- 贝叶斯判别根据概率判别规则，有：

若 $P(\omega_1 | x) > P(\omega_2 | x)$，则$x \in \omega_1$

若 $P(\omega_1 | x) < P(\omega_2 | x)$，则$x \in \omega_2$

由贝叶斯定理，后验概率 $P(\omega_i | x)$可由类别 ω_i 的先验概率 $P(\omega_i)$和 x 的条件概率密度 $p(x | \omega_i)$来计算，即：

$$P(\omega_i|x) = \frac{p(x|\omega_i)P(\omega_i)}{p(x)} = \frac{p(x|\omega_i)P(\omega_i)}{\sum_{i=1}^{2} p(x|\omega_i)P(\omega_i)}$$

这里 $p(x | \omega_i)$也称为似然函数。将该式代入上述判别式，有：

若 $p(x | \omega_1)P(\omega_1) > p(x | \omega_2)P(\omega_2)$，

则$x \in \omega_1$

若 $p(x | \omega_1)P(\omega_1) < p(x | \omega_2)P(\omega_2)$，

则$x \in \omega_2$

或

若$l_{12}(x) = \frac{p(x|\omega_1)}{p(x|\omega_2)} > \frac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)}$，则$x \in \omega_1$

若$l_{12}(x) = \frac{p(x|\omega_1)}{p(x|\omega_2)} < \frac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)}$，则$x \in \omega_2$

其中，l_{12} 称为似然比，$P(\omega_2)/P(\omega_1)=\theta_{21}$ 称为似然比的判决阈值，此判别称为贝叶斯判别。

- 贝叶斯判别计算实例

已知：$P(\omega_1)=0.2$，$P(\omega_2)=0.8$，

$p(x=异常|\omega_1)=0.6$，$p(x=正常|\omega_1)=0.4$，

$p(x=异常|\omega_2)=0.1$，$p(x=正常|\omega_2)=0.9$

利用贝叶斯公式，有：

$$P(\omega_1|x=异常)=\frac{p(x=异常|\omega_1)P(\omega_1)}{p(x=异常)}$$

$$=\frac{p(x=异常|\omega_1)P(\omega_1)}{p(x=异常|\omega_1)P(\omega_1)+p(x=异常|\omega_2)P(\omega_2)}$$

$$=\frac{0.6\times 0.2}{0.6\times 0.2+0.1\times 0.8}=0.6$$

似然比：$l_{12}=\frac{p(x=异常|\omega_1)}{p(x=异常|\omega_2)}=\frac{0.6}{0.1}=6$

判决阈值：$\theta_{21}=\frac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)}=\frac{0.8}{0.2}=4$

- 最小平均条件风险表达式

按贝叶斯公式，最小平均条件风险可写成：

$$r_j(x) = \frac{1}{p(x)} \sum_{i=1}^{M} L_{ij} p(x \mid \omega_i) P(\omega_i)$$

因 1/p(x)为公共项，可舍去，因此可简化为：

$$r_j(x) = \sum_{i=1}^{M} L_{ij} p(x \mid \omega_i) P(\omega_i)$$

这也是贝叶斯分类器，只是它的判别方法不是按错误概率最小作为标准，而是按平均条件风险作为标准。

● 两类（M=2）情况的贝叶斯最小风险判别

选 M=2，即全部的模式样本只有ω_1和ω_2两类，要求分类器将模式样本分到ω_1和ω_2两类中，则平均风险可写成：

当分类器将 x 判别为ω_1时：

$$r_1(x) = L_{11}p(x \mid \omega_1)P(\omega_1) + L_{21}p(x \mid \omega_2)P(\omega_2)$$

当分类器将 x 判别为ω_2时：

$$r_2(x) = L_{12}p(x \mid \omega_1)P(\omega_1) + L_{22}p(x \mid \omega_2)P(\omega_2)$$

