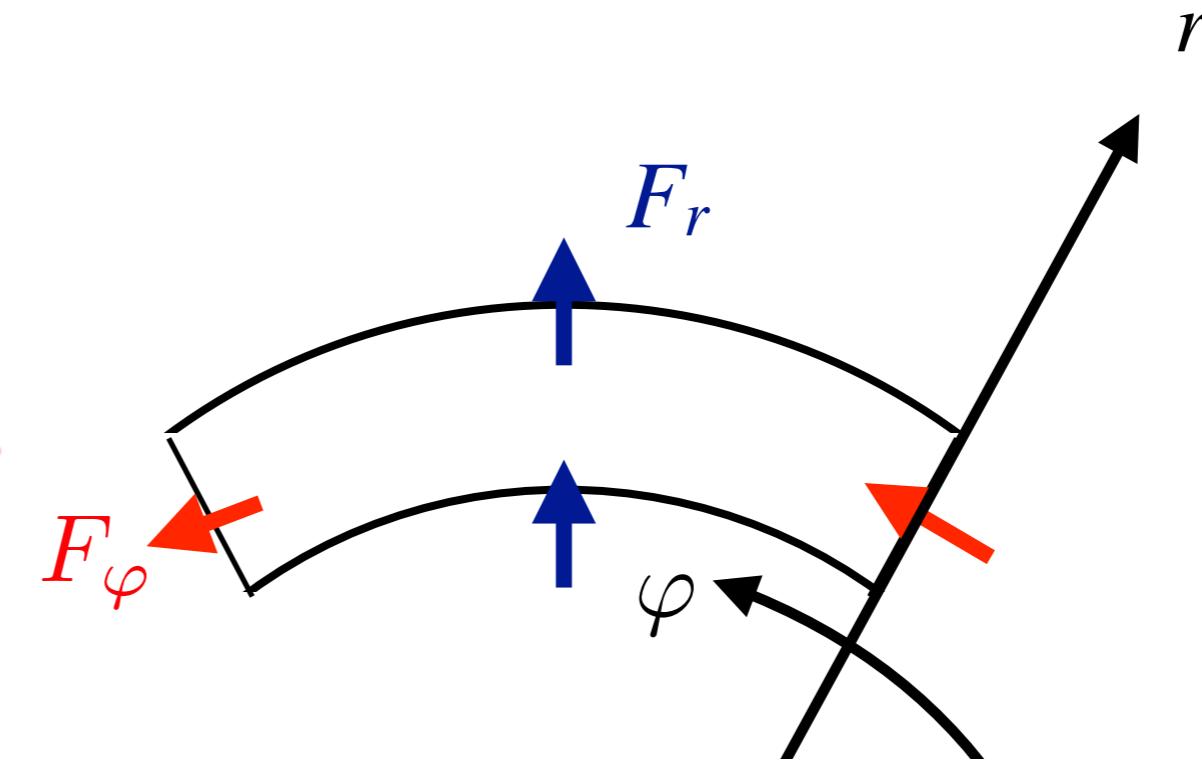
$$\mathbf{F}_z = \begin{bmatrix} r \rho v_z v_r \\ r^2 \rho v_z v_\varphi \\ r(\rho v_z^2 + P) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} r \rho g_r + (\rho v_\varphi^2 + P) \\ r^2 \rho g_\varphi \\ r \rho g_z \end{bmatrix}$$

エネルギー保存

$$dV = r dr d\varphi dz$$

$$F_r = \rho H v_r \quad F_\varphi = \rho H v_\varphi$$

差分方程式



$$\begin{aligned} (\rho E)_{i,j,k}(t + \Delta t) \Delta r_i r_i \Delta \phi_j dz_k &= (\rho E)_{i,j,k}(t) \Delta r_i r_i \Delta \phi_j dz_k \\ &- \left[r_{i+1/2,j,k} (\rho H v_r)_{i+1/2,j,k} - r_{i-1/2,j,k} (\rho H v_r)_{i-1/2,j,k} \right] \Delta \varphi_j \Delta z_k \Delta t \\ &- \left[(\rho H v_\varphi)_{i,j+1/2,k} - (\rho H v_\varphi)_{i,j-1/2,k} \right] \Delta r_i \Delta z_k \Delta t \\ &- \left[(\rho H v_z)_{i,j,k+1/2} - (\rho H v_z)_{i,j,k-1/2} \right] \Delta r_i r_i \Delta \varphi_j \Delta t \\ &+ (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g})_{i,j,k} \Delta r_i r_i \Delta \phi_j dz_k \end{aligned}$$

