第二章 随机变量及其分布

§1 随机变量

§2 离散型随机变量的概率分布

§1　随机变量

一．随机变量的概念

例1　袋中有3只黑球，2只白球，从中任意取出3只球，观察取出的3只球中的黑球的个数。我们将3只黑球分别记作1，2，3号，2只白球分别记作4，5号，则该试验的样本空间为

$$S=\left\{\begin{array}{lll}(1,\ 2,\ 3) & (1,\ 2,\ 4) & (1,\ 2,\ 5)\\ (1,\ 3,\ 4) & (1,\ 3,\ 5) & (1,\ 4,\ 5)\\ (2,\ 3,\ 4) & (2,\ 3,\ 5) & (2,\ 4,\ 5)\\ (3,\ 4,\ 5) & & \end{array}\right\}$$

例1（续）

记取出的黑球数为X，则 X 的可能取值为1，2，3。因此， X 是一个变量。但是， X 取什么值依赖于试验结果，即 X的取值带有随机性，所以，我们称 X 为随机变量。X 的取值情况可由下表给出：

样本点	黑球数 X	样本点	黑球数 X
$(1,\ 2,\ 3)$	3	$(1,\ 4,\ 5)$	1
$(1,\ 2,\ 4)$	2	$(2,\ 3,\ 4)$	2
$(1,\ 2,\ 5)$	2	$(2,\ 3,\ 5)$	2
$(1,\ 3,\ 4)$	2	$(2,\ 4,\ 5)$	1
$(1,\ 3,\ 5)$	2	$(3,\ 4,\ 5)$	1

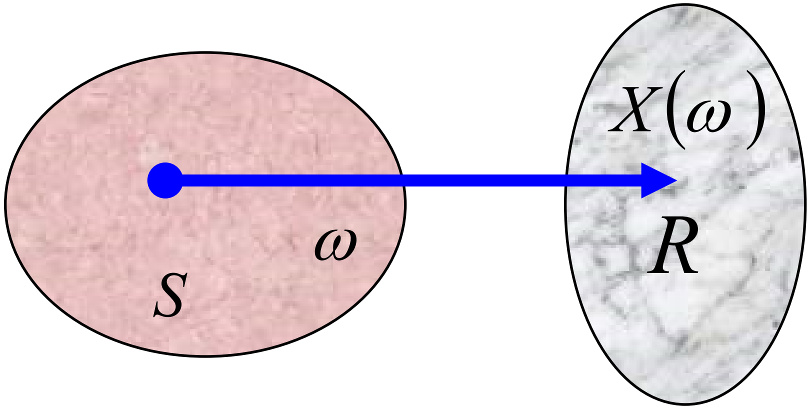
例1（续）

由上表可以看出，该随机试验的每一个结果都对应着变量 X 的一个确定的取值，因此变量 X 是样本空间 S 上的函数

$$X = X(\omega), (\omega \in S)$$

随机变量的定义:

设E 是一个随机试验，S 是其样本空间。若对每一个$\omega \in S$，都有唯一确定的一个实数$X(\omega)$，与之对应，则称$X(\omega)$为一个随机变量。