若 $r_1(x)<r_2(x)$，则 x 被判定为属于ω_1，此时：

$$\begin{aligned} &L_{11}p(x \mid \omega_1)P(\omega_1) + L_{21}p(x \mid \omega_2)P(\omega_2) < \\ &L_{12}p(x \mid \omega_1)P(\omega_1) + L_{22}p(x \mid \omega_2)P(\omega_2) \end{aligned}$$

即

$$(L_{21} - L_{22})p(x \mid \omega_2)P(\omega_2) < (L_{12} - L_{11})p(x \mid \omega_1)P(\omega_1)$$

通常取 $L_{ij}>L_{ii}$，有：

当$\dfrac{p(x \mid \omega_1)}{p(x \mid \omega_2)} > \dfrac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)} \cdot \dfrac{L_{21} - L_{22}}{L_{12} - L_{11}}$时， $x \in \omega_1$

该式左边为似然比：$l_{12} = \dfrac{p(x \mid \omega_1)}{p(x \mid \omega_2)}$

右边为阈值：$\theta_{21} = \dfrac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)} \cdot \dfrac{L_{21} - L_{22}}{L_{12} - L_{11}}$

故得两类模式的贝叶斯判别条件为：

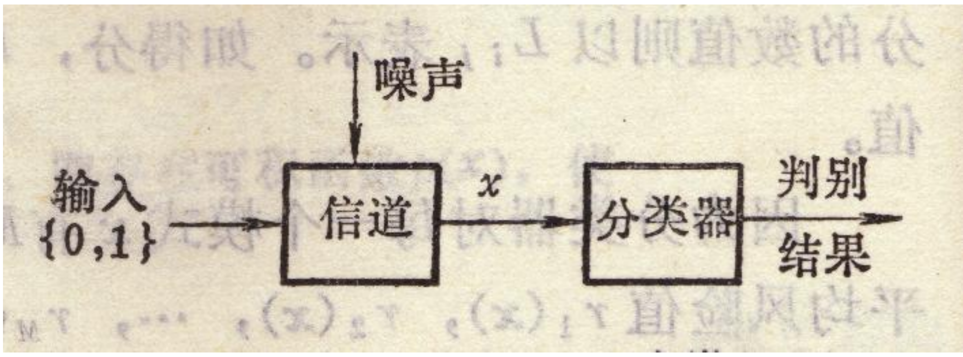
（1）若 $l_{12}(x)>\theta_{21}$，则 $x \in \omega_1$

（2）若 $l_{12}(x)<\theta_{21}$，则 $x \in \omega_2$

（3）若 $l_{12}(x)=\theta_{21}$，则可做任意判别。

通常，当判别正确时，不失分，可选常数 $L_{11}=L_{22}=0$；判别错误时，可选 $L_{12}=L_{21}=1$，此时 $\theta_{21}=\dfrac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)}$。

● 两类（M=2）情况的贝叶斯最小风险判别实例



如图所示为一信号通过一受噪声干扰的信道。

信道输入信号为 0 或 1，噪声为高斯型，其均值μ=0，方差为σ²。

信道输出为 x，试求最优的判别规则，以区分 x 是 0 还是 1。

设送 0 为ω_1类，送 1 为ω_2类，从观察值 x 的基础上判别它是 0 还是 1。直观上可以看出，若 x<0.5 应判为 0，x>0.5 应判为 1。用贝叶斯判别条件分析：设信号送 0 的先验概率为 P(0)，送 1 的先验概率为 P(1)，L 的取值为：

$$L = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \omega_1 \\ \omega_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & L_{12} \\ L_{21} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

这里 a_1 和 a_2 分别对应于输入状态为 0 和 1 时的正确判别，L_{12} 对应于实际上是ω_1类但被判成ω_2类(a_2)时的代价，L_{21} 对应于实际上是ω_2类但被判成ω_1类(a_1)时的代价。正确判别时 L 取 0。

当输入信号为 0 时，受噪声为正态分布 N(0,σ²)的干扰，其幅值大小的概率密度为：

$$p(x \mid \omega_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

当输入信号为 1 时： $p(x \mid \omega_2) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-1)^2}{2\sigma^2}}$

