组合数学作业六

题目*1-8*请于*1*月*13*号之前交至课程网站，**选做题**提交电子版至助教，并抄送给孙老师。
老师及助教邮箱：*sunxiaoming@ict.ac.cn*，*sunyuan2016@ict.ac.cn*，*zhangzhijie@ict.ac.cn*。

1 (*2*分) 证明：正整数p是素数当且仅当

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod p\text{。}$$

2 (*2*分) 证明：若a, b是正整数，p是素数，则$(\frac{a}{p})(\frac{b}{p}) = (\frac{ab}{p})$。

3 (*2*分) $m\ (\geq n+1)$个球放在n个盒子$B_1, B_2, \cdots, B_n$当中。现在把这m个球拿出来，重新放入另外$n+1$个新的盒子$B_1^*, B_2^*, \cdots, B_{n+1}^*$当中，且每个新的盒子中至少有一个球。证明，存在两个球，每个都满足如下性质：其所在的新盒子比其所在的旧盒子放入的球的个数更少。

4 (*2*分) p是奇素数，计算$(\frac{-3}{p})$。

5 (*4*分) 证明：$8k+1, 8k+5$型的素数有无穷多个。

6 (*3*分) 证明：$12k+7$型的素数有无穷多个。

7 (*3*分) 证明：

$$\prod_{\substack{p:\text{prime};\\ p\leq n}} p < 4^n\text{。}$$

8 (*2*分) 设集合$A, B \subseteq \mathbb{Z}$，定义集合$A+B = \{a+b | a\in A, b\in B\}$。证明：$|A+B| \geq |A| + |B| - 1$。

选做题（1）

利用欧几里得证明素数无穷的思想，对于哪些正整数a, b，能够证明存在无穷多的$k \in \mathbb{N}$使得$ak+b$为素数？

选做题（2）

给定正整数n，试确定最小的m，使得对任意平面上的整点集$P = \{(x_i, y_i) \in \mathbb{Z}^2 | i = 1, \cdots, m\}$，一定存在$Q \subseteq P$且$|Q| = n$，满足$Q$内所有整点的重心仍为整点，即$\left(\frac{1}{n}\sum_{x_i\in Q} x_i, \frac{1}{n}\sum_{y_i\in Q} y_i\right) \in \mathbb{Z}^2$。试把结论推广到三维的情形。