组合数学第八讲

授课时间: 2018年11月5日　授课教师: 孙晓明　记录人: 孙子豪　赵心培　魏旭晨

1　第一类斯特林数(Stirling number of first kind)

定义1. 令$S_1(n,k)$或$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$为第一类斯特林数，其表示1至$n$排列中，恰好含有$k$个圈(循环)的置换的数目(有的书中称其为无符号的第一类斯特林数)。

例1　第一类斯特林数的几个初始值：

对$S_1(n,1)$，其相当于1到n的圆排列的个数，故有：

$$S_1(n,1)=(n-1)!.$$

对$S_1(n,2)$，将其分割成两部分，长度分别为k与$n-k$，这两部分分别形成一个循环，同时，k元环与$n-k$元环无前后顺序。故有：

$$S_1(n,2)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(k-1)!(n-k-1)!.$$

对$S_1(n,n)$，显然只能构成恒等映射，故有：

$$S_1(n,n)=1.$$

对$S_1(n,n-1)$，里面只能含有一个长度为2的循环，故有：

$$S_1(n,n-1)=\binom{n}{2}.$$

对$S_1(n,n-2)$，里面或者含有两个长度为2的循环,或者含有一个长度为3的循环，故有：

$$S_1(n,n-2)=\binom{n}{3}\cdot 2!+\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}.$$

特别的，我们规定，$S_1(n,0)=\begin{cases} 0, & n\geq 1 \\ 1, & n=0. \end{cases}$

命题2. 对于第一类斯特林数，我们有如下递推公式：

$$S_1(n,k)=S_1(n-1,k-1)+(n-1)S_1(n-1,k).$$

证明　考虑数字"1"在排列中所属圈中的不同情形。

- 若"1"自己构成了一个自环，那么余下的$n-1$个数构成了$k-1$个圈，所构成的情形有$S_1(n-1,k-1)$种。
- 若"1"属于一个长度至少为2的圈，考虑从这个圈取出"1"后余下的方案数，应为$S_1(n-1,k)$种，而向其中重新插入"1"有$n-1$种方法，总方法数应为$(n-1)S_1(n-1,k)$种。

所以，以下递归公式成立:

$$S_1(n,k) = S_1(n-1,k-1) + (n-1)S_1(n-1,k).$$

□

对$x^{\overline{n}} = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$，可展开为以$x^i$为基的多项式，展开后$x^i$的系数即为第一类斯特林数$S_1(n,i)$，即有如下定理成立。

定理 3.

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} S_1(n,k)x^k.$$

证明 使用数学归纳法。

$n=0$时，$x^{\overline{0}} = 1 = S_1(0,0)\cdot x^0$，成立;

$n=1$时，$x^{\overline{1}} = x = S_1(1,1)x + S_1(1,0)$，成立;

设$n=m$时，$x^{\overline{m}} = \sum_{k=0}^{m} S_1(m,k)x^k$成立，现证明$n=m+1$时，$x^{\overline{m+1}} = \sum_{k=0}^{m+1} S_1(m+1,k)x^k$成立。

$$\begin{aligned}
x^{\overline{m+1}} &= (x+m)\sum_{k=0}^{m} S_1(m,k)x^k \\
&= \sum_{k=2}^{m+1} S_1(m,k-1)x^k + \sum_{k=1}^{m} mS_1(m,k)x^k \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} (S_1(m,k-1)x^k + mS_1(m,k))x^k \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} S_1(m+1,k)x^k \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} S_1(m+1,k)x^k.
\end{aligned}$$

定理得证。 □

定理 4. 对于$x^{\underline{n}} = x(x-1)\cdots(x-n+1)$，其系数满足以下关系式:

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+n} S_1(n,k)x^k.$$

2 第二类斯特林数(Stirling number of second kind)

定义5. 令$S_2(n,k)$或$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$为第二类斯特林数，其等于如下问题的方案数：对$1,2,3,\cdots,n$，将其划分为$k$个不相交的集合。

例2 第二类斯特林数的几个具体的值：

考虑$S_2(4,2)$,有{1}{2,3,4}，{2}{1,3,4}，{3}{1,2,4}，{4}{1,2,3}，{1,2}{3,4}，{1,3}{2,4}，{1,4}{2,3}，共7种，故$S_2(4,2)=7$。

易知：$S_2(n,1)=1, S_2(n,2)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}=2^{n-1}-1.$

特别地，我们规定：$S_2(n,0)=\begin{cases}0, & n\geq 1\\ 1, & n=0\end{cases}$.

