第一章 随机事件与概率

全概率公式

定义(样本空间的划分) 设Ω为试验E的样本空间，$B_1, B_2, \dots, B_n$为E的一组事件，若

(1) $B_iB_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1,2, \dots, n$

(2)$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$

则称$B_1, B_2, \dots, B_n$为样本空间Ω的一个划分

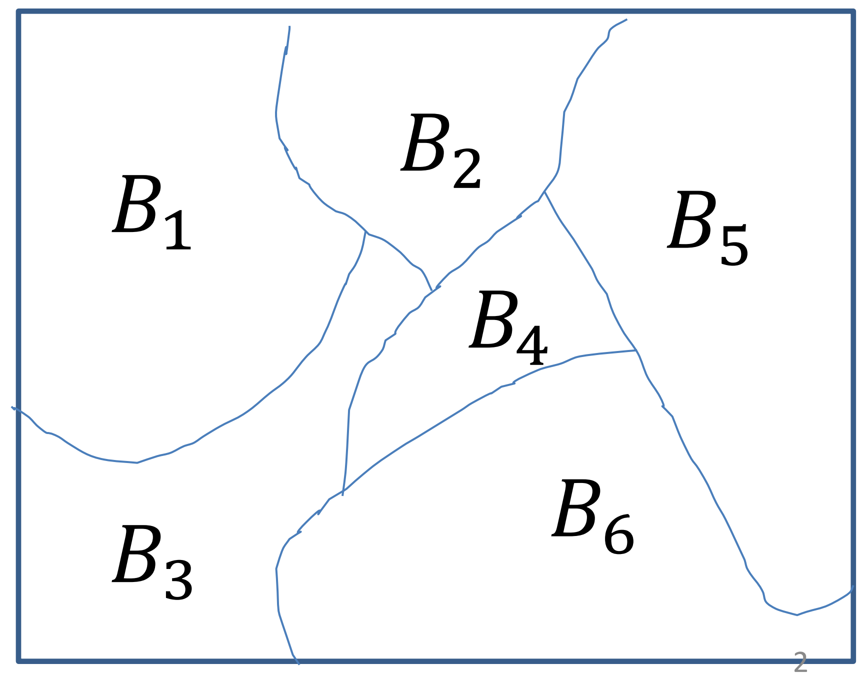
划分的特点：

对每次试验，有且仅有一个B_i发生

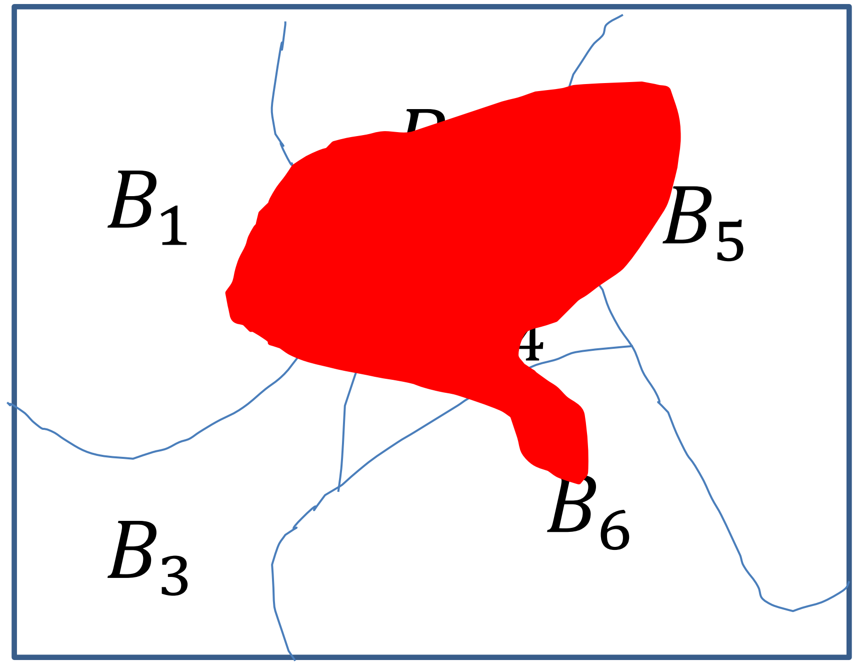
例如：掷骰子的两种划分

{1，3，5}，{2，4，6}

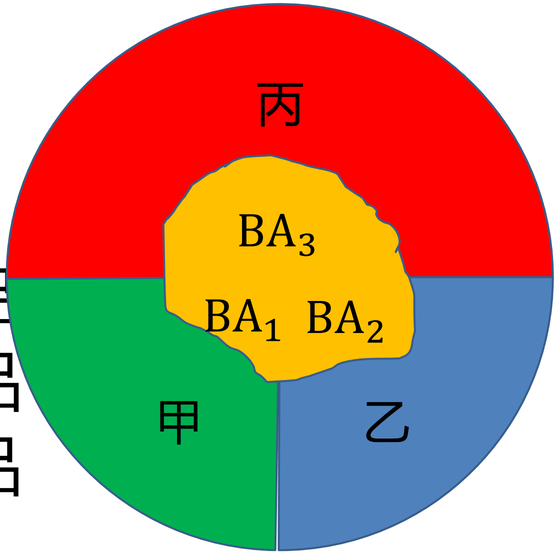
和{1，2，3}，{4，5，6}



- 用于解决难以直接计算概率，但可以从若干划分中解决的问题



例. 某品牌手机有甲、乙、丙三家代工厂，其产量分别占该品牌手机的1/4、1/4、1/2，且三家工厂的次品率分别为 2%、1%、3%，试求市场上该品牌手机的次品率。



解：设

事件B——买到的是一件次品

事件A_1——买到的是代工厂甲的产品

事件A_2——买到的是代工厂乙的产品

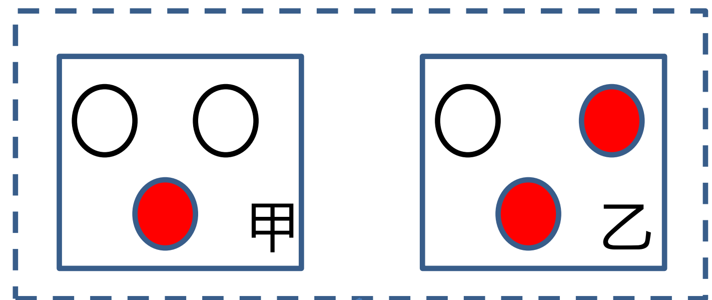
事件A_3——买到的是代工厂丙的产品

$$P(B) = P(BA_1) + P(BA_2) + P(BA_3)$$

$$=P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)$$

$$= 0.02 \times \frac{1}{4} + 0.01 \times \frac{1}{4} + 0.03 \times \frac{1}{2} = 0.0225.$$

