- 势函数法

实例 1：用第一类势函数的算法进行分类

（1）选择合适的正交函数集$\{\varphi_i(x)\}$

选择 Hermite 多项式，其正交域为(-∞，+∞)，其一维形式是

$$\phi_k = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2^k \cdot k!\sqrt{\pi}}} H_k(x), \quad k = 0,1,2,\cdots$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

其正交性：$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 2^n n!\sqrt{\pi} & m = n \end{cases}$

其中，$H_k(x)$前面的乘式为正交归一化因子，为计算简便可省略。因此，Hermite 多项式前面几项的表达式为

$H_0(x)=1$，　　$H_1(x)=2x$，　　$H_2(x)=4x^2-2$，

$H_3(x)=8x^3-12x$，　　$H_4(x)=16x^4-48x^2+12$

（2）建立二维的正交函数集

二维的正交函数集可由任意一对一维的正交函数组成，这里取四项最低阶的二维的正交函数

$$\varphi_1(x) = \varphi_1(x_1, x_2) = H_0(x_1)H_0(x_2) = 1$$

$$\varphi_2(x) = \varphi_2(x_1, x_2) = H_1(x_1)H_0(x_2) = 2x_1$$

$$\varphi_3(x) = \varphi_3(x_1, x_2) = H_0(x_1)H_1(x_2) = 2x_2$$

$$\varphi_4(x) = \varphi_4(x_1, x_2) = H_1(x_1)H_1(x_2) = 4x_1x_2$$

（3）生成势函数

按第一类势函数定义，得到势函数

$$K(x,x_k)=\sum_{i=1}^{4}\varphi_i(x)\varphi_j(x)=1+4x_1x_{k_1}+4x_2x_{k_2}+16x_1x_2x_{k_1}x_{k_2}$$

其中 $x=(x_1,x_2)^T$， $x_k=(x_{k_1},x_{k_2})^T$

（4）通过训练样本逐步计算累积位势 K(x)

给定训练样本：ω_1类为 $x_{①}=(1\ \ 0)^T$，$x_{②}=(0\ \ -1)^T$

ω_2类为 $x_{③}=(-1\ \ 0)^T$，$x_{④}=(0\ \ 1)^T$

累积位势 K(x)的迭代算法如下

第一步：取 $x_{①}=(1\ \ 0)^T\in\omega_1$，故

$K_1(x)=K(x,x_{①})=1+4x_1\cdot1+4x_2\cdot0+16x_1x_2\cdot1\cdot0=1+4x_1$

第二步：取 $x_{②}=(0\ \ -1)^T\in\omega_1$，故 $K_1(x_{②})=1+4\cdot0=1$

因 $K_1(x_{②})>0$ 且 $x_{②}\in\omega_1$，故 $K_2(x)=K_1(x)=1+4x_1$

第三步：取 $x_{③}=(-1\ \ 0)^T\in\omega_2$，故 $K_2(x_{③})=1+4\cdot(-1)=-3$

因 $K_2(x_{③})<0$ 且 $x_{③}\in\omega_2$，故 $K_3(x)=K_2(x)=1+4x_1$

第四步：取 $x_{④}=(0\ \ 1)^T\in\omega_2$，故 $K_3(x_{④})=1+4\cdot0=1$

因 $K_3(x_{④})>0$ 且 $x_{④}\in\omega_2$，

故 $K_4(x)=K_3(x)-K(x,x_{④})=1+4x_1-(1+4x_2)=4x_1-4x_2$

将全部训练样本重复迭代一次，得

第五步：取 $x_{⑤}=x_{①}=(1\ \ 0)^T\in\omega_1$，$K_4(x_{⑤})=4$

故 $K_5(x)=K_4(x)=4x_1-4x_2$

第六步：取 $x_{⑥}=x_{②}=(0\ \ -1)^T\in\omega_1$，$K_5(x_{⑥})=4$

故 $K_6(x)=K_5(x)=4x_1-4x_2$

第七步：取 $x_{⑦}=x_{③}=(-1\ \ 0)^T\in\omega_2$，$K_6(x_{⑦})=-4$

故 $K_7(x)=K_6(x)=4x_1-4x_2$

第八步：取 $x_{⑧}=x_{④}=(0\ \ 1)^T\in\omega_2$，$K_7(x_{⑧})=-4$

故 $K_8(x)=K_7(x)=4x_1-4x_2$

以上对全部训练样本都能正确分类，因此算法收敛于判别函数

$d(x)=4x_1-4x_2$