第二章　　习题课

一、重点与难点

二、主要内容

三、典型例题

第二章　　习题课

随机事件 → 随机变量

样本空间；集合

例：{至少取出2个黑球}

实数；随机变量取值刻画随机事件

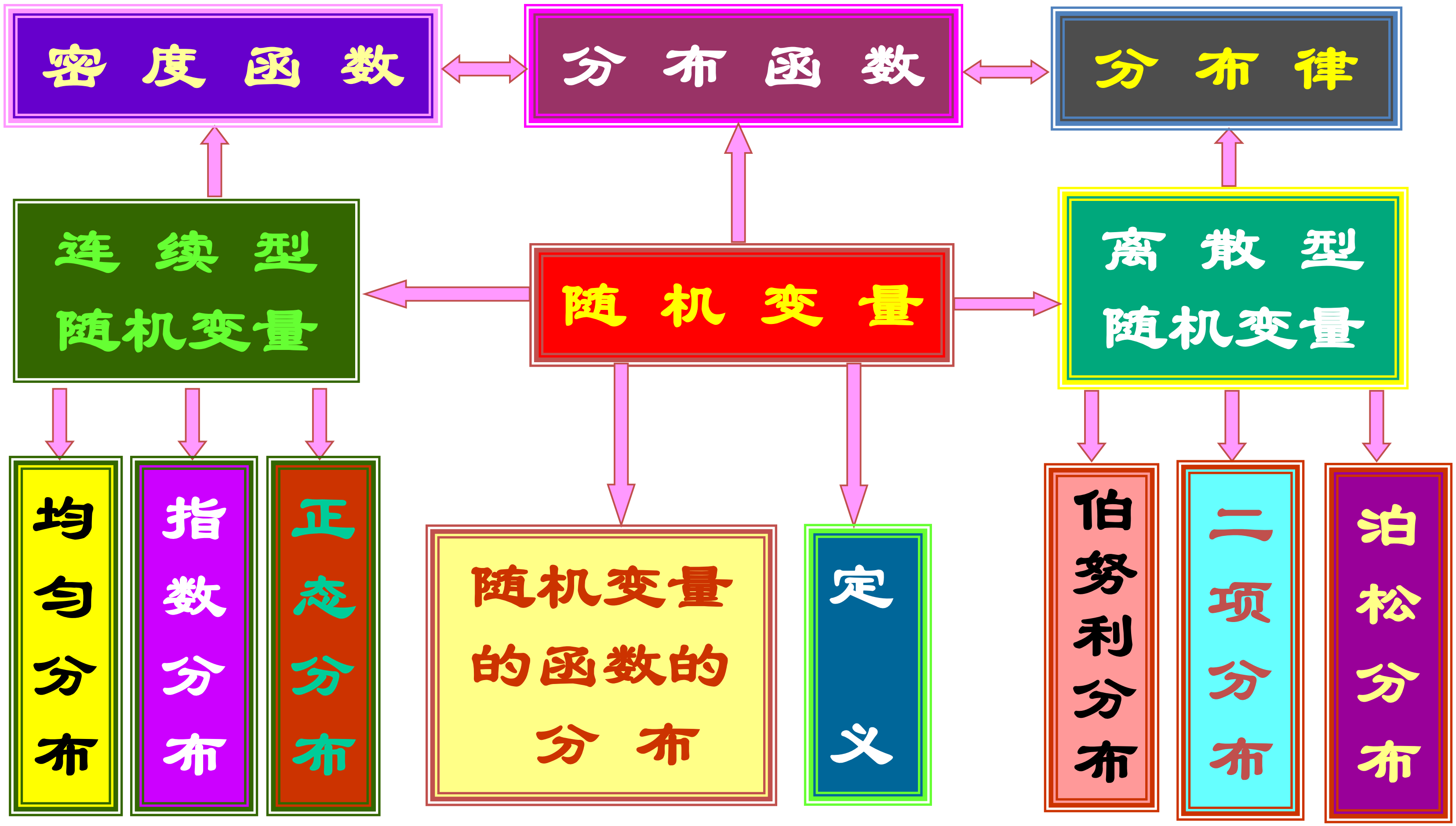
例：{X>=2}

第二章　习题课

- 第二章：随机变量及其分布
  - §1 随机变量
  - §2 离散型随机变量的概率分布
  - §3 随机变量的分布函数
  - §4 连续型随机变量及其概率密度
  - §5 随机变量函数的分布

第二章　　习题课

二、主要内容



第二章　习题课

1. 了解随机变量的概念，会用随机变量表示随机事件。
2. 理解分布函数定义及性质，会利用分布函数表示事件概率。
3. 理解离散型随机变量及其分布律的定义、性质，会求离散型随机变量的分布律及分布函数，掌握常见的离散型随机变量分布：伯努利分布、二项分布、泊松分布、几何分布、超几何分布。
4. 理解连续型随机变量及概率密度的定义、性质，掌握概率密度与分布函数之间关系及其运算，熟悉常见的连续型随机变量分布：均匀分布、指数分布、正态分布。
5. 了解随机变量函数概念，会求随机变量的简单函数的分布。

第二章　　习题课

1 随机变量

定义：　设随机试验的样本空间是$A = \{\omega\}$. $X = X(\omega)$是定义在样本空间S上的实值单值函数。称$X = X(\omega)$ 为随机变量

性质(1) 随机变量与普通的函数不同

随机变量是一个函数 ,但它与普通的函数有着本质的差别 ,普通函数是定义在实数轴上的,而随机变量是定义在样本空间上的 (样本空间的元素不一定是实数).

性质(2) 随机变量的取值具有一定的概率规律

随机变量随着试验的结果不同而取不同的值,由于试验的各个结果的出现具有一定的概率,因此随机变量的取值也有一定的概率规律. 试验前可以知道随机变量的所有结果，但不确定取什么值。

性质(3) 随机变量与随机事件的关系

随机事件包容在随机变量这个范围更广的概念之内.或者说：随机事件是从静态的观点来研究随机现象,而随机变量则是从动态的观点来研究随机现象.

第二章　　习题课

2.1 离散型随机变量的分布律

定义： 设离散型随机变量X所有可能取的值为 x_k $(k=1,2,\cdots)$, X 取各个可能值的概率，即事件 $\{X=x_k\}$ 的概率, 为

$$P\{X=x_k\}=p_k, \quad k=1,2,\cdots.$$

称此为离散型随机变量 X 的分布律.

