组合数学第三讲

授课时间: 2018年9月17日　授课教师: 孙晓明　记录人: 曹婕 许诺佳 杨雨晴

1 排列组合

1.1 圆排列和可重排列

定理 1. 将n个不同元素排列在一个圆周上，叫做这n个元素的圆排列。n个元素圆排列的数目是$(n-1)!$。

定理 2. 设n个元素中有a_1个x_1, a_2个$x_2, \cdots, a_k$个x_k，$a_1+a_2+\cdots+a_k=n$。则不同排列的数目等于

$$\frac{n!}{a_1!\,a_2!\cdots a_k!}=\frac{(a_1+a_2+\cdots a_k)!}{a_1!\,a_2!\cdots a_k!}。$$

为方便起见，可将上式记作

$$\binom{a_1+a_2+\cdots+a_k}{a_1,a_2,\cdots,a_k}。$$

作为一个特例，考虑$a\times x_1, b\times x_2$的全排列

$$\frac{(a+b)!}{a!\,b!}=\binom{a+b}{a,b}=\binom{a+b}{a},$$

因此我们既可以把$\binom{a+b}{a}$看成是从$(a+b)$个不同元素中不重复地取出a个元素的组合数，还可以看成是一个有两种类型的对象且它们的重复数分别是a和b的多重集合的排列个数。

1.2 二项式定理推广

回忆二项式定理

$$(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}y^i。$$

对于每一个正整数n，二项式定理给出$(x+y)^n$的公式，我们可以把它扩展得到k个实数的和的n次幂$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n$的公式，也就是下面的多项式公式。

定理 3 (多项式定理)**.** 设n是正整数。对于所有的$x_1, x_2, \cdots, x_k$，有

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n=\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n}\binom{n}{a_1,a_2,\cdots,a_k}x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_k^{a_k}。$$

证明　把$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n$用分配律将这个乘积完全展开，用这种方法得到的结果共有k^n项，而且每一项都可以写成$x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_k^{a_k}$的形式，其中$a_1,a_2,\cdots,a_k$是非负整数，其和为$n$。合并同类项后，考虑每个$x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_k^{a_k}$前面的系数。通过选择$n$个因子中的$a_1$个为$x_1$，剩下的$n-a_1$个因子中的$a_2$个为$x_2$，$\cdots$，这样一直做下去直到令剩下的$n-a_1-a_2-\cdots-a_{k-1}=a_k$个为$x_k$，最终得到$x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_k^{a_k}$项。根据乘法原理，项$x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_k^{a_k}$前面的系数等于

$$\binom{n}{a_1}\binom{n-a_1}{a_2}\cdots\binom{n-a_1-\cdots-a_{k-1}}{a_k}=\frac{n!}{a_1!\,a_2!\cdots a_k!}=\binom{n}{a_1,a_2,\cdots,a_k}。$$

到此，定理得证。 □

1.3 球-盒问题总结

设有m个小球，n个盒子，将小球放入盒子中，问有多少种放法。

解 分别考虑小球，盒子是否相同，有4种情况。

①小球不同，盒子不同
每个小球有n种选择，一共有n^m种放法。

②小球相同，盒子不同
设第i个盒子中放x_i个球，则这个问题的解的集合可以表示为

$$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m,\, x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0\},$$

即求方程$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$的非负整数解。令$y_i = x_i + 1,\ 1 \leq i \leq n$, 则有

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = m + n, \quad y_i \in \mathbb{N}^+。$$

(隔板法) 该问题等价于在$(m+n-1)$个空中，插入$(n-1)$个隔板，结果为$\binom{m+n-1}{n-1}$。

③小球不同，盒子相同
对球进行编号$1, 2, \cdots, m$，上述问题可描述为

$$\{1, 2, \cdots, m\} = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n,$$

其中$S_1, S_2, \cdots, S_n$互不相容且无序，求$\{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$可能的数目。

(集合分拆问题) 把一个有m个不同元素的集合分解成至多n个集合的不交并。

引理1. *第二类Stirling数*

$$S(m,n) = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^m$$

计数的是把p元素集合划分到k个不可区分的盒子且没有空盒子的划分个数。

当盒内小球数目无限制时，可以理解为有0个盒子为空，有1个盒子为空，$\cdots$，有$n-1$个盒子为空，放法数目为

$$\sum_{i=1}^{n} S(m,i) = S(m,1) + S(m,2) + \cdots + S(m,n)。$$

具体过程之后的课程中会讲到。

④小球相同，盒子相同
上述问题可描述为把正整数m分拆成至多n个数之和，求可能情况数。

引理2. *正整数n的一个分拆是把n表示成称为“部分”(part)的一个或多个正整数的无序和的一种表示，设p_n表示正整数n的不同分拆的数目，简单观察可知，p_n等于下面方程*

$$na_n + \cdots + 2a_2 + 1a_1 = n$$

的非负整数解$a_n, \cdots, a_2, a_1$的个数。

由分拆数序列生成函数的表达式

$$\sum_{i\geq 0} p_i x^i = \prod_{k\geq 0}(1-x^k)^{-1}$$

可知将m个不可区分的球放入n个不可区分的盒中，盒内小球数目无限制，放法数目为

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)}$$

幂级数表达式中x^m的系数。具体过程之后的课程中会讲到。

2 极值组合论

定义1. *集族(set system / set family)是有具有某种性质的一些集合所构成的集合，即“集合的集合”。常用花体字母如$\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{F}$等表示集族。*

