选做题

2018.11.1

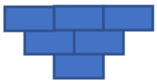
李昊宸

1. n 个木块放到一张桌子上

   猜想一种可能的解：

   要使木块伸出距离最长，需要有每一层的所有木块搭好之后，整体的重心恰好在桌面边缘，那么为了充分利用每一块木块的所有重量，整体上应成倒三角形的对称分布。

   如下图，第 n 层应有 n 个木块，并且每层都能向外伸出 1/2 米。



所以若伸出 n/2 米，至少有 $\frac{n(n+1)}{4}$ 块

于是，当有 n= $\frac{k(k+1)}{4}$ +c，k 为整数，c 为小于 k 的整数 时，伸出的距离为 n/2 米

我们这样给出了一个算法。

证明它的最大性，我们只需要证明，每使木块伸出 1/2 米，我们至少需要多少块木块。

当每层伸出 1/2 米时，即为上述算法；

当每层伸出的距离小于 1/2 米时，我们需要叠加多层。

利用物理学的规律我们发现，上面一层为达到与下面一层相同的效果，总需要使用更多的木块，即使用的木块数一定会大于等于 n

于是最大性得证。

2. 随机游走问题

   二维随机游走：

   从上节课的讨论可以得到，最终回到原点的概率为 1.下面是一种可能的推测。

   考虑到随机游走实质上为二项分布，当 n 趋向于无穷时有正态逼近

$$f(X,Y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2}Q^TC^{-1}Q\},\quad Q=\binom{X}{Y}$$,C 为协方差矩阵

当 X=Y=0 时，$f(0,0)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}$，根据已有的 $f(0,0)=1$

得到 $\rho=0.98725$

将该数据拟合三维随机行走：

$$f(X,Y,Z)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}(\det C)^{-1}}\exp\{-\frac{1}{2}Q^TC^{-1}Q\},C=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix},Q\text{为协方差矩阵}$$

$$Q=\begin{pmatrix}\sigma^2&\rho&\rho\\\rho&\sigma^2&\rho\\\rho&\rho&\sigma^2\end{pmatrix},\text{不妨令}\sigma\text{取}1$$

得到 f（0，0，0）=34%，与理论数据符合较好

于是我们可以推广到 N 维随机游走：

$$f(X,Y,Z)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\det C)^{-1}}\exp\{-\frac{1}{2}Q^{T}C^{-1}Q\},C=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\\ldots\\X_{n-1}\\X_n\end{pmatrix},Q\text{为协方差矩阵}$$

3. 四柱汉诺塔问题

由算法， $f(4,n)\le\min\limits_{1\le k\le n-1}\{2f(4,k)+f(3,n-k)\}$

定义 $F(4,n)\le\min\limits_{1\le k\le n-1}\{2F(4,k)+F(3,n-k)\}$

$$F(4,n)=\sum_{i=1}^{k}i2^{i-1}+(n-\binom{k+1}{2})\cdot 2^{k}$$

$$=(n-1-\binom{k}{2})2^{k}+1,n\in[\binom{k+1}{2},\binom{k+2}{2})]$$

不难发现，该递推公式具有最优子结构，故其为最优解。