组合数学第一讲

授课时间: 2018年9月3日 授课教师: 孙晓明 记录人: 徐逸斌 刘骐鸣

1 计数原理

加法原理 设集合S被划分成两两不相交的部分$S_1, S_2, \ldots, S_m$。则S的对象数目可以通过确定它的每一个部分的对象数目并依次相加而得到，

$$|S| = |S_1| + |S_2| + \cdots + |S_m|。$$

加法原理的另一种描述形式如下： 如果有p种方法能够从一堆中选出一个物体，又有q种方法从另外一堆中选出一个物体，那么从这两堆中选出一个物体共有$p+q$种方法。 显然，这里的结论同样适用于n堆的情况。

如果允许集合S_1,S_2,$\ldots$,S_m相交，那么求S的对象数目需要使用容斥原理来计算。

乘法原理 令S的对象的有序对(a,b)的集合，其中第一个对象a来自大小为p的一个集合，而对于a的每一个选择，对象b都有q种选择。于是S的对象数目为

$$|S| = p \times q。$$

乘法原理的另一种实用形式是： 如果第一项任务有p个结果，而不论第一项任务的结果如何，第二项任务都有q个结果，那么，这两项任务连续执行就有$p * q$个结果。

2 排列与组合

定义 1 (排列)**.** 从n个物体中取出m个进行有序排列或有序选择，定义$P(n,m)$为这样的有序排列的数目，也称为排列。同时，$P(n,m)$的表达式为

$$P(n,m) = n^{\underline{m}} := n(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}。$$

其中，$n^{\underline{m}}$也叫n的降m次阶乘。

定义 2 (组合)**.** 从n个物体中取出m个进行无序排列或无序选择，定义$\binom{n}{m}$为这样的无序排列的数目，也称为组合。同时，$\binom{n}{m}$的表达式为

$$\binom{n}{m} := \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n^{\underline{m}}}{m!}。$$

在高中的时候，组合数中的n和m必须是自然数，且$n \geq m$。然而，观察到对任意实数x，仍可以定义x的降m次阶乘$x^{\underline{m}} := x(x-1)\cdots(x-m+1)$。这允许我们通过它来推广组合数的定义。

定义 3 (组合数的推广)**.** 对任意实数$x \in \mathbb{R}$和自然数$m \in \mathbb{N}$，定义组合数$\binom{x}{m}$为

$$\binom{x}{m} := \frac{x^{\underline{m}}}{m!}。$$

例 1 计算$\binom{n}{m}$的值(其中$n, m \in \mathbb{N}$且$n < m$)。

解 根据定义3，当$n < m$时，$n^{\underline{m}}$包含因子0，由此可知$\binom{n}{m} = 0$。直观上，从一个集合中取出一个元素数目大于它的新集合是不可能的，因此取出的无序排列的数量为0，即$\binom{n}{m} = 0$，这与之前的定义一致。

例 2 计算$\binom{-1}{m}$的值。

解 根据定义3，

$$\binom{-1}{m} = \frac{(-1)^{\underline{m}}}{m!} = \frac{(-1)(-2)\cdots(-m)}{m!} = (-1)^m。$$

例 3 计算$\binom{1/2}{m}$的值。

解 根据定义3，

$$\begin{aligned}\binom{\frac{1}{2}}{m} &= \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2m-3}{2})}{m!}\\ &= \frac{(-1)^{m-1}(2m-3)!!}{2^m \cdot m!}\\ &= \frac{(-1)^{m-1}(2m-3)!!(2m-2)!!}{2^m \cdot m! \cdot (2m-2)!!}\\ &= \frac{(-1)^{m-1}(2m-2)!}{2^{2m-1} \cdot m \cdot (m-1)! \cdot (m-1)!}\\ &= \frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m-1} \cdot m}\binom{2m-2}{m-1}。\end{aligned}$$

其中，$\binom{2m}{m}/(m+1)$被称为卡塔兰数（Catalan number）。

3 二项式定理

定理 4 (二项式定理). 对于任意$n \in \mathbb{N}$,

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = \sum_{i \geq 0} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}。$$

特别地，令$y = 1$，可以得到

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i = \sum_{i \geq 0} \binom{n}{i} x^i。$$

