第三章 多维随机变量及其分布

§1 二维随机变量

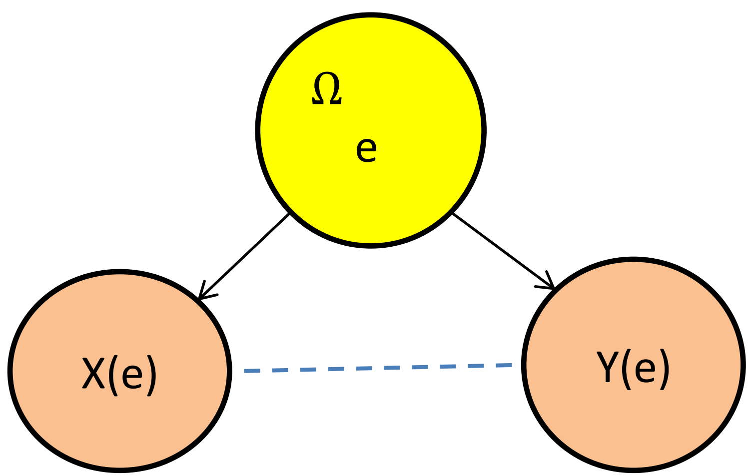
§2 边缘分布

§1 二维随机变量

1.1 二维随机变量的定义

定义：设 E 是一个随机试验，它的样本空间是 $\Omega=\{e\}$，设 $X=X(e)$ 和 $Y=Y(e)$ 是定义在 Ω 上的随机变量。由它们构成的一个向量 (X,Y)，叫做二维随机向量，或二维随机变量

