- **第一章：随机事件与概率**
  - §1 随机事件及其概率
  - §2 频率与概率
  - §3 古典概型与几何概型
  - §4 条件概率与Bayes定理
  - §5 独立性与Bernoulli概型

1. 随机事件及其概率

随机试验的特征：

① 可在相同条件下重复进行

② 一次试验之前无法确定具体出现哪种结果

③ 能确定所有的可能结果

1. 随机事件及其概率

随机事件关系与基本运算：

- 包含关系 $A \subset B$ “A发生必然导致B发生”
- 和事件 $A \cup B$ “A，B中至少有一发生”
- 积事件 $A \cap B = AB$ “A与B同时发生”
- 差事件 $A - B$ “A发生但B不发生”
- 互不相容 $A \cap B = \varnothing$ “A与B不能同时发生”
- 对立（互逆）事件 $A \cap B = \varnothing$ 且 $A \cup B = \Omega$

  记 $A = \overline{B}$ 或 $B = \overline{A}$

1. 随机事件及其概率

- **De Morgan定律**

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B},\quad \overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$$

- **事件间的关系与运算举例**

“A，B，C中至少有一发生”：$A\cup B\cup C$

“A，B，C中至少有两发生”：$AB\cup BC\cup AC$

“A，B，C中最多有一发生”：

$$A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}\bar{B}\bar{C}=\overline{AB\cup BC\cup AC}$$

2. 频率与概率

（1）频率与概率的定义

事件A发生的频率记为$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$

① $0\le f_n(A)\le 1$

② $f_n(\Omega)=1$

③ 若$A_1, A_2, \dots, A_k$两两互不相容事件，则
$f_n(A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\dots+f_n(A_k)$

事件A发生的概率记为$P(A)$：

① $P(A)>=0$; 非负性

② $P(\Omega)=1$;　规范性

③ 若$A_1, A_2, \dots$, 两两互不相容事件
即$A_iA_j=\emptyset, i\neq j, i,j=1,2,\dots$，则
$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$　(可列可加性)

$n\propto\infty$, $f_n(A)\to P(A)$

（2）概率的性质与推广

性质 1　$P(\varnothing)=0.$

性质 2　$P(A)\le 1.$

性质 3　若$A_1,A_2,\cdots,A_n$是两两互不相容事件,则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)$$ （有限可加性）

$$=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

性质 4　$A\subset B\Rightarrow P(B-A)=P(B)-P(A)$（包含可减性）

$$P(B)\ge P(A).$$ （非降性）

性质 5　$P(\overline{A})=1-P(A).$　（逆事件的概率公式）

性质 6　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$（加法公式）

一 般 推 广

1) $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i A_j A_k)$$

$$+ \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \ldots A_n)$$

2) $P(B\overline{A}) = P(B - A) = P(B) - P(AB)$

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C)$$

3．古典概型（等可能概型）

特点是:

- ♣ 样本空间的元素只有有限个；　　　(有限性)
- ♣ 每个基本事件发生的可能性相同。（等可能性）

随机事件的概率:

即：$$P(A)=\frac{A\text{包含的基本事件数}}{S\text{中基本事件总数}}.$$

3．古典概型（等可能概型）

特点是：

- ♣ **样本空间的元素只有有限个；　　(有限性)**
- ♣ **每个基本事件发生的可能性相同。（等可能性）**

例：N件产品中有D件是次品，从中任取n件，问其中恰有k(k≤D)件次品的概率

解：总的取法(可能空间)C_N^n，实际可以分为取出k件次品和(n-k)件合格品两步，于是，可能取法数为：

$$C_D^k C_{N-D}^{n-k}$$

所求概率为：

$$p = C_D^k C_{N-D}^{n-k} / C_N^n$$

4 条件概率与Bayes定理

（1）条件概率的定义、计算公式

一、公式法　$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$　$(P(A)>0)$

二、缩小样本空间法--------适用于古典概型

设事件A所含样本点数为 n_A，事件AB所含样本点数为 n_{AB}，则

$$P(B|A)=\frac{n_{AB}}{n_A}$$

（2） 乘法公式

两个事件：$P(AB)=P(B|A)P(A)$　　$P(A)>0$

一般地,假设$P(A_1A_2\dots A_{n-1})>0$，有：

$$P(A_1A_2\dots A_n)=P(A_n|A_1A_2\dots A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1A_2\dots A_{n-2})\dots P(A_2|A_1)P(A_1)$$