性质：

1. $p_k \geq 0, \quad k=1,2,\cdots;$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1;$

3. 分布律形式上可记为

X	x_1	x_2	$\cdots$	$x_n \cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	$p_n \cdots$

2.2 常用的离散型随机变量

1) Bernoulli分布

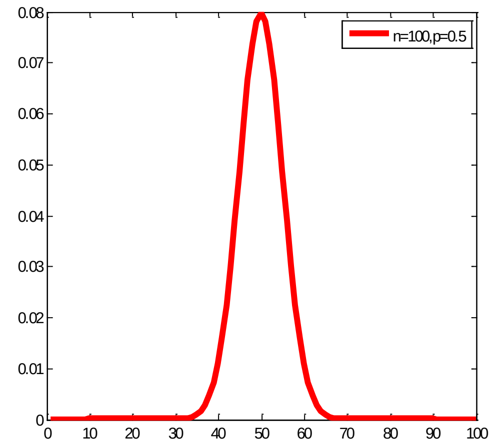
如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=0\}=1-p=q\ ,\qquad P\{X=1\}=p$$

X	0	1
P	$1-p$	p

则称随机变量 X 服从参数为 p 的 Bernoulli分布。

记作　$X \sim B(1,\quad p)$　（其中 $0 \le p \le 1$ 为参数）



2.2 常用的离散型随机变量

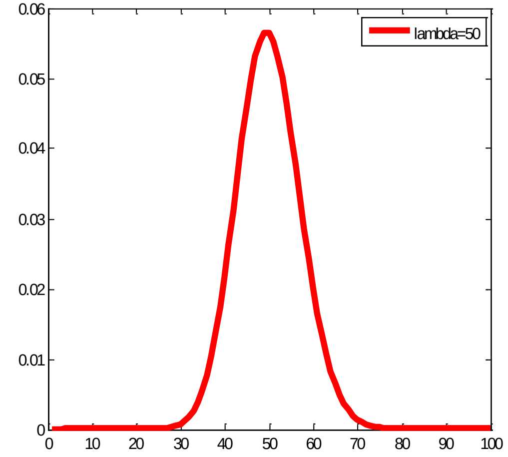
2）二项分布

如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k=0, 1, \cdots, n)$$

则称随机变量X服从参数为(n, p)的二项分布，记作$X \sim B(n, p)$.

（其中n为自然数， $0 \le p \le 1$ 为参数）



2.2 常用的离散型随机变量

3）Poisson 分布

如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^{k}}{k!}e^{-\lambda}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

(其中$\lambda>0$为常数)

则称随机变量 X 服从参数为 λ 的$Poisson$ 分布。

记为 $X\sim P(\lambda)$.

Poisson定理

设随机变量X_n(n=1,2,...)服从二项分布，其分布律为： $P\{X_n = k\} = C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} (k = 0,1,\cdots n)$

$$\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$$

则 $$\lim_{n\to\infty} P\{X_n = k\} = \lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Poisson定理的应用

$$\lambda = np$$

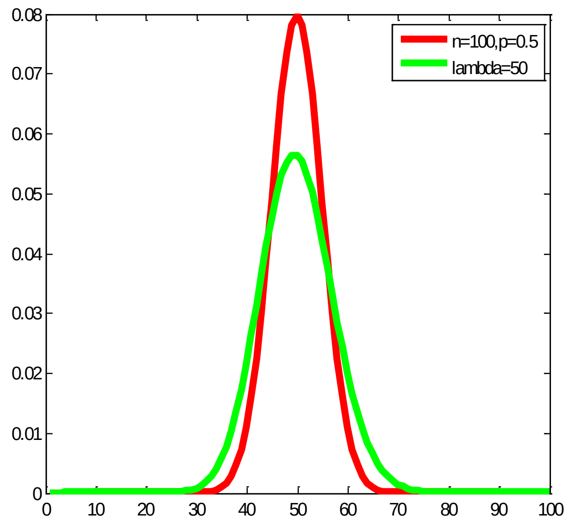
$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

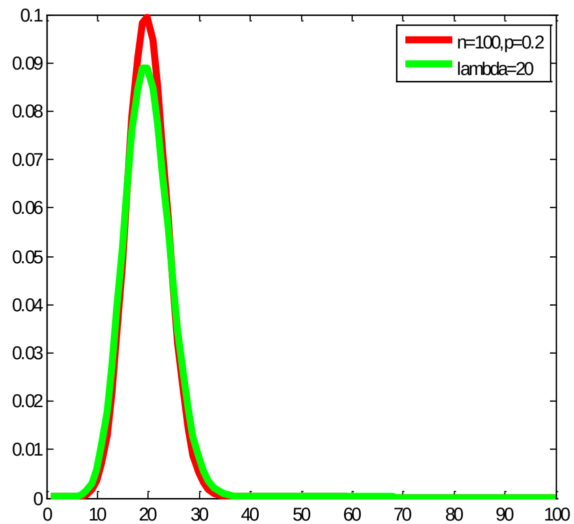
Poisson定理

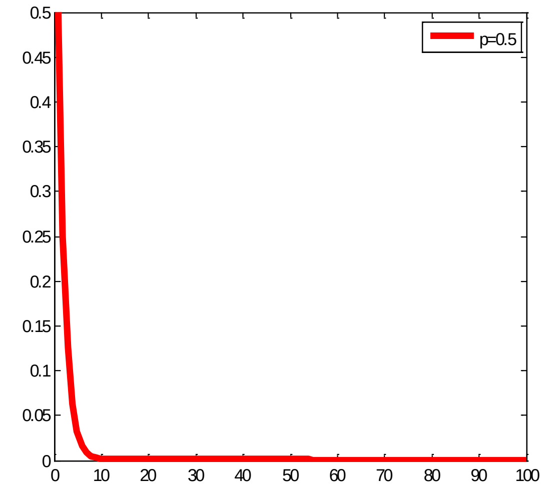
设随机变量X_n(n=1,2,...)服从二项分布，其分布律为：$P\{X_n=k\}=C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}(k=0,1,\cdots n)$

$$\lim_{n\to\infty} np_n=\lambda>0$$

则 $\lim_{n\to\infty} P\{X_n=k\}=\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$