则似然比为： $l_{12} = \dfrac{\mathrm{p}(\mathrm{x}|\omega_1)}{\mathrm{p}(\mathrm{x}|\omega_2)} = e^{\frac{1-2x}{2\sigma^2}}$

若 $l_{12} > \theta_{21}$，即 $e^{\frac{1-2x}{2\sigma^2}} > \theta_{21} \Rightarrow x < \dfrac{1}{2} - \sigma^2 \ln\theta_{21}$，则 $x \in \omega_1$，此时信号应是 0，即

$$x < \frac{1}{2} - \sigma^2 \ln\left(\frac{L_{21}}{L_{12}} \cdot \frac{P(1)}{P(0)}\right)$$

若取 $L_{21}=L_{12}=1$，P(1)=P(0),则 x<1/2 判为 0。

若无噪声干扰，即 $\sigma^2=0$，则 x<1/2 判为 0。

- 多类（M 类）情况的贝叶斯最小风险判别

对于 M 类情况，若$r_i(x) < r_j(x)$，$j = 1,2,\ldots,M$，$j \neq i$，则 $x \in \omega_i$ 。

L 可如下取值（仍按判对失分为 0，判错失分为 1 记）：

$$L_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{when } i = j \\ 1 & \text{when } i \neq j \end{cases}$$

则条件平均风险可写成：

$$r_j(x) = \sum_{i=1}^{M} L_{ij} p(x|\omega_i) P(\omega_i)$$

$$= L_{1j} p(x|\omega_1) P(\omega_1) + \cdots + L_{jj} p(x|\omega_j) P(\omega_j) + \cdots + L_{Mj} p(x|\omega_M) P(\omega_M)$$

$$= \sum_{i=1}^{M} p(x|\omega_i) P(\omega_i) - p(x|\omega_j) P(\omega_j)$$

$$= p(x) - p(x|\omega_j) P(\omega_j)$$

由 $r_i(x) < r_j(x)$，有当 $p(x \mid \omega_i)P(\omega_i) > p(x \mid \omega_j)P(\omega_j)$ 时， $x \in \omega_i$ ，对应于判别函数为：取$d_i(x) = p(x|\omega_i)P(\omega_i)$，$i = 1,2,\ldots,M$，则对于全部 $j \neq i$ 的值，若 $d_i(x) > d_j(x)$，则 $x \in \omega_i$ 。

- M 种模式类别的多变量正态类密度函数

具有 M 种模式类别的多变量正态类密度函数为：

$$p(x|\omega_i) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|C_i|^{1/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}(x-m_i)^T C_i^{-1}(x-m_i)\right\},$$

$$i = 1,2,\dots,M$$

其中，每一类模式的分布密度都完全被其均值向量 m_i 和协方差矩阵 C_i 所规定，其定义为：

$$m_i = E_i\{x\}$$

$$C_i = E_i\{(x-m_i)(x-m_i)^T\}$$

$E_i\{x\}$表示对类别属于 ω_i 的模型的数学期望。

在上述公式中，n 为模式向量的维数，$|C_i|$为矩阵 C_i 的行列式，协方差矩阵 C_i 是对称的正定矩阵，其对角线上的元素 C_{kk} 是模式向量第 k 个元素的方差，非对角线上的元素 C_{jk} 是 x 的第 j 个分量 x_j 和第 k 个分量 x_k 的协方差。当 x_j 和 x_k 统计独立时，$C_{jk}=0$。当协方差矩阵的全部非对角线上的元素都为零时，多变量正态类密度函数可简化为 n 个单变量正态类密度函数的乘积。