多维随机变量本质上是从单个试验同时获得的多个随机变量



研究多维随机变量的目的

随机变量之间存在某种关系

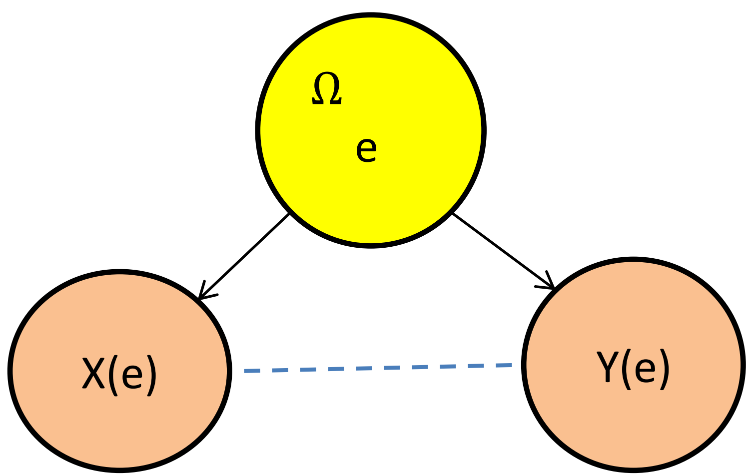
例：身高与体重

依赖于随机变量的结果同时与多个随机变量相关

例：健康状况的多个化验指标

应该把二维随机变量$(X,Y)=(X(e),Y(e))$ $(e\in\Omega)$看作一个整体，因为X和Y是有关联的

几何上(X,Y)可以看作是平面坐标系上的点



二维随机变量的一些例子

例1. 一个地区成年男子的身体状况。令：

X——身高，Y——体重

则，(X,Y)就是一个二维随机变量

例2. 在投掷飞镖游戏中，

X——距靶心的水平距离，Y——距靶心的垂直距离

则，(X,Y)就是一个二维随机变量

例3. 考察某地区的气候，

X——温度，Y——气压

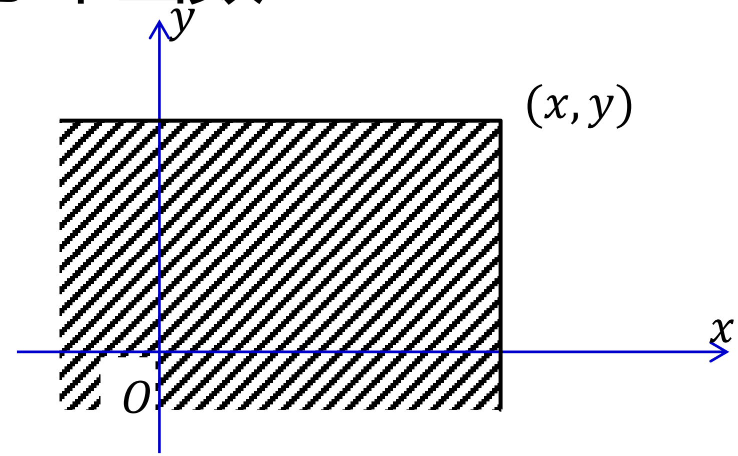
则，(X,Y)就是一个二维随机变量

1.2 二维随机变量的联合分布函数

定义：设(X,Y)是二维随机变量，对任意实数x, y，二元函数：

$$F(x, y) = P\{(X \le x) \cap (Y \le y)\} = P(X \le x, Y \le y)$$

称为二维随机变量(X,Y)的联合分布(Joint Distribution)函数，或简称为分布函数



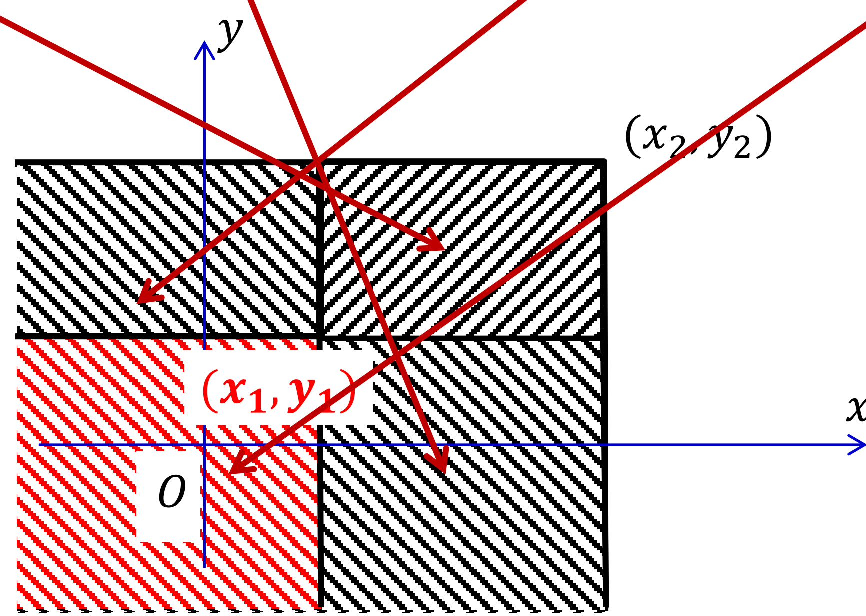
分布函数的几何意义

$F(x, y)$在(x, y)处的函数值就是随机点(X,Y)落在以(x, y)为右上角顶点的无穷矩形区域内的概率

一个基本公式

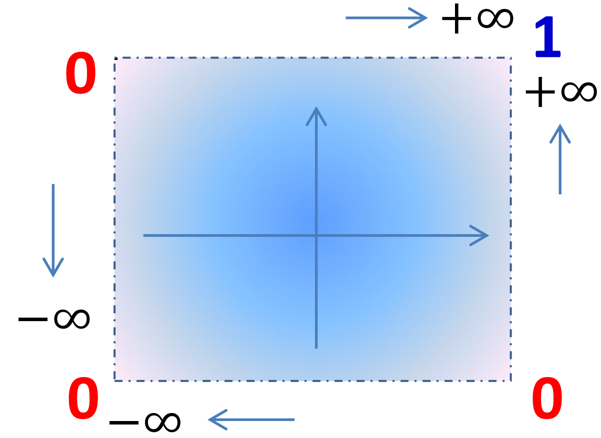
若$x_1 < x_2, y_1 < y_2$，则

$$P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2)$$
$$= F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$$



1.3 分布函数的基本性质

1. 单调性：$F(x,y)$是变量x,y的不减函数，
   即对于任意固定的 y, 当 $x_1 < x_2$时，
   $$F(x_1,y) \le F(x_2,y)$$
   同样地，对于任意固定的x, 当 $y_1 < y_2$
   $$F(x,y_1) \le F(x,y_2)$$



2. 有界：$0 \le F(x,y) \le 1$，
   且，
   对于任意固定的x, $F(x,-\infty) = 0$，
   对于任意固定的y, $F(-\infty,y) = 0$，
   $F(-\infty,-\infty) = 0$， $F(\infty,\infty) = 1$

