第四章 随机变量的数字特征

§1 数学期望

§2 方差

§0 数字特征

研究概率的目的很大程度在于关心其总体特性。

例1：对于投资而言，关心平均回报率

例2：对中学而言，关心学生的升学率，对大学而言关心毕业生受社会欢迎的程度

例3：对于企业而言，关心产品的返修率

…

可以有多种不同的数字特征，本章将关注一些常用的数字特征

- 数学期望(Expectation)
- 方差(Variance)
- 协方差(Covariance)
- 相关系数(Correlation Coefficient)
- 矩(Moment)

§1 数学期望

日常生活中的对“期望”的使用

1. 高考的总分
2. 长途旅行时关心目的地平均温度
3. 定飞机票时如果连接多个航班，考虑准点率
4. 公平问题——赌徒分金问题
5. 设计分类器或学习模型时关心错误率/正确率

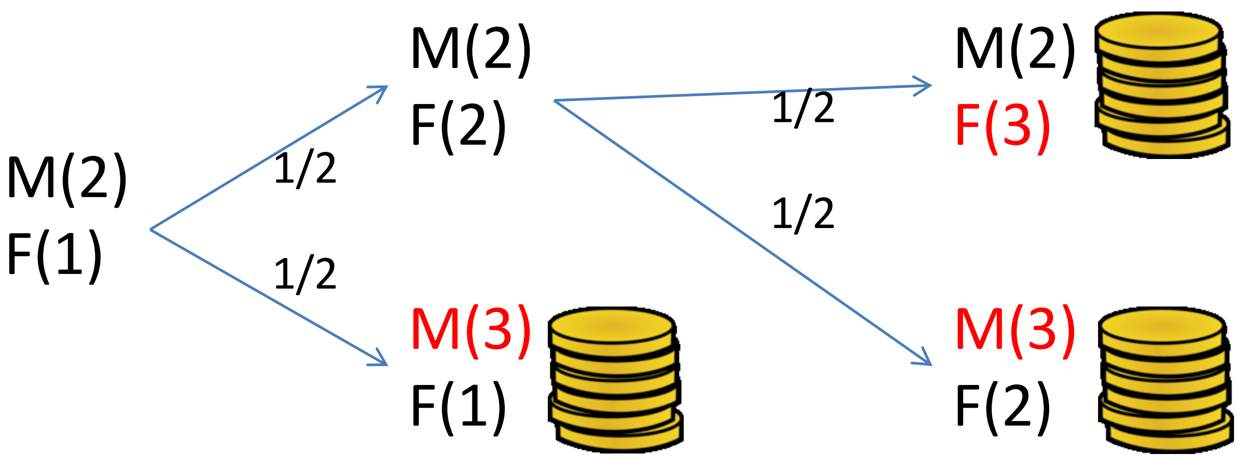
……

§1 数学期望

回顾赌徒分金问题

(第一次课中给出的问题)：梅累和赌友各人下赌注32个金币，先赢三局为胜。赌博进行至梅累已赢了两局，而赌友赢了一局时，需要终止赌博，此时的这64个金币两人应该怎样分才算合理呢？(假设两人赌技相当)

分析：记梅累赢得次数为M(n)，其赌友赢得次数为F(n)



故在赌技相同的情况下，梅累有3/4的希望赢得赌博，梅累的赌友赢得的机会为1/4

因此，梅累能“期望”得到的金币为

$$64 \times \frac{3}{4} + 0 \times \frac{1}{4} = 48$$

从期望的角度要考虑每种可能的收益/风险

梅累赌友“期望”得到的金币为

$$64 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{3}{4} = 16$$

1.1 离散型随机变量的数学期望

定义：设离散型随机变量X的分布律为

$$P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,\ldots$$

如果$\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，则称级数$\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$为随机变量X的数学期望(又称均值)，记为$E(X)$。

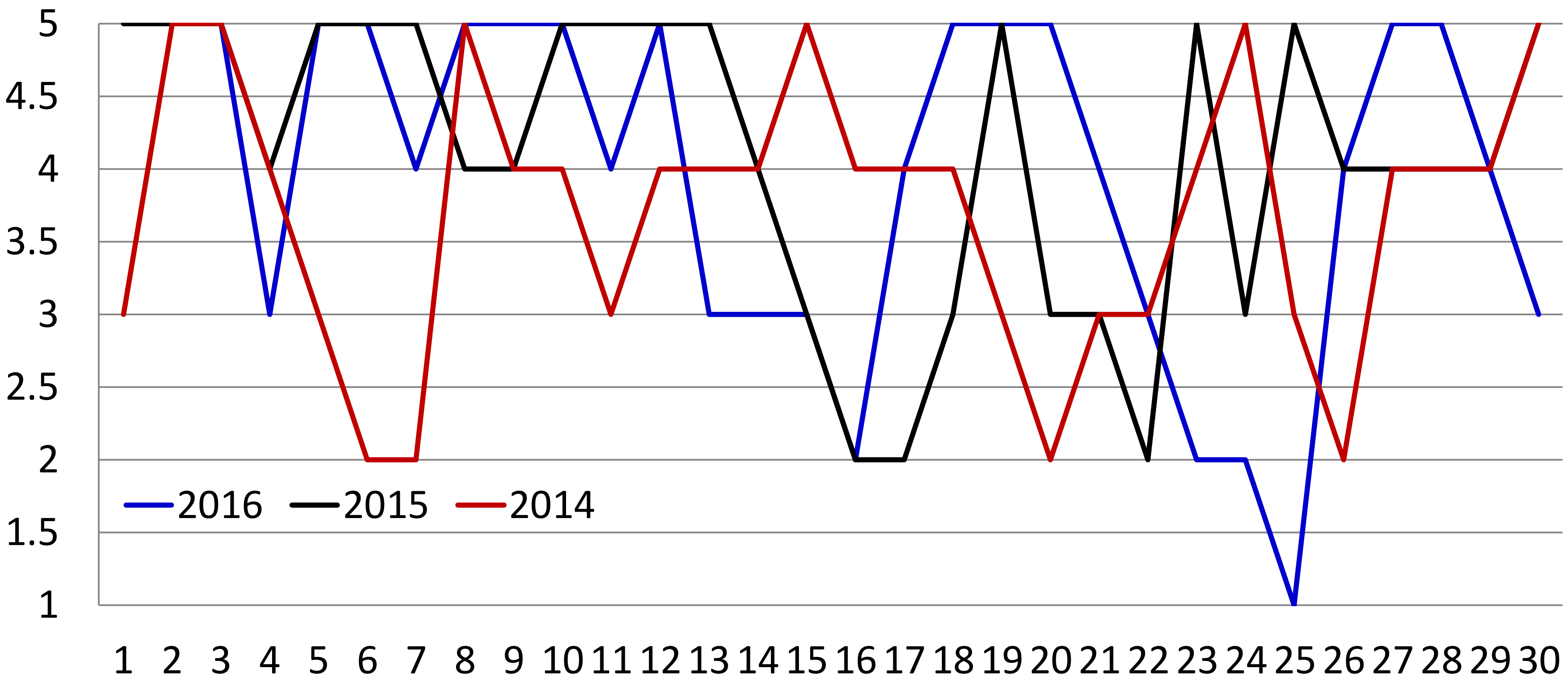
(即$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|p_k<\infty$)