2.2 常用的离散型随机变量

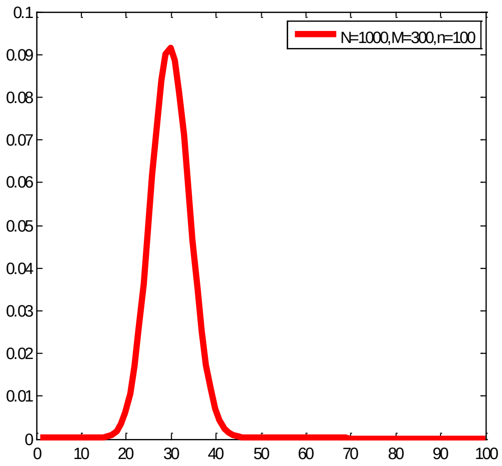
4）几何分布

若随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=q^{k-1}p \quad (k=1,\quad 2,\quad \cdots)$$

（其中 $p\geq 0$，$q\geq 0$，$p+q=1$）

则称随机变量 X 服从参数为 p 的几何分布。



2.2 常用的离散型随机变量

5）超几何分布

如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \quad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ \min(M,\ n))$$

其中N，M，n均为自然数.

则称 X 服从参数为 (N, M, n) 的超几何分布。

2.2 常用的离散型随机变量

超几何分布 $\xleftarrow[\text{n、M/N固定}]{N\to\infty}$ 二项分布 $\xleftarrow{\text{N大p小}}$ 泊松分布

$$\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \qquad C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \qquad \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

无放回抽样　　　　有放回抽样

3 随机变量的分布函数

（1）定义： 设 X 是一个随机变量, x是任意实数, 函数

$$F(x) = P\{X \leq x\}$$

称为 X 的分布函数.

（2）说明：分布函数主要研究随机变量在某一区间内取值的概率情况.

分布函数 $F(x)$ 是 x 的一个普通实函数.

3 随机变量的分布函数

(3) 若干性质

1. $0 \le F(x) \le 1, \quad (-\infty, \infty)$;

2. $F(x_1) \le F(x_2), \quad (x_1 < x_2)$;

3. $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \; F(\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$;

4. $\lim\limits_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0), \quad (-\infty < x_0 < \infty)$;

即任一分布函数处处右连续.

3 随机变量的分布函数

（4）重要公式

$$P\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a),$$

$$P\{X > a\} = 1 - F(a).$$

离散型随机变量的分布函数 $F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_i \leq x} p_k$.

4.1 连续型随机变量的概率密度

(1)定义：如果对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$，存在非负函数，使对于任意实数 x 有

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

则称 X 为连续型随机变量，其中 $f(x)$ 称为 X的概率密度函数，简称概率密度.

(2)性质

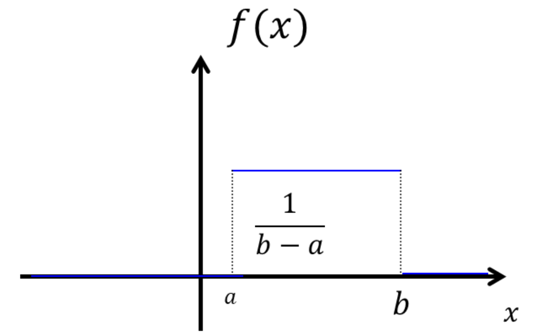
1. $f(x) \geq 0$;

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$

3. $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$ $= \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x.$

4. 若 $f(x)$ 在点 x 处连续，则有 $F'(x) = f(x)$.

第二章　　习题课



4.2 常用的连续型随机变量

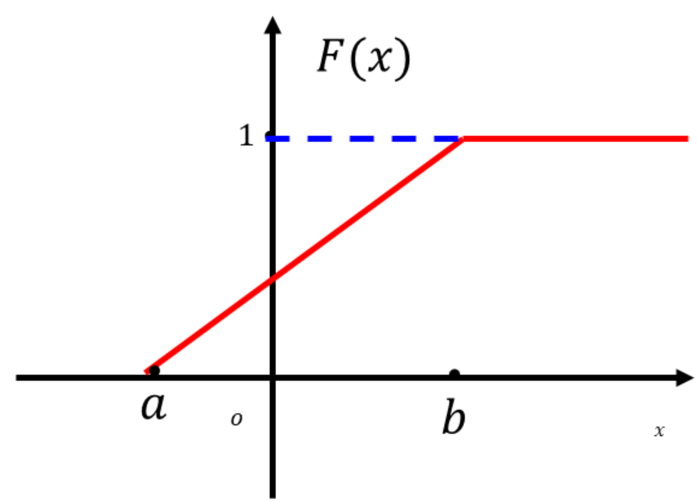
（1）均匀分布

若随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

则称X 服从区间$[a, b]$上的均匀分布。记作 $X\sim U[a,b]$。

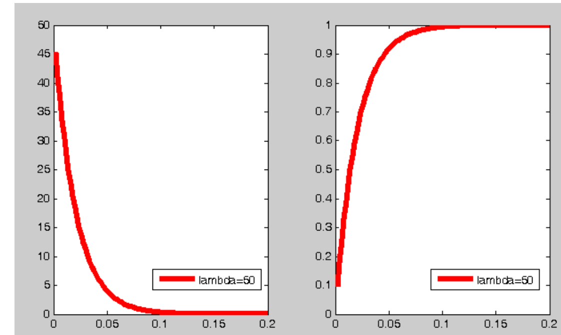
分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x<b,\\ 1, & x\ge b.\end{cases}$$



4.2 常用的连续型随机变量

（2）指数分布



如果随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

其中，$\lambda>0$为常数，则称随机变量 X 服从参数为λ的指数分布。记作$X\sim E\,(\lambda)$。

分布函数

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

4.2 常用的连续型随机变量

(3) 正态分布

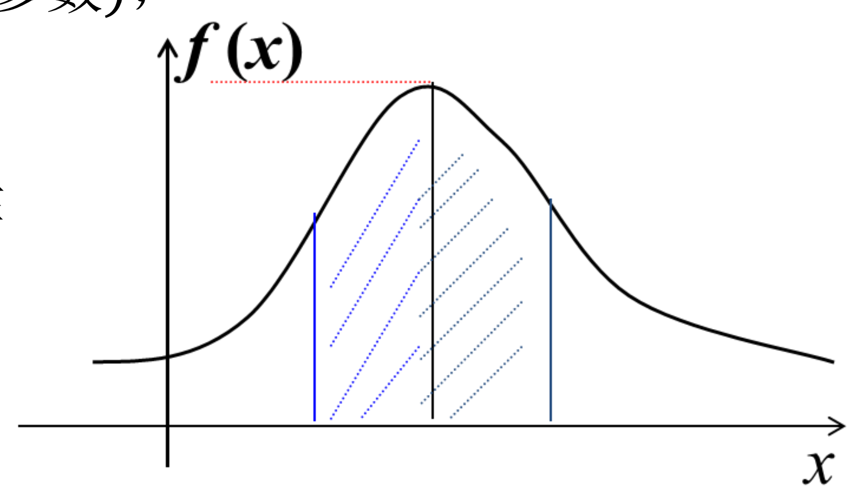
如果连续型随机变量X的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

