第三章 多维随机变量及其分布

§5 两个随机变量的函数的分布

5.1 回顾随机变量函数的分布

上一章中讨论了单个随机变量的函数的分布

一般方法：若$X \sim f(x)$, $-\infty < x < +\infty$, $Y = g(X)$ 为随机变量X 的函数，则可先求Y的分布函数

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{g(X) \le y\} = \int_{g(X) \le y} f(x) dx$$

进一步获得Y的概率密度函数

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$$

5.2 二元随机变量的函数的分布

- 若$(X,Y)\sim f(x,y)$，$-\infty < x,y < +\infty$, $Z = g(X,Y)$为随机变量(X,Y) 的函数，则可先求Z的分布函数

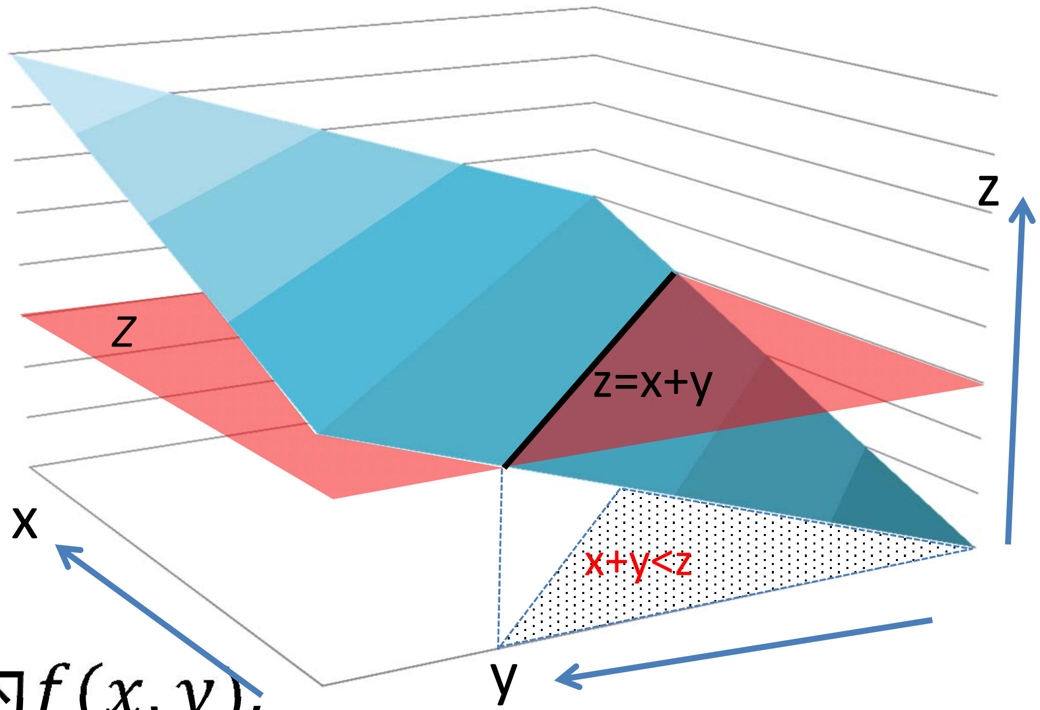
$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{g(X,Y) \le z\} = \int_{g(X,Y) \le z} f(x,y)dxdy$$

- 进一步获得Z的概率密度函数

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz}$$

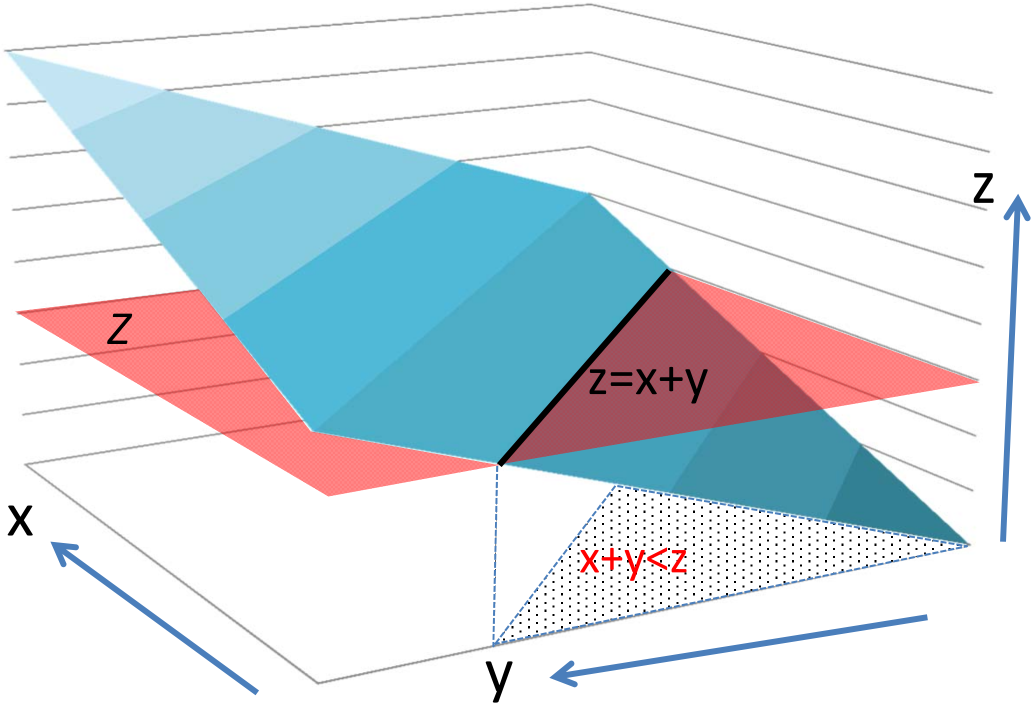
- 考虑几种特殊的二元函数
  - $Z = X + Y$
  - $Z = \mathrm{Y}/X$和 $Z = XY$
  - $Z = \max|X,Y|$和$Z = \min|X,Y|$

- 5.3几个常用二维随机变量函数的分布
- 5.3.1 Z=X+Y的分布



- 设 (X,Y)的概率密度为$f(x,y)$,
- 则Z=X+Y的分布函数为
- $F_Z(z) = P\{Z < z\} = \iint_{x+y<z} f(x,y)dxdy$

5.3.1 Z=X+Y的分布



这里积分区域是右图中的阴影区域

化成累次积分，得

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)dx\right]dy$$

固定y,z，作变量代换，令$x = u - y$，得

$$\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)dx = \int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)du$$

于是

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y}f(x,y)dx\right]dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z}f(u-y,y)du\,dy=\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{\infty}f(u-y,y)dy\,du$$

$$=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(u-y,y)dy\right]du$$

由概率密度的定义,即得到Z的概率密度为

$$f_Z(z)=\frac{dF_Z(z)}{dz}=\int_{-\infty}^{\infty}f(z-y,y)dy \qquad (*1)$$

由X,Y的对称性,有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,z-x)dx \qquad (*2)$$

以上两式是两个随机变量和的概率密度的一般公式

卷积公式

当X和Y相互独立时,则(*1)和(*2)式分别化为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

和

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dy$$

这两个公式称为卷积公式，记作：$f_X * f_Y$

例1. 设随机变量X与Y独立且均服从标准正态分布，求Z=X+Y的概率密度函数。

解：由于

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2},f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}},$$

$$(-\infty<x,y<\infty)$$

于是Z的密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(z-y)^2+y^2}{2}}dy$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(y-\frac{z}{2}\right)^2}dy=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\cdot\sqrt{\pi}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}$$

于是$Z \sim N(0,2)$。

更为一般的结论：

有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布，即

若$X_i \sim N\left(\mu_i, \sigma_i^2\right)\ (i = 1,2,\dots,n)$，且相互独立，

$Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$，则$Z \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$

