组合数学第二讲

授课时间: 2018年9月10日　授课教师: 孙晓明　　记录人:　张博源　姜小平

1　思考题: 财产分配

一个富翁有两个儿子，富翁希望能公平的将其所有资产分给两个儿子，问存不存在一种分配使得其所有亲戚认为分配是公平的？若存在，请给出。

问题的数学描述：已知f_1,f_2,...,f_n为n个概率密度函数，即对于所有的$1 \le i \le n$满足

$$\int_0^1 f_i(x)\mathrm{d}x = 1$$

且

$$\forall x \in [0,1] : f_i(x) \ge 0。$$

a. 当$n = 2$时，是否存在一个$[0,1]$的划分(A,B)，使得$A \cup B = [0,1]$且$A \cap B = \emptyset$，对$\forall 1 \le i \le n$满足

$$\int_A f_i(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}?$$

b. 当n取大于2的任意正整数时，上题结论是否依然成立？

解　当$n = 2$时，有如下证明。记$a \in [0,1]$满足$\int_0^a f(x)\,dx = \frac{1}{2}$, 则$\int_a^1 f(x)\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$。定义函数$p : [0,a] \to [a,1]$，满足$\int_x^{p(x)} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$。则$p(0) = a$，$p(a) = 1$。定义函数$q : [0,a] \to [0,1]$，满足$q(x) = \int_x^{p(x)} g(x)\,dx = \frac{1}{2}$。由积分的连续性可知，$q(x)$在$[0,a]$上连续。若$q(0) = q(a) = \frac{1}{2}$，则定理证毕。因此可以假定$q(0)$和$q(a)$一个大于$\frac{1}{2}$，一个小于$\frac{1}{2}$。由连续函数的介值定理知，存在$x_0$使得$q(x_0) = \frac{1}{2}$。取$A = [x_0, p(x_0)]$，则有$\int_A f(x)\,dx = \int_A g(x)\,dx = \frac{1}{2}$。

2　斯特林数

定义 1. 对任意实数$x \in \mathbb{R}$和非负整数$m \in \mathbb{N}$，定义x的升m次阶乘如下，

$$x^{\overline{m}} = x(x+1)\cdots(x+m-1)。$$

其中，定义$x^{\overline{0}} = 1$。

作业中已经证明，$\{1, x^{\underline{1}}, \cdots, x^{\underline{n}}, \cdots\}$构成多项式环的一组基。类似地，可以证明$\{1, x^{\overline{1}}, \cdots, x^{\overline{n}}, \cdots\}$也是一组基。我们知道一组基可以表示为另一组基的线性组合。考虑线性组合的系数，有如下定义：

定义 2 (第一类斯特林数)**.** 将$x^{\overline{n}}$表示为$\{1, x, \cdots, x^n\}$的线性组合，有

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k \ge 0} a_{n,k} x^k, n \ge 0。$$

其中系数$a_{n,k}$称为第一类斯特林数（*Stirling Numbers of the first kind*）。

定义 3 (第二类斯特林数)**.** 将x^n表示为$\{1, x^{\underline{1}}, \cdots, x^{\underline{n}}\}$的线性组合，有

$$x^n = \sum_{k \ge 0} b_{n,k} x^{\underline{k}}, n \ge 0。$$

其中系数$b_{n,k}$称为第二类斯特林数（*Stirling Numbers of the second kind*）。

后续课程还会专门介绍斯特林数。

3 斯特林公式

定理 4 (斯特林公式).

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n 。$$

证明

$$\begin{aligned}
\ln(n!) &= \sum_{i=1}^{n}\ln i \\
&= \int_1^{n+1}\ln x - \sum_{i=1}^{n}\left(\int_i^{i+1}\ln x - \ln i\right) \\
&= ((n+1)\ln(n+1)-n) - \sum_{i=1}^{n}(((i+1)\ln(i+1)-(i+1)) - (i\ln i - i) - \ln i) \\
&= ((n+1)\ln(n+1)-n) - \sum_{i=1}^{n}\left((i+1)\ln\left(1+\frac{1}{i}\right)-1\right) \\
&= ((n+1)\ln(n+1)-n) - \sum_{i=1}^{n}\left((i+1)\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{2i^2}+o\left(\frac{1}{i^2}\right)\right)-1\right) \\
&= ((n+1)\ln(n+1)-n) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2i}+o\left(\frac{1}{i}\right)\right) \\
&= (n+1)\ln n - n - \frac{1}{2}\ln n + O(1) \\
&= (n+\frac{1}{2})\ln n - n + O(1)。
\end{aligned}$$

对式子两边取指数可得，$n! = O(\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n)$。 □

4 斯特林公式的应用

例 1 现有一枚质地均匀的硬币，抛掷后得到正面与反面的概率相等。求抛掷n次硬币后（n为偶数），正面朝上的次数为$n/2$的概率。

解 记抛掷n次硬币后，正面朝上的次数为X。根据二项分布的性质和斯特林公式，

$$\begin{aligned}
\Pr(X=\frac{n}{2}) &= \binom{n}{n/2}\left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \frac{n!}{2^n(n/2)!(n/2)!} \\
&\sim \frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n}{\pi n\,(n/(2e))^n} \\
&\sim 1/\sqrt{n}。
\end{aligned}$$