即，

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

注意：$E(X)$是一个实数，而非变量——回到普通大众关心的本质

北京2016年9月空气质量与前两年同期对比



5——优，4——良，3——轻度污染，2——中度污染，1——重度污染

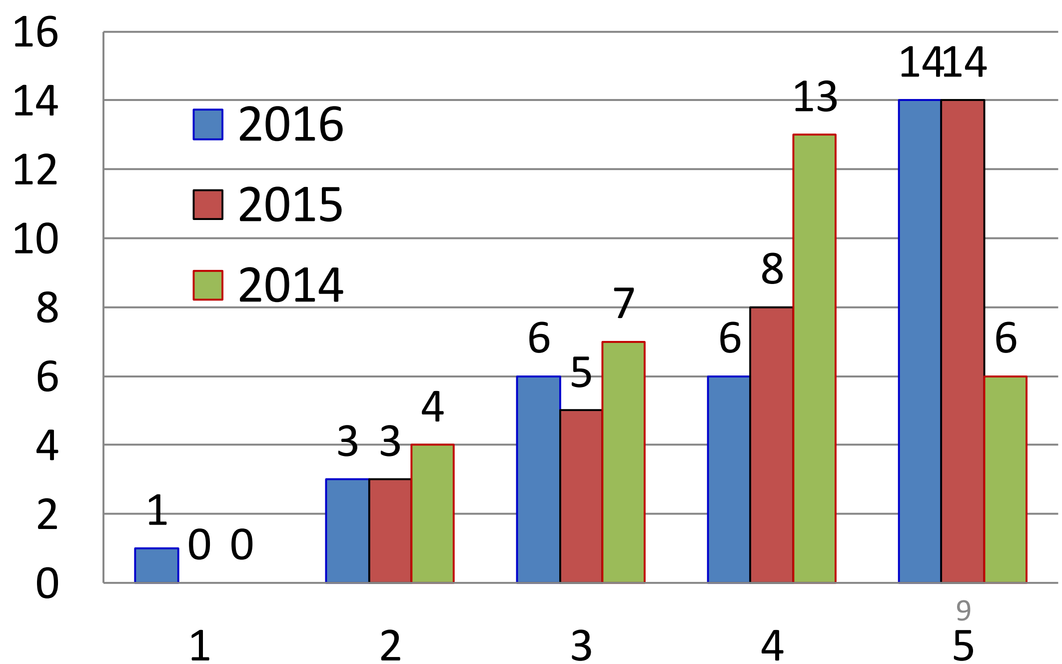
北京2014-2016年9月同期空气质量对比

空气质量X的期望：

$$2014: 2\cdot\frac{4}{30}+3\cdot\frac{7}{30}+4\cdot\frac{13}{30}+5\cdot\frac{6}{30}=3.7$$

$$2015: 2\cdot\frac{3}{30}+3\cdot\frac{5}{30}+4\cdot\frac{8}{30}+5\cdot\frac{14}{30}=4.1$$

$$2016: 1\cdot\frac{1}{30}+2\cdot\frac{3}{30}+3\cdot\frac{6}{30}+4\cdot\frac{6}{30}+5\cdot\frac{14}{30}\approx 3.97$$



常见离散型分布的期望

1. 0-1分布

X	0	1
p_X	$1-p$	p

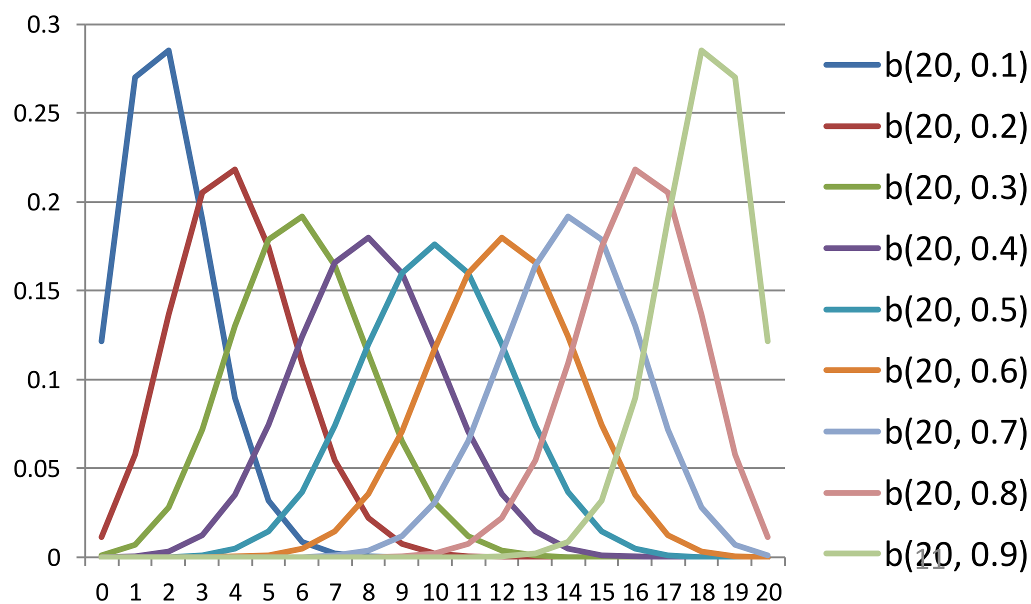
$$E(X) = 1 \times p + 0 \times (1-p) = p$$

2. 二项分布

$$X\sim b(n,p)\text{，即}P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k(1-p)^{n-k}\quad(\text{利用}kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1})$$

