第十一章 Markov链

§1 马尔可夫过程及其概率分布

- 马尔可夫性(无后效性)
  过程(或系统)在时刻t_0 所处的状态为已知的条件下，过程在时刻$t > t_0$所处状态的条件分布与过程在时刻t_0之前所处的状态无关。

通俗地说，就是在已经知道过程“现在”的条件下，其“将来”不依赖于“过去”。

用分布函数表述马尔可夫性：

设随机过程$\{X(t), t \in T\}$,其状态空间为I, 对参数集T中任意n个数值$t_1 < t_2 < \cdots < t_n, n \geq 3, t \in T$,

$$P\{X(t_n) \leq x_n | X(t_1) = x_1, \dots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}\}$$
$$= P\{X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}\}$$

则称过程$\{X(t), t \in T\}$具有马尔可夫性或无后效性，并称此过程为马尔可夫过程

例1：设$\{X(t), t \geq 0\}$是独立增量过程，且$X(0) = 0$，

证明：$\{X(t), t \geq 0\}$是一个马尔可夫过程。

证：对T中任意n个数值$t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n$，

$$P\{X(t_n) \leq \mathrm{x}_n | X(t_1) = x_1, \ldots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}\}$$

$$= P\left\{X(t_n) - X(t_{n-1}) \leq x_n - x_{n-1} \middle| \begin{matrix} X(t_1) - X(0) = x_1, \ldots, \\ X(t_{n-1}) - X(0) = x_{n-1} \end{matrix} \right\}$$

$$= P\{X(t_n) - X(t_{n-1}) \leq x_n - x_{n-1} | \, X(t_{n-1}) - X(0) = x_{n-1}\}$$

$$= P\{X(t_n) \leq x_n | \, X(t_{n-1}) = x_{n-1}\}$$

由定义知，$\{X(t), t \geq 0\}$ 是一马尔可夫过程。

[证毕]

由上例知，泊松过程是时间连续状态离散的马氏过程，维纳过程是时间状态都连续的马氏过程

时间和状态都离散的马尔可夫过程称为马尔可夫链，简称马氏链，

记为：$\{X_n = X(n), n = 0,1,2, \dots\}$,参数集$T = \{0,1,2, \dots\}$，

记链的状态空间为： $I = \{a_1, a_2, \dots\}$，$a_i \in R$

马尔可夫链用条件分布律来表示为：

对任意的正整数n, r和

$0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_r < m; t_i, m, m+n \in T$,有：

$$P\left\{X_{m+n} = a_j \middle| X_{t_1} = a_{i_1}, X_{t_2} = a_{i_2}, \dots, X_{t_r} = a_{i_r}, X_m = a_i\right\}$$

$$= P\left\{X_{m+n} = a_j \middle| X_m = a_i\right\} \stackrel{\text{def}}{=} P_{ij}(m.m+n)$$

- 条件概率：$P_{ij}(m,m+n)=P(X_{m+n}=a_j|X_m=a_i)$称为马氏链在时间$m$处于状态$a_i$条件下，在时间$m+n$转移到状态$a_j$的转移概率

- 转移概率性质：

$$\sum_{j=1}^{\infty}P_{ij}(m,m+n)=1\,,j=1,2,\ldots$$

这是因为链在时刻m以任何一个状态a_i出发，到另一个时刻$m+n$必然转移到$a_1,a_2,\ldots$诸状态中的某一个

- 转移概率矩阵：

$$P(m,m+n)=\begin{pmatrix} P_{11}(m,m+n) & P_{12}(m,m+n) & \cdots \\ P_{21}(m,m+n) & P_{22}(m,m+n) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

此矩阵的每一行元素之和等于1

- 当$P_{ij}(m,m+n)$只与i,j及n有关时，把它记为$P_{ij}(n)$，即
  $P_{ij}(n)=P_{ij}(m,m+n)=P\left(X_{m+n}=a_j|X_m=a_i\right)=P\left(X_n=a_j|X_0=a_i\right)$
  称此转移概率为马氏链的n步转移概率

