第二章 随机变量及其分布

§1 随机变量
§2 离散型随机变量的概率分布
§3 随机变量的分布函数
§4 连续型随机变量及其概率密度（1）

§3 随机变量的分布函数

分布函数的定义及其性质

离散型随机变量的分布函数

一、分布函数的定义及其性质

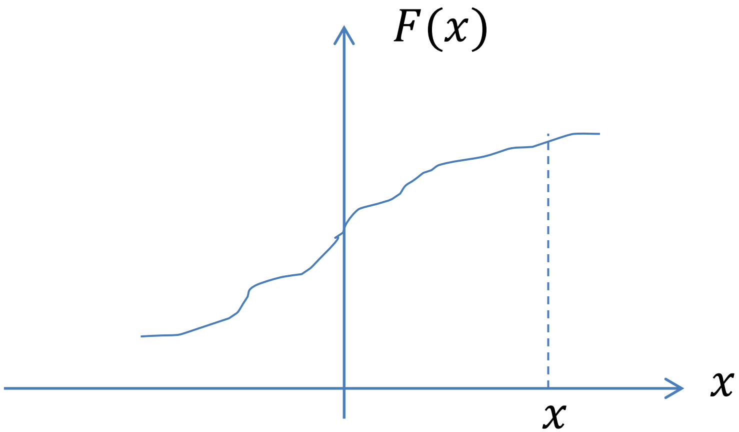
定义：设 X 是一个随机变量， x是任意实数，函数

$$F(X) = P\{X \leq x\}$$

称为 X 的分布函数。

说明：$F(X)$是x的实值单调不减函数

$$x \in (-\infty, \infty), F(X) \in [0,1]$$



分布函数的性质

1. $F(x)$是一个不减的函数

   即对$x_1 < x_2$，有$F(x_1) \le \mathrm{F}(x_2)$

   证：由于$x_1 < x_2$，有$\{X \le x_1\} \subset \{X \le x_2\}$

   固有

   $$F(x_1) = P\{X \le x_1\} \le P\{X \le x_2\} = F(x_2)$$

2. $0 \le F(X) \le 1$，且

   $$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0;$$

   $$F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$

3. $F(x+0) = F(x)$，即$F(x)$是右连续的

4. 对于任意的实数$x_1, x_2 (x_1 \le x_2)$，有

$$P\{x_1 < \mathrm{X} \le \mathrm{x}_2\} = P\{X \le \mathrm{x}_2\} - P\{X \le \mathrm{x}_1\}$$
$$= F(x_2) - F(x_1)$$

证：由$\{x_1 < \mathrm{X} \le \mathrm{x}_2\} = \{X \le \mathrm{x}_2\} - \{X \le \mathrm{x}_1\}$

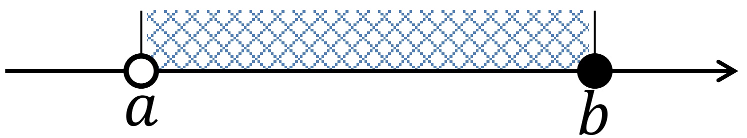
于是

$$P\{x_1 < \mathrm{X} \le \mathrm{x}_2\} = P\{X \le \mathrm{x}_2\} - P\{X \le \mathrm{x}_1\}$$
$$= F(x_2) - F(x_1)$$

应用：1. 用分布函数计算某些事件的概率

设$F(x) = P\{X \le x\}$是随机变量X的分布函数，则

A. $P\{a < X \le b\} = P\{X \le b\} - P\{X \le a\}$
$= F(b) - F(a)$



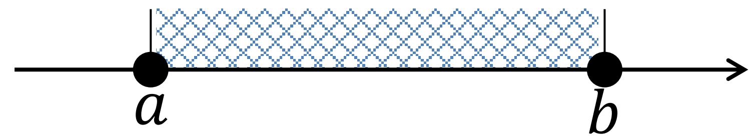
证：

$$P\{X < a\} = \lim_{x \to a^-} F(x) = F(a-0)$$

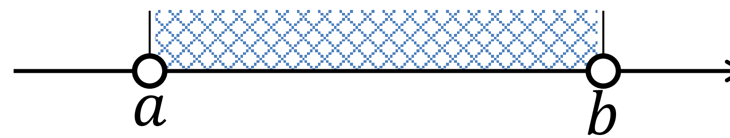
$$P\{X = a\} = P\{X \le a\} - P\{X < a\}$$
$$= F(a) - F(a-0)$$

应用：1. 用分布函数计算某些事件的概率 (续)

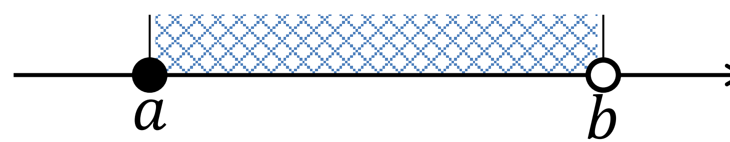
B. $P\{a \leq X \leq b\} = P\{X \leq b\} - P\{X < a\}$
$= F(b) - F(a-0)$



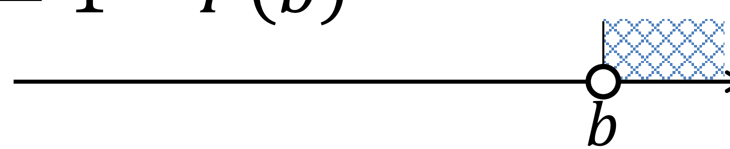
C. $P\{a < X < b\} = P\{X < b\} - P\{X \leq a\}$
$= F(b-0) - F(a)$