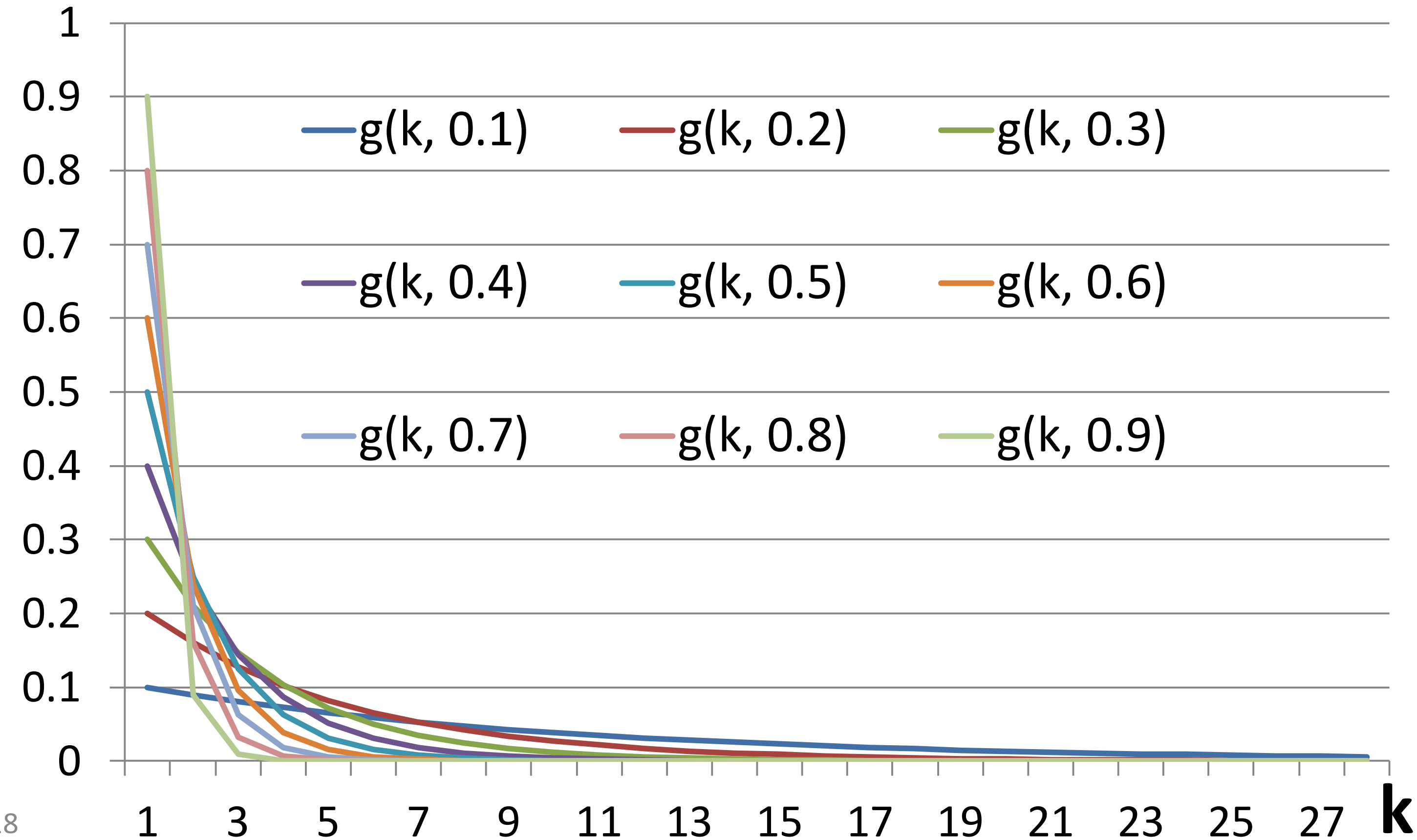
$$=np\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}=np$$



3. 几何分布

$$X \sim g(k,p)\ ，即 P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1}=p\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}=\frac{1}{p}$$



附：几何分布均值推导

令：$Z_n=\sum_{k=1}^{n}kq^{k-1}$，于是有：$Z_1=1$，

$$Z_n=\sum_{k=1}^{n}q^{k-1}+q\sum_{k=2}^{n}(k-1)q^{k-2}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}q^{k-1}+q\sum_{k=1}^{n-1}kq^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}q^{k-1}+qZ_{n-1}$$

$$=\frac{(1-q^n)}{1-q}+q\left[\sum_{k=1}^{n-1}q^{k-1}+qZ_{n-2}\right]$$

$$=\frac{(1-q^n)}{1-q}+q\frac{(1-q^{n-1})}{1-q}+qZ_{n-2}$$

$$=\frac{(1-q^n)}{1-q}+q\frac{(1-q^{n-1})}{1-q}+\cdots+q^{n-2}\frac{(1-q^2)}{1-q}+q^{n-2}Z_1$$

$$=\frac{1+q+\cdots+q^{n-2}-(n-1)q^n}{1-q}+q^{n-2}$$

$$=\frac{\frac{1-q^{n-1}}{1-q}+(n-1)q^n}{1-q}+q^{n-2}$$ ，于是：$\lim\limits_{n\to\infty}Z_n=\frac{1}{p^2}$

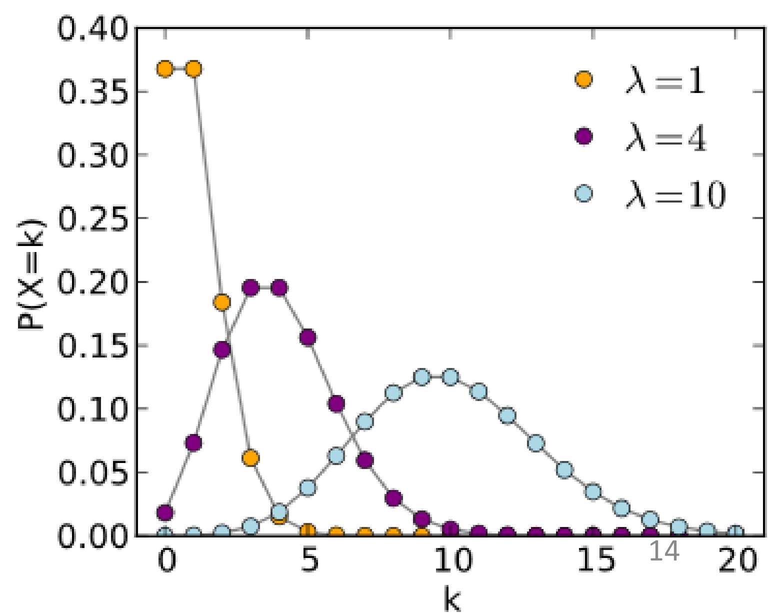
4. 泊松分布

X~π(λ)，即$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k=0,1,2,\ldots$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\text{(Taylor级数)}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda$$