- 当转移概率具有这种平稳性时，称此链是齐次马氏链

在齐次马氏链中，n步转移概率矩阵为：

$$P(n)=\begin{pmatrix} P_{11}(n) & P_{12}(n) & \cdots \\ P_{21}(n) & P_{22}(n) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

一步转移概率记为：

$$P_{ij}=P_{ij}(1)=P\left(X_{m+1}=a_j|X_m=a_i\right)$$

一步转移概率矩阵记为：

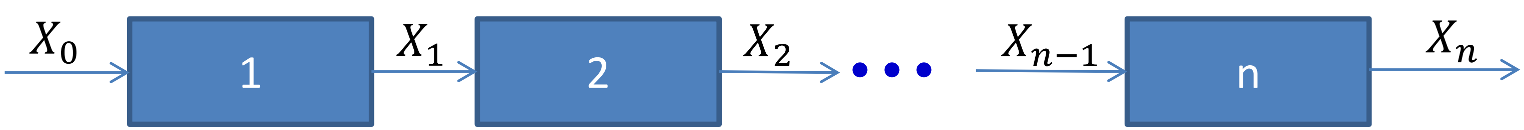
$$P=P(1)=\begin{array}{ccc} & & X_{m+1}\text{状态} \\ & & \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & \cdots \end{array} \\ X_m\text{状态} & \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{array} & \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots \\ P_{21} & P_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

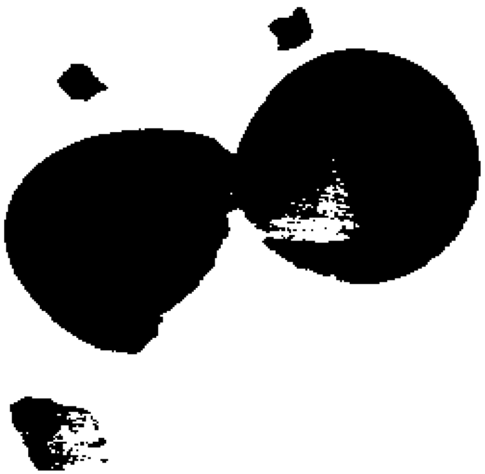
例2：(0-1传输系统) 如图所示，只传输数字0和1的串联系统中，设一级的传真率为p，误码率为$q=1-p$。并设一个单位时间传输一级，X_0是第一级的输入，X_n是第n级的输出(n≥1)，那么$\{X_n, n=0,1,2\dots\}$是一随机过程，状态空间$I=\{0,1\}$，而且当$X_n=i$为已知时，X_{n+1}所处的状态的概率分布只与$X_n=i$有关，而与时刻n以前所处的状态无关。

所以它是一个马氏链，而且还是齐次的，它的一步转移概率和一步转移概率矩阵分别为：

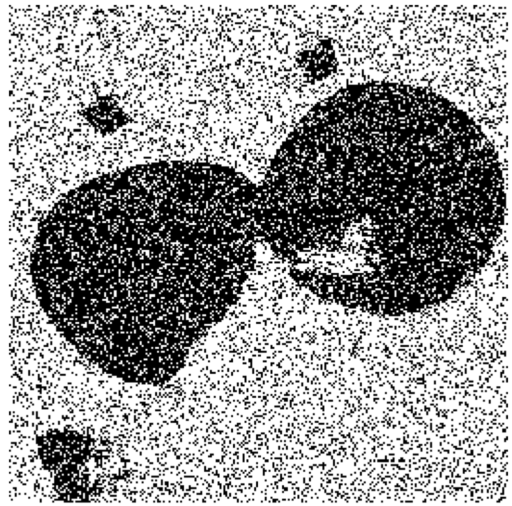
$$P_{ij}=P(X_{n+1}=j|X_n=i)=\begin{cases} p & i=j \\ q & i\neq j \end{cases}, i,j=0,1$$