有甲乙两个袋子，甲袋中有两个白球，1个红球，乙袋中有两个红球，一个白球．这六个球手感上不可区别．今从甲袋中任取一球放入乙袋，搅匀后再从乙袋中任取一球，问此球是红球的概率？



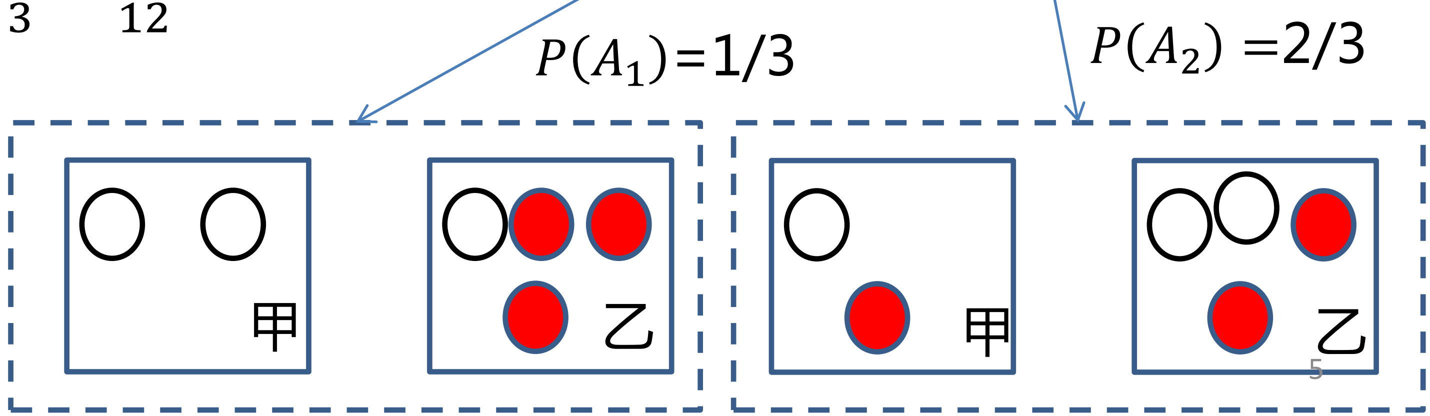
A_1——从甲袋中取出的是红球

A_2——从甲袋中取出的是白球

B——从乙袋中取出的是红球

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2)$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{12}$$



乘法公式的拓展

上例中，若已知取到一个红球，则从甲袋放入乙袋的是白球的概率是多少？

形式化：$P(A_2|B)$

由乘法公式：$P(BA_2) = P(A_2|B)P(B)$

于是$P(A_2|B) = \frac{P(BA_2)}{P(B)} = \frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}}{\frac{7}{12}} = \frac{4}{7}$

Bayes定理

定理 设实验E的样本空间为Ω，A为E的一个事件，$\mathrm{B}_i(i=1,2,\ldots,n)$是$\Omega$ 的一个划分，且P(A)>0，$\mathrm{P}(\mathrm{B}_i)>0\ (i=1,2,\ldots,n)$ ，则对任何事件A$\in\Omega$ ，有

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_iA)}{P(A)}=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)},(i=1,2,\ldots,n)$$

某小组有20名射手，其中一、二、三、四级射手分别为2、6、9、3名．又若选一、二、三、四级射手参加比赛，则在比赛中射中目标的概率分别为0.85、0.64、0.45、0.32，今随机选一人参加比赛，试求该小组在比赛中射中目标的概率。

解：设事件A={该小组在比赛中击中目标}

划分B_i ={选i级选手参加比赛} (i=1,2,3,4)

由已知条件有：

$\mathrm{P}(B_1)=0.1$, $\mathrm{P}(B_2)=0.3$, $\mathrm{P}(B_3)=0.45$, $\mathrm{P}(B_4)=0.15$

$\mathrm{P}(\mathrm{A}|B_1)=0.85$, $\mathrm{P}(A|B_2)=0.64$, $\mathrm{P}(A|B_3)=0.45$, $\mathrm{P}(A|B_4)=0.32$

于是：

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{A}) &= \mathrm{P}(\mathrm{B}_1)\mathrm{P}(A|B_1)+\mathrm{P}(\mathrm{B}_2)\mathrm{P}(A|B_2)+\mathrm{P}(\mathrm{B}_3)\mathrm{P}(A|B_3)\\ &\quad +\mathrm{P}(\mathrm{B}_4)\mathrm{P}(A|B_4)=0.5275\end{aligned}$$

问题：今随机选一人参加比赛射中了目标，求该选手是一、二、三、四级选手的概率。

形式化：$\mathrm{P}(B_i|A)$

$$\mathrm{P}(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{\sum_{i=1}^{4} P(A|B_i)P(B_i)} = \frac{0.085}{0.5275} \approx 0.1611$$

$$\mathrm{P}(B_2|A) = \frac{P(A|B_2)P(B_2)}{\sum_{i=1}^{4} P(A|B_i)P(B_i)} = \frac{0.192}{0.5275} \approx 0.3640$$

$$\mathrm{P}(B_3|A) = \frac{P(A|B_3)P(B_3)}{\sum_{i=1}^{4} P(A|B_i)P(B_i)} = \frac{0.2025}{0.5275} \approx 0.3839$$

$$\mathrm{P}(B_4|A) = \frac{P(A|B_4)P(B_4)}{\sum_{i=1}^{4} P(A|B_i)P(B_i)} = \frac{0.048}{0.5275} \approx 0.0910$$

先验与后验对比

先验	后验
$\mathrm{P}(B_1) = 0.1$	$\mathrm{P}(B_1 \mid A) \approx 0.1611$ $\nearrow$
$\mathrm{P}(B_2) = 0.3$	$\mathrm{P}(B_2 \mid A) \approx 0.3640$ $\nearrow$
$\mathrm{P}(B_3) = 0.45$	$\mathrm{P}(B_3 \mid A) \approx 0.3839$ $\searrow$
$\mathrm{P}(B_4) = 0.15$	$\mathrm{P}(B_4 \mid A) \approx 0.0910$ $\searrow$

先验与后验对比

先验	后验	条件概率
$\mathrm{P}(B_1) = 0.1$	$\mathrm{P}(B_1 \vert A) \approx 0.1611$ $\nearrow$	$\mathrm{P}(\mathrm{A} \vert B_1) = 0.85$
$\mathrm{P}(B_2) = 0.3$	$\mathrm{P}(B_2 \vert A) \approx 0.3640$ $\nearrow$	$\mathrm{P}(A \vert B_2) = 0.64$
$\mathrm{P}(B_3) = 0.45$	$\mathrm{P}(B_3 \vert A) \approx 0.3839$ $\searrow$	$\mathrm{P}(A \vert B_3) = 0.45$
$\mathrm{P}(B_4) = 0.15$	$\mathrm{P}(B_4 \vert A) \approx 0.0910$ $\searrow$	$\mathrm{P}(A \vert B_4) = 0.32$