セル体積

$$dV_{i,j,k} = r_i \Delta r_i \Delta \varphi_j dz_k$$

セル表面

$$dS_{r,i+1/2,j,k} = r_i \Delta \varphi_j dz_k$$

$$dS_{\varphi,i,j+1/2,k} = \Delta r_i dz_k$$

$$dS_{r,i,j,k+1/2} = r_i \Delta r_i \Delta \varphi_j$$

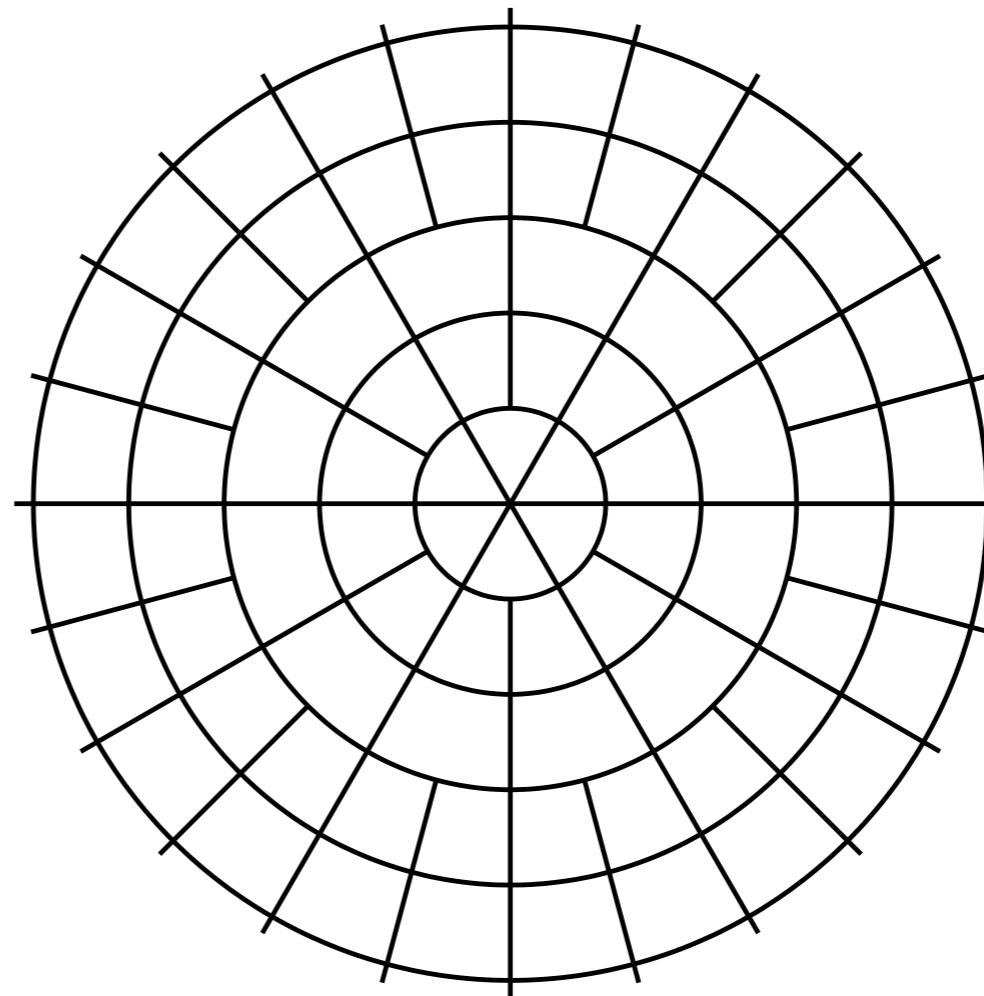
最適なアスペクト比

$$r\Delta\varphi \doteq \Delta r$$

i	N_φ
1	6
2	12
3	12
4	24
5	24
6	24
7	48
8	48
11	48
12	96

CFL 条件を緩めるため軸周りの角分

解能をさげる($\Delta\phi=\pi/3$)。



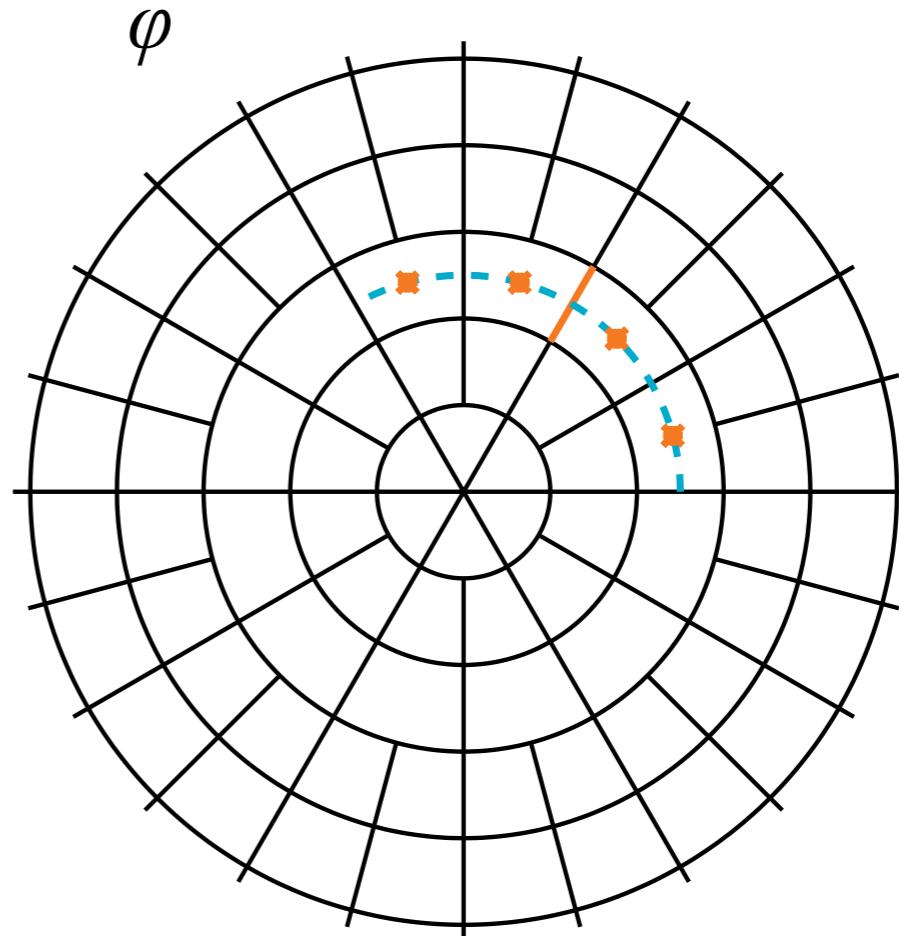
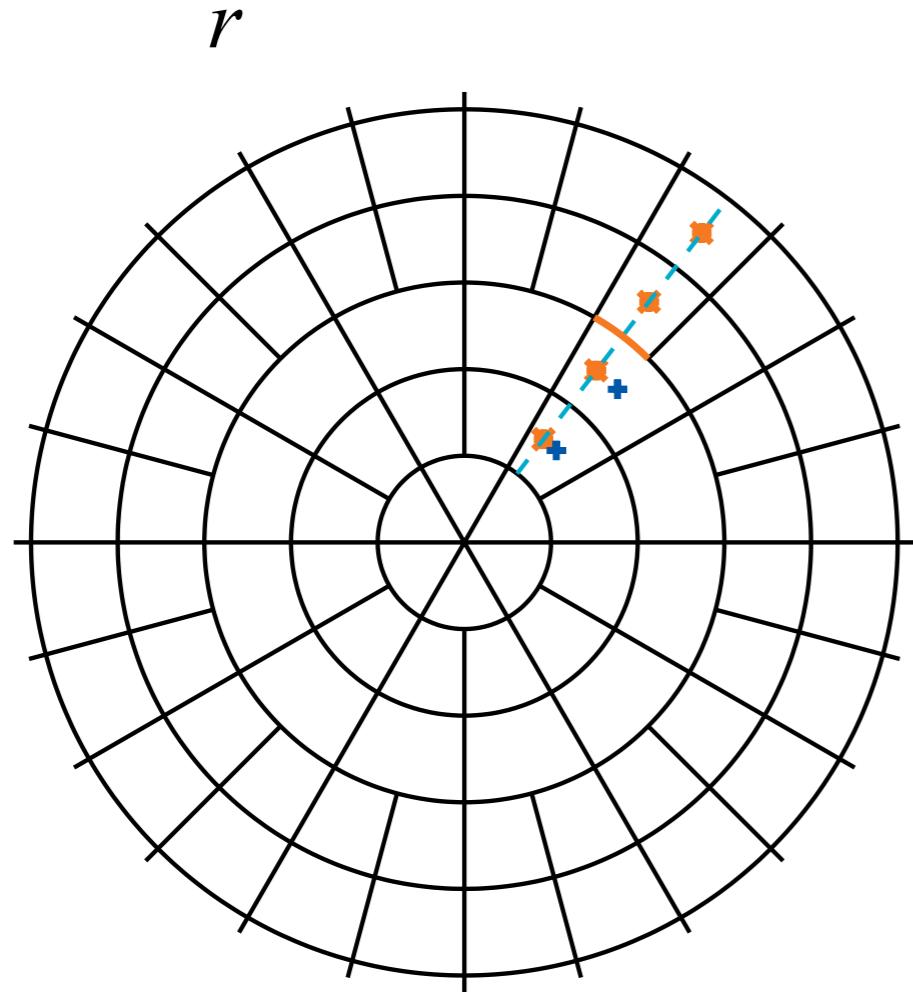
$\Delta r = \text{const.}$ (内側)

$\Delta\varphi = \text{const.}$ (外側)

$$N_\varphi = 6 \times 2^n \quad \Delta r/r = 2^{-n}$$

数値流束はセル境界で定義する

青破線に沿って変数を再構成



単位ベクトル e_r と e_φ が φ と共に変化することを考慮し、適切な回転により境界に垂直な成分と平行な成分に分けて補間

時間空間2次精度
MP5 も適用可

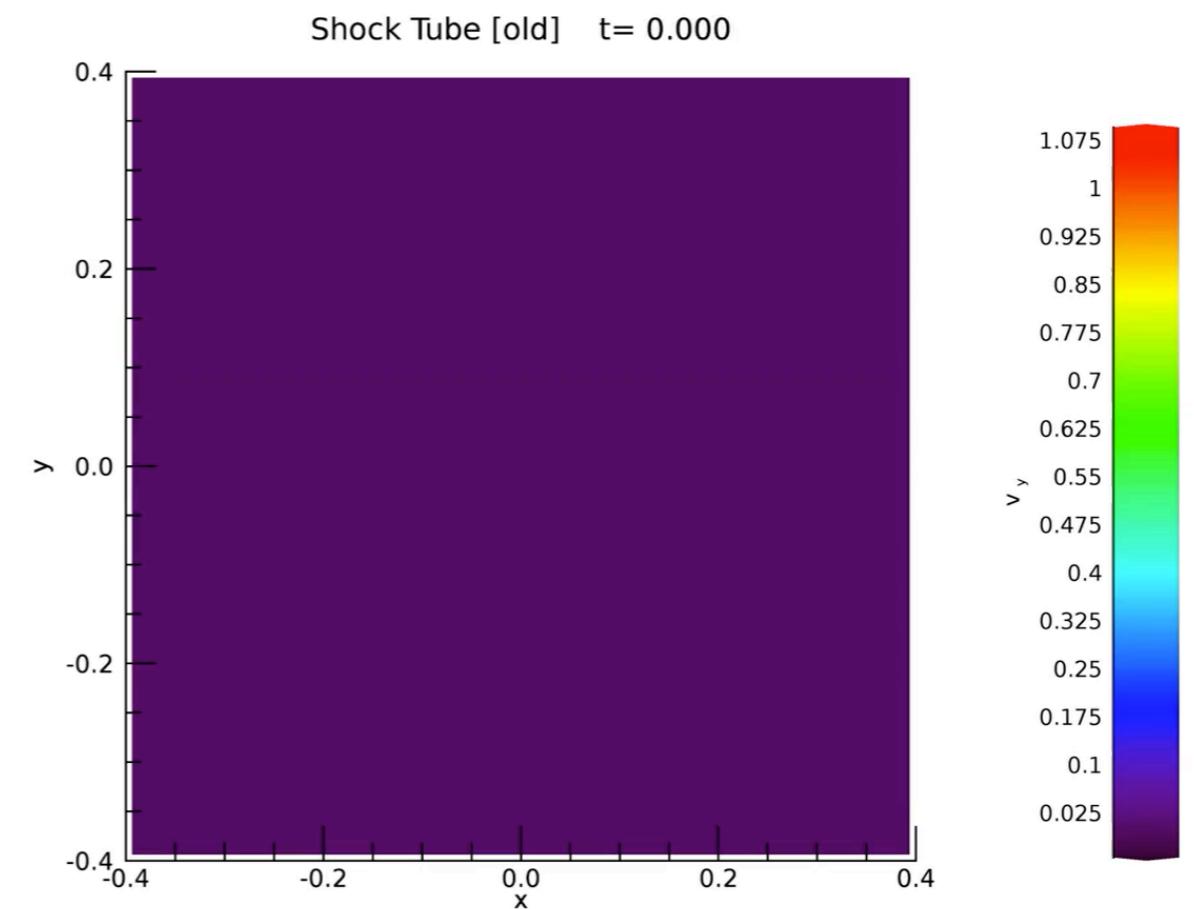
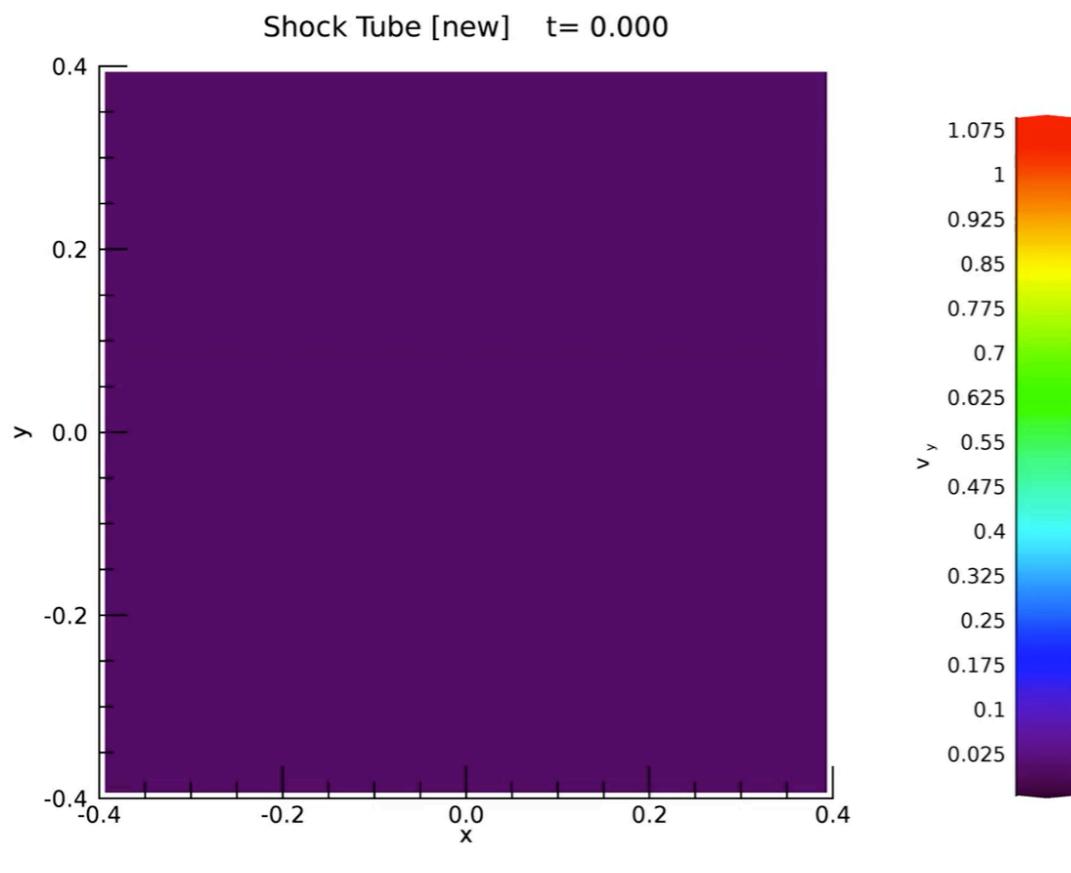
数値実験

1. 衝撃波管問題
 2. 一様流
 3. 原始星への降着 (重力入り)
-
- A. 理想気体 比熱比 $\gamma = 5/3, 1.05$
 - B. 近似リーマン解法 (HLLD相当)
 - C. 時間空間2次精度
 - D. $\Delta\varphi_{\min} = \text{either of } \pi/24, \pi/48, \pi/96$ ($\Delta\varphi_{\max} = \pi/6$)

