

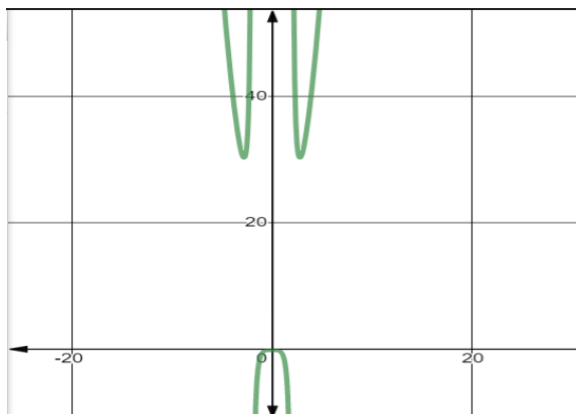


## Semana 3

### 5 Funciones racionales

Una función racional  $f$  es una razón de dos polinomios  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  Donde  $P$  y  $Q$  son polinomios El Dominio son todos los valores de  $x$  tales que  $Q(x) \neq 0$

**Ejemplo 12:** Realiza la gráfica de la función  $f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$  con ayuda de alguna herramienta de graficación y analiza.



Podemos evidenciar que toma valores en  $x$  de los  $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

### 6 Función exponencial y logarítmica

Se presentan dos funciones de gran importancia en la matemática, como son: la función exponencial y la función logarítmica.

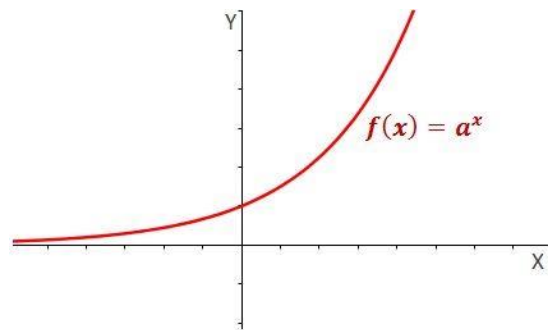
**Definición:** Sea  $a$  un número real positivo. La función que a cada número real  $x$  le hace corresponder la potencia  $a^x$  se llama **función exponencial de base  $a$  y exponente  $x$** .



Cuando  $a > 1$  .Es decir, cuando la base  $a$  es mayor que 1, la función exponencial es estrictamente creciente en su dominio.

Cuando  $0 < a < 1$  la función exponencial es estrictamente decreciente en su dominio.

Cuando  $a = 1$  la función exponencial es constante en su dominio.



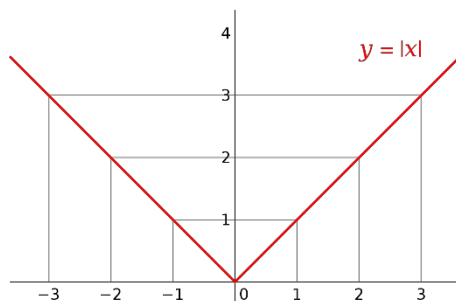
### 6.1 Criterio de la recta horizontal:

Una función es uno a uno si y sólo si cada recta horizontal, interseca la gráfica a lo más en un punto.

## 7 Función valor absoluto

Una función de valor absoluto es una función que contiene una expresión algebraica dentro de los símbolos de valor absoluto. Recuerde que el valor absoluto de un número es su distancia desde 0 en la recta numérica.

La función principal de valor absoluto, es escrita como  $f(x) = |x|$ , está definida por la gráfica:



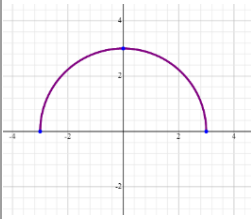
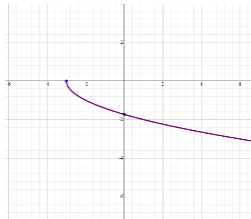
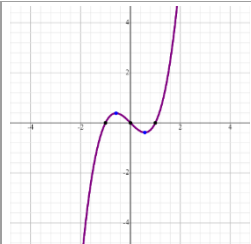
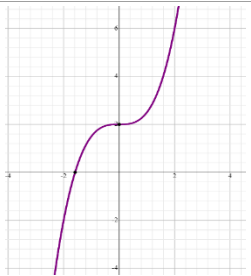
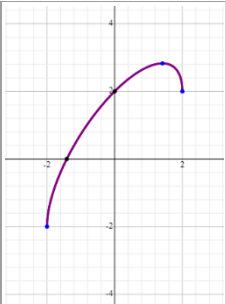
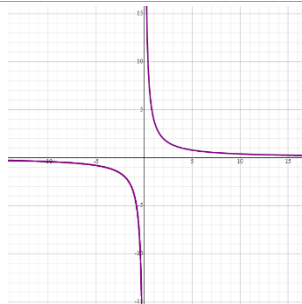
El dominio de esta función se establece como todos los valores de los números reales, y el rango es definido para la función principal con valores entre  $[0, \infty)$ , pero depende de la transformación que tenga en su eje vertical.

Con base a lo estudiado hasta el momento, pon en práctica lo aprendido. Grafica las siguientes funciones teniendo en cuenta puntos de corte con los ejes, entre otros y encuentra el dominio y el rango para siguientes funciones:

Nota que también se dan las respuestas para que confrontes dichos resultados.

