第十章：随机过程及其统计描述
第十一章：马尔可夫链
第十二章：平稳过程
习题课

作业提交截止时间

2019年1月8日

第十章：随机过程及其统计描述

一、重要知识点

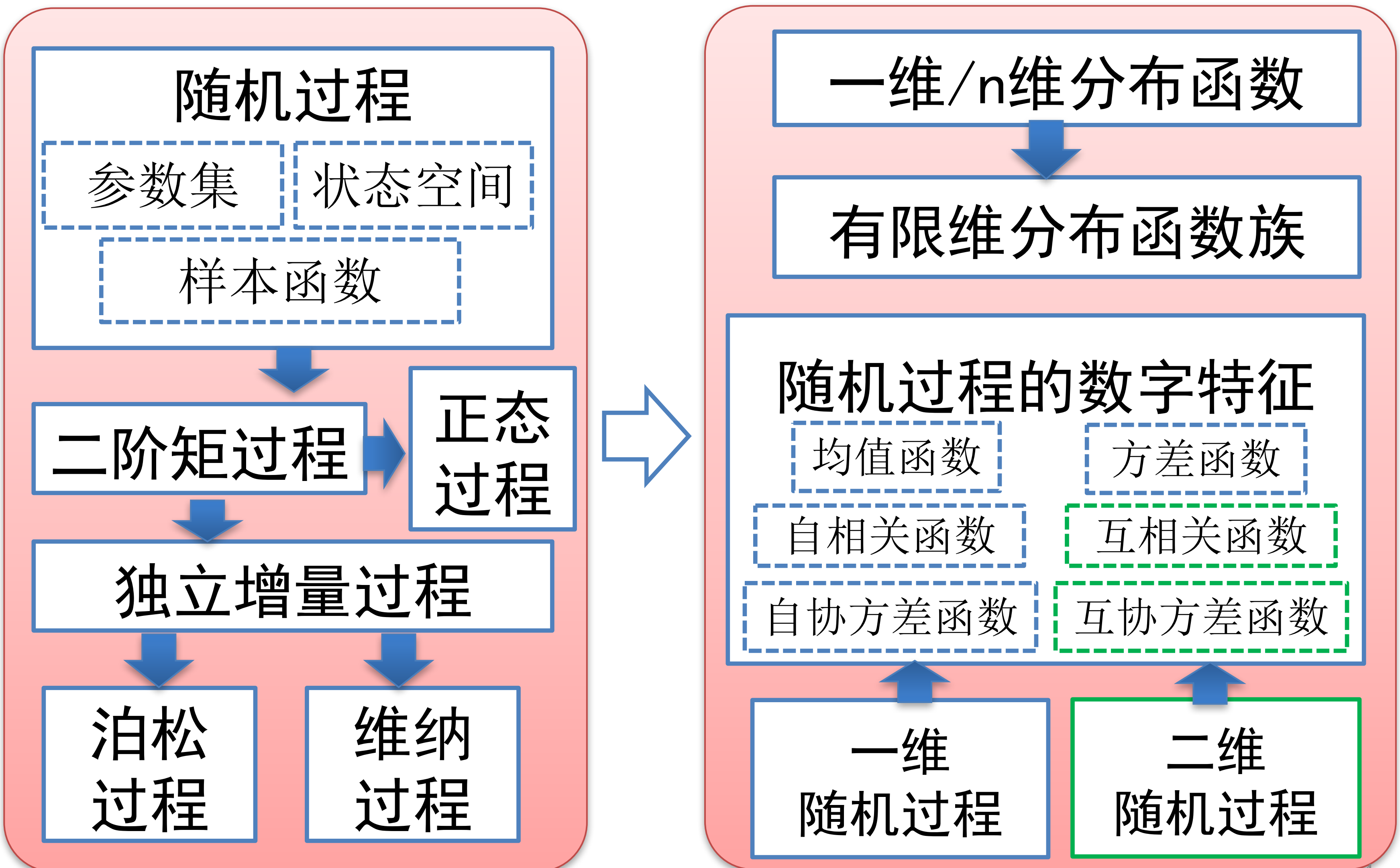
二、主要内容

三、典型例题

一．重要知识点

- 随机过程的基本概念
- 随机过程数字特征的计算
- 重要的几种随机过程的特点

二、主要内容



随机过程
参数集
状态空间
样本函数
二阶矩过程
正态过程
独立增量过程
泊松过程
维纳过程
一维/n维分布函数
有限维分布函数族
随机过程的数字特征
均值函数
方差函数
自相关函数
互相关函数
自协方差函数
互协方差函数
一维随机过程
二维随机过程

随机过程

- 定义：设T是一无限实数集，我们把依赖于参数$t \in T$ 的一族（无限多个）随机变量称为**随机过程**。记为$\{X(t),\ t \in T\}$，这里对于每一个$t \in T$，$X(t)$是一个随机变量。
- T叫做参数集，对固定的$t \in T$，$X(t)$称为过程的状态。
- $X(t)$所有可能的值的全体称为状态空间。
- 对于随机过程$\{X(t),\ t \in T\}$进行一次试验（即在T 上进行一次全程观测），它是t的函数，称为随机过程的样本函数，记为 $x(t)$，$t \in T$。

随机过程的描述方式

- 随机过程$\{X(t),\ t \in T\}$，对于每一个$t \in T$，$X(t)$是一个随机变量
- n维随机变量→联合分布
- n维随机变量延伸的随机过程→有限维分布函数族

随机过程的分布函数族

- **一维分布函数族**：设随机过程$\{X(t), t \in T\}$，对每一固定的$t \in T$，$F_X(x,t) = P\{X(t) \le x\}, x \in R$称为随机过程$\{X(t), t \in T\}$的一维分布函数，而$\{F_X(x,t), t \in T\}$称为一维分布函数族。
- 一般地，对任意$n(n = 2,3,\dots)$个不同的时刻$t_i \in T, i = 1,2,\dots,n$，$n$维随机变量$\big(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)\big)$的分布函数：$F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P\{X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2, \dots, X(t_n) \le x_n\}, (x_i \in R)$称为随机过程$\{X(t), t \in T\}$的$n$维分布函数，而$\{F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n), t \in T\}$称为$\{X(t), t \in T\}$的$n$维分布函数族。
- 柯尔莫哥洛夫定理：一般地，随机过程$\{X(t), t \in T\}$的有限维分布函数族$\{F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n), t \in T\}$完全确定了随机过程的统计特性

随机过程的数字特征

❑某一时间点t的数字特征

- 均值函数

$$\mu_X(t) = E[X(t)]$$

- 均方值函数

$$\Psi_X^2(t) = E[X^2(t)]$$

- 方差函数

$$\sigma_X^2(t) = D_X(t) = E\{[X(t) - \mu_X(t)]^2\}$$

- 标准差函数

$$\sigma_X(t) = \sqrt{\sigma_X^2(t)}$$

随机过程的数字特征

❑不同时间点（对任意$t_1, t_2 \in T$）间的数字特征

- （自）相关函数

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$$

简记为$R_X(t_1, t_2)$

- （自）协方差函数

$$C_{XX}(t_1, t_2) = \mathrm{Cov}[X(t_1)X(t_2)]$$
$$= E\{[X(t_1) - \mu_X(t_1)][X(t_2) - \mu_X(t_2)]\}$$