衝擊波管 $(\rho, P) = (1.0, 1.0)$ $y < 0$, $(\rho, P) = (0.1, 0.125)$ $y > 0$,

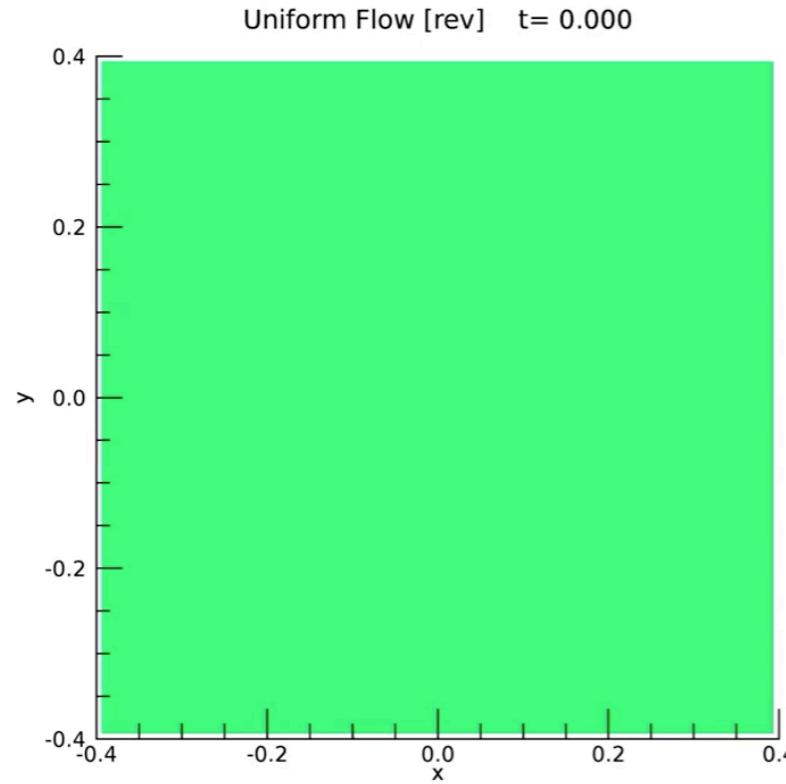
改良型1

標準

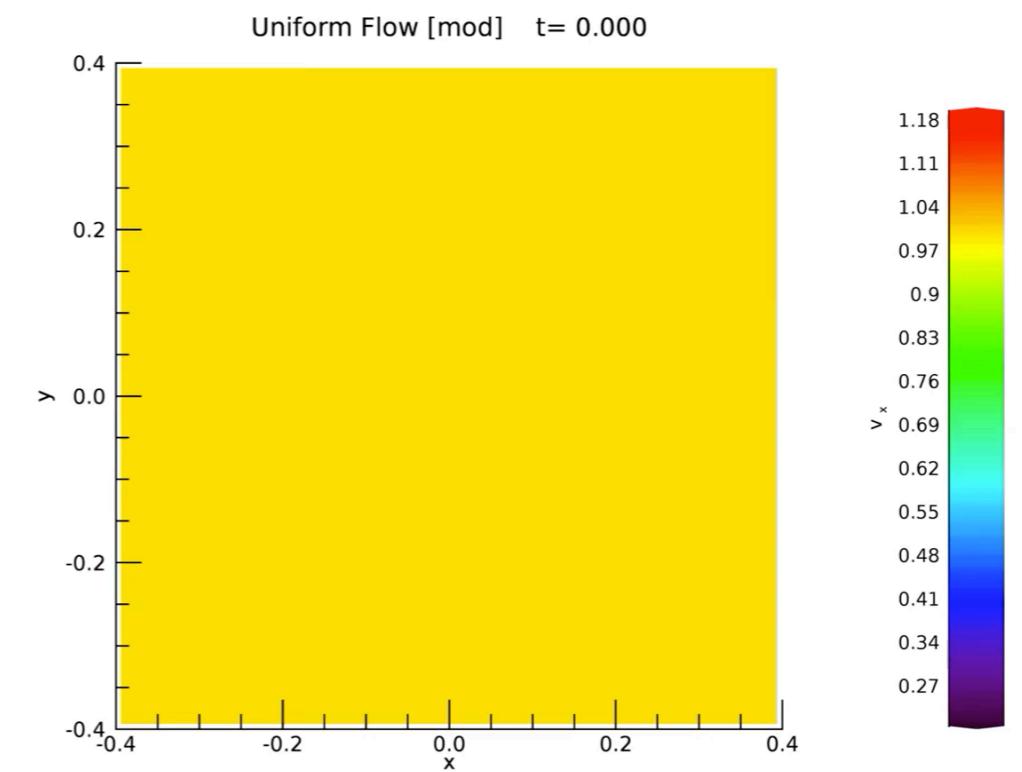
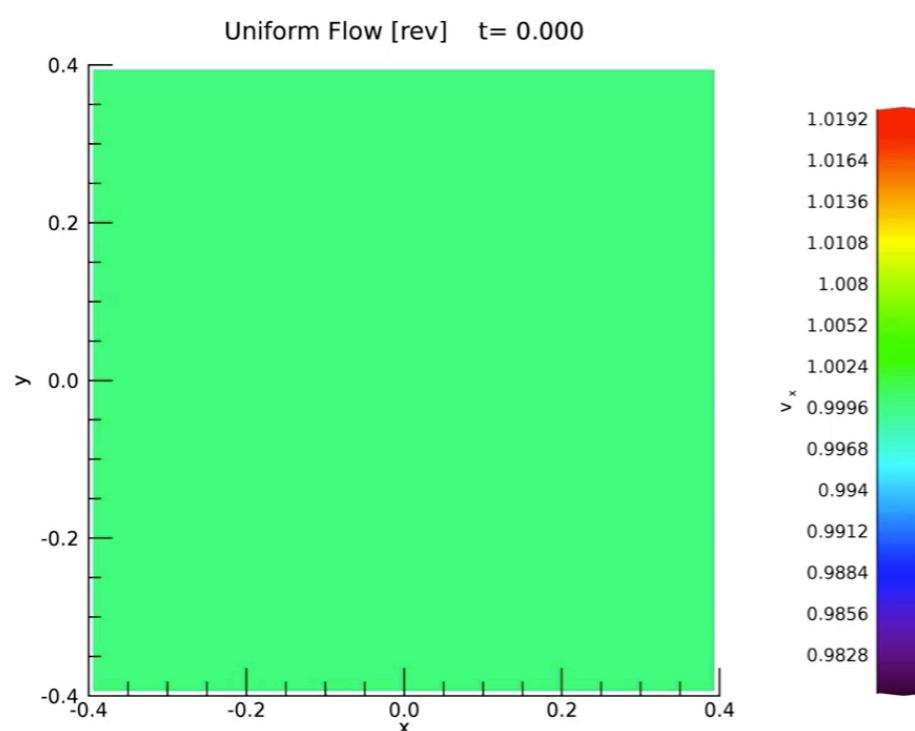
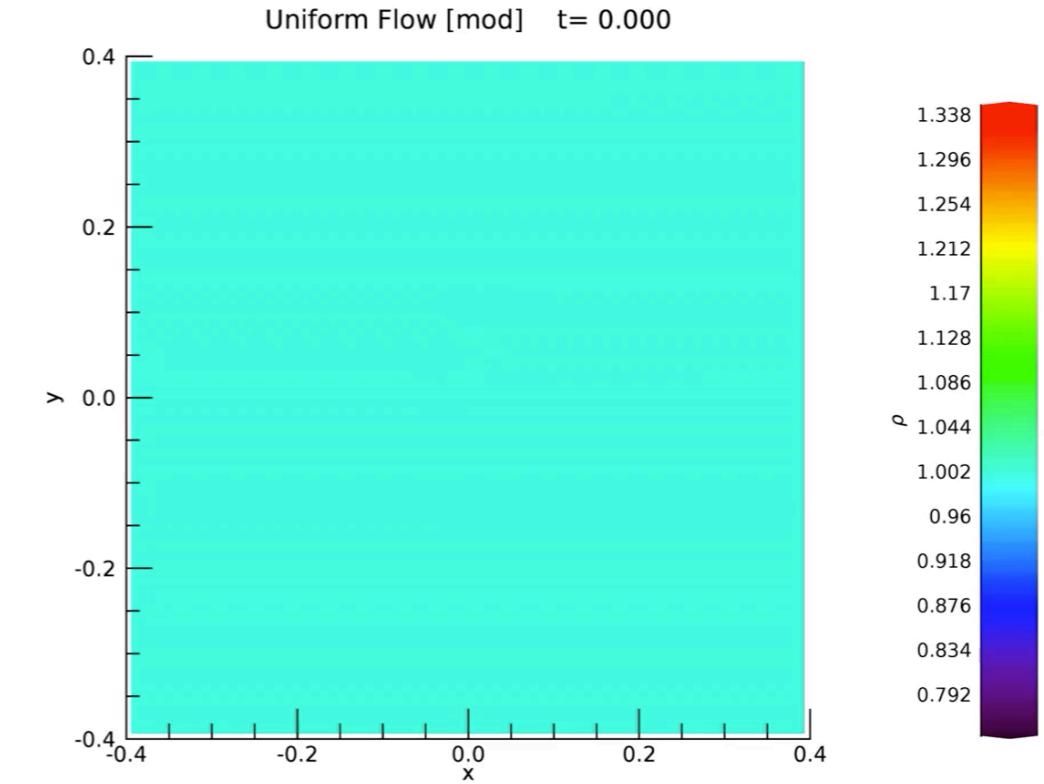


v_y (normal velocity)