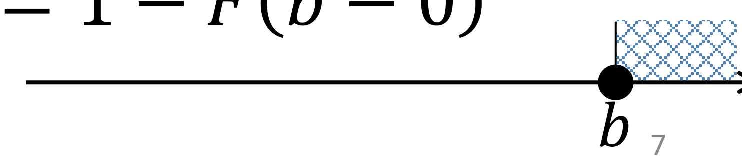
D. $P\{a \leq X < b\} = P\{X < b\} - P\{X < a\}$
$= F(b-0) - F(a-0)$



E. $P\{X > b\} = 1 - P\{X \leq b\} = 1 - F(b)$

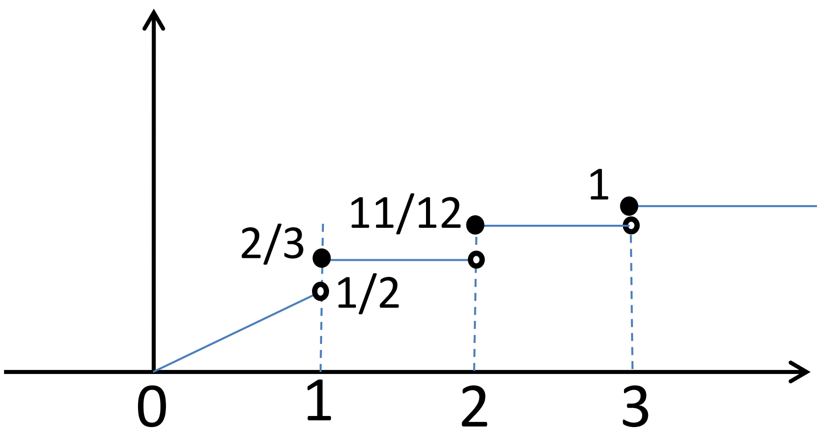


F. $P\{X \geq b\} = 1 - P\{X < b\} = 1 - F(b-0)$



例 1 设随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x/2 & 0\le x<1\\ 2/3 & 1\le x<2\\ 11/12 & 2\le x<3\\ 1 & 3\le x\end{cases}$$



于是

1. $P\{X\le 3\}$

$$=F(3)=1$$

2. $P\{X<3\}$

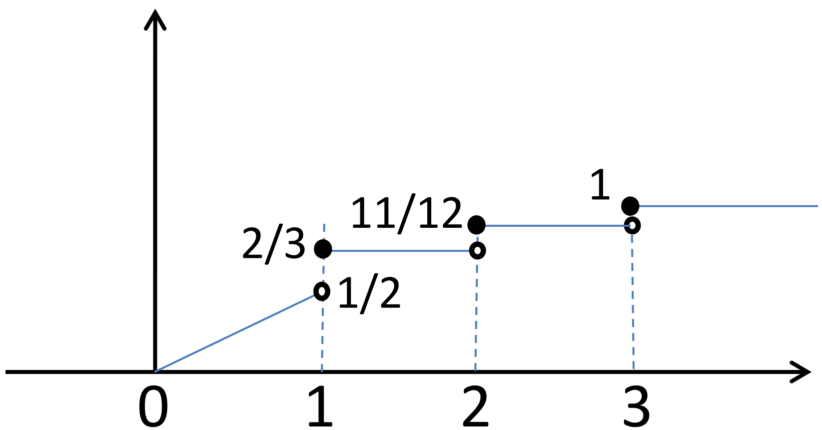
$$=F(3-0)=\frac{11}{12}$$

3. $P\{X=1\}$

$$=F(1)-F(1-0)=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

例 1 设随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x/2 & 0\le x<1\\ 2/3 & 1\le x<2\\ 11/12 & 2\le x<3\\ 1 & 3\le x\end{cases}$$



4. $P\{X>1/2\}$

$$=1-F\left(\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

5. $P\{2<X<4\}$

$$=F(4-0)-F(2)=1-\frac{11}{12}=\frac{1}{12}$$

6. $P\{1\le X<3\}$

$$=F(3-0)-F(1-0)=\frac{11}{12}-\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$$

应用：2. 用分布函数的性质确定$F(X)$中的待定常数

例 2 设随机变量 X 分布函数为

$$F(x) = A + B\,\mathrm{atan}\,x, (-\infty < x < \infty)$$

试求常数A, B。

解：由分布函数的性质，我们有

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} (A + B\,\mathrm{atan}\,x)$$

$$= A - \frac{\pi}{2}B = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} (A + B\,\mathrm{atan}\,x)$$

$$= A + \frac{\pi}{2}B = 1$$

因此，

$$A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{\pi}$$

例 3.设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ A\sin x & 0\le x\le \pi/2\\ 1 & x>\pi/2\end{cases}$$