（3）全概率公式

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$$

（已知原因，求结果）　$B_1,B_2,\cdots,B_n$是样本空间Ω的一个划分

（4）Bayes公式

$$P(AB) = P(B|A)P(A)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(AB_k)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(A \mid B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)P(B_i)}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

（已知结果，求原因）

5 独立性与Bernoulli概型

（1） 两事件独立的定义

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

（2）两事件独立性的性质

1^0 事件A与B相互独立的充分必要条件为

$$P(B|A)=P(B) \qquad (P(A)>0),$$

2^0 若随机事件A与B相互独立，则

$\boxed{\overline{A}\text{与}B\text{、}A\text{与}\overline{B}\text{、}\overline{A}\text{与}\overline{B}}$ 也相互独立.

3^0 必然事件S与任意随机事件A相互独立；

不可能事件$\varnothing$与任意随机事件A相互独立.

注意1：两事件相互独立与互不相容的区别

“A与B互不相容”，指两事件不能同时发生，即 $P(AB)=0$。

“A与B相互独立”，指A是否发生不影响B发生的概率，即 $P(AB)=P(A)P(B)$ 或

$$P(B|A)=P(B) \quad (P(A)>0)$$

注意2： 设事件 A 与 B 满足 $P(A)P(B)\neq 0$

则互不相容与相互独立不能同时成立。

即 若事件 A 与 B 相互独立，则 $AB\neq\varnothing$；

若 $AB=\varnothing$，则事件 A 与 B 不相互独立。

(3) 三个事件的独立性

设A、B、C是三个随机事件，如果

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(BC)=P(B)P(C) \\ P(AC)=P(A)P(C) \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

则称A、B、C是相互独立的随机事件.

注意3 在三个事件独立性的定义中，四个等式是缺一不可的．即 前三个等式的成立不能推出第四等式的成立；反之，最后一个等式的成立也推不出前三个等式的成立．

注意4 三个事件相互独立的性质

若A，B，C是相互独立的三个事件，则系列事件也相互独立

$(A, B\cup C), (A, BC), (A, B-C), (A, \overline{B\cup C}), (A, \overline{BC}), (A, \bar{B}\bar{C})\cdots$

（4）n个事件的相互独立性

设 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 为n个随机事件，如果下列等式成立

$$\begin{cases} P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j) & (1 \le i < j \le n) \\ P(A_iA_jA_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k) & (1 \le i < j < k \le n) \\ \dots\dots & \cdots \\ P(A_1A_2\dots A_n) = P(A_1)P(A_2)\dots\dots P(A_n) & \cdots \end{cases}$$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 这n个随机事件相互独立.

（5）Bernoulli概型及n重Bernoulli试验

① 若随机试验 E 只有两个结果，则称为Bernoulli试验.

一般地，我们将这两个结果记作A与$\overline{A}$，分别称为“成功”与“失败”.

② 若独立重复地进行n次Bernoulli试验，则称该试验为 n 重Bernoulli 试验.