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
1. $y = -2x^2 + x + 1$	<p>D: <math>\mathbb{R}</math></p> <p>R: <math>(-\infty, \frac{9}{8}]</math></p> <p>P.C: (-0.5,0); (0,1); (1,0)</p>	2. $y = \frac{5}{x^2+1} - 1$	<p>D: <math>\mathbb{R}</math>      R: <math>(-1, 4]</math></p> <p>P.C: (-2,0); (0,4); (2,0)</p>
3. $y = \frac{1}{2}x - 4$	<p>D: <math>\mathbb{R}</math></p> <p>R: <math>\mathbb{R}</math></p> <p>P.C: (0,-4);</p>	4. $y = x^2 + 3$	<p>D: <math>\mathbb{R}</math></p> <p>R: <math>[3, \infty)</math></p> <p>P.C: (0,3)</p>



	(8,0)		
5. $y = \sqrt{9 - x^2}$	 <p>D: <math>[-3, 3]</math> R: <math>[0, 3]</math> P.C: (-3,0); (0,3); (3,0)</p>	6. $y = -\sqrt{x + 3}$	 <p>D: <math>[-3, \infty)</math> R: <math>(-\infty, 0]</math> P.C: (-3,0); (0,-1.732)</p>
7. $y = x^3 - x$	 <p>D: <math>\mathbb{R}</math> R: <math>\mathbb{R}</math> P.C: (-1,0); (0,0); (1,0)</p>	8. $y = \frac{1}{2}x^3 + 2$	 <p>D: <math>\mathbb{R}</math> R: <math>\mathbb{R}</math> P.C: (-1.587,0); (0,2)</p>
9. $y = x + \sqrt{4 - x^2}$	 <p>D: <math>[-2, 2]</math> R: <math>[-2, 2\sqrt{2}]</math> P.C: (-√2,0); (0,2)</p>	10. $y = \frac{4}{x}$	 <p>D: <math>\mathbb{R} - \{0\}</math> R: <math>\mathbb{R} - \{0\}</math> No hay puntos de corte con los ejes.</p>

## 8 Funciones por tramos y sus graficas

La función especial por tramos corresponde a funciones que están definidas por diferentes funciones reales en distintas partes de su dominio. Para trazar su

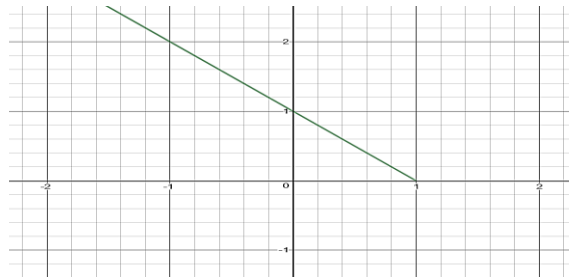


gráfica bastará con construir cada una en un mismo plano, pero solamente la parte correspondiente al intervalo indicado.

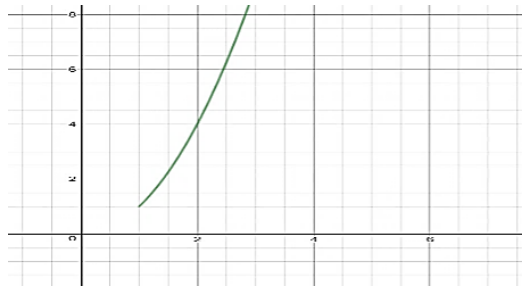
El dominio y el rango se pueden mencionar para cada función, pero el ideal es que se tome como una sola.

**Ejemplo 14:** Grafiquemos la función  $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

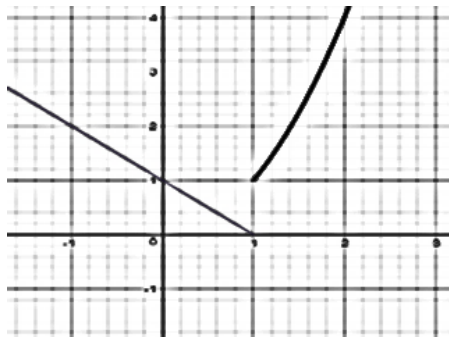
Trazamos la gráfica de  $f(x) = 1 - x$  teniendo en cuenta que se bosquejara en el dominio entre  $(-\infty, 1]$  ya que es la condición que pone  $x$  tocando el valor 1



Ahora trazamos la gráfica para  $f(x) = x^2$  con dominio entre  $(1, \infty)$  teniendo en cuenta la condición que pone  $x$  sin tocar el valor 1



Finalmente unimos las dos gráficas anteriores en un solo plano, como una sola función:

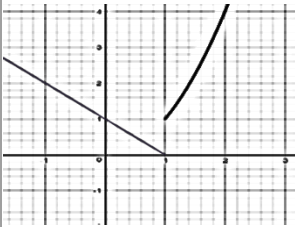
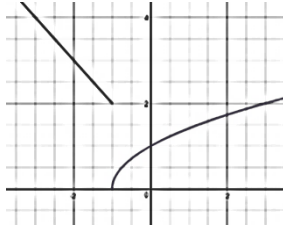


D:  $(-\infty, 1] \cup (1, \infty)$  o todos los  $\mathbb{R}$

R:  $[0, \infty)$

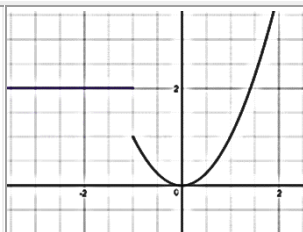
Con base a lo aprendido y guiándote con el ejemplo 14, encuentra el dominio y el rango de las siguientes funciones por tramos.

Nota que también se dan las respuestas para que confrontes dichos resultados.

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
1. $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$	 D: $(-\infty, 1] \cup (1, \infty)$ R: $[0, \infty)$	2. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq -1 \\ 1-x & \text{si } x < -1 \end{cases}$	 D: $(-\infty, -1] \cup (-1, \infty)$ R: $[0, \infty)$



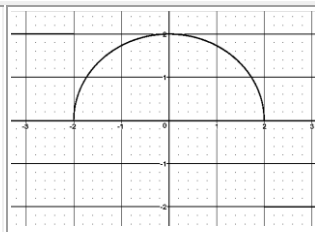
$$3. f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$



D:  $(-\infty, -1) \cup$   
 $[-1, \infty)$

R:  $[0, \infty)$

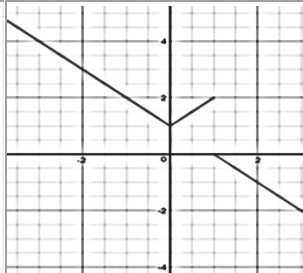
$$4. f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ \sqrt{4 - x^2} & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ -2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



D:  $(-\infty, -2) \cup [-2, 2] \cup$   
 $(2, \infty)$

R:  $[0, \infty)$

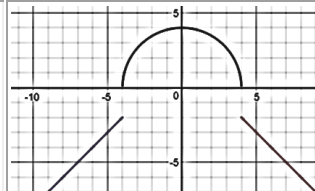
$$5. f(x) = \begin{cases} |x| + 1 & \text{si } x < 1 \\ -x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$