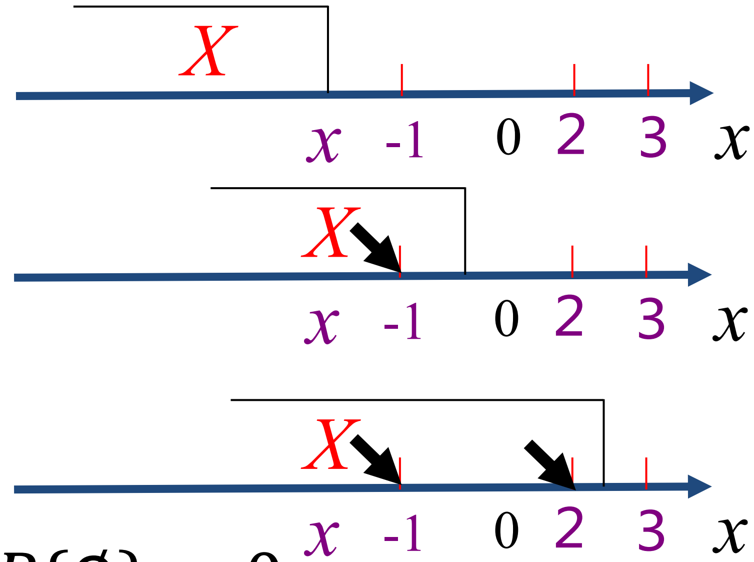
试确定A。

解：由分布函数的右连续性，我们有

$$F\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=F\left(\frac{\pi}{2}\right)=A=1$$

二、离散型随机变量的分布函数

例 4 设随机变量X的分布律为：



X	-1	2	3
P_k	¼	½	¼

求X的分布函数.

解：当$x < -1$时，$\{X \le \mathrm{x}\} = \emptyset$

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{\emptyset\} = 0$$

当$-1 \le x < 2$时，$\{X \le \mathrm{x}\} = \{X = -1\}$

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = -1\} = 1/4$$

当$2 \le x < 3$时，$\{X \le \mathrm{x}\} = \{X = -1\} \cup \{X = 2\}$

$$F(x) = P\{X \le x\} = P(\{X = -1\} \cup \{X = 2\})$$

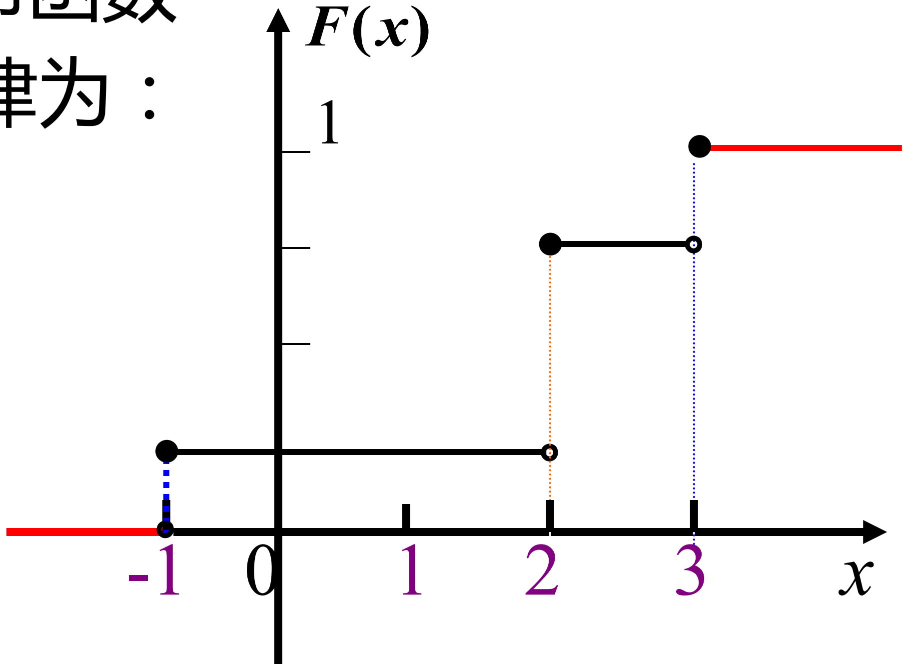
$$= P\{X = -1\} + P\{X = 2\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

二、离散型随机变量的分布函数

例 4 设随机变量X的分布律为：

X	-1	2	3
P_k	¼	½	¼

求X的分布函数？



解（续）：当$x \geq 3$时，

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P(\{X = -1\} \cup \{X = 2\} \cup \{X = 3\}) = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 1/4 & -1 \leq x < 2 \\ 3/4 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

一般地, 设离散型随机变量 X 的分布律为

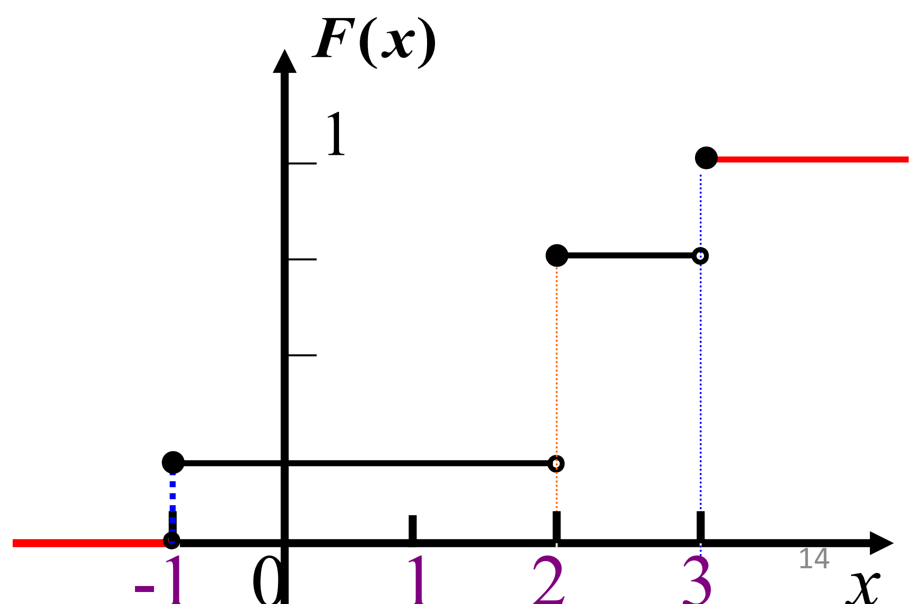
$$P\{X = x_k\} = p_k, (k = 1,2, \dots)$$

则X的分布函数为

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_k \leq x} P\{X = x_k\}$$

注意：此函数为阶梯函数，且在$X = x_k\ (k = 1,2, \dots)$处有跳跃，其跳跃值为$P\{X = x_k\} = p_k$

X	-1	2	3
P_k	¼	½	¼



例 5 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1/3 & 0\le x<1\\ 1/2 & 1\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$

求 X 的分布律.

