选做题1

李昊宸

September 13, 2018

a. 设两个概率密度函数为f(x),g(x)
则有

$$\int_0^1 (f(x) - g(x))dx = 0$$

于是存在这样的在[0，1]上的划分A，使

$$\int_A (f(x) - g(x))dx + \int_A (f(x) - g(x))dx = 0$$

当A取满足上式的极限[0，1]时，

$$\int_A (f(x) - g(x))dx = 0$$

当A去趋向一个单点的f(x)-g(x)的零点附近的极限小邻域时，

$$\int_A (f(x) - g(x))dx = 0$$

因f(x),g(x)为连续函数，f(x)-g(x)在区间X=[0,a]和Y=[b,1]上的积分随a和b连续变化,且当a=b为f(x)-g(x)的零点时函数值为0
故存在连续函数h(a),使f(x)-g(x)在区间A=[0+a,1-h(a)]上积分为0。
且我们有h(0)=0，即

$$\int_A f(x)dx = \int_A g(x)dx$$

又因

$$\int_0^1 f(x)dx = 1$$

且当a=1-h(a)时，

$$\int_{0+a}^{1-h(a)} f(x)dx = 0$$

又

$$\int_A f(x)dx$$

是关于a的连续函数，故存在$0 \le a \le 1$,使

$$\int_A f(x)dx = \frac{1}{2} = \int_A g(x)dx$$

A即为满足要求的划分
b.归纳法：
n=1时，显然成立；
假设n=k时，有上述关系成立，
n=k+1时，设存在划分A使

$$\int_A f(x)dx = \frac{1}{2}$$

对于$f_1, f_2, ..., f_k$成立
继续将A，$\overline{A}$划分为A_1, A_2, A_3, A_4，使函数在这四个区间上积分等于$\frac{1}{4}$
归纳，共分为2^n（n趋向与正无穷）个小区间
建立其子集S，其中的每个元素均为2^{n-1}个小区间的并
定义—$A_X - A_Y$—为A_x与A_y的对称差的区间的长度，则当n趋于无穷时，
可将该集合由离散构建最细拓扑从而实现连续化。
构建从S到[0,1]的映射H(A)，它将S中的元素A映为

$$\int_A f_{k+1}(x)dx$$

取前2^{n-1}个小区间构成的元素A_0,
1.若$H(A_0) = \frac{1}{2}$,A即为所找划分
2.若$H(A_0) \le \frac{1}{2}$,考虑到$H(\overline{A_0}) \ge \frac{1}{2}$，由H(A)的连续性及介值定理，存在A属于S，使$H(A) = \frac{1}{2}$。证毕