二项式定理的后一等号成立是因为，当$n < i$时，$\binom{n}{i} = 0$。利用这一形式，以及组合数的一般定义，可以将n推广到任意实数上。

定理 5 (广义二项式定理). 对于任意实数$\alpha \in \mathbb{R}$以及$|x| < 1$,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{i \geq 0} \binom{\alpha}{i} x^i。$$

例 4 对$(1+x)^{-1}$进行多项式展开。

解 根据定理5以及例2，

$$(1+x)^{-1}=\sum_{i\geq 0}\binom{-1}{i}x^i=\sum_{i\geq 0}(-1)^i x^i。$$

注意到$(1+x)^{-1}$的泰勒展开式也为$\sum_{i\geq 0}(-1)^i x^i$，这说明了对组合数和二项式定理的推广是合理的。

例 5 对$(1+x)^{\frac{1}{2}}$进行多项式展开。

解 根据定理5以及例3，

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=\sum_{i\geq 0}\binom{\frac{1}{2}}{i}x^i=\sum_{i\geq 0}\frac{(-1)^{i-1}}{2^{2i-1}\cdot i}\binom{2i-2}{i-1}x^i。$$

作业中要求计算$(1+x)^{\frac{1}{2}}$的泰勒展开式，验证是否与上式一致。

感兴趣的同学可以考虑当$a=-m$时，计算$(1+x)^{-m}$的具体形式。

4 二项式定理的应用

二项式定理可以用于求解有关组合数的计算问题。

例 6 计算$\sum_{i\geq 0}\binom{n}{2i}$。

解 把$x=1,-1$代入二项式定理中得，

$$\sum_{i\geq 0}\binom{n}{i}=2^n,$$

且

$$\sum_{i\geq 0}\binom{n}{i}(-1)^i=0。$$

以上两式相加得到，

$$\sum_{i\geq 0}\binom{n}{2i}=2^{n-1}。$$

此外将以上两式相减可得，

$$\sum_{i\geq 0}\binom{n}{2i+1}=2^{n-1}。$$

例 7 计算$\sum_{i\geq 0}\binom{n}{3i}$。

解 考虑$x^3=1$的三个根$1,\omega,\omega^2$，其中$\omega=\exp(\frac{2}{3}\pi i)$，分别代入二项式定理得，

$$\begin{aligned}(1+1)^n&=\binom{n}{0}1+\binom{n}{1}1+\binom{n}{2}1+\binom{n}{3}1+\cdots\\(1+\omega)^n&=\binom{n}{0}1+\binom{n}{1}\omega+\binom{n}{2}\omega^2+\binom{n}{3}1+\cdots\\(1+\omega^2)^n&=\binom{n}{0}1+\binom{n}{1}\omega^2+\binom{n}{2}\omega+\binom{n}{3}1+\cdots\end{aligned}$$

同时，$\omega^3=1$可以化为$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$，且由于$\omega\neq 1$,有$\omega^2+\omega+1=0$。观察到上述三个式子中系数的变化具有周期性，将上述三个式子相加得到，

$$\begin{aligned}&(1+1)^n+(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n\\=&3\sum_{i\geq 0}\binom{n}{3i}+(1+\omega+\omega^2)\sum_{i\geq 0}\binom{n}{3i+1}+(1+\omega^2+\omega)\sum_{i\geq 0}\binom{n}{3i+2}\\=&3\sum_{i\geq 0}\binom{n}{3i}。\end{aligned}$$

因此，$\sum_{i\geq 0}\binom{n}{3i}=[2^n+(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n]/3=[2^n+(-1)^n\omega^n+(-1)^n\omega^{2n}]/3$。

同理可以计算$\sum_{i\geq 0}\binom{n}{3i+1}$和$\sum_{i\geq 0}\binom{n}{3i+2}$，留作练习。

5 范德蒙恒等式

定理 6 (范德蒙恒等式)**.** 对于任意的自然数m,n,k，有

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}=\binom{m+n}{k}。$$

证明 证明的主要工具仍然是二项式定理。考虑$(1+x)^{m+n}$，由二项式定理，

$$(1+x)^{m+n}=\sum_{k\geq 0}\binom{m+n}{k}x^k。$$

同时，观察到

$$\begin{aligned}&(1+x)^{m+n}\\=&(1+x)^m(1+x)^n\\=&\left(\sum_{i\geq 0}\binom{m}{i}x^i\right)\cdot\left(\sum_{j\geq 0}\binom{n}{j}x^j\right)\\=&\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}\right)x^k。\end{aligned}$$