D:  $(-\infty, 1) \cup [1, \infty)$

R:  $(-\infty, 0] \cup [1, \infty)$

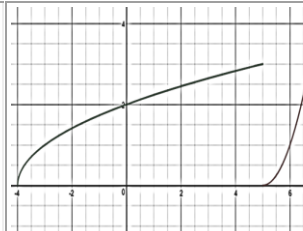
$$6. f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq -4 \\ \sqrt{16 - x^2} & \text{si } -4 < x < 4 \\ 2 - x & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$



D:  $(-\infty, -4] \cup (-4, 4) \cup$   
 $[4, \infty)$

R:  $(-\infty, -2] \cup (0, 4]$

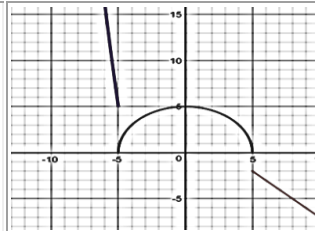
$$7. f(x) = \begin{cases} \sqrt{x + 4} & \text{si } x \leq 5 \\ (x - 5)^2 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$



D:  $[-4, 5] \cup (5, \infty)$

R:  $[0, \infty)$

$$8. f(x) = \begin{cases} x^2 - 20 & \text{si } x < -5 \\ \sqrt{25 - x^2} & \text{si } -5 \leq x \leq 5 \\ 3 - x & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

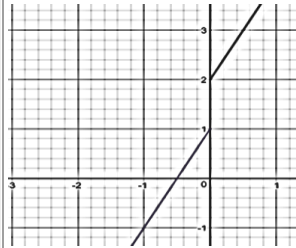


D:  $(-\infty, -5) \cup [-5, 5] \cup$   
 $(5, \infty)$

R:  $(-\infty, -2] \cup [0, \infty)$



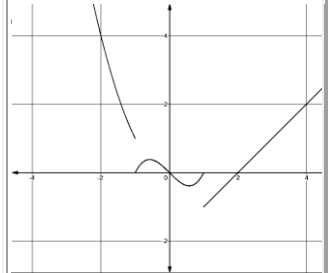
9. 7.  $f(x) =$   
 $\begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$



D:  $(-\infty, 0) \cup [0, \infty)$

R:  $(-\infty, 1) \cup [2, \infty)$

10.  $f(x) =$   
 $\begin{cases} x^2 & \text{si } x < -1 \\ x^3 - x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



D:  $(-\infty, -1) \cup [-1, 1] \cup (1, \infty)$

R:  $(-1, \infty)$

## Semana 4

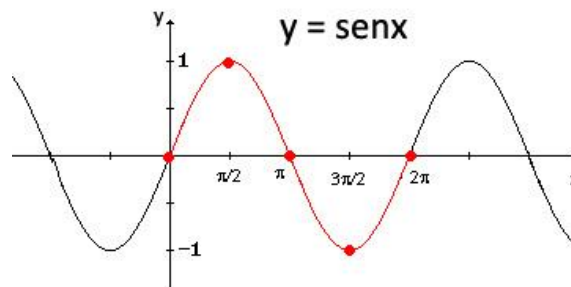
### 9 Funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas  $f$  son aquellas que están asociadas a una razón trigonométrica. Existen seis funciones trigonométricas que se muestran a continuación.

#### 9.1 Función seno $F(x) = \text{sen}x$

Dom =  $(-\infty, \infty)$

$x$	$-2\pi$	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	$0$	$\pi/2$	$\pi$	$3\pi/2$	$2\pi$
$\text{sen}x$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0



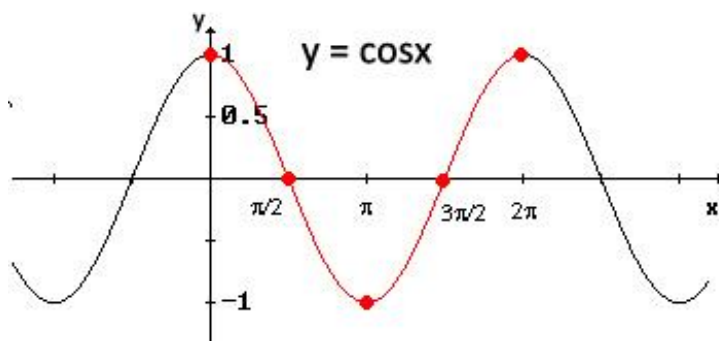




## 9.2 Función coseno $F(x) = \cos x$

$$\text{Dom} = (-\infty, \infty)$$

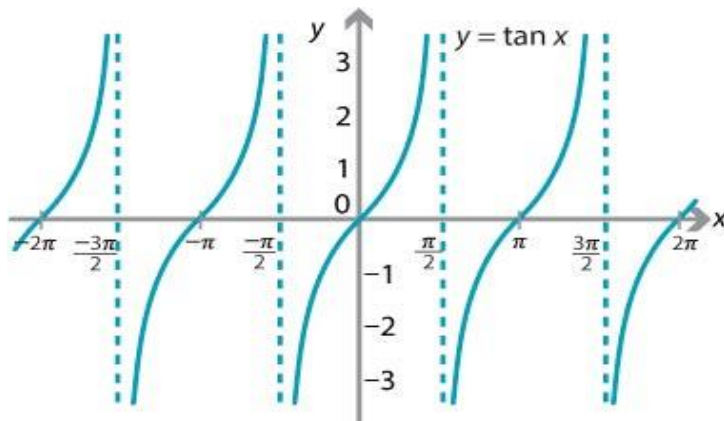
$x$	$-2\pi$	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	$0$	$\pi/2$	$\pi$	$3\pi/2$	$2\pi$
$\cos x$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1



## 9.3 Función tangente $F(x) = \tan x$

$$\text{Dom} = \mathbb{R} - (2n+1)\pi/2 \text{ con } n \in \mathbb{Z}$$

$x$	$-2\pi$	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	$0$	$\pi/2$	$\pi$	$3\pi/2$	$2\pi$
$\tan x$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0