简记为$C_X(t_1, t_2)$

随机过程的数字特征

❑各数字特征之间的关系如下

- 均方值函数与(自)相关函数

$$\Psi_X^2(t) = R_X(t,t)$$

- 协方差函数、(自)相关函数与均值函数

$$C_X(t_1,t_2) = R_X(t_1,t_2) - \mu_X(t_1)\mu_X(t_2)$$

- 方差函数、协方差函数、相关函数、均值函数

$$\sigma_X^2(t) = C_X(t,t) = R_X(t,t) - \mu_X^2(t)$$

二阶矩过程

- **定义**：随机过程$\{X(t), t \in T\}$，如果对每一个$t \in T$，$E[X^2(t)]$都存在，则称$X(t)$是二阶矩过程。
  - 离散型随机过程：级数$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2(t) p_k$绝对收敛
  - 连续型随机过程：积分$\int x^2(t) f_t(x) dx$绝对收敛
- 二阶矩过程的均值函数总是存在
- 二阶矩过程的相关函数总是存在
  - 证明：柯西−施瓦兹不等式
  - $R_X(t_1, t_2) = \{E[X(t_1), X(t_2)]\}^2 \leq E[X^2(t_1)]E[X^2(t_2)]$

正态过程

- 一类特殊的二阶矩过程
- 定义：$\{X(t), t \in T\}$是随机过程，若它的每一个有限维分布都是正态分布，即对任意整数$n \geq 1$及任意$t_1, t_2, \dots, t_n \in T$，$(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$服从$n$维正态分布，则称$\{X(t), t \in T\}$是正态过程
- 正态过程的全部统计特性完全由它的均值函数和自协方差函数所确定

二维随机过程

- **二维随机过程**：设$X(t),Y(t)$是依赖于**同一参数$t\in T$**的随机过程，对于不同的$t\in T$，$\big(X(t),Y(t)\big)$是不同的二维随机变量，称$\{X(t),Y(t)\ t\in T\}$为**二维随机过程**
- **二维随机过程的$n+m$维分布函数**：给定二维随机过程$\{X(t),Y(t)\ t\in T\}$，$t_1,t_2,\dots,t_n$；$t'_1,t'_2,\dots,t'_m$是T中任意两组实数，则$n+m$维随机变量$(X(t_1),X(t_2),\dots,X(t_n);Y(t'_1),Y(t'_2),\dots,Y(t'_m))$的分布函数$F(x_1,x_2,\dots,x_n;t_1,t_2,\dots,t_n;y_1,y_2,\dots,y_m;t'_1,t'_2,\dots,t'_m)$称为二维随机过程的**$n+m$维分布函数**

二维随机过程的数字特征

❑ 二维随机过程$\left(X(t), Y(t)\right)$

- $X(t), Y(t)$各自的均值函数和自相关函数
- 互相关函数

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)], \qquad t_1, t_2 \in T$$
$$R_{YX}(t_1, t_2) = E[Y(t_1)X(t_2)], \qquad t_1, t_2 \in T$$

- 互协方差函数

$$C_{XY}(t_1, t_2) = E\{[X(t_1) - \mu_X(t_1)][Y(t_2) - \mu_Y(t_2)]\}$$
$$= R_{XY}(t_1, t_2) - \mu_X(t_1)\mu_Y(t_2), \qquad t_1, t_2 \in \ T$$
$$C_{YX}(t_1, t_2) = R_{YX}(t_1, t_2) - \mu_Y(t_1)\mu_X(t_2), \qquad t_1, t_2 \in \ T$$

随机过程的相关性和独立性

- 如果二维随机过程$\big(X(t),Y(t)\big)$对任意的$t_1,t_2\in\ T$，恒有$C_{XY}(t_1,t_2)=0$，则随机过程$X(t)$和$Y(t)$是不相关的
- 应用：分离噪声
- 给定二维随机过程$\{X(t),Y(t)\ t\in T\}$，对任意的正整数n,m，任意的两组实数$t_1,t_2,\dots,t_n\in T$; $t'_1,t'_2,\dots,t'_m\in T$，$n$维随机变量$\big(X(t_1),X(t_2),\dots,X(t_n)\big)$与$m$维随机变量$(Y(t'_1),Y(t'_2),\dots,Y(t'_m))$相互独立，称随机过程$X(t)$和$Y(t)$是相互独立的
- 两个随机过程如果互相独立，且他们的二阶矩存在→它们不相关；反之不成立

独立增量过程

- **增量**：给定二阶矩过程$\{X(t), t \geq 0\}$，对$s, t\ (0 \leq s < t)$，称随机变量$X(t) - X(s)$为随机过程在区间(s， t]上的**增量**
- **独立增量过程**：对任意选定的正整数n和任意选定的$0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$，如果$n$个增量$\{X(t_i) - X(t_{i-1})\}, i = 1,2, \ldots, n$相互独立，则称$\{X(t), t \geq 0\}$为**独立增量过程**
- **平稳性**：若对任意的实数h和$0 \leq s + h < t + h$，$X(t + h) - X(s + h)$与$X(t) - X(s)$具有相同的分布，则称**增量**具有**平稳性**

独立增量过程的性质

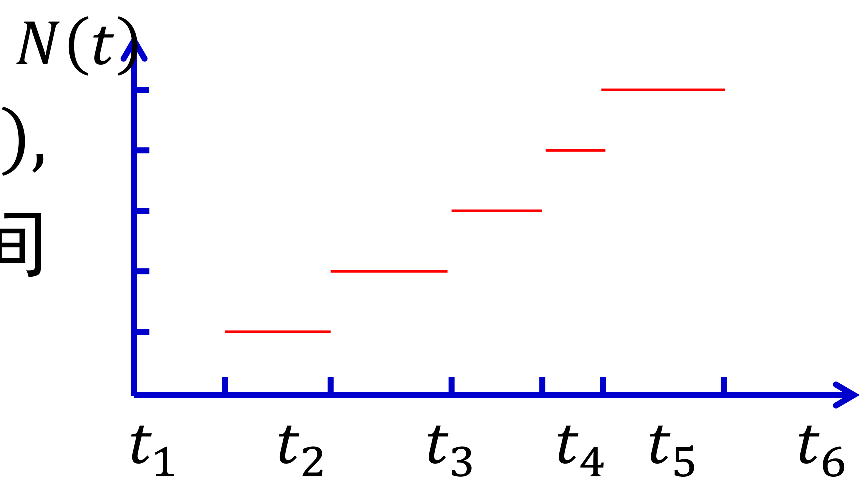
- **齐次性：** 当增量具有平稳性时，称相应的独立增量过程是齐次（时齐）的
- **分布的特点：** 若$\{X(t), t \geq 0\}$是独立增量过程，且$X(0) = 0$，则

1. $X(t)$的有限维分布函数族可以由增量$X(t) - X(s)\ (0 \leq s < t)$的分布所确定
2. 设方差函数$D_X(t)$已知，则协方差函数

$$C_X(s,t) = D_X(\min(s,t))$$

计数过程

- **质点**：典型的随时间推移发生事件的计数，简化为时间轴上的质点
- **计数过程$\{N(t), t \geq 0\}$**：一状态取非负整数、时间连续的随机过程
- 记$N(t_0, t) = N(t) - N(t_0)$，$0 \leq t_0 < t$，它表示时间间隔$(t_0, t]$内出现的质点数，其概率记为：



$$P_k(t_0, t) = P\{N(t_0, t) = k\} \quad k = 0,1,2,\ldots$$

泊松过程

❑ **定义**：称计数过程 $N(t)$ 是**强度为 λ** 的**泊松过程**，如果满足：

1. 在不相重叠的区间上的增量具有独立性
2. 对于充分小的Δt,

$$P_1(t,t+\Delta t) = P\{(N(t,t+\Delta t) = 1\} = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$$