例2：在一简单电路中，两个电阻R_1和R_2串联连接，设R_1和R_2相互独立，他们的概率密度函数均为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{10-x}{50} & 0\le x\le 10,\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

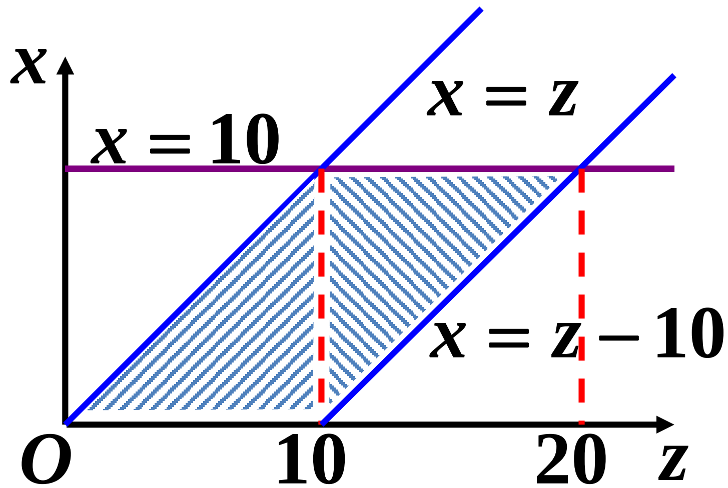
求总电阻$R=R_1+R_2$的概率密度。

解：R的概率密度为

$$f_R(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)f(z-x)dx$$

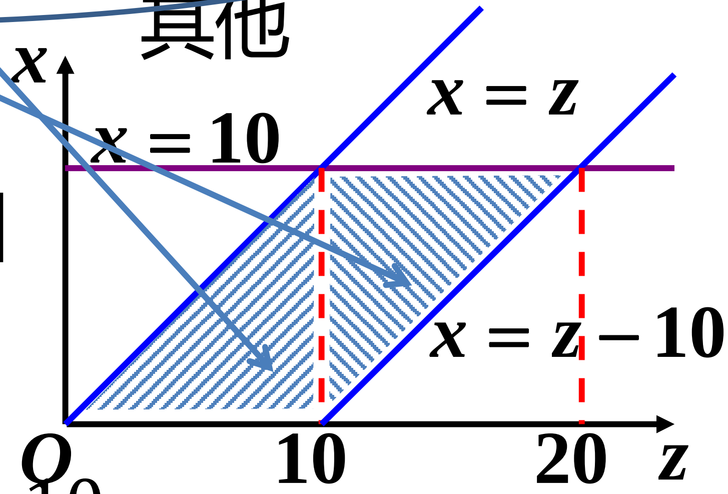
非零的积分区域如右图中阴影区域，即

$$\begin{cases}0<x<10\\0<z-x<10\end{cases}$$



于是

$$f_R(z)=\begin{cases}\int_0^z f(x)f(z-x)dx & 0\le z\le 10\\ \int_{z-10}^{10} f(x)f(z-x)dx & 10\le z\le 20\\ 0 & 其他\end{cases}$$



代入

$$f(x)=\begin{cases}(10-x)/50 & x\in[0,10]\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$f_R(z)=\begin{cases}\dfrac{600z-60z^2+z^3}{15000} & 0\le z<10\\ \dfrac{(20-z)^3}{15000} & 10\le z<20\\ 0 & 其他\end{cases}$$

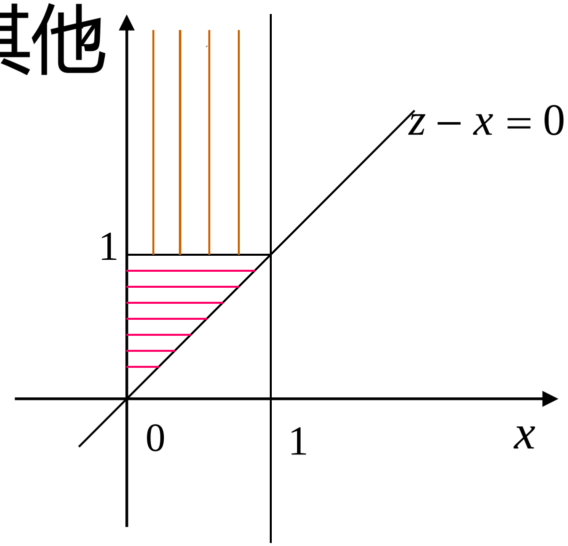
例3：设随机变量X与Y相互独立，X服从区间(0,1)上的均匀分布，Y服从$\lambda = 1$的指数分布，令$Z = X + Y$，试求随机变量Z的密度函数

解：由题意：

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases}$$

$$f_X(x)f_Y(z-x) = \begin{cases} e^{-(z-x)} & 0 < x < 1, z - x > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$



注意积分域如右图，于是

(1)若$z \le 0$，$f_Z(z) = 0$

(2)若$0 < z \le 1$，

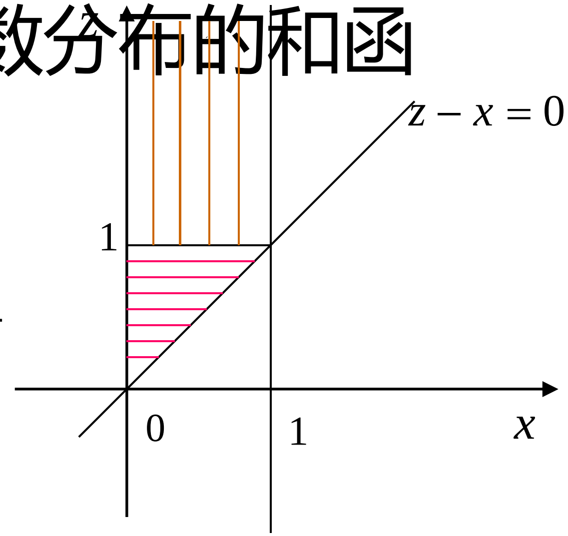
$$f_Z(z) = \int_0^z e^{-(z-x)} dx = e^{-z} \int_0^z e^x dx = 1 - e^{-z}$$

(3)若$z > 1$，

$$f_Z(z) = \int_0^1 e^{-(z-x)} dx = e^{-z} \int_0^1 e^x dx = e^{-z+1} - e^{-z}$$

于是，(0,1)上均匀分布与$\lambda = 1$的指数分布的和函数的密度函数为

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ 1 - e^{-z} & 0 < z \le 1 \\ e^{-z+1} - e^{-z} & z > 1 \end{cases}$$

