计算机科学导论

张家琳
中国科学院计算技术研究所

zhangjialin@ict.ac.cn

2018-4-27

思考题

- 问题：*n*名同学围成一圈，每个人随机的分配一顶红色或者蓝色的帽子，要求所有人同时猜出自己帽子的颜色。请设计一种策略，使得同时猜对的概率最高。

$$x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n = 0$$

猜帽子思考题 by 2018 杨宇恒

- 假设猜帽子的策略：
  - 由于每个人的对自己帽子颜色的猜测是基于其他n-1个人的帽子颜色作出的。于是可以假设：
    - 记a_i为看到i个红帽子时作出的判断（i=0，1，……，n-1）
    - a_i取1代表猜红色，取0代表猜蓝色

- 根据实际n个人分到帽子的情况，判断根据假设的策略能否猜对
  - 0、实际分到0个红帽子
    - $\frac{C_n^0}{2^n} \times (1 - a_0)$

- 实际分到0个红帽子的概率　　是否能猜对（值为1表示猜对）

- i、实际分到 i 个红帽子（i=2，3，……，n-1）
  - $\frac{C_n^i}{2^n}$ × （$1-a_i$）a_{i-1}
- n、实际分到n个红帽子
  - $\frac{C_n^n}{2^n}$ × $a_{n\text{-}1}$

a_{i-2}	a_{i-1}	a_i	a_{i+1}	a_{i+2}
	1	0		

概率第i-1项：（1-1）*#=0　　概率第i项：（1-0）*1=1

概率第i+1项：（1-#）*0=0

- 所以最后同时猜对的概率为：
  - $\sum_{i=0}^{n}\frac{C_n^i}{2^n}$ × （$1-a_i$）a_{i-1}　　（令a_{-1}=a_n=1）

- 由于（$1-a_i$）a_{i-1}项的存在，如果要做到分到i个红帽子的时候猜对，那么分到i-1和i+1个红帽子的时候都会猜错。所以显然需要 {a_i} 数列中0和1交替出现才能使概率最大。
- 故可以有策略：
  - 当i为奇数时，a_i=0；当i为偶数时，a_i=1
  - 最后有$\frac{1}{2}$的概率猜对

思考题

- 问题：能否只用$\oplus$？（允许使用0，1）
  - **不能！**
  - **只能写出** $x_{i1} \oplus \ldots \oplus x_{ik} \oplus c$
- 如果只用→呢？
  - **可以！**
  - $x \to 0 = \neg x$
  - $(x \to 0) \to y = x \vee y$

本节课内容

- 公理系统
- 机器证明

公理系统

- 公理系统：
  - 完备性，一致性（相容性）
  - 完备性：任何命题都可由此公理系统经有限步推定真伪；
  - 一致性：不能从公理系统导出矛盾
  - 独立性：所有公理都是互相独立的，使公理系统尽可能的简洁

布尔逻辑

- 真和可以被证明是一回事

- 布尔逻辑的公理系统（某一种表示）

$$A \to (B \to A)$$

$$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$$

$$((\neg A) \to (\neg B)) \to (B \to A)$$

罗巴切夫斯基

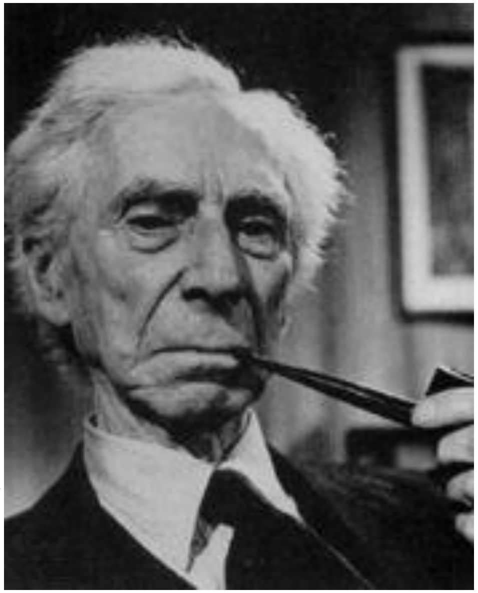
欧几里德几何

- 公设1：任意一点到另外任意一点可以画直线
- 公设2：一条有限线段可以继续延长
- 公设3：以任意点为心及任意的距离可以画圆
- 公设4：凡直角都彼此相等
- 通过一个不在直线上的点，有且仅有一条不与该直线相交的直线。（平行公设）

