复习课（第1-5章）

第1章：随机事件与概率

第2章：随机变量及其分布

第3章：多维随机变量及其分布

第4章：随机变量的数字特征

第5章：大数定律及中心极限定理

第一章 随机事件与概率

- 重要知识点
  - 事件的关系和运算
  - 条件概率、事件的独立性
  - 乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式
  - Bernoulli概型、n重Bernoulli试验

☛ 条件概率、乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式

（1）条件概率的定义、计算公式

✓ **公式法：** $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，$(P(A)>0)$

✓ **缩小样本空间法：——适用于古典概型**

设事件A所含样本点数为n_A，事件AB所含样本点数为n_{AB}，
则$P(B|A)=\dfrac{n_{AB}}{n_A}$

（2）乘法公式

✓ $P(AB)=P(A)P(B|A)$, $\qquad (P(A)>0)$

✓ $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$,

$$(P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0)$$

（3）全概率公式

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)\ =\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P\left(A\middle|B_i\right)$$

（已知原因，求结果）

（4）Bayes（逆概）公式

$$P(B_k|A)=\frac{P(AB_k)}{P(A)}=\frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)},\quad i=1,2,\cdots,n$$

（已知结果，求原因）

☛ 随机事件独立性概念，利用事件独立性进行概率计算

（1） 两事件独立的定义

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

（2）两事件独立性的性质

① 事件A与B相互独立的充分必要条件为

$$P(B|A)=P(B),(P(A)>0)\ ,$$

② 若随机事件 A 与 B 相互独立，则

$\bar{A}$ 与 B、A 与 $\bar{B}$、$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$也相互独立.

③ 必然事件S与任意随机事件A相互独立；不可能事件$\varnothing$与任意随机事件A相互独立.

注意1：两事件相互独立与互不相容的区别

- ✓ “A与B互不相容”，指两事件不能同时发生，即 $P(AB)=0$。
- ✓ “A与B相互独立”，指A是否发生不影响B发生的概率，即

$P(AB)=P(A)P(B)$ 或 $P(B|A)=P(B) \quad (P(A)>0)$

注意2：设事件 A 与 B 满足$P(A)P(B)\neq 0$

则互不相容与相互独立不能同时成立。

即 若事件 A 与 B 相互独立，则 $AB\neq\varnothing$；

若 $AB=\varnothing$，则事件 A 与 B 不相互独立。

(3) 三个事件的独立性

设A、B、C是三个随机事件，如果

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(BC)=P(B)P(C) \\ P(AC)=P(A)P(C) \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

则称A、B、C是相互独立的随机事件.

注意3 在三个事件独立性的定义中，四个等式是缺一不可的．即前三个等式的成立不能推出第四等式的成立；反之，最后一个等式的成立也推不出前三个等式的成立．

注意4 三个事件相互独立的性质

若A，B，C是相互独立的三个事件，则

A与$B\cup C$，　A与BC，　A与$B-C$，　A与$\overline{B\cup C}$，

A与$\overline{BC}$，　$A,\bar{B},\bar{C}$，　$A,B,\bar{C}$，　$\bar{A},\bar{B},\bar{C},\cdots$相互独立

（4）n个事件的相互独立性

设 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 为n个随机事件，如果下列等式成立

$$
\begin{cases}
P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j) \qquad (1\le i<j\le n) \\
P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k) \qquad (1\le i<j<k\le n) \\
\cdots\cdots \\
P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_m})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_m})(1\le i_1<\cdots<i_m\le n) \\
\cdots\cdots \\
P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)
\end{cases}
$$

则称$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 这n个随机事件相互独立

☛ **Bernoulli概型及n重Bernoulli试验，计算与之相关事件的概率**

(1)若随机试验 E 只有两个结果，称为Bernoulli试验.

一般地，我们将这两个结果记作A与$\bar{A}$，分别称为“成功”与“失败”.

(2)若独立重复地进行n次Bernoulli试验，这里“重复”是指每次试验中事件 A 发生的概率（即每次试验中“成功”的概率）不变，“独立”是指各次试验的结果相互独立，则称该试验为 n 重Bernoulli 试验.

(3)n重Bernoulli试验中恰好成功k次的概率

设在一次Bernoulli 试验中，$P(A)=p$，$P(\bar{A})=1-p=q$

现考虑事件$B_{n,k}=\{n\text{重}Bernoulli\text{试验中事件}A\text{恰好发生}k\text{次}\}$

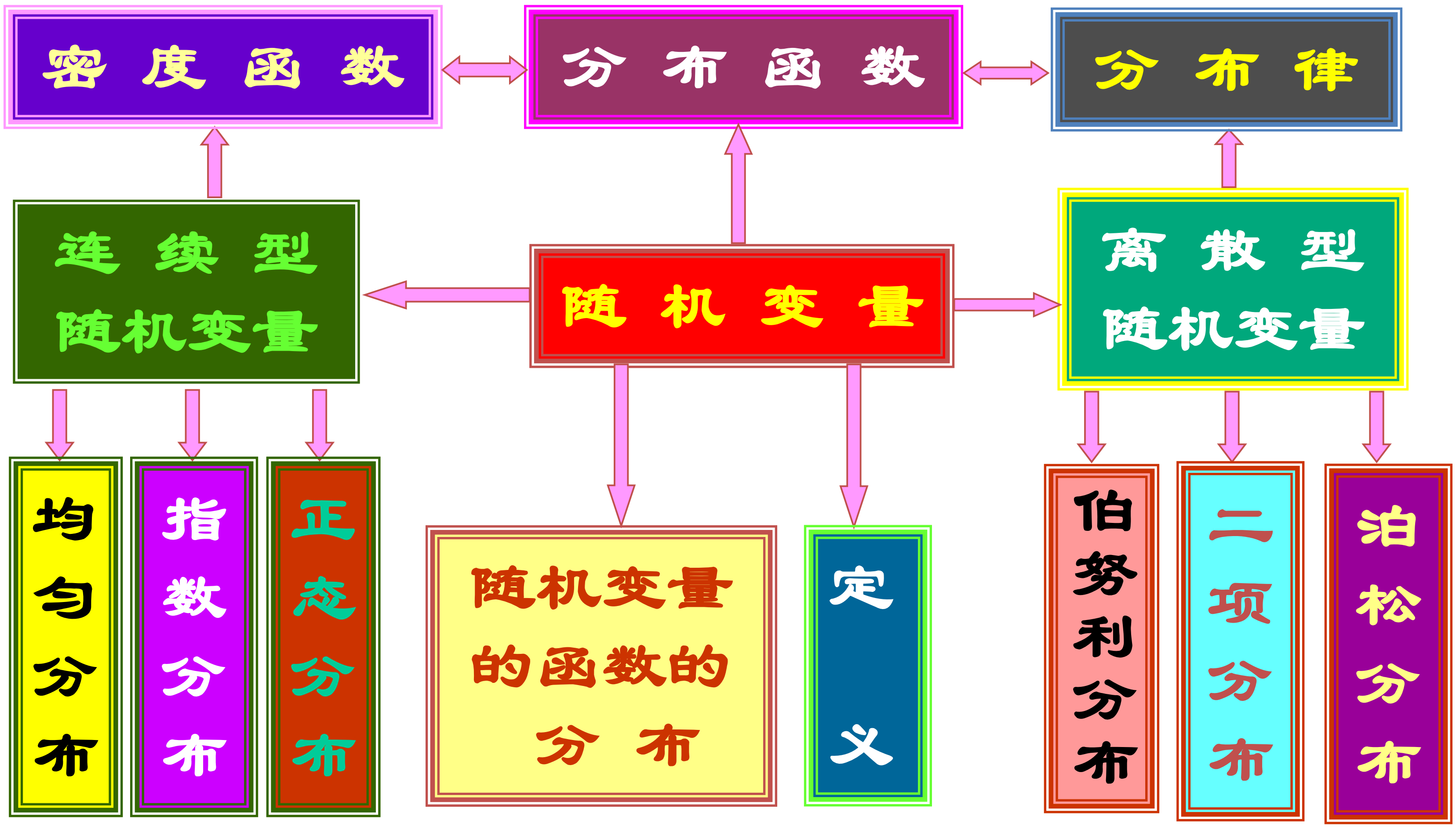
的概率 $P\left(B_{n,k}\right)=P_n(k)$ **：**

