组合数学第五讲

授课时间: 2018年10月15日　授课教师: 孙晓明　记录人: 任轶慧　张心茹　袁艺

1　递归关系解法——生成函数

例 1　一些数列对应的生成函数：

a. $1, 1, 1, \cdots$

b. $0, 1, 2, \cdots, n, \cdots$

c. $1, 2, 3, \cdots, 1/n, \cdots$

d. $\frac{1}{0!}, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \cdots, \frac{1}{n!}, \cdots$

解

a. 由$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n$可得$\{1\}_{n\geq 0}$的生成函数为$\frac{1}{1-x}$；

b. 由$\frac{x}{(1-x)^2} = x \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)' = x \cdot \sum_{n\geq 1} nx^{n-1} = \sum_{n\geq 0} nx^n$可得$\{n\}_{n\geq 0}$的生成函数为$\frac{x}{(1-x)^2}$；

c. 由$\ln(1-x) = -\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} x^n$可得$\{1/n\}_{n\geq 1}$的生成函数为$\ln \frac{1}{1-x}$；

d. 显然，$\{1/n!\}_{n\geq 0}$的生成函数为e^x。

例 2　在所有由1，2，3组成的n位数中，1的个数为偶数的有多少？

解　设满足条件的n位数的个数为T_n。根据1的个数来分类计数，然后求和，得到

$$T_n = \sum_{k\geq 0} 2^{n-2k} \binom{n}{2k} = \sum_{0\leq 2k\leq n} 2^{n-2k} \frac{n!}{(2k)!(n-2k)!} = n! \sum_{0\leq 2k\leq n} \frac{2^{n-2k}}{(2k)!(n-2k)!}。$$

记$S_n = T_n/n! = \sum_{k\geq 0} \frac{2^{n-2k}}{(2k)!(n-2k)!}$，考虑$S_n$的生成函数$F(x) = \sum_{n\geq 0} S_n x^n$，

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n\geq 0} \sum_{0\leq 2k\leq n} \frac{2^{n-2k}}{(2k)!(n-2k)!} x^n \\
&= \sum_{n\geq 0} \sum_{0\leq 2k\leq n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \frac{(2x)^{n-2k}}{(n-2k)!} \\
&= \sum_{k\geq 0} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \sum_{n\geq 2k} \frac{(2x)^{n-2k}}{(n-2k)!} \\
&= \sum_{k\geq 0} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \sum_{m\geq 0} \frac{(2x)^m}{m!} \\
&= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) e^{2x} \\
&= \frac{1}{2}(e^{3x} + e^x) \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{3^n + 1}{2n!} x^n。
\end{aligned}$$

由此可知，$S_n = (3^n+1)/(2n!)$，则$T_n = (3^n+1)/2$。

例 3 在所有由1，2，3组成的n位数中，满足1的个数为偶数，2的个数为奇数的有多少？

解 设满足条件的n位数的个数为T_n，记$S_n = T_n/n!$。注意到，由1，2，3组成的n位数共有3^n个。另外，$e^{3x} = \sum_{n\geq 0} \frac{3^n}{n!}x^n$。由此可知，当不做限制时，数字1，2，3各自对$3^n/n!$的生成函数“贡献”了一个$e^x$因子。现在要求1的个数为偶数，那么1贡献的因子变为

$$\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^x+e^{-x}}{2}。$$

要求2的个数为奇数，那么2贡献的因子变为

$$\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{e^x-e^{-x}}{2}。$$

对3不做要求，则它贡献的因子仍为e^x。综上，S_n的生成函数$F(x)$为

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot e^x \\ &= \frac{e^{3x}-e^{-x}}{4} \\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{3^n-(-1)^n}{4n!}x^n。\end{aligned}$$

因此，$S_n = (3^n-(-1)^n)/(4n!)$，则$T_n = (3^n-(-1)^n)/4$。感兴趣的同学可以去验证，按照例2的方法按部就班地计算，得到的结果是相同的。

例 4 在所有由1，2，3组成的n位数中，满足1的个数为偶数，2的个数被3整除的有多少？

解 设满足条件的n位数的个数为T_n，记$S_n = T_n/n!$，$F(x)$为S_n的生成函数。由于1的个数为偶数，则$F(x)$对应的因子为

$$\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^x+e^{-x}}{2}。$$

由于2的个数为3的倍数，则$F(x)$中对应的因子为

$$\sum_{n\geq 0}\frac{x^{3n}}{(3n)!} = \frac{e^x+e^{\omega x}+e^{\omega^2 x}}{3},$$