其中常数λ称为N(t)的强度

3. 对于充分小的Δt,

$$\sum_{j=2}^{\infty} P_j(t,t+\Delta t) = \sum_{j=2}^{\infty} P_j\{N(t,t+\Delta t) = j\} = o(\Delta t)$$

暗示：出现两个及以上质点的概率相对于出现一个的概率可以忽略不计

4. $N(0) = 0$

泊松过程

- **分布律：** 若$N(t)$是强度为λ的泊松过程，则 $N(t_0,t)\sim\pi[\lambda(t-t_0)]$，即：

$$P_k(t_0,t)=P\{N(t_0,t)=k\}=\frac{[\lambda(t-t_0)]^k}{k!}e^{-\lambda(t-t_0)},$$
$$t>t_0,k=0,1,2,\ldots$$

- **泊松过程的等价定义：** 计数过程$\{N(t),t\geq 0\}$满足如下三个条件，称作强度为λ的泊松过程：

1. 它是独立增量过程
2. 对任意的$t>t_0\geq 0$，增量
$$N(t)-N(t_0)\sim\pi[\lambda(t-t_0)]$$
3. $N(0)=0$

强度为λ的泊松过程的数字特征

- 均值函数

$$E[N(t)-N(t_0)]=\lambda(t-t_0)$$

- 方差函数

$$D[N(t)-N(t_0)]=\lambda(t-t_0)$$

特别地，当$t_0=0$，由假设$N(0)=0$，可得：

$$\mu_N(t)=E[N(t)]=\lambda t,\quad D_N(t)=D[N(t)]=\lambda t$$

- 协方差函数

$$C_N(s,t)=D_N(\min(s,t))=\lambda\min(s,t),s,t>=0$$

- 自相关函数

$$R_N(s,t)=C_N(s,t)+\mu_N(s)\mu_N(t)=\lambda\min(s,t)+\lambda^2 st$$

维纳过程

❑**定义：**二阶矩过程$\{W(t), t \geq 0\}$是维纳过程，如果它满足：

1. 具有独立增量
2. 对任意$t > s \geq 0$，增量$W(t) - W(s) \sim N\left(0, \sigma^2(t-s)\right)$ 且$\sigma > 0$
3. $W(0) = 0$

❑**性质**

- 维纳过程是齐次的独立增量过程
- 维纳过程是正态过程，故其分布完全由它的均值函数和自协方差函数(即自相关函数)所确定

维纳过程的数字特征

- 均值函数

$$\mu_W(t) = E\big(W(t)\big) = 0$$

- 方差函数

$$D_W(t) = D\big(W(t)\big) = \sigma^2 t$$

- 协方差函数和自相关函数

$$C_W(s,t) = R_W(s,t) = D_W[\min(s,t)]$$
$$= \sigma^2 \min(s,t)\,\forall s,t > 0$$

泊松过程和维纳过程

	泊松过程	维纳过程
独立增量过程	是	是
齐次性	是	是
马尔可夫过程	时间连续、状态离散	时间连续、状态连续
增量分布	$\pi[\lambda(t-s)]$	$N\left(0,\sigma^2(t-s)\right)$
均值函数	λt	0
方差函数	λt	$\sigma^2 t$
自协方差函数	$\lambda\min(s,t)$	$\sigma^2\min(s,t)$
自相关函数	$\lambda\min(s,t)+\lambda^2 st$	$\sigma^2\min(s,t)$

三、典型例题

例1. 给定随机过程$X(t)=\xi+\eta t, -\infty<t<+\infty$, 其中随机向量$(\xi,\ \eta)$的协方差矩阵为：$C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$。求随机过程$\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$的自协方差函数。

解：$\mu_X(t)=E[X(t)]=E[\xi+\eta t]=E(\xi)+E(\eta)t$

$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=E[(\xi+\eta t_1)(\xi+\eta t_2)]$$
$$=E(\xi^2)+E(\xi\eta)(t_1+t_2)+E(\eta^2)\,t_1t_2$$
$$C_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)-\mu_X(t_1)\mu_X(t_2)$$
$$=[E(\xi^2)-E(\xi)^2]+[E(\xi\eta)-E(\xi)E(\eta)](t_1+t_2)+[E(\eta^2)-E(\eta)^2]\,t_1t_2$$
$$=D(\xi)+Cov(\xi,\eta)\,(t_1+t_2)+D(\eta)t_1t_2$$
$$=1+3\,(t_1+t_2)+4t_1t_2$$

例2. 设随机过程$\boldsymbol{X(t) = A\cos t, -\infty < t < +\infty}$，且其概率分布律为

A	**1**	**2**	**3**
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

试求一维分布函数$\boldsymbol{F(x;\ \pi/4)}$，$\boldsymbol{F(x;\ \pi/2)}$以及均值函数和自相关函数。

解: $(1)t = \pi/4$，则$X(\pi/4) = \mathrm{A}\sqrt{2}/2$，其分布律为

$X(\pi/4)$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}/2$
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

，一元分布函数$F(x;\ \pi/4) = \begin{cases} 0, & x < \sqrt{2}/2 \\ \frac{1}{3}, & \frac{\sqrt{2}}{2} \le x < \sqrt{2} \\ \frac{2}{3}, & \sqrt{2} \le x < \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 1, & x \ge \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

例2. 设随机过程$X(t) = A\cos t, -\infty < t < +\infty$, 且其概率分布律为

A	**1**	**2**	**3**
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

试求一维分布函数$F(x;\ \pi/4)$，$F(x;\ \pi/2)$以及均值函数和自相关函数。

解: (2)$t = \pi/2$，则$X(\pi/2) = 0$

$X(\pi/2)$	0
P	1

$$F(x;\ \pi/2) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1, x \geq 0 \end{cases}$$

(3) $\mu_X(t) = E[Xt]$=$E[A\cos t]$= $\cos t\, E[A]$=$2\cos t$

(4) $R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] =$

$E[A\cos t_1 A\cos t_2]$=$\cos t_1 \cos t_2 E[A^2]$=$\frac{14}{3}\cos t_1 \cos t_2$

例3. 已知寻呼台在$[\mathbf{0}，\boldsymbol{t})$内收到的呼叫次数$\{\boldsymbol{N}(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{t}>\mathbf{0}\}$是泊松过程，每分钟平均收到2次呼叫。

（1）求2分钟内收到3次呼叫的概率

（2）求$[0,2]$内收到3次且$[0,3]$内收到5次呼唤的概率

（3）已知$[0,3]$内收到5次呼唤，求$[0,2]$内收到3次呼唤的概率

（4）已知$[0,2]$内收到3次呼唤，求$[0,3]$内收到5次呼唤的概率。

解：（1）因为$N(t)-N(t_0)\sim\pi[\lambda(t-t_0)]$，$N(0)=0$，所以

$$\mathrm{P}(N(2)=3)=P(N(2)-N(0)=3)=\frac{(2\times2)^3}{3!}e^{-(2\times2)}=\frac{32}{3}e^{-4}$$