例1. 按规定，某车站每天8:00-9:00,9:00-10:00都恰有一辆客车出发，但发车是在三个随机的时刻，且两者发车时间相互独立，其规律为：

到站时刻	车1	8:10	8:30	8:50
	车2	9:10	9:30	9:50
		1/6	1/2	1/3

一旅客8:20到车站，求他候车时间的数学期望。

解：设旅客的候车时间为X(以分计)，X的分布律为：

到站时刻	车1	8:10	8:30	8:50
	车2	9:10	9:30	9:50
		1/6	1/2	1/3

X	10(8:30)	30(8:50)	50(9:10)	70(9:30)	90(9:50)
p_k	1/2	1/3	1/6 * 1/6	1/6 * 1/2	1/6 * 1/3

注意：其中9:00-10:00之间车的前提之一是8:00-9:00之间的车在8:10出发。

于是候车的数学期望为：

$$E(X) = 10 \times \frac{1}{2} + 30 \times \frac{1}{3} + 50 \times \frac{1}{36}$$
$$+70 \times \frac{1}{12} + 90 \times \frac{1}{18} = 27.22\text{分钟}$$

例2(商店的销售策略). 某商店对某种家用电器的销售采用先使用后付款的方式，记使用寿命为X（以年计），规定：

$X \leq 1$，一台付款1500元

$1 < X \leq 2$，一台付款2000元

$2 < X \leq 3$，一台付款2500元

$3 < X$，一台付款3000元

设寿命X服从指数分布，概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} e^{-x/10} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

求该商店一台家电收费Y的数学期望。

解：

$$P\{X \le 1\} = \int_0^1 \frac{1}{10} e^{-x/10} dx = 1 - e^{0.1} = 0.0952$$

$$P\{1 < X \le 2\} = \int_1^2 \frac{1}{10} e^{-x/10} dx = e^{0.1} - e^{0.2} = 0.0861$$

$$P\{2 < X \le 3\} = \int_2^3 \frac{1}{10} e^{-x/10} dx = e^{0.2} - e^{0.3} = 0.0779$$

