组合数学作业二

题目*1-12*请于*10*月*15*号前提交电子版至课程网站，**选做题**请于*10*月*8*号前发送电子版至老师及助教的邮箱。老师及助教邮箱：*sunxiaoming@ict.ac.cn*，*sunyuan2016@ict.ac.cn*，*zhangzhijie@ict.ac.cn*。

请同学们阅读《组合数学》(Richard A. Brualdi 著；冯速等译，北京: 机械工业出版社)第二章、第五章和第七章。

1 设$f_0, f_1, \cdots, f_n, \cdots$表示斐波那契数列，计算：

a. (*1*分) $f_1 + f_3 + \cdots + f_{2n-1}$；

b. (*1*分) $f_0 - f_1 + f_2 - \cdots + (-1)^n f_n$。

2 Lucas数$l_0, l_1, \cdots, l_n, \cdots$是按照与定义斐波那契数相同的递推关系定义的，不过初始条件不同：

$$l_n = l_{n-1} + l_{n-2}(n \geq 2),\ l_0 = 2,\ l_1 = 1。$$

证明：

a. (*1*分) $l_n = f_{n-1} + f_{n+1}$，$n \geq 1$；

b. (*1*分) $l_0^2 + l_1^2 + \cdots + l_n^2 = l_n l_{n+1} + 2$，$n \geq 0$。

3 (*1*分) 求解非齐次递推关系

$$\begin{cases} h_n = 4h_{n-1} + 3 \times 2^n \quad (n \geq 1) \\ h_0 = 1 \end{cases}$$

4 (*1*分) 求解非齐次递推关系

$$\begin{cases} h_n = 2h_{n-1} + n \quad (n \geq 1) \\ h_0 = 1 \end{cases}$$

5 (*1*分) n个圆最多能将平面划分成多少个区域？

6 (*2*分) n个球面最多能将三维空间划分成多少个区域？

7 (*1*分) 设h_n表示有$n+2$条边的凸多边形被它的对角线分成的区域数，其中假设没有三条对角线有公共点，定义$h_0 = 0$。证明：

$$h_n = h_{n-1} + \binom{n+1}{3} + n,\ n \geq 1,$$

然后确定这个数列的生成函数，并由此得到h_n的公式。

8 (*2*分) 确定如下n位数的个数：每个数的各位数字都是奇数，而且1和3必须出现且出现偶数次。

9 (*2*分) 用大小为1×2的多米诺骨牌完全覆盖$3 \times n$的矩形区域(其中n为偶数)，一共有多少种不同的覆盖方法？

10 (*2*分) 计算由0，1和2组成的长度为n的字符串的个数，要求子串00，01，10和11从来不出现。

11 (*2*分) 某灯泡公司想确定其生产的灯泡从多高的楼层摔下来会摔碎，假设一共有n层楼，有两个完全相同的测试用灯泡,

a. 如果从某一层将一个灯泡扔下来没摔碎，那它可以被继续用来测试；

b. 如果从某一层将一个灯泡扔下来时摔碎了，那么从更高的楼层扔下来也会摔碎。

问最少需要测试多少次才能确定哪一层是灯泡可以安全下落的最高位置？如果有3个灯泡呢？

12 (Erdös-Ko-Rado定理) 集族$\mathcal{F} \subseteq 2^{\{1,\ldots,n\}}$，满足$\forall S \in \mathcal{F}$，$|S| = k$且$\forall S_1, S_2 \in \mathcal{F}$，$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$。其中$n, k$是正整数且$2k \leq n$。那么，

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}。$$

证明思路：我们将建立集族$\mathcal{F}$中的集合和圆排列的关系，通过这个关系来估计圆排列的个数，而这里估计的个数不会超过圆排列的总个数，以此证明$|\mathcal{F}|$的上界。

设C_n为所有圆排列组成的集合，我们建立关系$R \subseteq \mathcal{F} \times C_n$，对于某个$(S, \pi) \in R$当且仅当$\pi$中包含一段由$S$中所有元素组成的连续序列。又定义

$$r(\pi) := \{S \in \mathcal{F} \mid (S, \pi) \in R\}$$

之后的证明分为两步:

a. (*1*分) 证明$\forall \pi \in C_n$，$|r(\pi)| \leq k$；

b. (*1*分) 利用第一问的结论证明定理。

选做题

已知集族$\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$。若$\mathcal{F}$满足：

a. 对于$\forall A, B \in \mathcal{F}$，$A \cap B \neq \emptyset$，并且$\mathcal{F}$是一个反链。求$\max|\mathcal{F}|$；

b. 给定常数$k(2 \leq k \leq n-1)$，$\forall A, B \in \mathcal{F}$，$|A \cap B| \geq k$。求$\max|\mathcal{F}|$。

c. 给定常数$k(1 \leq k \leq n)$，$\forall A, B \in \mathcal{F}$，$|A \Delta B| \geq k$。求$\max|\mathcal{F}|$。若$\forall A, B \in \mathcal{F}$，$|A \Delta B| \leq k$，$\max|\mathcal{F}|$又是多少呢？