

为简单起见，做如下假设：假设样本空间 χ 和假设空间 H 是离散的。令 $P(h|X, \mathcal{L}_a)$ 代表算法 \mathcal{L}_a 基于训练数据 X 产生假设 h 的概率。令 f 代表我们希望学得真实函数，对于二分类问题，假设真实目标函数可以是任何函数 $\chi \mapsto \{0,1\}$ ，且所有可能的 f 符合均匀分布。

令 $l(h(x), f(x))$ 为性能度量函数，用分类误差的和作为函数性能的评估，则有：

$$\begin{aligned}\sum_f E_{ote}(\mathcal{L}_a|X, f) &= \sum_f \sum_h \sum_{x \in \chi - X} p(x) l(h(x), f(x)) p(h|X, \mathcal{L}_a) \\ &= \sum_{x \in \chi - X} p(x) \sum_h p(h|X, \mathcal{L}_a) \sum_f l(h(x), f(x))\end{aligned}$$

对于评估函数 l ，这里假设是二分类问题，所以对对应样本空间 χ 所有的 f 可能为 $2^{|\chi|}$ 。由于 f 为均匀分布，所以通过算法学得 $h(x)$ 中，必有一半的 f 与 $h(x)$ 的预测值相等。因此：

$$\begin{aligned}\sum_f l(h(x), f(x)) &= \frac{1}{2} 2^{|\chi|} l(h(x) = f(x)) + \frac{1}{2} 2^{|\chi|} l(h(x) \neq f(x)) \\ &= 2^{|\chi|-1} (l(h(x) = f(x)) + l(h(x) \neq f(x)))\end{aligned}$$

对于二分类问题，任何评估函数 l 的正确分类与错误分类的得分应该是固定的，即：

$$\begin{aligned}l(0,0) &= l(1,1), l(0,1) = l(1,0) \\ l(0,0) + l(0,1) &= l(1,1) + l(1,0)\end{aligned}$$

因此， $l(h(x) = f(x)) + l(h(x) \neq f(x))$ 为常数，设为 A ，则：

$$\begin{aligned}\sum_f E_{ote}(\mathcal{L}_a|X, f) &= \sum_{x \in \chi - X} p(x) \sum_h p(h|X, \mathcal{L}_a) \sum_f l(h(x), f(x)) \\ &= \sum_{x \in \chi - X} p(x) \sum_h p(h|X, \mathcal{L}_a) \cdot 2^{|\chi|-1} \\ &= \sum_{x \in \chi - X} p(x) \cdot 1 \cdot 2^{|\chi|-1}\end{aligned}$$