

# La règle d'or de Fermi

Théo Duez

20 avril 2024

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	La mécanique quantique . . . . .	2
1.2	La règle d'or de Fermi . . . . .	3
1.3	Objectifs de ce projet . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Introduction of the main Mathematical tools</b>	<b>4</b>
2.1	Premières définitions . . . . .	4
2.2	Spectre et Résolvant . . . . .	4
2.3	Calculs fonctionnels . . . . .	4
2.4	Schrodinger-equations . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Approche par les résonances</b>	<b>6</b>
3.1	Matrice de Livsic . . . . .	7
3.2	Théorème de Howland . . . . .	8
3.3	Orth's Theorem . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Second Approach : Davies's Theory</b>	<b>9</b>
	<b>Appendices</b>	<b>10</b>
<b>A</b>	<b>Biblio</b>	<b>10</b>

# 1 Introduction

## 1.1 La mécanique quantique

Développé dans les années par une dizaine de physiciens devenus célèbres dont notamment Paul Dirac, Werner Heisenberg, Louis de Broglie, Erwin Schrödinger etc., la mécanique quantique est la branche de la physique théorique qui permet d'expliquer le comportement des particules élémentaires, des atomes, des molécules ou de tout système physique de taille similaire. Elle a rencontré de nombreux succès en permettant d'expliquer ce que la physique classique ne pouvait pas, par exemple la structure électronique des atomes et des molécules, ....

Nous ne prétendons pas ici à fournir ne serait-ce qu'une introduction d'introduction d'un vrai cours de mécanique quantique, et bon nombre de concepts et de résultats élémentaires seront omis. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [1], [2] ou [3]. Nous allons nous concentrer sur ce que l'on appelle les postulats de la mécanique quantique qui permettent de poser les bases de la modélisation mathématique et de ses outils avec lesquels nous allons traiter tout au long de ce rapport.

### Postulat 1 : Principe de superposition

L'état d'un système quantique est défini à tout instant  $t$  par un vecteur unitaire, dénoté  $|\psi(t)\rangle$ , appartenant à un espace de Hilbert complexe  $\mathcal{H}$  séparable.

### Postulat 2 : Principe de correspondance

### Postulat 3 : Principe de quantification

### Postulat 4 : Principe de décomposition spectrale

### Postulat 5 : Principe de réduction du paquet d'onde

### Postulat 6 : Evolution d'un système dans le temps

## 1.2 La règle d'or de Fermi

Qu'est ce que la règle d'or de Fermi ? A ce propos, Wikipédia [] dit efficacement ceci :

*"En physique quantique, la règle d'or de Fermi est un moyen de calculer le taux de transition (probabilité de transition par unité de temps) à partir d'un état propre énergétique d'un système quantique vers un continuum d'états propres, par perturbation."*

Cette définition mérite un certains nombres d'explications que nous allons prendre le temps de donner.

**Spectre continu** Comme nous l'avons rappelé, tout système quantique est régi par un opérateur linéaire, appelé Hamiltonien et noté  $H$ , auto-adjoint. Cet opérateur peut agir soit sur des espaces de dimension fini, dans ce cas  $H$  est simplement une matrice, ou des espaces de dimension infinies, à titre d'exemple citons le Laplacien agissant sur  $H^2(\mathbb{R}^3)$ . Les grandeurs qui peuvent être mesurées sur ces systèmes sont les valeurs propres de cet opérateur, le système se projetant alors sur le sous-espace propre associé. S'il est aisé d'étudier le spectre de matrice, étudier le spectre d'opérateur de dimension infini est plus délicat et se traite dans des cours de Théorie Spectrale. Nous renvoyons en annexe à quelques définitions et grands principes de la théorie spectrale et supposons que le lecteur a connaissance des notions abordées dans l'annexe. Il est important de noter que la théorie spectrale en dimension infinie est certes plus générale que celle de la dimension finie, mais implique nombre de résultats et de notions plus délicates qui sont complètement absents du monde fini-dimensionnel et qui ne peuvent donc pas être "intuités". Illustrons cela.

