模糊数学及计算机应用

何 清

Fuzzy Mathematics and Application to Computer Sciences

Qing He

heqing@ict.ac.cn

第17章 因素空间与决策

- 因素空间
- 反馈外延
- 概念内涵表示

因素定义

称$(U,V]$为一个左配对，如果U与V分别是由一些对象和由一些因素组成的集合，并且对任意的$u \in U$，

一切与u有关的因素都在V中。设$R \in P(U \times V)$，记

$D(f) \triangleq \{u \in U \mid R(u,f)=1\}, V(u) \triangleq \{f \in V \mid R(u,f)=1\}$,

因素$f \in V$可以视为一个映射，作用在一定对象

$u \in U$上可获得一定的状态$f(u)$

f：$D(f) \to X(f), u \to f(u)$,

这里$X(f) \triangleq \{f(u) \mid u \in U\}$叫做$f$的状态空间，

$X(f)$中的任何一个元素叫做f的一个状态。

因素空间定义

定义13.1 给定论域U，$F=\{f \mid f: U \to X(f)\}$是$U$上的一族映射，称$\{X(f)\}_{f \in F}$为$U$上的一个因素空间（*factors pace*）

，如果满足公理：

$(F_1)F=(F,\vee,\wedge,c,0,1)$构成一个完全的布尔代数；

$(F_2)\forall T \subseteq F$,若$(\forall s,t \in T)(s \wedge t=0)$,则

$\bigvee_{f \in T} f=\prod_{f \in T} f$,这里$\prod$ 表示映射的直积。F叫做因素集，

$f \in F$叫做因素，$X(f)$叫做f的状态空间,0叫做零因素，

1叫做全因素，$X(1)$叫做全空间。

因素空间特例

模式识别中的特征空间和参数空间

现代物理中的相空间

医疗诊断中的症候空间

概念的描述空间

假定要讨论一组概念□ $=\{\alpha，\beta，\gamma\}$，它们的论域记为U，取因素族V使U与V组成一个左配对$(U,V]$.再取因素集$F\subseteq V$,使得F对U是充足的，即满足条件

$$(\forall u_1,u_2\in U)(\exists f\in F)(f(u_1)\neq f(u_2))$$

这时，称三元组Z（U，□，F）或$(U,$□$|,\{X(f)\}_{(f\in F)})$为□ 的一个描述空间。

概念的表示

给定一个描述空间$(U,□,F)$，任取一个概念$\alpha\in□$，

α在U中的外延是U上的一个模糊集$\tilde{A}\in F(U)$.对于

每个状态空间$X(f)$都叫做表现论域，$X(1)$叫做完全表现

论域，实际上，U上的一个因素空间$\{X(f)\}_{f\in F}$

就是□ 的表现论域族。

概念的表现外延

定义13.2 给定描述空间（U，□，F），$\alpha\in$□，其外延为$\tilde{A}\in F(U), \forall f\in F$, 记

$$f(\tilde{A}): X(f)\to[0,1],\ x\mapsto f(\tilde{A})(x) \,□\, \bigvee_{f(u)=x}\tilde{A}(u)$$

$f(\tilde{A})$是表现论域$X(f)$的$Fuzzy$集，即$f(\tilde{A})\in F(X(f))$，称之为概念α在表现论域$X(f)$中的表现外延。

定义13.3. 给定描述空间$(U,□,F),\alpha\in□, f\in F$.