- 非欧几何
- 欧式几何的公理体系：希尔伯特公理系统，具有完备性和一致性
  - 真和可以被证明是一回事

理发师悖论

- 在某个城市中有一位理发师
我将为本城所有不给自己理
，我也只给这些人理发。”
- 问题：这位理发师是否该给



Bertrand Russell
1872—1970

Godel不完备性定理

- 定理一：任意一个包含初等数论的数学系统，都不可能同时拥有完备性和一致性。即存在一个真命题，它在这个系统中不能被证明。
- 定理二：任意一个包含初等数论的系统S，当S无矛盾时，它的无矛盾性不可能在S内证明。

真和可以被证明是两件事情！！

Kurt Godel
1906-1978

Hilbert 23 problems

- 1. 连续统假设
- 2. 算术公理的相容性
- 6. 物理科学的公理化
- 8. 黎曼猜想，哥德巴赫猜想，孪生素数猜想

逻辑思维

- 能自己想明白
- 能和别人说明白

- 公理化
  - **真**和**能被证明**是两件事情
  - 可证的一定是真的（假设有一致性），但真的不一定可证

实数不可数

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
1	0.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	…
2	0.	1	0	0	0	0	0	0	0	0	…
3	0.	2	5	0	0	0	0	0	0	0	…
4	0.	9	9	9	9	9	9	9	9	0	…
5	0.	5	0	0	0	0	0	0	0	0	…
6	0.	6	6	6	6	6	6	6	6	6	…
7	0.	6	1	8	0	3	3	9	8	8	…
…	0.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Cantor

1845-1918

consider x = **0.1110170**$\cdots$ $(x_i = \mathrm{A}[i,i]+1 \bmod 10)$

机器证明

NO！

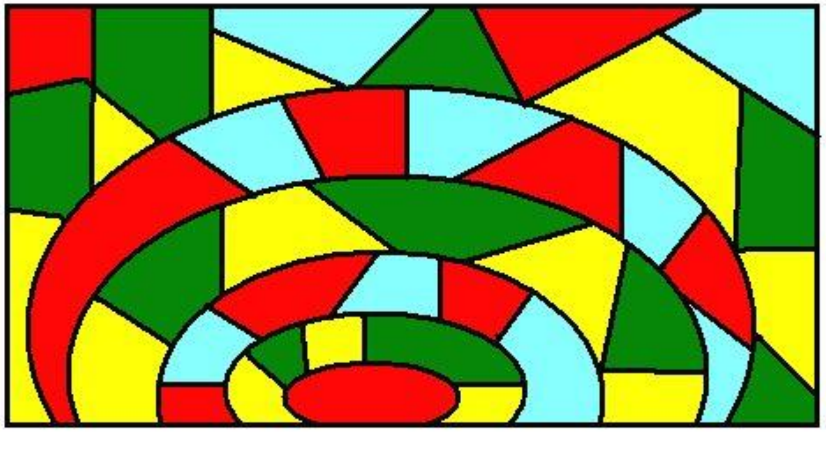
Godel不完备性定理

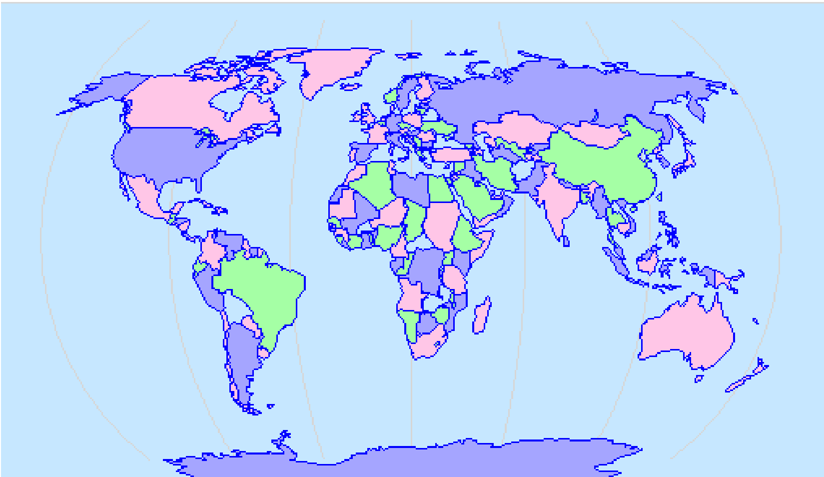
- 笛卡尔
  - 一切问题都可以化为数学问题，一切数学问题都可以化为代数问题，一切代数问题都可以化为代数方程的求解问题。
- 希尔伯特（公理系统的机械化判定问题）
  - 给定一个公理系统，是否存在一种机械的方法（即现在所谓的算法），可以验证每一个命题是否为真？