(其中$-\infty<\mu<+\infty$，$\sigma>0$为参数)，

则称随机变量X服从参数为$(\mu,\quad\sigma^2)$的正态分布．记作

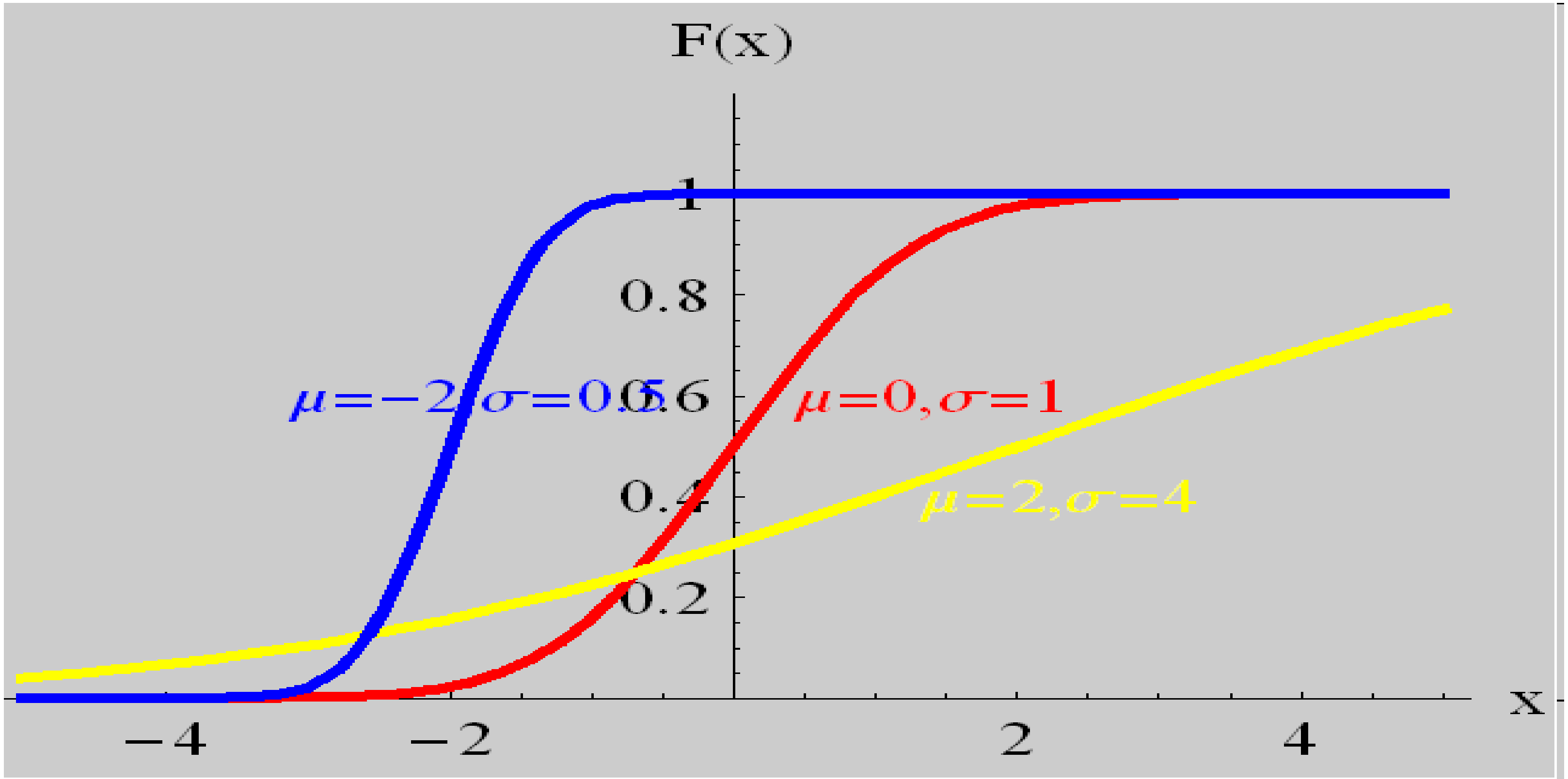
$X\sim N(\mu,\quad\sigma^2)$



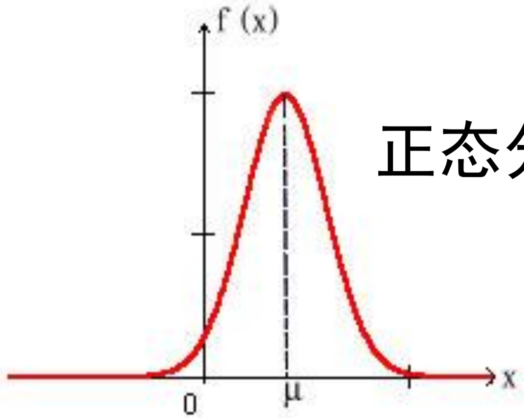
第二章　　习题课

分布函数

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t$$

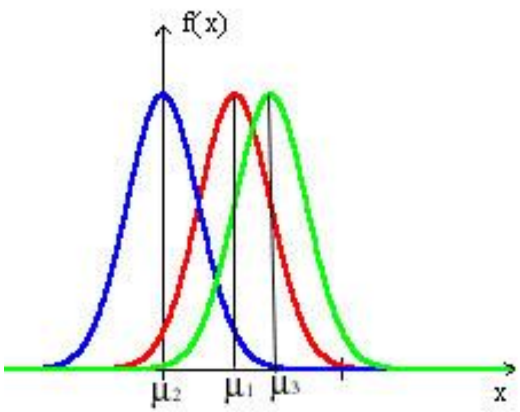


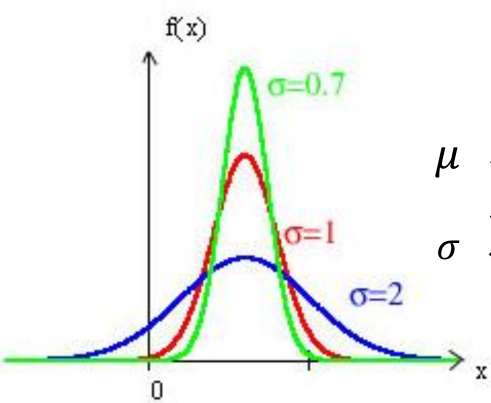
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的图形特点



正态分布的密度曲线是一条关于 μ 对称的钟形曲线.