“重复”：指每次试验中 A 发生的概率（即“成功”的概率）不变,

“独立”：指各次试验的结果相互独立

③ n重Bernoulli试验中恰好成功k次的概率

设在一次Bernoulli 试验中，

$$P(A) = p, \qquad P(\overline{A}) = 1 - p = q$$

现考虑事件

$$B_{n,\ k} = \{n\text{重}Bernoulli\text{试验中事件}A\text{恰好发生}k\text{次}\}$$

的概率 $P(B_{n,\ k}) = P_n(k)$：

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (q = 1 - p)$$

$$k = 0,1,2\cdots,n$$

- **第一章：随机事件与概率**
  - §1 随机事件及其概率
  - §2 频率与概率
  - §3 古典概型与几何概型
  - §4 条件概率与Bayes定理
  - §5 独立性与Bernoulli概型

例1 已知 A、B、C 是三个两两独立的事件，且

$$ABC=\varnothing,\quad P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16},$$

$$P(A)=P(B)=P(C),\quad 则\quad P(A)=?$$

解

$$\frac{9}{16}=P(A\cup B\cup C)$$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)$$

$$-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

$$=3P(A)-3[P(A)]^2$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{3}{4}\ 或\ P(A)=\frac{1}{4},$$

解之得 $P(A)=\dfrac{3}{4}$ 或 $P(A)=\dfrac{1}{4}$ ，

又 $P(A)<P(A\cup B\cup C)=\dfrac{9}{16}$,

故 $\boldsymbol{P(A)=\dfrac{1}{4}}$.

例2 **已知 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$是两事件，且 $\boldsymbol{P(A)=0.4}$,**

$$\boldsymbol{P(AB)=0.2,\quad P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1,}$$

则 $P(A\cup B)=?$

解　由 $P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$,

知 $P(A|B)=1-P(\overline{A}|\overline{B})=P(A|\overline{B})$,

从而 $\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}$,

$$P(AB)[1-P(B)]=P(B)P(A\overline{B})$$

$$P(AB)=P(A)P(B)$$ （A、B独立）

故 $P(B)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=0.5$,

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.7$$

例3（配对问题）-----加法公式的应用问题

某人写了n封不同的信，欲寄往n个不同的地址。现将这n封信随机的插入n只具有不同通信地址的信封里，求至少有一封信插对信封的概率。

解 设 A_i ={第 i 封信插对信封} $(i=1,2,\cdots,n)$

B={至少有一封信插对信封}

则

$$B = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

$$P(B) = P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j)$$

$$+ \sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_iA_jA_k) - \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n)$$

例3(续) $$P(A_i)=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$P(A_iA_j)=\frac{(n-2)!}{n!}\qquad (1\le i<j\le n)$$

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=\frac{(n-k)!}{n!}\qquad (1\le i_1<\cdots<i_k\le n)$$

$$\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=1$$

$$\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)=C_n^2\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{n!}{2!(n-2)!}\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{1}{2!}$$

例3(续）

$$\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = C_n^k\frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!} \qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

$$P(B) = P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P\left(A_iA_j\right)$$

$$+\sum_{1\le i<j<k\le n} P\left(A_iA_jA_k\right) - \ldots + (-1)^{n-1}P\left(A_1A_2\cdots A_n\right)$$

$$P(B) = 1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$

例4 **将**A、B、C三个字母之一输入信道,输出为原字母的概率为α, 而输出为其它字母的概率都是$(1-\alpha)/2.$ 今将字母串AAAA,BBBB,
CCCC之一输入信道,输入AAAA,BBBB,CCCC的概率分别为 $p_1, p_2, p_3 (p_1+p_2+p_3=1).$ 已知输出为ABCA, 问输入的是AAAA的概率是多少? (设信道传输的各个字母的工作是相互独立的.)

解: 令事件A_i分别表示输入AAAA，输入BBBB, 输入CCCC, $i=1,2,3.$ 令事件A 表示输出ABCA.