事实上，存在更一般的结论：可以证明，存在某个常数$c>0$，使得$x\in[\frac{n}{2}-c\sqrt{n},\frac{n}{2}+c\sqrt{n}]$以不小于0.9的概率成立。

5 整值多项式

定理 5. *给定d次多项式$P(x)$，如下性质等价：*

1. $\forall x \in \mathbb{Z}, P(x) \in \mathbb{Z}$;
2. $P(0), P(1), \cdots, P(d) \in \mathbb{Z}$;
3. 把$P(x)$表示为如下形式时，

$$P(x) = a_d\binom{x}{d} + \cdots + a_1\binom{x}{1} + a_0\binom{x}{0},$$

$a_d, \cdots, a_1, a_0$均为整数。

证明 1) $\Rightarrow$ 2)是显然的。

2) $\Rightarrow$ 3)。使用数学归纳法。$k=0$时，$P(0) = a_0\binom{0}{0} = a_0 \in \mathbb{Z}$。假设$a_0, a_1, \cdots, a_{k-1} \in \mathbb{Z}$,注意到

$$P(k) = a_k\binom{k}{k} + a_{k-1}\binom{k}{k-1} + \ldots + a_0\binom{k}{0} = a_k + ka_{k-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{Z},$$

可知$a_k \in \mathbb{Z}$。因此，$a_0, a_1, \cdots, a_d \in \mathbb{Z}$得证。

3) $\Rightarrow$ 1)。由于$x \in \mathbb{Z}$时，$\binom{x}{k} \in \mathbb{Z}$，$k = 0, 1, \cdots, d$。又由$a_0, a_1, \cdots, a_d \in \mathbb{Z}$，可知$P(x) \in \mathbb{Z}$。 □

推论 6. *设d次多项式$P(x)$满足$P(1), P(2), \cdots, P(d+1) \in \mathbb{Z}$，则$\forall x \in \mathbb{Z}$，$P(x) \in \mathbb{Z}$。*

证明 [*法一*] 定义多项式$Q(x) = P(x+1)$，则$Q(0), Q(1), \cdots, Q(d) \in \mathbb{Z}$。根据定理5，$\forall x \in \mathbb{Z}$，$Q(x) \in \mathbb{Z}$。因此$\forall x \in \mathbb{Z}$，$P(x) = Q(x-1) \in \mathbb{Z}$。注意这一方法可以用于证明，对任意$k \in \mathbb{Z}$，若$d$次多项式$P(x)$满足$P(k), P(k+1), \cdots, P(k+d) \in \mathbb{Z}$，则$\forall x \in \mathbb{Z}$，$P(x) \in \mathbb{Z}$。 □

[*法二*] 设$P(x) = a_d\binom{x}{d} + \cdots + a_1\binom{x}{1} + a_0\binom{x}{0}$。根据定理5，只需证明$a_0, a_1, \cdots, a_d \in \mathbb{Z}$。把$x = 1, \cdots, d+1$代入$P(x)$，得到如下线性方程组,

$$\begin{bmatrix} \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{d+1}{0} & \binom{d+1}{1} & \binom{d+1}{2} & \cdots & \binom{d+1}{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(1) \\ P(2) \\ \vdots \\ P(d+1) \end{bmatrix}。$$

记方程组左边的矩阵为A。若能证明$A^{-1} \in \mathbb{Z}^{(d+1)\times(d+1)}$，则$a_0, a_1, \cdots, a_d \in \mathbb{Z}$得证。

事实上，对$(1+x), (1+x)^2, \cdots, (1+x)^{d+1}$使用二项式定理展开，可知如下线性方程组恒成立，

$$\begin{bmatrix} \binom{0}{0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{d+1}{0} & \binom{d+1}{1} & \binom{d+1}{2} & \cdots & \binom{d+1}{d+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^d \\ x^{d+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+x \\ (1+x)^2 \\ \vdots \\ (1+x)^{d+1} \end{bmatrix}。$$

记上式左边的矩阵为B。注意到，$x^k = (x+1-1)^k = \sum_{i\geq 0}\binom{k}{i}(-1)^{k-i}(x+1)^i$，因此有

$$\begin{bmatrix} \binom{0}{0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{2}{0} & -\binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{d+1}\binom{d+1}{0} & (-1)^{d}\binom{d+1}{1} & (-1)^{d-1}\binom{d+1}{2} & \cdots & \binom{d+1}{d+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1+x \\ (1+x)^2 \\ \vdots \\ (1+x)^{d+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^d \\ x^{d+1} \end{bmatrix}。$$

记上式左边的矩阵为C。由线性代数的知识可知，$BC = I$，即$C = B^{-1}$。注意到A是B的子矩阵，且B^{-1}的元素均为整数，由此可知A^{-1}的元素也均为整数。 □

两种方法本质上是一样的。虽然后一种方法计算上更加繁琐，但它的处理手法仍有可借鉴之处。特别地，将$BC = I$写成方程组的形式，可以得到一系列关于组合数的恒等式，有兴趣的同学可以计算看看。