已知概念α在表现论域$X(f)$中的表现外延$\tilde{B}(f)$,

$$f^{-1}(\tilde{B}(f)): U\to[0,1], u\mapsto f^{-1}(\tilde{B}(f))(u) \,□\, \tilde{B}(f)(f(u))$$

$f^{-1}(\tilde{B}(f))\in F(U)$,称为概念$\alpha$关于因素$f$的反馈外延。

概念的表现外延

定义13.4 给定描述空间$(U, □, F), \alpha \in □, \tilde{A}$为$\alpha$的外延，

$G \subseteq F, G$中元素相互独立，$A[G] □ \bigcap\limits_{f \in G} f^{-1}(f(\tilde{A}))$

称$A[G]$为A的G反馈外延的包络，

简记G-包络；特别地，当F为原子因素集时，称$A[\pi]$为

A的原子反馈外延的闭包，简记π-包络。

决策

U – 一组策略，称为策略集；

B - 与策略有关的概念，即策略的分类命名，

如"上策""中策""下策"

F - 与策略有关的因素集。

决策问题相当于在描述空间中寻找B中概念的外延。

要想求出这些外延，只要求出它们的反馈外延。

而这些反馈外延又可由G - 包络(或π - 闭包)来实现。

我们称这样的决策方法为基于反馈外延的决策方法，

简称DFE决策方法。

排序型DFE决策

□ $=\{\alpha\}$为单点集，比如$\alpha=$"优策略"。若求出G-包络$A[G]$（或）π-闭包$A[\pi]$,则$A[G]$：$U\rightarrow[0,1]$便把U中诸策略在[0,1]中作全序排列，从而确定最优策略。

竞争型DFE决策

此时，$U=\{u\}$为单点集，□ 至少包含两个概念，

比如□ $=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\},k\ge 2,$

其外延分别为$\overset{\frown}{A}_i,1\le i\le k),$

则可用最大隶属度原则判断对象u相对隶属于$\tilde{A}_i(1\le i\le k)$中的某一个。

竞争排序型DFE决策

此时，U与□ 均非单点集，比如$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}, m\ge 2,$
□ $=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}, k\ge 2.$
先用"竞争"法将U分类，如$u_{i_1},u_{i_2},u_{i_p}, p\le m,$归属概念$\alpha_q,$
$q\le k.$再将u_{i_1},u_{i_2},u_{i_p}用G-包络$A_q[G]$（或π-闭包$A_q[\pi]$）排序，
确定关于α_q的最佳策略，如此，对每个概念$\alpha_j, 1\le j\le k,$
均有一个最佳策略，根据需要选择其一或某几个策略。

排序型DFE决策

关于DFE决策的实际操作，我们总结出以下几个步骤。

(1) 设定策略集$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$,根据实际情况，它可以是一组策略，也可以是一类具有某种含义的对象。

(2)确定□ $=\{\alpha\}$中的概念α，即给其命名，如"优策略"，它以U为论域。

(3)选定与U有关的原子因素族$\pi=\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$，并且确定它们的状态空间$X(f_j),\ j=1,2,3,\cdots,n.$

(4)置$F=P(\pi),\vee$ □ $\cup,\wedge$ □ $\cap,c$ □ $\backslash,0$ □ $\phi,1$ □ π，则$(F,\vee,\wedge,c,0,1)$做成一个完全的布尔代数，从而(U，□，F)构成一个描述空间。

(5)采用一定的方法(如集值统计)做出α在诸表现论域$X(f_j)\ j=1,2,3,\cdots,n$中的表现外延$\tilde{B}(f_j),\ j=1,2,3,\cdots,n.$

排序型DFE决策

取适当的n维t-模$T_n \in T(n)$,由T_n和诸$\tilde{B}(f_i)$来构筑全因素表现论域

(即全空间)$X(1)$中的表现外延$\tilde{B}(1)$

$\tilde{B}(1)(x_1, x_2, \cdots, x_n) \triangleq T_n(\tilde{B}(f_1)(x_1), \cdots, \tilde{B}(f_n)(x_n)).$