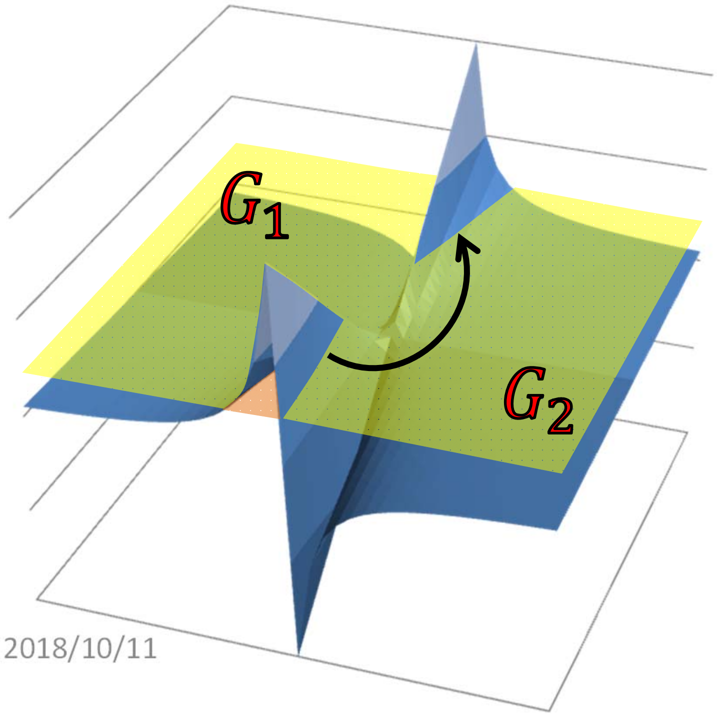


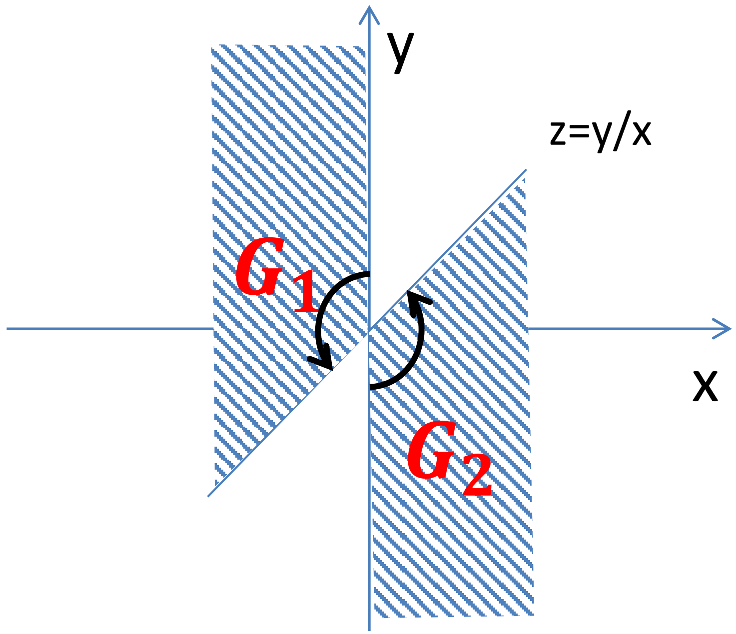
5.3.2 商(Z=Y/X)和积(Z=XY)的分布

已知$(X,Y) \sim f(x,y)$, $(x,y) \in \mathrm{R}^2$, 推导Z = Y/X, Z=XY 的概率密度

(1) Z = Y/X的概率密度

$$F_{Y/X}(z) = P(Y/X \le z) = \iint\limits_{G_1 \cup G_2} f(x,y)dxdy$$



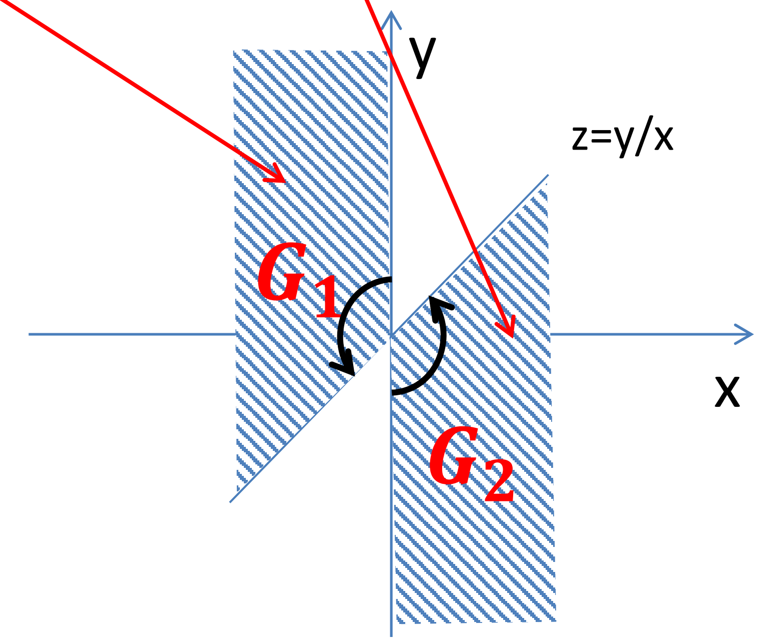


$$F_{Y/X}(z) = P(Y/X \leq z)$$

$$= \int_{-\infty}^{0}\int_{zx}^{\infty} f(x,y)dydx + \int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{zx} f(x,y)dydx$$

$(令 y = xu)$

$$= \int_{-\infty}^{0}\int_{z}^{-\infty} xf(x,xu)dudx + \int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{z} xf(x,xu)dudx$$



$$F_{Y/X}(z) = P(Y/X \le z) =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{z} -xf(x, xu)dudx + \int_{0}^{\infty} \int_{-\infty}^{z} xf(x, xu)dudx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z} |x|f(x, xu)dudx$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \int_{-\infty}^{\infty} |\boldsymbol{x}|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{xu})\boldsymbol{dx}\, du$$

由概率密度定义得

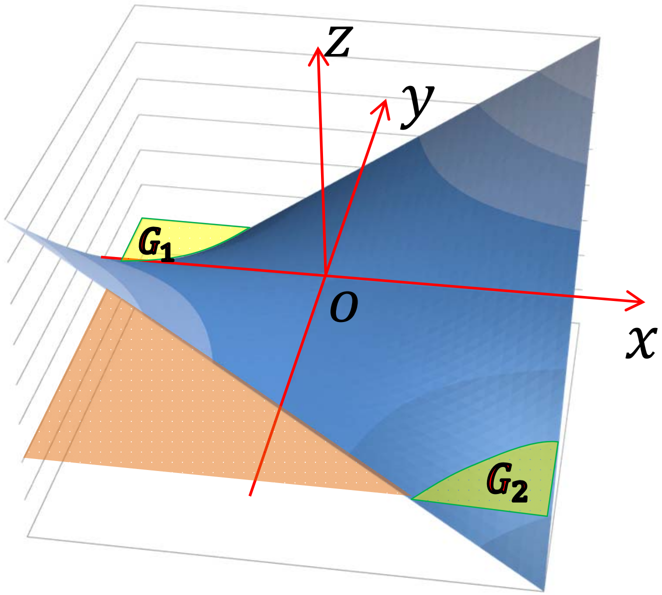
$$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x, xz)dx$$

