Homework 7

李昊宸

2018.12.29

1.

$|A+B| \geq |A|+1$:

设 B={a,b}，构建关于 A 的陪集 $A'=a+A$。假设

$|A+B|=|\{c+d(\bmod p) \mid c \in A, d \in B\}|=|A|$，那么就有 $A'=A+B$. 于是对于任意的

$e \in A$, 存在唯一 $f \in A$, 使 $e+a=f+b$, 即 $e=f+(b-a)$ 由于 A 选取的任意性，这意味着

b-a=0（mod p）于是与 B 为二元组矛盾!

2.

52 个整数，取出后两位做 51 个盒子

{00}，{01，99}，{02，98}，…，{50}

那么必有两个数落在同一个盒子里面

若这两个数尾数相同，则相减即被 100 整除

若尾数不同，则相加被 100 整除

3.

反证法：

如果假设错误，那么对于任意两个人，同时认识或不认识的人数至多有 $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2$ 个

设除了 A,B 外，恰好认识 A,B 中一人的有 k 个人，则 $n-2-k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2$, 即 $k \geq n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \geq \frac{n}{2}$

设 C 恰好认识 A,B 中一人，这样的 A,B 对有 C（n，2）个，记这样的（C,A,B）对有 S 个，那么 $S \geq \binom{n}{2} \frac{n}{2} = \frac{n^2(n-1)}{4}$

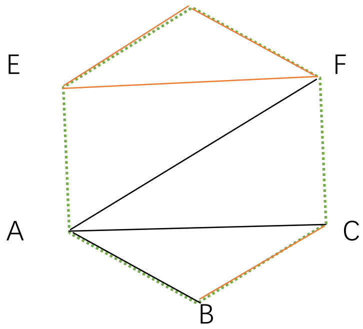
对于 C 而言，设其余 n-1 个人中 h 个认识 C，那么对于单个 C 有

$h(n-1-h) \leq (\frac{h+n-1+h}{2})^2 = \frac{(n-1)^2}{2}$

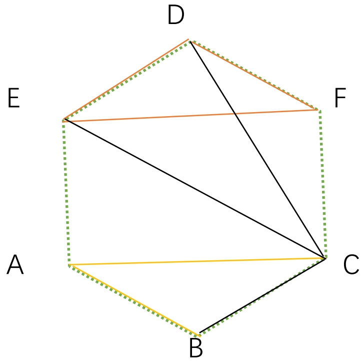
所以对于所有的 C，有 $S < n\frac{n\ (n-1)}{4} = \frac{n^2(n-1)}{4}$,矛盾!

于是假设正确。

4. D



不妨设 DEF 已经构成红色三角形
若定理错误，则 ABC 不能为红色或黑色
不妨设 AC,AB 为黑，BC 为红
考虑到 A 和 EDF 的关系，若不出现红三角，则
AE,AF,AD 中必有两个以上的黑，设 AF 为黑
那么 BF 和 CF 必须为红，否则 ACF 或 ABF 是黑三角
但是此时 BCF 是红三角。



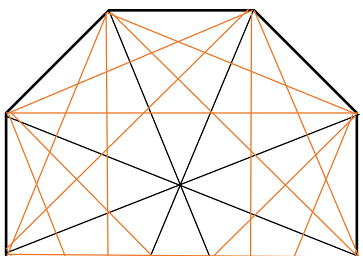
再考虑第二种情况，AC 和 AB 为红色
CD,CE,CF 至少有两个为黑，不妨设 CD,CE 为黑
那么 BE.BD 必须为红色，但此时 DEB 为红三角。

综上，定理正确。

5.
1）.R（3，4）
设有九个点 v1，…，v9
若对所有的点，d（v）=3，那么边数 E=3·9/2=13.5，不可能！
所以存在维数不是 3 的点
命题等价于证明图中若没有三个点的完全图（红色的三角形），则必有四个点的独立集（黑色的 K4）
假设途中没有三个点的红色三角形
一．d（vk）<3
　　则至少六个点与 vk 之间的边为黑色（不相邻）
　　由 R(3,3)=6 知，必有三个点之间的连线全为黑色（因假设没有红色三角形），于是这四个点构成独立集
二．d(vk)>3
　　则至少有四个点 a.b.c.d 与 vk 相邻（红色边）但是因为没有红色三角，所以 A,B,C,D 之间的连线全都是黑色，即四点独立集

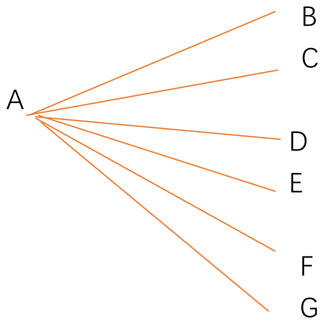
于是定理得证，也即 $R(3,4) \le 9$

2）.反例如图



3).R(3,3,3)

17 个点中，选出一个点，有 16 条边，所以其中至少有 6 条边同色



如果六个点中有一条边为红色，那么就有红色三角形

如果没有红色边，那么必有一个蓝色三角形或者黑色三角形

所以 17 个点是能满足的

6.

固定一个点作为圆上的基准点，1，2，3，4，5，6 作为序号

A,B,C,D,E,F,分别表示相邻两个角之间的读数

有 A+B+C+D+E+F=360°

若每个都大于 60°，则等式不成立!

所以存在等于或小于 60°的角，则这两个点之间距离小于 1.

7.

有一个颜色至少有 6 个点，不妨设为红色

实质上，定理应解释为对数轴上的点二染色，任意连续 11 个点有上述结论，于是不妨令 1 染为红色

记 ABCDE 为前一个红色减后一个红色的差值

有 A + B + .. + E=10

不能有两个相邻的相等，也不能有大于 3 的值

若有两个 3，则剩下的是 1 1 2

因为 1+2=3，所以 1 和 2 不能相邻.所以只有 1 3 2 3 1。但是 1 2 5 7 10 11 中有蓝色的 3 6 9

若有一个 3 有 1 2 2 2 只有 2 3 2 1 2 即 1 3 6 8 9 11.

但是 1 6 11 是等差数列。

若没有 3，则所有都是 2，显然

综上定理得证

8.

该定理即阿基米德定理

当 a 为整数时，显然当 pa=q 时等式恒成立

当 a 不为整数，我们取 a，2a，…,(n-1)a，再把[0,1) 区间分成 n 份，每份长 1/n

看这 n-1 个数，若有 1 个落在[0,1/n) 或[(n-2)/n,(n-1)/n)中，原式成立

若都不落在这两个区间，则由抽屉原理，必有两个落在同一区间，设为 ia，ja，

那么$|(i-j)a|<1/n$,于是命题成立。