由已知条件及独立性知

$$P(A\mid A_1)=\alpha^2\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2,$$

$$P(A\mid A_2)=P(A\mid A_3)=\alpha\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^3.$$

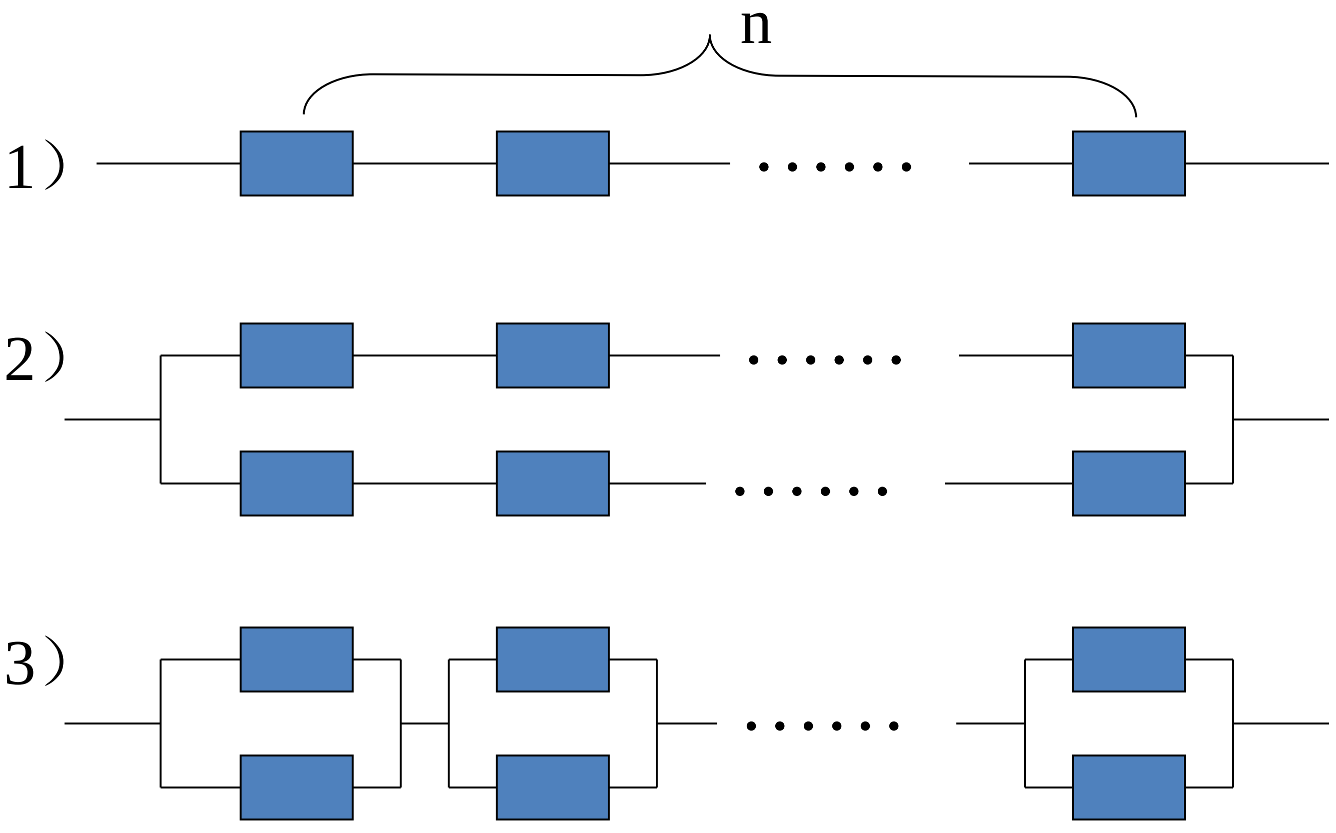
由贝叶斯公式知

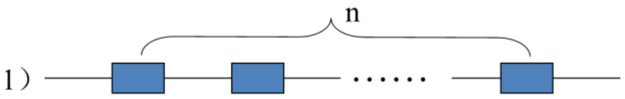
$$P(A_1 \mid A) = \frac{P(A_1 A)}{P(A)}$$