改良型1



一樣流

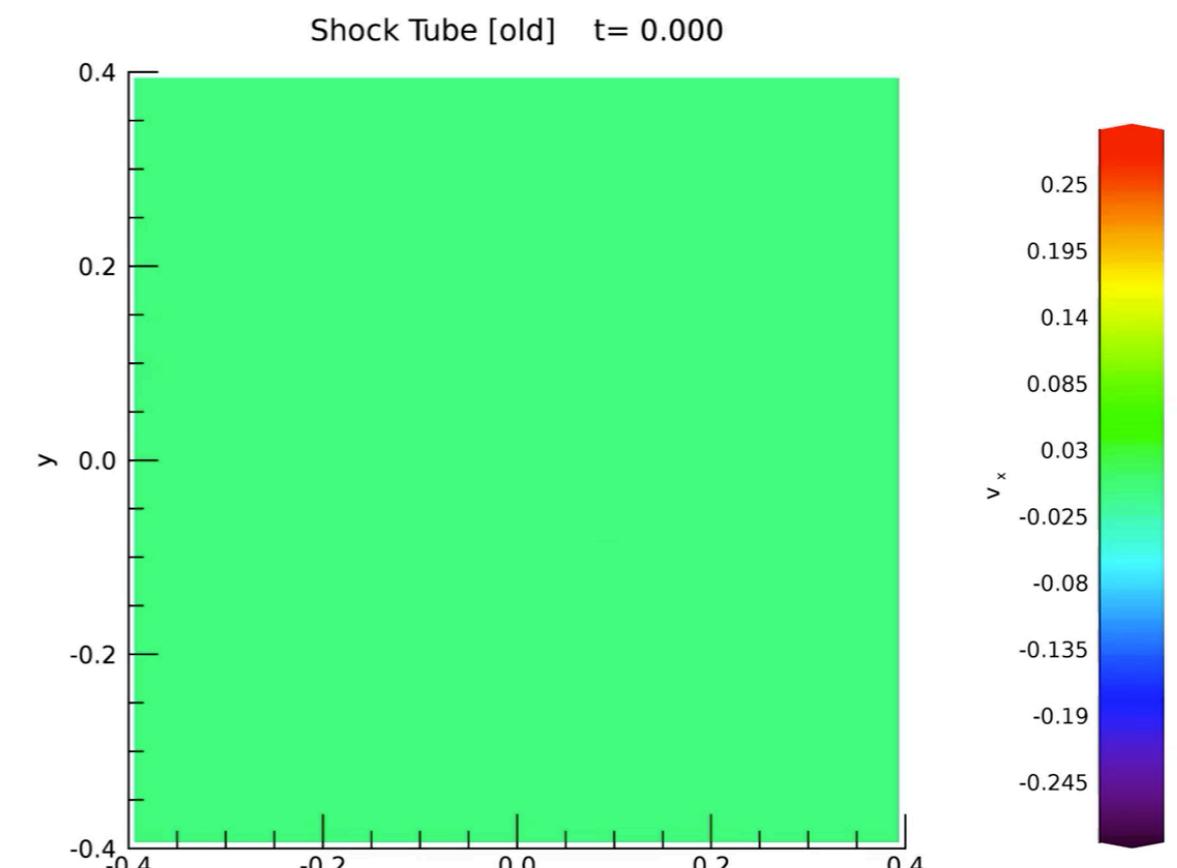
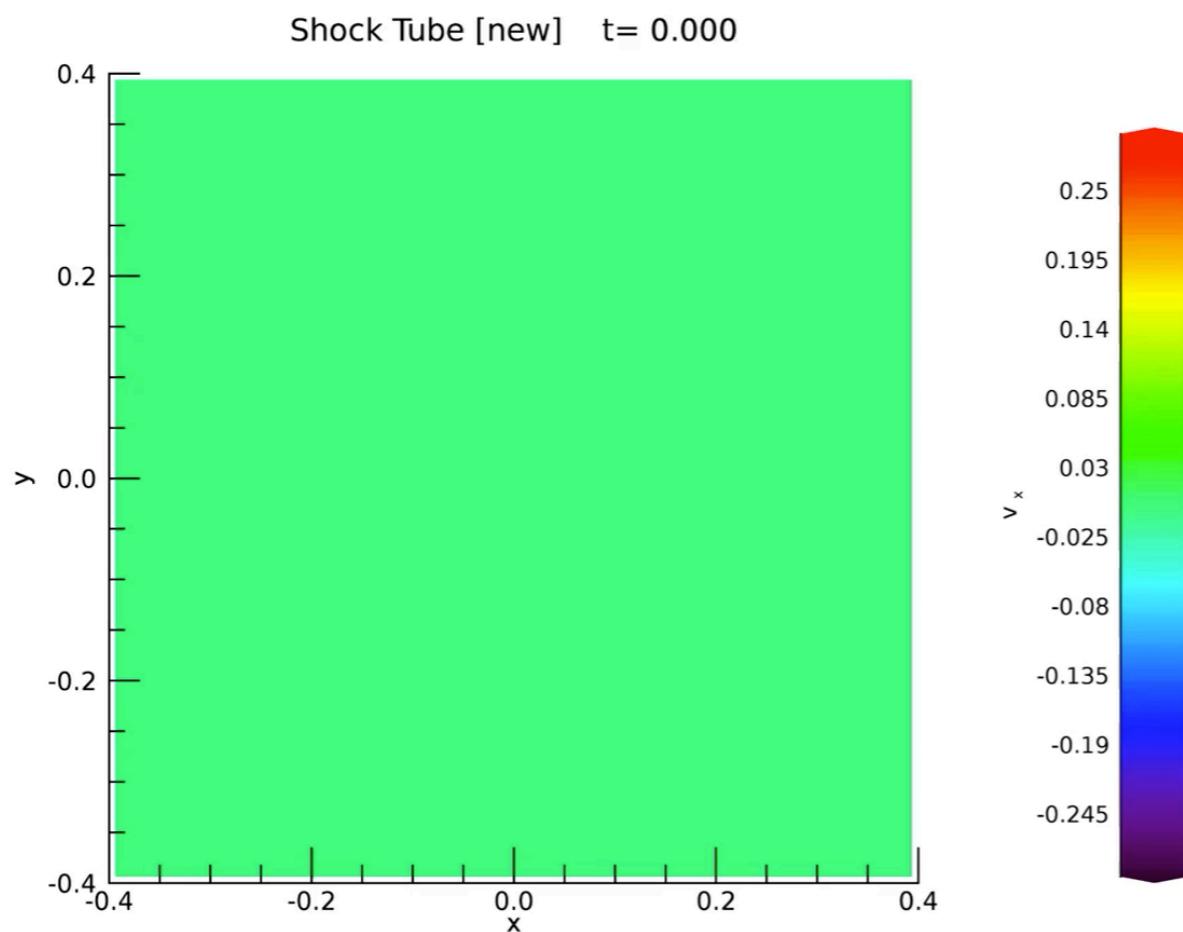


衝擊波管問題

$(\rho, P) = (1.0, 1.0)$ $y < 0$, $(\rho, P) = (0.1, 0.125)$ $y > 0$,

改良型1

標準



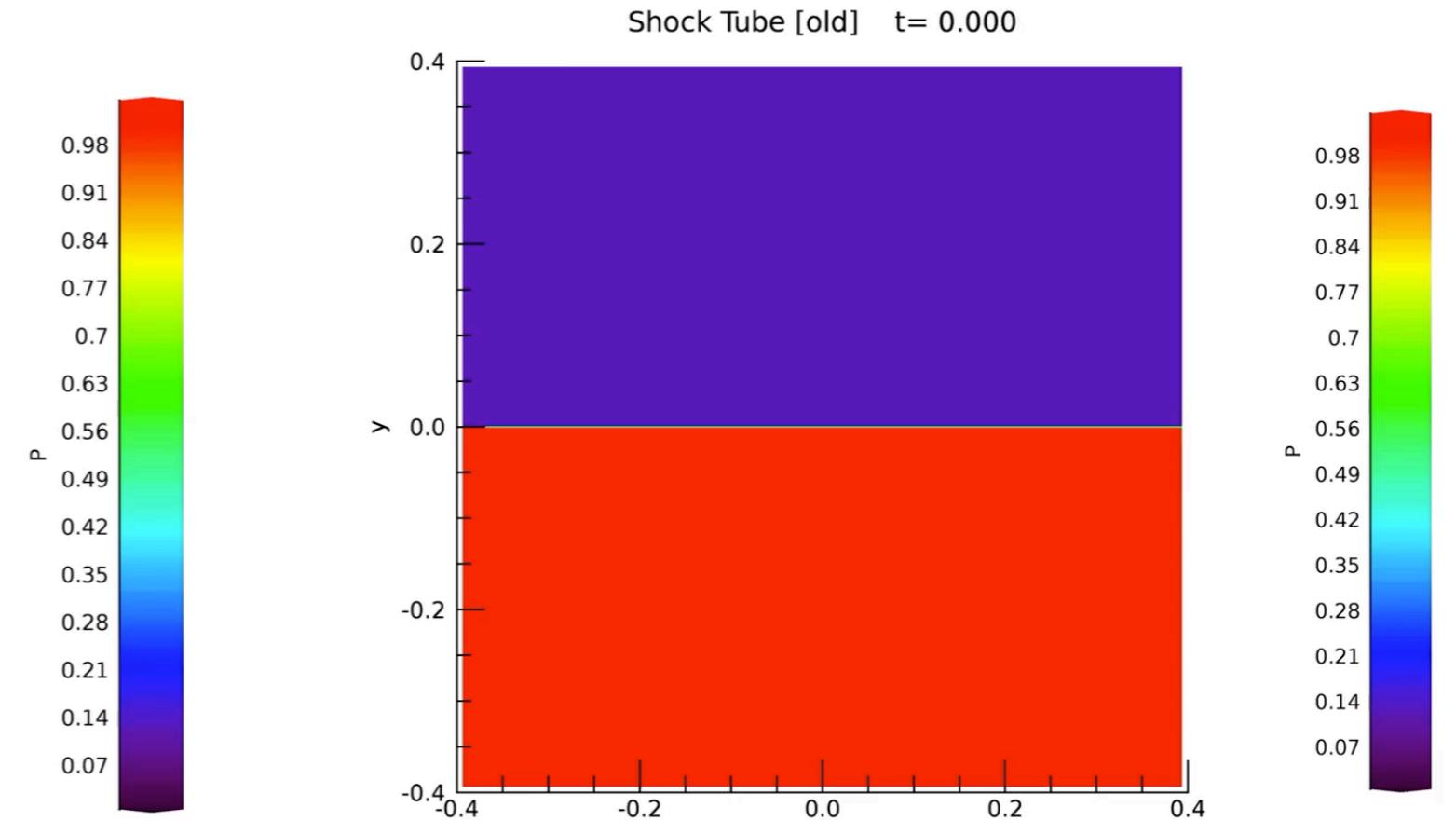
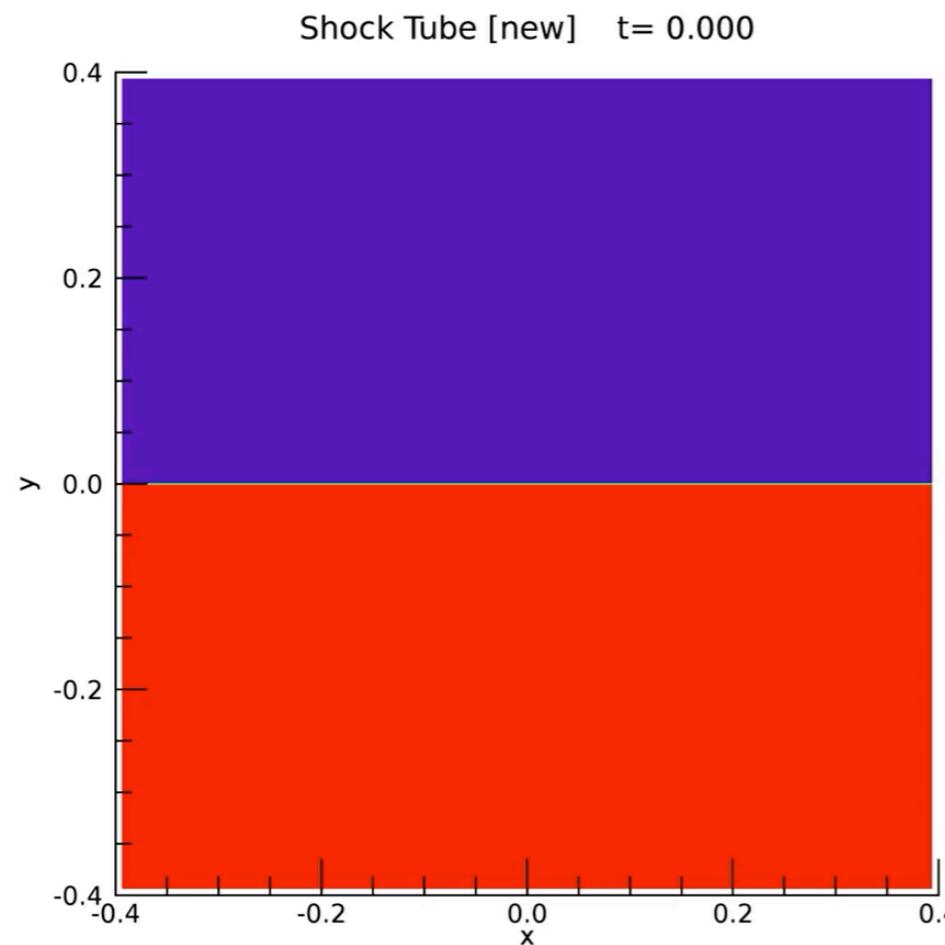
v_x (tangential velocity)