解：X 的可能取值为 0 ，1 ，2。

由于$P\{X=a\}=F(a)-F(a-0)$，

因此

$$P\{X=0\}=\frac{1}{3}\text{，}P\{X=1\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$$P\{X=2\}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

例 6 一个靶子是半径为 2 米的圆盘，设击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该圆盘的面积成正比，并设射击都能中靶，以 X 表示弹着点与圆心的距离。 试求随机变量 X 的分布函数？

解：$X \geq 0$，由于$F(x) = P\{X \leq x\}$

1. 若$x < 0$，则$\{X \leq x\}$ 是不可能事件，于是

   $F(x) = P\{X \leq x\} = P(\emptyset) = 0$

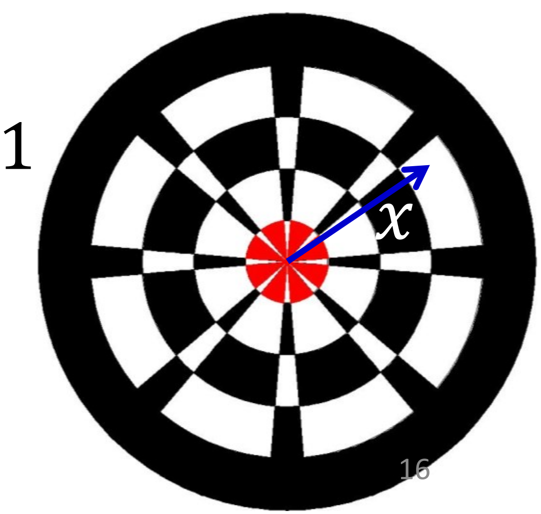
2. 若$0 \leq x \leq 2$，则

   $F(x) = P\{X \leq x\} = P\{X < 0\} + P\{0 \leq X \leq x\}$
   $= P\{0 \leq X \leq x\} = kx^2$

   “射击都能中靶” ，于是$P\{0 \leq X \leq 2\} = 1$

   于是$k = 1/4$

   从而有，$F(x) = x^2/4$



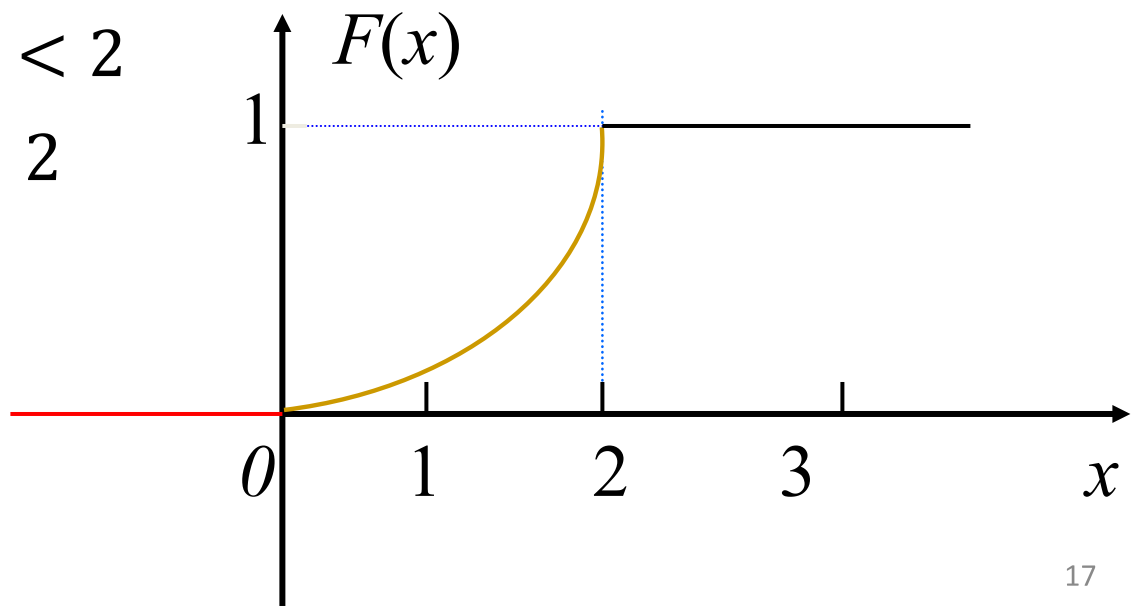
例 6 一个靶子是半径为 2 米的圆盘，设击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该圆盘的面积成正比，并设射击都能中靶，以 X 表示弹着点与圆心的距离。 试求随机变量 X 的分布函数？

解(续)：3. 若$x \geq 2$，则$\{X \leq x\}$ 是必然事件，于是

$$F(x) = P\{X \leq x\} = 1$$

于是分布函数为：

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x^2}{4} & 0 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$



问题：不同的随机变量, 他们的分布函数一定不相同吗?