(2) $\mathrm{P}(N(2)=3,N(3)=5)$

$=\mathrm{P}(N(2)-N(0)=3,N(3)-N(2)=2)$

$$=\frac{(2\times2)^3}{3!}e^{-(2\times2)}\frac{(2\times1)^2}{2!}e^{-(2\times1)}=\frac{64}{3}e^{-6}$$

例3. 已知寻呼台在$[\mathbf{0},\ \boldsymbol{t})$内收到的呼叫次数$\{\boldsymbol{N}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t} > \mathbf{0}\}$是泊松过程，每分钟平均收到2次呼叫。

（1）求2分钟内收到3次呼叫的概率

（2）求$[0,2]$内收到3次且$[0,3]$内收到5次呼唤的概率

（3）已知$[0,3]$内收到5次呼唤，求$[0,2]$内收到3次呼唤的概率

（4）已知$[0,2]$内收到3次呼唤，求$[0,3]$内收到5次呼唤的概率。

解：(3)$\mathrm{P}(N(2)=3|N(3)=5)=\dfrac{\mathrm{P}(N(2)=3,N(3)=5)}{P(N(3)=5)}=\dfrac{\frac{64}{3}e^{-6}}{\frac{6^5}{5!}e^{-6}}=\dfrac{80}{243}$

$$(4)\mathrm{P}(N(3)=5|N(2)=3)=\frac{\mathrm{P}(N(2)=3,\ N(3)=5)}{P(N(2)=3)}$$

$$=\mathrm{P}(N(3)-N(2)=2)=2e^{-2}$$

例4. 设$\{X(t), t \geq 0\}$是泊松过程，且对任意的 $t_2 > t_1 \geq 0$，$E[X(t_2) - X(t_1)] = 2(t_2 - t_1)$

求：（1）求概率$P\{X(1) = 2, X(4) = 6, X(6) = 7\}$

（2）求概率$P\{ X(4) = 6|X(1) = 2\}$

解: 因为$N(t_2) - N(t_1) \sim \pi[\lambda(t_2 - t_1)]$,所以$E[X(t_2) - X(t_1)] = \lambda(t_2 - t_1) = 2(t_2 - t_1)$,$\lambda$为2,

(1)$P\{X(1) = 2, X(4) = 6, X(6) = 7\} = P\{X(1) - X(0) = 2, X(4) - X(1) = 4, X(6) - X(4) = 1\}$

$= P_2(0,1)\, P_4(1,4) P_1(4,6)$

$$= \frac{(2\times1)^2}{2!} e^{-(2\times1)} \frac{(2\times3)^4}{4!} e^{-(2\times3)} \frac{(2\times2)^1}{1!} e^{-(2\times2)} = 432e^{-12}$$

(2) $P\{ X(4) = 6|X(1) = 2\} = P\{X(4) - X(1) = 4\} = \frac{(2\times3)^4}{4!} e^{-(2\times3)} = 54e^{-6}$

例5. 设$\{W(t), t\geq 0\}$是参数为σ^2的维纳过程，试计算下列过程的均值函数和自相关函数。

（1） $X(t) = c^{-1}W\left(c^2 t\right), t\geq 0;$

（2） $X(t) = W(t) - tW(t)$， $t\geq 0.$

解：（1）$\mu_X(t) = E[X(t)] = E[c^{-1}W(c^2t)] = c^{-1}E[W(c^2t)] = 0$

$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E\left[c^{-1}W(c^2t_1)c^{-1}W(c^2t_2)\right]$

$= c^{-2}R_W(c^2t_1, c^2t_2) = c^{-2}\ \sigma^2\min\{c^2t_1, c^2t_2\} = \sigma^2\min\{t_1, t_2\}$

（2）$\mu_X(t) = E[X(t)] = E[W(t) - tW(t)] = 0$

$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$

$= E\left[\left(W(t_1) - t_1W(t_1)\right)\left(W(t_2) - t_2W(t_2)\right)\right]$

$= E[W(t_1)W(t_2) - (t_1 + t_2)W(t_1)W(t_2) + t_1t_2W(t_1)W(t_2)]$

$= (1 - (t_1 + t_2) + t_1t_2)\ R_W(t_1, t_2) = (1 - t_1)(1 - t_2)\sigma^2\min\{t_1, t_2\}$