说明：

(1) 随机变量常用大写英文字母X, Y, Z或希腊字母ξ、η、Λ等来表示

(2) 对于随机变量，关心其取值。试验前可以知道它的所有结果，但不确定取什么值

例1（续）

我们定义了随机变量后，就可以用随机变量的取值情况来刻划随机事件。

例如

$$\{X=2\}=\{\omega|X(\omega)=2\}$$

表示取出2个黑球这一事件，即

$$\{X=2\}=\{(1,2,4),(1,2,5),(1,3,4),\\(1,3,5),(2,3,4),(2,3,5)\}$$

又如，$\{X\geq 2\}$

表示至少取出2个黑球这一事件，等等

例 2：掷一颗骰子，令 X 表示出现的点数。 则 X 就是一个随机变量。它的取值为$1, 2, 3, 4, 5, 6$。

$\{X \geq 4\}$表示掷出的点数不小于4 这一随机事件，于是

$$\{X \geq 4\} = \{4，5，6\}$$

类似地：

$\{X取偶数\} = \{2，4，6\}$，表示掷出的点数为偶数这一随机事件

例 3

一批产品有 50 件，其中有 8 件次品，42 件正品。现从中取出 6 件，令

X：取出 6 件产品中的次品数。

则 X 就是一个随机变量。它的取值为 0, 1, 2,…, 6。

于是：

$\{X=0\}$表示取出的产品全是正品这一随机事件

$\{X\geq 1\}$表示取出的产品中至少有一件次品这一随机事件

例 4：

上午 8:00 ~ 9:00 在某路口观察，令

Y：该时间间隔内通过的汽车数。

则 Y 就是一个随机变量。它的取值为 0, 1, …。

于是：

$\{Y < 100\}$表示通过的汽车数小于100辆这一随机事件；

$\{50 < Y < 100\}$表示通过的汽车数大于 50 辆但不超过 100 辆这一随机事件。

注意：Y 的取值是可列无穷个！

例 5：

观察某生物的寿命（单位：小时），令

Z：该生物的寿命

则 Z 就是一个随机变量。它的取值为所有非负实数。

于是：

$\{Z < 1500\}$表示该生物的寿命不超过1500小时这一随机事件；

$\{Z > 3000\}$表示该生物的寿命大于 3000小时这一随机事件。

注意：Z 的取值是不可列无穷个！

例 6：掷一枚硬币，令

$$X=\begin{cases}1, & Head\\ 0, & Tail\end{cases}$$

则 X 是一个随机变量。

说明：在同一个样本空间上可定义不同的随机变量

例 7：掷一枚骰子，在例3中，我们定义了随机变量 X 表示出现的点数。我们还可以定义其它的随机变量，例如我们可以定义

$$Y=\begin{cases}1, & 偶数\\ 0, & 奇数\end{cases},\quad Z=\begin{cases}1, & 点数为6\\ 0, & 点数非6\end{cases}$$

§2 离散型随机变量

一、离散型随机变量的概念与性质

离散型随机变量的定义：

如果随机变量 X 的取值是有限个或可列无穷个， 则称 X 为离散型随机变量

离散型随机变量的分布律

设离散型随机变量 X 的所有可能取值为

$$x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$$

并设

$$P\{X = x_k\} = p_k, (k = 1,2, \dots)$$

则称上式为离散型随机变量 X 的分布律。

离散型随机变量 X 的分布律还可列成下表：

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

说明：

1. 离散型随机变量可完全由其分布律来刻划。即离散型随机变量可完全由其可能取值以及取这些值的概率唯一确定

2. $\{X = x_1\} \cup \{X = x_2\} \cup \cdots \cup \{X = x_k\} \cup \cdots = S$，且$\{X = x_i\} \cap \{X = x_j\} = \Phi, (i \neq j)$

离散型随机变量分布律的性质：

(1) 非负性：对任意的自然数k，有$p_k \geq 0$

(2) 归一化：

$$\sum_k p_k = 1$$

例 1：从1～10这10个数字中随机取出5个数字，令X：取出的5个数字中的最大值。试求 X 的分布律？

解： X 的取值为5，6，7，8，9，10。 并且

$$P\{X=k\}=\frac{C_{k-1}^{4}}{C_{10}^{5}}\text{，}(k=5,6,\ldots,10)$$

具体写出，即可得 X 的分布律：

X	5	6	7	8	9	10
P	$\frac{1}{252}$	$\frac{5}{252}$	$\frac{15}{252}$	$\frac{35}{252}$	$\frac{70}{252}$	$\frac{126}{252}$

例 2：将 1 枚硬币掷 3 次，令

X：出现的正面次数与反面次数之差

试求 X 的分布律？

解：由题意知样本空间为

S={HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}

则X的取值为-3，-1，1，3。

并且

X	-3	-1	1	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

例 3：（已知分布律，求随机变量落在某区间上的概率）

设离散型随机变量 X 的分布律为

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$

则：

$$P\{X \le 2\} = P(\{X = 0\} \cup \{X = 1\} \cup \{X = 2\})$$
$$= P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\}$$
$$= \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

例 4：设随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=n\}=c\left(\frac{1}{4}\right)^{n},(n=1,2\text{，}\ldots\ldots)$$

试求常数c？

解：由随机变量的性质，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\{X=n\}=\sum_{n=1}^{\infty}c\left(\frac{1}{4}\right)^{n}=1$$