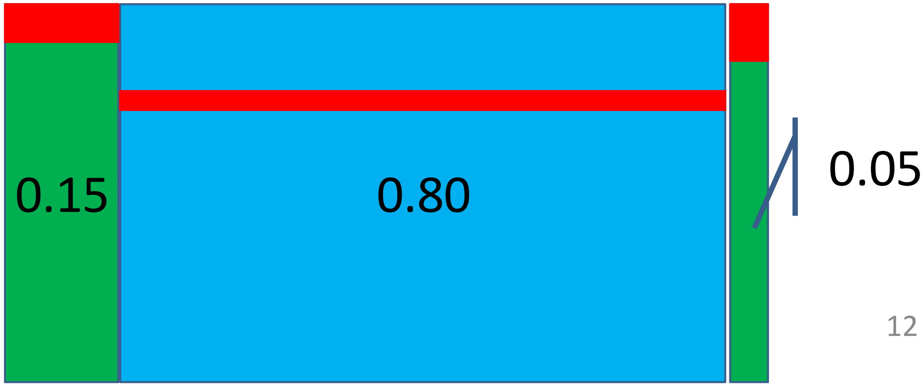
例 某电子设备制造厂所用的晶体管是由三家元件厂提供的。根据以往的记录有以下的数据。

元件厂	次品率	份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

设这三家厂的产品在仓库中是均匀混合的，且无区别的标志。

(1) 在仓库中随机的取一只晶体管，求它的次品率。

(2) 在仓库中随机的取一只晶体管，若已知取到的是次品，出自各家工厂的可能性。



解 ： 设 事件A 表示取到的是一只次品，事件B_i(i=1,2,3)表示取到的产品是由第i家工厂提供的,

	次品率 $\boldsymbol{P(A \mid B_i)}$		市场份额 $\boldsymbol{P(B_i)}$
M1	0.02	×	0.15
M2	0.01	×	0.80
M3	0.03	×	0.05

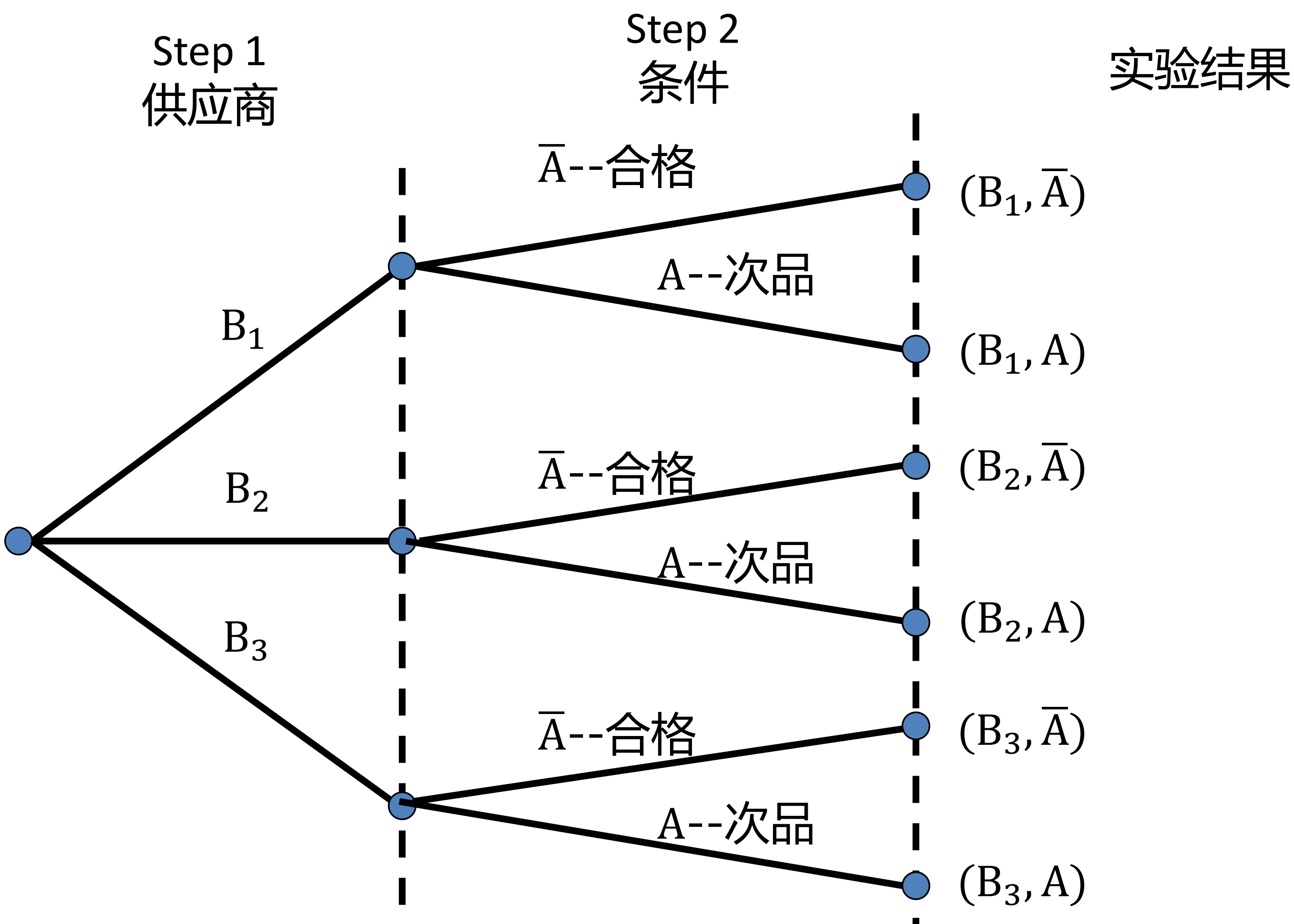
P(A)=0.0125

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}_1|A)=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}_1)\mathrm{P}(\mathrm{B}_1)}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}=\frac{0.02\times 0.15}{0.0125}=0.24$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}_2|A)=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}_2)\mathrm{P}(\mathrm{B}_2)}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}=0.64$$