第十一章：马尔可夫链

一、重要知识点

二、主要内容

三、典型例题

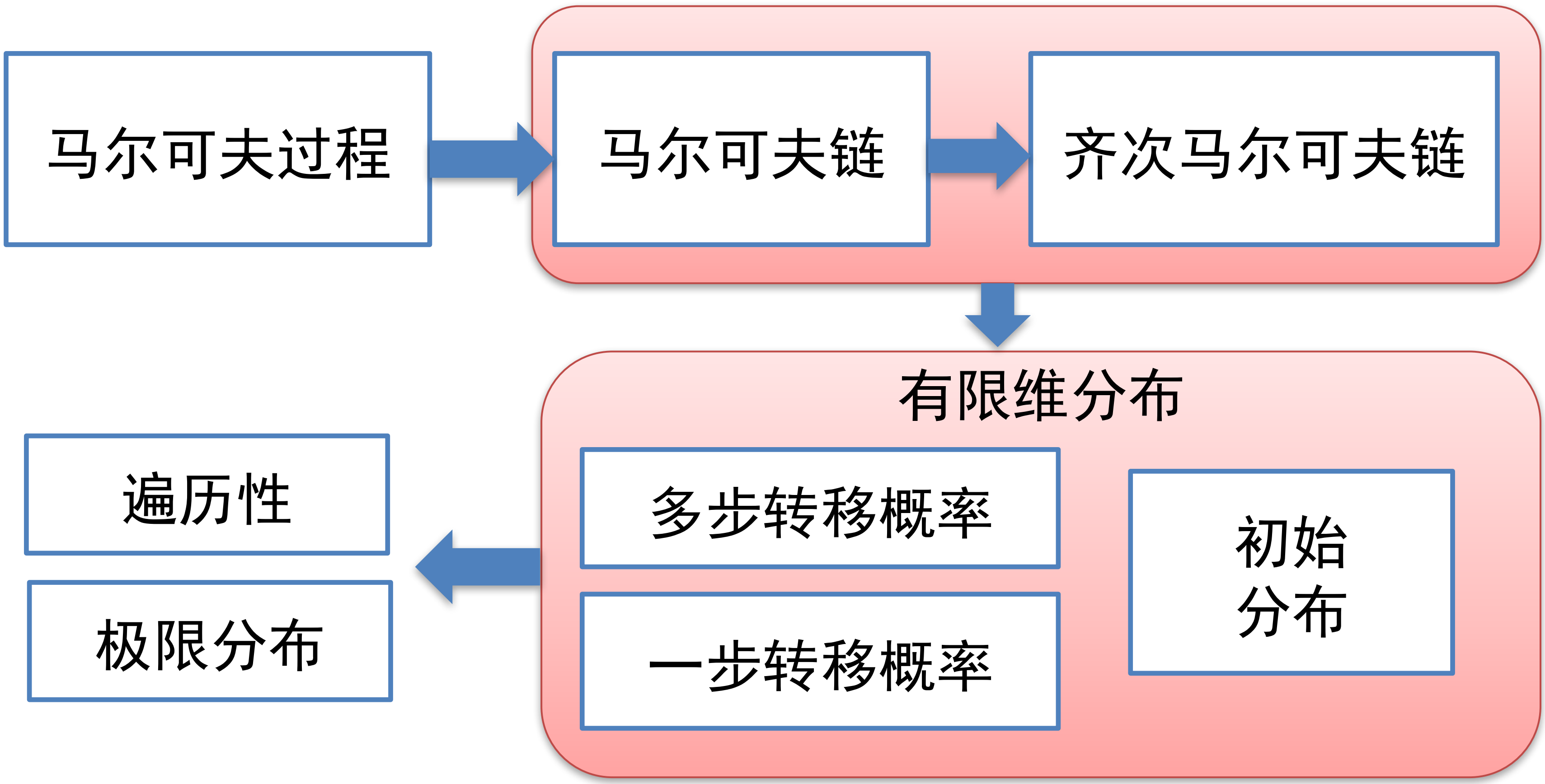
一. 重要知识点

1. 多步转移概率的确定

2. 齐次马氏链概率分布的确定

3. 遍历性的判定以及极限分布的求解

二、主要内容



马尔可夫性（无后效性）

❑**马尔可夫性**：过程(或系统)在时刻t_0所处的状态为已知的条件下，过程在时刻$t > t_0$所处状态的条件分布与过程在时刻t_0之前所处的状态无关。

❑**马尔可夫过程**：随机过程$\{X(t), t \in T\}$，对其参数集T中任意n个数值$t_1 < t_2 < \cdots < t_n, n \geq 3, t \in T$，

$$P\{X(t_n) \leq x_n | X(t_1) = x_1, \ldots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}\} = P\{X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}\},$$

则称过程$\{X(t), t \in T\}$具有马尔可夫性(无后效性)，并称此随机过程为马尔可夫过程

马尔可夫链

- 定义：时间和状态都离散的马尔可夫过程称为马尔可夫链，简称马氏链
- 数学描述：对任意的正整数n, r和$0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_r < m; t_i, m, m+n \in T$，有

$$P\{X_{m+n} = a_j | X_{t_1} = a_{i_1}, \ldots, X_{t_r} = a_{i_r}, X_m = a_i\} = P\{X_{m+n} = a_j | X_m = a_i\} \overset{\text{def}}{=} P_{ij}(m, m+n)$$

马尔可夫链的转移概率

- **转移概率**：$P_{ij}(m,m+n)=P(X_{m+n}=a_j|X_m=a_i)$称为马氏链在时间$m$处于状态$a_i$条件下，在时间$m+n$转移到状态$a_j$的转移概率
- **性质**：$\sum_{j=1}^{\infty} P_{ij}(m,m+n)=1\,,j=1,2,\ldots$
  - 马氏链在时刻m以任何一个状态a_i出发，到另一个时刻$m+n$必然转移到$a_1,a_2,\ldots$诸状态中的某一个
- **转移概率矩阵**：

$$P(m,m+n)=\begin{pmatrix} P_{11}(m,m+n) & P_{12}(m,m+n) & \cdots \\ P_{21}(m,m+n) & P_{22}(m,m+n) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

此矩阵的每一行元素之和等于1

齐次马尔可夫链

- 齐次马氏链：转移概率 $P_{ij}(m,m+n)$ 具有平稳性，即$\boldsymbol{P_{ij}(m,m+n)}$**只与$\boldsymbol{i,j}$及$\boldsymbol{n}$有关**时，记$P_{ij}(n)=P_{ij}(m,m+n)=P\left(X_{m+n}=a_j|X_m=a_i\right)=P\left(X_n=a_j|X_0=a_i\right)$为马氏链的n步转移概率
- n步转移概率矩阵为：

$$P(n)=\begin{pmatrix} P_{11}(n) & P_{12}(n) & \cdots \\ P_{21}(n) & P_{22}(n) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

齐次马尔可夫链

- 一步转移概率记为：

$$P_{ij} = P_{ij}(1) = P\left(X_{m+1} = a_j \middle| X_m = a_i\right)$$

- 一步转移概率矩阵记为：

$$P = P(1) = \begin{array}{ccc} & & X_{m+1}\text{状态} \\ & & \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & \cdots \end{array} \\ \begin{array}{c} X_m \\ \text{状} \\ \text{态} \end{array} & \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{array} & \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots \\ P_{21} & P_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

马氏链的有限维分布

- 马氏链的初始分布：$P_j(0)=P\{X_0=a_j\},a_j\in I,j=1,2,\ldots$
- 马氏链在任一时刻$n\in T=\{0,1,2,\ldots\}$的一维分布：

$$p_j(n)=P\{X_n=a_j\},a_j\in I,j=1,2,\ldots$$

- 性质：
  - $\sum_{j=1}^{\infty}p_j(n)=1$
  - 马氏链在任意时刻的一维分布由初始分布和n步转移概率矩阵所确定

$$p_j(n)=\sum_{i=1}^{\infty}p_i(0)p_{ij}(n),j=1,2,\ldots$$

马氏链的有限维分布

- 对于任意个时刻$t_1 < t_2 < \cdots < t_n, t_i \in T$以及状态 $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n} \in I$，马氏链的$n$维分布：

$$P\{X_{t_1} = a_{i_1}, X_{t_2} = a_{i_2}, \ldots, X_{t_n} = a_{i_n}\}$$
$$= P\{X_{t_1} = a_{i_1}\}P\{X_{t_2} = a_{i_2} | X_{t_1} = a_{i_1}\} \ldots$$
$$P\{X_{t_n} = a_{i_n} | X_{t_1} = a_{i_1}, X_{t_2} = a_{i_2}, \ldots, X_{t_{n-1}} = a_{i_{n-1}}\}$$
$$= P\{X_{t_1} = a_{i_1}\}P\{X_{t_2} = a_{i_2} | X_{t_1} = a_{i_1}\} \ldots \ P\{X_{t_n} = a_{i_n} | X_{t_{n-1}} = a_{i_{n-1}}\}$$
$$= P_{i_1}(t_1)P_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \ldots P_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1})$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} p_i\,(0)P_{i i_1}(t_1)P_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \ldots P_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1})$$

- 马氏链的有限维分布完全由初始分布和转移概率所确定

多步转移概率的确定

- **Chapman-Kolmogorov方程（C-K方程）**：设$\{X_n, n=1,2,\dots\}$是一齐次马氏链，则对任意的$u, v \in T_1 = \{0,1,2,\dots\}$，有

$$P_{ij}(u+v) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{ik}(u) P_{kj}(v), i,j = 1,2,\dots$$

- 齐次马尔可夫链的有限维分布可由初始分布与一步转移概率完全确定

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{n}) = P(1)P(n-1) = PP(n-1)$$
$$= P^2 P(n-2) = \cdots = \boldsymbol{P}^{\boldsymbol{n}}$$

马尔可夫链的遍历性

- **遍历性**：一般地，设齐次马氏链的状态空间为I，若对于所有$a_i, a_j \in I$，转移概率$P_{ij}(n)$存在极限：

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}(n) = \pi_j (\text{不依赖于} i) \text{或}$$

$$P(n) = P^n \xrightarrow{n\to\infty} \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

则称此链具有遍历性

- **极限分布**：若$\sum_j \pi_j = 1$，则称$\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots)$为链的极限分布