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (\ k=0,\ \ 1,\ \ 2,\ \ \cdots,\ \ n\ )$$

第二章 随机变量及其分布

- 重要知识点
  - 分布函数的定义及性质
  - 离散型随机变量及其分布率
    - 两点分布、二项分布、泊松分布、几何分布、超几何分布
    - 泊松定理
  - 连续型随机变量的密度函数vs.分布函数
    - 概率密度与分布函数之间关系及其运算
    - 常见的连续型随机变量分布：均匀分布、指数分布、正态分布
  - 随机变量的函数及其分布

第二章　　习题课


密 度 函 数
分 布 函 数
分 布 律
连 续 型 随机变量
随 机 变 量
离 散 型 随机变量
均匀分布
指数分布
正态分布
随机变量的函数的分 布
定 义
伯努利分布
二项分布
泊松分布

常用的离散型随机变量

(1) Bernoulli分布

如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=0\}=1-p=q,\quad P\{X=1\}=p$$

或 $\boldsymbol{P\{X=k\}=p^k q^{1-k}\quad (k=0,1)}$

X	**0**	**1**
P	**1-*p***	***p***

则称随机变量 X 服从参数为 p 的 Bernoulli分布。

记作 $X \sim B(1,\ p)$ (**其中** $\boldsymbol{0 \le p \le 1}$ **为参数**)

Bernoulli分布也称作 0-1 分布。

Bernoulli分布的概率背景：

进行一次Bernoulli试验，设

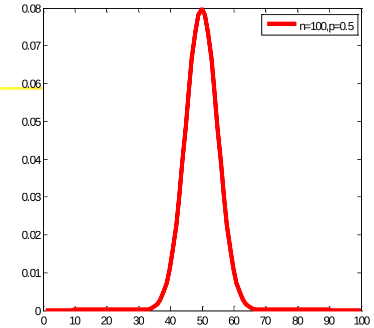
$$P(A)=p,\qquad P(\overline{A})=1-p=q$$

令X：在这次Bernoulli试验中事件A发生的次数

或者说令

$$X=\begin{cases}1 & \text{若事件}A\text{发生}\\ 0 & \text{若事件}A\text{不发生}\end{cases}$$

则 $X\sim B(1,p).$



2）二项分布

定义： 如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\quad ,(k=0,1,\cdots,n)$$

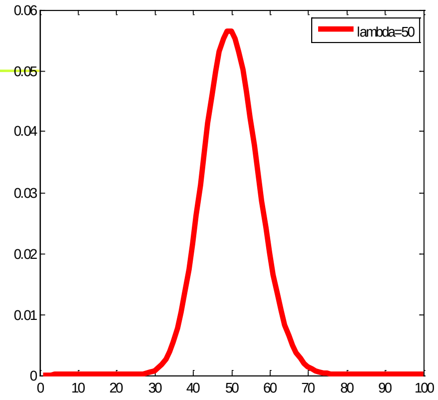
则称随机变量X服从参数为(n,p)的二项分布，

记作$X\sim B(n,p)$.(其中n为自然数， $0\le p\le 1$ 为参数)

说　明：

① 显然， 当 $n=1$ 时$X\sim B(1,p)$。此时，X服从Bernoulli分布，即Bernoulli分布是二项分布的一个特例。

② 二项分布的概率背景：进行 n 重Bernoulli试验， 设在每次试验中$P(A)=p$,$P(\bar{A})=1-p=q$. 令X为在这Bernoulli试验中事件 A 发生的次数。则$X\sim B(n,p)$.



3）Poisson 分布

定义：如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\quad (k=0,1,2,\cdots)$$，其中$\lambda>0$为常数

则称随机变量 X 服从参数为 λ 的Poisson 分布。记为$X\sim P(\lambda)$.

Poisson分布的应用

- ✓ Poisson分布是概率论中重要的分布之一；
- ✓ 自然界及工程技术中的许多随机指标都服从Poisson分布；
- ✓ 它多是出现在当 X 表示在一定的时间或空间内出现的事件个数这种场合。

◆ Poisson定理

设随机变量$X_n(n=1,2,\ldots)$服从二项分布，其分布律为

$$P\{X_n=k\}=C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}\ (k=0,1,\cdots n)$$

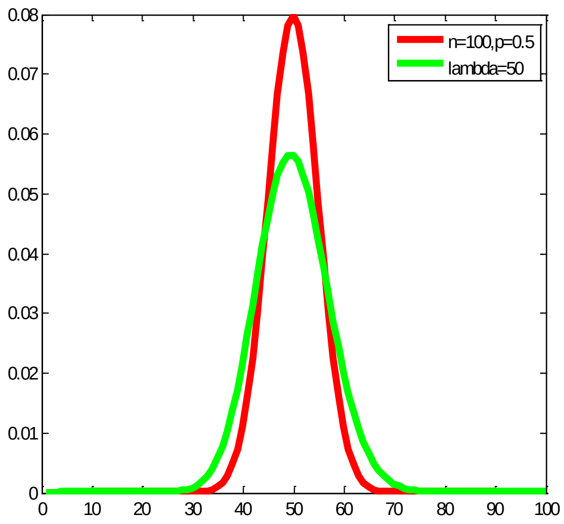
$$\lim_{n\to\infty} np_n=\lambda>0$$

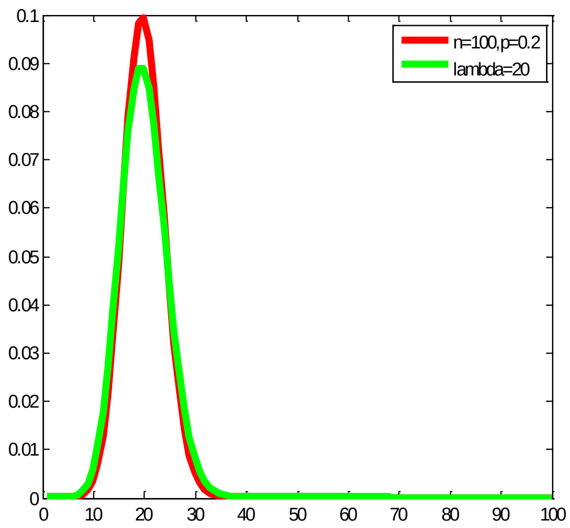
则 $$\lim_{n\to\infty} P\{X_n=k\}=\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

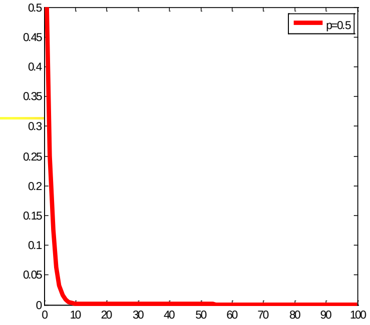
◆ Poisson定理

Poisson定理的应用

随机变量$X \sim B(n,p)$，则当n比较大，p比较小时，令$\lambda = np$，则有$P\{X=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$