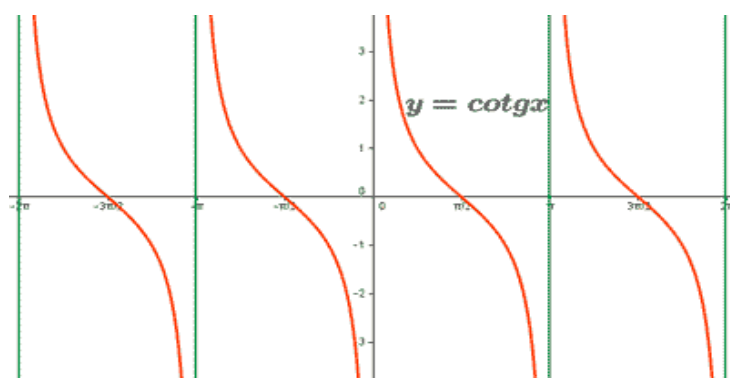




## 9.4 Función cotangente $F(x) = \cot x$

$$\text{Dom} = \mathbb{R} - (2n)\frac{\pi}{2} \text{ con } n \in \mathbb{Z}$$

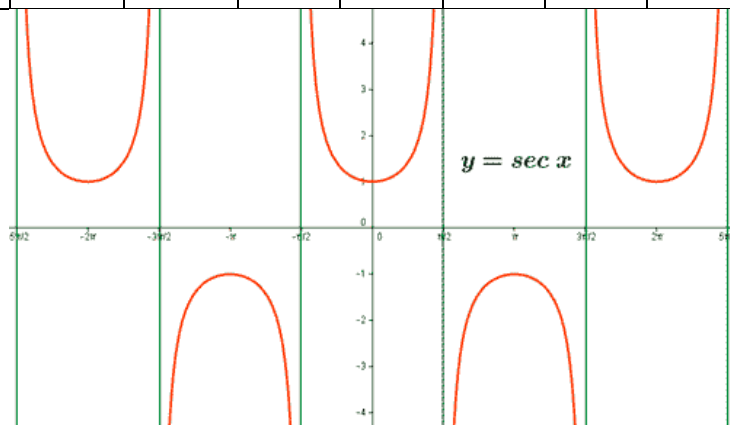
$x$	$-2\pi$	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	$0$	$\pi/2$	$\pi$	$3\pi/2$	$2\pi$
$\cot x$	$\pm\infty$	$0$	$\pm\infty$	$0$	$\pm\infty$	$0$	$\pm\infty$	$0$	$\pm\infty$



## 9.5 Función secante $F(x) = \sec x$

$$\text{Dom} = \mathbb{R} - (2n+1)\frac{\pi}{2} \text{ con } n \in \mathbb{Z}$$

$x$	$-2\pi$	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	$0$	$\pi/2$	$\pi$	$3\pi/2$	$2\pi$
$\sec x$	$1$	$\pm\infty$	$-1$	$\pm\infty$	$1$	$\pm\infty$	$-1$	$\pm\infty$	$1$

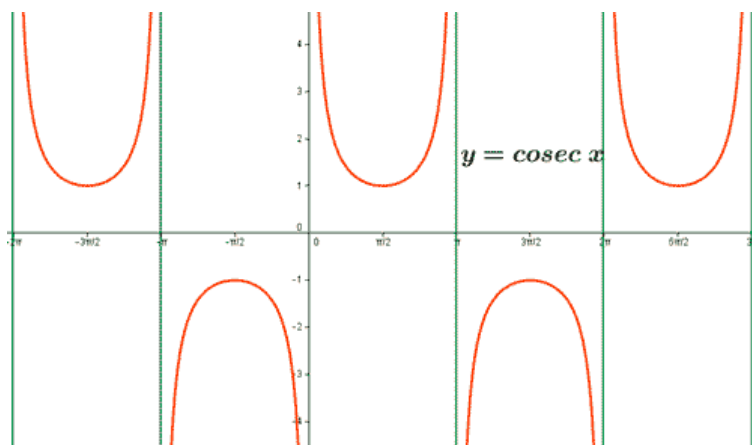




### 9.6 Función cosecante $F(x) = \cos x$

$$\text{Dom} = \mathbb{R} - (2n)\frac{\pi}{2} \text{ con } n \in \mathbb{Z}$$

$x$	$-2\pi$	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	$0$	$\pi/2$	$\pi$	$3\pi/2$	$2\pi$
$\csc x$	$\pm \infty$	$1$	$\pm \infty$	$-1$	$\pm \infty$	$1$	$\pm \infty$	$-1$	$\pm \infty$



## 10 Función inversa.

Las funciones  $f$  y  $g$  son funciones inversas si  $f(g(x)) = x$  para todas las  $x$  en el dominio de  $g$  y  $g(f(x)) = x$  para todas las  $x$  en el dominio de  $f$ .

La inversa de una función  $f$  es usualmente denotada por  $f^{-1}$  y se lee “ $f$  inversa.” (Dese cuenta que el superíndice  $(-1)$  en  $f^{-1}$  no es un exponente).

Suponga que dos funciones son inversas. Si  $(a, b)$  es un punto en la gráfica de la función original, entonces el punto  $(b, a)$  debe ser un punto en la gráfica de la función inversa. Las gráficas son imágenes espejo una de otra con respecto a la recta  $y = x$ .

Para encontrar la inversa de una función algebraicamente, intercambie la  $x$  y la  $y$  y resuelva para  $y$ , es decir, despeja comúnmente como si fuera  $x$ .