$$P\{X > 3\} = \int_3^{+\infty} \frac{1}{10} e^{-x/10} dx = e^{0.3} = 0.7408$$

因而收费的分布率为

Y	1500	2000	2500	3000
p_k	0.0952	0.0861	0.0779	0.7408

于是：

$$E(Y) = 2732.15$$

即每台的数学期望为2732.15元

例3. 机场进行爆炸物检查，可以用两种方法进行：

(1) 每个人分别用试纸检测，这就需验N次；

(2) k个人一组，每组用同一试纸擦拭，然后检查。

(2.1) 若呈阴性，直接放行➔k个人只需验一次；

(2.2)若呈阳性，则再对这k个人分别进行检查➔k个人共要$k+1$次。

设每个人接触过爆炸品的概率为p，且相互独立的。试说明当p较小时，选取适当的k，按第二种方法可以减少次数，并说明k取什么值时最适宜。

解：每个人未接触过爆炸品的概率为$q=1-p$。
设以k个人为一组时，组内每人化验的次数为X，
则：

X	$1/k$	$(k+1)/k$
p_k	q^k	$1-q^k$

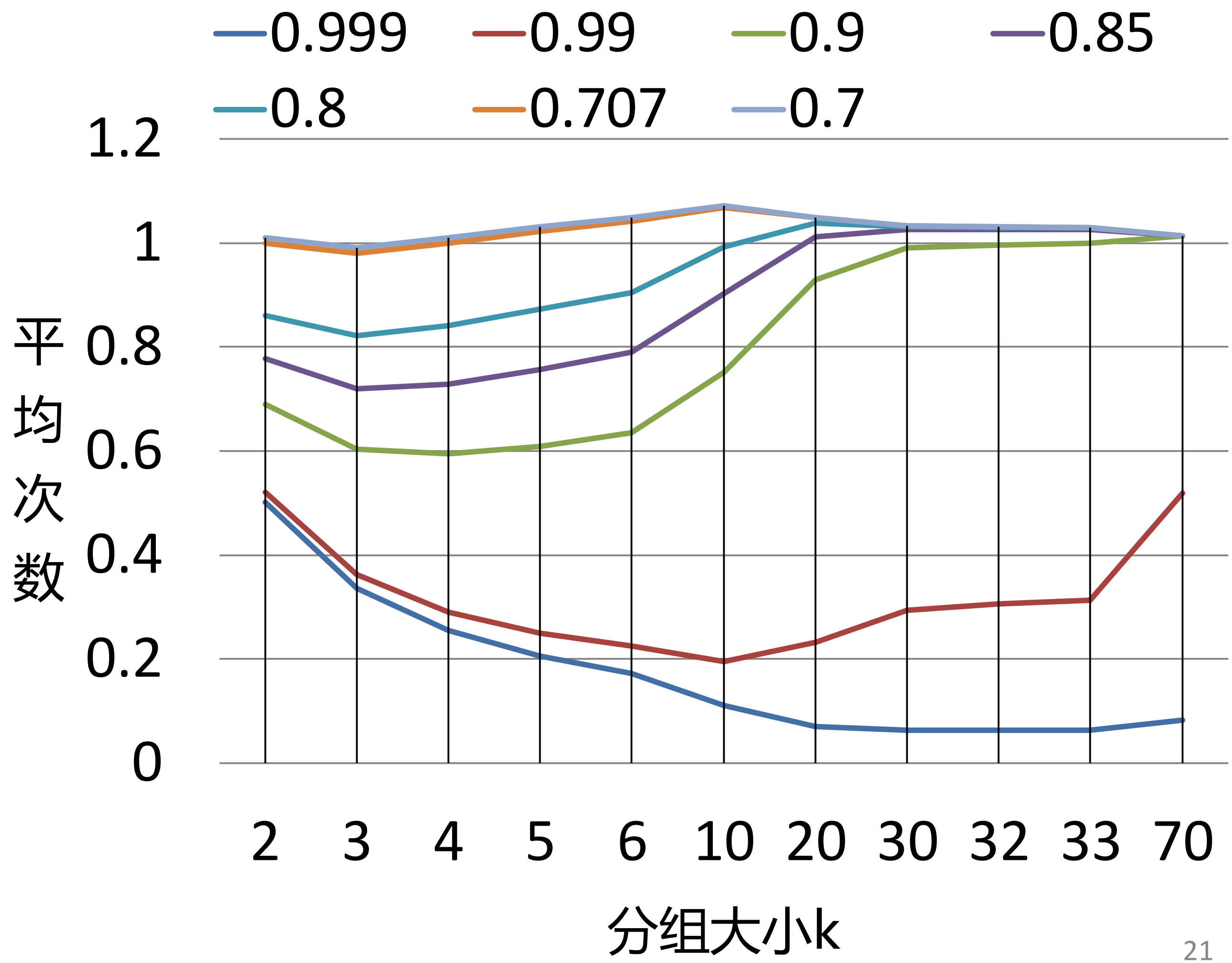
于是：

$$E(X)=\frac{1}{k}q^k+\frac{1+k}{k}(1-q^k)$$
$$=\frac{1+k-kq^k}{k}$$
$$=1+\frac{1}{k}-q^k$$

于是只要$1/k-q^k<0$，即可减少平均次数

最佳分组大小与q的关系如下图

可见当p较小(例如，≤ 0.01)时，10~20人的分组是非常有效的



1.2 连续型随机变量的数学期望

定义：设连续型随机变量X的概率密度函数为$f(x)$，如果

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

绝对收敛,则称$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$的值为随机变量X的数学期望

(即$\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx < \infty$)

记为：

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

例4(服务等待时间). 设顾客在某银行的窗口等待服务的时间X(以分计)服从指数分布,其概率密度为：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x/5}}{5} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

试求顾客等待服务的平均时间?

解：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{\infty}\frac{xe^{-x/5}}{5}dx$$

$$=5\left(-\frac{x}{5}-1\right)e^{-x/5}\Big|_{0}^{\infty}=5$$

常见连续型分布的期望

1.均匀分布

$$X \sim U(a,b)\ ,\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a},\ a < x < b \\ 0, \qquad\quad 其他 \end{cases}$$

注意到：

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$= \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)}$$

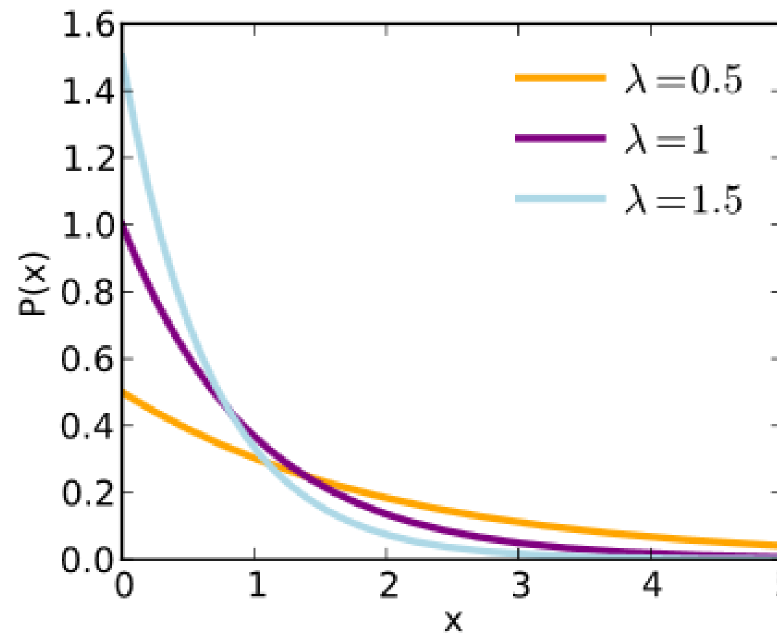
$$= \frac{a+b}{2}$$

2. 指数分布

$X \sim \text{Exponential}(\lambda)$，即$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$

$$E(X) = \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}(-\lambda x - 1)\Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{\lambda}$$



3. 正态分布

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)\text{，即} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (u = x - \mu)$$

$$= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du$$

令Y=X

$$[E(X)]^2=\frac{\mu^2}{2\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2+v^2}{2\sigma^2}}du\,dv$$

极坐标代换

$$=\frac{\mu^2}{2\pi\sigma^2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\infty}re^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}dr$$

$$=-\mu^2\int_0^{\infty}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}d\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$=-\mu^2e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\Big|_0^{\infty}=\mu^2$$

有

$$E(X)=\mu$$

1.3 随机变量函数的数学期望

定理: 设Y是随机变量X的函数，即$Y = g(X)$,$g(x)$是连续函数

(1) 若X是离散型随机变量，且其概率分布为

$P\{X = x_i\} = p_i$, $i = 1,2,\ldots$

若$\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$绝对收敛，则Y的的数学期望为

$$E(Y) = E[g(x)] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$$

(2) 若X是连续型随机变量，且其概率密度为$f(x)$，

若$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$绝对收敛，则Y的的数学期望为

$$E(Y) = E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

这一定理的价值在于给出了求E(Y)时，不必算出Y的分布率或概率密度，而是直接利用X的分布率或概率密度即可

如同一维到二维随机变量的扩展，有下面的定理：

定理: 设Z是随机变量X,Y的函数，即$Z = g(X,Y)$,$g(x,y)$是连续函数

(1) 若二维离散型随机变量(X,Y) 的分布率为

$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$, $i,j = 1,2,\ldots$

若$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g(x_i, y_j)p_{ij}$绝对收敛，则$Z$的的数学期望为

$$E(Z) = E[g(X,Y)] = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g(x_i, y_j)p_{ij}$$

(2) 若二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$，若$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dx\,dy$绝对收敛，则Z的的数学期望为

$$E(Z) = E[g(x,y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dx\,dy$$

例5. 设风速V在$(0,a)$上服从均匀分布，即具有概率密度：

$$f(v)=\begin{cases}\frac{1}{a} & 0<v<a\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