3. 右连续：

$$F(x+0,y)=F(x,y)\text{，}\ F(x,y+0)=F(x,y)$$

4. 非负性：若$x_1 < x_2, y_1 < y_2$，则

$$F(x_2,y_2)+F(x_1,y_1)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)\geq 0$$

四条性质是二维随机变量分布函数的充要条件

- 任何二维随机变量的分布函数都满足这四条性质
- 任一具有这四条性质的二元函数均是二维随机变量的分布函数

1.4 二维离散型随机变量

定义：若二维随机变量(X,Y)的取值是有限个或可列无限多对时，则称(X,Y)为二维离散型随机变量

设(X,Y)为二维离散型随机变量，(X,Y)的取值为(x_i,y_i)（i,j=1,2,...），并且记$P(X=x_i,Y=y_i)=p_{ij}$，则称p_{ij}为(X,Y)的分布率或X和Y的联合分布率

二维离散型随机变量的联合分布律可以枚举，也可以用表格形式表现

离散型随机变量联合分布律表示

Y \ X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$

离散型随机变量联合分布律表示

例4. 设随机变量X在1，2，3，4四个整数中等可能地取值，另一个随机变量Y在1~X之间等可能地取值，求(X,Y)的分布律

Y \ X	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
2		$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
3			$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
4				$\frac{1}{16}$

二维离散型随机变量联合分布律的性质

1. 非负性：
   对任意$(i,j)(i,j=1,2,\ldots)$，有
   $$p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}\geq 0$$
2. 规范性：
   $\sum_{i,j}p_{ij}=1$

二维离散型随机变量分布律举例

例5. 将一枚均匀的硬币抛3次，令

X：3次中出现正面的次数；

Y：3次中正面出现次数与反面次数只差的绝对值

给出(X,Y)的联合分布律。

解：

$\Omega=\{HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT,\}$

对应的X的可能取值为0，1，2，3，Y为1，3

Y \ X	0	1	2	3
1		$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	
3	$\frac{1}{8}$			$\frac{1}{8}$

二维离散型随机变量的联合分布函数

类似一维情况，并考虑与连续情况的对应，引入分布函数

设二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布律为

$$p_{ij}(i,j=1,2,\ldots,)$$

则，(X,Y)的联合分布函数为

$$F(x,y)=\sum_{x_i\leq x,y_j\leq y}p_{ij}$$

1.5 二维连续型随机变量

对于二维随机变量(X,Y)的分布函数$F(x,y)$，如果存在非负可积函数$f(x,y)$，使得对于任意的实数x,y，有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)dudv$$

则称 (X,Y)是连续型的二维随机变量，

函数$f(x,y)$称为二维随机变量(X,Y) 的概率密度，

或称为X和Y的联合概率密度

概率密度的性质

1. 非负性： $f(x, y) \geq 0$
2. 规范性： $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u, v)dudv = F(\infty, \infty) = 1$
3. 设G是xOy平面上的一个区域，点(X,Y)落在G内的概率为