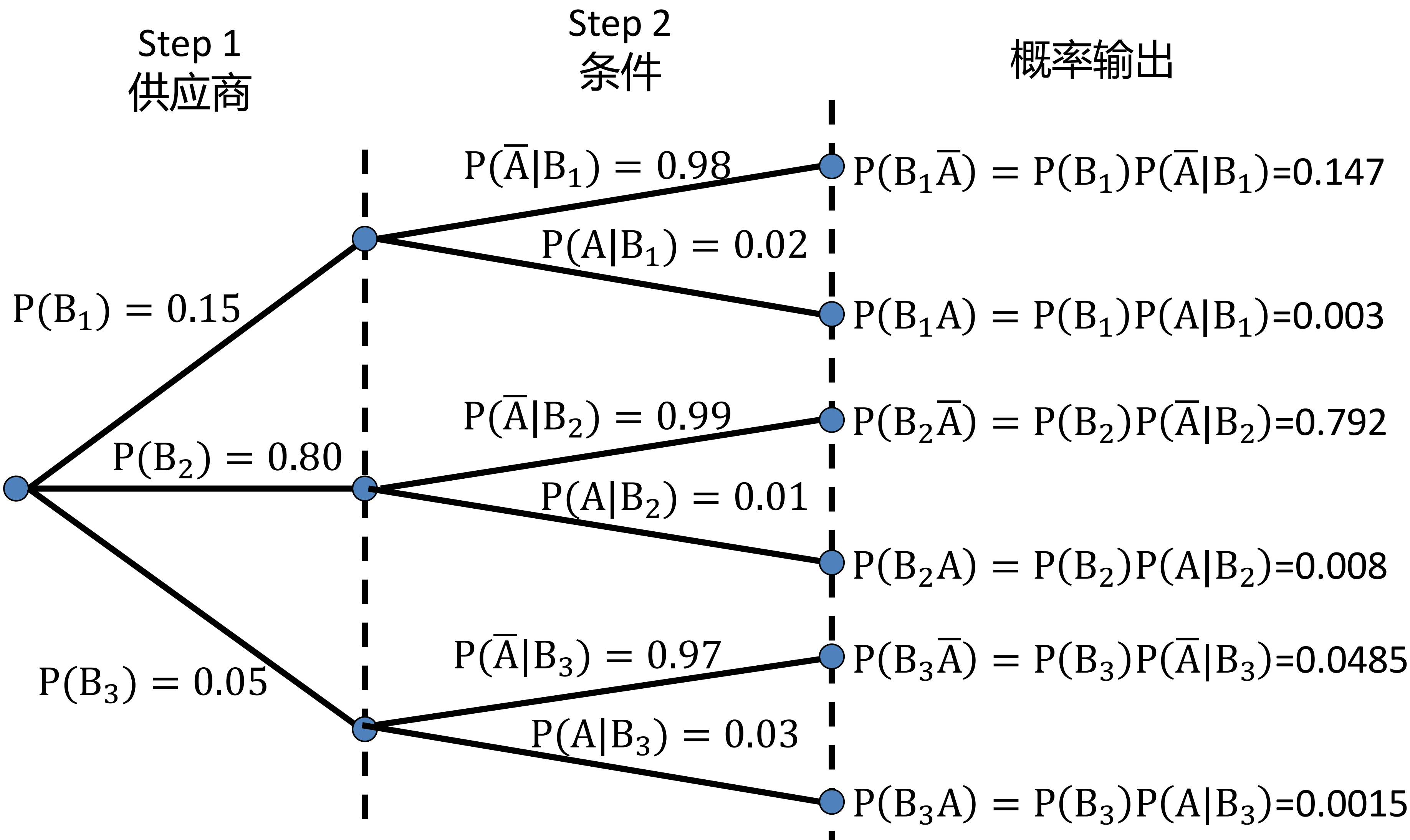
$$\mathrm{P}(\mathrm{B}_3|A)=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}_3)\mathrm{P}(\mathrm{B}_3)}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}=0.12$$

树状图表示



Step 1
供应商
Step 2
条件
实验结果
B_1
B_2
B_3
$\bar{A}$--合格
A--次品
$\bar{A}$--合格
A--次品
$\bar{A}$--合格
A--次品
$(B_1, \bar{A})$
(B_1, A)
$(B_2, \bar{A})$
(B_2, A)
$(B_3, \bar{A})$
(B_3, A)

树状图表示


Step 1
供应商
Step 2
条件
概率输出
$P(B_1) = 0.15$
$P(B_2) = 0.80$
$P(B_3) = 0.05$
$P(\bar{A}|B_1) = 0.98$
$P(A|B_1) = 0.02$
$P(\bar{A}|B_2) = 0.99$
$P(A|B_2) = 0.01$
$P(\bar{A}|B_3) = 0.97$
$P(A|B_3) = 0.03$
$P(B_1\bar{A}) = P(B_1)P(\bar{A}|B_1)$=0.147
$P(B_1A) = P(B_1)P(A|B_1)$=0.003
$P(B_2\bar{A}) = P(B_2)P(\bar{A}|B_2)$=0.792
$P(B_2A) = P(B_2)P(A|B_2)$=0.008
$P(B_3\bar{A}) = P(B_3)P(\bar{A}|B_3)$=0.0485
$P(B_3A) = P(B_3)P(A|B_3)$=0.0015

由树状图有

$$\mathrm{P(A)} = \mathrm{P(B_1A)} + \mathrm{P(B_2A)} + \mathrm{P(B_3A)} = 0.125$$

同样，

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}_1|A) = \frac{\mathrm{P(A|B_1)P(B_1)}}{\mathrm{P(A)}} = \frac{0.02 \times 0.15}{0.0125} = 0.24$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}_2|A) = \frac{\mathrm{P(A|B_2)P(B_2)}}{\mathrm{P(A)}} = 0.64$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}_3|A) = \frac{\mathrm{P(A|B_3)P(B_3)}}{\mathrm{P(A)}} = 0.12$$

关于Bayes公式

乘法定理

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_iA)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$

条件概率

全概率公式

关于Bayes公式

- 理解1——试图从结果寻求原因，但本质上是发现关联因素，而非原因
  - 我们把事件A看作某一过程的结果，把$\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \ldots \mathrm{B}_n$看作是导致该结果所有可能因素
  - 根据历史信息，有先验知识，即对每一因素发生的概率已知($\mathrm{P}(\mathrm{B}_i)$已知)，故$\mathrm{P}(\mathrm{B}_i)$又称为先验概率
  - 同时对每种因素对结果的影响程度有了解($\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}_i)$已知），故$\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}_i)$又称为条件概率
  - 如果事件A已经发生，要求推断此事是由第i个因素引起的概率($\mathrm{P}(\mathrm{B}_i|\mathrm{A})$)，故$\mathrm{P}(\mathrm{B}_i|\mathrm{A})$又称为后验概率