有限链的遍历性的充分条件

- 定理：设齐次马氏链$\{X_n \geq 1\}$ 的状态空间为$I = \{a_1, a_2, \dots a_N\}$，$P$是它的一步转移概率矩阵，如果存在正整数$m$，使对任意的$a_i, a_j \in I$，都有$P_{ij}(m) > 0, i, j = 1,2, \dots, N$，则此链具有遍历性
- 且有极限分布$\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N)$，它是方程组

$$\pi = \pi P(\text{即}\pi_j = \sum_{i=1}^{N} \pi_i P_{ij})$$

的满足条件$\pi_j > 0$，$\sum_{j=1}^{N} \pi_j = 1$的唯一解。

三、典型例题

例1. 已知齐次马尔可夫链的转移概率矩阵，

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

问此马尔可夫链有几个状态？求二步转移概率矩阵。

解: 因为转移概率矩阵是3阶的，故马尔可夫链的状态有三个；二步转移概率矩阵为:

$$P(2)=P^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}\frac{3}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9}\\ \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9}\\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{3}{9}\end{pmatrix}$$

例2. 已知齐次马尔可夫链的转移概率矩阵, $\boldsymbol{P}$ 同上例，若初始概率分布为$\boldsymbol{p_{1(0)} = p_{2(0)} = p_{3(0)} = \frac{1}{3}}$，求

（1）$\boldsymbol{P\{X_1 = 1，X_2 = 2，X_3 = 3\}}$ （2）$\boldsymbol{P\{X_2 = 3\}}$

（3）该链的平稳分布

解: (1) $P\{X_1 = 1，X_2 = 2，X_3 = 3\}$

$= P\{X_1 = 1\}P\{X_2 = 2|X_1 = 1\}P\{X_3 = 3|X_2 = 2, X_1 = 1\}$

$= P\{X_1 = 1\}\ P\{X_2 = 2|X_1 = 1\}P\{X_3 = 3|X_2 = 2\}$

$$= P\{X_1 = 1\}p_{12}p_{23} = \sum_{j=1}^{3} P\{X_0 = j\}P\{X_1 = 1|X_0 = j\}\,p_{12}p_{23}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 0\right) \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{81}$$

(2) $P\{X_2 = 3\} = \sum_{j=1}^{3} P\{X_0 = j\}P\{X_2 = 3|X_0 = j\}$

$= \sum_{j=1}^{3} P\{X_0 = j\}p_{j3}(2) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9}\right) = \frac{7}{27}$

例2. 已知齐次马尔可夫链的转移概率矩阵, $\boldsymbol{P}$ 同上例，若初始概率分布为$\boldsymbol{p_{1(0)} = p_{2(0)} = p_{3(0)} = \frac{1}{3}}$，求

（1）$\boldsymbol{P\{X_1 = 1，X_2 = 2，X_3 = 3\}}$ （2）$\boldsymbol{P\{X_2 = 3\}}$

（3）该链的平稳分布

解：(3) 平稳分布$\pi =$（π_1，π_2，π_3）满足方程组:

$$\begin{cases} \pi_1 = \pi_1 \dfrac{1}{3} + \pi_2 \dfrac{1}{3} + \pi_3 0 \\ \pi_2 = \pi_1 \dfrac{2}{3} + \pi_2 \dfrac{1}{3} + \pi_3 \dfrac{2}{3} \\ \pi_3 = \pi_1 0 + \pi_2 \dfrac{1}{3} + \pi_3 \dfrac{1}{3} \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

解得：$\pi_1 = \frac{1}{4}$，　$\pi_2 = \frac{2}{4}$，　$\pi_3 = \frac{1}{4}$

例3. A、B、C三家公司决定在某一时间推销一种新产品，当时他们各拥有$\frac{1}{3}$的市场，然而一年后，情况发生了如下的变化：

(a) A保住0.4的顾客，而失去0.3给B，失去0.3给C;

(b) B保住0.3的顾客，而失去0.6给A，失去0.1给C;

(c) C保住0.3的顾客，而失去0.6给A，失去0.1给B。

问：

(1) 如果这种趋势下去，试问第2年底各公司拥有多少份额的市场？

(2) 试问至第2年底，A公司转移多少客户给B公司。

(3) 若某顾客第一年底是A公司的客户，第三年是B公司的客户，第四年仍然是A公司的客户，求该事件的概率

(4) 从长远看来，市场份额是否会趋于稳定，若稳定，三公司分别会有怎样的市场份额？

解： 由题目知，设A、B、C 公司分别为1、2、3, 则三家公司所占市场份额为齐次马氏链, 且$p_1(0)=p_2(0)=p_3(0)=1/3$

(1) 如果这种趋势下去，试问第2年底各公司拥有多少份额的市场?

一步转移概率矩阵为：$P=\begin{pmatrix}0.4 & 0.3 & 0.3\\ 0.6 & 0.3 & 0.1\\ 0.6 & 0.1 & 0.3\end{pmatrix}$

两步转移概率矩阵为:

$$P(2)=P^2=\begin{pmatrix}0.4 & 0.3 & 0.3\\ 0.6 & 0.3 & 0.1\\ 0.6 & 0.1 & 0.3\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0.52 & 0.24 & 0.24\\ 0.48 & 0.28 & 0.24\\ 0.48 & 0.24 & 0.28\end{pmatrix}$$

$$\vec{p}(2)=\vec{p}(0)p(2)=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.52 & 0.24 & 0.24\\ 0.48 & 0.28 & 0.24\\ 0.48 & 0.24 & 0.28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{37}{75} & \frac{19}{75} & \frac{19}{75}\end{pmatrix}$$

即两年后所占市场份额分别是：$37/75, 19/75, 19/75$

解： (2) 试问至第2年底，A公司转移多少客户给B公司。

$$P_{12}(2) = 0.24$$

即，A公司转移0.24的份额给B公司。

（3）若某顾客第一年底是A公司的客户，第三年是B公司的客户，第四年仍然是A公司的客户，求该事件的概率

$$P(X_1 = 1, X_3 = 2, X_4 = 1)$$

$$= p_1(1)p_{12}(2)p_{21}(1)$$

$$= \left(p_1(0)p_{11} + p_2(0)p_{21} + p_3(0)p_{31}\right)p_{12}(2)p_{21}(1)$$

$$= \left(\frac{1}{3}\times 0.4 + \frac{1}{3}\times 0.6 + \frac{1}{3}\times 0.6\right)\times 0.24\times 0.6 = 0.0768$$

解: (4) 从长远看来，市场份额是否会趋于稳定，若稳定，三公司分别会有怎样的市场份额？

假设市场份额稳定到 $\pi = (\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3)$

解方程组: $\begin{cases} \pi = \pi P \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$

即: $\begin{cases} \pi_1 = 0.4\pi_1 + 0.6\pi_2 + 0.6\pi_3 \\ \pi_2 = 0.3\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.1\pi_3 \\ \pi_3 = 0.3\pi_1 + 0.1\pi_2 + 0.3\pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$

解之得: $\pi_1 = 0.5, \pi_2 = 0.25, \pi_3 = 0.25.$

故长远看来，市场份额会稳定到A公司占50%，B公司占25%, C公司占25%.