$$P\{(x, y) \in G\} = \iint\limits_{(x,y)\in G} f(x, y)dxdy$$

4. 若$f(x, y)$在点(x, y)连续，则

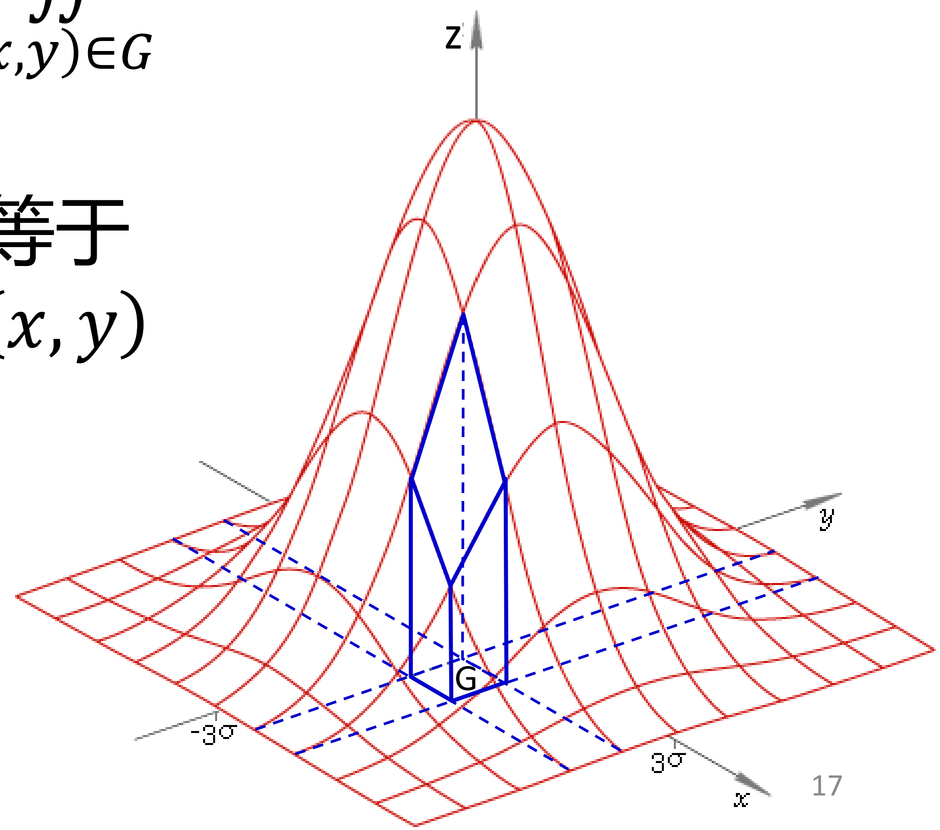
$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

局部概率$P\{(X,Y)\in G\}$的几何意义

在几何上 $z=f(x,y)$ 表示空间的一个曲面，

$$P\{(x,y)\in G\}=\iint\limits_{(x,y)\in G} f(x,y)dxdy$$

即表示 $P\{(X,Y)\in G\}$的值等于以 G 为底，以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶的柱体体积



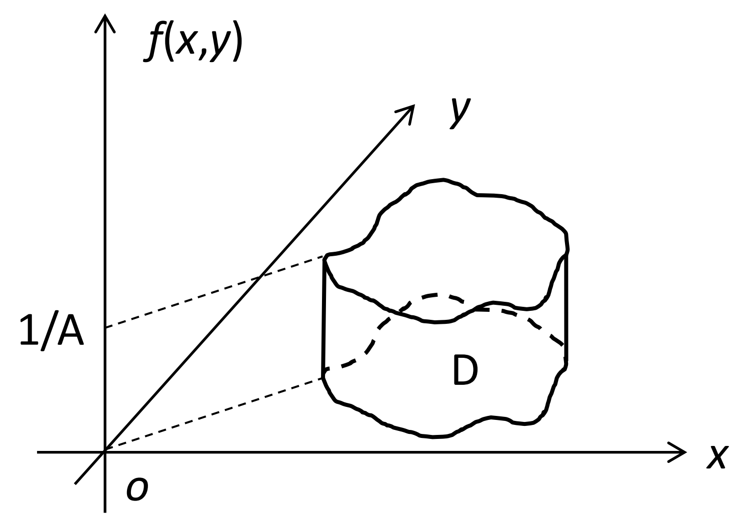
一些连续型二维随机变量

1. 二维均匀分布

设D是平面上的有界区域，其面积为A，如果二维随机变量(X,Y)的概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A} & (x,y)\in D\\ 0 & (x,y)\notin D\end{cases}$$

则称二维随机变量(X,Y)服从区域D上的均匀分布



一些连续型二维随机变量

2. 二维正态分布

设二维随机变量(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

则称随机变量(X,Y)服从参数为$(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$的正态分布

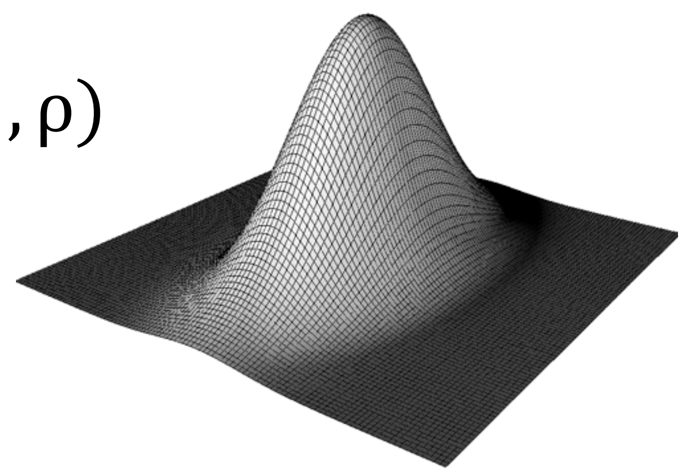
记为：

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

其中：

$-\infty<\mu_i<\infty,\sigma_i>0\ (i=1,2)$

$-1<\rho<1$



例6. 设二维随机变量(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} c(R-\sqrt{x^2+y^2}) & x^2+y^2<R^2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求常数c；