记号

$$[n] := \{1,2,\cdots,n\}$$

$$2^{[n]} := \{S \mid S\subseteq [n]\}$$

2.1 Intersecting set system

设$\mathcal{F}\subseteq 2^{[n]}$。$\forall A,B\in\mathcal{F}, A\neq B\Rightarrow A\cap B\neq\emptyset$(即任何两个子集相交)。求$\max\{|\mathcal{F}|\}$。

解 $2^{[n]}$中的所有元素可划分成2^{n-1}组，每组由一个集合和它的补集组成。由于$\mathcal{F}$中$\forall A\neq B$, $A\cap B\neq\emptyset$, 同一组中的元素最多有1个在$\mathcal{F}$中，因此我们有$|\mathcal{F}|\leq 2^{n-1}$。下证$\exists\mathcal{F}$, $|\mathcal{F}|=2^{n-1}$。在每组中我们取包含元素1的那个集合加入，这样的子集共有2^{n-1}个，并且相互之间的交集显然包括1。

综上$\max\{|\mathcal{F}|\}=2^{n-1}$。

例1 设$\mathcal{F}\subseteq 2^{[n]}$。$\forall A,B\in\mathcal{F}, A\neq B\Rightarrow A\cap B=\emptyset$。求$\max\{|\mathcal{F}|\}$。

解 当$\mathcal{F}$中的元素为$\emptyset$或只含一个元素的集合时，$|\mathcal{F}|$最大。故$\max\{|\mathcal{F}|\}=n+1$。

2.2 Anti-Chain(反链)

定理 4. *（Sperner定理）设$\mathcal{F}\subseteq 2^{[n]}$。$\forall A,B\in\mathcal{F}, A\neq B\Rightarrow A\not\subseteq B$。则$\max\{|\mathcal{F}|\}=\binom{n}{\lceil\frac{n}{2}\rceil}$。*

本定理由Sperner于1928年提出，但其证明较为复杂繁琐。以下证明由三人Lubell (1966), Yamamoto (1954), Meshalkin (1963)各独立给出。

证明 设$\mathcal{F}$是反链，那么对$\forall A\in\mathcal{F}$，考虑一条从空集到A的子集链$\phi\subseteq A_1\subseteq A_2 ...\subseteq A_{|A|-1}\subseteq A$，其中$A_i$满足$|A_i|=i$。这种形式的不同子集链显然恰有$|A|!$条，对应于$A$中元素全排列。同理，从$A$到$[n]$的不同子集链有$(n-|A|)!$条。由乘法原理，从空集到$[n]$且经过$A$的子集链有$|A|!(n-|A|)!$条，将这种子集链构成的集合称为$S_A$。

由题目条件，一定有对$\forall A \neq B$, $S_A \cap S_B = \phi$。否则，存在一条子集链既经过A又经过B，得$A \subseteq B$或$B \subseteq A$，矛盾。又因为从$\emptyset$走到$[n]$共有 $n!$ 条路经，我们有

$$\therefore \sum_{A \in \mathcal{F}} |A|!\,(n-|A|)! \leq n! \Rightarrow \sum_{A \in \mathcal{F}} \frac{1}{\frac{n!}{|A|!\,(n-|A|)!}} \leq 1 \Rightarrow \sum_{A \in \mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \leq 1。$$

(最右侧的不等式又称为Lubell-Yamamoto-Meshalkin不等式)由二项式定理，我们有

$$\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \geq \binom{n}{|A|},$$

其中上取整$\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x\}$。
于是，

$$\frac{|\mathcal{F}|}{\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}} \leq \sum_{A \in \mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \leq 1 \Rightarrow |\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}。$$

下证

$$\exists \mathcal{F},\ |\mathcal{F}| = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}。$$

取$2^{[n]}$中所有长度为$\lceil \frac{n}{2} \rceil$的集合元素作为$\mathcal{F}$中的元素，此时$|\mathcal{F}| = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$。综上，

$$\max\{|\mathcal{F}|\} = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}。$$

□

例2 (Erdős-Ko-Rado定理) 设$\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$，满足:①$\forall A \neq B \in \mathcal{F}, A \cap B \neq \emptyset$； ②$\forall A \in \mathcal{F}, |A| = k$。则当$k > \frac{n}{2}$时，$\max\{|\mathcal{F}|\} = \binom{n}{k}$；当$k \leq \frac{n}{2}$时，$\max\{|\mathcal{F}|\} = \binom{n-1}{n-k}$。

这个定理最初由Erdős, Ko (柯召)和Rado于1961年合作证明，但解答较繁琐。以下证明来自于Katona （1972）。

证明 ①$k > \frac{n}{2}$时，$2^{[n]}$中任何长度为k的子集相交，故

$$\max\{|\mathcal{F}|\} = \binom{n}{k}。$$

②$k \leq \frac{n}{2}$时，有从$\mathcal{F}$到圆排列的映射$A \mapsto \pi$，其中集合$A \in \mathcal{F}$，圆排列π中属于A的k个元素排在一起，则$\mathcal{F}$中的每一个元素对应$k!(n-k)!$个圆排列。

反过来，由于

$$\forall A \neq B \in \mathcal{F}, A \cap B \neq \emptyset,$$

由这个性质可以得到每一个圆排列最多对应k个$\mathcal{F}$中元素。综合一下我们有

$$|\mathcal{F}|\, k!(n-k)! \leq k(n-1)!$$

$$\therefore |\mathcal{F}| \leq \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}$$

下证

$$\exists \mathcal{F},\ |\mathcal{F}| = \binom{n-1}{n-k}$$

取所有包含有元素 1 且长度为k的子集，共有$\binom{n-1}{k-1}$个。
综上，$k \leq \frac{n}{2}$时，

$$\max\{|\mathcal{F}|\} = \binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{n-k}。$$

$\square$