Homework5

李昊宸

1.

T(1)=0

T(2)=O(2log2)~2

数学归纳法，设在 n 时有 T(n)=O(nlogn)

$$T(n+1)=\frac{1}{\mathrm{n}+1}\sum_{k=0}^{n}(T(k)+T(n-k-1)+O(n+1))=\frac{2}{n+1}[O(1\log 1)+...+O(n\log n)]+O(n+1)$$

$$=2O[\frac{1\log 1+...+n\log n}{n+1}]+O(n+1)\sim O[\frac{(n+1)^2\log(n+1)-(n+1)^2}{n+1}]+O(n+1)$$

$$=O((n+1)\log(n+1))$$

于是原式得证

2.

欲证 ap+bq=gcd(a,b)

设 a=Ac　b=Bc　c=gcd(a,b)，即证 Acp+Bcp=c

即 Ap+Bq=1,A、B 互素

两边 mod A，即证 存在 q，使得 Bq=1(mod A)

取 $q\in\{1,2,...,A-1\}$

若存在 $Bq_1=Bq_2$（mod A），即 B（q_1-q_2）mod A=0

因 B 与 A 互素，所以 q_1-q_2=kA，与 $q\in\{1,2,...,A-1\}$ 矛盾！

所以 B1,B2,···,B(A-1)构成 A-1 个不同的数，且等于{1，2，···,A-1}

于是存在 q，使 Bq=1（mod A）

原式得证

3.

记 gcd（m,n）=c

m=cd　n=ce,　d,e 互素

于是欲证明原式，即证 gcd(a^{dc}-1,a^{ec}-1)=a^c-1

记为 gcd(x^d-1,x^e-1)=x-1

X^d-1=(x-1)(x^{d-1}+···+1),　X^e-1=(x-1)(x^{e-1}+···+1)

所以(x-1)| X^d-1　, (x-1)| X^e-1

下证 gcd((x^{d-1}+···+1), (x^{e-1}+···+1))=1:

设(x^{d-1}+···+1)=kc　　　　　　其中 k，c，d 都为正整数且 k 大于等于 2

(x^{e-1}+···+1)=kd，x^{d-e}(x^{e-1}+···+1)=kdx^{d-e} 不妨令 d>e

则=k(x^{e-2}+···+1)- (x^{d-2}+···+1)

代回，得到 x^{d-e}+···+1=k(dx^{d-e}-c)，被 k 整除

辗转，得 $x^{d \bmod e}$+···+1 被 k 整除

因 d，e 互素，所以左边是一个连续且不为常数的量，与始终被 k 整除矛盾！

于是假设错误，k=1，从而 gcd(a^{dc}-1,a^{ec}-1)=a^c-1

原式得证

4.

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$$

$$F_{\mathrm{m}}=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{\mathrm{m}}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{\mathrm{m}}]$$

记 m=ca, n=cb, c=gcd(m,n)

则 $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{1\text{-}\sqrt{5}})^{cb}-1](\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{cb}$ $\quad F_m=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{1\text{-}\sqrt{5}})^{ca}-1](\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{ca}$

由第三题结论知， $\gcd[(\frac{1+\sqrt{5}}{1\text{-}\sqrt{5}})^{ca}-1),(\frac{1+\sqrt{5}}{1\text{-}\sqrt{5}})^{cb}-1)]=(\frac{1+\sqrt{5}}{1\text{-}\sqrt{5}})^{c}-1)$

于是

$\gcd[F_n,F_m]=\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^k[(\frac{1+\sqrt{5}}{1\text{-}\sqrt{5}})^c-1]$ 其中 k<m+1,且 k 是最大的使其为正整数的整数值

经计算，k=c，从而 $\gcd[F_{\mathrm{n}},F_m]=\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^k[(\frac{1+\sqrt{5}}{1\text{-}\sqrt{5}})^c-1]=F_{n-m}$

5.

两边取 p 的模，

$$\binom{2p}{p}=(2\frac{(p+1)...(2p-1)}{(p-1)!})(\bmod p)$$

$$=(2\frac{1\cdot 2\cdot ...\cdot(p-1)}{(p-1)!}\bmod p)\bmod p=2\bmod p$$

6.

$h_p(n)$表示 n! 中素因子 p 的个数

易知，每一个 p^i 贡献 i 个

所以

$$h_p(n)=\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{p^2}\right\rfloor+...+$$

显然由高斯取整函数的性质，我们有 $\left\lfloor\frac{2n}{p^i}\right\rfloor\ge 2\left\lfloor\frac{n}{p^i}\right\rfloor$

于是 $h_p(2n)\ge 2h_p(n)$

7.

记 $f(m,n)=\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$，且已知 $f(m,0)=\frac{(2m)!}{m!m!}$ 为正整数

我们用数学归纳法证明 f（m，n）为整数，从而证明分母能整除分子

假设结论对所有的 n-1 都成立

n 时

$$f(m,n)=\frac{(2m)!(2n\text{-}2)!(2n-1)2n}{m!(n-1)!(m+n)!n}=\frac{(2m)!(2n\text{-}2)!}{m!(n-1)!(m+n)!}[(4m+4n)-2(2m+1)]$$

$$=4f(m,n-1)-2f(m+1,n-1)$$

所以 n 时假设也成立，原式得证

8.

1）
$$\left(\frac{20}{67}\right)=(\frac{2}{67})(\frac{2}{67})(\frac{5}{67})=(-1)^{66}(\frac{67}{2})(\frac{67}{2})(-1)^{2\cdot 33}(\frac{67}{5})$$
$$=(-1)(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{2}{5})=(-1)1\cdot 1(-1)=1$$

2）
$$\left(\frac{14}{73}\right)=(\frac{2}{73})(\frac{2}{73})=(-1)^{\frac{72}{4}}(\frac{73}{2})(\frac{73}{7})(-1)^{\frac{6}{2}\frac{72}{2}}$$
$$=(-1)^{18}(\frac{1}{2})(-1)^{108}(\frac{3}{7})=1(-1)^{\frac{2}{2}\frac{6}{2}}(\frac{7}{3})=-1$$

9.

$$\left(\frac{-3}{p}\right)=(\frac{-1}{p})(\frac{3}{p})$$

P mod 4 =(6k)mod 4+1= $\begin{cases}1，\text{k为偶数}\\3，\text{k为奇数}\end{cases}$

于是 $(\frac{-1}{p}) = \begin{cases}1，\text{k为偶数}\\-1，\text{k为奇数}\end{cases}$

$$(\frac{3}{p})=(-1)^{\frac{2}{2}\frac{p-1}{2}}(\frac{p}{3})=(-1)^{3k+2}(\frac{2}{3})$$
$$=(-1)^{3k}=\begin{cases}1，\text{k为偶数}\\-1，\text{k为奇数}\end{cases}$$

所以 $\left(\frac{-3}{p}\right)$=-1

10.

由杨表的钩子公式知，$\frac{(2n)!}{(n!)^2(n+1)}$ 是所有可能的种类数

不难发现，这一数字恰好符合卡特兰数的公式