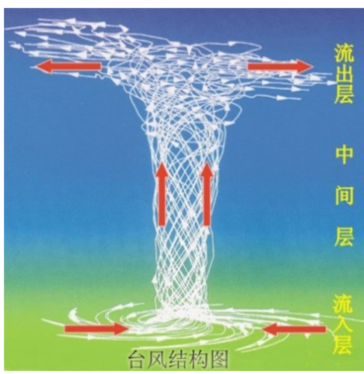
关于Bayes公式

- 理解2——组合先验知识与新获得信息进而修正结论或估计后验的方法

$\mathrm{P}(\mathrm{B}_i)$

B_i——可能路径

固有先验知识



加入新信息

Bayes公式

$\mathrm{P}(A|\mathrm{B}_i)$

A——台风类型

$\mathrm{P}(\mathrm{B}_i|\mathrm{A})$

通过观察，修正预测

关于Bayes公式

- 理解3——建模因果关系，获得对现象原因的推断

$P(B_i)$

B_i——雾霾成因

固有先验知识

加入因果关系模型

Bayes公式

$P(A|B_i)$
各种因素导致雾霾的模型

$P(B_i|A)$
判断主要因素

假阳性之谜

例：某种方法对患病者的阳性率为0.95，对非患病者的阴性率为0.96，人群中该疾病的发病率为0.001。随机抽出一人，检出为阳性，则该人的患病率为多大？

解：事件A——该人患病，事件B——该人检出为阳性

	结果阳性	结果阴性
患病者	$\mathrm{P(B\|A)} = 0.95$	$\mathrm{P(\bar{B}\|A)} = 0.05$ (漏检率)
非患病者	$\mathrm{P(B\|\bar{A})} = 0.04$ (误检率)	$\mathrm{P(\bar{B}\|\bar{A})} = 0.96$

实际问题：$\mathrm{P(A|B)}$？, 由Bayes公式：

$$\mathrm{P(A|B)} = \frac{\mathrm{P(B|A)}P(\mathrm{A})}{\mathrm{P(B|A)P(A)} + \mathrm{P(B|\bar{A})P(\bar{A})}} = \frac{0.95 \times 0.001}{0.95 \times 0.001 + 0.04 \times 0.999} \approx 0.0232$$

P(B|A)远不能代表P(A|B)，别被检查结果吓坏

假阳性之谜

例：某种方法对患病者的阳性率为0.95，对非患病者的阴性率为0.96，人群中该疾病的发病率为0.001。随机抽出一人，检出为阳性，则该人的患病率为多大？

解(续)：检出阴性是否安全？

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}|\overline{\mathrm{B}}) = \frac{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}}|\overline{\mathrm{A}})P(\overline{\mathrm{A}})}{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}}|\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}}|\overline{\mathrm{A}})\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})} = \frac{0.96 \times 0.999}{0.05 \times 0.001 + 0.96 \times 0.999} \approx 0.9999479$$

$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}|\overline{\mathrm{B}})$比$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}}|\overline{\mathrm{A}})$(=0.96)安全程度大为提升

两类事件的Bayes公式

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2)}$$

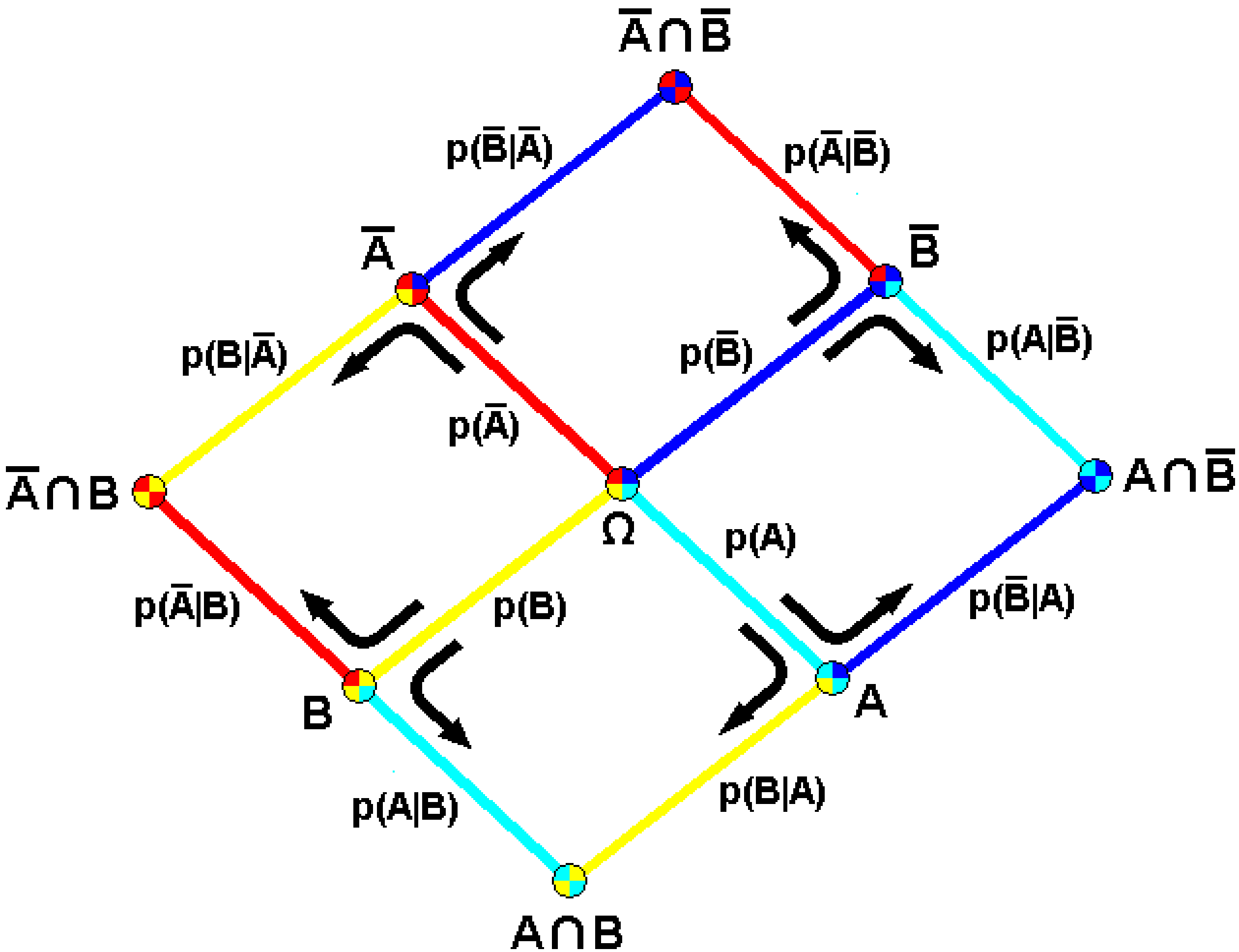
$$P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2)}$$

关于Bayes方法的一些注释

- Thomas Bayes(1702-1761.4.17)——18世纪的英国牧师
- 关注将先验知识融于概率计算
- Bayes方法可广泛用于各种参数估计，如比例、极值、系数等
- Bayes主义与频率主义者分歧
  - 频率主义者的疑问：先验知识往往带有偏差和主观性
- 频率主义与Bayes主义的差异