$$P=\begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}$$

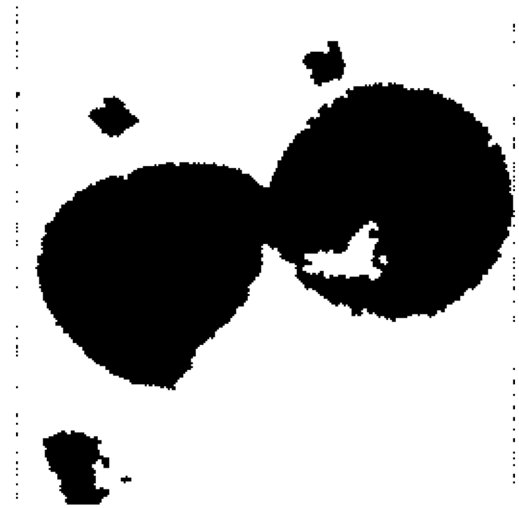




(a)原图象



(b)从模拟BSC(α=0.2)接收的图象



(c)迭代五次的恢复结果

例3：一维随机游动。设一醉汉Q(或看作一随机游动的质点)在直线上的点集$I=\{1,2,3,4,5\}$作随机游动且仅在1秒、2秒等时刻发生游动，游动的概率规则是：如果Q现在位于点$i(1<i<5)$，则下一时刻各以1/3的概率向左或向右移动一格，或以1/3的概率留在原处；如果Q现在处于1(或5)这一点上，则下一时刻就以概率1 移动到2(或4)这点上，1和5这两点称为反射壁，这种游动称为带有两个反射壁的随机游动。

解：以X_n表示时刻n时Q的位置，不同的位置就是X_n的不同状态；而且当$X_n = i$为已知时，X_{n+1}所处的状态的概率分布只与$X_n = i$有关，而与Q在时刻n以前如何到达i完全无关，所以$\{X_n, n = 0,1,2,\dots\}$是一马氏链，且是齐次的。

它的一步转移概率矩阵为：

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

解(续)：如果把1这点改为吸收壁，即Q一旦到达1这一点，则永远留在点1时，此时的转移概率矩阵为：

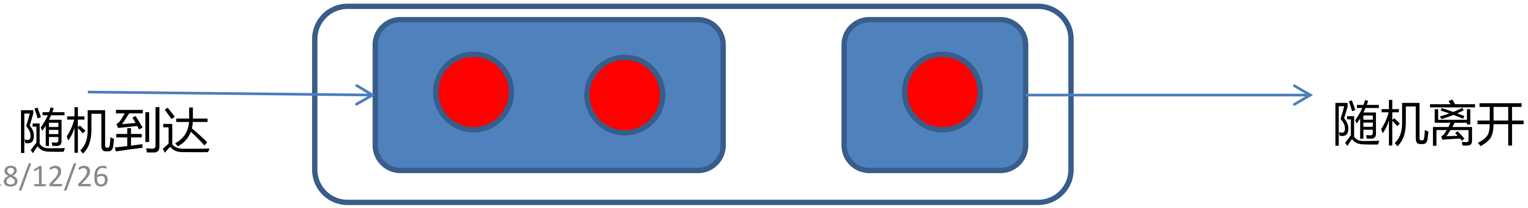
$$
P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\
0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\
0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

例4：排队模型

设服务系统由一个服务员和只可以容纳两个人的系统等候室组成。服务规则为：先到先服务，后来者需在等候室依次排队，假设一个需要服务的顾客到达系统时发现系统内已有3个顾客，则该顾客立即离去。

设时间间隔Δt内有一个顾客进入系统的概率为q，有一接受服务的顾客离开系统(即服务完毕)的概率为p，又设当Δt充分小时，在这时间间隔内多于一个顾客进入或离开系统实际上是不可能的，再设有无顾客来到与服务是否完毕是相互独立的。

试用马氏链描述这一过程。



解：现用马氏链来描述这个服务系统：

设$X_n = X(n\Delta t)$表示时刻$n\Delta t$时系统内的顾客数，即系统的状态。$\{X_n, n = 0,1,2 \ldots\}$是一随机过程，状态空间$I = \{0,1,2,3\}$，且如前例2、例3的分析可知，它是一个齐次马氏链，它的一步转移概率矩阵为：

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \quad 0 \quad & \quad\quad 1 \quad\quad & \quad\quad 2 \quad\quad & \quad 3 \quad \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1-q & q & 0 & 0 \\ p(1-q) & pq+(1-p)(1-q) & q(1-p) & 0 \\ 0 & p(1-q) & pq+(1-p)(1-q) & q(1-p) \\ 0 & 0 & p(1-q) & pq+(1-p) \end{pmatrix} \end{array}$$