已知类别 ω_i 的判别函数可写成如下形式：

$$d_i(x) = p(x|\omega_i)P(\omega_i),\ i = 1,2,\dots,M$$

对于正态密度函数，可取自然对数的形式以方便计算（因为自然对数是单调递增的，取对数后不影响相应的分类性能），则有：

$$d_i(x) = ln[p(x|\omega_i)] + ln\,P(\omega_i),\ i = 1,2,\dots,M$$

代入正态类密度函数，有：

$$d_i(x) = ln\,P\,(\omega_i) - \frac{n}{2}ln(\,2\pi) - \frac{1}{2}ln\,|\,C_i| - \frac{1}{2}(x - m_i)^T C_i^{-1}(x - m_i),\ \ i = 1,2, \dots, M$$

去掉与 i 无关的项（并不影响分类结果），有：

$$d_i(x) = ln\,P\,(\omega_i) - \frac{1}{2}ln\,|\,C_i| - \frac{1}{2}(x - m_i)^T C_i^{-1}(x - m_i),\ \ i = 1,2, \dots, M$$

即为正态分布模式的贝叶斯判别函数。

- 两类问题且其类模式都是正态分布的情况

（1）当$C_1 \neq C_2$时，两类模式的正态分布为：$p(x|\omega_1)$表示为$N(m_1, C_1)$，$p(x|\omega_2)$表示为$N(m_2, C_2)$，ω_1和ω_2两类的判别函数对应为：

$$d_1(x) = \ln P(\omega_1) - \frac{1}{2}\ln|C_1| - \frac{1}{2}(x - m_1)^T C_1^{-1}(x - m_1)$$

$$d_2(x) = \ln P(\omega_2) - \frac{1}{2}\ln|C_2| - \frac{1}{2}(x - m_2)^T C_2^{-1}(x - m_2)$$

$$d_1(x) - d_2(x) = \begin{cases} > 0 & x \in \omega_1 \\ < 0 & x \in \omega_2 \end{cases}$$

（2）当 $C_1=C_2=C$ 时，有：

$$d_i(x) = \ln P(\omega_i) - \frac{1}{2}\ln|C| - \frac{1}{2}x^T C^{-1} x + \frac{1}{2}x^T C^{-1} m_i + \frac{1}{2}m_i^T C^{-1} x - \frac{1}{2}m_i^T C^{-1} m_i, \quad i = 1,2$$

因 C 为对称矩阵，上式可简化为：

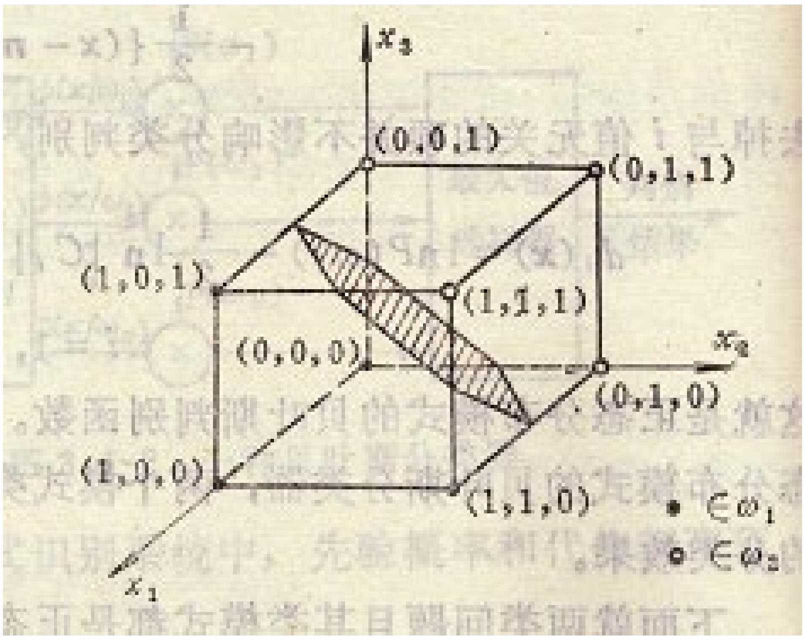
$$d_i(x) = \ln P(\omega_i) - \frac{1}{2}\ln|C| - \frac{1}{2}x^T C^{-1} x + m_i^T C^{-1} x - \frac{1}{2}m_i^T C^{-1} m_i, \quad i = 1,2$$