反例：不一定。例如抛均匀硬币, 令

$$X_1=\begin{cases}1, & \text{正面},\\ -1, & \text{反面}.\end{cases}\qquad X_2=\begin{cases}1, & \text{反面},\\ -1, & \text{正面}.\end{cases}$$

X_1与X_2在样本空间上对应法则不同, 是两个不同的随机变量, 但它们却有相同的分布函数。

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 1/2, & -1\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

§4 连续型随机变量及其概率密度

- 概率密度函数的导出
- 连续型随机变量的概念与性质
- 一些常用的连续型随机变量

一、概率密度函数的导出

从离散到连续——将连续情形看成越来越小、离散单元的极限

理想：一个好的“随机数生成器”赋予0到1之间任何一个数字以等概率。

问题：每一个数的概率为零, 而它们的概率的和必须为1

近似：考虑随机数生成器仅给出一个有有限位精度的数字

当有一位小数精度时,有10个简单事件（数值0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9）。

当用两个小数精度时, 有100个简单事件

新型直方图：为使直方图有更强的可读性, 我们将绘制一种新型的直方图，用面积（而不是用高度）来表示概率。

概率密度函数

假设简单事件可以用实数 x 为指标。令 a 为一个最小可能的简单事件, 而 b 为最大的。一个函数 $f(x)$ 若满足条件：

1. 对所有 $a \leq x \leq b$ 的 x, $f(x) \geq 0.$
2. $\int_a^b f(x)dx = 1$

则称其为概率密度函数。

二、连续型随机变量的概念与性质

定义：如果对于随机变量 X 的分布函数$F(x)$，存在非负实函数$f(x)$，使得对于任意实数x，有

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

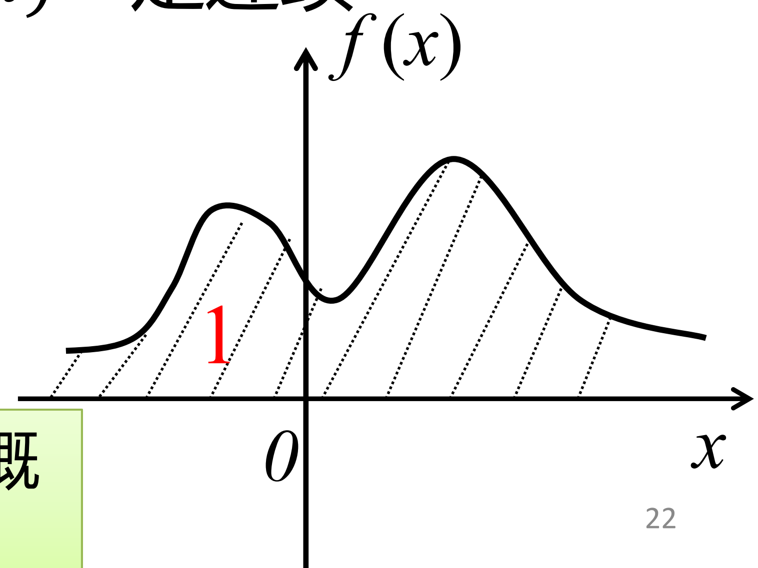
则称 X 为连续型随机变量，其中函数 $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数, 简称概率密度或密度函数。

注意： $f(x)$不一定连续，但$F(x)$一定连续

概率密度$f(x)$具有以下性质：

1. 非负性$f(x) > 0$
2. 归一化$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

这两条性质是判定 $f(x)$是否为概率密度函数的充要条件

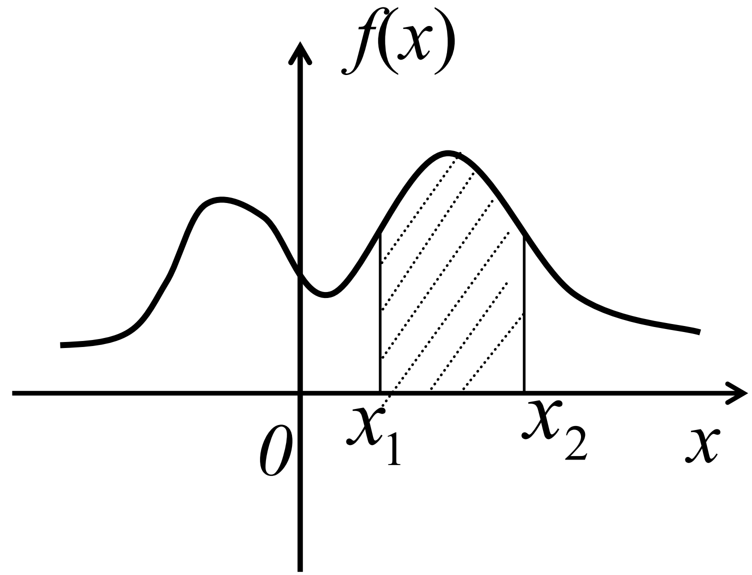


性质(续)：

3. 概率的计算

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$



4. 若$f(x)$在点x处连续，则

$$F'(x) = f(x)$$

对 $f(x)$ 的进一步理解:

注意：(1)若 x 是 $f(x)$ 的连续点，则

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{x < X \le x + \Delta x\}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x}$$
$$= f(x)$$