4）几何分布

定义：若随机变量 X 的分布律为$P\{X=k\}=q^{k-1}p$

（其中 $k=1,2,\cdots,p\geq 0$，$q\geq 0$，$p+q=1$）

则称随机变量 X 服从参数为 p 的几何分布。

概率背景：在Bernoulli试$P(A)=p$，　$P(\bar{A})=q=1-p$
试验进行到 A 首次出现为止，令X为所需试验次数，则 X 服从参数为 p 的几何分布。

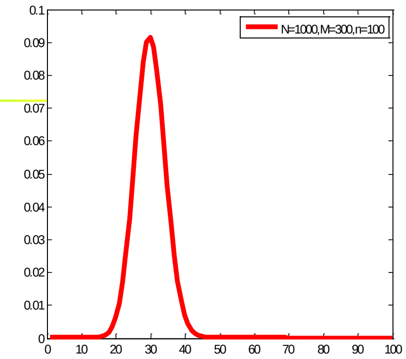
5）超几何分布

定义：如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \quad (k=0,1,\min(M,n))$$

其中N,M,n均为自然数．则称随机变量 X 服从参数为 (N, M, n) 的超几何分布。

概率背景：一批产品有 N 件，其中有 M 件次品，其余 N-M 件为正品。现从中取出 n 件。 令X为取出 n 件产品中的次品数。则 X 服从参数为 (N, M, n) 的超几何分布。



5）超几何分布

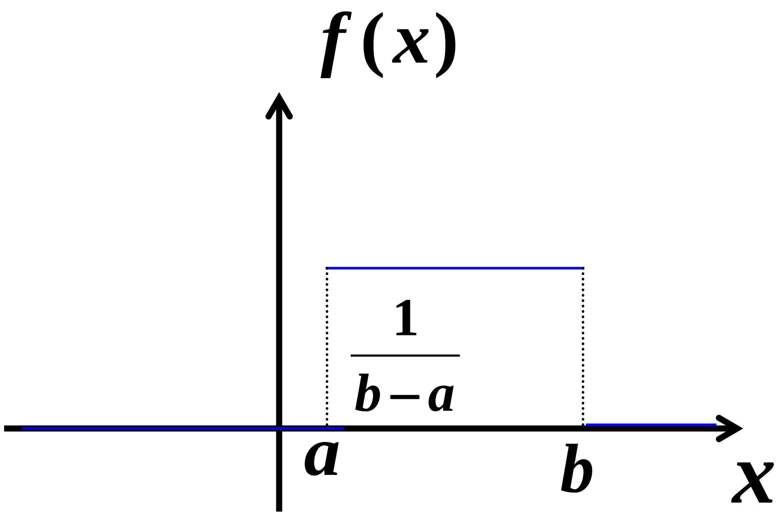
- 这个分布在涉及抽样的问题中常用，特别当 N 不大时。
- 因为通常在抽样时，多是 “无放回的”，这就与同时抽出的效果一样。
- 如果是“有放回的抽”，结果是二项分布。
- 若 n/N 很小，则放回与不放回差别不大。由此可见，在这种情况下超几何分布与二项分布很接近。
- 确切地说，若 X 服从超几何分布，则当 n 固定，M/N 固定，N→无穷大时，X 近似地服从二项分布。

☛ 常用的连续型随机变量

1）均匀分布

若随机变量X的密度函数为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

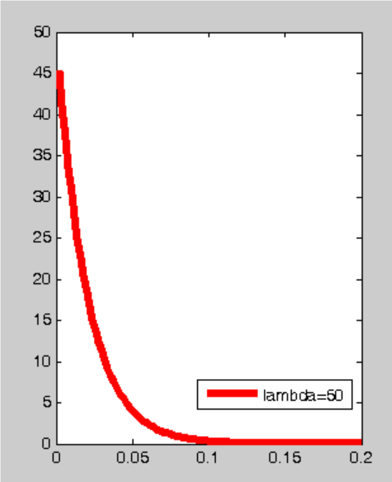
则称随机变量 X 服从区间$[a, b]$上的均匀分布。记作 $X \sim U[a, b]$。



2）指数分布

如果随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$



其中$\lambda>0$为常数，则称随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布。记作$X\sim E(\lambda)$。

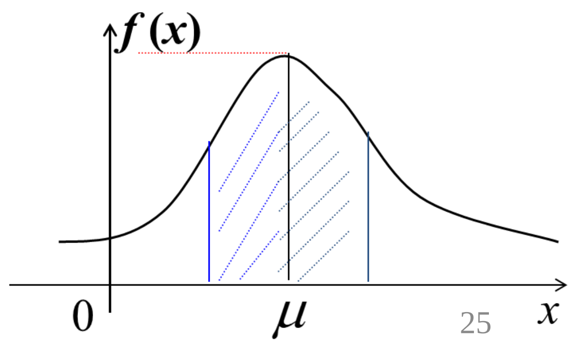
3）正态分布

如果连续型随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

(其中 $-\infty<\mu<+\infty$，$\sigma>0$ 为参数)，

则称随机变量 X 服从参数为 $(\mu,\ \sigma^2)$ 的正态分布．记作 $X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$



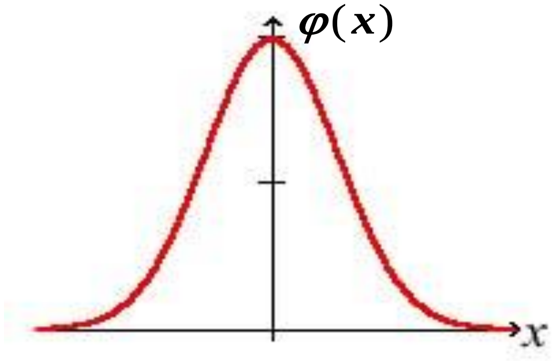
标准正态分布

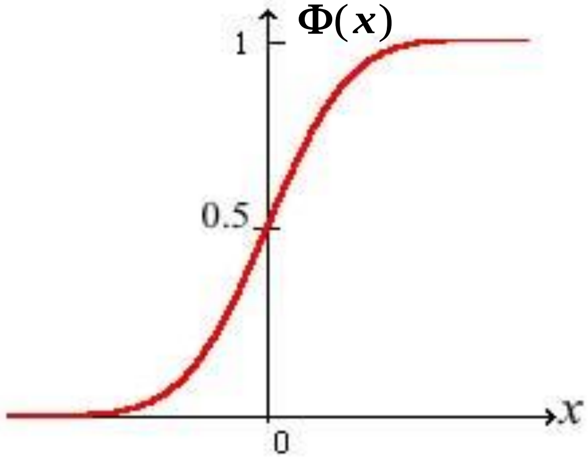
$\mu=0,\sigma=1$的正态分布称为标准正态分布.

其密度函数和分布函数常用$\varphi(x)$和$\Phi(x)$表示:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<\infty$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$





3 σ准则

由标准正态分布的查表计算可以求得，

当$X \sim N(0,1)$时，

$$P(|X| \leq 1) = 2\Phi(1) - 1 = 0.6826$$

$$P(|X| \leq 2) = 2\Phi(2) - 1 = 0.9544$$

$$P(|X| \leq 3) = 2\Phi(3) - 1 = 0.9974$$

这说明，X的取值几乎全部集中在$[-3,3]$区间内，超出这个范围的可能性仅占不到0.3%.

☛ 随机变量的函数的分布

(1)离散型随机变量的函数的分布

如果 X 是离散型随机变量,其函数 $Y=g(X)$ 也是离散型随机变量.若 X 的分布律为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

则 $Y=g(X)$的分布律为

$Y=g(X)$	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$	$g(x_k)$	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

☛ 随机变量的函数的分布

(2)连续型随机变量的函数的分布

如果 X 是连续型随机变量, 其函数 $Y=g(X)$也是连续型随机变量

则计算 Y 的概率密度通常是根据 X 的密度函数 $f_X(x)$ 求出 Y 的分布函数，再对 $F_Y(y)$ 求导得到 Y 的密度函数.