由此可导出类别ω_1和ω_2间的判别界面为：

$$d_1(x) - d_2(x) = \ln P(\omega_1) - \ln P(\omega_2) + (m_1 - m_2)^T C^{-1} x - \frac{1}{2}m_1^T C^{-1} m_1 + \frac{1}{2}m_2^T C^{-1} m_2 = 0$$

● 两类问题且其类模式都是正态分布的实例

$P(\omega_1)=P(\omega_2)=1/2$，求其判别界面。



模式的均值向量 m_i 和协方差矩阵 C_i 可用下式估计：

$$m_i = \frac{1}{N_i}\sum_{j=1}^{N_i} x_{ij} \quad i = 1,2$$

$$C_i = \frac{1}{N_i}\sum_{j=1}^{N_i} (x_{ij} - m_i)(x_{ij} - m_i)^T \quad i = 1,2$$

其中 N_i 为类别 ω_i 中模式的数目，x_{ij} 代表在第 i 个类别中的第 j 个模式。由上式可求出：

$$m_1 = \frac{1}{4}(3 \ \ 1 \ \ 1)^T$$

$$m_2 = \frac{1}{4}(1 \ \ 3 \ \ 3)^T$$

$$C_1 = C_2 = C = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = 4\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

设 $P(\omega_1)=P(\omega_2)=1/2$，因 $C_1=C_2$，则判别界面为：

$$
\begin{aligned}
d_1(x) - d_2(x) &= (m_1 - m_2)^T C^{-1} x - \frac{1}{2} m_1^T C^{-1} m_1 + \frac{1}{2} m_2^T C^{-1} m_2 \\
&= 8x_1 - 8x_2 - 8x_3 + 4 = 0
\end{aligned}
$$

- 均值和协方差矩阵的估计量定义

设模式的类概率密度函数为 p(**x**)，则其均值向量定义为：

$$m = E(x) = \int_x xp(x)dx$$

其中，$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$，$\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_n)^T$。

若以样本的平均值作为均值向量的近似值，则均值估计量 $\hat{m}$ 为：

$$\hat{m} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j$$

其中 N 为样本的数目。

协方差矩阵为：

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

其每个元素 c_{lk} 定义为：

$$\begin{aligned} c_{lk} &= E\{(x_l - m_l)(x_k - m_k)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_l - m_l)(x_k - m_k)p(x_l, x_k)dx_l dx_k \end{aligned}$$

其中，x_l、x_k 和 m_l、m_k 分别为 **x** 和 **m** 的第 l 和 k 个分量。

协方差矩阵写成向量形式为：

$$C = E\{(x - m)(x - m)^T\} = E\{xx^T\} - mm^T$$

协方差矩阵的估计量（当 N>>1 时）为：

$$\hat{C} \approx \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \hat{m})(x_k - \hat{m})^T$$

这里，样本模式总体为{ x_1, x_2, …, x_k, …, x_N}。因为计算估计量时没有真实的均值向量 **m** 可用，只能用均值向量的估计量 $\hat{m}$ 来代替，会存在偏差。

- 均值和协方差矩阵估计量的迭代运算形式

假设已经计算了 N 个样本的均值估计量，若再加上一个样本，其新的估计量 $\hat{m}(N+1)$ 为：

$$\hat{m}(N+1)=\frac{1}{N+1}\sum_{j=1}^{N+1}x_j=\frac{1}{N+1}\left[\sum_{j=1}^{N}x_j+x_{N+1}\right]=\frac{1}{N+1}[N\hat{m}(N)+x_{N+1}]$$

其中 $\hat{m}(N)$ 为从 N 个样本计算得到的估计量。迭代的第一步应取 $\hat{m}(1)=x_1$。

协方差矩阵估计量的迭代运算与上述相似。取 $\hat{C}(N)$ 表示 N 个样本时的估计量为：

$$\hat{C}(N)=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}x_jx_j^T-\hat{m}(N)\hat{m}^T(N)$$