频率主义	Bayes主义
参数不是随机的	参数是随机的
置信区间	通过后验分布

事件概率间的关系



$$p(A|B) * p(B) = p(A\cap B) = p(B|A) * p(A)$$

https://en.wikipedia.org/wiki/Bayes%27_theorem

§5. 独立性

例：袋中有 a 只黑球，b 只白球．每次从中取出一球，取后放回．令A={ 第一次取出白球 }，B={ 第二次取出白球 }，

求：P(B)和P(B|A)

解：按定义，

$$\mathrm{P(A)}=\frac{b}{a+b},\mathrm{P(AB)}=\left(\frac{b}{a+b}\right)^2,\mathrm{P(\bar{A}B)}=\frac{ab}{(a+b)^2}$$

由$\mathrm{B}=\mathrm{AB}\cup\mathrm{\bar{A}B}$，得

$$\mathrm{P(B)}=\mathrm{P(AB)}+\mathrm{P(\bar{A}B)}=\left(\frac{b}{a+b}\right)^2+\frac{ab}{(a+b)^2}=\frac{b}{a+b}$$

而

$$\mathrm{P(B|A)}=\frac{\mathrm{P(AB)}}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{b^2}{(a+b)^2}}{\frac{b}{a+b}}=\frac{b}{a+b}$$

独立性

- 由上例，可知 P(B)=P(B|A)
- 这表明，
  - 事件 A 是否发生对事件 B 是否发生在概率上是没有影响的，即事件 A 与 B 呈现出某种独立性
  - 事实上，由于是有放回摸球，因此在第二次取球时，袋中球的总数未变，并且袋中的黑球与白球的比例也未变，这样，在第二次摸出白球的概率自然也未改变．

事件独立性的定义

设 A、B 是两个随机事件，如果满足

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(A)P(B)$$

则称 A 与 B 是相互独立的随机事件

事件独立性的性质

定理：如果事件A 与 B 相互独立，而且P(A)>0，则P(B|A)=P(B)

证明： 由于事件A与B相互独立，故P(AB)=P(A)P(B)

于是$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B)$

定理：必然事件Ω与任意随机事件A相互独立，不可能事件∅与任意随机事件A相互独立。

证明： P(ΩA)=P(A)=1∗P(A)=P(Ω)P(A)

可知必然事件S 与任意事件 A 相互独立；

P(∅A)=P(∅)=0=P(∅)p(A)

可知不可能事件∅与任意随机事件A相互独立

事件独立性的性质

定理：若随机事件A与B相互独立，则下列各对事件也相互独立：

$$\mathrm{A}与\overline{\mathrm{B}}，\overline{\mathrm{A}}与\mathrm{B}，\overline{\mathrm{A}}与\overline{\mathrm{B}}$$

证明：由于$\mathrm{A}=\mathrm{A}(\mathrm{B}\cup\overline{\mathrm{B}})=\mathrm{AB}\cup\mathrm{A}\overline{\mathrm{B}}$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A})=\mathrm{P}(\mathrm{AB})+\mathrm{P}(\mathrm{A}\overline{\mathrm{B}})=\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})+\mathrm{P}(\mathrm{A}\overline{\mathrm{B}})$$

于是

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\overline{\mathrm{B}})=\mathrm{P}(\mathrm{A})-\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})\big(1-\mathrm{P}(\mathrm{B})\big)=\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}})$$

故A与$\overline{\mathrm{B}}$ 独立，类似地$\overline{\mathrm{A}}$与B 独立

在此基础上利用$\overline{\overline{\mathrm{B}}}=\mathrm{B}$，有$\overline{\mathrm{A}}$与$\overline{\mathrm{B}}$ 独立

互不相容($AB=\varnothing$)与相互独立($P(AB)=P(A)P(B)$)的关系

设事件 A 与 B 满足：

(1) 若事件A与B相互独立，则$AB\neq\varnothing$；

(2) 若 $AB=\varnothing$，则事件 A 与 B 不相互独立．

证明：(1) 由于事件A与B相互独立，于是：

$P(AB)=P(A)P(B)\neq 0$

所以， $AB\neq\varnothing$

(2) 由于$AB=\varnothing$，所以$P(AB)=P(\varnothing)=0$

但是，由题设，只要$A\neq\varnothing$且$B\neq\varnothing$，则$P(A)P(B)\neq 0$

于是事件A与B不相互独立

此例说明：当A、B非$\varnothing$时,互不相容($AB=\varnothing$)与相互独立($P(AB)=P(A)P(B)$)不能同时成立

例 (不独立事件的例子)：袋中有 a 只黑球，b 只白球．每次从中取出一球，取后不放回．令 A={ 第一次取出白球 }，B={ 第二次取出白球 }，求P(B)和P(B|A)。

解: 由题意，有

$$\mathrm{P(A)} = \frac{b}{a+b}$$

$$\mathrm{P(AB)} = \frac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}, \mathrm{P(\bar{A}B)} = \frac{ab}{(a+b)(a+b-1)}$$

于是

$$\mathrm{P(B)} = \mathrm{P(AB)} + P(\bar{A}B) = \frac{b}{a+b}$$

而

$$\mathrm{P(B|A)} = \frac{\mathrm{P(AB)}}{\mathrm{P(A)}} = \frac{b-1}{a+b-1}$$

$$\mathrm{P(B)} \neq \mathrm{P(B|A)}$$ (不独立)

- 结论似乎是显然的，事件 A 与事件 B 不相互独立．事实上，由于是不放回抽样，因此在第二次取球时，袋中球的总数变化了，并且袋中的黑球与白球的比例也发生变化了，这样，在第二次取出白球的概率自然也应发生变化．或者说，第一次的取球结果对第二次取球肯定是有影响的

实际问题中的独立性判断

- 实际应用中，往往难以从定义直接判断，而是根据实际意义来加以判断的
- 在习题中，一般把独立性作为条件直接给出

独立性推广——三事件

设A、B、C是三个随机事件，如果满足

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(BC) = P(B)P(C) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

则称A、B、C是相互独立的随机事件

注意：

在三个事件独立性的定义中，四个等式是缺一不可的．即：前三个等式的成立不能推出第四个等式的成立；反之，最后一个等式的成立也推不出前三个等式的成立．

两两独立并不意味着三个事件独立

考虑字母a,b,c的6个排列，再加上3个三元组(a,a,a), (b,b,b), (c,c,c)共9个三元组构成一个样本空间

{aaa, bbb, ccc, abc, acb, bac, bca, cab, cba}

赋各样本点均匀概率1/9。令A_k是字母a出现在第k(k=1,2,3)个位置的事件，显然

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)=\mathrm{P}(\mathrm{A}_2)=\mathrm{P}(\mathrm{A}_3)=\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2)=\mathrm{P}(\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3)=\mathrm{P}(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3)=\frac{1}{9}$$