(2) 求(X,Y)落入圆$x^2+y^2<r^2\ (0<r<R)$内的概率。

解：由概率归一化的特性有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx\,dy$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2<R^2} c\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy=1$$

变换到极坐标下：$x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ ，于是有

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R c(R-\rho)\rho d\rho = \frac{1}{3}\pi c R^3 = 1$$

故

$$c=\frac{3}{\pi R^3}$$

(2) 类似地：

$$P\{(X,Y)\in\{x^2+y^2<r^2\}\}$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2<r^2} \frac{3}{\pi R^3}\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$$

$$=\frac{3r^2}{R^2}\left(1-\frac{2r}{3R}\right)$$

1.6 从二维到n维的推广

定义(n维随机变量)：设 E 是一个随机试验，它的样本空间是 Ω={e}，设 $X_i = X_i(e)$ $(e \in \Omega, i = 1,2, \dots, n)$ 是定义在 Ω 上的n个随机变量。由它们构成的一个向量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ，叫做样本空间Ω上的n维随机向量，或n维随机变量

n维随机变量的分布函数

设$(X_1, X_2, \dots, X_n)$是一个n维随机变量，则对于任一n维实数组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$=$P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \dots, X_n \le x_n)$

称此函数为n维随机变量的分布函数

§2 边缘分布(Marginal distribution)

边缘分布的定义

设(X,Y)为二维随机向量，其分布函数为

$$F(x,y)$$

其中分量X或Y是一维随机变量，相应的存在一维分布，分别记为$F_X(x)$和$F_Y(y)$,

依次称$F_X(x)$,$F_Y(y)$为(X,Y)关于X和关于Y的边缘分布函数。

边缘分布又翻译为“边际分布”或“边沿分布”

2.1 边缘分布函数

利用联合分布函数获得边缘分布函数

设二维随机变量(X,Y)的分布函数为F(x,y)，则分量X的分布函数为

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < +\infty\}$$
$$= \lim_{y \to +\infty} F(x, y) = F(x, +\infty)$$

类似地，对分量Y的边缘分布函数为

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{Y \le y, x < +\infty\}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} F(x, y) = F(+\infty, y)$$

适用于离散和连续

例7. 设二维随机变量(X,Y)的联合分布函数为

$$F(x,y)=A\left(B+\operatorname{atan}\frac{x}{2}\right)\left(C+\operatorname{atan}\frac{y}{5}\right),$$

$$(-\infty<x,y<+\infty)$$

求常数A,B,C以及边缘分布函数。

解：由分布函数性质有

$$F(+\infty,+\infty)=A\left(B+\frac{\pi}{2}\right)\left(C+\frac{\pi}{2}\right)=1 \qquad (1)$$

$$F(-\infty,+\infty)=A\left(B-\frac{\pi}{2}\right)\left(C+\frac{\pi}{2}\right)=0 \qquad (2)$$

$$F(+\infty,-\infty)=A\left(B+\frac{\pi}{2}\right)\left(C-\frac{\pi}{2}\right)=0 \qquad (3)$$

(1), (2) ➔ $B=\frac{\pi}{2}$，(1), (3) ➔ $C=\frac{\pi}{2}$，带入(1)，有 $A=\frac{1}{\pi^2}$

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= \lim_{y\to+\infty} F(x,y) \\
&= \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{atan}\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{atan}\frac{y}{5}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{atan}\frac{x}{2}\right)
\end{aligned}
$$

类似有

$$
F_Y(y) = \lim_{x\to+\infty} F(x,y) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{atan}\frac{y}{5}\right)
$$