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}$$

$$=\int_{g(x)\le y} f_X(x)\,\mathrm{d}x \quad (-\infty<x<+\infty),$$

☛ 随机变量的函数的分布

(2)连续型随机变量的函数的分布

- 若$g(X)$是严格单调减函数，即$g'(X) < 0$，有

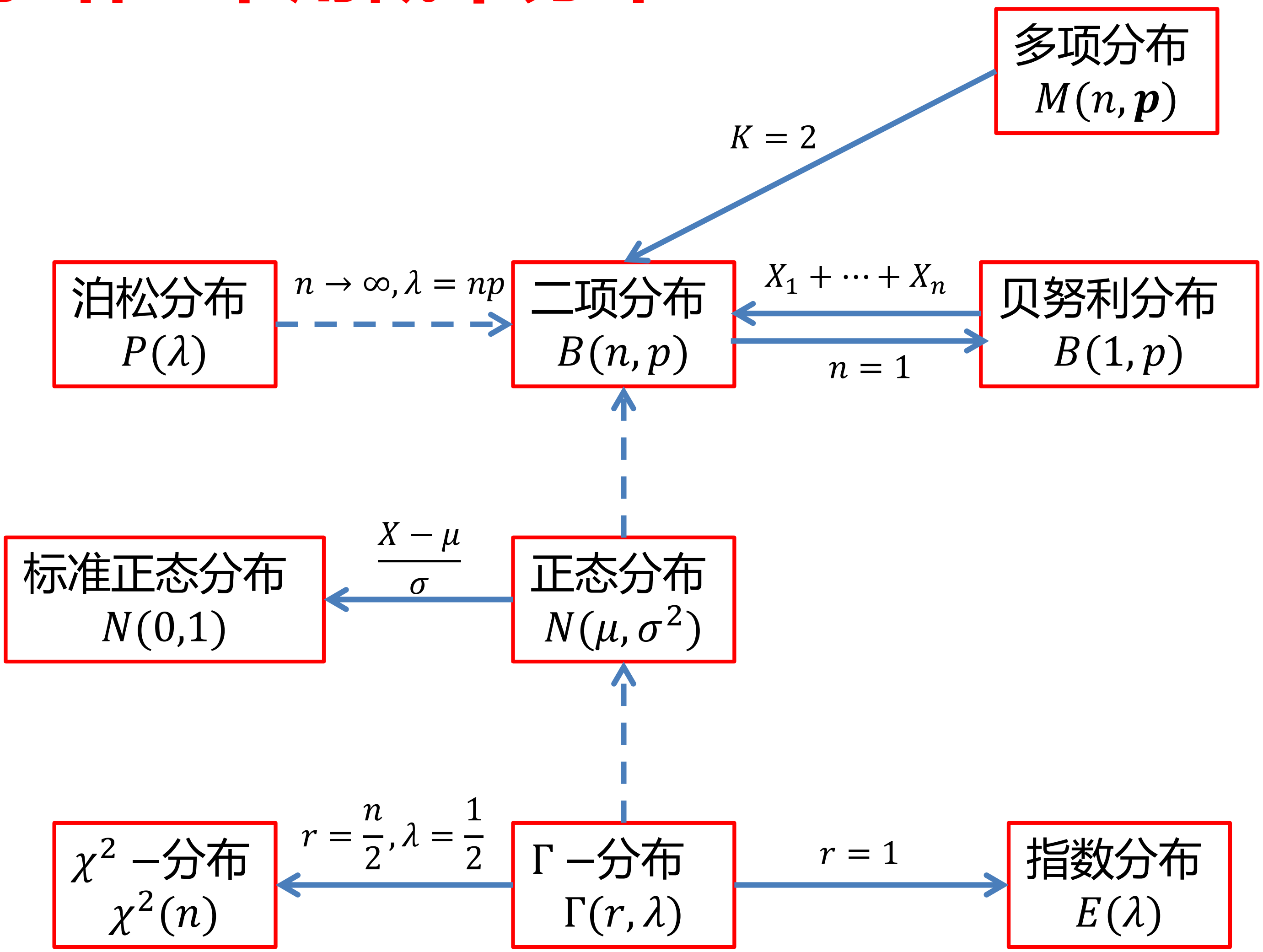
$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

- 若$g(x)$在不相叠的区间$I_1, I_2, \ldots$上逐段严格单调，其反函数分别为$h_1(x), h_2(x), \ldots$均为连续函数，那么$Y = g(x)$是连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y) = f_X[h_1(y)]|h_1'(y)| + f_X[h_2(y)]|h_2'(y)| + \cdots, y \in (\alpha, \beta)$$

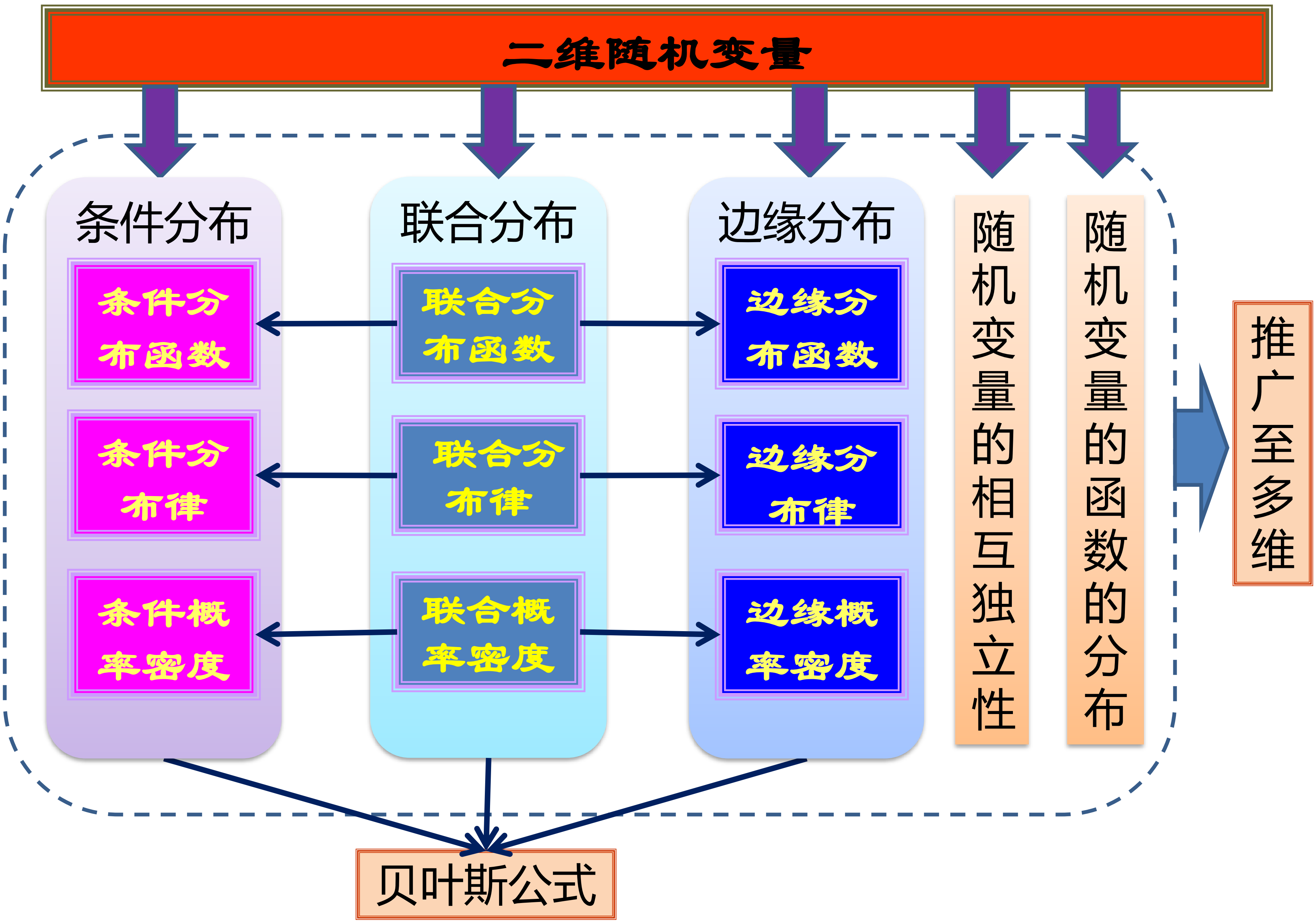
直观理解：$\boldsymbol{f_Y(y)\Delta y = f_X[h(y)]\,\Delta x}$