**Ejemplo 15:** Encuentra la función inversa para  $h(x) = x^3 + 4$

Debes cambiar la variable  $x$  por  $y$ , y a  $y$  por  $x$

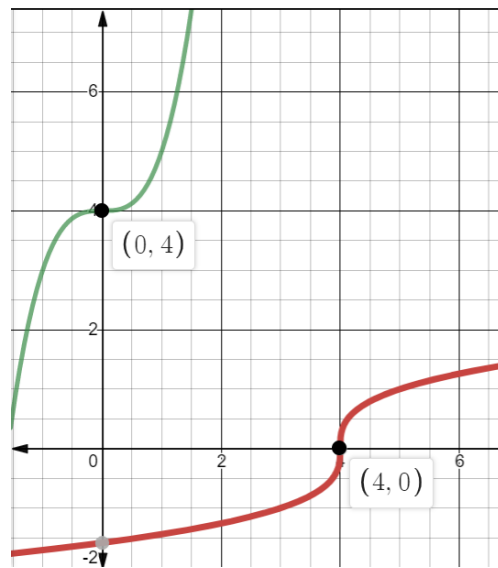
$$x = y^3 + 4$$

Ahora despeja la variable  $y$

$$y = \sqrt[3]{x - 4}$$

$$h^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 4}$$

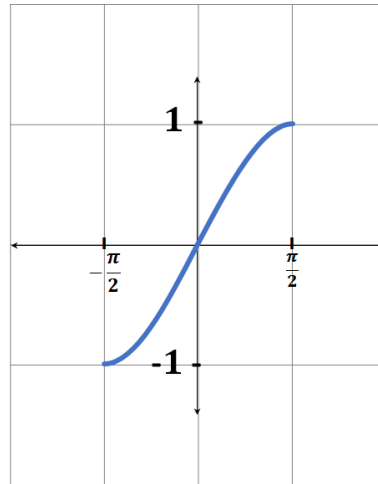
Ya has encontrado su función inversa, ahora veámoslo en su gráfica.



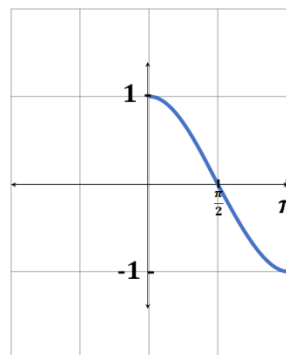
Si trazáramos líneas horizontales sobre cada una de las funciones trigonométricas, o mejor conocido como el criterio de la línea horizontal visto con anterioridad, nos daremos cuenta que estas no son función uno a uno, por lo tanto, no tienen inversa. Sin embargo, podemos “obligarlas” a que las tengan restringiendo su dominio y así verlas como una sola función. Las funciones inversas de funciones trigonométricas se muestran de la siguiente manera:



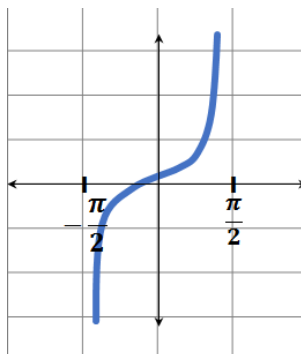
Restringimos el dominio de  $\sin(x)$  a  $[-\pi/2, \pi/2]$  y dejemos su rango igual  $[-1, 1]$ . Ahora, algebraicamente hablar de la inversa del seno es hablar del arco-seno de la variable  $\sin^{-1} x$



Lo mismo pasa con el  $\cos(x)$ , restringimos su dominio a  $[0, \pi]$  y dejamos igual su rango  $[-1, 1]$ . Algebraicamente hablar de la inversa de coseno es hablar del arco-coseno de la variable  $\cos^{-1} x$

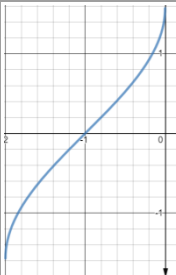
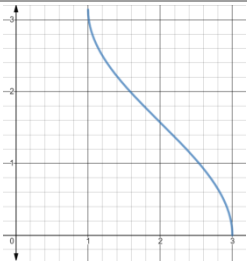
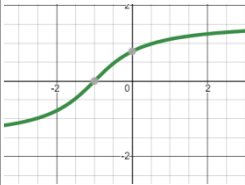
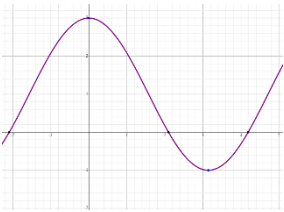
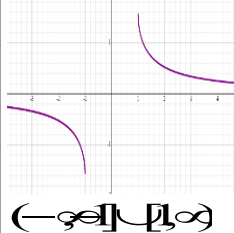



Con la  $\tan(x)$ , donde su dominio va de  $[-\pi/2, \pi/2]$  y su rango de  $[-\infty, \infty]$ . Algebraicamente hablar de la inversa de tangente es hablar del arco-tangente de la variable  $\tan^{-1} x$ .

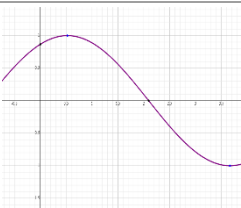
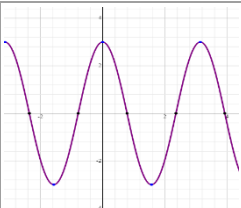
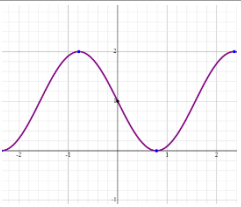
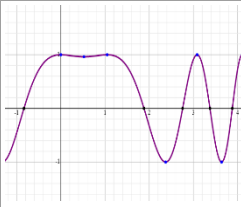


De acuerdo a lo anterior, Realiza las gráficas de las siguientes funciones, halla dominio y rango.

Nota que también se dan las respuestas para que confrontes dichos resultados.

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
1. $f(x) = \sin^{-1}(x + 1)$	 D: $[-2, 0]$ R: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	2. $f(x) = \cos^{-1}(x - 2)$	 D: $[1, 3]$ R: $[0, \pi]$
3. $f(x) = \tan^{-1}(x + 2)$	 D: $\mathbb{R}$ R: $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	4. $f(x) = 1 + 2 \cos x$	 D: $\mathbb{R}$ R: $[-1, 3]$
5. $f(x) = \csc^{-1} x$	 D: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	6. $f(x) = \sin 2\pi x$	 D: $\mathbb{R}$ R: $[-1, 1]$

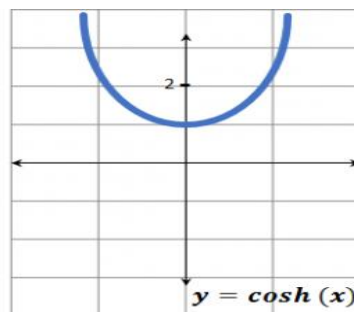


	$\mathbb{R}:[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$				
7. $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{3})$		D: $\mathbb{R}$ R: $[-1,1]$	8. $f(x) = 3 \cos 2x$		D: $\mathbb{R}$ R: $[-3,3]$
9. $f(x) = 1 - \sin 2x$		D: $\mathbb{R}$ R: $[0,2]$	10. $f(x) = \cos x(x - \frac{\pi}{3})$		D: $\mathbb{R}$ R: $[-1,1]$