2.2 边缘分布律

利用联合分布律求边缘分布律

已知二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布率为

$$p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}\ (i,j=1,2,\ldots)$$

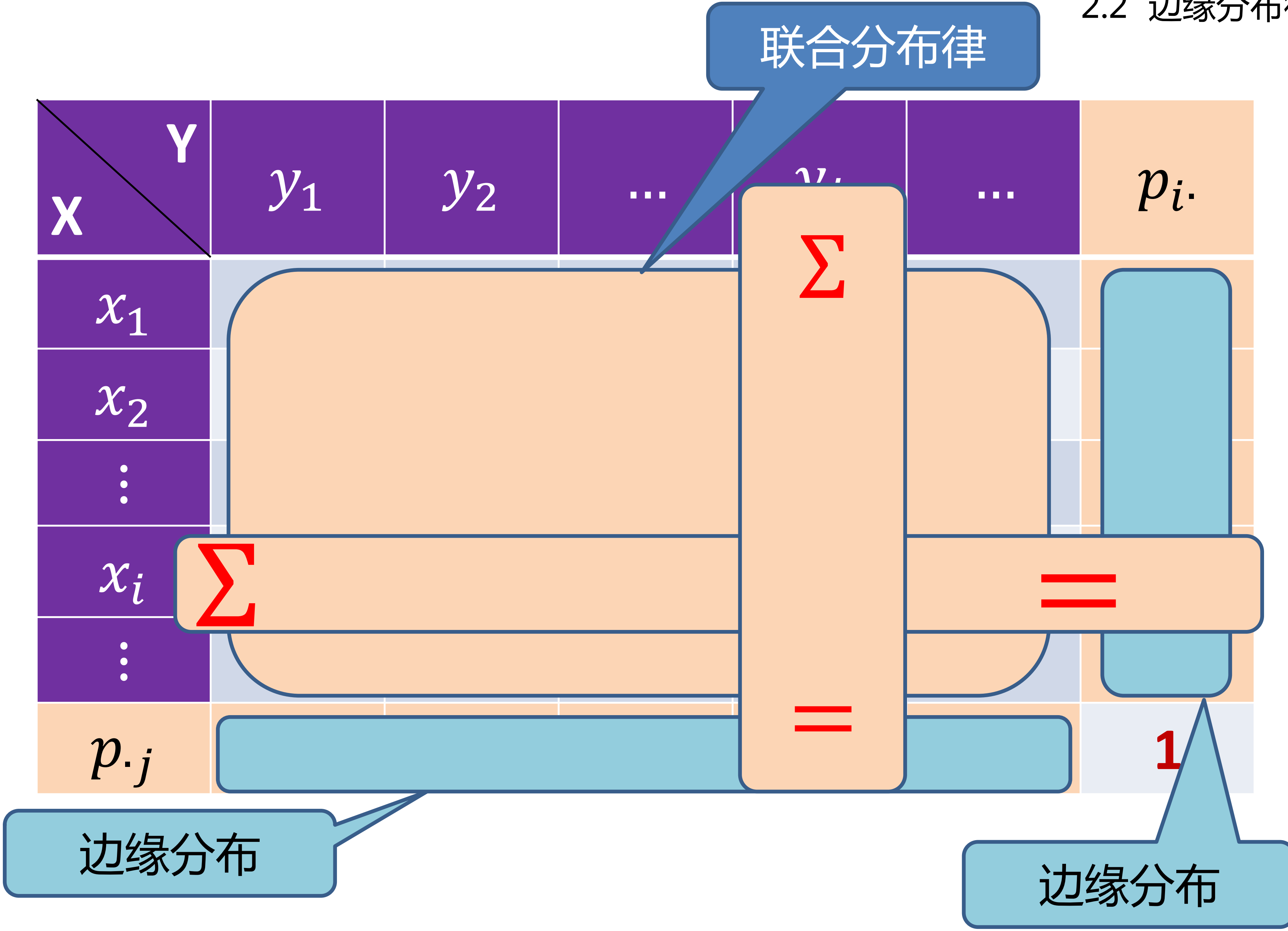
则随机变量X的边缘分布律为：

$$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\bigcup_j P\{X=x_i,Y=y_j\}$$

$$=\sum_j p_{ij}\ (i=1,2,\ldots)$$

类似地，随机变量Y的边缘分布律为：

$$p_{\cdot j}=P\{Y=x_j\}=\sum_i p_{ij}\ (j=1,2,\ldots)$$


联合分布律
Y
X
y_1
y_2
…
…
$p_{i\cdot}$
x_1
x_2
⋮
x_i
⋮
$p_{\cdot j}$
Σ
$=$
Σ
$=$
1
边缘分布
边缘分布

例8. 下表中给出了两种不同类型的鸟(A和B)寄生了两种类型的寄生虫---虱子和螨虫.由于这两种寄生虫相当大,鸟身上有同类寄生虫的数量不会超过两个.对每一种鸟身上具有的特定寄生虫数量的概率进行了统计.例如,在一只鸟身上有一只螨虫和两支虱子的概率为0.09,有两只螨虫和一只虱子的概率为0.06.