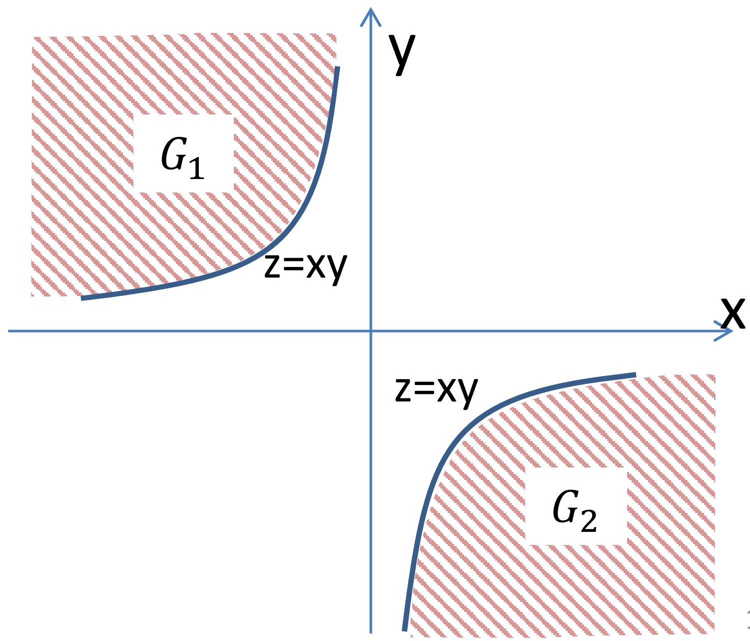
(1)Z = XY的概率密度

当$z < 0$,

$$F_{XY}(z) = P(XY \leq z)$$

$$= \iint_{G_1 \cup G_2} f(x, y)dxdy$$



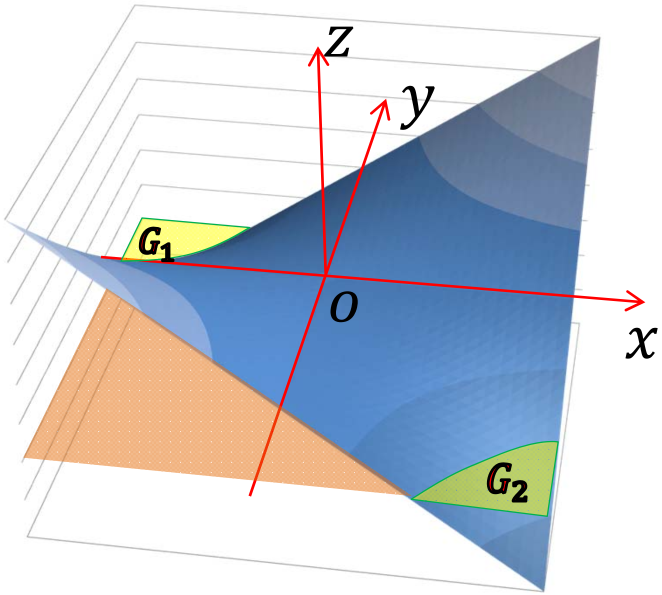


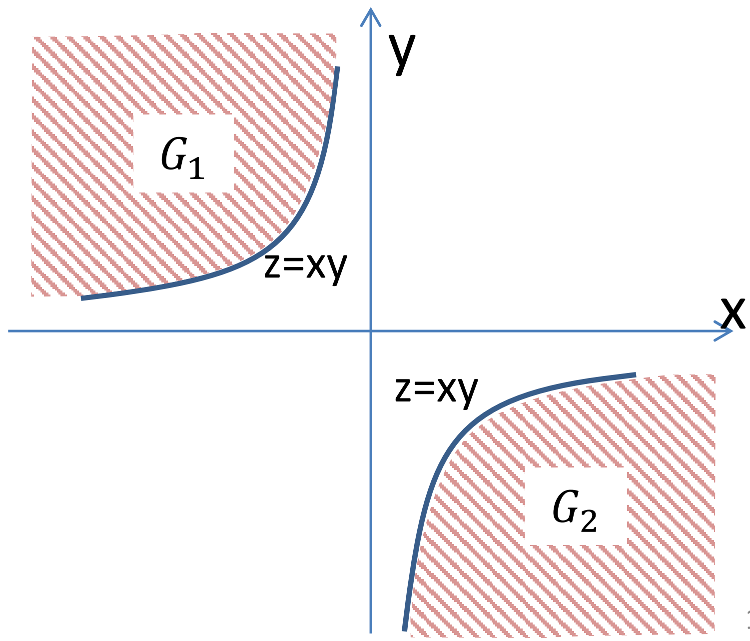
$$F_{XY}(z) = P(XY \le z) =$$

$$= \int_{-\infty}^{0^-} \int_{z/x}^{\infty} f(x,y)dydx + \int_{0^+}^{\infty} \int_{-\infty}^{z/x} f(x,y)dydx$$

$$(\text{令} y = u/x)$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \int_{z}^{\infty} \frac{1}{x} f\left(x, \frac{u}{x}\right) dudx + \int_{0}^{\infty} \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{x} f\left(x, \frac{u}{x}\right) dudx$$





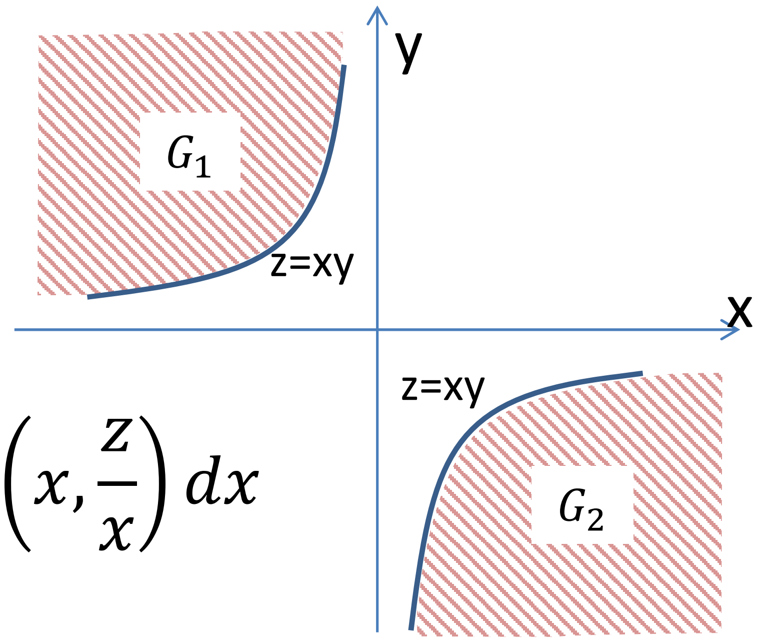
$$F_{XY}(z) = P(XY \le z) = \cdots$$

$$= \int_{-\infty}^{0}\int_{z}^{\infty}\frac{1}{x}f\left(x,\frac{u}{x}\right)dudx + \int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{x}f\left(x,\frac{u}{x}\right)dudx$$

$$= \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{z}-\frac{1}{x}f\left(x,\frac{u}{x}\right)dudx + \int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{x}f\left(x,\frac{u}{x}\right)dudx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z}\left|\frac{1}{x}\right|f\left(x,\frac{u}{x}\right)dudx$$

$$= \int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{x}\right|f\left(x,\frac{u}{x}\right)dx\,du$$

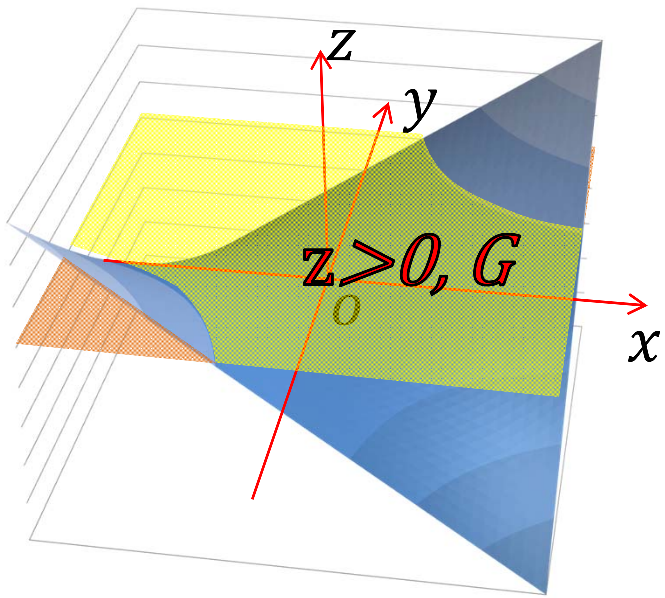


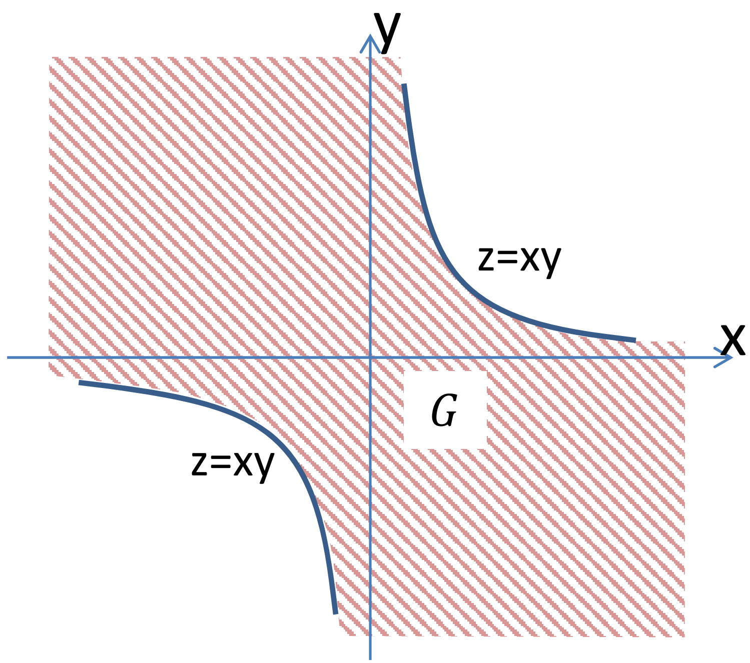
由概率密度定义得

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{x}\right|f\left(x,\frac{z}{x}\right)dx$$