## 11 Funciones hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas se definen a través de expresiones algebraicas que incluyen funciones exponenciales  $e^x$  y su función inversa  $e^{-x}$ , donde  $e$  es la constante de Euler (o como se le conoce comúnmente “número  $e$ ”). Las funciones hiperbólicas básicas son seno hiperbólico ( $\sinh$ ) y el coseno hiperbólico ( $\cosh$ ), de éstos se derivan la función de tangente hiperbólica ( $\tanh$ ). Las otras funciones: cotangente, secante y cosecante, son las inversas de las tres anteriores respectivamente.

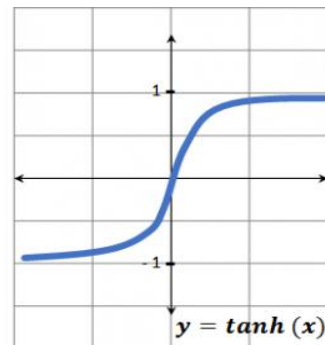
- $\cosh(x) = (e^x + e^{-x}) / 2$

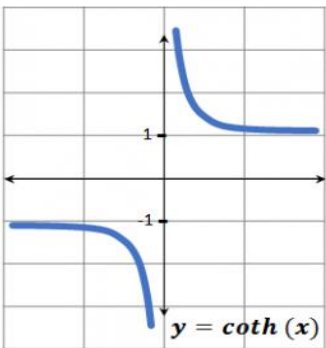




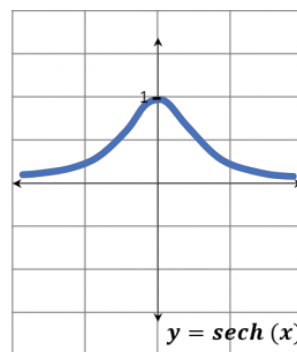
-   $\text{Senh}(x) = (e^x - e^{-x}) / 2$

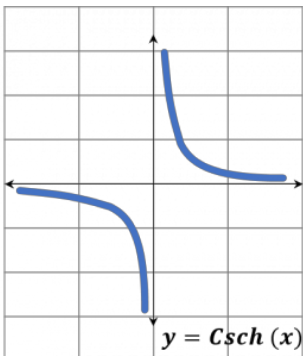
- $\text{Tanh}(x) = \text{senh}(x) / \text{cosh}(x) = (e^x - e^{-x}) / (e^x + e^{-x}) = (e^{2x} - 1) / (e^{2x} + 1)$



-   $\text{Coth}(x) = \text{cosh}(x) / \text{senh}(x) = (e^x + e^{-x}) / (e^x - e^{-x}) = (e^{2x} + 1) / (e^{2x} - 1)$

- $\text{Sech}(x) = 1 / \text{cosh}(x) = 2 / (e^x + e^{-x}) = 2e^x / (e^{2x} + 1)$



-   $\text{Csch}(x) = 1 / \text{senh}(x) = 2 / (e^x - e^{-x}) = 2e^x / (e^{2x} - 1)$





**Ejemplo 16:** Demuestra que las funciones sinh y cosh satisfacen la ecuación de la hipérbola  $x^2 - y^2 = 1$ . Suponiendo que  $x = \cosh(t)$  e  $y = \sinh(t)$  y considerando que:  $\cosh(t) = \frac{(e^t + e^{-t})}{2}$  y  $\sinh(t) = \frac{(e^t - e^{-t})}{2}$

Sustituimos en la ecuación de la hipérbola

$$\left[ \frac{(e^t + e^{-t})}{2} \right]^2 - \left[ \frac{(e^t - e^{-t})}{2} \right]^2 = 1$$

Procedemos a darle solución a los cuadrados

$$\left[ \frac{(e^{2t} + 2e^t e^{-t} + e^{-2t})}{4} \right] - \left[ \frac{(e^{2t} - 2e^t e^{-t} + e^{-2t})}{4} \right] = 1$$

Como  $e^t e^{-t} = e^{t-t} = e^0 = 1$ , tenemos:

$$\left[ \frac{(e^{2t} + 2 + e^{-2t})}{4} \right] - \left[ \frac{(e^{2t} - 2 + e^{-2t})}{4} \right] = 1$$

Restamos los numeradores ya que tienen el mismo denominador:

$$\left[ \frac{(e^{2t} + 2 + e^{-2t}) - (e^{2t} - 2 + e^{-2t})}{4} \right] = 1$$

$$\left[ \frac{(\cancel{e^{2t}} + 2 + \cancel{e^{-2t}}) - (\cancel{e^{2t}} - 2 - \cancel{e^{-2t}})}{4} \right] = 1$$

Por lo tanto, me queda que  $4 / 4 = 1$  y  $1=1$ , que es lo que queríamos demostrar.



## Semana 5

### 12 Transformaciones de funciones

Se tienen en cuenta las traslaciones que son: el desplazamiento, el alargamiento, y la reflexión de las gráficas