又设飞机机翼受到的正压力W是V的函数，$W=kV^2$,$k>0$是常数，求W的数学期望。

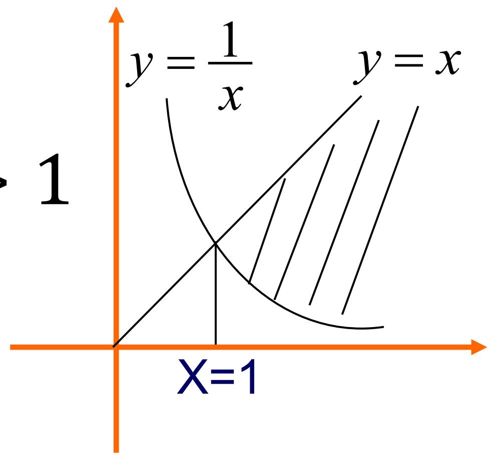
解：由上述定理有：

$$E(W)=\int_0^a kv^2 f(v)dv=\int_0^a \frac{kv^2}{a}dv$$

$$=\frac{1}{3}ka^2$$

例6. 设随机变量(X,Y)的概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2x^3y^2} & \dfrac{1}{x}<y<x,x>1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$



求数学期望$E(Y)$，$E(\frac{1}{XY})$。

解：

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dy\,dx=\int_{1}^{+\infty}\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{3}{2x^3y}dy\,dx$$

$$=3\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln x}{x^3}dx=\left[-\frac{3}{2}\cdot\frac{\ln x}{x^2}\right]_1^{+\infty}+\frac{3}{2}\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx=\frac{3}{4}$$

另外的解法，按照定义，先求出$f_Y(y)$，之后再求出

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy$$

$$E\left(\frac{1}{XY}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{xy} f(x, y) dy\, dx$$

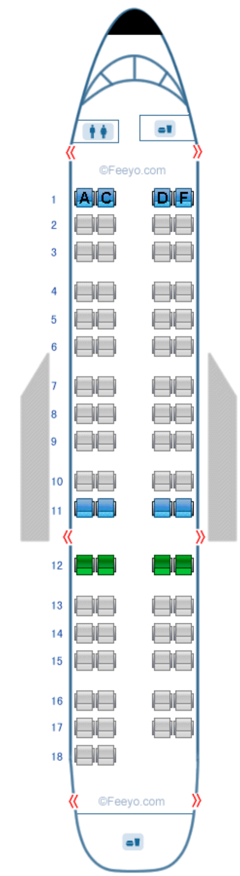
$$= \int_{1}^{+\infty} \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{3}{2x^4y^3} dy\, dx$$

$$= \frac{3}{2} \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^4} \left[-\frac{1}{2y^2}\right]_{\frac{1}{x}}^{x} dx = \frac{3}{4} \int_{1}^{+\infty} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^6}\right] dx = \frac{3}{5}$$

例7(生产决策). 某航空公司打算开辟新航线，并考虑航班的运力，估计每售出一张机票可获利300元，而出现一个空座将导致700元的损失，预计每周旅行的乘客数Y服从指数分布

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases}$$

试为这条航线确定每周需要的座位数。



解：设安排的座位数为x，则获利(损失)函数如下：

$$g(y)=\begin{cases}300Y-700(x-Y) & Y<x\\ 300x & Y\geq x\end{cases}$$

预期获益(损失) $E\big(g(y)\big)$为：

$$\int_0^x [300y-700(x-y)]\lambda e^{-\lambda y}dy+\int_x^\infty 300x\lambda e^{-\lambda y}dy$$

$$=\left[\frac{1000}{\lambda}e^{-\lambda y}(-\lambda y-1)+700x\ e^{-\lambda}\right]\Big|_0^x-300xe^{-\lambda}\Big|_x^\infty$$

$$=\frac{1000}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda x}\right)-700x$$

令

$$\frac{dE\big(g(y)\big)}{dx}=1000e^{-\lambda x}-700=0$$

有

$$x = -\frac{1}{\lambda}\ln 0.7 \approx \frac{0.3567}{\lambda}$$

此时$\frac{dE^2\big(g(y)\big)}{dx^2} = -1000\lambda e^{-\lambda x} < 0$

因此$x \approx \frac{0.3567}{\lambda}$时有最大收益(最小损失)

于是收益(损失)为

$\frac{1000}{\lambda}(1 - e^{-0.3567}) - 700x = \frac{300.0173711}{\lambda} - 700x$

如果$\lambda = 0.0001$，则每周安排大约3567个座位，预计可以取得最佳效益，大约获利503,273.71元

数学期望的特性：

1. 设C是常数，则有$E(C) = C$

证明： C是常数，于是$P(X = C) = 1$，

$$\mathrm{E}(X) = E(C) = 1 \times C = C$$

2. 设X是一个随机变量，C是常数，则有$E(CX) = CE(X)$

证明：

$$\mathrm{E}(CX) = \int_{-\infty}^{\infty} Cxf(x)dx = C\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = CE(X)$$

数学期望的特性：

3. 设X, Y是两个随机变量，则有$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

证明：

$$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)f(x,y)dx\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dx\,dy+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)dx\,dy$$

$$=E(X)+E(Y)$$

将上述三项性质结合有：

$$E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c$$

这一性质可推广至任意有限个随机变量线性组合的情况

数学期望的特性：

4. 设X,Y是相互独立的随机变量，则有$E(XY)=E(X)E(Y)$

证明：

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dx\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf_X(x)f_Y(y)dx\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy$$

$$=E(X)E(Y)$$

这一性质可以推广到任意有限个相互独立的随机变量之积的情况

例8(电梯停留层数). 酒店客房均匀分布在2-11层，电梯从一层出发载有20位客人，假定没有来自电梯外部的停留请求，以X表示停车的次数，求X的数学期望(设各位客人在各层离开电梯是等可能的，并设各客人是相互独立的)

解：引入随机变量：

$$X_i = \begin{cases} 0 & 第i+1层无人离开 \\ 1 & 第i+1层有人离开 \end{cases}$$

于是

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$$

$$E(X_i) = P(X_i = 1) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{10} E(X_i) = 8.784$$

将X分解成数个随机变量之和，然后利用随机变量和的数学期望等于随机变量数学期望之和来求数学期望

关于期望的直觉理解

- 期望就是加权平均
- 加权的对象就是随机变量或随机变量的函数
  - 例如平均身高中身高作为随机变量，或者以身高间接度量身体素质
- “权”就是概率的分布率，或概率密度函数

期望的统一表达

定义：X的期望值定义为

$$E(X) = \int x dF(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \end{cases}$$