当$z > 0$，

自行推导





- 5.3.3 相互独立随机变量的极大(小)值的分布
- 设X, Y是相互独立的随机变量，其分布函数分别为$F_X(x)$和 $F_Y(y)$，推导$M=\max\{X,Y\}$和$N=\min\{X,Y\}$ 的分布函数

- 由独立性，以及$M=\max\{X,Y\}$，于是
- $P\{M\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\}=P\{X\le z\}P\{Y\le z\}$
- 故
- $F_{\max(X,Y)}(z)=F_X(z)F_Y(z)$

对于$N = \min\{X, Y\}$，利用补集关系有

$$\begin{aligned} P\{N \le z\} &= 1 - P\{N > z\} \\ &= 1 - P\{X > z, Y > z\} \\ &= 1 - P\{X > z\}P\{Y > z\} \\ &= 1 - [1 - P\{X \le z\}][1 - P\{Y \le z\}] \end{aligned}$$

于是

$$F_{\min(X,Y)}(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]$$

推广到任意n个相互独立的随机变量$X_1, X_2, \dots, X_n$ ，其分布函数分别为$F_i(x_i), (i = 1,2, \dots, n)$ ，则$M = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$的分布函数为

$$F_{\max}(z) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(z)$$

$N = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 的分布函数为

$$F_{\min}(z) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left[1 - F_{X_i}(z)\right]$$

这两个分布分别对应不同的可靠性模型

在实际系统中，经常假定$X_1, X_2, \ldots, X_n$符合独立同分布(iid) $F(x)$，于是有

$$F_{\max}(z) = [F(z)]^n$$
$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F(z)]^n$$

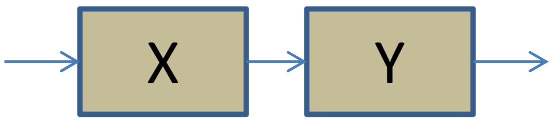
进一步地，若独立同分布的$X_i, (i = 1,2, \ldots, n)$ 的密度函数为$f\ (x)$，则M和N对应的密度函数分别为

$$f_{\max}(z) = n[F(z)]^{n-1} f(z)$$
$$f_{\min}(z) = n[1 - F(z)]^{n-1} f(z)$$

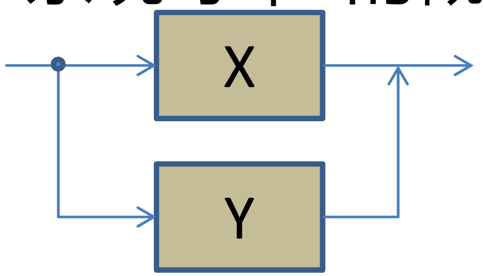
例(可靠性模型)：设系统L由两个相互独立的子系统L_1和L_2构成，构成的方式分别为(1) 串联，(2) 并联，(3) 备份。设L_1, L_2的寿命分别为X与Y，已知它们的概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases} \text{和} f_Y(y) = \begin{cases} \beta e^{-\beta y} & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases}$$

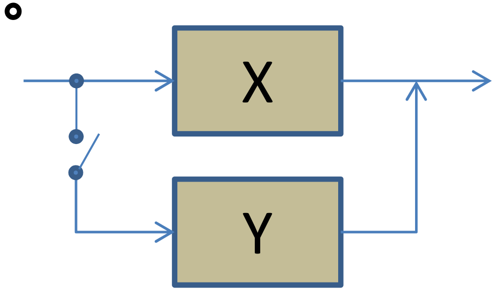
分别考虑三种情况下系统寿命Z的概率密度。



串联



并联



备份

分析：

一个子系统出故障即导致系统不可用

此时的寿命为：

$Z = \min\{X, Y\}$

可靠性并联模型(热备份)，两个子系统均出故障时系统才不可用

此时的寿命为：

$Z = \max\{X, Y\}$

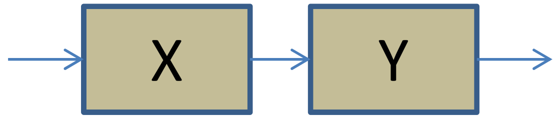
冷备份，两个子系统均出故障时系统才不可用

此时的寿命为：

$Z = X + Y$

解：(1)串联情况，此时的寿命为：

$$Z = \min\{X, Y\}$$



串联

于是有

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_{\mathrm{X}}(z)][1 - F_{\mathrm{Y}}(z)]$$

$$= 1 - \left[1 - \int_0^z \alpha e^{-\alpha x}\,dx\right]\left[1 - \int_0^z \beta e^{-\beta y}\,dy\right]$$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-(\alpha+\beta)z} & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$

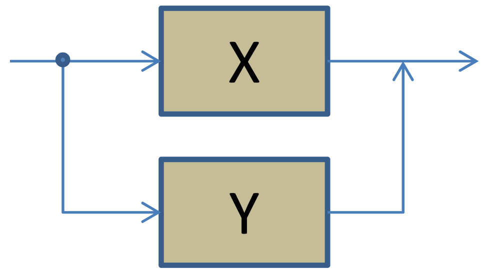
从而概率密度为：

$$f_{\min}(z) = \frac{F_{\min}(z)}{dz}$$

$$= \begin{cases} (\alpha + \beta)e^{-(\alpha+\beta)z} & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$

(2)并联情况，此时的寿命为：$Z = \max\{X, Y\}$

于是有



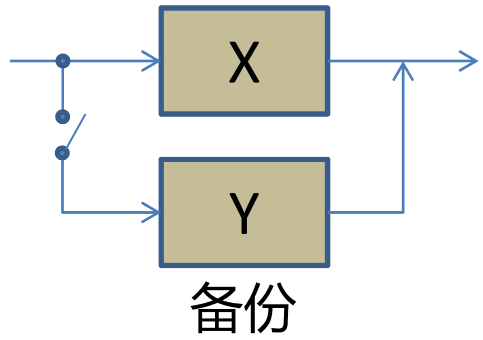
并联

$$F_{\max}(z) = F_{\mathrm{X}}(z)F_{\mathrm{Y}}(z)$$
$$= \int_0^z \alpha e^{-\alpha x}\,dx \int_0^z \beta e^{-\beta y}\,d$$
$$= \begin{cases} \left(1 - e^{-\alpha z}\right)\left(1 - e^{-\beta z}\right) & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$$

从而概率密度为：

$$f_{\min}(z) = \frac{F_{\max}(z)}{dz}$$
$$= \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z} + \beta e^{-\beta z} - (\alpha + \beta)e^{-(\alpha+\beta)z} & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$$

(2)备份情况，此时的寿命为：



$$Z = X + Y$$

于是有

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha e^{-\alpha(z-y)} \beta e^{-\beta y}\, dy$$