#### 12.1 Desplazamientos verticales y horizontales:

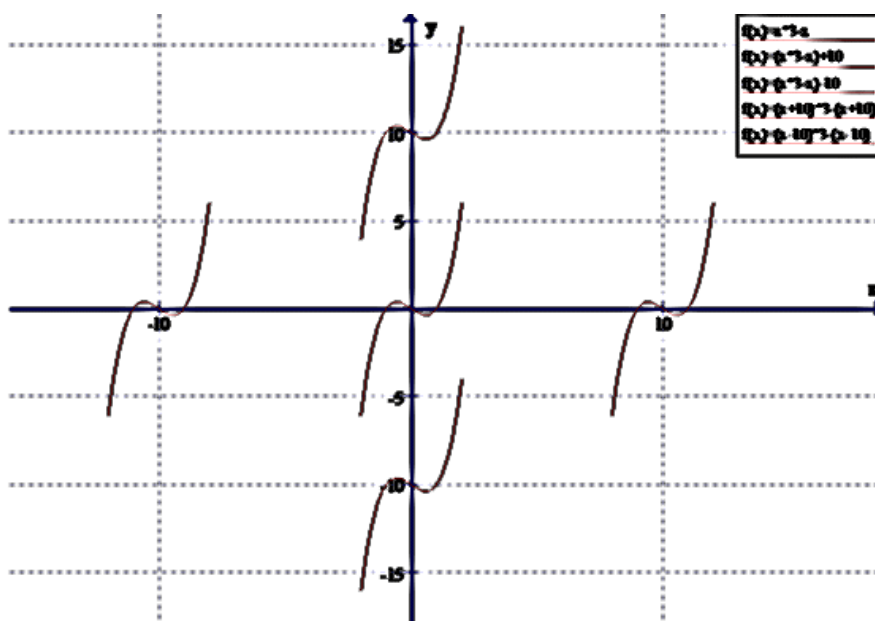
Suponga que  $c > 0$ . Para obtener la gráfica de:

$y = f(x) + c$  Se desplaza la gráfica de  $y = f(x)$ ,  $c$  unidades hacia arriba.

$y = f(x) - c$  Se desplaza la gráfica de  $y = f(x)$ ,  $c$  unidades hacia abajo.

$y = f(x - c)$  Se desplaza la gráfica de  $y = f(x)$ ,  $c$  unidades hacia la derecha.

$y = f(x + c)$  Se desplaza la gráfica de  $y = f(x)$ ,  $c$  unidades hacia la izquierda.





## 12.2 Reflexión

$y = -f(x)$  Refleja la gráfica de  $y = f(x)$  con respecto al eje  $x$ .

$y = f(-x)$  Refleja la gráfica de  $y = f(x)$  con respecto al eje  $y$ .

## 12.3 Expansión y Contracción

Suponga que  $c > 1$ . Para obtener la gráfica de:

$y = cf(x)$  Expande la gráfica  $y = f(x)$  verticalmente en un factor  $c$ .

$y = (1/c)f(x)$  Comprime la gráfica  $y = f(x)$  verticalmente en un factor  $c$ .

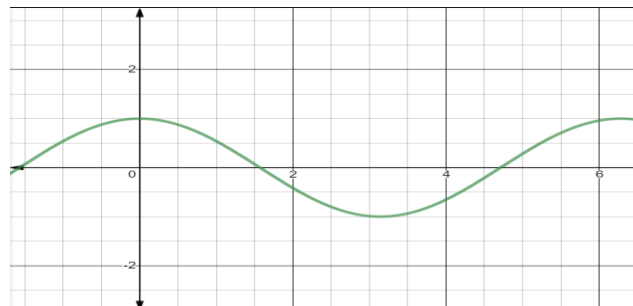
$y = f(cx)$  Comprime la gráfica  $y = f(x)$  horizontalmente en un factor  $c$ .

$y = f(x/c)$  Expande la gráfica  $y = f(x)$  horizontalmente en un factor  $c$ .

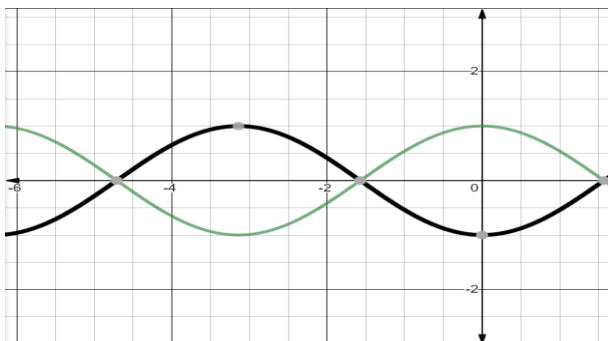
**Ejemplo 17:** Realiza paso a paso las transformaciones para

$$f(x) = 2\cos(x + \pi) - 1$$

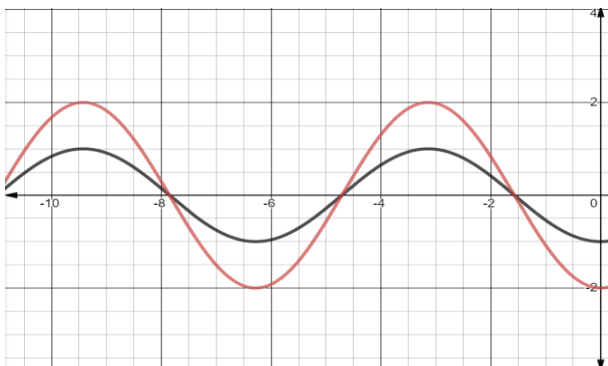
Tenemos en cuenta la función original  $\cos(x)$



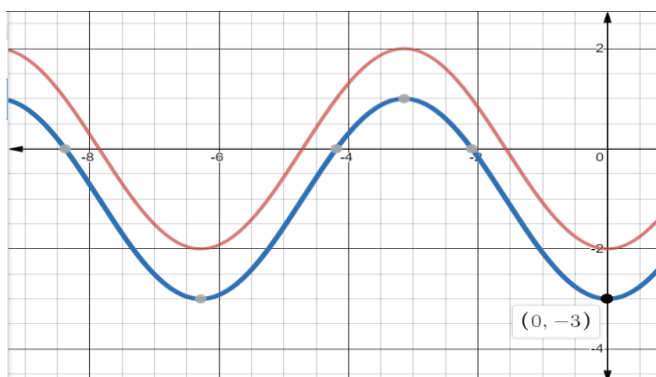
Realizamos la transformación en el ángulo, lo cual desplaza la gráfica  $\pi$  veces hacia la izquierda.  $\cos(x + \pi)$  Línea negra



Ahora realizamos la transformación para expandir la gráfica verticalmente al doble, ya que se multiplica por 2.  $2\cos(x + \pi)$  Línea roja



Finalmente realiza la transformación para mover la gráfica verticalmente, en este caso al restar 1 se mueve hacia abajo una unidad.  $2\cos(x + \pi) - 1$  Línea azul.



Con el ejemplo 17 y lo aprendido hasta el momento realiza las siguientes transformaciones.