小结：常用概率分布


多项分布
$M(n,\boldsymbol{p})$
$K=2$
泊松分布
$P(\lambda)$
$n\to\infty,\lambda=np$
二项分布
$B(n,p)$
$X_1+\cdots+X_n$
$n=1$
贝努利分布
$B(1,p)$
标准正态分布
$N(0,1)$
$\frac{X-\mu}{\sigma}$
正态分布
$N(\mu,\sigma^2)$
χ^2 −分布
$\chi^2(n)$
$r=\frac{n}{2},\lambda=\frac{1}{2}$
Γ −分布
$\Gamma(r,\lambda)$
$r=1$
指数分布
$E(\lambda)$

第三章 多维随机变量及其分布

- 重要知识点
  - 二维随机变量的分布
  - 有关概率的计算和随机变量的独立性
  - 条件概率分布
  - 随机变量函数的分布


二维随机变量
条件分布
条件分布函数
条件分布律
条件概率密度
联合分布
联合分布函数
联合分布律
联合概率密度
边缘分布
边缘分布函数
边缘分布律
边缘概率密度
随机变量的相互独立性
随机变量的函数的分布
推广至多维
贝叶斯公式

☛ 二维离散型随机变量的分布律

若二维随机变量(X, Y)的取值是有限个或可列无穷个，则称(X, Y)为二维离散型随机变量.

设(X, Y)二维离散型随机变量

X的取值为 $x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_i, \quad \ldots$

Y的取值为 $y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_j, \quad \ldots$

则称 $p_{ij} = P\left\{ X = x_i, \quad Y = y_j \right\} \quad (i, \ j = 1, \quad 2, \quad \ldots)$

为二维离散型随机变量(X, Y)的（联合）分布律

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

离散型随机变量(X,Y)的分布函数为

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij},$$

其中和式是对一切满足$x_i \le x, y_j \le y$的i,j求和.

☛ 二维连续型随机变量的概率密度

(1) 定义:

对于二维随机变量（X,Y）的分布函数 $F(x,y)$，如果存在非负实函数 $f(x,y)$， 使得对于任意的实数 x,y 有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv,$$

则称（X,Y）是连续型的二维随机变量，函数 $f(x,y)$，称为二维随机变量（X,Y)的概率密度，或称为 X 和 Y 的联合概率密度。

(2) 性质:

1^0　$f(x,y)\geq 0$;

2^0　$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = F(\infty,\infty) = 1$;

3^0　若$f(x,y)$在点(x,y)连续，则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$

4^0　设 G 是平面上的一个区域，点 (X,Y)落在 G 内 的概率为:　$P\{(X,Y)\in G\} = \iint_G f(x,y)dxdy.$

(3) 几何意义:

几何上, $z = f(x, y)$ 表示空间的一个曲面.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$$

表示介于 $f(x, y)$和 xoy 平面之间的空间区域的全部体积等于1.

$$P\{(X, Y) \in G\} = \iint_G f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

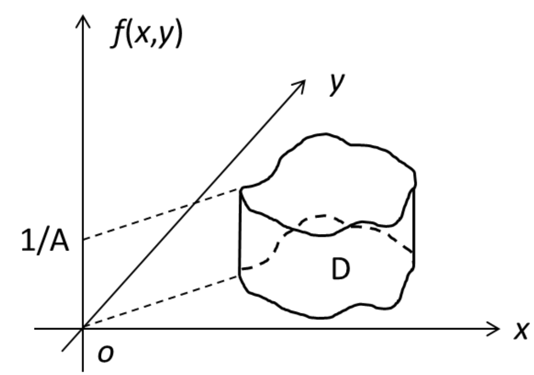
$P\{(X, Y) \in G\}$的值等于以G为底,以曲面$z = f(x, y)$为顶面的柱体体积.

(4) 两个常用的分布: 二维均匀分布

设D是平面上的有界区域,其面积为A

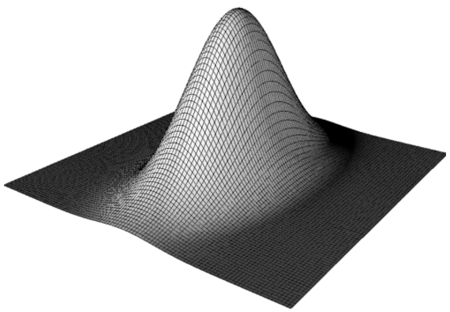
如果二维随机变量(X, Y)的密度函数为

$$f(x, y)=\begin{cases} \dfrac{1}{A} & (x, y)\in D \\ 0 & (x, y)\notin D \end{cases}$$



则称二维随机变量(X, Y)服从区域D上的均匀分布.

(4) 两个常用的分布：二维正态分布



设二维随机变量(X, Y)的密度函数为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

则称随机变量(X, Y)服从参数为$(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$的正态分布，记作

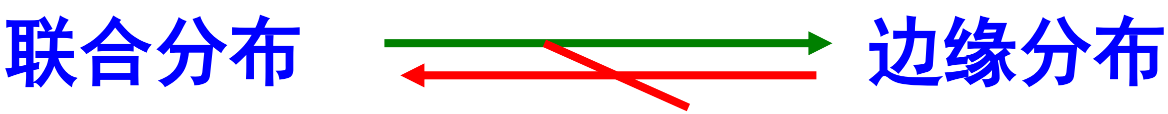
$$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2 \ \rho)$$

$$-\infty < \mu_i < +\infty \ (i=1, 2), \ \sigma_i > 0 \ (i=1, 2), -1 < \rho < 1.$$

☛ 边缘分布函数

如果(X, Y)是一个二维随机变量,则它的分量$X$$($或者$Y)$是一维随机变量，因此，分量$X$$($或者$Y)$也有分布．我们称$X$$($或者$Y)$的分布为二维随机变量$(X, Y)$关于$X$$($或者$Y)$的边缘分布．

边缘分布也称为边沿分布或边际分布.