特定问题的机器证明

- 四色定理
- 开普勒猜想
- 几何定理机器证明
  - 吴文俊，吴方法

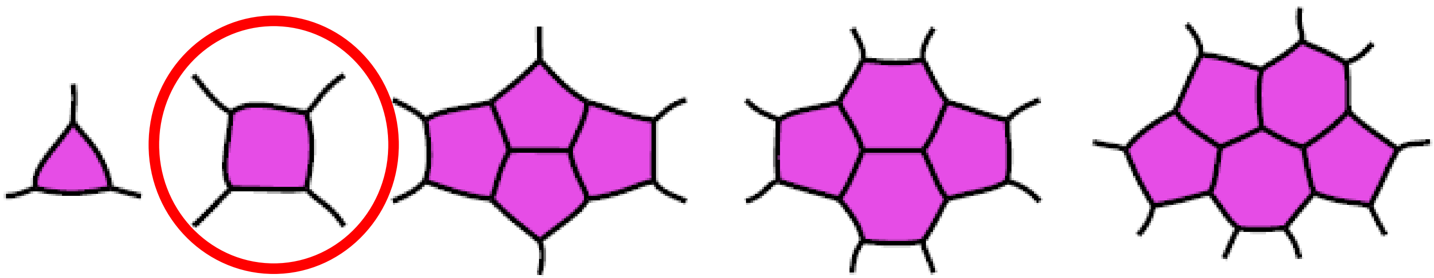
- 四色定理
  - Appel and Haken，1976



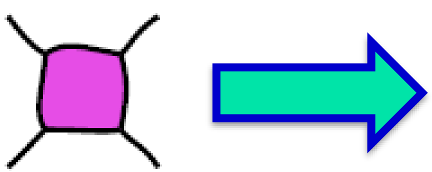


证明思路

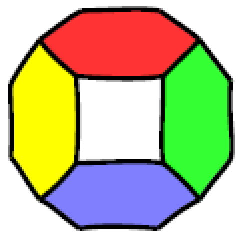