命题6. 对于第二类斯特林数，我们有如下递推公式：

$$S_2(n,k)=S_2(n-1,k-1)+kS_2(n-1,k).$$

证明 考虑数字"1"所属集合的不同情形。

- 如果1单独一个集合，那么此时划分方法为$S_2(n-1,k-1)$种；
- 如果1与其他元素中的某几个在同一集合，此时可能的情形数有$kS_2(n-1,k)$；

因此，得到以下递推公式：

$$S_2(n,k)=S_2(n-1,k-1)+kS_2(n-1,k)$$

□

对x^n，可展开为以$x^{\underline{k}}$为基的多项式，展开后$x^{\underline{k}}$的系数即为第二类斯特林数$S_2(n,k)$，即有如下定理成立。

定理 7.

$$x^n=\sum_{k\geq 0}S_2(n,k)x^{\underline{k}}$$

.

证明 使用数学归纳法。

$n=1$时，$1=S_2(0,0)x^{\underline{0}}$;

$n=2$时，$x=S_2(1,1)x^{\underline{1}}+S_2(1,0)x^{\underline{0}}$;

设$n=m$时，$x^m=\sum_{k=0}^{m}S_2(m,k)x^{\underline{k}}$成立。现证明$n=m+1$时，$x^{m+1}=(x-k+k)\sum_{k=1}^{m}S_2(m,k)x^{\underline{k}}$。

$$\begin{aligned}
x^{m+1}&=(x-k+k)\sum_{k=1}^{m}S_2(m,k)x^{\underline{k}}\\
&=\sum_{k=1}^{m}S_2(m,k)x^{\underline{k+1}}+k\sum_{k=1}^{m}S_2(m,k)x^{\underline{k}}\\
&=\sum_{k=1}^{m+1}S_2(m,k-1)x^{\underline{k}}+\sum_{k=1}^{m+1}kS_2(m,k)x^{\underline{k}}\\
&=\sum_{k=1}^{m+1}S_2(m+1,k)x^{\underline{k}}\\
&=\sum_{k=0}^{m+1}S_2(m+1,k)x^{\underline{k}}
\end{aligned}$$

定理得证。 □

3 矩阵变换与第二类斯特林数的显式表示

可以将定理3的结论表示为如下的矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} x^{\underline{0}} \\ x^{\underline{1}} \\ \cdots \\ x^{\underline{n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \cdots & \\ \cdots & (-1)^{n+k}S_1(n,k) & \cdots \\ & \cdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ \cdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

同理，可以将定理7的结论表示为如下的矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ \cdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \cdots & \\ \cdots & S_2(n,k) & \cdots \\ & \cdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{\underline{0}} \\ x^{\underline{1}} \\ \cdots \\ x^{\underline{n}} \end{pmatrix}$$

由此立得：

$$\begin{pmatrix} & \cdots & \\ \cdots & (-1)^{n+k}S_1(n,k) & \cdots \\ & \cdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \cdots & \\ \cdots & S_2(n,k) & \cdots \\ & \cdots & \end{pmatrix} = I$$

亦即

$$\sum_{l=0}^{n}(-1)^{l+i}S_1(i,l)S_2(l,j) = \zeta_{ij},\ \forall 0 \le i,j \le n.$$

其中

$$\zeta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \ne j \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