特点是"两头小，中间大，左右对称".





μ 决定了图形的中心位置，

σ 决定了图形中峰的陡峭程度.

(4) 标准正态分布

- 当正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 中的 $\mu=0,\ \sigma=1$ 时,
  这样的正态分布称为标准正态分布, 记为 $N(0,\ 1)$.

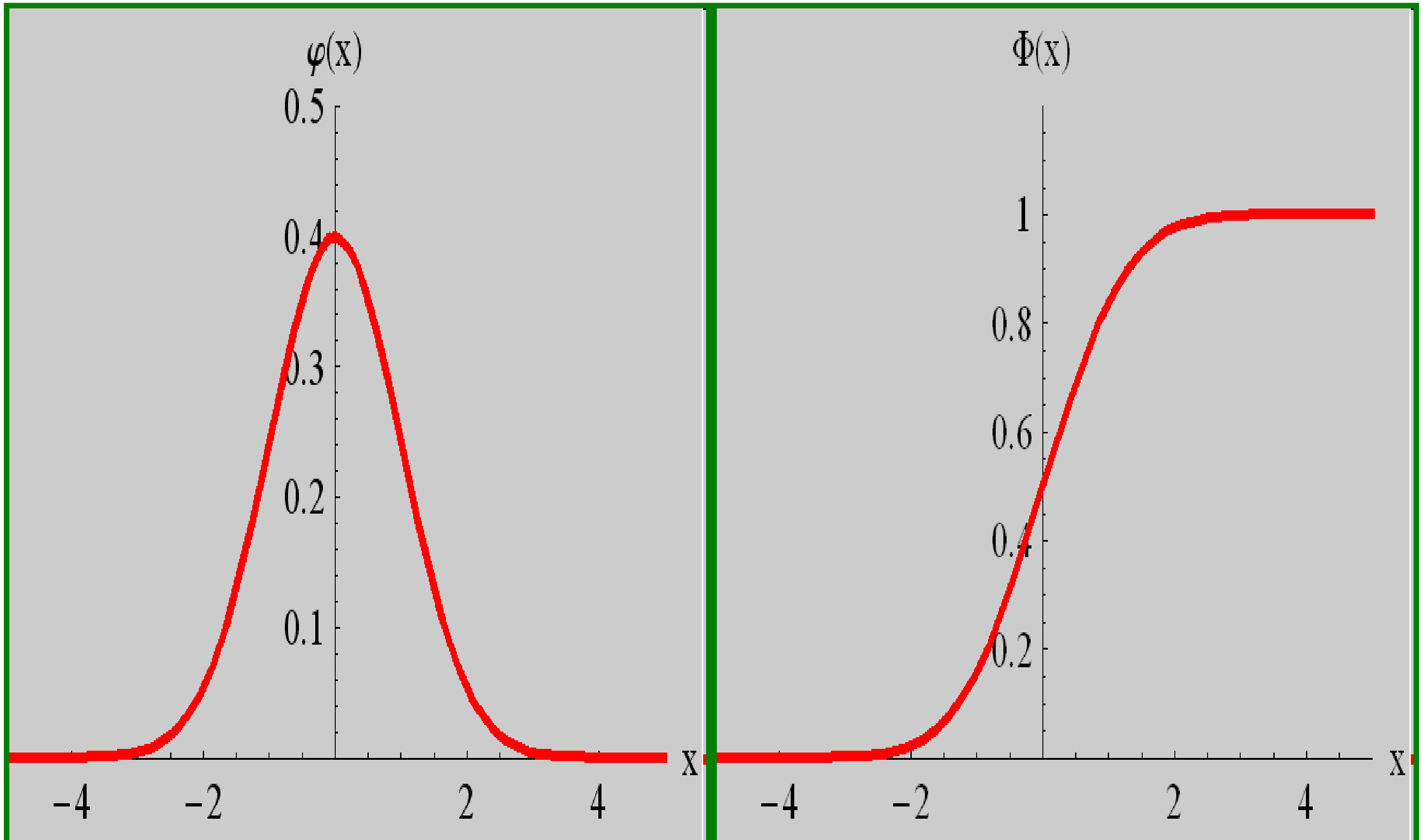
- 标准正态分布的概率密度表示为

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<+\infty,$$

- 标准正态分布的分布函数表示为

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t,\quad -\infty<x<+\infty.$$

标准正态分布的图形



第二章　　习题课

标准正态分布的重要公式

1. 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

2. $P\{c \le X \le d\} = \Phi\left(\dfrac{d-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{c-\mu}{\sigma}\right)$.

3. $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

标准正态分布的3σ准则

由标准正态分布的查表计算可以求得，

当$X \sim N(0,1)$时，

$$P(|X| \le 1) = 2\Phi(1) - 1 = 0.6826$$

$$P(|X| \le 2) = 2\Phi(2) - 1 = 0.9544$$

$$P(|X| \le 3) = 2\Phi(3) - 1 = 0.9974$$

这说明，X 的取值几乎全部集中在[-3,3]区间内，超出这个范围的可能性仅占不到0.3%.

5. 随机变量的函数的分布

(1)离散型随机变量的函数的分布

如果 X 是离散型随机变量，其函数 $Y=g(X)$ 也是离散型随机变量. 若 X 的分布律为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

则 $Y=g(X)$的分布律为

$Y=g(X)$	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$	$g(x_k)$	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

5. 随机变量的函数的分布

(2)连续型随机变量的函数的分布

如果 X 是连续型随机变量, 其函数 $Y = g(X)$ 也是连续型随机变量.