- 反证：考虑一个极小的不能四染色的图，首先证明这个图一定不包含以下结构

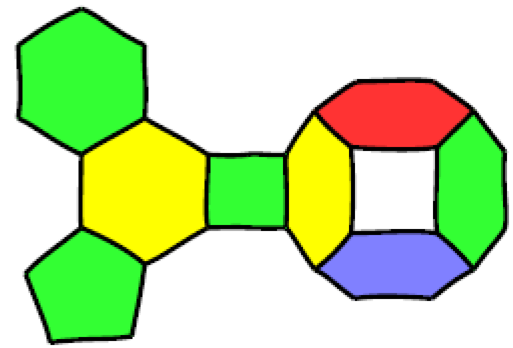


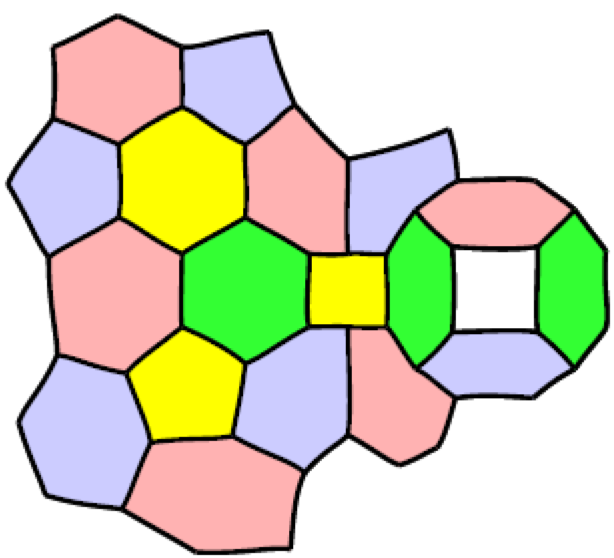
- 反证，如果这个图包含以下结构

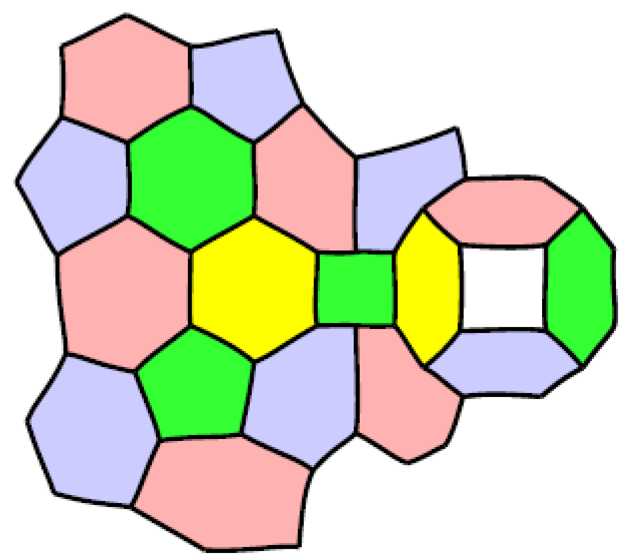


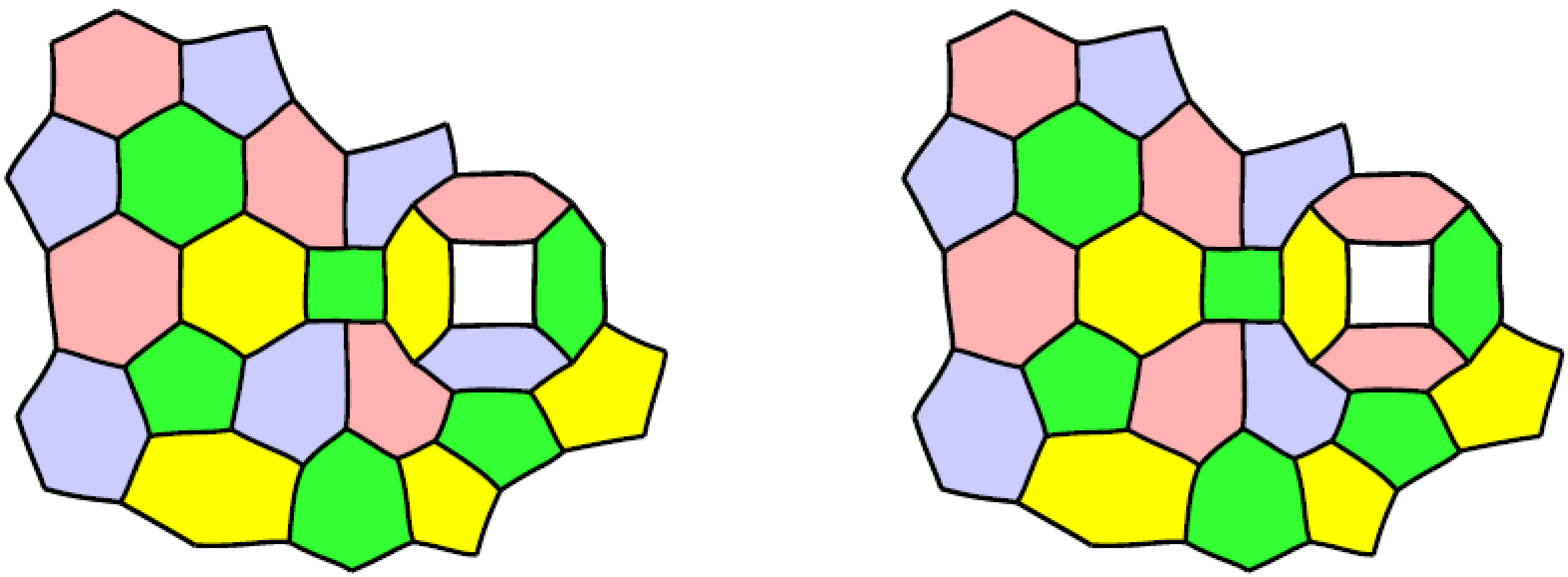
可以四染色