衝擊波管問題

$(\rho, P) = (1.0, 1.0)$ $y < 0$, $(\rho, P) = (0.1, 0.125)$ $y > 0$,

改良型1

標準

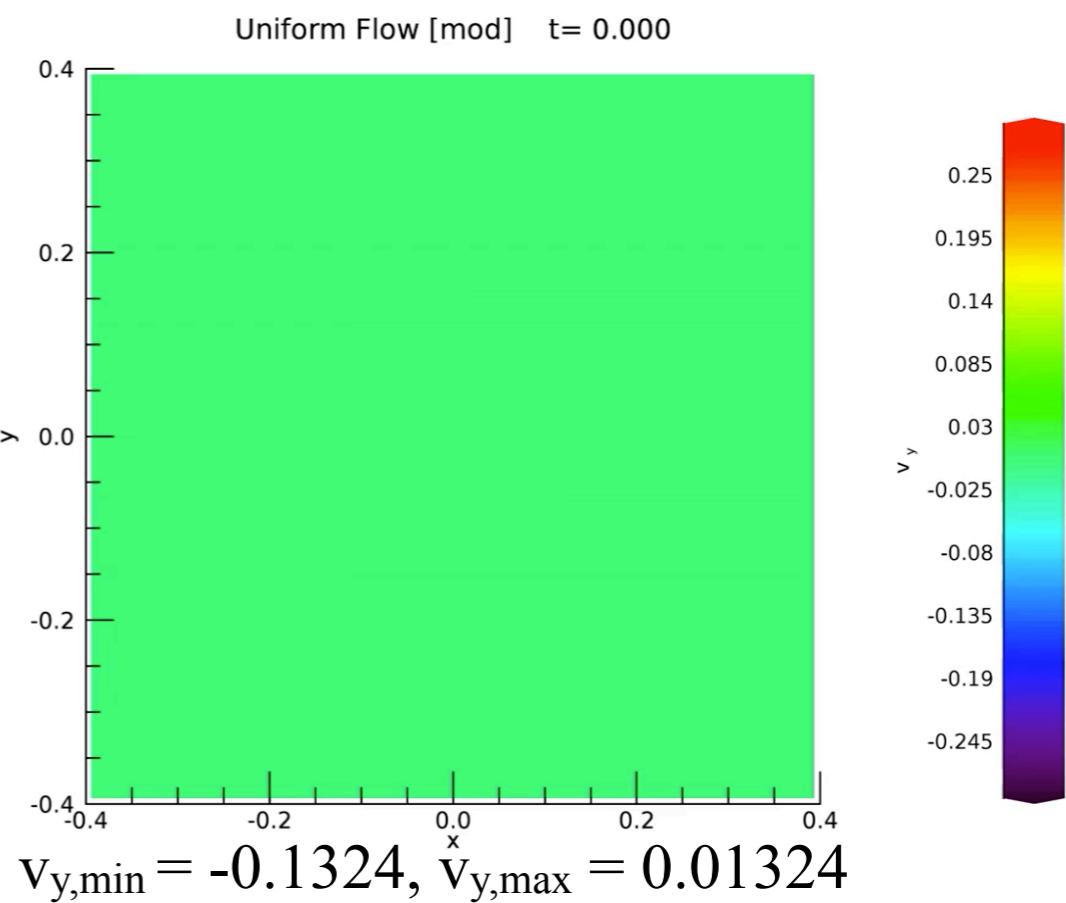
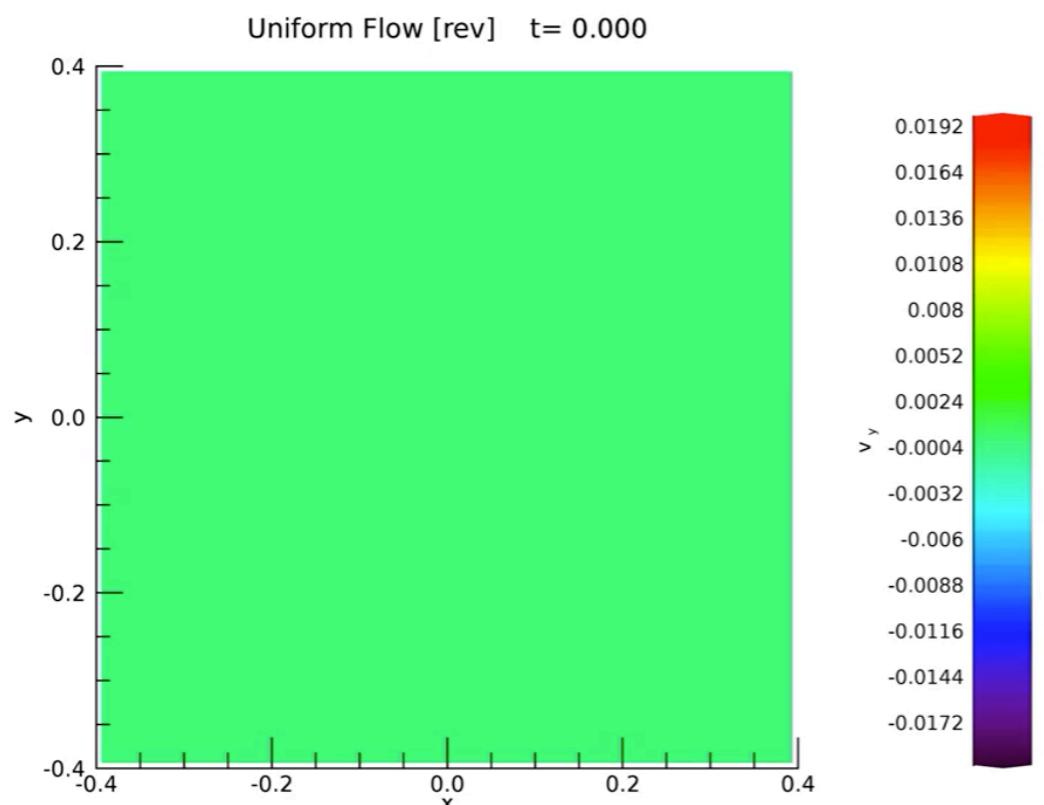
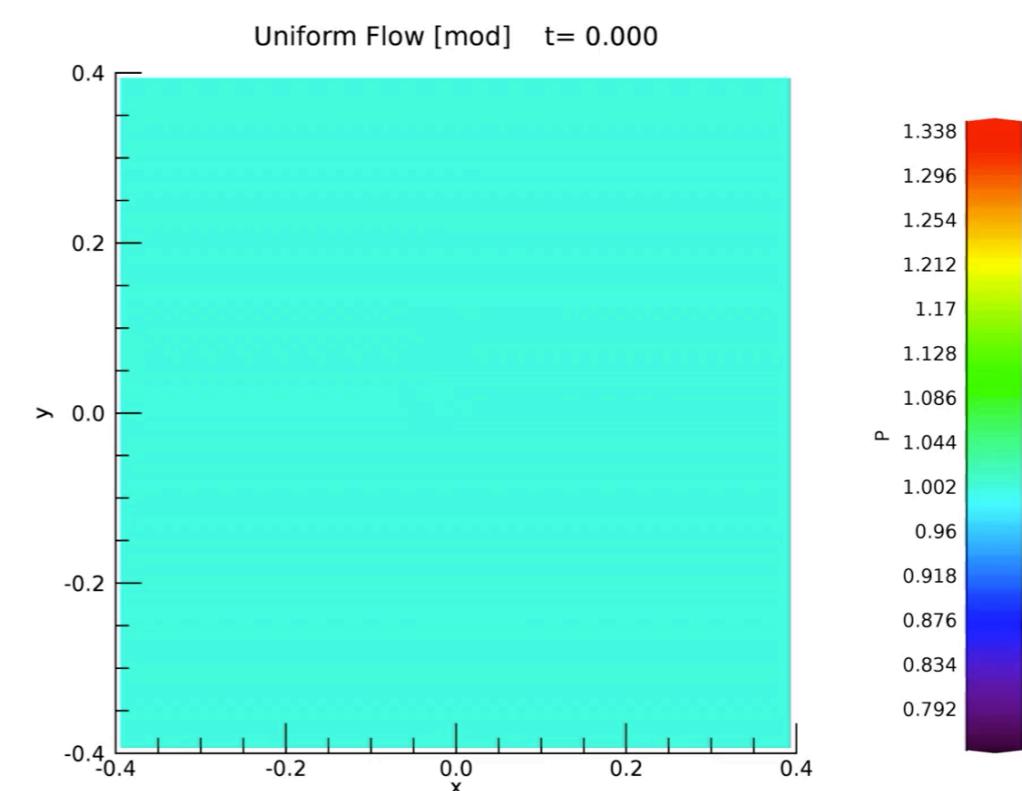
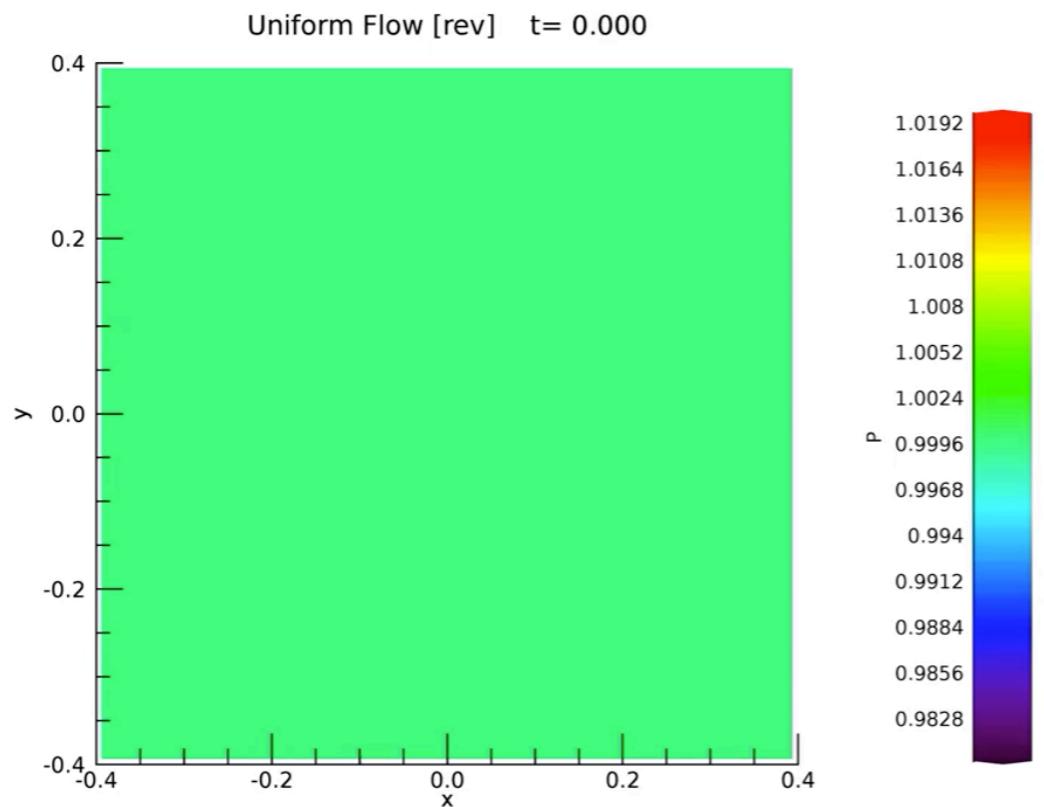