如果上式绝对收敛, 则称$\int xdF(x)$的值为随机变量X的数学期望

§2 方差

例1：对于投资而言，关心平均回报率，但也关心可能的风险

例2：对中学而言，关心学生的升学率，但也关心最好考取好学校的人数，和落在最差的那一部分人数；对大学而言关心毕业生受社会欢迎的程度，但也关心产生的各类领袖人数等

例3：对于企业而言，关心产品的返修率，但也关心极端故障(需要危机公关)，和极端的优秀产品(用来做广告)

考虑一个问题：

如果你是射击队教练，有两个队员，一个肯定能进前8名，另一位发挥好能拿冠军，发挥失则无缘决赛，现在只有一个参赛名额，你会选择哪一位？

例4. 设有一批灯泡寿命为：一半约950小时，另一半约1050小时→平均寿命为1000小时；另一批灯泡寿命为：一半约1300小时，另一半约700小时→平均寿命为1000小时。哪批灯泡的质量更好？

单从平均寿命这一指标无法判断，进一步考察灯泡寿命X与均值1000小时的偏离程度。

方差——正是体现这种意义的数学特征。

定义：设X是一个随机变量，若$E\{[X-E(X)]^2\}$存在，则称其为X的方差，记为$D(X)$或$Var(X)$，即

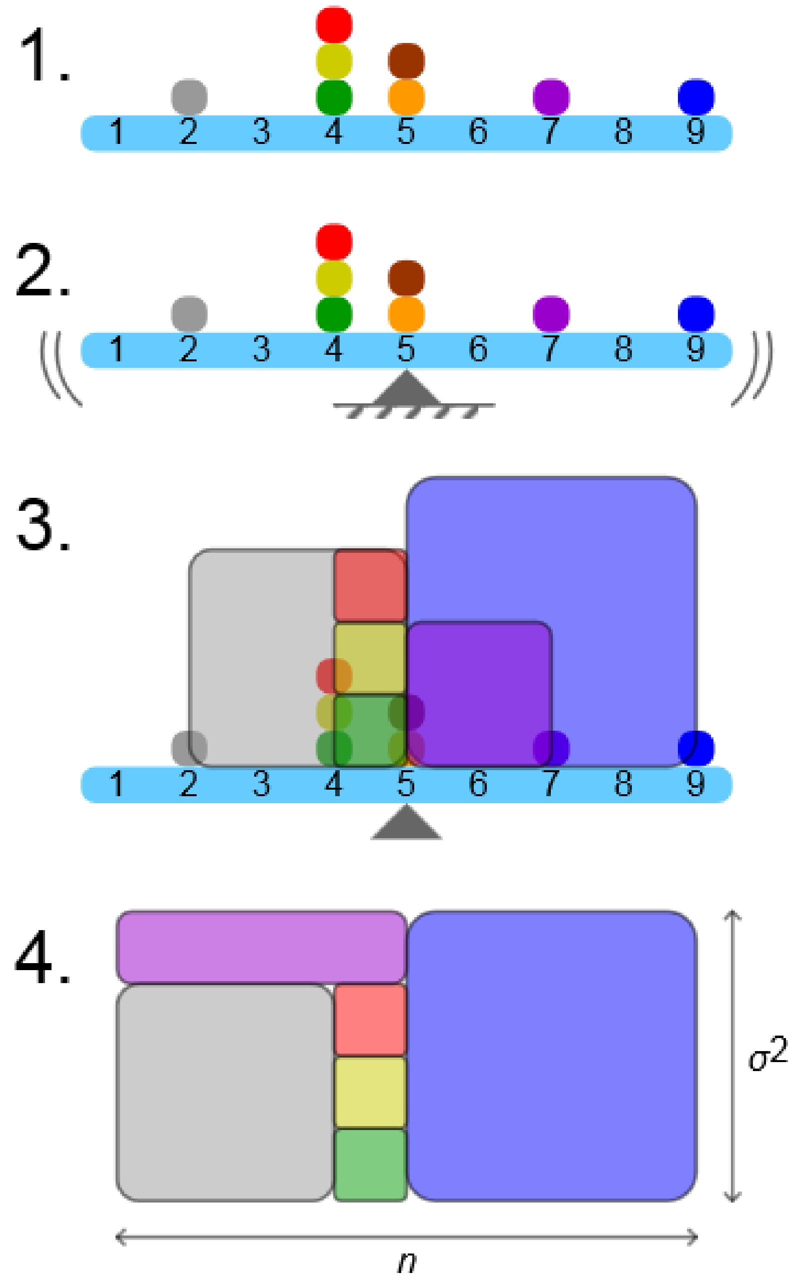
$$D(X)=Var(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$$

将$\sqrt{D(X)}$记为$\sigma(X)$，称为X的标准差或均方差，它是与随机变量X具有相同量纲的量。

方差D(X)刻画了X取值的分散程度，它是衡量X取值分散程度的度量。若X取值集中，则D(X)较小，反之，若X取值比较分散，则D(X)较大

方差的几何解释：

1. 分布(2, 4, 4, 4, 5, 5, 7, 9)的几何图示
2. 分布的均值
3. 每个点到均值的距离为边的正方形
4. 将所有正方形重排成一边长为n(样本点数)的矩形，另一边长为方差σ^2



From: https://en.wikipedia.org/wiki/Variance

思考问题：

1. 儿童和成人服装的大小是如何定义的，反映了什么问题？

2. 特殊体型的人卖服装为何困难？折扣店中大众体型的人为何难以找到折扣商品？

对离散型随机变量X，其分布律为

$$P(X = x_k) = p_k, k = 1,2, \dots$$

对应的方差为：

$$D(X) = \sum_{k=1}^{\infty} [x_k - E(X)]^2 p_k$$

对连续型随机变量X，其概率密度为$f(x)$，对应的方差为：

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx$$

统一表达：

$$D(X) = \int [x - E(X)]^2 dF(x)$$

注意下面的方法推导过程，由此产生另一个计算的方法，

$$D(X) = E\{[X - E(X)]^2\}$$
$$= E\{X^2 - 2XE(X) + [E(X)]^2\}$$
$$= E\{X^2\} - 2E(X)E(X) + [E(X)]^2$$
$$= E\{X^2\} - [E(X)]^2$$

例5(随机变量的标准化). 设随机变量X具有数学期望$E(X)=\mu$，方差$D(X)=\sigma^2\neq 0$，记$X^*=\frac{X-\mu}{\sigma}$，并称为X的标准化变量，证明$E(X^*)=0$，$D(X^*)=1$。