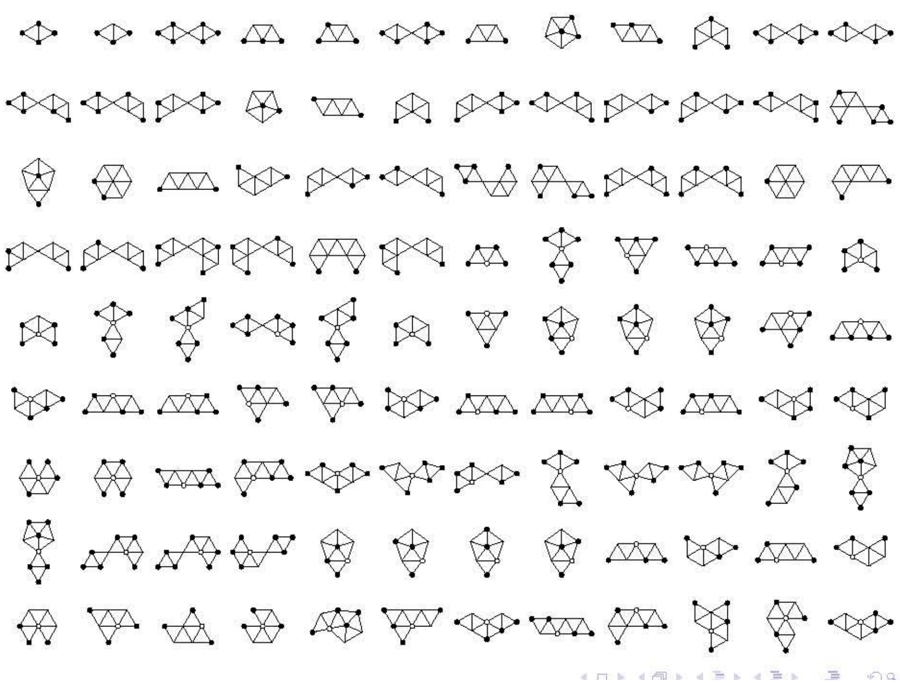
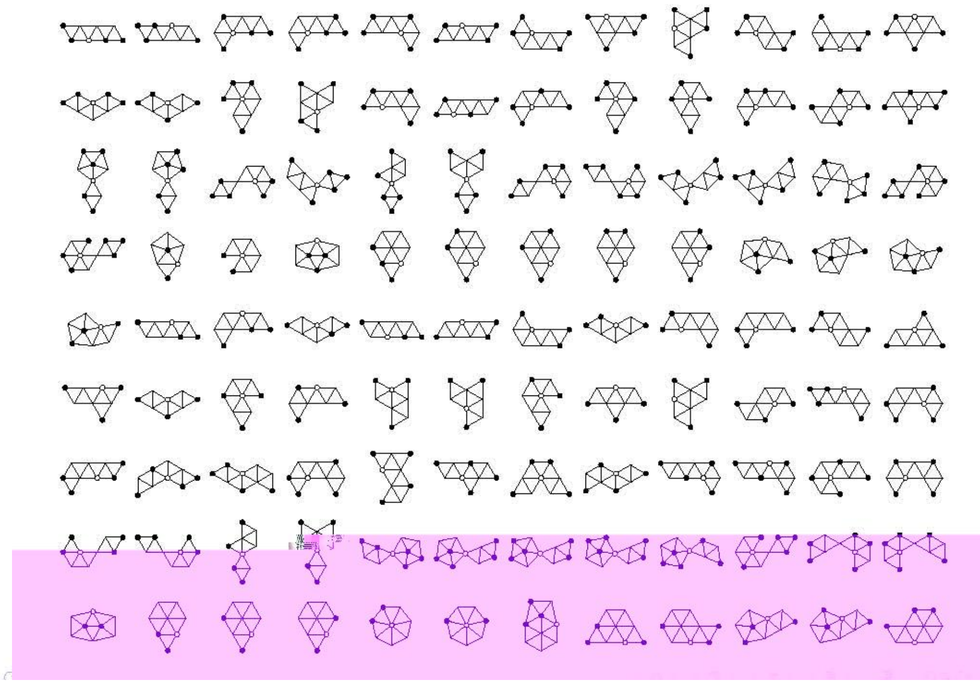
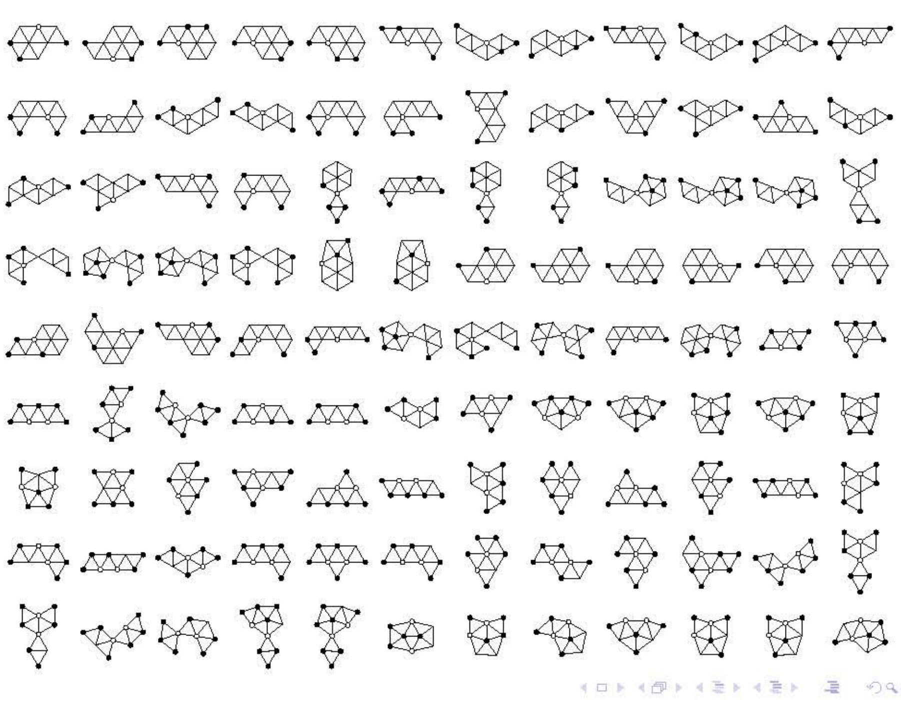
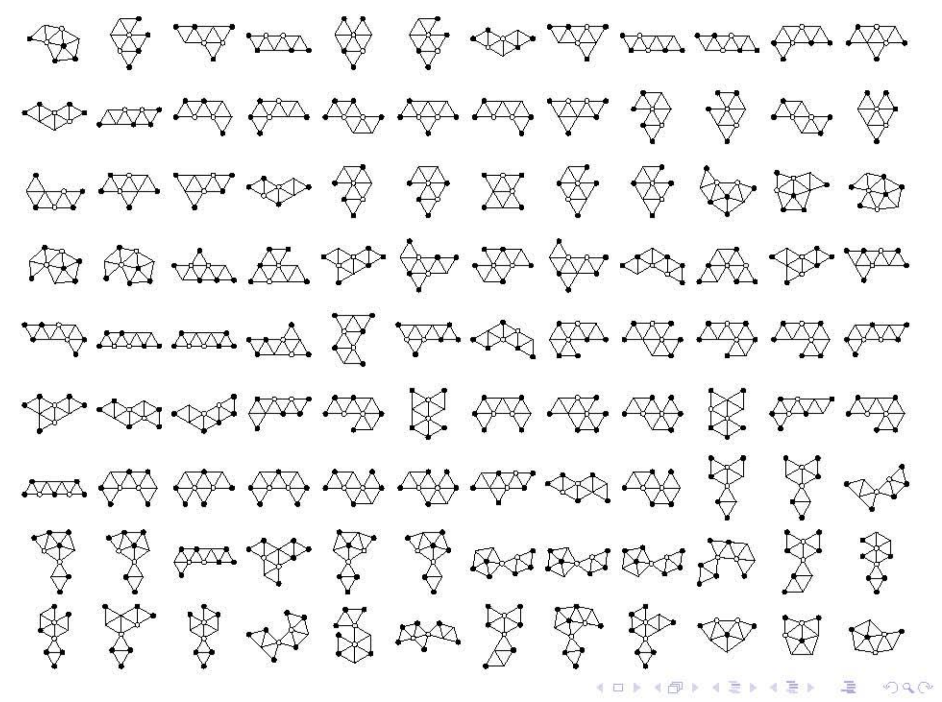










逻辑思维主要内容

- 图灵机模型
- 逻辑学基础
  - 布尔逻辑、真值表
  - 合取范式、析取范式
  - 谓词逻辑
  - 公理系统
- 思考题：S先生和P先生

思考题

- Mr. S, Mr. P都具有足够的推理能力。约翰教授写了两个整数M和N（3≤M,N≤100)，并把M+N的值告诉了S先生，把M*N的值告诉了P先生。约翰教授问S先生和P先生：“你们能从已知的信息确定M和N的值吗？”

  S先生:”我知道你不知道，我也不知道。”

  P先生:“现在我知道了。”

  S先生:“我也知道了。”

  请问，M和N是哪两个数？

谢谢！