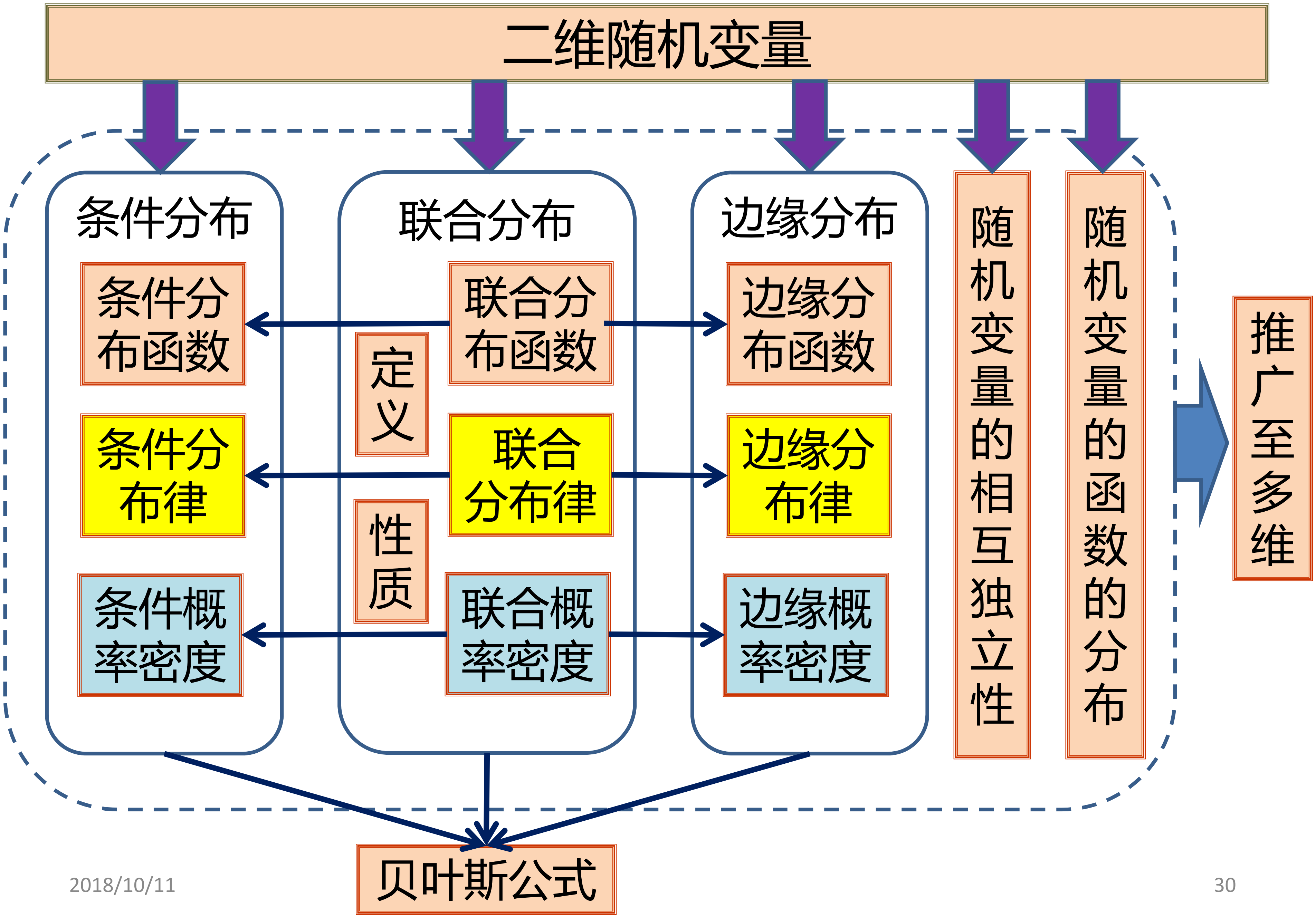
$$= \alpha\beta e^{-\alpha z} \int_0^z e^{-(\beta-\alpha)y}\, dy$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\left(e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}\right) & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$

§6 小结

要求：

- 掌握二维随机变量的分布函数的定义及性质
- 掌握二维随机变量的边缘分布与条件分布，及其与联合分布的关系
- 理解随机变量的独立性
- 掌握二维随机变量函数的分布的一般方法以及常用的多维随机变量的和、积、商以及极值等函数的分布


二维随机变量
条件分布
条件分布函数
条件分布律
条件概率密度
联合分布
联合分布函数
联合分布律
联合概率密度
定义
性质
边缘分布
边缘分布函数
边缘分布律
边缘概率密度
随机变量的相互独立性
随机变量的函数的分布
推广至多维
贝叶斯公式

二维随机变量

联合分布

定义

联合分布函数

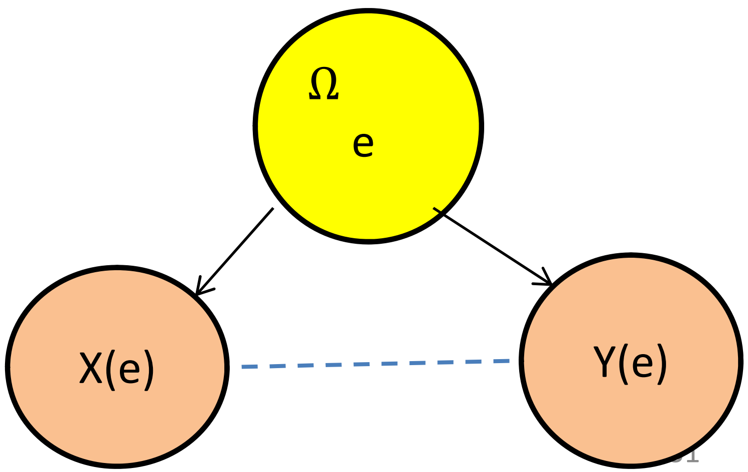
联合分布律

性质

联合概率密度

从单个试验同时获得的多个随机变量

- 二维随机变量(X,Y) 应看作一个整体，因为X和Y是有关联的
- 如果对任意实数x,y，二元函数：
  $F(x,y)=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}=P(X\le x,Y\le y)$
  称为二维随机变量(X,Y)的联合分布
- 四个基本性质
  - 单调性
  - 有界
  - 右连续
  - 非负



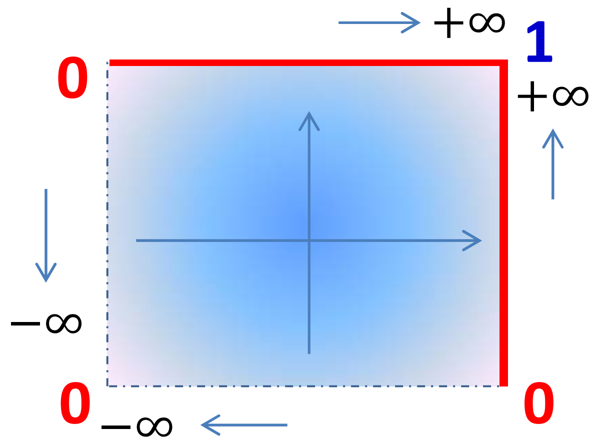
二维随机变量

边缘分布

- 边缘分布函数
- 边缘分布律
- 边缘概率密度

遍历某一变量所有可能的分布

设(X,Y)为二维随机向量，其分布函数为$F(x,y)$，其中分量X或Y是一维随机变量，相应的存在一维分布，分别记为$F_X(x)$和$F_Y(y)$, 依次称之为(X,Y)关于X和关于Y的边缘分布函数。