但是

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3)=\frac{1}{9}$$

两两独立，并不代表三个事件独立。

例：袋中装有 4 个外形相同的球，其中三个球分别涂有红、白、黑色，另一个球涂有红、白、黑三种颜色．现从袋中任意取出一球，令

A={ 取出的球涂有红色 }

B={ 取出的球涂有白色 }

C={ 取出的球涂有黑色 }

则

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{C})=\frac{1}{2},\qquad \mathrm{P}(\mathrm{AB})=\mathrm{P}(\mathrm{BC})=\mathrm{P}(AC)=\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{ABC})=\frac{1}{4}$$

于是

$$\mathrm{P}(\mathrm{AB})=\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B}),\mathrm{P}(\mathrm{BC})=\mathrm{P}(\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{C}),\mathrm{P}(\mathrm{AC})=\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{C}),$$

但是

$$\mathrm{P}(\mathrm{ABC})\neq\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{C})$$

独立性推广——n事件

设$A_1, A_2, \dots, A_n$是n个随机事件，如果满足

$$\begin{cases} P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j) & (1 \le i < j \le n) \\ P(A_iA_jA_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k) & (1 \le i < j < k \le n) \\ \dots\dots & \dots\dots \\ P(A_1A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2)\dots\dots P(A_n) & \end{cases}$$

则称$A_1, A_2, \dots, A_n$ 是n个相互独立的随机事件

注意上面第i行有C_n^{i+1}个等式，共有

$$C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n = 2^n - C_n^0 - C_n^1 = 2^n - n - 1$$

个等式

独立随机事件的性质及应用

如果$\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ 是n个相互独立的随机事件，则$\mathrm{A}_{i_1}, \mathrm{A}_{i_2}, \ldots, \mathrm{A}_{i_m}, \bar{\mathrm{A}}_{i_{m+1}}, \ldots, \bar{\mathrm{A}}_{i_n}$ 这n个随机事件相互独立。其中$i_1, i_2, \ldots, i_n$是1, 2, …, n的一个排列

独立事件至少发生其一的情形

若$\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$是相互独立的事件，则

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \cdots \cup \mathrm{A}_\mathrm{n}) = 1 - \mathrm{P}(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \ldots \bar{A}_n) = 1 - \mathrm{P}(\bar{A}_1)\mathrm{P}(\bar{A}_2) \ldots \mathrm{P}(\bar{A}_n)$$

若$\mathrm{P}(\mathrm{A}_i) = p$，则

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \cdots \cup \mathrm{A}_\mathrm{n}) = 1 - (1-p)^n$$

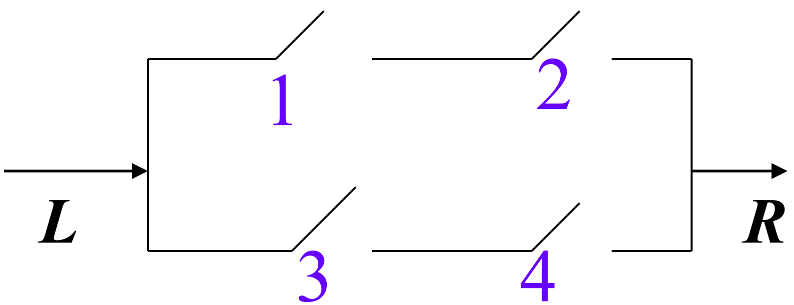
只要$p < 1$，$\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \cdots \cup \mathrm{A}_\mathrm{n}) \to 1$

小概率事件终究要发生

例：设有电路如图，其中 1, 2, 3, 4 为继电器接点。设各继电器接点闭合与否相互独立，且每一个继电器接点闭合的概率均为 p。求 L至 R 为通路的概率。

解： 设事件 $A_i (i = 1,2,3,4)$ 为第 i 个继电器接点闭合，L 至 R 为通路这一事件可表示为

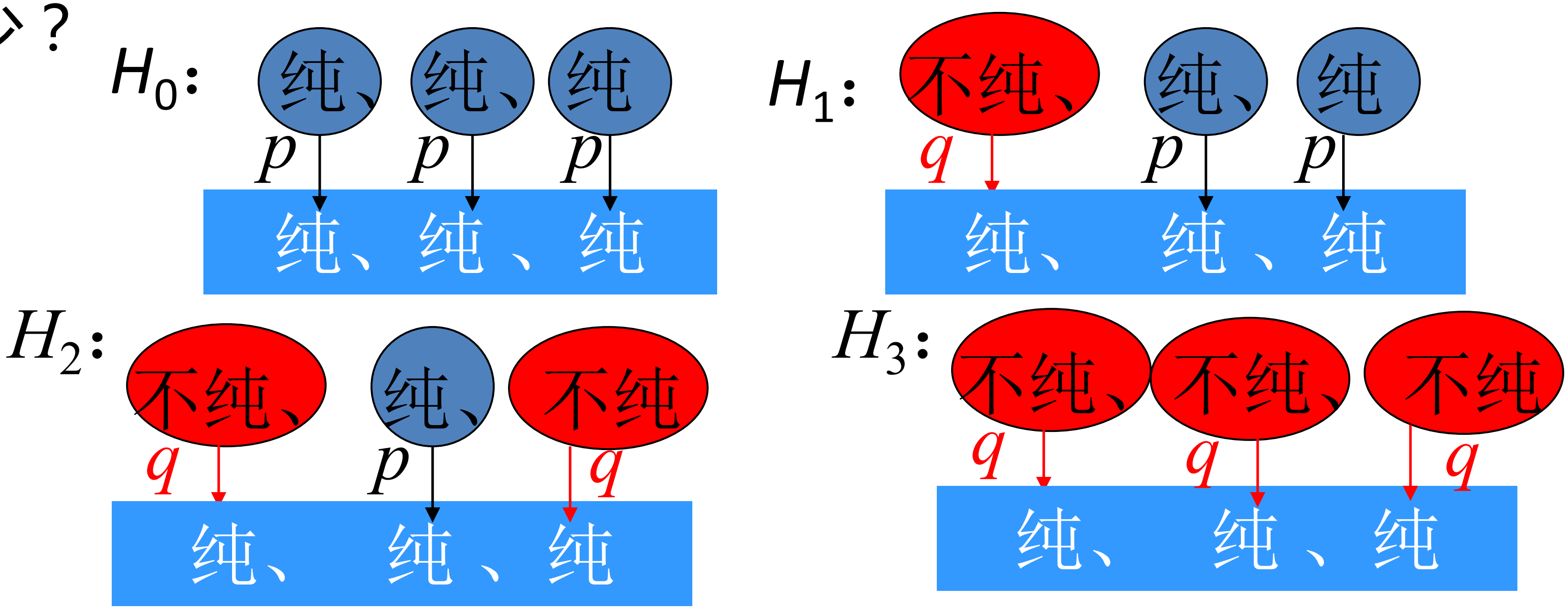
$$A = A_1 A_2 \cup A_3 A_4$$



于是

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 A_2 \cup A_3 A_4) \\ &= P(A_1 A_2) + P(A_3 A_4) - P(A_1 A_2 A_3 A_4) \quad \text{(和事件关系)} \\ &= P(A_1)P(A_2) + P(A_3)P(A_4) \\ &\qquad - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) \quad \text{(独立性)} \\ &= 2p^2 - p^4 \end{aligned}$$