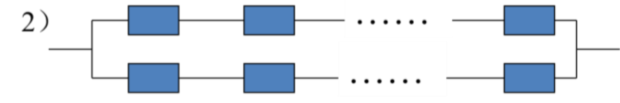
$$= \frac{P(A_1)P(A \mid A_1)}{P(A_1)P(A \mid A_1) + P(A_2)P(A \mid A_2) + P(A_3)P(A \mid A_3)}$$

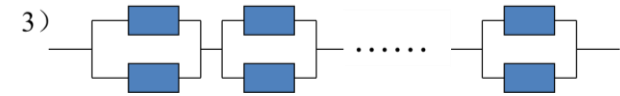
$$= \frac{2\alpha p_1}{(3\alpha - 1)p_1 + 1 - \alpha}.$$

例5 如果构成系统的每个元件的可靠性均为r，0<r<1. 且各元件能否正常工作是相互独立的，试求下列系统的可靠性：









解：1）每条通路要能正常工作，当且仅当该通路上的各元件都正常工作，故可靠性为 $R_c = r^n$

2）通路发生故障的概率为 $1-r^n$ ，两条通路同时发生故障的概率为 $(1-r^n)^2$. 故系统的可靠性为

$$R_s = 1-(1-r^n)^2 = r^n(2-r^n) = R_c(2-R_c)$$

$$R_c(2-R_c) - R_c > 0$$

即附加通路可使系统可靠性增加。

3）每对并联元件的可靠性为 $R' = 1-(1-r)^2 = r(2-r)$

系统由每对并联的元件串联组成，故可靠性为

$$R_s' = (R')^n = r^n(2-r)^n = R_c(2-r)^n.$$ 显然 $R_s > R_c$

由数学归纳法可证明当$n \geq 2$时, $(2-r)^n > 2-r^n$,即 $R_s' > R_s$.

例6 从混有5张假钞的20张百元钞票中任意抽出2张，将其中1张放到验钞机上检验发现是假钞. 求2张都是假钞的概率.

解: 令事件A 表示抽到2 张都是假钞

事件B表示2 张中至少有1张假钞

$A \subset B$

则所求概率是 $P(A|B)$(而不是 $P(A)$ ！).

$$P(AB)=P(A)=C_5^2/C_{20}^2$$

$$P(B)=(C_5^2+C_5^1C_{15}^1)/C_{20}^2$$

所以 $P(A|B)=P(AB)/P(B)$

$$=C_5^2/(C_{20}^2+C_5^1C_{15}^1)=10/85=0.118$$

例7　盒中装有5个产品，其中3个一等品，2个二等品，从中不放回地取产品，每次1个，　求：

（1）取两次，两次都取得一等品的概率；

（2）取两次，第二次取得一等品的概率；

（3）取三次，第三次才取得一等品的概率；

（4）取两次，已知第二次取得一等品，求：第一次取得的是二等品的概率.

解: 令 事件A_i为第 i 次取到一等品

(1) $$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$$

(2) $P(A_2)=P(\overline{A_1}A_2\cup A_1A_2)=P(\overline{A_1}A_2)+P(A_1A_2)$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{5}$$

(2）直接解更简单 $P(A_2)=3/5$

提问：第三次才取得一等品的概率, 是

$$P(A_3|\overline{A_1}\,\overline{A_2})\text{ 还是 }P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,A_3)?$$

(3) $P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,A_3)=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(A_3|\overline{A_1}\,\overline{A_2})$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}=\frac{1}{10}$$

(4)

$$P\left(\overline{A_1}\,\middle|\,A_2\right)=\frac{P(\overline{A_1}A_2)}{P(A_2)}=\frac{P(A_2)-P(A_1A_2)}{P(A_2)}$$

$$=1-\frac{3/10}{3/5}=0.5$$

例8 袋中有10个黑球，5个白球．现掷一枚均匀的骰子，掷出几点就从袋中取出几个球．若已知取出的球全是白球，求掷出3点的概率．

解：设 B ＝｛ 取出的球全是白球 ｝

$$A_i = \{\text{掷出}\, i\, \text{点}\} \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$$