二维随机变量

边缘分布

- 边缘分布函数
- 边缘分布律
- 边缘概率密度

联合分布律

X \ Y	y_1	y_2	…	y_j	…	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1j}	…	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2j}	…	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	…	p_{ij}	…	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	…	$p_{\cdot j}$	…	1

边缘分布

边缘分布

二维随机变量

条件分布

条件分布函数

条件分布律

条件概率密度

- 设(X,Y)是二维离散型随机变量，对于固定的j，若$P\{Y=y_j\}>0$, 则称

$$P\left(X=x_i \middle| Y=y_j\right)=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},$$

$$i=1,2,\ldots$$

为在$Y=\ y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布律。

- 联合分布唯一确定边缘分布和条件分布
- 边缘分布和条件分布个自都不能唯一确定联合分布
- 一个条件分布和对应的边缘分布一起，能唯一确定联合分布

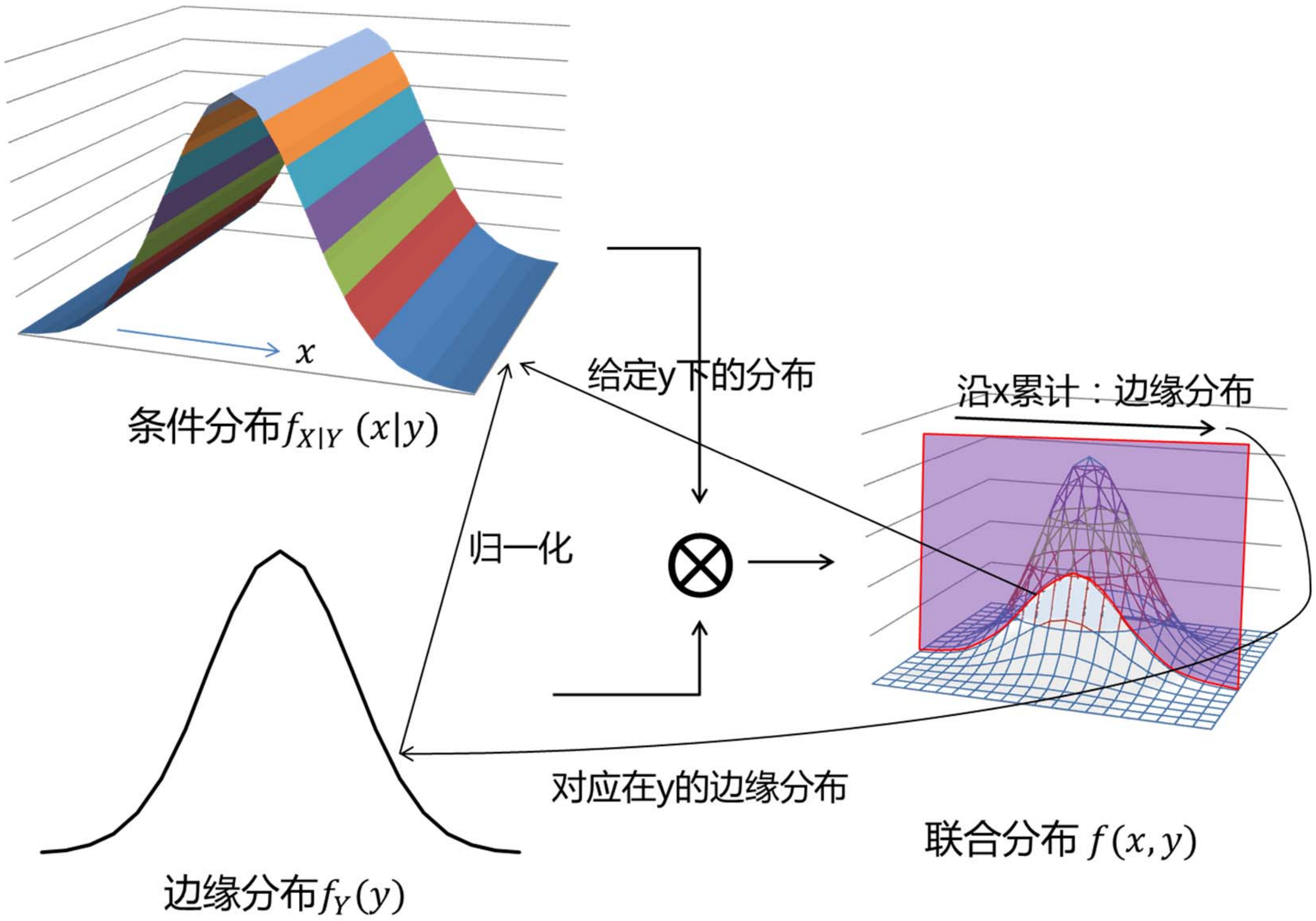
二维随机变量

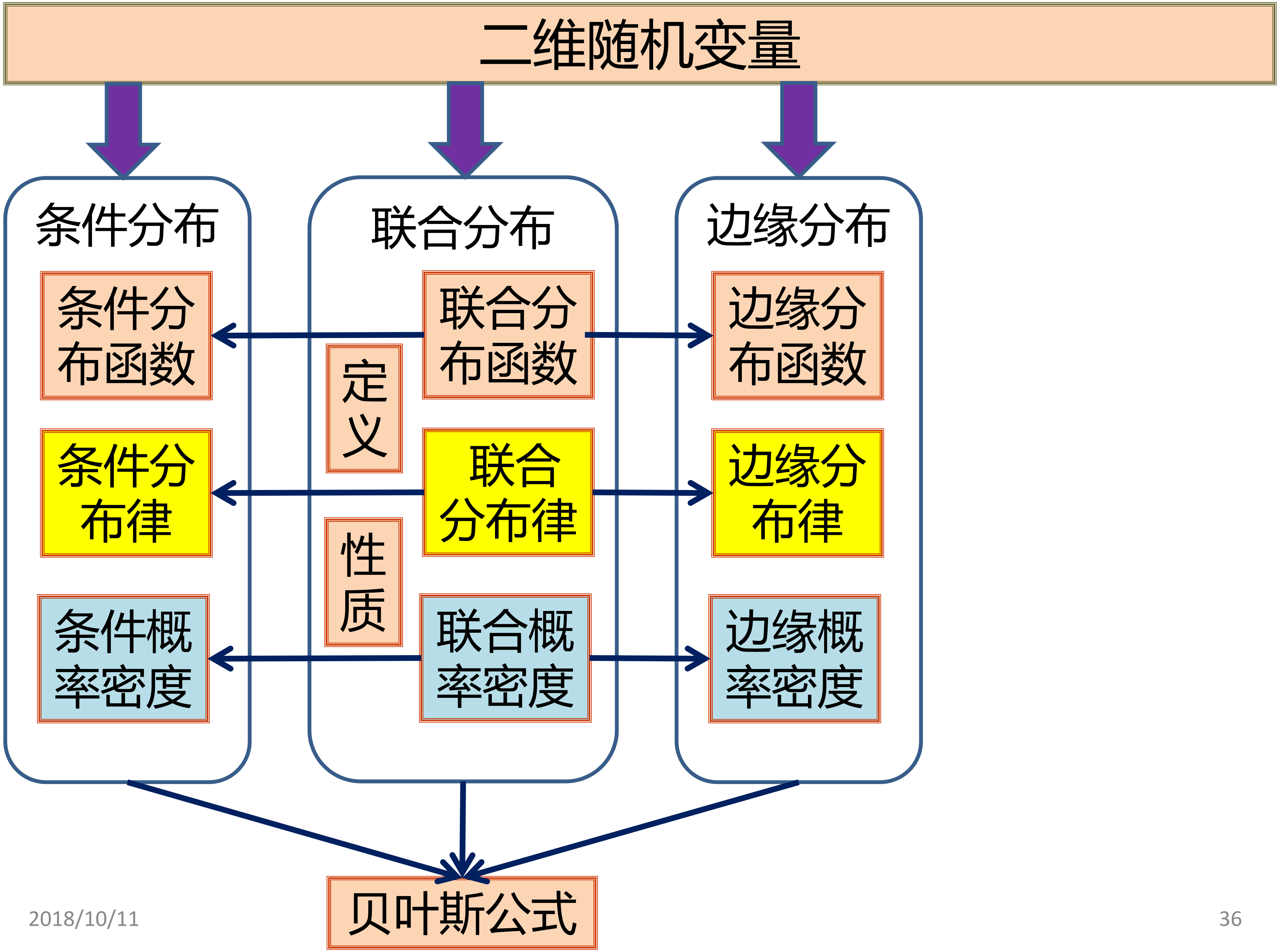
条件分布

条件分布函数

条件分布律

条件概率密度




二维随机变量
条件分布
联合分布
边缘分布
条件分布函数
联合分布函数
边缘分布函数
定义
条件分布律
联合分布律
边缘分布律
性质
条件概率密度
联合概率密度
边缘概率密度
贝叶斯公式