例 6　要验收一批（100 件) 乐器。验收方案如下：自该批乐器中随机地抽取 3 件测试（设 3 件乐器的测试是相互独立的），如果至少有一件被测试为音色不纯，则拒绝接受这批乐器。设一件音色不纯的乐器被测试出来的概率为 0.95，而一件音色纯的乐器被误测为不纯的概率为 0.01。如果这批乐器中恰有 4 件是音色不纯的，问这批乐器被接受的概率是多少？



$p=1-0.01=0.99$,　　$q=1-0.95=0.05$

解：以事件$H_i(i=0,1,2,3)$ 表示随机取出的 3 件乐器中恰有i件音色不纯，以事件A 表示这批乐器被接受，即3件都被测试为音色纯的乐器。由测试的相互独立性得

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{H}_0)=0.99^3$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{H}_1)=0.99^2\times0.05$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{H}_2)=0.99\times0.05^2$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{H}_3)=0.05^3$$

另外，按照超几何分布的概率计算公式得

$$\mathrm{P}(\mathrm{H}_0)=C_{96}^3/C_{100}^3$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{H}_1)=C_4^1C_{96}^2/C_{100}^3$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{H}_2)=C_4^2C_{96}^1/C_{100}^3$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{H}_3)=C_4^3/C_{100}^3$$

故

$$\mathrm{P}(\mathrm{A})=\sum_{i=1}^{3}\mathrm{P}(A|\mathrm{H_i})\mathrm{P}(\mathrm{H_i})=0.8629$$

n重伯努利(Bernoulli)概型

- 伯努利（Bernoulli）试验
  - 如果随机试验 E 只有两个结果，则称E为Bernoulli试验一般地，将这两个结果分别记为A与$\overline{A}$，分别表示“成功”与“失败”

Bernoulli 试验的例子

- 掷一枚硬币，只有“出现正面”与“出现反面”两种结果，因此“掷一枚硬币”可看作是一次Bernoulli试验
- 掷一颗骰子，有六种结果．但如果我们只关心“出现六点”与“不出现六点”这两种情况，故“掷一颗骰子”也可以看作是Bernoulli试验．
- 对同一目标进行一次射击，若只考虑“击中目标”与“未击中目标”两种情况，则“对同一目标进行一次射击”是Bernoulli试验
- 在某一时间间隔内观察通过某路口的汽车数，若只考虑“至少通过100辆车”与“至多通过99辆车”这两种情况，这也是Bernoulli试验

n重Bernoulli 试验

- 若独立重复地进行n次Bernoulli试验，这里“重复”是指每次试验中事件 A 发生的概率（即每次试验中“成功”的概率）不变，“独立”是指各次试验的结果相互独立，则称该试验为 n 重Bernoulli 试验

n重Bernoulli 试验的例子

- 掷n次硬币，可看作是一 n 重 Bernoulli试验
- 掷n颗骰子，如果我们对每颗骰子只关心“出现六点”与“不出现六点”这两种情况，故“掷n颗骰子”也可以看作是一n重 Bernoulli试验
- 对同一目标进行n次射击，若每次射击只考虑“击中目标”与“未击中目标”两种情况，则“同一目标进行n次射击”是一n重Bernoulli试验
- 在某一时间间隔内观察通过某路口的汽车数，若只考虑“至少通过100辆车”与“至多通过99辆车”这两种情况，这是一次Bernoulli试验.若独立重复地做该试验 n 次，则它是一n重Bernoulli试验

n重Bernoulli 试验中的基本事件及其概率

在n重Bernoulli 试验中的基本事件为$A_1'A_2' \dots\dots A_n'$，其中A_i'或者为A或者为$\overline{\mathrm{A}}$，共有2^{n}种可能。

设在$A_1'A_2' \dots\dots A_n'$中有k个A，n-k个$\overline{\mathrm{A}}$，且$\mathrm{P(A)} = p$，$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - p = q$。

由独立性有：$\mathrm{P}(A_1'A_2' \dots\dots A_n') = p^k q^{n-k}$

n重Bernoulli 试验中恰好成功k次的概率

- 设在一次Bernoulli 试验中， $\mathrm{P(A)}=p,\ \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})=1-p=q$
- 现考虑事件

$$\mathrm{B_{n,k}}=\{\text{n重Bernoulli 试验中事件}A\text{恰好发生k次}\}$$

的概率$\mathrm{P}(\mathrm{B_{n,k}})=\mathrm{P}_n(k)$

在n次试验中，指定k次出现A，其余n-k次出现$\overline{\mathrm{A}}$，这种指定的方法共有C_n^k种

n重Bernoulli 试验中恰好成功k次的概率为：

$$\mathrm{P}_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},\qquad (q=1-p, k=0,1,2,\ldots,n)$$

由二项式定理，我们有

$$\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}_n(k)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k p^k q^{n-k}=(p+q)^n=1$$

n重Bernoulli 试验应用

例　一大批产品的次品率为0.05，现从中取出10件．试求下列事件的概率：

B={ 取出的10件产品中恰有4件次品 }

C={ 取出的10件产品中至少有2件次品 }

D={ 取出的10件产品中没有次品 }

解：A={取出1件产品为次品}，则P(A)=0.05

取10件产品可看作是 10重Bernoulli试验，于是：

$$\mathrm{P(B)} = \mathrm{C}_{10}^{4} \times 0.05^{4} \times 0.95^{10-4} = 9.648 \times 10^{-4}$$

$$\mathrm{P(C)} = 1 - \mathrm{P}(\bar{\mathrm{C}})$$

$$= 1 - C_{10}^{0} \times 0.05^{0} \times 0.95^{10} - C_{10}^{1} \times 0.05^{1} \times 0.95^{9}$$

$$= 0.08614$$

$$\mathrm{P(D)} = 0.95^{10} = 0.5987$$

作业

- 概率论及其应用
  - p. 109, #26
  - P. 129, #5, #12, #16
- 概率论与数理统计
  - pp. 26-29, #23, #25, #26，#29，#33，#35，#38