例4. 在一串贝努力试验中，事件A在每次试验中发生的概率为p，令

$$X_n=\begin{cases}0, & 第n次试验A不发生\\ 1, & 第n次试验A发生\end{cases}, n=1,2,3,\dots$$

（1）$\{X_n, n=1,2,3,\dots\}$是否齐次马尔可夫链？

（2）写出状态空间和转移概率矩阵；

（3）求n步转移概率矩阵

解： (1) 根据题意X_1，$X_2,\dots$，X_n是相互独立的，所以，X_n与$X_{n-1}, X_{n-2},\dots, X_1$独立，$\{X_n, n=1,2,3,\dots\}$是马尔可夫链。

转移概率$P\{X_{n+1}=j|X_n=i\}=P\{X_{n+1}=j\}=\begin{cases}q, j=0\\ p, j=1\end{cases}$

与n无关，故$\{X_n, n=1,2,3,\dots\}$是齐次马尔可夫链。

例4. 在一串贝努力试验中，事件A在每次试验中发生的概率为p, 令

$$X_n=\begin{cases}0, & \text{第}n\text{次试验}A\text{不发生}\\ 1, & \text{第}n\text{次试验}A\text{发生}\end{cases}, n=1,2,3,\dots$$

（1）$\{X_n, n=1,2,3,\dots\}$是否齐次马尔可夫链?

（2）写出状态空间和转移概率矩阵;

（3）求n步转移概率矩阵

解： (2) 状态空间$S=\{0,1\}$; 一步转移概率矩阵

$$P=\{P_{ij}\}=\begin{Bmatrix} q & p\\ q & p\end{Bmatrix}$$

其中$P_{ij}=P\{X_{n+1}=j|X_n=i\}=P\{X_{n+1}=j\}=\begin{cases}q, j=0\\ p, j=1\end{cases}$

(3) 求n步转移概率矩阵

$$P(n)=P^n=\{P_{ij}\}^n=\begin{Bmatrix} q & p\\ q & p\end{Bmatrix}$$

例5. 从次品率$\boldsymbol{p}(\mathbf{0} < \boldsymbol{p} < \mathbf{1})$的一批产品中，每次随机抽查一个产品，以$\boldsymbol{X_n}$表示前$\boldsymbol{n}$次抽查出的次品数，

（1）$\{\boldsymbol{X_n}, \boldsymbol{n} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \dots\}$是否齐次马尔可夫链？

（2）写出状态空间和转移概率矩阵；

（3）如果这批产品共有100个，其中混杂了3个次品，作有放回抽样，求在抽查出2个次品的条件下，再抽查2次，共查出3个次品的概率。

解：（1）对于任意$n_2 > n_1$, $P\{X_{n_2} = i \mid X_{n_1} = j\} = P\{X_{n_2-n_1} = i - j\}$只与时间间隔$n_2 - n_1$有关，因此$\{X_n, n = 1,2,3, \dots\}$是齐次马尔可夫链。

（2）状态空间$S = \{0,1,2, \dots, n, \dots\}$，$p$是次品率，$q = 1 - p$是正品率，转移概率为$P_{ij} = P\{\mathrm{X}_{n+1} = j | \mathrm{X}_n = i\} = \begin{cases} 0, j < i \\ q, j = i \\ p, j = i + 1 \\ 0, j > i + 1 \end{cases}$

例5. 从次品率$\boldsymbol{p}(\mathbf{0} < \boldsymbol{p} < \mathbf{1})$的一批产品中，每次随机抽查一个产品，以$\boldsymbol{X_n}$表示前$\boldsymbol{n}$次抽查出的次品数，

（1）$\{\boldsymbol{X_n}, \boldsymbol{n} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \dots\}$是否齐次马尔可夫链？

（2）写出状态空间和转移概率矩阵；

（3）如果这批产品共有100个，其中混杂了3个次品，作有放回抽样，求在抽查出2个次品的条件下，再抽查2次，共查出3个次品的概率。

解：（2）转移概率矩阵$P =$

$$\begin{bmatrix} q & p & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & q & p & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & 0 & q & p & 0 \\ & & \cdots & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & \vdots & 0 & \ddots \end{bmatrix}$$

例5. 从次品率$\boldsymbol{p}(\mathbf{0}<\boldsymbol{p}<\mathbf{1})$的一批产品中，每次随机抽查一个产品，以$\boldsymbol{X_n}$表示前$\boldsymbol{n}$次抽查出的次品数，

（1）$\{\boldsymbol{X_n}, \boldsymbol{n}=\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\ldots\}$是否齐次马尔可夫链？

（2）写出状态空间和转移概率矩阵；

（3）如果这批产品共有100个，其中混杂了3个次品，作有放回抽样，求在抽查出2个次品的条件下，再抽查2次，共查出3个次品的概率。

解：（3）次品率$p=0.03$, 所求概率为：

$$P=P\{\mathrm{X}_{n+2}=3|\mathrm{X}_n=2\}=p_{23}(2)=\sum_{k=0}^{+\infty}p_{2k}p_{k3}$$

$$=p_{22}p_{23}+p_{23}p_{33}=2pq=2\times0.03\times0.97=0.0582$$

平稳随机过程

一、重要知识点

二、主要内容

三、典型例题

一. 重要知识点

1. （宽）平稳过程的判定
2. 各态历经性的判定
3. 相关函数性质的运用

二、主要内容

1. 严平稳过程及其数字特征
2. 宽平稳随机过程
3. 各态历经性
4. 相关函数的性质

严平稳过程

- **定义**：$\{X(t), t \in T\}$是一随机过程，对任意的$n(n=1,2,\ldots), t_1, t_2, \ldots t_n \in T$和任意实数$h$，当$t_1+h, t_2+h, \ldots, t_n+h \in T$ 时，$\big(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)\big)$和$\big(X(t_1+h), X(t_2+h), \ldots, X(t_n+h)\big)$具有相同的分布函数，即$\boldsymbol{F(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1+h, t_2+h, \ldots, t_n+h)}$，则称随机过程具有平稳性，称此过程为严平稳随机过程，简称严平稳过程
- **特点**：过程的统计特性不随时间的推移而变化

严平稳过程的数字特征

设严平稳过程$\{X(t), t \in T\}$是二阶矩过程，则

- 均值函数

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = E[X(0)] \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\mu_X}\text{（常数）}$$

- 自相关函数

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E[X(0)X(t_2 - t_1)]$$
$$= R_X(0, t_2 - t_1) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{R_X(t_2 - t_1)}$$

- 协方差函数

$$C_X(\tau) = R_X(\tau) - \mu_X^2$$

- 方差函数

$$D_X(t) = C_X(0) = R_X(0) - \mu_X^2$$

宽平稳过程

- 宽平稳过程：给定二阶矩过程$\{X(t), t \in T\}$，如果对任意的$t, t+\tau \in T$,

$$E[X(t)] = \mu_X \text{（常数）}$$

$$E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau)$$

则称$\{X(t), t \in T\}$为宽平稳过程

- 严平稳过程 + 二阶矩存在 ⇒ 宽平稳过程；反之不成立
- 平稳相关：$X(t)$和$Y(t)$, $t \in T$ 是两个平稳过程，如果它们的互相关函数也只是时间差的函数，记为$R_{XY}(\tau) = R_{XY}(t, t+\tau) = E[X(t)Y(t+\tau)]$，称$X(t)$和$Y(t)$是平稳相关的，或称这两个过程联合（宽）平稳的

时间均值与时间相关函数

- 随机过程$X(t)$的**时间均值**

$$\langle X(t)\rangle = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\mathrm{T}}^{T} X(t)dt$$