计算 Y 的概率密度通常是根据 X 的密度函数 $f_X(x)$ 求出 Y 的分布函数

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{g(X) \le y\}$$

$$= \int_{g(x) \le y} f_X(x) \, \mathrm{d}\, x \quad (-\infty < x < +\infty),$$

再对 $F_Y(y)$ 求导得到 Y 的密度函数.

5. 随机变量的函数的分布

(2)连续型随机变量的函数的分布

- 若$g(X)$是严格单调减函数，即$g'(X) < 0$，有

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

- 若$g(x)$在不相叠的区间$I_1, I_2, \ldots$上逐段严格单调，其反函数分别为$h_1(x), h_2(x), \ldots$均为连续函数，那么$Y = g(x)$是连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y) = f_X[h_1(y)]|h_1'(y)| + f_X[h_2(y)]|h_2'(y)| + \cdots, y \in (\alpha, \beta)$$

直观理解：$\boldsymbol{f_Y(y)\Delta y = f_X[h(y)]\,\Delta x}$

第二章　习题课

常用概率分布及其关系

多项分布

$$M(n,\boldsymbol{p}) = \binom{n}{m_1 m_2 \dots m_K} \prod_{k=1}^{K} p_k^{m_k}$$

$K = 2$

$X_1 + \cdots + X_n$

贝努利分布

$$B(1,p) = p$$

泊松分布

$$P(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$n \to \infty,$
$\lambda = np$

二项分布

$$B(n,p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$n = 1$

标准正态分布

$$N(0,1) == \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2}$$

$\dfrac{X-\mu}{\sigma}$

正态分布

$$N(\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

指数分布

$$E(\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$$

χ^2 −分布

$$\chi^2(n) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$$

$r = \dfrac{n}{2},$
$\lambda = \dfrac{1}{2}$

Γ −分布

$$\Gamma(r,\lambda) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x}$$

$r = 1$

三、典型例题

1. 房间内有10个人，分别佩带1号到10号纪念章，任意选出5个人记录其纪念章的号码，令 X 表示其最小号码，(1) 求 X 的分布律.
(2) 求 $P\{X > 4\}$

第二章　　习题课

解：（1）X的取值为：1，2，3，4，5，6,并且

$$P\{X=1\}=\frac{C_9^4}{C_{10}^5}=\frac{126}{252}\qquad P\{X=2\}=\frac{C_8^4}{C_{10}^5}=\frac{70}{252}\qquad P\{X=3\}=\frac{C_7^4}{C_{10}^5}=\frac{35}{252}$$

$$P\{X=4\}=\frac{C_6^4}{C_{10}^5}=\frac{15}{252}\qquad P\{X=5\}=\frac{C_5^4}{C_{10}^5}=\frac{5}{252}\qquad P\{X=6\}=\frac{C_4^4}{C_{10}^5}=\frac{1}{252}$$

X 的分布律为

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{126}{252}$	$\frac{70}{252}$	$\frac{35}{252}$	$\frac{15}{252}$	$\frac{5}{252}$	$\frac{1}{252}$

（2）$P\{X>4\}=P\{X=5\}+P\{X=6\}=\frac{5}{252}+\frac{1}{252}=0.0238$

第二章　习题课

2．一射手对同一目标独立地进行射击，直到射中2次目标为止，已知每次命中率为3/5，求射击次数的分布律。

解：令X表示射击次数，则X的取值可能是2，3，4…

$$\text{则}X\text{的分布律为：}P\{X=k\}=C_{k-1}^{1}\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^{(k-2)}\cdot\frac{3}{5}$$

$$=C_{k-1}^{1}\left(\frac{3}{5}\right)^{2}\left(\frac{2}{5}\right)^{(k-2)}$$

$$k=2,3,4\ldots$$

第二章　习题课

3. 设随机变量$X \sim B(2, p)$，且$P\{X \geq 1\} = \frac{5}{9}$，(1)试确定参数$p$；（2）求$P\{X = 1\}$。

解：$P\{X = k\} = C_2^k p^k (1-p)^{2-k} \quad (k = 0,1,2)$

(1) $\frac{4}{9} = 1 - P\{X \geq 1\} = P\{X = 0\} = (1-p)^2, p = \frac{1}{3}.$

(2) $P\{X = 1\} = C_2^1 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$

第二章　习题课

4. 已知离散型随机变量 X 的可能取值为 $-2,0,2,\sqrt{5}$,相应的概率依次为 $\frac{1}{a},\frac{3}{2a},\frac{5}{4a},\frac{7}{8a}$, 试求概率$P\{|X|\le 2|X\ge 0\}$.

解：利用概率分布律的性质：$\sum_i p_i = 1$,

有　$$1=\sum_i p_i=\frac{1}{a}+\frac{3}{2a}+\frac{5}{4a}+\frac{7}{8a}=\frac{37}{8a},$$ 故：$a=\frac{8}{37}$

因此 X 的分布律为

X	-2	0	2	$\sqrt{5}$
P	$\frac{8}{37}$	$\frac{12}{37}$	$\frac{10}{37}$	$\frac{7}{37}$

第二章　习题课

4. 已知离散型随机变量 X 的可能取值为 $-2,0,2,\sqrt{5}$, 相应的概率依次为 $\frac{1}{a},\frac{3}{2a},\frac{5}{4a},\frac{7}{8a}$, 试求概率$P\{|X|\le 2|X\ge 0\}$.

从而

$$P\{|X|\le 2|X\ge 0\}=\frac{P\{|X|\le 2, X\ge 0\}}{P\{X\ge 0\}}$$

$$=\frac{P\{X=0\}+P\{X=2\}}{P\{X=0\}+P\{X=2\}+P\{X=\sqrt{5}\}}$$

$$=\frac{22}{29}.$$

第二章　习题课

5.一袋中有4个编号分别为1，2，3，4，的乒乓球，从中任意地取出两个，以 X 表示取出的两个球中的最大号码，写出X 的分布律和X 的分布函数.