边缘分布函数

(1)已知联合分布函数求边缘分布函数

设二维随机变量(X, Y)的分布函数为$F(x, y)$，则分量X的分布函数为

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < +\infty\}$$
$$= \lim_{y \to +\infty} F(x, y) = F(x, +\infty)$$

(2)已知联合分布律求边缘分布律

Y \ X	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_i	$\sum p_{i1}$	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots =$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$= p_{\cdot j}$	$\cdots$	1

☛ 边缘分布函数

(3)已知联合密度函数求边缘密度函数

若(X, Y)的联合密度函数为 $f(x,y)$，

则随机变量X的边缘密度函数为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy$$

随机变量Y的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx$$

☛ 离散型随机变量的条件分布

设(X,Y)是二维离散型随机变量，对于固定的j，若$P\{Y=y_j\}>0$，则称

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},i=1,2,\cdots$$

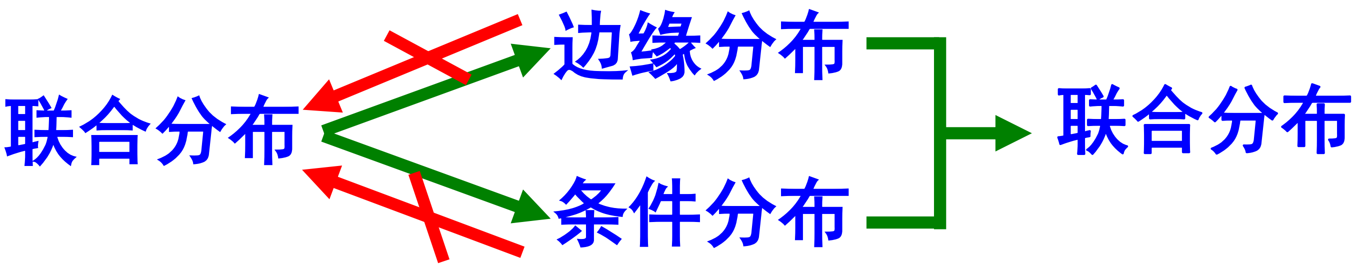
为在$Y=y_j$条件下随机变量X的条件分布律。

☛ 连续型随机变量的条件分布和密度

则当$f_Y(y)>0$时，可得随机变量X在$Y=y$的条件下的条件密度函数为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,\ y)}{f_Y(y)}$$

联合分布、边缘分布、条件分布的关系



☛ 连续型随机变量函数的分布

（1）连续型随机变量和的分布

设二维连续型随机变量$(X,\ Y)$的联合密度函数为$f(x,\ y)$，则$Z=X+Y$的密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ z-x)dx$$

或

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,\ y)dy$$

特别地，如果随机变量 X 与 Y 相互独立，则有

$$f(x,\ y)=f_X(x)f_Y(y)$$

此时，我们有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

$$f_X(x) * f_Y(y)$$ **卷积公式！**

一般地，我们有如下结论：

如果随机变量 X 与 Y 相互独立，且

$$X \sim N(\mu_1, \ \sigma_1^2), \qquad \boldsymbol{Y \sim N(\mu_2, \ \sigma_2^2)}$$

$$\boldsymbol{Z = X + Y,}$$

则　$Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \ \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$

更一般地，我们有如下结论：

如果随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立，

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

又$a_1, a_2, \cdots, a_n$为n个实常数，

令 $Z = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$,

则 $Z \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$.

第四章 随机变量的数字特征

- 重要知识点
  - 数学期望、方差、相关系数的性质和计算
  - 随机变量函数的数字特征

离散型随机变量的数学期望

设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1,2,\cdots.$$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛,

则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 为随机变量 X 的**数学期望**,

记为 $E(X)$, 即 $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$.

☛ 连续型随机变量的数学期望

X 是连续型随机变量, 它的概率密度为 $f(x)$,

若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛,

则称此积分值为连续型随机变量 X 的数学期望,

记为 $E(X)$,

即 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x.$

☛ 随机变量函数的数学期望

- 离散型随机变量函数的数学期望为

若 $Y = g(X)$, 且 $P\{X = x_k\} = p_k$, $(k = 1, 2, \cdots)$

则有 $$E(g(X)) = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k.$$

- 若 X 是连续型的, 它的分布密度为 $f(x)$,

则有 $$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) \mathrm{d}x.$$

数学期望的性质

1. 设C是常数，则有$E(C)=C$.

2. 设X是一个随机变量，C是常数，则有

$$E(CX)=CE(X).$$

3. 设X, Y是两个随机变量，则有

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y).$$

4. 设X, Y是相互独立的随机变量，则有

$$E(XY)=E(X)E(Y).$$

☛ 二维随机变量的数学期望

设 (X,Y) 为二维随机变量, 若 $E(X), E(Y)$ 都存在, 则其期望值定义为

$$E(X)=\begin{cases}\sum_i\sum_j x_i p_{ij}, & (X,Y)\text{的概率分布为 } p_{ij};\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & (X,Y)\text{的密度为} f(x,y).\end{cases}$$

同理可得

$$E(Y)=\begin{cases}\sum_i\sum_j y_i p_{ij}, & (X,Y)\text{的概率分布为 } p_{ij};\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & (X,Y)\text{的密度为} f(x,y).\end{cases}$$

1. 若 X, Y 为离散型随机变量, $g(x, y)$ 是二元函数,

则 $$E[g(X,Y)] = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) p_{ij},$$

当 (X,Y) 的联合概率分布为 p_{ij}.

2. 若 X, Y 为连续型随机变量, $g(x, y)$ 是二元函数,

则 $$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y,$$

当 (X,Y) 的联合分布密度为 $f(x,y)$.

☛ 方差的定义

设 X 是一个随机变量,若 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 存在,则称 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 是 X 的方差,记作

$$D(X) \quad \text{或} \quad \mathrm{Var}(X),$$

即

$$D(X)=\mathrm{Var}(X)=E\{[X-E(X)]^2\},$$

称 $\sqrt{D(X)}$ 为标准差或均方差,记为 $\sigma(X)$.

☛ **方差的计算** $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2.$

- 离散型随机变量的方差

$$D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k,$$

其中 $P\{X=x_k\}=p_k,\ k=1,2,\cdots$ 是 X 的分布律.

- 连续型随机变量的方差

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $f(x)$ 为概率密度.

方差的性质

1. 设 C 是常数，则有 $D(C)=0.$

2. 设 X 是一个随机变量，C 是常数，则有

$$D(CX)=C^2D(X).$$

3. 设 X,Y 相互独立，$D(X)$，$D(Y)$ 存在，则

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y).$$

4. $D(X)=0$ 的充要条件是 X 以概率 1 取常数 C，即

$$P\{X=C\}=1.$$

协方差与相关系数的定义

- $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$ 称为随机变量X 与 Y 的协方差,

  记为 $\mathrm{Cov}(X,Y)$，即$\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$.

- 称 $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}$ 为随机变量 X 与 Y 的相关系数.

协方差的性质

1. $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X).$

2. $\mathrm{Cov}(aX,bY)=ab\mathrm{Cov}(X,Y)\quad(a,b\text{为常数})$

3. $\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y).$

☛ 相关系数定理

(1) $|\rho_{XY}| \leq 1.$

(2) $|\rho_{XY}| = 1$ 的充要条件是: 存在常数 a, b 使

$$P\{Y = a + bX\} = 1.$$

分　　布	参数	数学期望	方差
两点分布	$0 < p < 1$	p	$p(1-p)$
二项分布	$n \geq 1,$ $0 < p < 1$	np	$np(1-p)$
泊松分布	$\lambda > 0$	λ	λ
均匀分布	$a < b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
指数分布	$\theta > 0$	θ	θ^2
正态分布	$\mu, \sigma > 0$	μ	σ^2

第五章 大数定律及中心极限定理

- 重要知识点
  - 切比雪夫不等式及其应用
  - 几种典型的大数定律及其意义
  - 中心极限定理及其应用

☛ 切比雪夫(Chebyshev)不等式

设随机变量X的**期望和方差都存在**，设期望$E(X)=\mu$，方差$D(X)=\sigma^2$，则对于任意正数ϵ，有

$$P\{|X-\mu|\geq\epsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

$$\left(\text{等价地：}P\{|X-\mu|<\epsilon\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\epsilon^2}\right)$$

☛ （弱）大数定律的定义

设$\{X_n, n = 1, 2, \ldots\}$是一个随机变量序列，而且对每个n，$E(X_n)$存在，如果对于任意给定的$\epsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k)\right| < \epsilon\right\} = 1$$

即$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k)$，则称随机变量序列$\{X_n\}$服从（弱）大数定律.