例5：有甲、乙两袋球，开始时,甲袋有3只球,乙袋有2只球；以后，每次任取一袋，并从袋中取出一球放入另一袋(若袋中无球则不取)。X_n表示第n次抽取后甲袋的球数，$n = 1,2,\ldots$。$\{X_n, n = 1,2,\ldots\}$是一随机过程，状态空间$I = \{0,1,2,3,4,5\}$，当$X_n = i$时，$X_{n+1} = j$的概率只与i有关，与n时刻之前如何取到i值是无关的，这是一马氏链，且是齐次的，其一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

例6：某计算机机房的一台计算机经常出故障，研究者每隔15分钟观察一次计算机的运行状态，收集了24个小时的数(共作97次观察)，用1表示正常状态，用0表示不正常状态，所得的数据序列如下：

11100100111111100111101111110011111111100011
01101111011011010111101110111101111110011011
111100111

设X_n为第$n(n=1,2,\dots,97)$个时段的计算机状态，可以认为它是一个齐次马氏链。

求

(1)一步转移概率矩阵;

(2)已知计算机在某一时段(15分钟)的状态为0，问在此条件下，从此时段起，该计算机能连续正常工作45分钟(3个时段) 的条件概率。

解: (1) 设X_n为第$n(n=1,2,\dots,97)$个时段的计算机状态，可以认为它是一个齐次马氏链，状态空间$I=\{0,1\}$，96次状态转移情况是：

0→0：8次； 0→1：18次；

1→0：18次； 1→1：52次；

因此一步转移概率可用频率近似地表示为：

$$P=\begin{pmatrix} 8/26 & 18/26 \\ 18/70 & 52/70 \end{pmatrix}$$

(2) 某一时段的状态为0，定义其为初始状态，所求概率为

$$P(X_1=1,X_2=1,X_3=1|X_0=0)$$
$$=P_{01}P_{11}P_{11}=\frac{18}{26}\times\frac{52}{70}\times\frac{52}{70}=0.382$$

- 定义：记$P_j(0)=P\{X_0=a_j\},a_j\in I,j=1,2,\ldots$，称它为马氏链的初始分布。
- 马氏链在任一时刻$n\in T=\{0,1,2,\ldots\}$的一维分布：

$$P_j(n)=P\{X_n=a_j\},a_j\in I,j=1,2,\ldots$$

- 性质：$\sum_{j=1}^{\infty}p_j(n)=1$
- 公式：

$$P\{X_n=a_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}P\{X_0=a_i,X_n=a_j\}$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}P\{X_0=a_i\}P\{X_n=a_j\big|X_0=a_i\}$$

即，

$$p_j(n)=\sum_{i=1}^{\infty}p_i(0)p_{ij}(n),j=1,2,\ldots$$

对于任意个时刻$t_1 < t_2 < \cdots < t_n, t_i \in T$以及状态 $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n} \in I$，马氏链的$n$维分布：

$$P\{X_{t_1} = a_{i_1}, X_{t_2} = a_{i_2}, \ldots, X_{t_n} = a_{i_n}\}$$
$$= P\{X_{t_1} = a_{i_1}\} P\{X_{t_2} = a_{i_2} | X_{t_1} = a_{i_1}\} \ldots$$
$$P\{X_{t_n} = a_{i_n} | X_{t_1} = a_{i_1}, X_{t_2} = a_{i_2}, \ldots, X_{t_{n-1}} = a_{i_{n-1}}\}$$
$$= P\{X_{t_1} = a_{i_1}\} P\{X_{t_2} = a_{i_2} | X_{t_1} = a_{i_1}\} \ldots$$
$$P\{X_{t_n} = a_{i_n} | X_{t_{n-1}} = a_{i_{n-1}}\}$$
$$= P_{i_1}(t_1) P_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \ldots P_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1})$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} p_i(0) P_{i i_1}(t_1) P_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \ldots P_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1})$$