加入一个样本，则：

$$\begin{aligned}\hat{C}(N+1)&=\frac{1}{N+1}\sum_{j=1}^{N+1}x_jx_j^T-\hat{m}(N+1)\hat{m}^T(N+1)\\&=\frac{1}{N+1}\left[\sum_{j=1}^{N}x_jx_j^T+x_{N+1}x_{N+1}^T\right]-\hat{m}(N+1)\hat{m}^T(N+1)\\&=\frac{1}{N+1}[N\hat{C}(N)+N\hat{m}(N)\hat{m}^T(N)+x_{N+1}x_{N+1}^T]-\\&\quad\frac{1}{(N+1)^2}[N\hat{m}(N)+x_{N+1}][N\hat{m}(N)+x_{N+1}]^T\end{aligned}$$

其中，$\hat{C}(1)=x_1x_1^T-\hat{m}(1)\hat{m}^T(1)$ 且 $\hat{m}(1)=x_1$，因此 $\hat{C}(1)=0$ 为零矩阵。

- 一般概念

设{$x_1, x_2,\ldots, x_N$}为N个用于估计一未知参数θ的密度函数的样本，x_i被一个接着一个逐次地给出。于是用贝叶斯定理，可以得到在给定了$x_1, x_2,\ldots, x_N$之后，θ的后验概率密度的迭代表示式为：

$$p(\theta|x_1,\cdots,x_N)=\frac{p(x_N|\theta,x_1,\cdots,x_{N-1})p(\theta|x_1,\cdots,x_{N-1})}{p(x_N|x_1,\cdots,x_{N-1})}$$

其中，对于p(θ | $x_1, \ldots, x_N$)而言，p(θ | $x_1, \ldots, x_{N-1}$)是它的先验概率，当加入新的样本 x_N 后，得到经过修正的新的概率密度 p(θ | $x_1, \ldots, x_N$)。如此一步步向前推，则p(θ)应为最初始的先验概率密度，当读入第一个样本x_1时，经过贝叶斯定理计算，可得到后验概率密度p(θ | x_1)。以此为新的一步，将p(θ | x_1)作为第二步计算的先验概率密度，读入样本x_2，又得到第二步的后验概率密度p(θ | x_1, x_2)，…，依此可以算出最后的后验概率密度p(θ | $x_1, \ldots, x_N$)，从而得到最终的结果。

这里，需要先知道最初始的概率密度函数p(θ)。至于全概率p(x_N | $x_1, \ldots, x_{N-1}$)则可通过下式算出：

$$p(x_N|x_1,\cdots,x_{N-1})=\int_x p(x_N|\theta,x_1,\cdots,x_{N-1})\,p(\theta|x_1,\cdots,x_{N-1})d\theta$$

该值与未知量θ无关，可认为是一定值。

● 单变量正态密度函数的均值学习

设一个模式样本集，其类概率密度函数是单变量正态分布 N(θ，σ²)，均值θ待求，即

$$\mathrm{p}(\mathrm{x}\mid\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{x}-\theta}{\sigma^2}\right)^2\right]$$

给出 N 个训练样本{x_1, x_2,…, x_N}，用贝叶斯学习计算其均值估计量。

设最初的先验概率密度 p(θ)为$\mathrm{N}(\theta_0,\sigma_0^2)$，这里θ₀是凭先验知识对未知量θ的“最好”推测，$\sigma_0^2$表示上述推测的不确定性度量。这里可以假定 p(θ)是正态的，因为均值的估计量是样本的线性函数，因样本 x 是正态分布的，因此 p(θ)取为正态分布是合理的，这样计算起来可比较简单。

初始条件已知，即 p(θ)为$\mathrm{N}(\theta_0,\sigma_0^2)$，p(x_1|θ)为 N(θ，σ²)，由贝叶斯公式 p(θ|x_1)=a p(x_1|θ) p(θ)，可得：

$$\mathrm{p}(\theta\mid\mathrm{x}_1)=\mathrm{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{x}_1-\theta}{\sigma^2}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta-\theta_0}{\sigma_0^2}\right)^2\right]$$

