Homework1

李昊宸

November 10, 2018

1

a.$h_0 = 0 \quad h_1 = 1 \quad h_2 = 2$
$h_n = h_{n-1} + 9h_{n-2} - 9h_{n-3}$
特性根$x_1 = 1 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = -3$
设$h_n = ax_1^n + bx_2^n + cx_3^n$
将初始条件代入，解得$a = -\frac{1}{4} \quad b = -\frac{1}{12} \quad c = \frac{1}{3}$
因此$h_n = -\frac{1}{4} - \frac{1}{12}-3^n + \frac{1}{3}3^n$
b.$h_0 = -1 \quad h_1 = 0$
$h_n = 8h_{n-1} - 16h_{n-2}$
设其生成函数为$h(x)$,则$h(x) = \frac{8x-1}{16[x-\frac{1}{4}]^2}$
$= \sum \frac{8x-1}{16} \sum (n+1)4^{n+2}x^n = \sum (n-1)4^n x^n$
所以$h_n = (n-1)4^n$
c.$h_0 = 2 \quad h_n = (n+2)h_{n-1} + (n+2)$
$\frac{h_n}{(n+2)!} = \frac{h_{n-1}}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!}$
所以$h_n = (n+2)! \sum_0 \frac{1}{(k+1)!}$

2

a.3的倍数
$g(x) = (1 + x^3 + x^6 + ...)^4 = \frac{1}{(1-x^3)^4}$
b.e1不出现，e2至多出现一次
$g(x) = (1+x)(1+x+x^2+...)^2 = \frac{1+x}{(1-x)^2}$
c.每个ei至少出现10次
$g(x) = (x^{10} + x^{11} + ...)^4$

3

$g(x) + (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ...)^2 (1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ...)^2$
$= e^{2x}(\frac{e^x + e^{-x}}{2})^2 = \frac{1}{4}[e^{4x} + 1 + 2e^{2x}]$
泰勒展开，得到$g(x) = 1 + \frac{1}{4}\sum_{n=1}[4^n + 2^{n+1}]\frac{x^n}{n!}$

所以$h_n = \frac{4^n+2^{n+1}}{4}$

4

定义$h_0 = 1, \quad h_1 = 1 \quad h_2 = 2 \quad h_3 = 5$
固定一个点，在圆环上选区和它相距偶数个点的点，这两个点将所有点二分。
于是通项公式为$h_n = h_0 h_{n-1} + ... + h_{n-1} h_0$,符合卡特兰数通项公式
所以$h_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

5

通过画图，我们可以发现，当我们加入一个位于扇面上的点时，
$h_n = 2h_{n-1} + h_{n-2} + ... + 2h_1, n \geq 2$
与下式联立成方程组：$S_n = h_n + ... + h_1 \quad h_n$
解得$h_n = 3h_{n-1} - h_{n-2}$
其特征根为$x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$
将初始值$h_1 = 1 \quad h_2 = 1 \quad h_3 = 3$ 代入，求得通项公式：

$$h_1 = 1; \quad h_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{3-\sqrt{5}}{2})^{n-1}, n \geq 2$$

6

$G(z) = \frac{A}{1-az} + \frac{B}{1-bz}$
我们考虑如下情况
设C= $\frac{A}{(1-az)}$ D= $\frac{B}{1-bz}$
那么有$C^k D^{n-k} = C^k D^{n-k-1} e - C^{k-1} D^{n-k}$
其中$e = \frac{Ba}{Ab}$
通过此递推式，我们可以直接展开$(C+D)^n$
先展开成为牛顿二项式的形式，之后我们可以得到
$(C+D)^n = C^n + \sum_{k=1}^{n-1} C^{n-k} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k+j} \binom{n}{j}\binom{k-1}{j-1} e^j$
$+D^n + \sum_{k=1}^{n-1} D^{n-k} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k+j+1} \binom{n}{n-j}\binom{k-1}{j-1} e^{j-1}$

7

a.考虑选定一个作为根节点，剩余n-1个节点分布在左叉和右叉上
通项公式为$h_n = h_0 h_{n-1} + ... + h_{n-1} h_0$,符合卡特兰数通项公式
所以$h_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

b.n对括号匹配问题，实质上与上题相同
考虑第一个左括号和其对应右括号的位置，将剩余n-1对括号二分
答案仍为卡特兰数。

8

观察发现，只有在t为奇数的时候，M_t才有可能等于0
故若T=k；那么就有$M_{t-1}=1$
将可取的值画在直角坐标系中，令原点为1，沿y轴一个单位为+1；沿x轴一个单位为-1；
那么从原点到M_{t-1}这个点有C_{t-1}种走法，等概率为$p^{t-1}(1-p)^{t-1}$
所以期望为$E(x)=\sum_0 C_k p^k(1-p)^{k+1}(2k+1)$
记$f(x)=\frac{E(x)}{1-p}$
则$f(x)=2x(\sum C_k x^k)'+1+\sum C_k x^k$
$=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x\sqrt{1-4x}}$
所以$E(T)=f(p(1-p))(1-p)=\frac{1-\sqrt{1-4p(1-p)}}{2p\sqrt{1-4p(1-p)}}$

9

考虑单个方块的分布：
1.第一排为一个骨牌，为T_{n-1}
2.前两排为两个横放骨牌，T_{n-2}
3.第一排为两个单牌，T_{n-1}
4.第一排第二排各有一个单牌，$2T_{n-2}$
5.第一排第三排各有一个单牌，$2T_{n-3}$
...
所以得到递归方程$T_n=2T_{n-1}+3T_{n-2}+2T_{n-3}+...$
化为$T_n=3T_{n-1}+T_{n-2}-T_{n-3}$
记特征根为$x_1+x_2+x_3$
将$T_0=1,T_1=2,T_2=7,T_3=22$代入可解
(三次方程不会解...)

10

每层放一块木板
设n块最长为F_n
把上面n块看成一个整体，其重心作用在最下面新加入的一块板的最远端
设最下面的板伸出x，则最远的x满足$nx=(\frac{1}{2}-x)$
得$x=\frac{1}{2(n+1)}$

于是$F_{n+1} = F_n + \frac{1}{2(n+1)}$
所以$F_n = \frac{1}{2}\sum \frac{1}{k}$