由比较系数法，可证得定理的结论。 □

范德蒙恒等式具有更加直观的解释。假设A班有m个人，B班有n个人，要从这两个班中挑选出一共k个人参加英语竞赛，那么可行的方案数为$\binom{m+n}{k}$。另一方面，可行的方案一共可以划分为$k+1$类，第i类方案从A班选取i个人，从B班选取$k-i$个人，这样的选法共有$\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$种，$i=0,\cdots,k$。利用加法原理，可以再次证明范德蒙恒等式成立。

在范德蒙恒等式中，令$m=1$，有如下推论

推论 7 (加法公式)**.** 对任意的自然数$n\in\mathbb{N}$和正整数$k\in\mathbb{N}_+$，有

$$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}。$$

此外，也给出广义的范德蒙恒等式。

定理 8 (广义范德蒙恒等式). 对于任意r个自然数$n_1, n_2, \cdots, n_r \in \mathbb{N}$和自然数$k \in \mathbb{N}$，有

$$\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_r=k} \binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2}\cdots\binom{n_r}{k_r} = \binom{n_1+n_2+\cdots+n_r}{k}。$$

证明方法与前述类似。

6 杨辉三角形与求和问题

例 8 计算$\sum_{i=3}^{n}\binom{i}{3}$的值。

解 该例题实则是在求杨辉三角形从左往右第四条斜边上前n个数的和。注意到杨辉三角形中任意一处的取值等于其肩上两数之和（即推论7），于是有

$$\begin{aligned} & \sum_{i=3}^{n}\binom{i}{3} \\ = & \binom{4}{4} + \sum_{i=4}^{n}\binom{i}{3} \\ = & \binom{5}{4} + \sum_{i=5}^{n}\binom{i}{3} \\ = & \cdots \\ = & \binom{n}{4} + \binom{n}{3} \\ = & \binom{n}{4}。 \end{aligned}$$

一般地，可以证明如下定理。

定理 9 (朱世杰恒等式). 对于任意自然数n, m，有

$$\sum_{0\le k\le n}\binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}。$$

例 9 计算$\sum_{x=1}^{n} x^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$。

解 将x^2拆分成组合数的形式，

$$x^2 = 2\binom{x}{2} + \binom{x}{1}。$$

对上式求和，利用朱世杰恒等式得，

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{n} x^3 &= 2\sum_{x=1}^{n}\binom{x}{2} + \sum_{x=1}^{n}\binom{x}{1} \\ &= 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}。 \end{aligned}$$

由此我们求得了前n个数的平方和的闭式。一般地，能否利用相同的方法计算$\sum_{x=1}^{n} x^k$，即前n个数的k次幂的和?本质上，这要求我们能将$\{x^k, \cdots, x, 1\}$中的每一项表示为$\{x^{\underline{k}}, \cdots, x^{\underline{1}}, 1\}$的线性组合。换言之，$\{x^{\underline{k}}, \cdots, x^{\underline{1}}, 1\}$构成了所有（至多）$k$阶多项式组成的多项式环的一组基。作业中要求证明这一结论。

7 选做题：财产分割

一个富翁有两个儿子，富翁希望能公平的将其所有资产分给两个儿子，问存不存在一种分配使得其所有亲戚认为分配是公平的？若存在，请给出。

问题的数学描述：已知f_1,f_2,...,f_n为n个概率密度函数，即对于所有的$1 \leq i \leq n$满足

$$\int_0^1 f_i(x)\mathrm{d}x = 1$$

且

$$\forall x \in [0,1] : f_i(x) \geq 0。$$

a.当$n = 2$时，是否存在一个$[0,1]$的划分(A, B)，使得$A \cup B = [0,1]$且$A \cap B = \emptyset$，对$\forall 1 \leq i \leq n$满足

$$\int_A f_i(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}?$$

b.当n取大于2的任意正整数时，上题结论是否依然成立？