☛ 常见的（弱）大数定律

如果随机变量序列$\{X_n\}$满足以下条件之一：

- *切比雪夫大数定律：* $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$**两两独立**，且 $E(X_i)$**存在**，$D(X_i)$**存在且有界**；
- *泊松大数定律：* $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$服从**0-1分布**，且**两两独立**；
- *伯努利大数定律：* $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$服从**0-1分布**，且**独立同分布**
- *辛钦大数定律：* $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$**独立同分布**，$E(X_i)$**存在**；
- *马尔科夫大数定律：* $E(X_i)$**存在**，$D(X_i)$满足 $\lim_{n\to\infty} D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = 0$；

那么，随机变量序列$\{X_n\}$服从大数定律。

大数定律的关系

大数定律的定义

对随机变量序列$\{X_n\}$ $(n=1,2,\dots)$，$E(X_n)$存在，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k \xrightarrow{P} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(X_k)$$

Markov大数定律

随机变量序列$\{X_n\}$，$E(X_n)$存在，且

$$\lim_{n\to\infty} D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=0\ (\text{Markov条件})$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k \xrightarrow{P} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(X_k)$$

不要求独立性，但对方差有约束

Chebyshev大数定律

$X_1,X_2,\dots,X_n,\dots$两两相互独立

$E(X_n)$、$D(X_k)$存在$(k=1,2,\dots)$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k \xrightarrow{P} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(X_k)$$

0-1分布

Poisson大数定律

n 次独立试验发生 f_A 次，第k次发生概率为p_k

$$\frac{n_A}{n} \xrightarrow{P} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_k$$

Bernoulli试验

Bernoulli大数定律

n次独立重复试验发生f_A次，p是每次试验中发生的概率

$$\frac{f_A}{n} \xrightarrow{P} p$$

独立同分布

独立同分布下的Chebyshev大数定律

$E(X_k)=\mu, D(X_k)$存在 $(k=1,2,\dots)$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k \xrightarrow{P} \mu$$

Bernoulli试验

不要求方差的存在性

Khinchin大数定律

$X_1,X_2,\dots,X_n,\dots$ 独立同分布，$E(X_k)=\mu$，$(k=1,2,\dots)$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k \xrightarrow{P} \mu$$

☛ 独立同分布的中心极限定理

设随机变量$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$独立同分布，且$E(X_k)=\mu$, $D(X_k)=\sigma^2>0$,（$k=1,2,\dots$），则随机变量之和$\sum_{k=1}^{n} X_k$的标准化变量

$$Y_n=\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}}=\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

的分布函数$F_n(x)$对于任意的x满足

$$F_n(x)=\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\le x\right\}$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dt=\Phi(x)$$

☛ 李雅普诺夫中心极限定理

设随机变量$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$**相互独立**，且$E(X_k)=\mu_k$，$D(X_k)=\sigma_k^2>0$，$(k=1,2,\dots)$，记$B_n^2=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2$，

若存在$\delta>0$，使得当$n\to\infty$时

$$\frac{1}{B_n^{2+\delta}}\sum_{k=1}^{n}E\{|X_k-\mu_k|^{2+\delta}\}\to 0$$

则随机变量之和$\sum_{k=1}^{n}X_k$的标准化变量

$$Z_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-E\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-\sum_{k=1}^{n}\mu_k}{B_n}$$

的分布函数$F_n(x)$对于任意的x满足

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-\sum_{k=1}^{n}\mu_k}{B_n}\le x\right\}$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dt=\Phi(x)$$

☛ 棣莫佛—拉普拉斯中心极限定理

设随机变量$\eta_n(n=1,2,\ldots)$服从参数为$n,p\ (0<p<1)$的**二项分布**，则对于任意x，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\eta_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le x\right\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x)$$

☛ 二项分布的逼近

对于一个参数为n，p的二项分布，当$n\to\infty$时：

（1）若$np=\lambda$，则该二项分布逼近参数为λ的泊松分布；**泊松定理**

（2）若$np\to\infty$，则该二项分布逼近正态分布。

棣莫佛—拉普拉斯定理

三个中心极限定理

Lyapunov定理

$\{X_n\}$独立，且$E(X_k)=\mu_k$, $D(X_k)=\sigma_k^2>0$,
$B_n^2=\sum_{k=1}^n \sigma_k^2$,
若存在$\delta>0$，使得当$n\to\infty$时

$$\frac{1}{B_n^{2+\delta}}\sum_{k=1}^{n} E\{|X_k-\mu_k|^{2+\delta}\}\to 0$$

$$\lim_{n\to\infty} Z_n=\frac{\sum_{k=1}^n X_k-\sum_{k=1}^n \mu_k}{B_n}\sim N(0,1)$$

不要求同分布，
但要求方差满
足收敛性

独立同分布的中心极限定理

$\{X_n\}$独立同分布，且$E(X_k)=\mu$, $D(X_k)=\sigma^2>0$, $(k=1,2,\ldots)$,

$$\lim_{n\to\infty} Y_n=\frac{\sum_{k=1}^n X_k-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\sim N(0,1)$$

二项分布逼近

De Moivre – Laplace定理

$\eta_n\sim b(n,p)$ $(0<p<1)$，则对于任意x，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\eta_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\sim N(0,1)$$

典型例题

典型例题

例1　某人有两盒火柴，每一盒都有n根。每次使用时在任一盒中任取一根，求他首次发现一盒空时，另一盒还有r根的概率是多少(r=0, 1, 2, 3, ⋯, n)？

解：记两盒火柴编号分别为I和II，则

$$P\{火柴取自I号\} = P\{火柴取自II号\} = \frac{1}{2}$$

1) 先求"发现I号盒空而II号盒还有r根"的概率。 这时此人使用了 $2n-r$根火柴，其中I号盒中用 了n，并且第$2n-r+1$次 火柴从I号中取才 能发现I 号盒为空。即相当于$2n-r+1$次伯努利实验：

$$P\{发现I号盒空而II号盒还有r根\} = C_{2n-r}^{n} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-r} \times \frac{1}{2} = C_{2n-r}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r+1}$$

2)对称地，"发现I号盒空而II号盒还有r根"的概率为$C_{2n-r}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r+1}$

综上，有$P\{发现一盒空另一盒有r根\} = C_{2n-r}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r}$

例2 从1-100个整数中任取一个数，已知取出的数不超过50，求它是2或3的倍数的概率？

解：设 A = { 取出的数不超过50}

B = { 取出的数是2的倍数}

C = { 取出的数是3的倍数}

即求$P(B\cup C|A)$

条件概率具有概率的一切性质，如加法公式

$$P(B\cup C\mid A)=P(B\mid A)+P(C\mid A)-P(BC\mid A)$$

$$=\frac{P(AB)}{P(A)}+\frac{P(AC)}{P(A)}-\frac{P(ABC)}{P(A)}$$

$$P(A)=\frac{1}{2},P(AB)=\frac{25}{100},P(AC)=\frac{16}{100},P(ABC)=\frac{8}{100}$$

$$\Rightarrow P(B\cup C\mid A)=\frac{33}{50}$$

典型例题

例3　已知随机变量X的概率密度为$f(x)=Ae^{-|x|},-\infty<x<+\infty$

(1) 求系数A；(2) 求Y=X²的概率密度函数

解： (1)由概率密度的性质得：

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-|x|}dx=2\int_{0}^{+\infty}Ae^{-x|}dx=2A\Rightarrow A=\tfrac{1}{2}$$