作为对比，对于组合数我们有：

$$\begin{pmatrix} & \cdots & \\ \cdots & (-1)^{n+k}\binom{n}{k} & \cdots \\ & \cdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \cdots & \\ \cdots & \binom{n}{k} & \cdots \\ & \cdots & \end{pmatrix} = I$$

亦即

$$\sum_{l=0}^{n}(-1)^{l+i}\binom{i}{l}\binom{l}{j} = \zeta_{ij},\ \forall 0 \le i,j \le n.$$

现在我们考虑用矩阵形式求出$S_2(n,k)$的显式表达式。在定理7中，将$\{S_2(n,k)\}(0 \le k \le n)$视为一组基并带入$x = 0, 1, ..., n$，得

$$\begin{pmatrix} 0^n \\ 1^n \\ \cdots \\ n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \cdots & \\ \cdots & m^{\underline{k}} & \cdots \\ & \cdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_2(n,0) \\ S_2(n,1) \\ \cdots \\ S_2(n,n) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} & \cdots & \\ \cdots & \frac{m^{\underline{k}}}{k!} & \cdots \\ & \cdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{0!} & & & \\ & \frac{1}{1!} & & \\ & & \cdots & \\ & & & \frac{1}{n!} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} S_2(n,0) \\ S_2(n,1) \\ \cdots \\ S_2(n,n) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{0}{1} & \binom{0}{2} & \cdots \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & \\ \binom{2}{0} & & & \\ \cdots & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0!S_2(n,0) \\ 1!S_2(n,1) \\ \cdots \\ n!S_2(n,n) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0!S_2(n,0) \\ 1!S_2(n,1) \\ \cdots \\ n!S_2(n,n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{0}{1} & \binom{0}{2} & \cdots \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & \\ \binom{2}{0} & & & \\ \cdots & & & \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0^n \\ 1^n \\ \cdots \\ n^n \end{pmatrix}$$

也就是：

$$\sum_{j=0}^{n} j^n (-1)^{k+j} \binom{k}{j} = k! S_2(n,k)$$

$$S_2(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{k+j} \binom{k}{j} j^n$$

4 分拆数(Partition number)

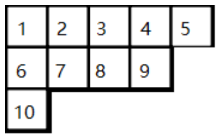
定义8. 令$P(n,k)$表示将n写成k个正整数的和的不同方案数。令$P(n) = \sum_{k=1}^{n} P(n,k)$表示将$n$写成若干个正整数的和的不同方案数，称作$n$的分拆数。

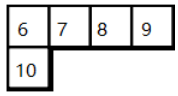
例3 $P(5,2) = 2$,因为$5 = 1+4 = 2+3$. 同理$P(5,1) = 1$, $P(5,3) = 2$, $P(5,4) = 1$, $P(5,5) = 1$, $P(5) = \sum_{k=1}^{5} P(5,k) = 7$.

定理 9. $P(2n,n) = P(n)$.

证明　求$P(2n,n)$，即求$x_1 \geq \cdots \geq x_n \geq 1$约束下不定方程$x_1+x_2+...+x_n=2n$的整数解的个数，对于$i=1,2,\ldots,n$定义新变量$y_i=x_i-1$，问题转化成求$y_1 \geq \cdots \geq y_n \geq 0$约束下$y_1+y_2+...+y_n=n$的整数解的个数，这一转化使变量可以为0，注意新方程的解的个数可以描述为将n拆分为不超过n个正整数的方案数，即$P(n)$。

以上过程亦可使用杨氏图表(Young Diagram)来形象描述。我们将满足$x_1 \geq \cdots \geq x_n \geq 1, x_1+x_2+...+x_n=2n$的解表示成$n$块方砖的摆放方式：第1列摆$x_1$块、第2列摆$x_2$块……以此类推。如下图左，此为$10=3+2+2+2+1$。接下来删除第一行，我们就得到了将$n$拆分为不超过$n$个正整数的一个方案。比如，建立$10=3+2+2+2+1$和$5=2+1+1+1$之间的双射可以用如下杨氏图表描述：





□