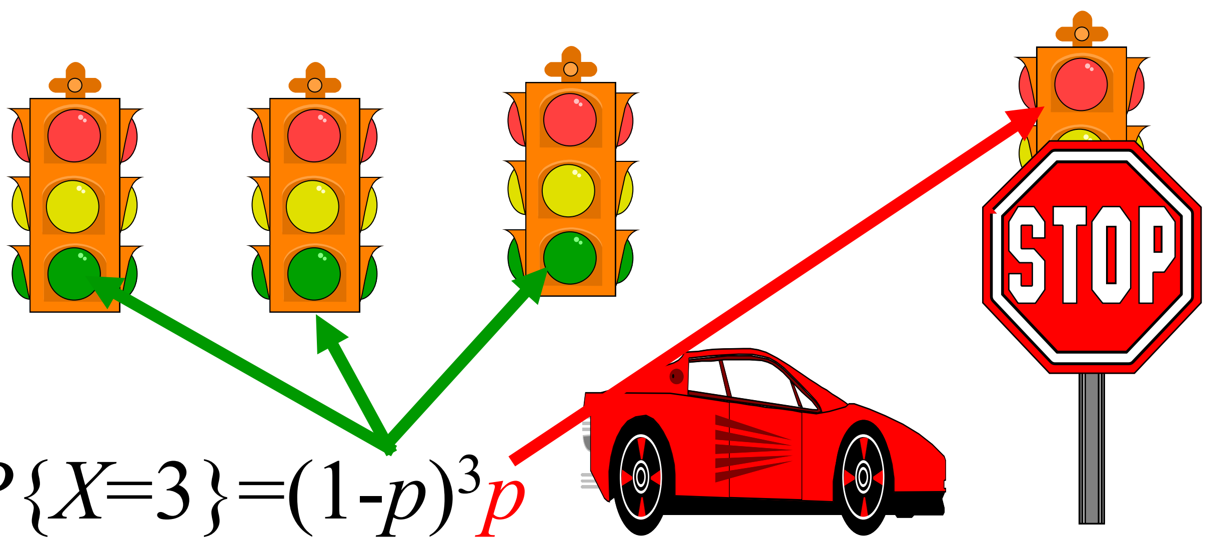
该级数为等比级数，故有

$$\sum_{n=1}^{\infty}c\left(\frac{1}{4}\right)^{n}=c\cdot\frac{1/4}{1-1/4}=1$$

所以$c=3$

例 5

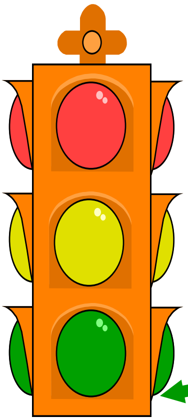
设一汽车在开往目的地的道路上需经过四盏信号灯，每盏信号灯以 1/2 的概率允许或禁止汽车通过。 以 X 表示汽车首次停下时，它已通过的信号灯的盏数，求 X 的分布律 (信号灯的工作是相互独立的)？



$$P\{X=3\}=(1-p)^3 p$$

例 5（续）

解：以 p 表示每盏信号灯禁止汽车通过的概率，则 X 的分布律为：



X	0	1	2	3	4
p_k	p	$(1-p)\,p$	$(1-p)^2p$	$(1-p)^3p$	$(1-p)^4$

或写成

$$P\{X=k\}=(1-p)^k p,\ k=0,1,2,3$$

$$P\{X=4\}=(1-p)^4$$

以 $p=1/2$ 代入得

X	0	1	2	3	4
P_k	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.0625

二、一些常用的离散型随机变量

1) Bernoulli分布

如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=0\}=1-p=q, P\{X=1\}=p$$

或

$$P\{X=k\}=p^k q^{1-k}, (k=0,1)$$

X	0	1
P	$1-p$	p

则称随机变量 X 服从参数为 p 的 Bernoulli分布，记为：

$X \sim B(1,p)$, (其中$0<p<1$为参数)

Bernoulli分布也称作 0-1 分布

Bernoulli分布的概率背景：

进行一次Bernoulli试验，设

$$P(A)=p, P(\bar{A})=1-p=q$$

令X：在这次Bernoulli试验中事件A发生的次数或者说令

$$X=\begin{cases}1 & \text{若事件}A\text{发生}\\ 0 & \text{若事件}A\text{不发生}\end{cases}$$

则

$$X \sim B(1,p)$$

例 6 在15 件产品中有4件次品，11件正品。从中取出1件

令 X：取出的一件产品中的次品数，则 X 的取值

为 0 或者 1，并且

$$P\{X=0\}=\frac{11}{15}$$

$$P\{X=1\}=\frac{4}{15}$$

即

$$X \sim B(1,\frac{4}{15})$$

2）二项分布

如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},(k=0,1,2,\dots,n)$$

则称随机变量X服从参数为(n,p)的二项分布，记作 $X\sim B(n,p)$ (其中n为自然数，$0\le p\le 1$为参数)