- spectre opérateur compact, opérateurs continus -> cela vient du fait que différence injective  $\Leftrightarrow$  bijective  $\Leftrightarrow$  surjective

L'hamiltonien  $H$  possède la propriété d'être auto-adjoint. Il s'agit là d'une généralisation d'être symétrique pour des matrices réelles ou hermitiennes pour des matrices complexes. Il est possible de montrer qu'il est possible de diagonaliser, dans un sens généraliser, tout opérateurs auto-adjoints, dont les valeurs propres sont alors réelles. Nous renvoyons encore ici à l'annexe pour plus de détails. Cette hypothèse qui vient des physiciens est assez naturelle si l'on cherche à faire les postulats [] et [].

**Perturbation** Expliquons maintenant ce que l'on entend par perturbation en physique quantique. Il arrive souvent que le système que l'on étudie est soumis à une "petite" perturbation, c'est à dire que notre hamiltonien de départ se retrouve remplacé par un nouvel hamiltonien  $H(\epsilon) := H_0 + \epsilon H_1$  où  $H_1$  est aussi un opérateur autoadjoint représentant la perturbation et  $\epsilon$  un réel positif qui a vocation à être petit. Par exemple, cela peut modéliser []. En présence de tels perturbations, les valeurs propres initiales peuvent se retrouver perturbées, et la connaissance des valeurs propres étant fondamentales en physique quantique, des physiciens ont développé des théories pour calculer, étudier, caractériser les valeurs propres perturbées et qui ont été reprises rigoureusement par des mathématiciens comme la théorie de Kato qui stipule de nombreux résultats selon la régularité des domaines des opérateurs  $H_0$  et  $H_1$ .

**Perturbation** En résumé,

### 1.3 Objectifs de ce projet

Comme nous l'avons dit, la règle d'or de Fermi est un résultat bien connue des physiciens. Toutefois, les preuves que l'on peut trouver dans des livres de physiques reposent souvent sur des hypothèses pas toujours claires voire douteuses. À titre d'exemple, Wikipédia [] propose une preuve dans le paragraphe qui fait une hypothèse qui n'est pas claire. Les mathématiciens, comme souvent, ont cherché à justifier rigoureusement les assertions des physiciens et sont parvenus à établir des résultats sur la règle d'or de Fermi. L'objectif de ce projet est donc d'étudier différentes preuves permettant d'établir la règle d'or de Fermi. Nous investiguons deux approches très différentes, une dite par les résonances, qui reposent sur de nombreux concepts de théorie spectrale, et sur l'approche de Davies qui repose sur l'étude d'un problème d'évolution. Nous chercherons à expliciter et simplifier ces démonstrations dans le cas de systèmes quantiques simples ainsi qu'à comparer ces deux approches. Nous proposons aussi l'étude de [dimension finie].

## 2 Introduction of the main Mathematical tools

Pour étudier la règle d'or de Fermi, et les problèmes de mécanique quantiques en général, les mathématiciens ont recours à une théorie fondamentale : la théorie spectrale. Cette théorie a pour but d'étudier le comportement d'opérateurs linéaires sur des espaces de Hilbert ou de Banach potentiellement (et surtout ) de dimension infinie, et de leurs spectres, généralisant les études bien connues sur les matrices, opérateur de dimension finie.

[Continuer intro]

Il faut un cours entier de M2 pour établir les éléments introductifs de la théorie spectrale et commencer à entrevoir les théories sous-jacentes, comme la théorie des perturbations de Kato, le principe du maximum ou la théorie de la diffusion. Cette théorie requiert

### 2.1 Premières définitions

(1 Pages)

- Déf opérateur, bornée, non-bornée, symétrique - Déf adjoint d'un opérateur, déf autoadjoint (généralisation de Hermitienne) - Exemples

### 2.2 Spectre et Résolvant

(1.5 pages)

- Déf résolvant, spectre et différents types de spectre - Identité du résolvant - Opérateur conjugué  $\Rightarrow$  même spectre - Spectre opérateur compact, auto-adjoint (juste propriétés), quelques inégalités et petit principe du maximum

### 2.3 Calculs fonctionnels

(1.5 pages)

Intro pour dire pourquoi on s'intéresse à ça :  $e(iH)$ , généralisation du spectre d'un opérateur  $T$  - Déf convergence forte généralisée