证明：

$$E(X^*)=\frac{1}{\sigma}E(X-\mu)=\frac{1}{\sigma}[E(X)-\mu]=0$$

$$\begin{aligned}D(X^*)&=E\left({X^*}^2\right)-[E(X^*)]^2\\&=E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right]\\&=\frac{1}{\sigma^2}E[(X-\mu)^2]\\&=\frac{\sigma^2}{\sigma^2}=1\end{aligned}$$

常见分布的方差

1. 0-1分布

X	0	1
p_X	$1-p$	p

由

$$E(X)=p, \qquad E(X^2)=0^2\cdot(1-p)+1^2\cdot p=p$$

有

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=p(1-p)$$

2. 二项分布

$$X \sim b(n,p)\text{，即}P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \qquad (\text{利用}kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1})$$

$$=\sum_{k=1}^{n} nkC_{n-1}^{k-1}p^k(1-p)^{n-k}=n\sum_{k=1}^{n}(k-1)C_{n-1}^{k-1}p^k(1-p)^{n-k}+np$$

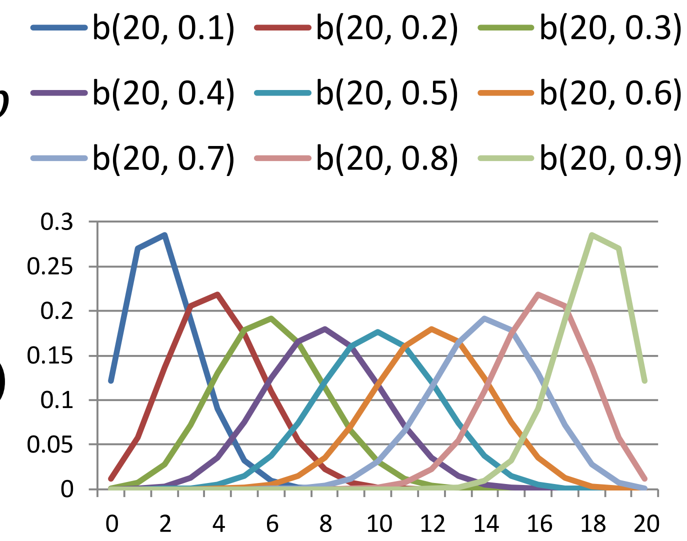
$$=np\sum_{k=1}^{n}(n-1)C_{n-2}^{k-2}p^{k-1}(1-p)^{n-k}+np$$

$$=n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}C_{n-2}^{k-2}p^{k-2}(1-p)^{n-k}+np$$

$$=n(n-1)p^2+np$$

又，$E(X)=np$

于是，$D(X)=E(x^2)-[E(x)]^2=np(1-p)$



3. 泊松分布

$$X \sim \pi(\lambda)\text{，即}P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k=0,1,2,\ldots$$

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}+\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

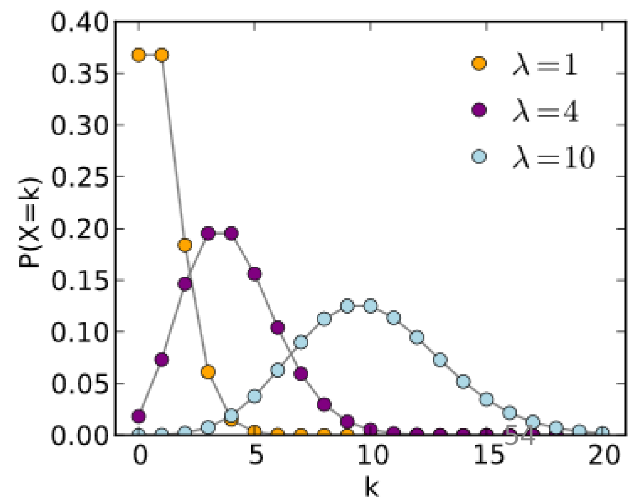
$$=\lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$=\lambda^2+\lambda$$

注意到$E(X)=\lambda$, 故

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda$

注意：这里的期望和方差均是λ



4. 均匀分布

$$X \sim U(a,b)\text{，}f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x<a<b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

注意到：$E(X)=\frac{a+b}{2}$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx$$

$$=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}$$

$$=\frac{a^2+b^2+ab}{3}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

5. 指数分布

$X\sim\text{Exponential}(\lambda)$，即$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

$$E(X^2)=\int_0^{\infty}\lambda x^2 e^{-\lambda x}dx$$

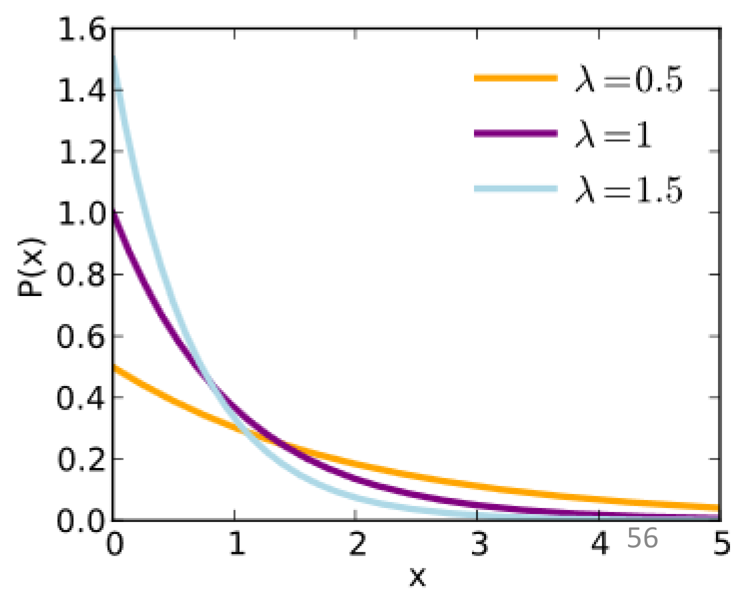
$$=\lambda e^{-\lambda x}\left(-\frac{x^2}{\lambda}-\frac{2x}{\lambda^2}-\frac{2}{\lambda^3}\right)\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{2}{\lambda^2}$$

注意到：$E(X)=\frac{1}{\lambda}$

于是，

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

$=\frac{1}{\lambda^2}$



作业

概率论与数理统计

pp. 114-115, #9，#14，#18

概率论及其应用

pp. 182-183, #8, #19, #38