说明：显然，当 $n=1$ 时， $X\sim B(1,p)$ ，此时，X退化为Bernoulli分布。这说明Bernoulli分布是二项分布的一个特例

二项分布的概率背景：

进行 n 重Bernoulli试验，设在每次试验中 $P(A)=p, P(\bar{A})=1-p=q$

令X: 在这Bernoulli试验中事件 A 发生的次数，则 $X\sim B(n,p)$

例 7 一大批产品的次品率为0.05，现从中取出10件。试求下列事件的概率：

$B=\{$ 取出的10件产品中恰有4件次品 $\}$

$C=\{$ 取出的10件产品中至少有2件次品 $\}$

$D=\{$ 取出的10件产品中没有次品 $\}$

解：A={取出一件产品为次品}，则$P(A)=0.05$

取10件产品可看作是 10重Bernoulli试验，所以

$$P(B)=C_{10}^{4}\times 0.05^{4}\times 0.95^{10-4}=9.648\times 10^{-4}$$

$$P(C)=1-P(\bar{C})$$
$$=1-C_{10}^{0}\times 0.05^{0}\times 0.95^{10}-C_{10}^{1}\times 0.05^{1}\times 0.95^{9}$$
$$=0.08614$$

$$P(D)=0.95^{10}=0.5987$$

解法二：令X表示10件产品中的次品数。则

$$P(B) = P\{X = 4\}$$
$$= C_{10}^{4} \times 0.05^{4} \times 0.95^{10-4} = 9.648 \times 10^{-4}$$

$$P(C) = P\{X \geq 2\}$$
$$= 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\}$$
$$= 1 - C_{10}^{0} \times 0.05^{0} \times 0.95^{10} - C_{10}^{1} \times 0.05^{1} \times 0.95^{9}$$
$$= 0.08614$$

$$P(D) = P\{X = 0\}$$
$$= 0.95^{10} = 0.5987$$

例 8 考卷上有5道选择题，每道题有4个可能答案，其中只有一个答案是正确的。靠猜测至少能答对4道题的概率是多少？

解：每答一道题相当于做一次Bernoulli试验，

$A=\{\text{答对一道题}\}$，则$P(A)=1/4$

则答5道题相当于做5重Bernoulli试验。

设X：该学生靠猜能答对的题数，则

$$X \sim B(5,\frac{1}{4})$$

所以

$$\begin{aligned}&P\{\text{至少能答对4道题}\}=P\{X\geq 4\}\\&=P\{X=4\}+P\{X=5\}\\&=C_5^4\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdot\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{1}{64}\end{aligned}$$

例 9 设有 80 台同类型的设备，各台工作是相互独立的，发生故障的概率都是 0.01，且一台设备的故障能由一个人处理。考虑两种配备维修工人的方法：

(1) 由4人维护，每人负责 20 台

(2) 由3人，共同维护 80 台

试比较这两种方法在设备发生故障时不能及时维修的概率的大小？

解：按第一种方法。 以 X 记 第 1 人负责的 20 台中同一时刻发生故障的台数，则 $X \sim B(20, 0.01)$ 。令事件A_i表示第 i 人负责的台中发生故障不能及时维修， 则 80 台中发生故障而不能及时维修的概率为：

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \geq P(A_1)$$
$$= P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X \leq 1\} = 1 - \sum_{k=0}^{1} P\{X = k\}$$
$$= 1 - \sum_{k=0}^{1} P\{X = k\}$$
$$= 1 - \sum_{k=0}^{1} C_{20}^{k} 0.01^{k} 0.99^{20-k} = 0.0169$$

例 9 (续) 按第二种方法。以 Y 记 80 台中同一时刻发生故障的台数， 则 $Y \sim B(80,0.01)$。 故80台中发生故障而不能及时维修的概率为

$$P\{Y \geq 4\} = 1 - P\{Y \leq 3\} = 1 - \sum_{k=0}^{3} P\{X = k\}$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{3} C_{80}^{k} \cdot 0.01^{k} \cdot 0.99^{80-k} = 0.0087$$