(7)对每个原子因素$f_j\,(j=1,2,3,\cdots,n)$,确定关于诸策略的状态

$f_j(u_i), i=1,2,3,\cdots,m,\ j=1,2,3,\cdots,n$

于是得到全因素1关于诸策略的状态

$1(u_i)=(f_1(u_i), f_2(u_i),\cdots, f_n(u_i)), i=1,2,3,\cdots,m.$

1是向量值映射。

排序型DFE决策

(8)确定概念α的反馈外延$1^{(-1)}(\tilde{B}(1))$,将α的外延近似地取为$1^{(-1)}(\tilde{B}(1))$,

于是对任何$u_i \in U$,便有

$$\tilde{A}(u_i) \approx (1^{(-1)}(\tilde{B}(1))(u_i) = \tilde{B}(1)(1(u_i))$$

$$= \tilde{B}(1)(f_1(u_i), f_2(u_i), \cdots, f_n(u_i))$$

$$= T_n(\tilde{B}(f_1)(f_1(u_\mathrm{i})), \tilde{B}(f_2)(f_2(u_i)) \cdots \tilde{B}(f_\mathrm{n})(f_\mathrm{n}(u_i)))$$

按最大隶属度原则找出最优策略。

人才选优问题

考虑在三个"优秀学生"候选人张三、李四、王五中决定。

(1)取u_1 = 张三，u_2 = 李四，u_3 = 王五，于是$U = \{u_1, u_2, u_3\}$;

(2)设α = "优秀学生"，则□ $= \{\alpha\} =$ {优秀学生};

(3)设f_1 = 数学, f_2 = 物理，f_3 = 化学，f_4 = 外语，取$\pi = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$;

令$X(f_j) = [0,100],\ j = 1,2,3,4$;

(4)置$F = P(\pi)$,（U，□，F）构成描述空间;

(5)对于$j = 1,2,3,4$, 取

$$B(f_j)(x) = \begin{cases} 1, & 90 \le x \le 100 \\ \dfrac{x-80}{10}, & 80 \le x \le 90 \\ 0, & 0 \le x \le 80 \end{cases}$$

(6)取4维t – 模为乘法算子$\prod \in T(4)$

人才选优问题

$$\prod(x_1,x_2,x_3,x_4)=\prod_{j=1}^{4}x_j=x_1x_2x_3x_4$$

从而有$\tilde{B}(1)(x_1,x_2,x_3,x_4)$

$$=\prod(\tilde{B}(f_1)(x_1),\tilde{B}(f_2)(x_2),\tilde{B}(f_3)(x_3),\tilde{B}(f_4)(x_4))$$

$$=\tilde{B}(f_1)(x_1)\cdot\tilde{B}(f_2)(x_2)\cdot\tilde{B}(f_3)(x_3)\cdot\tilde{B}(f_4)(x_4)$$

(7)假定u_1,u_2,u_3的学习成绩如下表所示：

人才选优问题

	数学	物理	化学	外语
张三	85	91	96	92
李四	97	89	94	90
王五	90	93	87	98

人才选优问题

	f1	f2	f3	f4
u1	0.5	1	1	1
u2	1	0.9	1	1
u3	1	1	0.7	1

人才选优问题

$$\tilde{B}(f_j)(f_j(u_i))$$

$$1(u_1)=(0.5,1,1,1),1(u_2)=(1,0.9,1,1),1(u_3)=(1,1,0.7,1)$$

（8）计算$\tilde{A}(u_i), i=1,2,3$

$$\tilde{A}(u_1)\approx\tilde{B}(1)(1(u_1))=\tilde{B}(1)(f_1(u_1),f_2(u_1),f_3(u_1),f_4(u_1))$$

$$=\tilde{B}(f_1)\left(f_1(u_1)\right)\cdot\tilde{B}(f_2)\left(f_2(u_2)\right)\cdot\tilde{B}(f_3)\left(f_3(u_3)\right)\cdot\tilde{B}(f_4)\left(u_4\right)$$

$$=0.5\times1\times1\times1=0.5$$

$\tilde{A}(u_2)\approx0.9, \tilde{A}(u_3)\approx0.7, u_2$为优秀。

欢迎提问！