

## 组合数学作业七

题目1-8请于1月21号之前交至课程网站。**选做题**提交电子版至助教，并抄送给孙老师。

老师及助教邮箱：[sunxiaoming@ict.ac.cn](mailto:sunxiaoming@ict.ac.cn), [sunyuanyuan2016@ict.ac.cn](mailto:sunyuanyuan2016@ict.ac.cn), [zhangzhijie@ict.ac.cn](mailto:zhangzhijie@ict.ac.cn)。

1 (2分) 对于集合  $A, B \subseteq \mathbb{Z}_p$ , 定义  $A + B = \{a + b \pmod{p} | a \in A, b \in B\}$ 。请在  $|B| = 2$  的条件下, 证明  $|A + B| \geq \min\{|A| + |B| - 1, p\}$ 。

2 (2分) 证明: 对任意给定的52个整数, 存在两个整数, 要么两者的和能被100整除, 要么两者的差能被100整除。

3 (2分) 证明: 在  $n$  个人的集体中 ( $n \geq 2$ ), 一定存在两个人, 使得在余下的  $n - 2$  个人中, 至少存在  $(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)$  个人, 要么与这两人均认识, 要么与这两人均不相识。

4 (2分) 对6个顶点的完全图  $K_6$  的边作任意二染色, 证明存在两个单色三角形。

5  $R(m, n)$  和  $R(m, n, k)$  均表示Ramsey数, 证明:

a) (2分)  $R(3, 4) \leq 9$ ;

b) (2分)  $R(3, 4) > 8$ ;

c) (2分)  $R(3, 3, 3) \leq 17$ 。

6 (2分) 证明: 在单位圆内任取6个点, 必有两点距离小于等于1。

7 (2分) 证明: 对  $\{1, 2, \dots, 11\}$  做任意二染色, 必存在一个长为3的同色等差数列。

8 (2分) 证明: 对任意  $\alpha \in \mathbb{R}$  和  $n \in \mathbb{N}$ , 存在  $p, q \in \mathbb{N}$ , 使得  $1 \leq q \leq n$ , 且

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq}$$

### 选做题

给出Ramsey数  $R(n, n)$  的一个构造性下界 (要求这一下界大于  $(n - 1)^2 + 1$ )。