解:　　**X =2,3,4.**

X	2	3	4
p_k	1/6	2/6	3/6

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<2, \\ 1/6, & 2\le x<3, \\ 1/2, & 3\le x<4, \\ 1, & 4\le x. \end{cases}$$

第二章　习题课

6. 设随机变量X的分布律为$P\{X=k\}=\dfrac{k}{15}, k=1,2,3,4,5.$ 试写出X的分布函数，并计算$P\{0.5<X<2.5\}.$

$$\text{解：} F(x)=\begin{cases} 0, & x<1 \\ 1/15, & 1\le x<2 \\ 3/15, & 2\le x<3 \\ 6/15, & 3\le x<4 \\ 10/15, & 4\le x<5 \\ 1, & x\ge 5 \end{cases}$$

$$P\{0.5<X<2.5\}=F(2.5-0)-F(0.5)={}^{1}\!/_{5}$$

第二章　习题课

7. 设离散型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ a, & -1\le x<1,\\ \dfrac{2}{3}-a, & 1\le x<2,\\ a+b, & x\ge 2.\end{cases}$$

且$P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}$,试确定常数a,b,并求X的分布律.

解：利用分布函数 $F(x)$ 的性质：

由$F(+\infty)=1$,有$a+b=1$

$$\frac{1}{2}=P\{X=2\}=(a+b)-(\frac{2}{3}-a)=2a+b-\frac{2}{3},$$

由此解得 $a=\dfrac{1}{6},\ b=\dfrac{5}{6}.$

因此有 $$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \dfrac{1}{6}, & -1\le x<1,\\ \dfrac{1}{2}, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

从而 X 的分布律为

X	-1	1	2
P	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{2}$

第二章　习题课

8. 设随机变量的密度函数为$f(x)=\begin{cases} a-bx^2, -1<x<1, \\ 0, \quad 其它. \end{cases}$

且概率$P\{X<1/2\}=\dfrac{27}{32}$，求常数$a,b$的值。

解：$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-1}^{1}(a-bx^2)dx$

$$2a-\frac{2b}{3}=1,$$

$$\frac{27}{32}=P\{X<1/2\}=\int_{-1}^{1/2}(a-bx^2)dx=\frac{3a}{2}-\frac{3b}{8}$$

a = 3/4, b = 3/4.

第二章　习题课

9. 设随机变量X在区间$(-3,6)$上服从均匀分布，求x的方程 $x^2+Xx+1=0$有实根的概率。

解：X的概率密度函数：$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9} & -3<x<6\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

$$P\{\text{ 方程 } x^2+Xx+1=0 \text{ 有实根 }\}$$
$$=P\{X^2-4\geq 0\}$$
$$=P\{X\leq -2\}+P\{X\geq 2\}$$
$$=\int_{-3}^{-2}\frac{1}{9}dx+\int_{2}^{6}\frac{1}{9}dx=\frac{5}{9}$$

第二章　习题课

10. 设随机变量X的分布函数为：$F(x)=\begin{cases}A+Be^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

求：（1）A,B的值；（2）X的概率密度；（3）$P\{X>10\ |X>3\}$

解：（1）$F(+\infty)=1$ ，$F(+0)=F(0)=0$ ，

$A=1$ ，$A+B=0$, 所以 $B=-1$

(2)由（1）可知：$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

因此：$f(x)=F'(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

第二章　习题课

10. 设随机变量X的分布函数为：$F(x)=\begin{cases} A+Be^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$

求：（1）A,B的值；（2）X的概率密度；（3）$P\{X>10\ |X>3\}$

$$(3)P\{X>10|X>3\}=P\{X>10\}/P\{X>3\}$$

$$=\frac{1-\mathrm{F}(10)}{1-\mathrm{F}(3)}=e^{-7}$$

第二章　习题课

11. 设随机变量X的概率密度函数$f(x)=\begin{cases}k(1-x)^2, & -1<x<1, \\ 0, & 其它.\end{cases}$

（1）试确定常数k；（2）求X的分布函数；（3）求$P\{0<X\leq 2\}$.

解：（1）$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-1}^{1}k(1-x)^2dx=\frac{8}{3}k$ ，$k=\frac{3}{8}$

(2) $x\leq -1, F(x)=0, x\geq 1, F(x)=1$

$-1<x<1, F(x)=\int_{-1}^{x}\frac{3}{8}(1-t)^2dt$

$=-\frac{3}{8}\frac{1}{3}(1-t)^3\Big|_{-1}^{x}=1-\frac{1}{8}(1-x)^3,$

第二章　　习题课

11. 设随机变量X的概率密度函数$f(x)=\begin{cases} k(1-x)^2, & -1<x<1, \\ 0, & 其它. \end{cases}$

（1）试确定常数k；（2）求X的分布函数；（3）求$P\{0<X\leq 2\}$.

X的分布函数：$F(x)=\begin{cases} 0 & x\leq -1 \\ 1-\dfrac{1}{8}(1-x)^3 & -1<x<1 \\ 1 & x\geq 1 \end{cases}$

(3) $P\{0<X\leq 2\}=\int_0^1 \frac{3}{8}(1-x)^2dx=\frac{1}{8}.$

第二章　习题课

12. 设有两种鸡蛋混放在一起，其中甲种鸡蛋单只的重量（单位：克）服从$N(50,25)$分布，乙种鸡蛋单只的重量（单位：克）服从$N(45,16)$分布。设甲种鸡蛋占总只数的70%，今从该批鸡蛋中任选一只，

（1）试求其重量超过55克的概率；

（2）若已知所抽出的鸡蛋超过55克，问它是甲种蛋的概率是多少？（$\Phi(1)=0.8413$，$\Phi(2.5)=0.9938$

解：设B={选出的鸡蛋是甲种鸡蛋},

$\bar{B}$ ={选出的鸡蛋是乙种鸡蛋},

A={选出的鸡蛋重量超过55克},

X:甲种鸡蛋单只的重量,

Y:乙种鸡蛋单只的重量.