第二种方法中发生故障而不能及时维修的概率小，且维修工人减少一人。

运用概率论讨论国民经济问题，可以有效地使用人力、物力资源。

例10 对同一目标进行射击，设每次射击的命中率均为0.23，问至少需进行多少次射击，才能使至少命中一次目标的概率不少于0.95？

解：设需进行 n 次射击，才能使至少命中一次目标的概率不少于0.95。进行n次射击，可看成是一n重Bernoulli试验。

令A={命中目标}，则$P(A)$=0.23

以 X 记 n 次射击中的命中次数，则$X\sim B(n, 0.23)$

$$\{X \geq 1\} = \{n\text{次射击至少命中一次目标}\} = B$$

则有

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - P\{X = 0\} = 1 - 0.77^n$$

由题意得

$$P(B) = 1 - 0.77^n \geq 0.95$$

所以

$$n \geq \frac{\ln 0.05}{\ln 0.77} = 11.46$$

即至少需进行12次射击，才能使至少命中一次目标的概率不少于0.95。

二项分布的分布形态

若$X\sim B(n,p)$，则

$$\frac{P\{X=k\}}{P\{X=k-1\}}=\frac{C_n^k p^k q^{n-k}}{C_n^{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1}}$$
$$=\frac{(k-1)!\,(n-k+1)!\,p}{k!\,(n-k)!\,q}$$
$$=\frac{(n+k-1)p}{kq}=1+\frac{(n+1)p-k}{kq},(q=1-p)$$

则

$$\frac{P\{X=k\}}{P\{X=k-1\}}=1+\frac{(n+1)p-k}{kq}\begin{cases}>1, & k<(n+1)p\\ =1, & k=(n+1)p\\ <1, & k>(n+1)p\end{cases}$$

二项分布的分布形态

由此可知，二项分布的分布$P\{X=k\}$先是随着 k 的增大而增大，达到其最大值后再随着k 的增大而减少。

这个使得$P\{X=k\}$达到其最大值的k_0称为该二项分布的最大可能次数，由于

$$\frac{P\{X=k\}}{P\{X=k-1\}}=\begin{cases} >1, & k<(n+1)p \\ =1, & k=(n+1)p \\ <1, & k>(n+1)p \end{cases}$$

若$(n+1)p$是整数，则$k_0=(n+1)p$或$(n+1)p-1$

若$(n+1)p$不是整数，则$k_0=[(n+1)p]$

例11 对同一目标进行400次独立射击，设每次射击时的命中率均为0.02，

（1）试求400次射击最可能命中几次？

（2）求至少命中两次目标 的概率？

解：对目标进行400次射击相当于做400重Bernoulli试验。

令X：400射击命中目标的次数，则X~B(400, 0.02)

由于$(400+1)*0.02=8.02$，不是整数，因此，最可能射击的命中次数为$k_0=\lfloor 8.02 \rfloor=8$

$$P\{至少命中两次目标\}=P\{X\geq 2\}$$
$$=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}$$
$$=1-0.98^{400}-C_{400}^{1}\cdot 0.02\cdot 0.98^{399}=0.9972$$

3）Poisson 分布

如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},(k=0,1,2,\dots)$$

(其中λ为常数)

则称随机变量 X 服从参数为 λ 的Poisson 分布。

记为

$$X\sim P(\lambda)$$

Poisson分布的应用

- Poisson分布是概率论中重要的分布之一
- 自然界及工程技术中的许多随机指标都服从Poisson分布
- 它多是出现在当 X 表示在一定的时间或空间内出现的事件个数这种场合

Poisson分布的应用

例如，可以证明，电话总机在某一时间间隔内收到的呼叫次数，放射物在某一时间间隔内发射的粒子数，容器在某一时间间隔内产生的细菌数，某一时间间隔内来到某服务台要求服务的人数，等等，在一定条件下，都是服从Poisson分布的。

例 12 设随机变量 X 服从参数为 λ 的Poisson分布，且已知$P\{X=1\}=P\{X=2\}$，试求$P\{X=4\}$。

解：随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},(k=0,1,2,\ldots)$$

由$P\{X=1\}=P\{X=2\}$，有$\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$，于是

$$\lambda^2-2\lambda=0$$

解得$\lambda=2$($\lambda=0$不合题意，忽略)，于是

$$P\{X=4\}=\frac{2^4}{4!}e^{-2}=\frac{2}{3}e^{-2}=0.09022$$

例13 设一个人在一年中得感冒次数服从参数$\lambda = 5$的泊松分布，现有一种预防感冒的药，对30%的人来讲，可将上述参数降为$\lambda = 1$(疗效显著)；对另外45%的人，可将参数降为$\lambda = 4$(疗效一般)；对其余的25%的人，则无效。现某人服用此药一年，其间得了3次感冒，求此药对他“疗效显著”的概率。