## 2.4 Schrodinger-equations

### 3 Approche par les résonances

Dans cette partie, nous abordons l'approche dite par les résonances, dénomination que nous expliquerons dans la suite. Nous reprenons les notations fixées précédemment ([1]). L'idée est d'utiliser les formules de Cauchy de théorie spectrale pour se ramener à un problème avec une intégrale complexe. Si  $H_0$  est un opérateur borné de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H}$  alors son spectre est borné, plus précisément  $\text{spec } H_0 \subseteq [-\|H_0\|, \|H_0\|]$ . La théorie des perturbations classique indique que le spectre de  $H(\epsilon)$  est "proche" du spectre de  $H_0$  lorsque  $\epsilon$  est petit. Il existe donc un contour  $\Gamma$  dans  $\mathbb{C}$  tel que  $\text{spec } H \subset \text{int}(\Gamma)$  où  $\text{int}(\Gamma)$  est l'unique composante connexe bornée de  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ . On écrit donc d'abord (voir [1]) :

$$\langle \varphi_0 | e^{-iH(\epsilon)t} \varphi_0 \rangle = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma} e^{-itz} \langle \varphi_0, (H(\epsilon) - z)^{-1} \varphi_0 \rangle dz. \quad (1)$$

On a remplacé l'étude sur l'exponentielle de  $H(\epsilon)$  en une étude de sa résolvante.

### 3.1 Matrice de Livsic

Considérons un opérateur  $H$  auto-adjoint sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ ,  $E_0$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $\mathcal{H}$ , et  $P$  la projection orthogonal sur ce sous-espace. Comme expliquer plus haut, l'approche par les résonances consiste à se ramener à étudier la quantité impliquant la résolvante  $R(z) := (H - z)^{-1}$  et la projection  $P$  :

$$P(H - z)^{-1}P \quad (2)$$

où  $z$  est un complexe. Cette quantité est comme la résolvante bien définie et holomorphe sur  $\text{res } H$ . A l'instar des différents types de singularités en analyse complexe, cette quantité est méromorphe sur une certaine partie du spectre : le spectre discret. Pour rappel, le spectre discret  $\text{spec}_d H$  est l'ensemble des valeurs propres de multiplicité finie de  $H$ . La résolvante, et donc la compression (2), est donc méromorphe sur le spectre essentiel  $\text{spec}_{ess} H = \text{spec} \setminus \text{spec}_d H$ .

La formule (2) n'est pas très explicite tel quel et signifie

On a la proposition suivante qui va nous permettre de définir la matrice de Livsic.

**Proposition 1.**  *$PR(z)P$  est inversible pour  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .*

*Démonstration.* Une remarque importante à faire est que  $PR(z)P$  est un endomorphisme linéaire de  $E_0$  qui est de dimension finie. Il suffit donc de montrer que cette quantité est injective. Soit  $z = a + ib \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  et  $x \in E_0$  tel que  $PR(z)Px = 0$ . En particulier, on a

$$0 = \text{Im} \langle x, PR(z)Px \rangle = \text{Im} \langle x, R(z)x \rangle = b \left\| \left( (H - a)^2 + b^2 \right)^{-1/2} x \right\|^2$$

car  $x = Px$ , et car  $P$  et  $H$  sont auto-adjoint. Comme  $b$  est non nul, nécessairement  $x = 0$ .  $\square$

Cela nous permet de définir la notion de matrice de Livsic.

**Définition 1** (Matrice de Livsic). *Pour  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , on définit la matrice de Livsic par*

$$B(z) = (PR(z)P)^{-1} + z$$

*qui vérifie l'identité*

$$(B(z) - z)^{-1} = P(H - z)^{-1}P.$$

*Cet identité nous permet d'étendre la définition de  $B(z)$  sur  $\mathbb{C} \setminus \text{spec}_{ess} H$ .*

Nous avons les deux propriétés suivantes.

**Remarque 1.** Cette notion de matrice de Livsic fait écho avec sa version finie dimensionnelle bien connue : le complément de Schur. Soient  $n, m \in \mathbb{N}^*$ . Considérons une matrice  $A \in \mathbb{C}^{(n+m) \times (n+m)}$  hermitienne s'écrivant

$$A := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

avec  $A_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A_{12} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ,  $A_{21} \in \mathbb{C}^{m \times n}$  et  $A_{22} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et cherchons à résoudre le problème aux valeurs propres  $Ax = \lambda x$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}^{n+m}$  en supposant que  $\lambda$  ne soit pas valeur propre de  $A_{22}$ . La deuxième ligne de ce système conduit à l'égalité  $x_2 = -(A_{22} - \lambda)^{-1}A_{21}x_1$  que l'on peut injecter dans la première ligne et obtenir  $(A_{11} - A_{12}(A_{22} - \lambda)^{-1}A_{21})x_1 = \lambda x_1$ . On voit que l'on a bien réduit la dimension du problème de départ et que  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  si et seulement si  $\lambda$  est valeur propre de  $(A_{11} - A_{12}(A_{22} - \lambda)^{-1}A_{21})$ .



