● 最佳变换向量 w*的求取

为求使 $J_F(w)=w^T S_b w / w^T S_w w$ 取极大值时的 w*，可以采用 Lagrange 乘数法求解。令分母等于非零常数，即：

$$w^T S_w w = c \neq 0$$

定义 Lagrange 函数为：

$$L(w,\lambda)=w^T S_b w-\lambda(w^T S_w w-c)$$

其中 λ 为 Lagrange 乘子。将上式对 w 求偏导数，可得：

$$\frac{\partial L(w,\lambda)}{\partial w}=2(S_b w-\lambda S_w w)$$

令偏导数为零，有；

$$S_b w^*-\lambda S_w w^*=0$$

即

$$S_b w^*=\lambda S_w w^*$$

其中 w*就是 $J_F(w)$的极值解。因为 S_w 非奇异，将上式两边左乘 S_w^{-1}，可得：

$$S_w^{-1} S_b w^*=\lambda w^*$$

上式为求一般矩阵 $S_w^{-1} S_b$ 的特征值问题。利用 $S_b=(m_1-m_2)(m_1-m_2)^T$ 的定义，将上式左边的 $S_b w^*$ 写成：

$$S_b w^*=(m_1-m_2)(m_1-m_2)^T w^*=(m_1-m_2)R$$

其中 $R=(m_1-m_2)^T w^*$ 为一标量，所以 $S_b w^*$ 总是在向量 (m_1-m_2) 的方向上。因此 λ w*可写成：

$$\lambda w^*=S_w^{-1}(S_b w^*)=S_w^{-1}(m_1-m_2)R$$

从而可得：

$$w^* = \frac{R}{\lambda} S_w^{-1}(m_1 - m_2)$$

由于我们的目的是寻找最佳的投影方向，w*的比例因子对此并无影响，因此可忽略比例因子 R/ λ , 有：

$$w^* = S_w^{-1}(m_1 - m_2)$$