二维随机变量

随机变量的相互独立性

独立性

1. 随机变量X与Y满足
   $P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\}$
   意味着两个事件：$\{X \le x\}$和$\{Y \le y\}$相互独立
2. 一般情况下有$F(x,y) = F_{X|Y}(x|y)F_Y(y)$
   而在X与Y相互独立时有$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$
   意味着，(X,Y)相互独立时，其联合分布可由其边缘分布$F_X(x)$和$F_Y(y)$唯一确定

二维随机变量

随机变量的相互独立性

独立性

联合分布律

Y / X	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	1

边缘分布

边缘分布

独立性条件：$p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j}$

二维随机变量

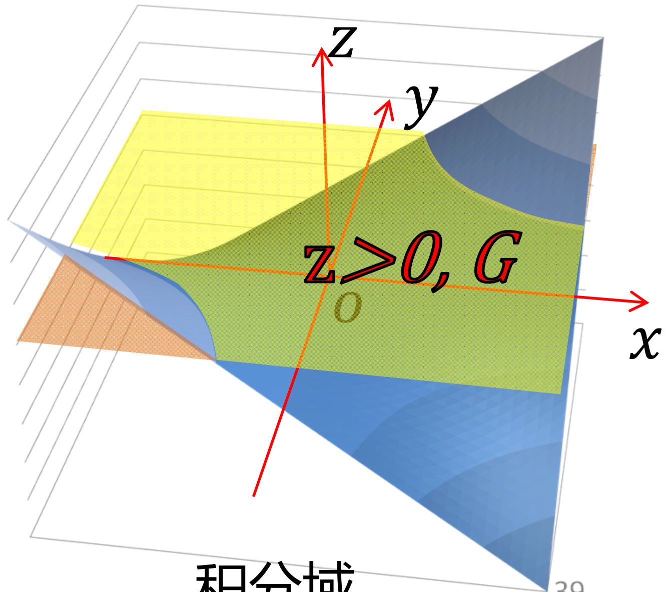
随机变量的函数的分布

若$(X,Y)\sim f(x,y)$，$-\infty < x,y < +\infty$, $Z = g(X,Y)$为随机变量(X,Y) 的函数，则可先求Z的分布函数

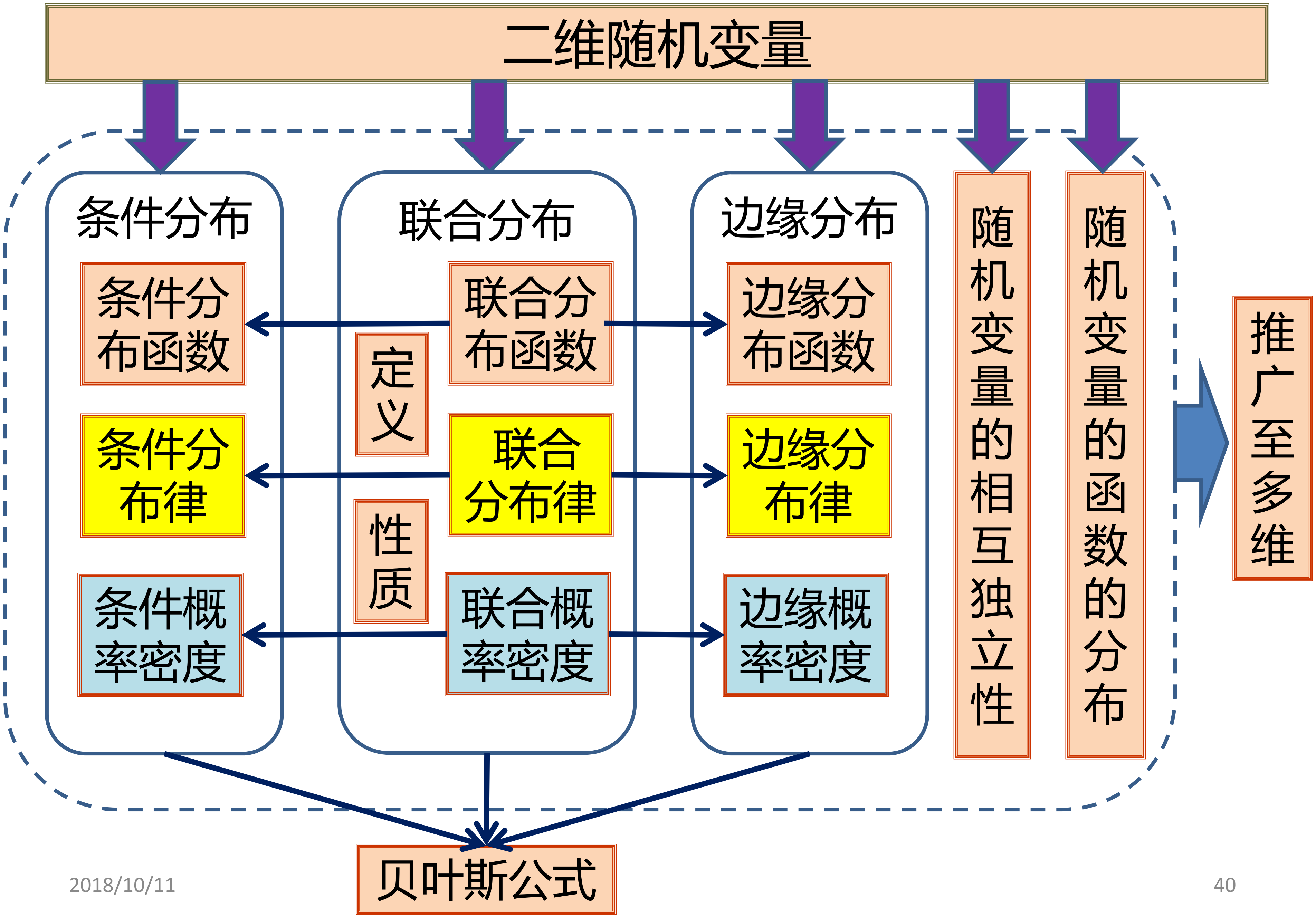
$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{g(X,Y)\le z\}=\int_{g(X,Y)\le z} f(x,y)dxdy$$

进一步获得Z的概率密度函数

$$f_Z(z)=\frac{dF_Z(z)}{dz}$$



积分域



二维随机变量
条件分布
联合分布
边缘分布
条件分布函数
联合分布函数
边缘分布函数
定义
条件分布律
联合分布律
边缘分布律
性质
条件概率密度
联合概率密度
边缘概率密度
随机变量的相互独立性
随机变量的函数的分布
推广至多维
贝叶斯公式

作业

概率论与数理统计

- p 86-88 #18, #21，#24，#29, #34