- Fisher 准则函数

Fisher 准则函数定义为：

$$J_F(w)=\frac{(\tilde{m}_1-\tilde{m}_2)^2}{\tilde{S}_1^2+\tilde{S}_2^2}$$

其中，$(\tilde{m}_1-\tilde{m}_2)$ 是两类均值之差，$\tilde{S}_i^2$ 是样本类内离散度。显然，应该使 $J_F(w)$的分子尽可能大而分母尽可能小，即应寻找使 $J_F(w)$尽可能大的 w 作为投影方向。但上式中并不显含 w，因此须设法将 $J_F(w)$变成 w 的显函数。

由各类样本的均值可推出：

$$\tilde{m}_i=\frac{1}{N_i}\sum_{y\in\Gamma_i'}y=\frac{1}{N_i}\sum_{x\in\Gamma_i}w^Tx=w^T\left(\frac{1}{N_i}\sum_{x\in\Gamma_i}x\right)=w^Tm_i$$

这样，Fisher 准则函数 $J_F(w)$的分子可写成：

$$\begin{aligned}(\tilde{m}_1-\tilde{m}_2)^2&=(w^Tm_1-w^Tm_2)^2\\&=(w^Tm_1-w^Tm_2)(w^Tm_1-w^Tm_2)^T\\&=(w^Tm_1-w^Tm_2)(m_1^Tw-m_2^Tw)\\&=w^T(m_1-m_2)(m_1-m_2)^Tw=w^TS_bw\end{aligned}$$

现在再来考察 $J_F(w)$的分母与 w 的关系：

$$\begin{aligned}\tilde{S}_i^2&=\sum_{y\in\Gamma_i'}(y-\tilde{m}_i)^2=\sum_{x\in\Gamma_i}(w^Tx-w^Tm_i)^2\\&=w^T\left[\sum_{x\in\Gamma_i}(x-m_i)(x-m_i)^T\right]w=w^TS_iw\end{aligned}$$

因此，

$$\tilde{S}_1^2+\tilde{S}_2^2=w^T(S_1+S_2)w=w^TS_ww$$

将上述各式代入 $J_F(w)$，可得：

$$J_F(w)=\frac{w^TS_bw}{w^TS_ww}$$

其中 S_b 为样本类间离散度矩阵，S_w 为总样本类内离散度矩阵。