第二章　　习题课

则：$P(B) = 0.7$，$P(\bar{B}) = 0.3$，

$$P(A|B) = P\{X > 55\} = 1 - P\{X \le 55\} = 1 - \Phi(\frac{55-50}{5})$$
$$= 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

$$P(A|\bar{B}) = P\{Y > 55\} = 1 - P\{Y \le 55\} = 1 - \Phi(\frac{55-45}{4})$$
$$= 1 - \Phi(2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062$$

$$(1)P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})$$
$$= 0.7 \times 0.1587 + 0.3 \times 0.0062 = 0.11295$$

$$(2)P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{0.11109}{0.11295} = 0.9835.$$

第二章　　习题课

13. 已知随机变量 X 的概率密度为：$f(x)=Ae^{-|x|}$, $-\infty<x<+\infty$. (1) 求系数 A；(2) 求 X 的分布函数 $F(x)$;

解：由概率密度的性质有：

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-|x|}\,\mathrm{d}x=2\int_{0}^{+\infty} Ae^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$=2A$$

故$A=\dfrac{1}{2}$

第二章　　习题课

(2) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}\,x$,

当 $x<0$ 时,有：$F(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}\Big|_{-\infty}^{x}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}$

当 $x\geq 0$ 时，有 ：$F(x)=\frac{1}{2}[\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}\,x+\int_{0}^{x}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x]=1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$

所以X的分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}, & x<0,\\ 1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}, & x\geq 0.\end{cases}$$

第二章　　习题课

14. 设随机变量X服从参数为$\lambda = 2$的指数分布，试求$Y = 1 - e^{-2X}$的概率密度。

解：随机变量X的概率密度函数：$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$

$y = 1 - e^{-2x}$单调增加，反函数为$x = -\dfrac{1}{2}\ln(1-y)$,

当$x > 0$时，$y = 1 - e^{-2x} \in (0,1)$.

则有：$f_Y(y) = f_X(h(y))\ h'(y) = 2e^{-2\left[-\frac{1}{2}\ln(1-y)\right]}\ \dfrac{1}{2(1-y)} = 1.$

有：$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & y \in (0,1) \\ 0 & y \notin (0,1). \end{cases}$

第二章　习题课

15. 若$X \sim N(1,2)$, 设$Y = 2X - 1$, 求$P\{Y > 1\}$

解法1：$Y = 2X - 1 \sim N(1,8)$,

$$P\{Y > 1\} = 1 - P\{Y \le 1\}$$

$$= 1 - P\left\{\frac{Y-1}{\sqrt{8}} \le \frac{1-1}{\sqrt{8}}\right\}$$

$$= 1 - \Phi(0)$$

$$= 0.5$$

解法2：$P\{Y > 1\} = P\{2X - 1 > 1\}$

$$= P\{X > 1\} = 1 - P\{X \le 1\} = 0.5$$

第二章　作业情况

- 1. 概率论及其应用P147-148 1, 9, 10

第1题：证明$1\text{-}R(x)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}+\frac{1\cdot3}{x^5}-\frac{1\cdot3\cdot5}{x^7}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{x^9}\cdots+(-1)^k\frac{1\cdot3\cdots(2k-1)}{x^{2k+1}}\}$

当x>0,若k为偶数则上式右边高估了$1-\Re(x)$，若k为奇数则右边低估了$1-\Re(x)$

证：左右求导，右侧化简后根据k取值为判断大小，之后积分

$$f(x)=\{n(x)g(x)\}'=n'(x)g(x)+n(x)g'(x)$$
$$=n(x)(-x)*g(x)+n(x)\,g'(x)$$
$$=n(x)\left\{-1+\cancel{\frac{1}{x^2}-\frac{1\cdot3}{x^4}+\frac{1\cdot3\cdot5}{x^6}-\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{x^8}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{x^{10}}\cdots+(-1)^{k+1}\frac{1\cdot3\cdots(2k-1)}{x^{2k}}}\right\}$$
$$+n(x)\left\{\cancel{-\frac{1}{x^2}+\frac{1\cdot3}{x^4}-\frac{1\cdot3\cdot5}{x^6}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{x^8}-\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{x^{10}}}+(-1)^{k+1}\frac{1\cdot3\cdots(2k-1)(2k+1)}{x^{2k+2}}\right\}$$

若k为偶数,$-f(x)>n(x)$
若k为奇数,$-f(x)<n(x)$

第二章　作业情况

- 1. 概率论及其应用P147-148 1, 9, 10
  - 第9题：利用斯特林公式证明如果$\lambda\to\infty$, 则对于任意固定$\alpha\to\beta$，$\sum_{\lambda+\alpha\sqrt{\lambda}<k<\beta+\alpha\sqrt{\lambda}} p(k,\lambda)\to\Re(\beta)-\Re(\alpha)$

证明: $R(\beta)-R(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$ ⊛

设 $k=\lambda+t$. $t\in(\alpha\sqrt{\lambda},\beta\sqrt{\lambda})$

$$\underset{\lambda\to+\infty}{p(k;\lambda)} = p(\lambda+t;\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{\lambda+t}}{(\lambda+t)!}$$

$$= e^{-\lambda}\frac{\lambda^{\lambda}}{\lambda!}\cdot\frac{\lambda^{t}}{(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+t)}$$

由斯特林公式: $e^{-\lambda}\frac{\lambda^{\lambda}}{\lambda!}\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}}$

由 $\frac{\lambda}{\lambda+i}=1-\frac{i}{\lambda+i}\sim e^{-\frac{i}{\lambda+i}}\sim e^{-\frac{i}{\lambda}}$　$i=1\ldots t$

得 $\frac{\lambda^{t}}{(\lambda+1)\cdots(\lambda+t)}\sim e^{-\frac{t^2}{2\lambda}}$

$\Rightarrow p(k;\lambda)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2\lambda}}$　$\Rightarrow\cdots\cdots$

- 1. 概率论及其应用P147-148 1, 9, 10
  - 第10题：超几何分布的正态逼近。令m,n,k为正整数且假定它们以$\frac{r}{n+m}\to t,\frac{n}{n+m}\to p,\frac{m}{n+m}\to q,h\{k-rp\}\to x$

的方式趋于无穷，其中$\frac{1}{\mathrm{h}}=\sqrt{(n+m)pqt(1-t)}$. 试证：$\frac{C_n^k C_m^{r-k}}{C_{n+m}^r}\sim hn(x)$

证明:

① $C_n^k p^k q^{n-k}\sim h_1 n\big(h_1(k-np)\big), h_1=\frac{1}{\sqrt{npq}}$

② $C_m^{r-k} p^{r-k} q^{m-r+k}\sim h_2 n\big(h_2(r-k-mp)\big), h_2=\frac{1}{\sqrt{mpq}}$

③ $C_{m+n}^r p^r q^{m+n-r}\sim h_3 n\big(h_3(r-mp-np)\big), h_3=\frac{1}{\sqrt{(m+n)pq}}$

$$\frac{①^*②}{③}\Rightarrow$$ 等式成立