求两类鸟的边缘分布

螨虫 \ 虱子	Bird A			Bird B		
	0	1	2	0	1	2
0	0.20	0.15	0.15	0.33	0.08	0.09
1	0.12	0.09	0.09	0.05	0.13	0.12
2	0.08	0.06	0.06	0.02	0.09	0.09

解：为求出每类鸟身上虱子的数量的边缘概率分布，将每一列中的数字相加

例如A类鸟身上有一只虱子的概率为

$$0.15+0.09+0.06=0.3$$

类似的，螨虫数量的边缘分布为每一行中的数字相加，例如B类鸟身上有两只螨虫的概率为

$$0.02+0.09+0.09=0.2$$

虱子 / 螨虫	Bird A				Bird B			
	0	1	2		0	1	2	
0	0.20	0.15	0.15	**0.5**	0.33	0.08	0.09	**0.5**
1	0.12	0.09	0.09	**0.3**	0.05	0.13	0.12	**0.3**
2	0.08	0.06	0.06	**0.2**	0.02	0.09	0.09	**0.2**
	0.4	**0.3**	**0.3**		**0.4**	**0.3**	**0.3**	

注意：尽管两类鸟身上昆虫的分布不同，但边缘分布是一样的，也就是从边缘分布不能唯一确定联合分布

从联合分布律求边缘分布律仅适用于离散分布

虱子 / 螨虫	Bird A				Bird B			
	0	1	2		0	1	2	
0	0.20	0.15	0.15	**0.5**	0.33	0.08	0.09	**0.5**
1	0.12	0.09	0.09	**0.3**	0.05	0.13	0.12	**0.3**
2	0.08	0.06	0.06	**0.2**	0.02	0.09	0.09	**0.2**
	0.4	**0.3**	**0.3**		**0.4**	**0.3**	**0.3**	

2.3 边缘密度函数

利用联合概率密度函数求边缘密度函数

已知二维连续型随机变量(X,Y)，已知其联合分布密度函数为$f(x,y)$，则随机变量X的边缘分布为：

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = F(x, +\infty)$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy\, dx = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx$$

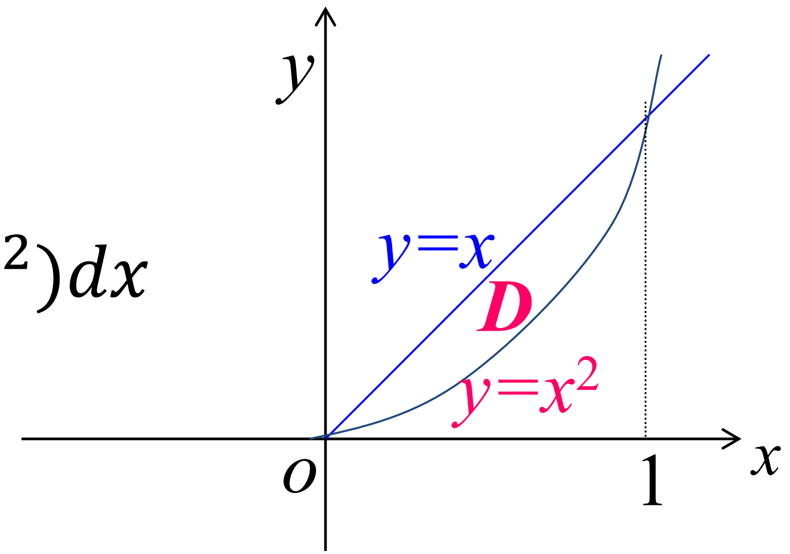
于是，

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

类似地，

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

例9. 设平面区域D是由抛物线$y = x^2$及直线$y = x$所围成，随机变量(X, Y)服从区域D上的均匀分布，试求随机变量(X, Y)的联合密度函数及X, Y各自的边缘密度函数



解：区域D的面积为

$$S = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} dy\,dx = \int_0^1 (x - x^2)dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{1}{6}$$