一些对应类比

概率密度<-->概率

物质密度<-->物质质量

速度<-->距离

…

(2) 若不计高阶无穷小，有

$$P\{x < X \leq x + \Delta x\} = f(x)\Delta x$$

它表示随机变量 X 取值于$(x, x + \Delta x]$的概率近似等于$f(x)\Delta x$

$f(x)\Delta x$在连续型随机变量理论中所起的作用与$P(X = x_k) = p_k$在离散型随机变量理论中所起的作用相类

(3)连续型随机变量取任一指定值的概率为0，即

$P(X = a) = 0$，a为任一指定值

证：$0 \leq P\{X = a\} \leq \lim\limits_{\epsilon \to 0} F(a) - F(a - \epsilon) = 0$

由此得，1) 对连续型X, 有

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b)$$
$$= P(a < X < b)$$

这与离散性有很大差别

2) 由$P(X = a) = 0$ 可推知

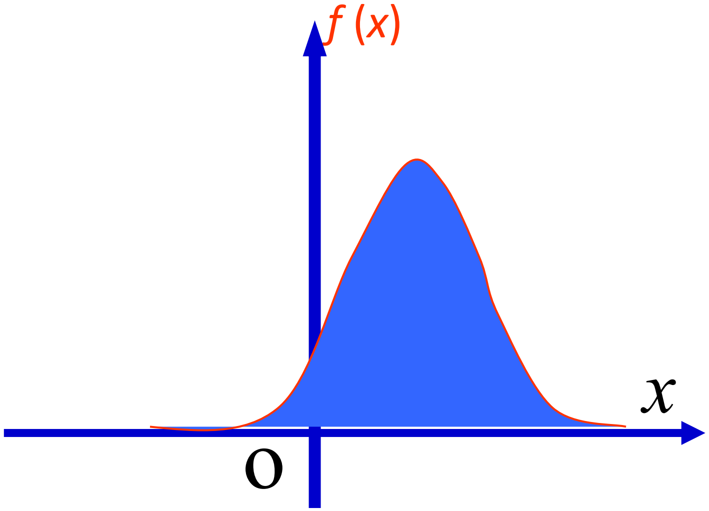
$$P\{X \in R - \{a\}\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx - P(X = a) = 1$$

但$\{X = a\}$并非不可能事件，同样$\{X \in R - \{a\}\}$并非必然事件

类似地，$P(A) = 0$，并不意味着$A = \emptyset$

$P(B) = 1$，并不意味着$B = \Omega$

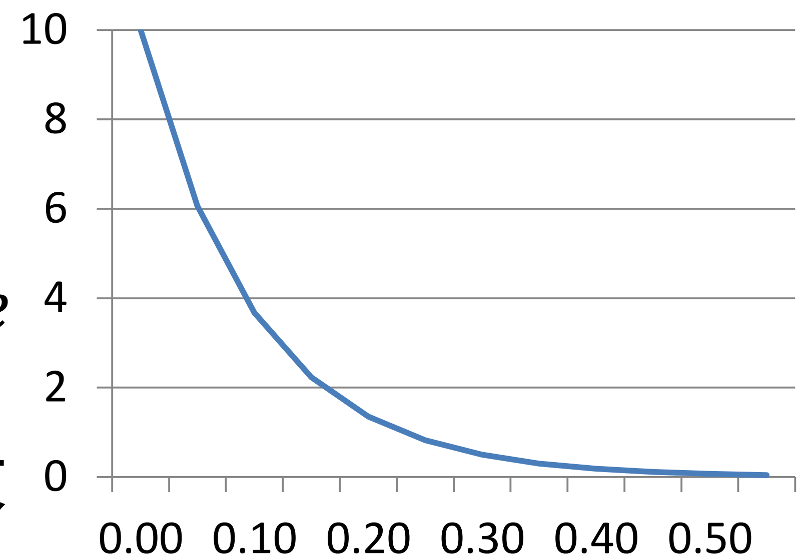
(4) $f\ (x)$在某点处 a 的高度，不反映 X 取值的概率，只是意味着X 取 a 附近的值的概率的大小



例6 (取值超过1的概率密度函数)

若一个分子离开细胞非常快,
概率密度函数可能为

$$f(t) = \begin{cases} 10e^{-10t} & t \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$



$t = 0$ 时概率密度函数值较大表示在 $t = 0$ 附近分子更趋向于离开细胞, 这和离开的速度很大是相容的。

一个分子在时刻0.1和0.2之间离开的概率为

$$P\{0.1 \leq t \leq 0.2\} = \int_{0.1}^{0.2} 10e^{-10t} dt = -e^{-10t}\Big|_{0.1}^{0.2}$$

$$\approx 0.233$$

注意(与离散情形不同)：

1. 由上述性质可知，对于连续型随机变量，不关心在某一点的概率取值，而关心在某一区间上的概率取值
2. 若连续型随机变量X的概率密度为f(x)，则X在任意区间G(可开、可闭、半开半闭、有限或无限)上的概率均为：

$$P\{X \in G\} = \int_G f(x)dx$$

例7 设 X 是连续型随机变量，其密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} c(4x - 2x^2) & 0 < x < 2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

求(1) 常数c; (2) $P\{X > 1\}$; (3) X的分布函数

解：(1) 由密度函数的性质

$$\int_0^2 c(4x - 2x^2)dx = 2cx^2 - \frac{2}{3}cx^3 \Big|_0^2 = \frac{8}{3}c = 1$$

$$c = \frac{3}{8}$$

(2) $P\{X > 1\} = \int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^2 \frac{3}{8}(4x - 2x^2)dx = \frac{1}{2}$

$$f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{3x}{2}-\dfrac{3x^2}{4}\right) & 0<x<2\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