pressure

改良型1

一樣流

標準



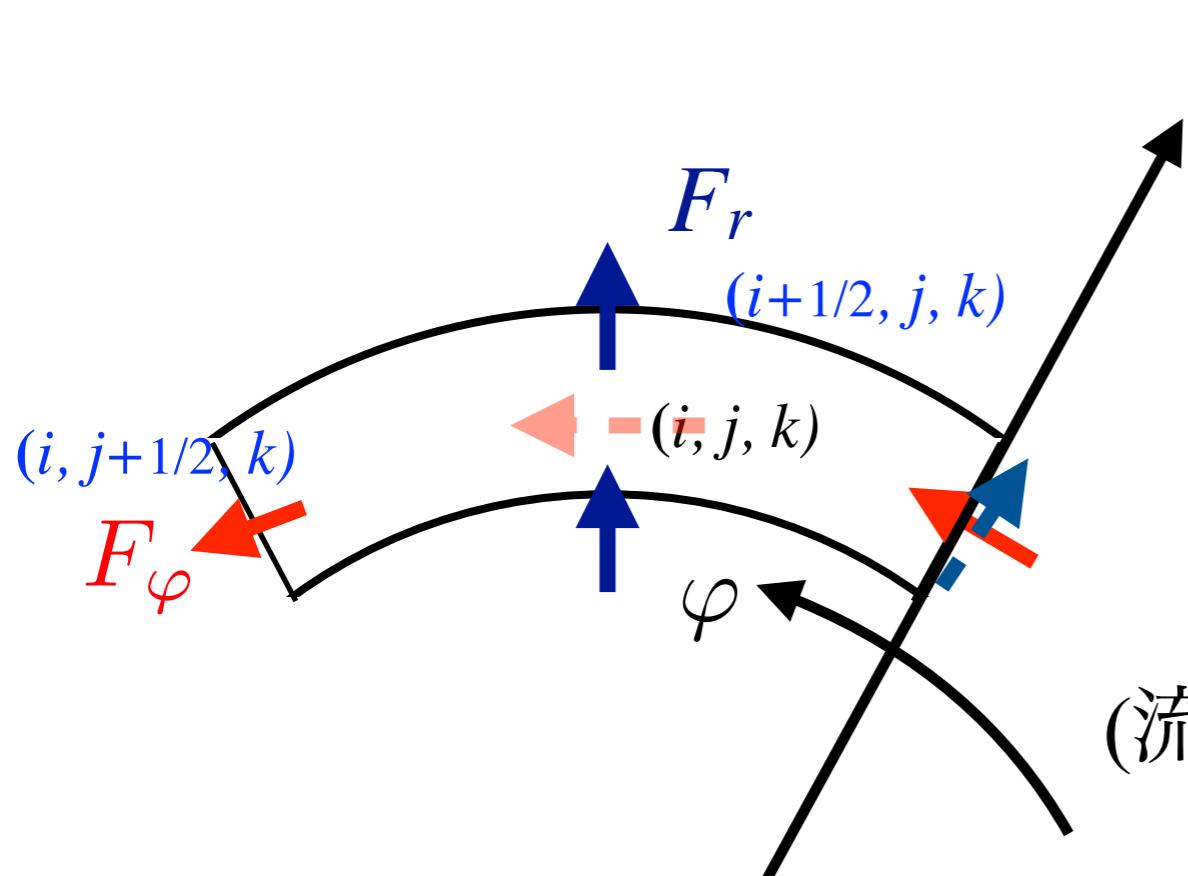
より適切な差分法

$$\Delta S_{\varphi, i, j+1/2, k} \rightarrow f(\Delta\varphi) \Delta S_{\varphi, i, j+1/2, k}$$