解：设 B={ 此人在一年中得3次感冒 },

$A_1=\{$疗效显著$\}$, $A_2=\{$疗效一般$\}$, $A_2=\{$该药无效$\}$

则由 Bayes 公式得

$$P(A_1|B)$$
$$=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)}$$
$$=\frac{0.30\times\frac{1^3}{3!}e^{-1}}{0.30\times\frac{1^3}{3!}e^{-1}+0.45\times\frac{4^3}{3!}e^{-4}+0.25\times\frac{5^3}{3!}e^{-5}}$$
$$=0.1301$$

Poisson定理

设随机变量$X_n(n=1,2,\ldots)$服从二项分布，其分布律为：

$$P\{X_n=k\}=C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}, (k=0,1,\ldots,n)$$

$\lim\limits_{n\to\infty} np_n=\lambda>0$, 则

$$\lim_{n\to\infty} P\{X_n=k\}=\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

证明：令$np_n=\lambda_n$，则

$$C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}$$

$$=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

证明(续)：

$$C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$= \frac{\lambda_n^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

对于固定的 k，由

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda_n}}\right]^{-\frac{n-k}{n}\lambda_n} = e^{-\lambda}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Poisson定理的应用

由 Poisson 定理，可知

若随机变量$X\sim B(n,p)$，则当n比较大，p比较小时，令$\lambda = np$，则有

$$P\{X=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

例 14 设每次射击命中目标的概率为0.012，现射击600次，求至少命中3次目标的概率（用Poisson分布近似计算）

解：设 B={ 600次射击至少命中3次目标 }

进行600次射击可看作是600重Bernoulli试验

X: 600次射击命中目标的次数

则 $X \sim B(600, 0.012)$

用Poisson分布近似计算，

取$\lambda = 600 \times 0.012 = 7.2$

$$P(B) = P\{X \geq 3\} = 1 - P\{X < 3\}$$

$$= 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} - P\{X = 2\}$$

$$\approx 1 - e^{-7.2} - 7.2e^{-7.2} - \frac{7.2^2}{2}e^{-7.2} \approx 0.9745$$

4）几何分布

若随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=q^{k-1}p,(k=1,2,\dots)$$

$$(\text{其中}p\geq 0,q\geq 0,p+q=1)$$

则称随机变量 X 服从参数为p的几何分布。

几何分布的概率背景

在Bernoulli试验中，$P(A)=p,P(\bar{A})=q=1-p$

试验进行到 *A* 首次出现为止，令X：所需实验次数

则 *X* 服从参数为 p 的几何分布。

因为$\{X=k\}=$

$\{$前$k-1$次试验中A不出现，第k次试验中A出现$\}$

即，$P\{X=k\}=q^{k-1}p,(k=1,2,\dots)$

例 15 对同一目标进行射击，设每次射击时的命中率为0.64，射击进行到击中目标时为止，令

X：所需射击次数

试求随机变量 X 的分布律，并求至少进行2次射击才能击中目标的概率。

解： X的取值为$1,2,\ldots,n,\ldots$，X服从参数为$p=0.64$的几何分布，故X的分布律为

$$P\{X=n\}=0.36^{n-1}\cdot 0.64,(n=1,2,\ldots)$$

$$P\{\text{至少射击2次才命中}\}=P\{X\geq n\}$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}0.36^{n-1}\cdot 0.64=0.64\times\frac{0.36}{1-0.36}=0.36$$

5）超几何分布

如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},(k=0,1,\dots,\min(M,n))$$

其中N,M,n均为自然数。

则称随机变量 X服从参数为(N,M,n)的超几何分布

超几何分布的概率背景

一批产品有 N 件，其中有 M 件次品，其余 N-M 件为正品。现从中取出 n 件。

令　X：取出 n 件产品中的次品数。则 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},(k=0,1,\dots,\min(M,n))$$

此时，随机变量 X 服从参数为 (N,M,n) 的超几何分布。

这个分布在涉及抽样的问题中常用，特别当 N 不大时。

因为通常在抽样时，多是 “无放回的” ，这就与同时抽出的效果一样。

如果是“有放回的抽” ，结果是二项分布。

若 n/N 很小，则放回与不放回差别不大。由此可见，在这种情况下超几何分布与二项分布很接近。

确切地说，若 X 服从超几何分布，则当 n 固定，M/N 固定，$N \to \infty$时，X 近似地服从二项分布。

作　业

《概率论与数理统计》P55

1, 3, 4, 8