则由Bayes公式，得

$$P(A_3|B) = \frac{P(A_3)P(B|A_3)}{\sum_{i=1}^{6} P(A_i)P(B|A_i)}$$

例8（续）

$$=\frac{\frac{1}{6}\times\frac{C_5^3}{C_{15}^3}}{\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{6}\times\frac{C_5^i}{C_{15}^i}+\frac{1}{6}\times 0}$$

$$=0.04835$$

例9　对以往的数据分析结果表明当机器调整得良好时，产品的合格率为 90% ，而当机器发生某一故障时，其合格率为 30% 。每天早上机器开动时，机器调整良好的概率为 75% 。已知某天早上第一件产品是合格品，试求机器调整得良好的概率是多少？

B 机器调整得良好

$P(A|B)=90\%$

产品合格　A

$\overline{B}$ 机器发生某一故障

$P(A|\overline{B})=30\%$

解：

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})}$$

$$=\frac{0.9\times0.75}{0.9\times0.75+0.3\times0.25}=0.9.$$

例10　设在N件产品中有M件次品，每次从中任意取出一件，有放回地取n次．试求取出的n件产品中恰有k件次品的概率．

解：

B={ 取出的n件产品中恰有k件次品 }

每取一次只有两种结果：

$$A=\{\text{取出次品}\},\qquad \overline{A}=\{\text{取出正品}\},$$

因此每取一次产品可看作是一次Bernoulli试验

例10（续）

并且，

$$P(A)=\frac{M}{N}\ ,\qquad P(\overline{A})=1-\frac{M}{N}$$

因此，有放回地取 n 件产品可看作是一个 n 重Bernoulli试验．由前面的讨论，可知

$$P(B)=C_n^k\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k}$$

练　习

设A，B是两个随机事件， 已知$P(A\cup B)=0.7, P(A)=0.4.$

(1) 若A，B互不相容，求$P(B)$;

(2) 若A，B 相互独立，求$P(B)$;

(3) 若 $P(B|A)=0.6$，**求$P(B)$ 。**

解： $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

（1）$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.7,\ \ \boldsymbol{P(B)=0.7-0.4=0.3}$

（2）$\boldsymbol{P(AB)=P(A)P(B)}$

$$P(B)=\frac{P(A\cup B)-P(A)}{P(\bar{A})}=\frac{0.7-0.4}{0.6}=0.5$$

（3）$\boldsymbol{P(AB)=P(A)P(B|A)}$

$$P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(A)P(B|A)=0.7-0.4+0.4\times0.6=0.54$$

第一章　　作业情况

- 1．概率论与数理统计P25第8题的（2）
  - 很多同学写成：$P(x>=2) = 1-P(0)-P(1)-P(2);$
- 2．概率论及其应用p20第14题
  - 这个题同学们有很多种证明的方式:根据定义，画图，利用公式等，不过本题的目的是考察同学们对定义的了解，所以推荐使用定义证明
- 3．概率论及其应用p20第16题
  - 本题的(b)选项错误率较高
    - ? $ABC=AB(C\cup B)$

- 4．概率论及其应用p42第9题
  - 本题比较难，答案各种各样，错得比较多
  - 提示：
    - n个球随机放入n个盒，恰有一盒空着
    - 总的放法个数：n^n
    - 空盒的可能个数：C_n^1
    - 问题变为：n个球装入n-1个盒子，不能有空
    - 从而某个盒子必须有2个球，两个球的构成方式：C_n^2
    - 放入盒子的方式：$(n-1)!$
    - 结果为：

$$\frac{C_n^1 \cdot C_n^2 \cdot (n-1)!}{n^n} = \frac{C_n^2 \cdot n!}{n^n}$$

- 5．概率论及其应用p44第24题
  - 6个人生日在2个月的概率
  - 本题结果中分子的乘子容易写成2^6而忘记减2:

$$\frac{C_{12}^{2}\cdot(2^{6}-2)}{12^{6}}$$