f : r 方向のセル境界の曲がりを補正する因子

P, ρ, v が一様な場合に流れが変化しないようにする。

座標系の曲がりによる力を排除する。



超音速の流れで重要

質量保存則の場合

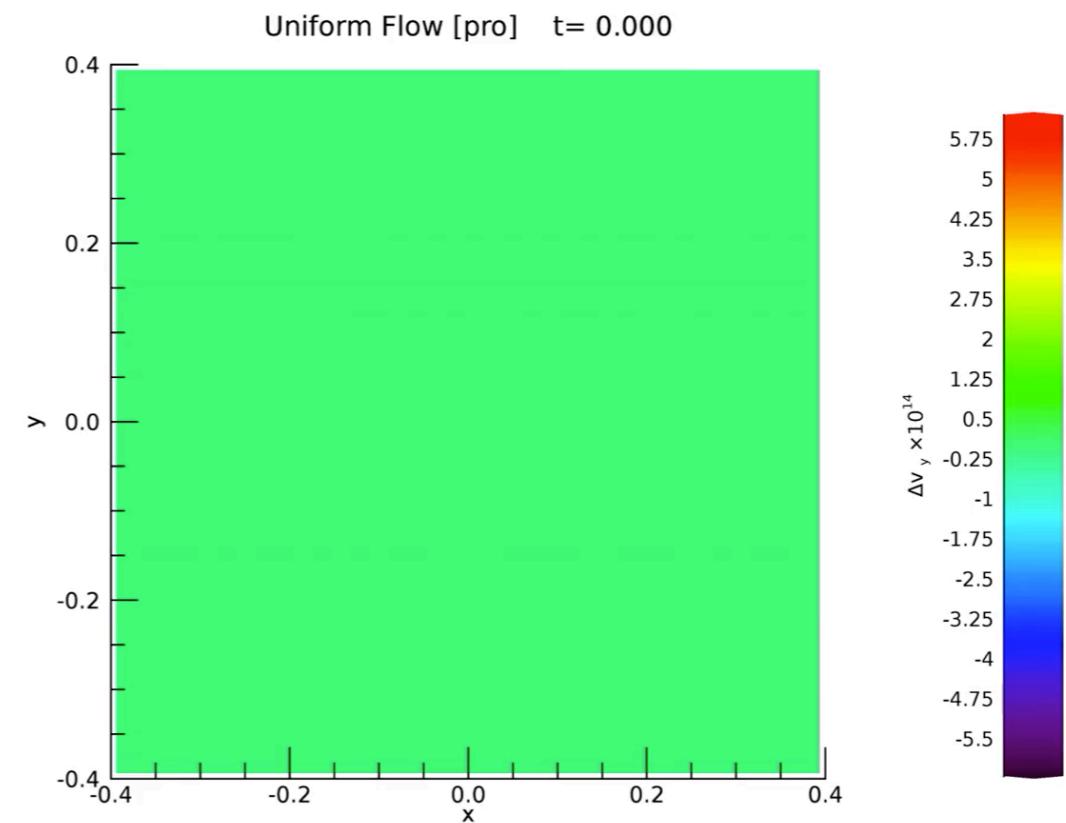
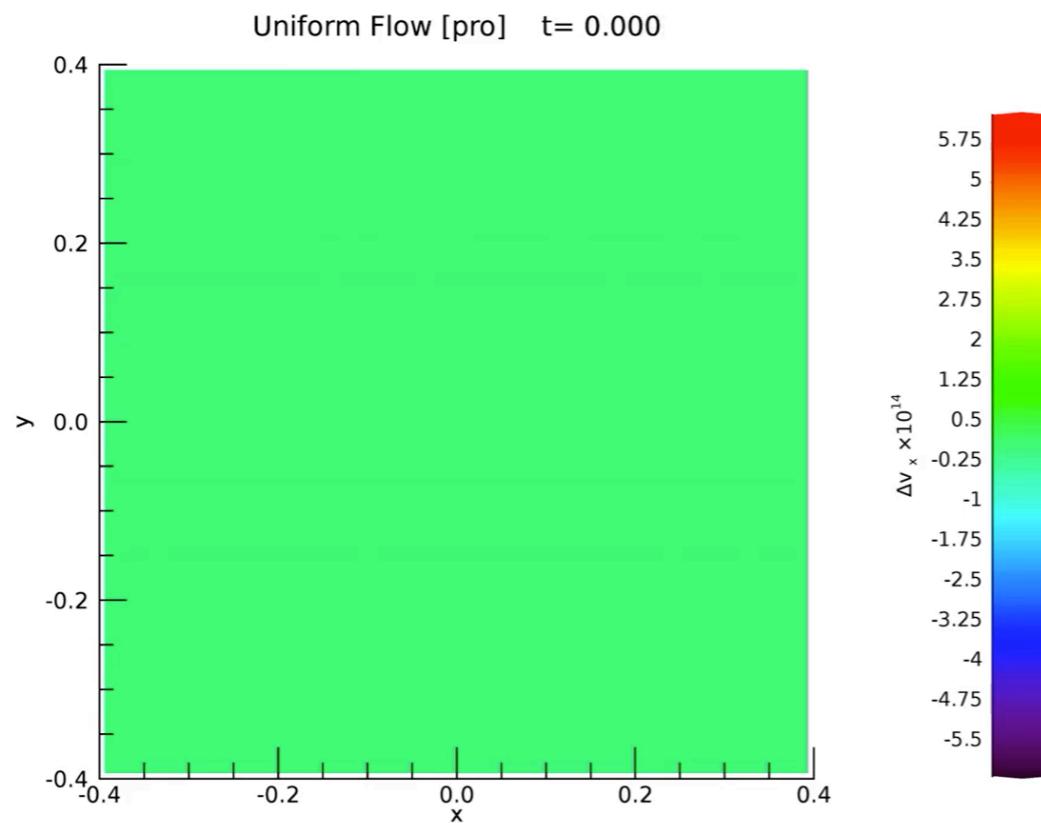
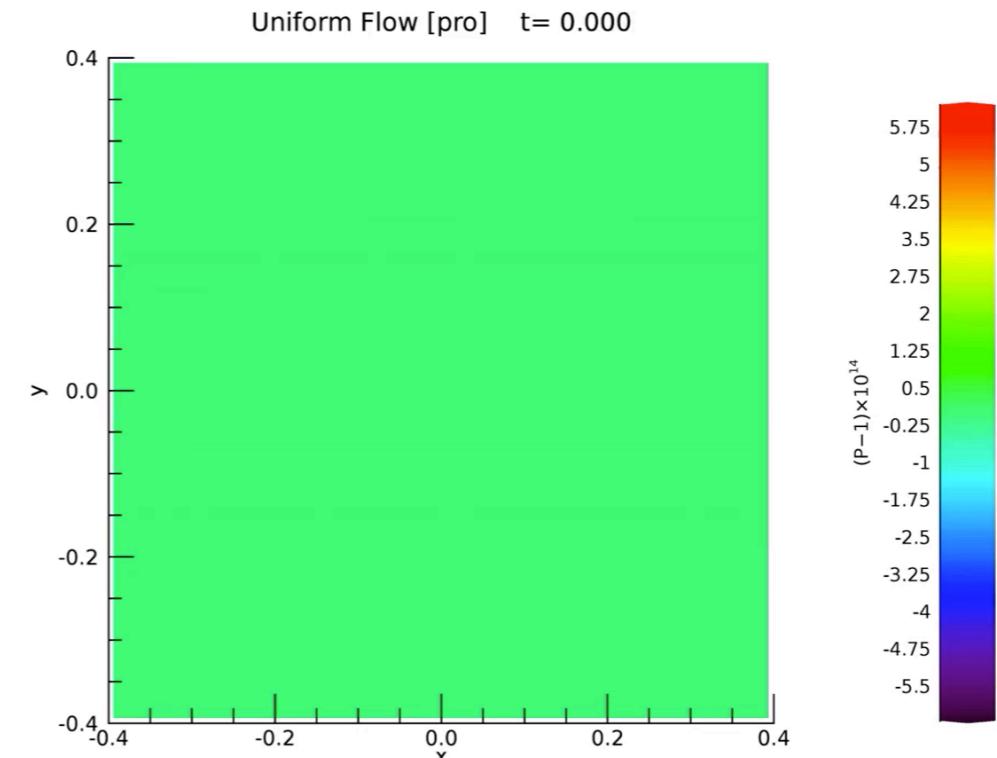
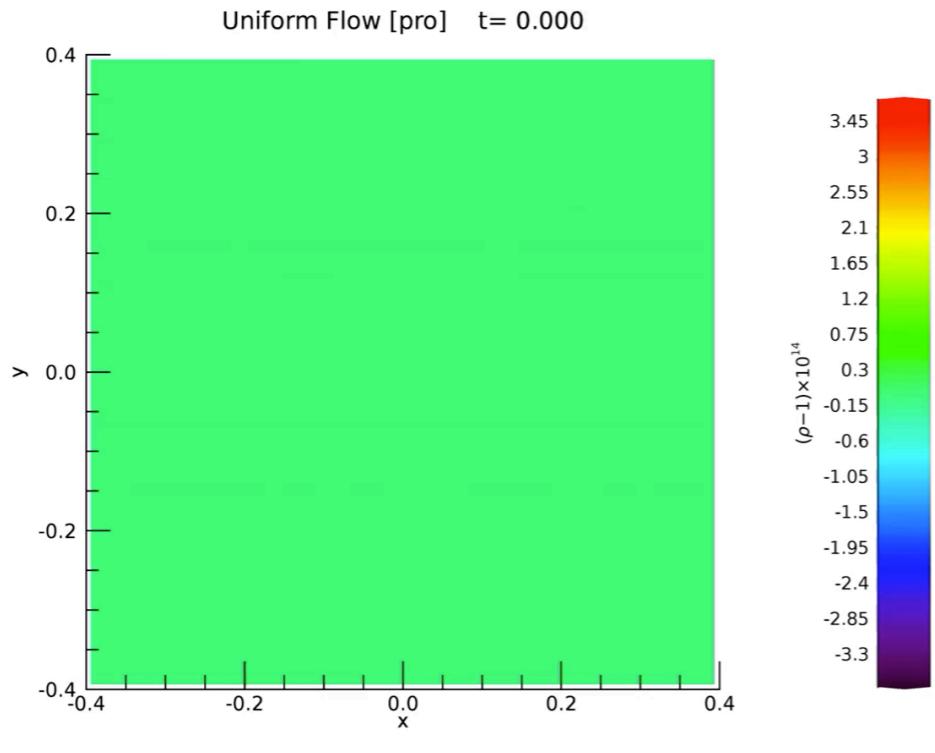
$$f = (\Delta\varphi/2)/\sin(\Delta\varphi/2)$$

(流束とセルの角度分解能が等しい場合)

$P = \text{const}, v = \text{const}$ の場合, $\nabla P = 0, \nabla \cdot v = 0, \nabla \cdot vv = 0$ となる差分

より適切な差分法で求めた一様流の誤差

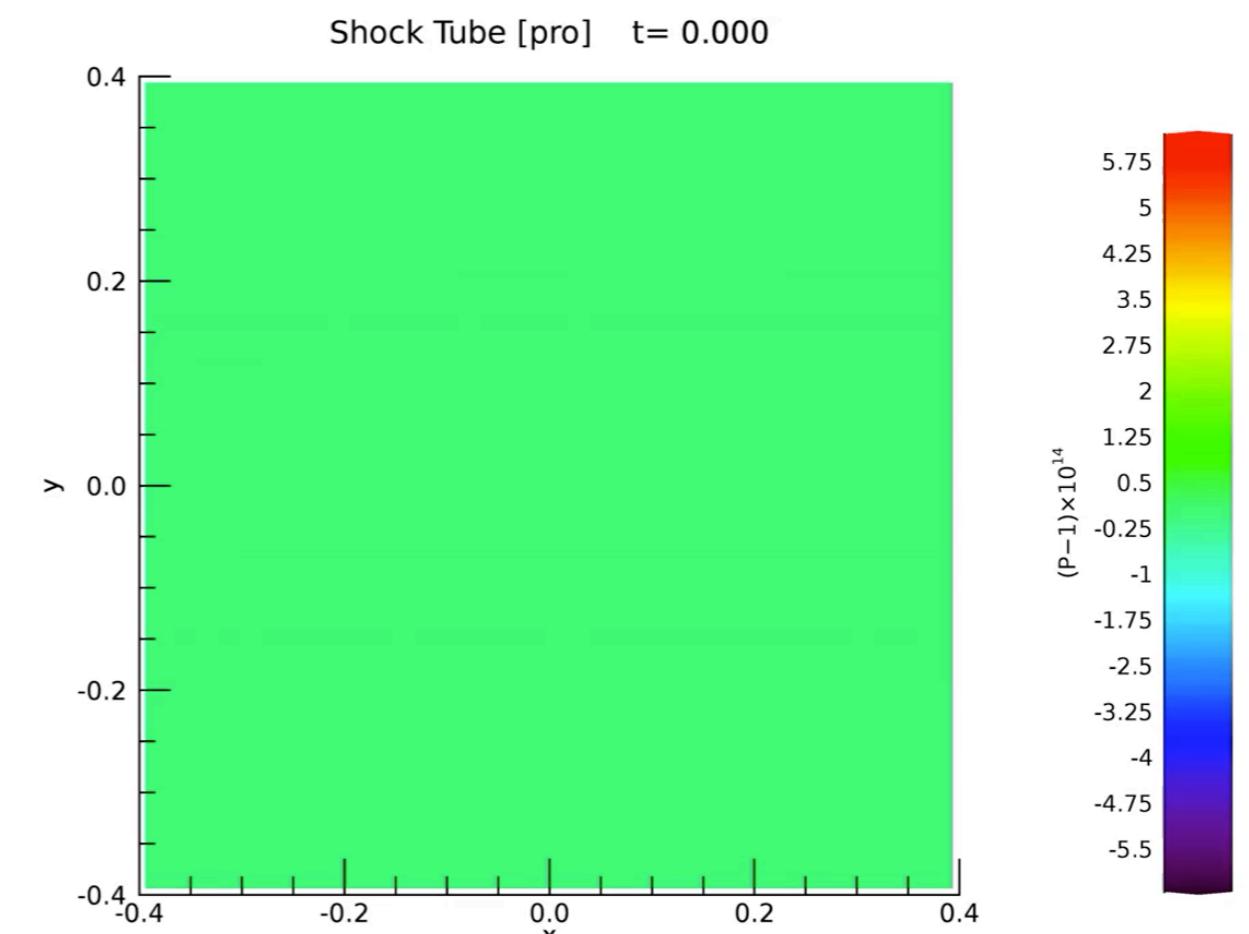
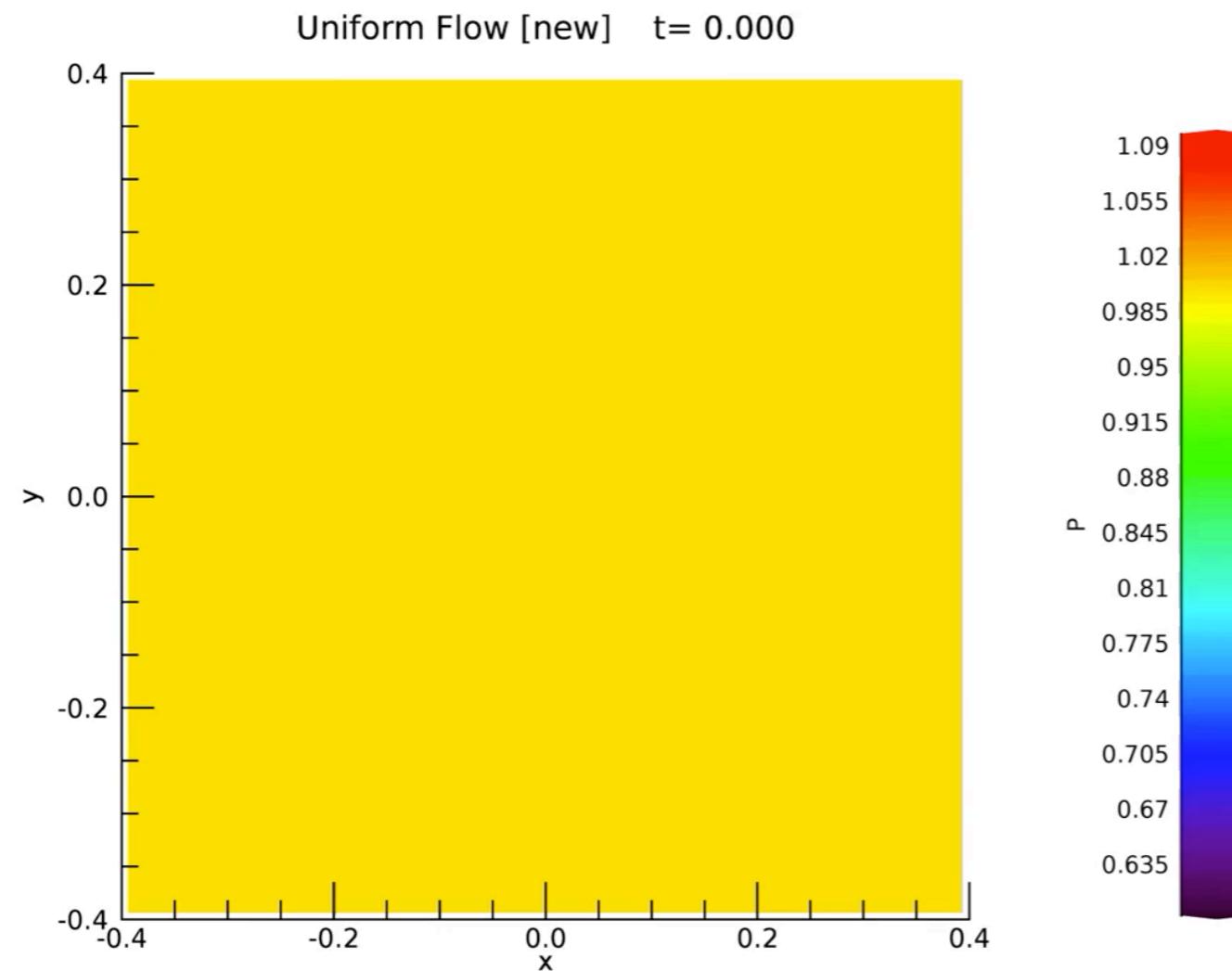
$$\rho = P = 1, v_x = 2, v_y = 0$$