(2)因为$y=x^2$不是单调函数，不能直接利用公式求解，

故需要先求解Y的分布函数,

当$y\le 0$时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=0;$

当$y>0$时，$F_Y(y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le x\le\sqrt{y})=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\tfrac{1}{2}e^{-|x|}=?$

$$f_Y(y)=F_Y{}'(y)=\tfrac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}\Rightarrow\quad f_Y(y)=\begin{cases}\tfrac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}},y>0\\ 0,y\le 0\end{cases}$$

典型例题

例4　假设某段时间里来百货公司的顾客数服从参数为lambda的泊松分布，而百货公司里每个顾客购买手机的概率为p，则这段时间里恰有k个顾客购买手机的概率为多少？

解： 记N和X分别表示这段时间进入百货公司的总人数和购买手机的人数，则由全概率公式可知

$$P\{X=k\}=\sum_{n=0}^{\infty}P\{X=k\mid N=n\}P(N=n)$$

N服从泊松分布，故$P(N=n)=\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!},n=0,1,2,\ldots,n$

$$P\{X=k\mid N=n\}=\begin{cases}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, & n\ge k\\ 0, & n<k\end{cases}$$

典型例题

例4 假设某段时间里来百货公司的顾客数服从参数为lambda的泊松分布，而百货公司里每个顾客购买手机的概率为p，则这段时间里恰有k个顾客购买手机的概率为多少？

解： 记N和X分别表示这段时间进入百货公司的总人数和购买手机的人数，则由全概率公式可知

$$P\{X=k\}=\sum_{n=0}^{\infty}P\{X=k\mid N=n\}P(N=n)$$

$$P\{X=k\}=\sum_{n=k}^{\infty}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\cdot\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

$$=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(\lambda p)^k[\lambda(1-p)]^{n-k}e^{-\lambda}}{n!}=\frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda}}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$=\frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda}}{k!}\cdot e^{-\lambda(1-p)}=\frac{(\lambda p)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda p}$$

例5　设二维随机变量(X, Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & others \end{cases}$$

求$Z=|X-Y|$的概率密度函数？

解：利用分布函数求导思路

显然当$z\le 0$时，$F_Z(Z\le z)=0$；

当$z>0$时，$F_Z(Z\le z)=P(Z\le z)=P(|X-Y|\le z)$

$$=\iint_{|x-y|\le z} f(x,y)dxdy$$

$$=\iint_{|x-y|\le z,x>0,y>0} e^{-(x+y)}dxdy$$

例5　设二维随机变量(X, Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & others \end{cases}$$

求$Z=|X-Y|$的概率密度函数?

解：利用分布函数求导思路

显然当$z\le 0$时，$F_Z(Z\le z)=0$；

当$z>0$时，

$$F_Z(z)=\int_0^z dx\int_0^{x+z} e^{-(x+y)}dy+\int_z^{\infty} dx\int_{x-z}^{x+z} e^{-(x+y)}dy$$

$$=\left(1-\tfrac{3}{2}e^{-z}+\tfrac{1}{2}e^{-3z}\right)+\tfrac{1}{2}(e^{-z}-e^{-3z})=1-e^{-z}$$

$$F_Z(z)=\begin{cases} 1-e^{-z}, & z>0 \\ 0, & z\le 0 \end{cases},\Rightarrow f_Z(z)=\begin{cases} e^{-z}, & z>0 \\ 0, & z\le 0 \end{cases}$$

典型例题

例6 设随机变量X, Y相互独立，且具有相同的概率密度如下：

$$f(x)=\begin{cases} e^{1-x}, & x>1 \\ 0, & others \end{cases}$$

求$Z=X+Y$的概率密度函数

解：由卷积公式，$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx$

仅当$x>1, z-x>1 \leftrightarrow x<z-1$时上被积函数不等于0

$$f_Z(z)=\int_1^{z-1} e^{1-x}e^{1-(z-x)}dx=\int_1^{z-1} e^{2-z}dx=e^{2-z}(z-2)$$

$$f_Z(z)=\begin{cases} e^{2-z}(z-2), & z>2 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

典型例题

例7 (Laplace配对) 将n只球（1~n号）随机地放入n个盒子（1~n号），一个盒子装一只球，若一只球装入与球同号的盒子中，则称为一个配对. 记X为总的配对数，求其 期望与方差?

解 引入随机变量 X_i,

$$X_i=\begin{cases}1, & 第\,i\,个球放入第i个盒子,\\ 0, & 其他,\end{cases}\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

则 $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$.

则有 $P\{X_i=1\}=\dfrac{1}{n},\quad P\{X_i=0\}=1-\dfrac{1}{n},$

由此 $E(X_i)=\dfrac{1}{n},\quad i=1,2,\cdots.$

得
$$E(X)=E(X_1+X_2+\cdots+X_n)$$
$$=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)$$
$$=n\times\frac{1}{n}=1$$

典型例题

$$\boldsymbol{X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \Rightarrow D(X)}$$

由于$X_1, X_2, \cdots, X_n$不相互独立，故有

$$D(X) = D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + 2\sum_{1\le i\le j\le n}\sum Cov(X_i, X_j)$$

$$D(X_i) = E\left(X_i^2\right) - \left(E(X_i)\right)^2 = P\{X_i = 1\} * 1 - \left(\tfrac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})$$

$$Cov\left(X_i, X_j\right) = E\left(X_i X_j\right) - E(X_i)E(X_j) \quad = \frac{1}{n-1} * \frac{1}{n} - \frac{1}{n} * \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2(n-1)}$$

$$X_i X_j = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{第}\boldsymbol{i}\text{个和第}\boldsymbol{j}\text{个配对成功} \\ \mathbf{0}, & \text{others} \end{cases}$$

$$E(X_i X_j) = P\left\{X_i = 1, X_j = 1\right\} * 1$$

$$= P\left\{X_j = 1 \middle| X_i = 1\right\} P\{X_i = 1\} = \frac{1}{n-1} * \frac{1}{n}$$

典型例题

由于$X_1,X_2,\cdots,X_n$不相互独立，故有

$$D(X)=D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)+2\sum_{1\le i\le j\le n}\sum Cov(X_i,X_j)$$

$$D(X_i)=E\left(X_i^2\right)-\left(E(X_i)\right)^2=P\{X_i=1\}*1-\left(\tfrac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{n}(1\text{-}\frac{1}{n})$$

$$Cov\left(X_i,X_j\right)=E\left(X_iX_j\right)-E(X_i)E(X_j)\quad=\frac{1}{n-1}*\frac{1}{n}-\frac{1}{n}*\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2(n-1)}$$

$$D(X)=n*\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)+2C_n^2*\frac{1}{n^2(n-1)}=1$$

例8

假设一批种子的良种率为$\frac{1}{6}$，从中任意选出600粒，试用切比雪夫（Chebyshev）不等式估计：这600粒种子中良种所占比例与 $\frac{1}{6}$ 之差的绝对值不超过0.02的概率。

解：设 X 表示600粒种子中的良种数则 $X\sim B(600,\frac{1}{6})$.

$$EX=600\times\frac{1}{6}=100,\ DX=600\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{250}{3}.$$

$$P\left\{\left|\frac{X}{600}-\frac{1}{6}\right|\leq 0.02\right\}=P\left\{\left|\frac{X-100}{600}\right|\leq 0.02\right\}=P\{|X-100|\leq 12\}.$$

由切比雪夫不等式有

$$P\{|X-100|\leq 12\}\geq 1-\frac{DX}{12^2}=1-\frac{\frac{250}{3}}{144}=0.4213.$$