(3) 当$x \le 0$，$F(\mathrm{X})=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=0$

当$0<x<2$，

$$F(\mathrm{X})=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{0}^{x}\left(\frac{3x}{2}-\frac{3x^2}{4}\right)dx=\frac{3x^2}{4}-\frac{x^3}{4}$$

当$x \ge 2$，$F(\mathrm{X})=1$，因此

$$F(\mathrm{X})=\begin{cases}0 & x\le 0\\ \dfrac{3x^2}{4}-\dfrac{x^3}{4} & 0<x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$

例 8 设连续型随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x,(-\infty<x<+\infty)$$

试求X的密度函数

解：设X的密度函数为f(x)，则

$$f(x)=F'(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2},(-\infty<x<+\infty)$$

例 9设随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ \dfrac{x^2}{2} & 0<x\le 1\\ -\dfrac{x^2}{2}+2x-1 & 1<x<2\\ 1 & 2\le x\end{cases}$$

试求X的密度函数$f(x)$。

解：由于$f(x)$=$F'(x)$

因此$f(x)=\begin{cases}x & 0<x\le 1\\ 2-x & 1<x\le 2\\ 0 & otherwise\end{cases}$

例10 设随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}A+Be^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

试求(1) 系数A，B；(2) X的密度函数

解：(1)由分布函数的性质

$$F(+\infty)=1\text{，}F(0+0)=F(0)=0$$

有:$\begin{cases}A=1\\ A+B=0\end{cases}$，于是解出$\begin{cases}A=1\\ B=-1\end{cases}$

因此 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x^2}{2}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

(2) 设X的密度函数为$f(x)$，则

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}xe^{-\frac{x^2}{2}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

例 11 某电子元件的寿命X（单位：小时）是以

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\le 100\\ \dfrac{100}{x^2} & x>100\end{cases}$$

为密度函数的连续型随机变量。求 5 个同类型的元件在使用的前 150 小时内恰有 2 个需要更换的概率？

解：设A={ 某元件在使用的前150小时内需要更换}

则：

$$P(A)=P\{X\le 150\}$$

$$=\int_{-\infty}^{150} f(x)dx$$

$$=\int_{100}^{150}\frac{100}{x^2}dx=\frac{1}{3}$$

检验 5 个元件的使用寿命可以看作是在做一个5重Bernoulli试验。以Y记5 个元件中使用寿命不超过150小时 的元件数。则

$$Y \sim B\left(5, \frac{1}{3}\right)$$

B={5个元件中恰有2个的使用寿命不超过150小时 }
则

$$P(B) = P\{Y = 2\} = C_5^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}$$

三、一些常用的连续型随机变量

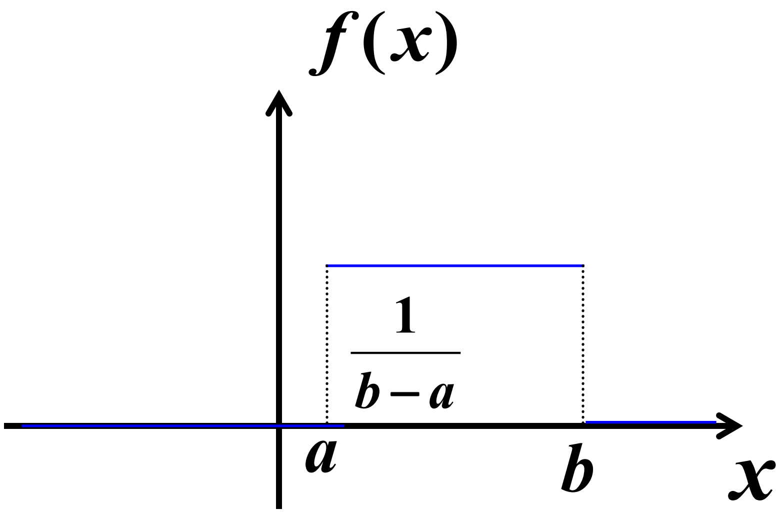
1．均匀分布

若随机变量X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

则称随机变量 X 服从区间$[a,b]$上的**均匀分布**。

记作 $X\sim U\,[a\,,b]$。



密度函数的验证

若随机变量X服从区间$[a,b]$上的均匀分布，$f(x)$是其密度函数，则有

(1) 对任意的x，有$f(x) \geq 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

$$= \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{\infty} f(x)dx$$

$$= \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a} dx$$

由此可知，$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & otherwise \end{cases}$是概率密度函数