- 随机过程$X(t)$的**时间相关函数**：

$$\langle X(t)X(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\mathrm{T}}^{T} X(t)X(t+\tau)dt$$

各态历经性

❑**定义**：设$X(t)$是一平稳过程

1. 如果$\langle X(t)\rangle = E[X(t)] = \mu_X$以概率1成立，则称过程$X(t)$的**均值**具有**各态历经性**
2. 如果对任意实数τ，$\langle X(t)X(t+\tau)\rangle = E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau)$
   以概率1成立，则称过程$X(t)$的**自相关函数**具有**各态历经性**
   特别当$\tau = 0$时，称均方值具有各态历经性
3. 如果$X(t)$的均值和自相关函数都具有各态历经性，则称$X(t)$是**各态历经过程**

均值各态历经定理

- **定理一**（均值各态历经定理）平稳过程$X(t)$的均值具有各态历经性的**充要条件**是：

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)(R_X(\tau)-\mu_X^2)d\tau=0$$

- 推论：在 $\lim\limits_{\tau\to+\infty}R_X(\tau)$ 存在条件下
  - 若 $\boldsymbol{\lim\limits_{\tau\to+\infty}R_X(\tau)=\mu_X^2}$，则定理一条件成立，即均值具有各态历经性
  - 若 $\lim\limits_{\tau\to+\infty}R_X(\tau)\neq\mu_X^2$，则定理一条件不成立，即均值不具有各态历经性

自相关函数各态历经定理

❑定理二.（自相关函数各态历经定理）平稳过程$X(t)$的自相关函数$R_X(\tau)$具有各态历经性的**充要条件**是：

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau_1}{2T}\right)\left(B_X(\tau_1)\ -R_X^2(\tau)\right)d\tau=0$$

其中$B_X(\tau_1)=\mathrm{E}[X(t)X(t+\tau)X(t+\tau_1)(t+\tau+\tau_1)]$

各态历经性定理

只考虑定义在$0 \le t < +\infty$上的平稳过程，各态历经性定理表述为

❑**定理三：** $P\{\langle X(t)\rangle = \mu_X\} = 1 \Leftrightarrow$

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{\tau}{T}\right)\left(R_X(\tau)-\mu_X^2\right)d\tau = 0$$

❑**定理四：** $P\{\langle X(t)X(t+\tau)\rangle = R_X(\tau)\} = 1 \Leftrightarrow$

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{\tau_1}{T}\right)\left(B_X(\tau_1)-R_X^2(\tau)\right)d\tau_1 = 0$$

其中$B_X(\tau_1) = \mathrm{E}[X(t)X(t+\tau)X(t+\tau_1)(t+\tau+\tau_1)]$

各态历经性定理

- 各态历经性定理保证：一个平稳过程 $X(t)$ ，若$0 \le t < +\infty$，只要它满足定理三和定理四中的条件，便可以从**一次试验**所得的**样本函数$x(t)$**来确定出该过程的均值和自相关函数，即
  - $\mu_X = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$
  - $R_X(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$

相关函数的性质

设$X(t)$和$Y(t)$是平稳相关过程，$R_X(t)$、$R_Y(t)$和$R_{XY}(t)$分别是它们的自相关函数和互相关函数，具有如下性质

性质一： $R_X(0) = E[X^2(t)] = \Psi_X^2 \geq 0$

性质二： $R_X(-\tau) = R_X(\tau)$，即$R_X(\tau)$是偶函数；$R_{XY}(-\tau) = R_{YX}(\tau)$，即互相关函数既不是奇函数，也不是偶函数

性质三： $|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$，$|C_X(\tau)| \leq C_X(0) = \sigma_X^2$

此不等式表明自相关(自协方差)函数在$\tau = 0$处取得最大值

类似地，$|R_{XY}(\tau)|^2 \leq R_X(0)R_Y(0)$，$|C_{XY}(\tau)|^2 \leq C_X(0)C_Y(0)$

相关函数的性质

- **性质四**：$R_X(\tau)$是非负定的，即对任意数组 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$和任意$n$个不全为零的实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$，都有：

$$\sum_{i,j=1}^{n} R_X(t_i - t_j) a_i a_j \geq 0$$

- 自相关函数的非负定性是平稳过程最本质的特性，
- 任一连续函数，只要具有非负定性，那么该函数必是某平稳过程的自相关函数。

相关函数的性质

- **周期为T_0的平稳过程**：满足条件$P\{X(t+T_0)=X(t)\}=1$平稳过程$X(t)$。
- **性质五**：$X(t)$是周期为T_0的平稳过程的充分必要条件是：其自相关函数是周期为T_0的函数。即

$$P\{X(t+T_0)=X(t)\}=1$$
$$\Leftrightarrow R_X(\tau+T_0)=R_X(\tau)$$

- 在实际中，各种具有零均值的非周期性噪声和干扰一般当$|\tau|$值适当增大时，$X(t+\tau)$ 和$X(t)$呈现独立或不相关，即 $\lim_{\tau\to\infty} R_X(\tau)=\lim_{\tau\to\infty} C_X(\tau)=0$

三、典型例题

例1. 设$X(t)$是平稳过程，$R_X(\tau)$ 是其自相关函数，a是常数，试问随机过程：

$Y(t)=X(t+a)-X(t)$是不是平稳过程？为什么？

解：因为$X(t)$是平稳过程，设$X(t)$ 的均值为μ_X(常数)，自相关函数为$R_X(\tau)$，则

$E[Y(t)]=E[X(t+a)-X(t)]=E[X(t+a)]-E[X(t)]=\mu_X-\mu_X=0.$

$R_Y(t+\tau)=E[Y(t)Y(t+\tau)]$

$=E\{[X(t+a)-X(t)][X(t+\tau+a)-X(t+\tau)]\}$

$=E[X(t+a)X(t+\tau+a)]-E[X(t+a)X(t+\tau)]$

$-E[X(t)X(t+\tau+a)]+E[X(t)X(t+\tau)]$

$=2R_X(\tau)-R_X(\tau-a)-R_X(\tau+a)$

$Y(t)$的均值为常数，又因为a是常数，自相关函数$R_Y(t,t+\tau)$仅与时间差τ有关，故$Y(t)$是平稳过程。

例2. 设平稳过程$X(t)$的自相关函数为$R_X(\tau)$，试证明：

$$\boldsymbol{P\{|X(t+\tau)-X(t)| \geq a\} \leq 2\,[R_X(0)-R_X(\tau)]/a^2, a\ >0.}$$

证明： 因为$X(t)$是平稳过程，故有均值函数$E[X(t)] = \mu_X$(常数)，自相关函数$E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau)$，

记$Y(t) = X(t+\tau) - X(t)$

$E[Y(t)] = E[X(t+\tau) - X(t)] = E[X(t+\tau)] - E[X(t)] = \mu_X - \mu_X = 0.$

$D[Y(t)] = E[Y(t)^2] = E\{[X(t+\tau) - X(t)]^2\}$
$= E[X(t+\tau)^2] - 2E[X(t)X(t+\tau)] + E[X(t)^2]$
$= 2[R_X(0) - R_X(\tau)]$

对$Y(t) = X(t+\tau) - X(t)$应用切比雪夫不等式

有$P\{|X(t+\tau) - X(t)| \geq a\} \leq 2\,[R_X(0) - R_X(\tau)]/a^2, a\ > 0.$