马尔可夫链的有限维分布完全由初始分布和转移概率所确定

§2 多步转移概率的确定

Chapman-Kolmogorov方程（C-K方程）

设$\{X_n, n = 1,2,\dots\}$是一齐次马氏链，则对任意的$u, v \in T_1 = \{0,1,2,\dots\}$，有：

$$P_{ij}(u+v) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{ik}(u) P_{kj}(v), i, j = 1,2,\dots$$

即“从时刻s所处的状态a_i出发，经时段$u+v$转移到状态a_j”这一事件可分解成：

"从$X(s) = a_i$出发，先经时段u转移到中间状态$a_k(k = 1,2,\dots)$，再从a_k经时段v转移到状态a_j"这样一些事件和

C-K方程证明：

$$P_{ij}(u+v)=P\left\{X(s+u+v)=a_j|X(s)=a_i\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}P\left\{X(s+u)=a_k,X(s+u+v)=a_j|X(s)=a_i\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}P\{X(s+u)=a_k|X(s)=a_i\}\times P\left\{X(s+u+v)\right.$$

$$\left.=a_j|X(s)=a_i,X(s+u)=a_k\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}P\{X(s+u)=a_k|X(s)=a_i\}\times P\left\{X(s+u+v)\right.$$

$$\left.=a_j|X(s+u)=a_k\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}P_{ik}(u)P_{kj}(v)$$

$P_{ij}(u+v)$是$u+v$步转移概率矩阵的(i,j)元

$(P_{i1}(u) \quad P_{i2}(u) \quad \dots)$是$u$ 步转移概率矩阵的第i行，

$(P_{1j}(v) \quad P_{2j}(v) \quad \dots)^T$是$v$步转移概率矩阵的第$j$列

根据矩阵乘法公式，C-K方程可以写成矩阵形式：

$P(u+v) = P(u)P(v)$

设$P(n)$是n步转移概率矩阵

则有：$P(n) = P^n$

事实上，由C-K方程➔

$$\begin{aligned} P(n) &= P(1)P(n-1) = PP(n-1) \\ &= P^2P(n-2) = \cdots = P^n \end{aligned}$$

齐次马尔可夫链的有限维分布可由初始分布与一步转移概率完全确定。

例1：设$\{X_n, n \geq 0\}$是具有三个状态0,1,2的齐次马氏链，一步转移概率矩阵为：

$$P = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

初始分布$p_i(0) = P\{X_0 = i\} = \frac{1}{3}, i = 0,1,2$

试求：

(1) $P\{X_0 = 0, X_2 = 1, X_4 = 1\}$

(2) $P\{X_2 = 0, X_4 = 1 | X_0 = 0\}$

(3) $P\{X_1 \neq 0, X_2 \neq 0, X_3 \neq 0, X_4 = 0 | X_0 = 0\}$

解：由C-K方程可得二步转移概率矩阵为：

$$P(2) = P^2 = \begin{pmatrix} 5/8 & 5/16 & 1/16 \\ 5/16 & 1/2 & 3/16 \\ 3/16 & 9/16 & 1/4 \end{pmatrix}$$

(1) $P\{X_0 = 0, X_2 = 1, X_4 = 1\} = p_0(0)P_{01}(2)P_{11}(2)$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{5}{16} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{96}$$

(2) $P\{X_2 = 0, X_4 = 1 | X_0 = 0\} = P_{00}(2)P_{01}(2)$

$$= \frac{5}{8} \times \frac{5}{16} = \frac{25}{128}$$

解：

(3)

$$
\begin{aligned}
&P\{X_1 \neq 0, X_2 \neq 0, X_3 \neq 0, X_4 = 0 | X_0 = 0\} \\
&= P_{01}P_{11}P_{11}P_{10} + P_{01}P_{11}P_{12}P_{20} \\
&+ P_{01}P_{12}P_{21}P_{10} + P_{01}P_{12}P_{22}P_{20} \\
&+ P_{02}P_{21}P_{11}P_{10} + P_{02}P_{21}P_{12}P_{20} \\
&+ P_{02}P_{22}P_{21}P_{10} + P_{02}P_{22}P_{22}P_{20} \\
&= P_{01}P_{11}P_{11}P_{10} + P_{01}P_{12}P_{21}P_{10} \\
&= \frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{7}{256}
\end{aligned}
$$