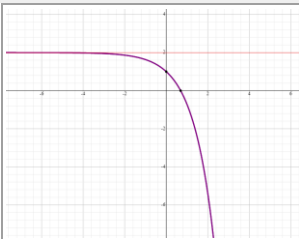


Nota que también se dan las respuestas para que confrontes dichos resultados.

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
Dada $y = \sqrt{x}$ Use las transformaciones de funciones para dibujar:		Dada $y = x^2$ Use las transformaciones de funciones para dibujar:	
1. $y = \sqrt{x} - 2$		4. $y = x^2 - 1$	
2. $y = \sqrt{x - 2}$		5. $y = -x^2 + 3$	
3. $y = -\sqrt{x}$		6. $y = x^2$	
Dada $y = e^x$ Use las transformaciones de funciones para dibujar:		Dada $y = x^3$ Use las transformaciones de funciones para dibujar:	
7. $y = e^x - 2$		10. $y = x^3 - 5$	
8. $y = 2 - e^x$		11. $y = -x^3 + 2$	



9.  $y = e^x - 2$



12.  $y = \frac{x^3}{8} - 2$



## 13 Operaciones con funciones

**Definición:** sean  $f$  y  $g$  funciones con dominio  $A$  y  $B$ . entonces las funciones  $f + g$   $f - g$   $f \cdot g$  y  $\frac{f}{g}$  se definen como sigue:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  Dominio =  $A \cap B$
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$  Dominio =  $A \cap B$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$  Dominio =  $A \cap B$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  Dominio =  $\{x \in A \cap B / g(x) \neq 0\}$

**Ejemplo 18:** Teniendo  $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$  y  $g(x) = x^2 + 1$ , realiza las operaciones.

Estas operaciones se realizan comúnmente como operaciones entre polinomios

$$\checkmark f(x) + g(x) = 2x^2 + x^2 + 3x - 2 + 1 = 3x^2 + 3x - 1$$

$$\checkmark f(x) - g(x) = 2x^2 - x^2 + 3x - 2 - 1 = x^2 + 3x - 3$$

$$\checkmark g(x) \cdot f(x) = 2x^4 + 3x^3 + 3x - 2$$

$$\checkmark \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^2 + 1}{2x^2 + 3x - 2}$$



Con base en lo estudiado y guiándote con el ejemplo 18, realiza las operaciones entre funciones propuestas a continuación.

Nota que también se dan las respuestas para que confrontes dichos resultados.

Ejercicio	Respuesta	Ejercicio	Respuesta
$f + g$	$f - g$	$f \times g$	$f/g$
1. $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$ $g(x) = x^2 + 1$	✓ $f + g = 3x^2 + 3x - 1$ ✓ $f - g = x^2 + 3x - 3$	4. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ $g(x) = x^2 - 4$	✓ $f \times g = (x^2 - 4)^{3/2}$ ✓ $f/g = 1/(x^2 - 4)^{1/2}$
2. $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = 4 - x^2$	✓ $f + g = -x^2 + \sqrt{x} + 4$ ✓ $f - g = x^2 + \sqrt{x} - 4$	5. $f(x) = x^2$ $g(x) = 1/\sqrt{x}$	✓ $f \times g = x^{3/2}$ ✓ $f/g = x^{5/2}$
3. $f(x) = x^2 + 1$ $g(x) = 3x - 2$	✓ $f + g = x^2 + 3x - 1$ ✓ $f - g = x^2 - 3x + 3$	6. $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = x^2 + 1$	✓ $f \times g = x^{5/2} + x^{1/2}$ ✓ $\frac{f}{g} = (\sqrt{x})/(x^2 + 1)$
$g + f$	$g - f$	$g \times f$	$g/f$
7. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ $g(x) = x^2 - 4$	✓ $g + f = x^2 - 4 + \sqrt{x^2 - 4}$ ✓ $g - f = x^2 - 4 - \sqrt{x^2 - 4}$	10. $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$ $g(x) = x^2 + 1$	✓ $g \times f = 2x^4 + 3x^3 + 3x - 2$ ✓ $g/f = \frac{x^2 + 1}{2x^2 + 3x - 2}$
8. $f(x) = x^2$ $g(x) = 1/\sqrt{x}$	✓ $g + f = \frac{1}{\sqrt{x}} + x^2$ ✓ $g - f = \frac{1}{\sqrt{x}} - x^2$	11. $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = 4 - x^2$	✓ $g \times f = 4\sqrt{x} - x^{5/2}$ ✓ $g/f = \frac{4 - x^2}{\sqrt{x}}$
9. $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = x^2 + 1$	✓ $g + f = x^2 + \sqrt{x} + 1$ ✓ $g - f = x^2 - \sqrt{x} + 1$	12. $f(x) = x^2 + 1$ $g(x) = 3x - 2$	✓ $g \times f = 3x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ ✓ $g/f = \frac{3x - 2}{x^2 + 1}$



## 14 Composición de funciones

**Definición:** dadas dos funciones  $f$  y  $g$ , la función compuesta  $(f \circ g)$  también llamada la composición de  $f$  y  $g$ , está definida por:  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

El dominio de  $(f \circ g)$  es el conjunto de todas las  $x$  en el dominio de  $g$  tales que  $g(x)$  esté en el dominio de  $f(x)$ .

La función compuesta no es conmutativa, es decir,  $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$ . La notación  $(f \circ g)(x)$  significa que primero se aplica la función  $g(x)$  y luego  $f(x)$ .

**Ejemplo 19:** Encuentre la función compuesta  $(f \circ g)$  y determine el dominio, sabiendo que:

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = x - 3.$$

$$(f \circ g)(x) = (x - 3)^2$$

Aquí ya hemos aprendido que el dominio para funciones cuadráticas corresponde a todos los números reales, por lo tanto, el dominio para esta función son todos los reales. (D:  $\mathbb{R}$ )

Con base en lo estudiado y guiándote con el ejemplo 19, realiza la composición de las funciones propuestas a continuación.

Nota que también se dan las respuestas para que confrontes dichos resultados.

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$g(x) = x^2 - 1$$

$$h(x) = \frac{3}{x}$$

$$i(x) = \cos x$$