**Исламов Радмир Лабораторная 4**

import math

import matplotlib.pyplot as plt

import numpy as np

def get\_diff(f):

"""Returns a function that calculates the numerical derivative of f(x) using the central difference formula."""

return lambda x, h: (f(x + h) - f(x - h)) / (2 \* h)

# Define the function f(x)

f = lambda x: math.cosh(x / 4)

# Define the value of epsilon (ξ)

eps = 1.1

# Calculate the constant M\_2 for error estimation

M\_2 = 1 / 16 \* math.cosh(2 \* eps / 4)

# Calculate the exact derivative of f(x) at ε

df = 1 / 4 \* math.sinh(eps / 4)

# Define functions for calculating f\_h(x) and f\_2h(x)

f\_h = lambda x, h: (f(x + h) - f(x)) / h

f\_2h = get\_diff(f)

**Задание 1**

# Task 1 ---------------------------------------------------------

print('Task 1')

delta = 10 \*\* -3

# Calculate the optimal step size for the given delta and M\_2

h\_opt = delta \* 2 / M\_2

print(f"eps = 10^-3")

print(f"f'(eps) ~ {f\_2h(eps, h\_opt)}")

print(f"f'(eps) = {df}\n")

delta = 10 \*\* -6

# Recalculate the optimal step size for the new delta

h\_opt = delta \* 2 / M\_2

print(f"eps = 10^-6")

print(f"f'(eps) ~ {f\_2h(eps, h\_opt)}")

print(f"f'(eps) = {df}\n")

**Вывод:**

Task 1

eps = 10^-3

f'(eps) ~ 0.06962037552870244

f'(eps) = 0.06961981895533165

eps = 10^-6

f'(eps) ~ 0.06961981895461078

f'(eps) = 0.06961981895533165

**Задание 2**

# Task 2 ---------------------------------------------------------

h = [1 / 2, 1 / 4, 1 / 8]

print('Task 2')

print(f"f\_h = {df - f\_h(eps, h[0])}, {df - f\_h(eps, h[1])}, {df - f\_h(eps, h[2])}")

print(f"f\_2h = {df - f\_2h(eps, h[0])}, {df - f\_2h(eps, h[1])}, {df - f\_2h(eps, h[2])}\n")

**Вывод:**

Task 2

f\_h = -0.0164221266289879, -0.008157751056439677, -0.004066550179963491

f\_2h = -0.0001814433064526444, -4.5334256406848183e-05, -1.13319040433435e-05

**Задание 3**

# Task 3 ---------------------------------------------------------

print('Task 3')

x = np.array([i for i in range(30)])

e = np.array([abs(df - f\_h(eps, 1/2\*\*i)) for i in x])

delta = [M\_2 \* 1/2\*\*i / 2 for i in range(1, 31)]

print(delta)

print(e)

plt.plot(x, e)

plt.grid()

plt.show()

**Вывод:**

Task 3

[0.01804845959568658, 0.00902422979784329, 0.004512114898921645, 0.0022560574494608224, 0.0011280287247304112, 0.0005640143623652056, 0.0002820071811826028, 0.0001410035905913014, 7.05017952956507e-05, 3.525089764782535e-05, 1.7625448823912675e-05, 8.812724411956338e-06, 4.406362205978169e-06, 2.2031811029890844e-06, 1.1015905514945422e-06, 5.507952757472711e-07, 2.7539763787363555e-07, 1.3769881893681777e-07, 6.884940946840889e-08, 3.4424704734204443e-08, 1.7212352367102222e-08, 8.606176183551111e-09, 4.3030880917755554e-09, 2.1515440458877777e-09, 1.0757720229438889e-09, 5.378860114719444e-10, 2.689430057359722e-10, 1.344715028679861e-10, 6.723575143399305e-11, 3.361787571699653e-11]