表示从状态0出发经4步首次回到状态0的概率

*标注红色的转移概率为0

§3 遍历性

对于一般的两个状态的马氏链，其一步转移概率矩阵一般可表示为：

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} \end{array}, 0 < a, b < 1$$

$$P(n) = P^n = \begin{bmatrix} P_{00}(n) & P_{01}(n) \\ P_{10}(n) & P_{11}(n) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{b + a(1-a-b)^n}{a+b} & \dfrac{a - a(1-a-b)^n}{a+b} \\ \dfrac{b - b(1-a-b)^n}{a+b} & \dfrac{a + b(1-a-b)^n}{a+b} \end{bmatrix}$$

注意到，当$n \to \infty$时，$(1-a-b)^n \to 0$

于是

$$\lim_{n\to\infty} P_{00}(n) = \lim_{n\to\infty} P_{10}(n) = \frac{b}{a+b}, \text{记为}\pi_0$$

$$\lim_{n\to\infty} P_{01}(n) = \lim_{n\to\infty} P_{11}(n) = \frac{a}{a+b}, \text{记为}\pi_1$$

上述极限的意义：

对固定的状态j，不管链在某一时刻从什么状态i(=0或1)出发，通过长时间的转移，到达状态j的概率都趋近于π_j，这就是遍历性。

又由于$\pi_0 + \pi_1 = 1$，所以(π_0, π_1)记为π构成一分布律，称它为链的极限分布。

一般地，设齐次马氏链的状态空间为I，若对于所有$a_i, a_j \in I$，转移概率$P_{ij}(n)$存在极限：

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}(n) = \pi_j(\text{不依赖于}i)\text{或}$$

$$P(n) = P^n \xrightarrow{n\to\infty} \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

则称此链具有遍历性

又若

$$\sum_j \pi_j = 1$$

则称$\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots)$为链的极限分布

有限链的遍历性的充分条件：

定理：设齐次马氏链$\{X_n \geq 1\}$ 的状态空间为$I = \{a_1, a_2, \dots a_N\}$，$P$是它的一步转移概率矩阵，如果存在正整数m，使对任意的$a_i, a_j \in I$，都有$P_{ij}(m) > 0, i, j = 1,2, \dots, N$，则此链具有遍历性，且有极限分布$\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N)$，它是方程组

$$\pi = \pi P(\text{即}\pi_j = \sum_{i=1}^{N} \pi_i P_{ij})$$

的满足条件

$$\pi_j > 0 \text{，} \sum_{j=1}^{N} \pi_j = 1$$

的唯一解

在定理的条件下，马氏链的极限分布又是平稳分布，即若用π作为链的初始分布，

$$p_i(0) = P(X_0 = a_i) = \pi_i, i = 1,2,\ldots,N$$

则链在任一时刻$n \in T$的分布$p(n)$永远与π一致，

$$p_i(n) = P(X_n = a_i) = \pi_i \ , \ i = 1,2,\ldots,N$$

事实上，

$$p_i(1) = P(X_1 = a_i) = \sum_{i=1}^{N} P(X_0 = a_k) P_{ki} = \sum_{i=1}^{N} \pi_k P_{ki}$$

$$= \pi_i \ , \ i = 1,2,\ldots,N$$

依次类推，

$$p_i(n) = P(X_n = a_i) = \sum_{i=1}^{N} P(X_{n-1} = a_k) P_{ki} = \sum_{i=1}^{N} \pi_k P_{ki}$$

$$= \pi_i \ , \ i = 1,2,\ldots,N$$

例1：一质点在1,2,3三个点上作随机游动，1和3是两个反射壁，当质点处于2时，下一时刻处于1,2,3是等可能的。写出一步转移概率矩阵，判断此链是否具有遍历性，若有，求出极限分布。

解：

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}，P(2)=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{7}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

由定理知，此链有遍历性；设极限分布

$$\pi=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)$$

对应

$$\pi = \pi P$$

有

$$\begin{cases} \pi_1 = \dfrac{1}{3}\pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \\ \pi_3 = \dfrac{1}{3}\pi_2 \end{cases}$$