其中ω为3次单位根。由于对3不做要求，则$F(x)$中对应的因子为e^x。综上（令$\bar{\omega} = \omega^2$），

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^x+e^{\omega x}+e^{\bar{\omega}x}}{3}\cdot e^x \\ &= \frac{1}{6}(e^{3x}+e^{(2+\omega)x}+e^{(2+\bar{\omega})x}+e^x+e^{\omega x}+e^{\bar{\omega}x}) \\ &= \sum_{n\geq 0}(3^n+(2+\omega)^n+(2+\bar{\omega})^n+1+\omega^n+\bar{\omega}^n)\frac{x^n}{6n!}。\end{aligned}$$

因此，$T_n = \frac{1}{6}(3^n+(2+w)^n+(2+\bar{w})^n+1+w^n+\bar{w}^n)$。

2 Catalan数与三柱汉诺塔问题变种

例 5 考虑三柱汉诺塔问题的一个变种。现在有从左到右编号为I、II和III的3根柱子，初始状态I号柱子套着n个圆盘，从上到下编号依次为$1, 2, \cdots, n$，其他两根柱子均为空。现在需要把所有圆盘通过若干步移动转移到III号柱子上。对于每步移动，有如下限制：

a. I号柱的盘子只能转移到II号柱上，II号柱的盘子只能转移到III号柱上；

b. 只允许移动某根柱子最上面的盘子。

那么，不同的转移方案共能得到多少种编号的排列（按照从上到下的顺序）？

解 记移动n个圆盘能得到的排列数为C_n。根据移动规则，1号圆盘首先进入II号柱。在这之后，1号圆盘既有可能直接离开II号柱，也有可能停留在II号柱上。这提示我们可以根据1号圆盘何时离开II号柱对可行方案进行分类（把II号柱看做一个栈，这相当于根据这个栈首次清空的时间进行分类）。若1号圆盘是第k个离开II号柱的圆盘，则有$k-1$个圆盘已经到达了III号柱，产生的排列数为C_{k-1}，还有$n-k$个圆盘在1号圆盘之后到达III号柱，产生的排列数为C_{n-k}。根据加法原理和乘法原理，

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{n-k}C_{k-1},$$

它的前几个初值为，$C_0 = 1, C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5, C_4 = 14$。

令$C(x) = \sum C_n x^n$，

$$\begin{aligned} x \cdot C^2(x) &= x \cdot \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}C_k\right)x^n \\ &= \sum_{n\geq 0} C_{n+1}x^{n+1} \\ &= C(x) - 1。\end{aligned}$$

求解可得，

$$C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}。$$

考虑到$C(0) = C_0 = 1$，故舍去$C(x) = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$。因此有，

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{1}{2x}\left(1 - (1-4x)^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2x}\left(1 - \sum_{n\geq 0}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-4x)^n\right) \\ &= -\frac{1}{2x}\cdot\sum_{n\geq 1}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-4x)^n \\ &= -\frac{1}{2x}\cdot\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}\cdot n}\binom{2n-2}{n-1}(-4x)^n \\ &= \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^{n-1} \\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n。\end{aligned}$$

上式第五个等号使用了第一次笔记例3的公式，$\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}\cdot n}\binom{2n-2}{n-1}$。综上，$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$。

定义 1 (卡塔兰数). 序列$\{C_n\}_{n\geq 0}$被称为卡塔兰数（*Catalan Numbers*），若其满足

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}。$$

3 思考：四柱汉诺塔问题

考虑汉诺塔问题的一个变种。如下图所示，现在有从左到右编号为I、II、III和IV的4根柱子，初始状态I号柱子套着n个圆盘，从上到下编号依次为$1, 2, \cdots, n$，其他三个柱子均为空。现在需要把所有圆盘通过若干步移动转移到IV号柱子上。对于每步移动，有如下限制：

a. 只允许I号柱的盘子转移到II号柱，II号柱的盘子转移到III号柱，III号柱的盘子转移到IV号柱；

b. 只允许移动某个柱子最上面的盘子。

考虑如下两个问题：

1. 不同的转移方案共能得到多少种编号的排列（按照从上到下的顺序）？
2. 是否所有编号的排列都能通过上述方案得到？如果不能，至少需要几根柱子，能得到所有编号的排列？