### 3.2 Théorème de Howland

Dans son article intitulé *The Livsic Matrix in Perturbation Theory*, James S. Howland propose en 1975 un théorème de concentration spectrale intéressant, sous l'hypothèse relativement forte mais qui est souvent vérifiée : la possibilité d'effectuer un prolongement analytique de la matrice de Livsic du plan complexe supérieur vers le plan complexe inférieur.

**Théorème 1 (Concentration spectrale - Howland (1975)).** *Soit  $(H_n)$  une suite d'opérateur auto-adjoints convergent fortement dans le sens généralisé vers un opérateur autoadjoint  $H$ . Soit  $\lambda_0$  une valeur propre de  $H$  de multiplicité finie et soit  $E_0 = \text{Ker}(H - \lambda_0)$ . Soient  $B_n(z)$  et  $B(z) = \lambda_0 I_m$  les matrices de Livsic sur  $E_0$  pour  $H_n$  et  $H$  respectivement. Supposons que*

- (1) *pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B_n(z)$  possède un prolongement analytique  $B_n^+(z)$  du plan complexe supérieur sur un voisinage  $\Omega$  de  $\lambda_0$ ,*
- (2)  *$(B_n^+(z))$  converge fortement vers  $B(z)$  uniformément sur  $\Omega$ .*

*Alors, pour  $n$  assez grand, l'équation sur  $z$  :  $\det(B_n^+(z) - z) = 0$  possède exactement  $m$  solutions comptées avec multiplicités dans  $\Omega$ . De plus, si on note  $\xi_k(n) = \lambda_k(n) - i\Gamma_k(n)$  pour  $k \in \{1, \dots, m\}$  ces solutions, et si on choisit une suite  $(\delta_k(n))$  de réels positifs de sorte que  $\Gamma_k(n) = o(\delta_k(n))$ , alors en définissant les intervalles*

$$J_k(n) = \bigcup_{k=1}^m (\lambda_k(n) - \delta_k(n), \lambda_k(n) + \delta_k(n))$$

*alors  $P = st - \lim E_n(J_n)$ .*

*Démonstration.* Commençons par prouver l'existence des zéros. Par hypothèse, on a que la suite de matrices  $(B_n(z))$  converge uniformément sur  $\Omega$  vers  $B(z)$ , ce qui implique, en combinant au fait que le déterminant est continue, que pour  $n$  assez grand et tout  $z \in \Omega$ ,

$$|\det(B_n^+(z) - z) - \det(B(z) - z)| < \epsilon = |\det(B(z) - z)|$$

car  $|\det(B_n^+(z) - z - (B(z) - z))| \leq \|B_n - B\| \rightarrow 0$ . Ceci étant vrai pour tout  $z \in \Omega$ , ceci est vrai pour tout  $z \in \gamma$  où  $\gamma$  est un chemin inclu dans  $\Omega$  et entourant  $\lambda_0$ . Comme  $\lambda_0$  est l'unique zéro et de multiplicité  $m$  de  $\det(B(z) - z)$ , par théorème de Rouché [], l'équation  $\det(B_n^+(z) - z) = 0$  a exactement  $m$  solutions comptées avec multiplicité.

□

*Démonstration.* En utilisant successivement la formule de Cauchy, l'égalité définissant les matrices de Livsic,

$$\begin{aligned}\langle \varphi_0, e^{-iH(\epsilon)t} \varphi_0 \rangle - \langle \varphi_0, e^{-iH_n(\epsilon)t} \varphi_0 \rangle &= \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma} e^{-itz} \langle \varphi_0, (H(\epsilon) - z)^{-1} - (H_n(\epsilon) - z)^{-1} \rangle \varphi_0 \rangle dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma} e^{-itz} (B(z, \epsilon) - z)^{-1} - (B_n(z, \epsilon) - z)^{-1} dz\end{aligned}$$

□

### 3.3 Orth's Theorem

## 4 Second Approach : Davies's Theory

# Appendices

## A Biblio

- Antoine Levitt : Schur Complement - Stephane Nonnenmacher : Cours de théorie Spectrale - Wikipédia