[3.33358884e-02 1.64221266e-02 8.15775106e-03 4.06655018e-03

2.03031826e-03 1.01443544e-03 5.07038732e-04 2.53474861e-04

1.26726335e-04 6.33603971e-05 3.16795064e-05 1.58395805e-05

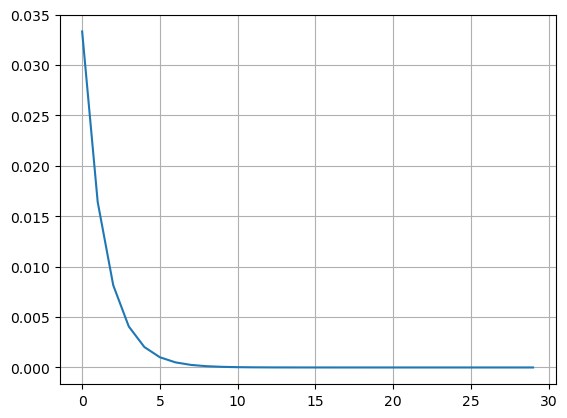
7.91974703e-06 3.95986258e-06 1.97992900e-06 9.89965841e-07

4.94982444e-07 2.47512574e-07 1.23792190e-07 6.19174469e-08

3.10673867e-08 1.54677335e-08 8.01715294e-09 4.29186264e-09

4.29186264e-09 5.66572345e-10 5.66572345e-10 1.54677335e-08

1.54677335e-08 7.50723783e-08]



**Контрольные вопросы**

1. Как теоретически узнать погрешность формулы численного дифференцирования? Как узнать порядок погрешности?

2. Какие есть способы получения формул численного дифференцирования?

3. Какие есть способы практической (при вычислении на компьютере) оценки погрешности численного дифференцирования?

4. Являются ли формулы численного дифференцирования устойчивыми к погрешностям входных данных? Ответ обоснуйте.

5. Опишите, как имея в распоряжении формулу для численного дифференцирования с порядком точности р, получить формулу с большим порядком точности (метод Рунге).

**Ответы:**

1. Теоретически погрешность формулы численного дифференцирования может быть оценена с использованием разложения функции в ряд Тейлора. Погрешность численного дифференцирования зависит от выбранной формулы и шага дифференцирования. Порядок погрешности определяет, как быстро погрешность уменьшается с уменьшением шага.

2. Существуют различные способы получения формул численного дифференцирования, включая центральную разностную формулу, прямую разностную формулу и формулы, основанные на интерполяции.

3. При практическом вычислении численного дифференцирования можно оценить погрешность с использованием методов аналитической оценки погрешности, например, путем сравнения с точным значением производной (если оно известно). Также можно использовать методы экспериментальной оценки погрешности, путем изменения шага дифференцирования и анализа изменения результата.

4. Формулы численного дифференцирования не являются абсолютно устойчивыми к погрешностям входных данных. Погрешности входных данных, такие как округления и ошибки округления, могут влиять на точность результата численного дифференцирования. Однако, некоторые формулы численного дифференцирования могут быть более устойчивыми к погрешностям входных данных, чем другие. Также формулы могут быть устойчивы и неустойчивы на разных промежутках.

Например, разобранные нами формулы позволяют оценить возможную погрешность.

Многочлены Чебышёва Tn(x) позволяют уменьшить погрешность интерполяции Rn(x) за счёт выбора узлов интерполяции. Если в качестве узлов интерполяции выбрать корни (4.5) многочлена T [a,b] n+1(x),|Rn(x)| 6 Mn+1 (n+1)!(b − a) n+12 1−2(n+1).

Есть среднеквадратическое приближение (метод наименьших квадратов), где соответствующую погрешность приближения можно характеризовать среднеквадратичным отклонением ∆ = 1 n+1 P n i=0 [Pm(xi) − yi ] 2 .

А на Многочлены Эрмита если интерполяция происходит на отрезке [a, b], содержащем xi , i = 0, . . . , n и функция f(x) (p+1) раз непрерывно дифференцируема, то погрешность выражается формулой: Rp(x) = f(x) − Hp(x) = f (p+1)(ξ) (p + 1)! (x − x0) K0 (x − x1) K1 . . .(x − xn) Kn , где ξ неизвестная точка принадлежащая интервалу [a, b].

5. Для увеличения порядка точности формулы численного дифференцирования можно использовать метод Рунге. Суть метода заключается в вычислении двух приближений с различными шагами дифференцирования, а затем комбинировании этих приближений таким образом, чтобы уменьшить погрешность. Например, можно вычислить производную с использованием шагов h и h/2, а затем использовать экстраполяцию Ричардсона для получения формулы с более высоким порядком точности.