其中 a 是一定值。由贝叶斯法则有：

$$p(\theta|x_1,\cdots,x_N)=\frac{p(x_1,\cdots,x_N|\theta)p(\theta)}{\int_\varphi p(x_1,\cdots,x_N|\theta)\,p(\theta)d\theta}$$

这里φ表示整个模式空间。由于每一次迭代是从样本子集中逐个抽取一个变量，所以 N 次运算是独立地抽取 N 个变量，因此上式可写成：

$$p(\theta|x_1,\cdots,x_N)=a\left\{\prod_{k=1}^{N}p(x_k|\,\theta)\right\}p(\theta)$$

代入 p(x_k|θ) 和 p(θ)的值，得：

$$p(\theta|x_1,\cdots,x_N)$$

$$= a\left\{\prod_{k=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_k-\theta}{\sigma}\right)^2\right]\right\}$$

$$\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta-\theta_0}{\sigma_0}\right)^2\right]$$

$$= a'exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{x_k-\theta}{\sigma}\right)^2\right\}+\left(\frac{\theta-\theta_0}{\sigma_0}\right)^2\right]$$

$$= a''exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{N}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0^2}\right)\theta^2-2\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{N}x_k+\frac{\theta_0}{\sigma_0^2}\right)\theta\right\}\right]$$

上式每一步中与 θ 无关的项都并入常数项 a′ 和 a″，这样 $p(\theta|x_1,\ldots,x_N)$是 θ 平方函数的指数集合，仍是一正态密度函数。将它写成 $N(\theta_N,\sigma_N^2)$的形式，即：

$$p(\theta|x_1,\cdots,x_N)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_N}exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta-\theta_N}{\sigma_N}\right)^2\right]$$

$$= a'''exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta^2}{\sigma_N^2}-2\frac{\theta_N\theta}{\sigma_N^2}\right)\right]$$

将上述两式相比较，得：

$$\frac{1}{\sigma_N^2}=\frac{N}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0^2}$$

$$\frac{\theta_N}{\sigma_N^2}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{N}x_k+\frac{\theta_0}{\sigma_0^2}=\frac{N}{\sigma^2}\hat{m}_N+\frac{\theta_0}{\sigma_0^2}$$

解出 θ_N 和 σ_N，得：

$$\theta_N=\frac{N\sigma_0^2}{N\sigma_0^2+\sigma^2}\hat{m}_N+\frac{\sigma^2}{N\sigma_0^2+\sigma^2}\theta_0$$

$$\sigma_N^2=\frac{\sigma_0^2\sigma^2}{N\sigma_0^2+\sigma^2}$$

即根据对训练样本集$\{x_i\}_{i=1,2,\ldots,N}$的观察，求得均值θ的后验概率密度$p(\theta \mid x_i)$为$N(\theta_N,\sigma_N^2)$，其中θ_N是经过N个样本观察之后对均值的最好估计，它是先验信息（即θ_0，σ_0^2和σ^2）与训练样本所给信息（即N和$\hat{m}_N$）适当结合的结果，是用N个训练样本对均值的先验估计θ_0的补充；σ_N^2是对这个估计的不确定性的度量，因σ_N^2随N的增加而减小，因此当$N \to \infty$时，σ_N^2趋于零。由于θ_N是$\hat{m}_N$和θ_0的线性组合，两者的系数都非负且其和为1，因此只要$\sigma_0 \neq 0$，当$N \to \infty$时，θ_N趋于样本均值的估计量$\hat{m}_N$。

图中所示为一正态密度的均值学习过程，每增加一次对样本的预测，都可减小对θ估计的不确定性，所以$p(\theta \mid x_1, \ldots, x_N)$变得越来越峰形突起，且其均值与估计量$\hat{m}_N$之间的偏差的绝对值亦越来越小。