解得： $\begin{cases} \pi_1 = \frac{1}{5} \\ \pi_2 = \frac{3}{5} \\ \pi_3 = \frac{1}{5} \end{cases}$

例2：一质点在1,2,3三个点上作随机游动，1和3是两个反射壁，当质点处于2时，下一时刻转移到1和3的概率各为½。写出一步转移概率矩阵，判断此链是否具有遍历性，若有，求出极限分布。

解：

$$P=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\ P(2)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

$$P(3)=P(2)P=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

注意到：$P(2n+1)=P, P(2n)=P(2)$

故对任一固定的$j(j=1,2,3)$，极限$\lim_{n\to\infty} P_{ij}(n)$都不存在，按定义，此链不具有遍历性。

例3：一质点在1,2,3三个点上作随机游动，1和3是两个吸收壁，当质点处于2时，下一时刻转移到1和3的概率各为½。写出一步转移概率矩阵，判断此链是否具有遍历性? 若有，求出极限分布。

解：

$$P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}，P(2)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=P，$$

因此，$P(n)=P^n=P$，即$\lim_{n\to\infty} P^n$存在

但$\lim_{n\to\infty} P_{ij}(n)=P_{ij}$，这个极限不仅与$j$有关，还与$i$有关

所以，此链不具有遍历性。

例4：设有6个球(2个红球,4个白球)随机平分放入甲,乙两个盒中。今每次从两盒中各任取一球并进行交换。X_0表示开始时甲盒中的红球数,$X_n(n>0)$表示经n次交换后甲盒中的红球数。

(1)求此马氏链的初始分布;

(2)求一步转移概率矩阵;

(3)计算$P(X_0=1, X_2=1, X_4=0), P(X_2=2)$；

(4)判断此链是否具有遍历性，若有，求出极限分布

解: (1)

$$P(X_0 = 0) = \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{1}{5}\text{ , } P(X_0 = 1) = \frac{C_2^1 C_4^2}{C_6^3} = \frac{3}{5}$$

$$P(X_0 = 2) = \frac{C_2^2 C_4^1}{C_6^3} = \frac{1}{5}$$

于是：

$$X_0 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

(2)

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 2/9 & 5/9 & 2/9 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

(3)

$$P(2)=\begin{bmatrix} 7/27 & 16/27 & 4/27 \\ 16/81 & 49/81 & 16/81 \\ 4/27 & 16/27 & 7/27 \end{bmatrix}$$

$$P(X_0=1,X_2=1,X_4=0)=P(X_0=1)P_{11}(2)P_{10}(2)$$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{49}{81}\times\frac{16}{81}\approx 0.072$$

$$P(X_2=2)$$

$$=P(X_0=0)P_{02}(2)+P(X_0=1)P_{12}(2)$$

$$+P(X_0=2)P_{22}(2)$$

$$=\frac{1}{5}\times\frac{4}{27}+\frac{3}{5}\times\frac{16}{81}+\frac{1}{5}\times\frac{7}{27}=\frac{1}{5}=0.2$$

(4)

$$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0\\ \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9}\\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix},P(2)=\begin{bmatrix}\frac{7}{27} & \frac{16}{27} & \frac{4}{27}\\ \frac{16}{81} & \frac{49}{81} & \frac{16}{81}\\ \frac{4}{27} & \frac{16}{27} & \frac{7}{27}\end{bmatrix}$$

由定理知，此链有遍历性。

设极限分布$\pi=(\pi_0,\pi_1,\pi_2)$，有方程组

$$\begin{cases}\pi_0=\frac{1}{3}\pi_0+\frac{2}{9}\pi_1\\ \pi_2=\frac{2}{9}\pi_1+\frac{1}{3}\pi_2\text{，}\\ \pi_0+\pi_1+\pi_2=1\end{cases}$$

解得$\pi_0=\frac{1}{5}$，$\pi_1=\frac{3}{5},\pi_2=\frac{1}{5}$

作业

概率论与数理统计

pp. 333-334, #4，#5，#10