于是(X, Y)的联合概率密度函数为：

$$f(x, y) = \begin{cases} 6 & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{x^2}^{x}6dy=6(x-x^2),0\le x\le 1$$

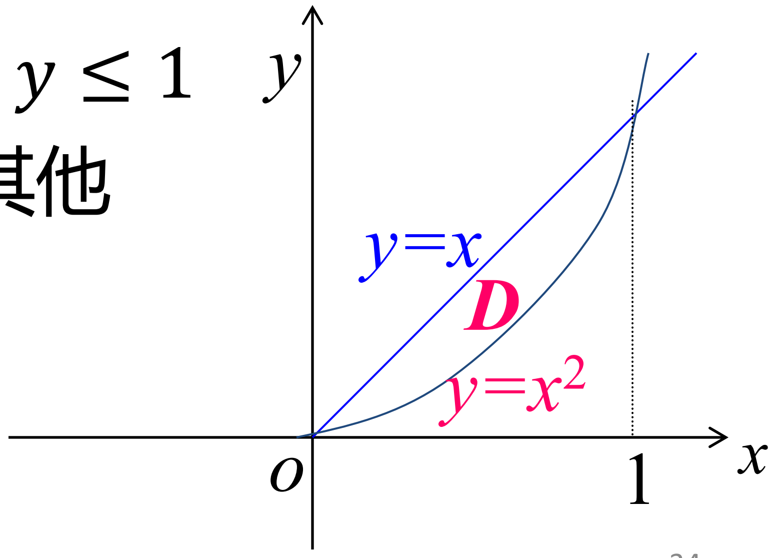
于是$f_X(x)=\begin{cases}6(x-x^2) & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

类似地，

$$f_Y(y)=\int_{y}^{\sqrt{y}}6dx=6(\sqrt{y}-y),0\le y\le 1$$

于是$f_Y(y)=\begin{cases}6\left(\sqrt{y}-y\right) & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$$\boxed{f(x,y)=\begin{cases}6 & (x,y)\in D\\ 0 & (x,y)\notin D\end{cases}}$$



例10. 设二维随机变量(X,Y)服从参数为$(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$的正态分布，即密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

给出X和Y的边缘分布

解:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

(为方便起见，记$C = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$)

$$= C\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]} dx$$

$$= Ce^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]} dx$$

$$= Ce^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2} + \frac{\rho^2(y-\mu_2)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} - \frac{\rho(y-\mu_2)}{\sigma_2}\right]^2} dx$$

解(续)：设

$$x' = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} - \frac{\rho(y-\mu_2)}{\sigma_2}$$

$$\boxed{C = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}}$$

于是

$$f_Y(y) = Ce^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} - \frac{\rho(y-\mu_2)}{\sigma_2}\right]^2} dx$$

$$= C\sigma_1 e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}x'^2} dx'$$

$$= C\sigma_1 e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \sqrt{2(1-\rho^2)\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

类似地

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

于是

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$$
$$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

几点有关的结论：

1. 二维正态分布的边缘分布还是正态分布，且与相关系数ρ无关
2. 相同的两个边缘分布不能唯一决定联合分布，这时ρ可以不同
3. 甚至两个正态的边缘可以来自一个非正态的二维分布

关于第三点的一个例子：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2}\right\}(1+\sin x\sin y)$$

$$-\infty<x,y<+\infty$$

其边缘分布为

$$X,Y\sim N(\mu,\sigma^2)$$

2.4 从二维到n维

设$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$是一个n维随机变量，若存在非负函数$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，使得对任意实数$x_1, x_2, \ldots, x_n$有

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \cdots \int_{-\infty}^{x_2} \int_{-\infty}^{x_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

称$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 为n维随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的分布密度函数

相应地，一个k-维分布函数的例子为

$$F_{(X_1,X_2,\ldots,X_k)}(x_1,x_2,\ldots,x_k)$$
$$=F(x_1,x_2,\ldots,x_k,+\infty,\ldots,+\infty)$$

一个k-维分布密度函数的例子为

$$f_{(X_1,X_2,\ldots,X_k)}(x_1,x_2,\ldots,x_k)=$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\ldots,x_{k+1},x_{k+2},\ldots,x_n)dx_{k+1}\,dx_{k+2}\,\ldots dx_n$$

作业

概率论与数理统计

- pp. 84-86, #1, #5, #6, #9