ПИН-23, Исламов Радмир Рашитович, 19.04.2023 19:23

БИЛЕТ КОЛЛОКВИУМА № 26 ПО КУРСУ «Численные методы», 2023 г.

1. (*3 балла*) Чему равна абсолютная и относительная погрешности записанного в память компьютера числа 10π (ответ обосновать).

2. (*3 балла*) Была измерена погрешность ε_i в методе простых итераций при нескольких последовательных итерациях. Получены результаты

ε_i	ε_{i+1}	ε_{i+2}
0,009	0,0023	0,000625

. Сделать предположение о скорости убывания погрешности (линейная или квадратичная). Ответ обосновать.

3. (*3 балла*) Построить многочлен Эрмита (достаточно составить систему уравнений для коэффициентов многочлена), совпадающий с функцией $\cos x/3$ в узловых точках $x_0 = -3$, $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$ и имеющего первую производную в точке x_1 равную производной исходной функции.

4. (*3 балла*) Выберите отрезок $[-4, 1]$, на котором будем интерполироваться функция $y(x)$. Найдите чебышёвские узлы для построения многочлена Лагранжа 5-го порядка.

5. (*3 балла*) Найти шаг h, при котором формула $y'(x) \approx \frac{y(x+h)-y(x)}{h}$ даёт погрешность $\varepsilon = 10^{-5}$ для функции $\ln 2x$ в точке $x = 0{,}1$.

Исламов Радмир ПИН-23 Билет № 26

№1

$10\pi = 31{,}415926535897931\ldots$

Мантисса типа double занимает 52 бита, в мантиссу умещается до 15 разрядов.

$10\pi = 3{,}\underbrace{1{,}415926535897}_{15\ \text{знаков}}93\ldots \cdot 10$

$\pi = 31{,}415926535897931-$

$-3{,}1415926535897 93 \cdot 10 \approx 10^{-14}$

$\approx 10^{-14}$

В нашем случае в целой части было 2 разряда.

~~$\delta = \frac{\Delta}{10\pi} \approx 3 \cdot 10^{-16}$~~

$\delta = \frac{\Delta}{10\pi} \approx 3 \cdot 10^{-16}$

Ответ: 10^{-14} ; $3 \cdot 10^{-16}$

№3

ε_i	ε_{i+1}	ε_{i+2}
0,009	0,0023	0,000625

Скорость убывание ~~квадратичное~~ линейная т.к:

$\varepsilon_i = x \cdot 10^{-3}$ $\varepsilon_{i+1} = y \cdot 10^{-3}$ $\varepsilon_{i+2} = z \cdot 10^{-4}$

То есть погрешность явно убывает не с квадратичной, а с линейной скоростью.

№5

$y'(x) \approx \frac{y(x+h)-y(x)}{h}$ $\quad \varepsilon = 10^{-5}$

$f(x) = \ln 2x$ $\quad x = 0{,}1$

$\varepsilon = \frac{M_2 h}{2}$ $\quad M_2 = \max |f''(x)|$ на $[x; x+h]$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

Так как $\left|-\frac{1}{x^2}\right|$ на $(0;+\infty)$ ~~[0; 1]~~ ~~убывает~~ возрастает, ~~на отрез [0,1; 1,1+h]~~, максимум достигается на отрезке $[0{,}1; 0{,}1+h]$ в точке $0{,}1$

$M_2 = 0{,}23$

$h = \frac{2\varepsilon}{0{,}23} = \frac{-1\cdot 10^{-5}}{0{,}23} \approx -4\cdot 10^{-5}$

Ответ: $-4\cdot 10^{-5}$

№4

$$x_i = \frac{(a+b)}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \cos\left(\frac{(2i-1)\cdot\pi}{2n}\right)$$

$a = -4$, $b = 1$, i - номер узла.

$$x_1 = \frac{(1-(-4))}{2} + \frac{1-(-4)}{2} \cdot \cos\left(\frac{2\cdot 1-1}{2\cdot 5}\cdot\pi\right) = -3{,}438$$

$x_2 \approx -2{,}383$

$x_3 \approx -0{,}776$

$x_4 \approx 1{,}058$

$x_5 \approx 3{,}063$

Ответ: $-3{,}438$; $-2{,}383$; $-0{,}776$; $1{,}058$ и $3{,}063$

Таким образом **ответ**:

$$H(x) = 0{,}15425 + 0{,}0798093(x+3) -$$
$$- 0{,}011394(x+3)^2 - 0{,}0522906(x+3)(x+1) +$$
$$+ 0{,}013547(x+3)^2(x+1)$$

ЛР №3

Многочлен Эрмита $\cos\frac{x}{3}$ в $x_0=-3$ $x_1=-1$

$x_2=1$

Решение:

$H(-3)=\cos(-1)$

$H(-1)=\cos(-1)$

$H(1)=\cos\left(\frac{1}{3}\right)$

$H'(-1)=-\frac{1}{3}\sin\left(-\frac{1}{3}\right)$

Многочлен Эрмита

$H(x)=a+b(x+3)+c(x+3)^2+d(x+3)(x+1)+e(x+3)^2(x+1)$

$a=0{,}15425$

$a+2b+4c+8d+18e=0{,}15425$

$a+2b+4c-2d+6e=0{,}95534$

$b+2c+3d+9e=-\frac{30481}{2}$

$\Downarrow$

$a=0{,}15425$

$b=0{,}0798093$

$c=-0{,}011394$

$d=-0{,}0522906$

$e=-0{,}013547$

Тейл

$H(x)$

$-0{,}$

$+0{,}$

Исламов Радмир ПИН-23 Билет № 26

№1

$10\pi = 31{,}415926535897931\ldots$

Мантисса типа double занимает 52 бита, в мантиссу умещается до 15 разрядов. ~~числа~~

$10\pi = 3{,}\underbrace{1415926535897}_{15\ \text{знаков}}93\ldots \cdot 10$

$\Delta = 31{,}415926535897931 -$

$- 3{,}141592653589793 \cdot 10 \approx \cancel{1 \cdot 10^{-14}}$

$\cancel{\approx 1 \cdot 10^{-14}} \approx 10^{-14}$

$\cancel{\delta = \frac{\Delta}{10\pi} \approx 3 \cdot 10^{-16}}$ В нашем случае в целой части было 2 разряда.

$\delta = \frac{\Delta}{10\pi} \approx 3 \cdot 10^{-16}$

Ответ: 10^{-14} ; $3 \cdot 10^{-16}$

№3

ε_i	ε_{i+1}	ε_{i+2}
0,009	0,0023	0,000625

Скорость убывания ~~квадратичная~~ линейная т.к.:

$\varepsilon_i = x \cdot 10^{-3}$ $\varepsilon_{i+1} = y \cdot 10^{-3}$ $\varepsilon_{i+2} = 2 \cdot 10^{-4}$

То есть погрешность явно убывает не с квадратичной, а с линейной скоростью.