类似地，我们可以定义

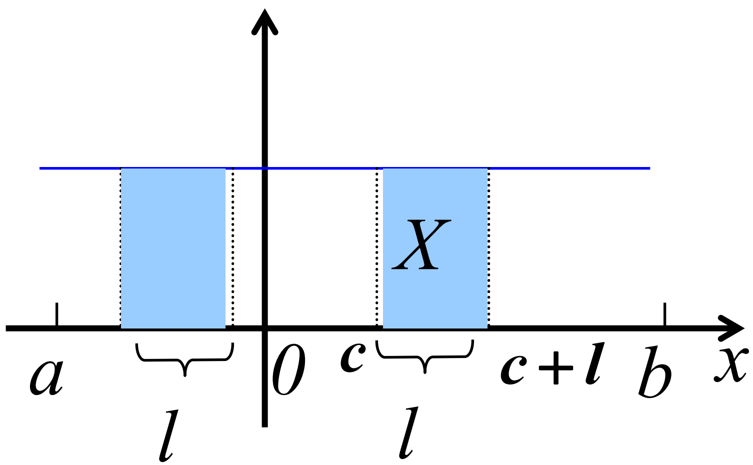
区间$[a, b)$ 上的均匀分布；

区间(a, b) 上的均匀分布；

区间$(a, b]$ 上的均匀分布

如果$a \le c \le c + l \le b$，则

$$P\{c \le X \le c + l\}$$
$$= \int_c^{c+l} \frac{1}{b-a} dx = \frac{l}{b-a}$$



均匀分布的概率背景

若随机变量X服从区间$[a,b]$上的均匀分布，则随机变量X在区间$[a,b]$上的任意一个子区间上取值的与该子区间的长度成正比，则与该子区间的位置无关

这是可以认为随机变量X在区间$[a,b]$上取值是等可能的

均匀分布的应用：

数值计算中，四舍五入的误差，一般认为服从（-0.5, 0.5）上的均匀分布

某一时间间隔内汽车站上乘客到站的时间等，均认为服从均匀分布。

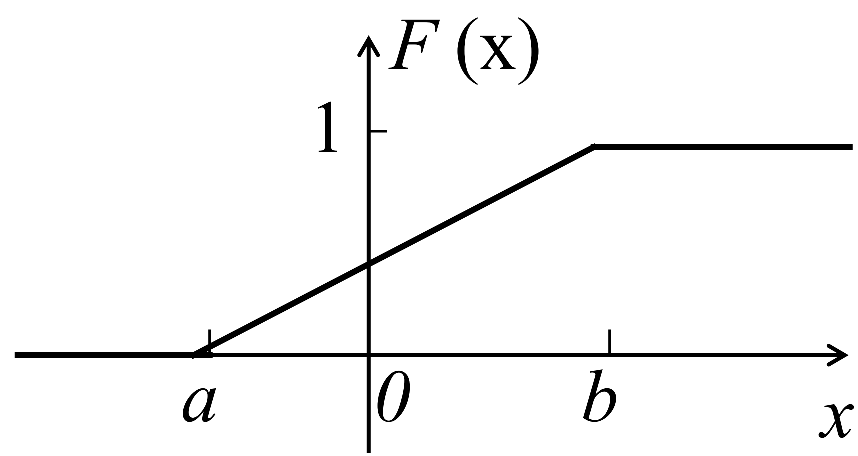
均匀分布的分布函数

若随机变量X服从区间[a,b]上的均匀分布，即：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

则X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ 1 & b<x\end{cases}$$



例12 设公共汽车站从上午7时起每隔15分钟来一班车, 如果某乘客到达此站的时间是 7:00 到7:30之间的均匀随机变量。试求该乘客候车时间不超过5分钟的概率？

解： 设该乘客于7时X分到达此站，则X服从[0,30]上的均匀分布，其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{30} & 0 \leq x \leq 30 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

令B={ 候车时间不超过5分钟 }，则

$$P(B) = P\{10 \leq X \leq 15\} + P\{25 \leq X \leq 30\}$$
$$= \int_{10}^{15} \frac{1}{30} dx + \int_{25}^{30} \frac{1}{30} dx = \frac{1}{3}$$

例 13 设随机变量ξ服从区间[-3,6]上的均匀分布，试求方程

$$4x^2+4\xi x+(\xi+2)=0$$

有实根的概率

解：随机变量ξ的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}1/9 & -3\le x\le 6\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

有实根等价$A=\{16\xi^2-16(\xi+2)\ge 0\}$，

对应概率为

$$\begin{aligned}P(A)&=P\{16\xi^2-16(\xi+2)\ge 0\}\\&=P\{(\xi-2)(\xi+1)\ge 0\}=P\{\xi\le -1\text{或}\xi\ge 2\}\\&=\int_{-3}^{-1}\frac{1}{9}dx+\int_{2}^{6}\frac{1}{9}dx=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

2．指数分布

如果随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

其中$\lambda>0$为常数，则称随机变量X服从参数为λ的指数分布，即作$X\sim E(\lambda)$

指数分布的分布函数

若随机变量X服从参数为λ的指数分布，则X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & x>0\end{cases}$$

注意：对任意x>0，$P\{X > x\} = 1 - F(x) = e^{-\lambda x}$

指数分布最常见的场合是寿命分布：

指数分布常作为各种“寿命”分布的近似，如：“灯泡的寿命” “电话问题中的通话时间”，“随机服务系统中的服务时间”等

快乐年轻(?)的指数分布性质：

设 X 服从指数分布，对$\forall s > 0, t > 0$

$$P\{X > s + t | X > s\} = \frac{P\{X > s + t\}}{P\{X > s\}}$$

$$= e^{-\lambda t} = P\{X > t\}$$

若X 解释为寿命，则上式表明：如果已知某人活了 s 年，则他至少再活 t 年的概率与年龄 s无关，似乎“永远年轻”

例 14 设打一次电话所用时间为X(分钟)，是以$\lambda=\frac{1}{10}$为参数的指数随机变量，如果某人刚好在你前面走进公用电话亭，求你需要等待10分钟到20分钟之间的概率

解： X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}, & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

令B={等待时间为10~20分钟}，则

$$P(B)=P\{10\le X\le 20\}=\int_{10}^{20}\frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}dx$$

$$=-e^{-\frac{x}{10}}\Big|_{10}^{20}=e^{-1}-e^{-2}\approx 0.2325$$

作业

《概率论与数理统计》P56-59

12, 16, 21, 25, 29, 31, 32, 35, 37

《概率论及其应用》P147-148

1, 9, 10