一様流 $\rho = P = 1, v_x = 2.5, v_y = 0$

改良法1

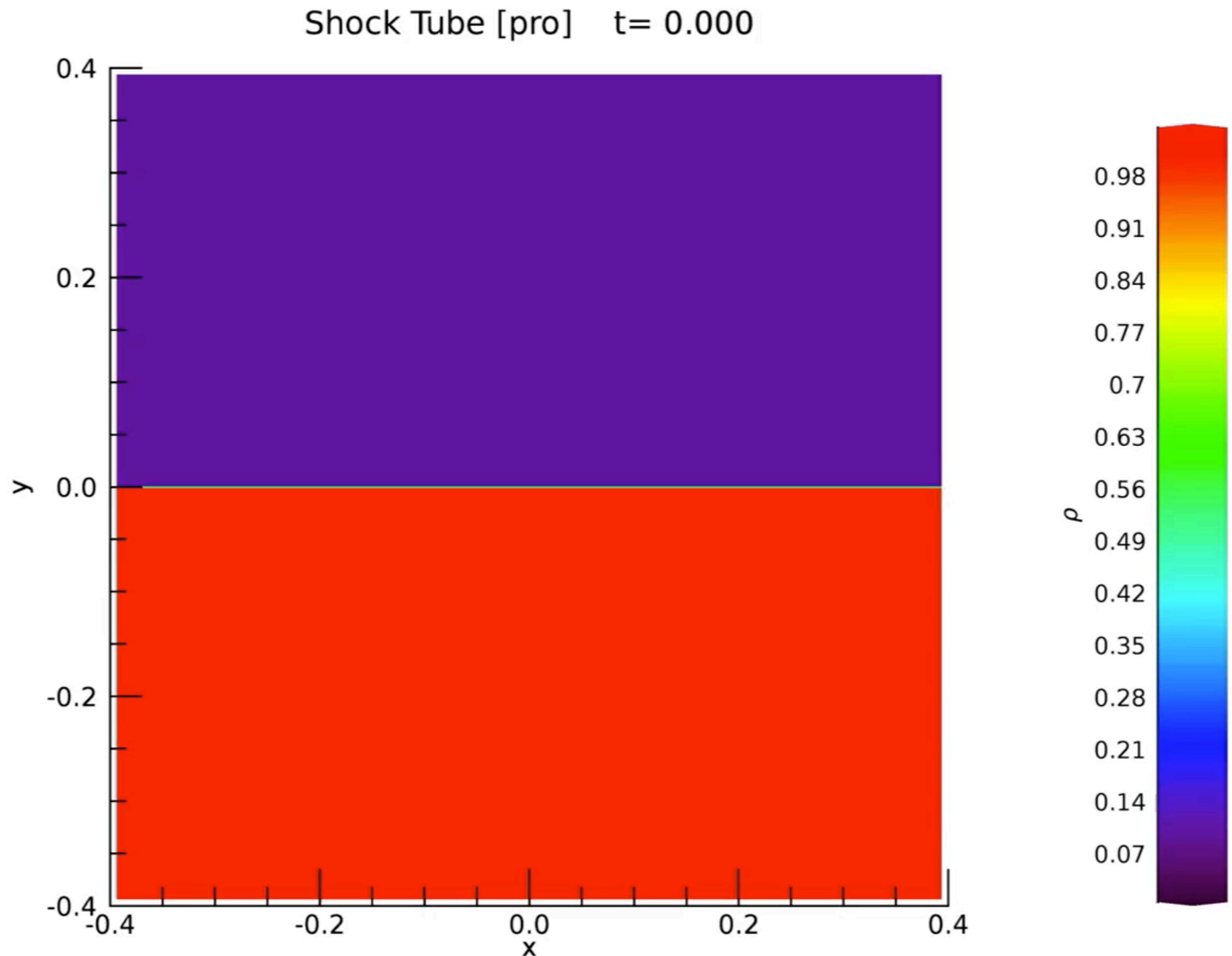
適切な差分法



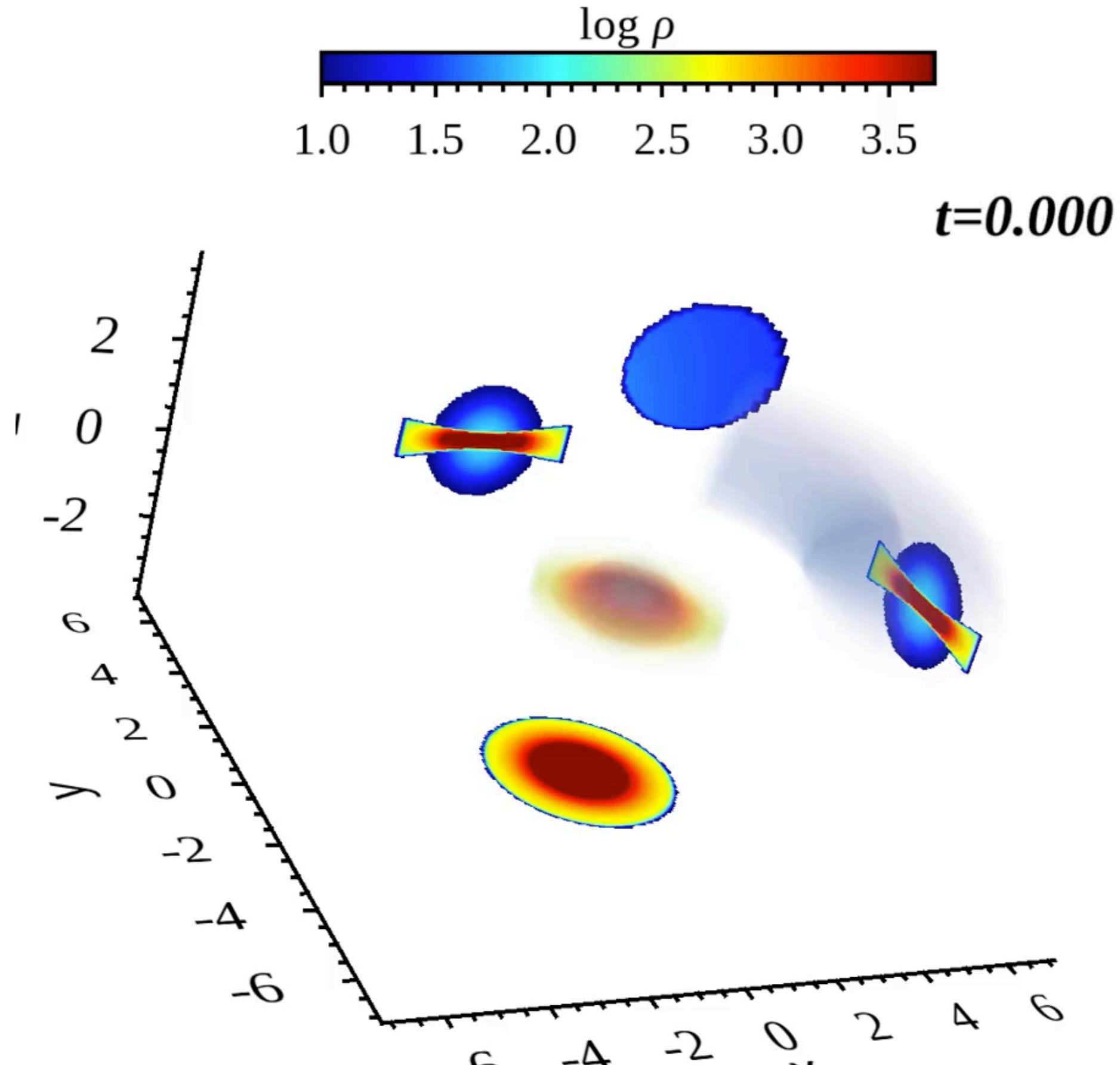
圧力誤差 $\times 10^{14}$

流れの向きによらず打ち切り誤差なし

より適切な差分法で求めた衝撃波管問題



3次元流体シミュレーションの例(改良型1)



まとめ

1. 遠心力は ϕ 方向のセル境界に働く動圧の一部と考えるべきである。
2. 単位ベクトル e_r, e_ϕ の向きがセル中心と境界で異なることを考慮するという概念は、磁気力 $j \times \mathbf{B}$ や極座標 (r, θ, ϕ) などに拡張できる。
3. 円筒座標系でも一様流を厳密に再現できる差分法がある。
4. 適切な差分法を採用すれば、低い角分解能でも計算可能なので、CFL条件を緩められる。