第三章　　习题课

第1章：随机事件与概率

第2章：随机变量及其分布

第3章：多维随机变量及其分布

一、重点与难点

二、主要内容

三、典型例题

第三章　　习题课

- 第三章：多维随机变量及其分布
  - §1 二维随机变量及其联合分布
  - §2 边缘分布
  - §3 条件分布
  - §4 相互独立的随机变量
  - §5 两个随机变量的函数的分布

二维随机变量

条件分布
- 条件分布函数
- 条件分布律
- 条件概率密度

联合分布
- 联合分布函数
- 联合分布律
- 联合概率密度

边缘分布
- 边缘分布函数
- 边缘分布律
- 边缘概率密度

随机变量的相互独立性

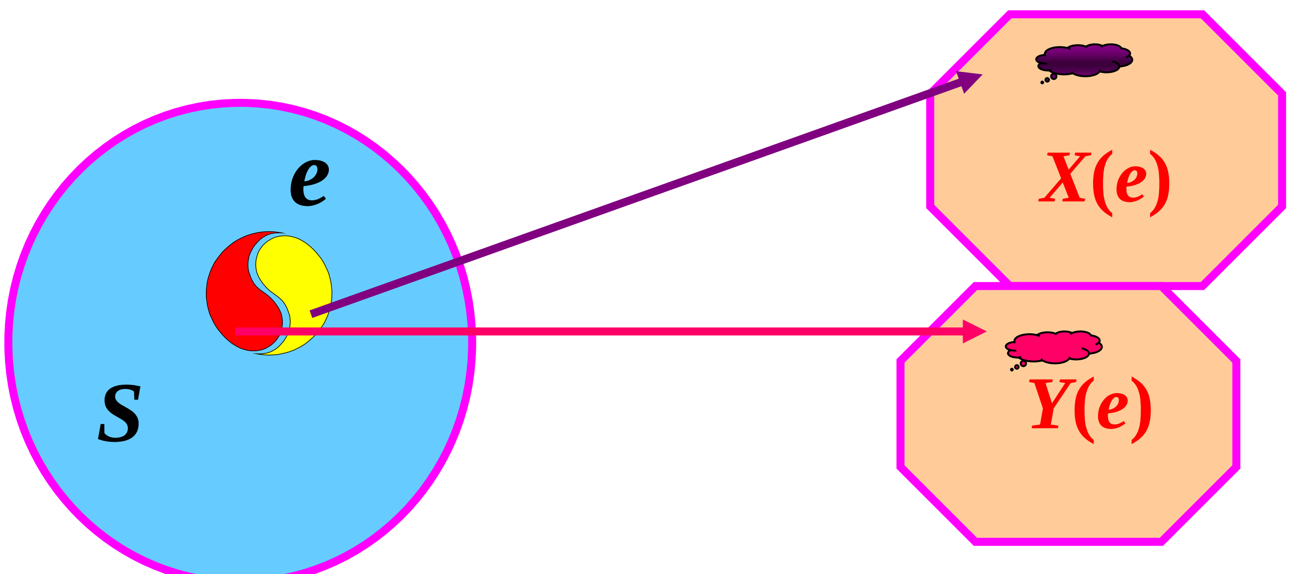
随机变量的函数的分布

推广至多维

贝叶斯公式

§1 二维随机变量

- 设 E 是一个随机试验，它的样本空间是$S=\{e\}$，设 $X=X(e)$ 和 $Y=Y(e)$ 是定义在 S 上的随机变量。由它们构成的一个向量 (X, Y)，叫做二维随机向量，或二维随机变量。



1.2 二维随机变量的分布函数

定义

设(X, Y)是一个二维随机变量，则对于任意一对实数(x, y)，

$$F(x,\ y)=P\{X\le x,\ Y\le y\}$$

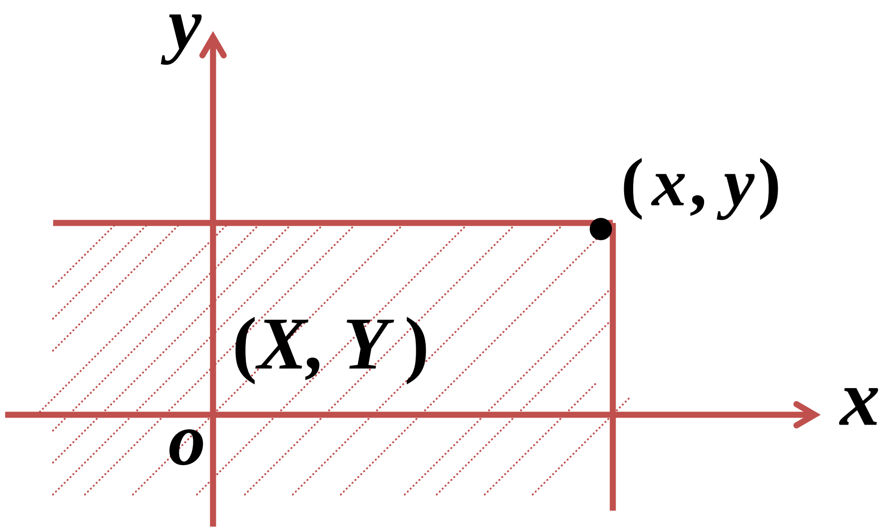
是(x, y)的函数。我们称此函数为二维随机变量(X, Y)的分布函数。

1.2 二维随机变量的分布函数

几何意义

二维分布函数的几何意义是：$F(x,\ y)$ 表示平面上的随机点$(X,\ Y)$落在以$(x,\ y)$为右上顶点的无穷矩形中的概率.

$$F(x,\ y)=P\{X\le x,\ Y\le y\}$$



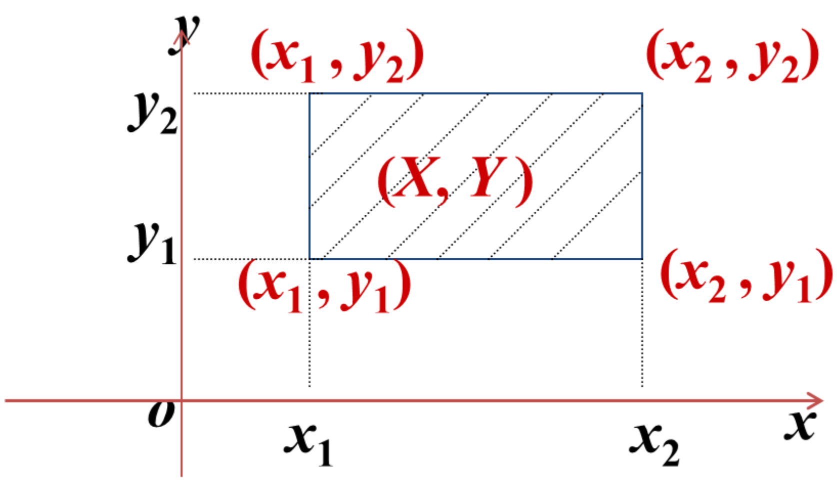
第三章　习题课

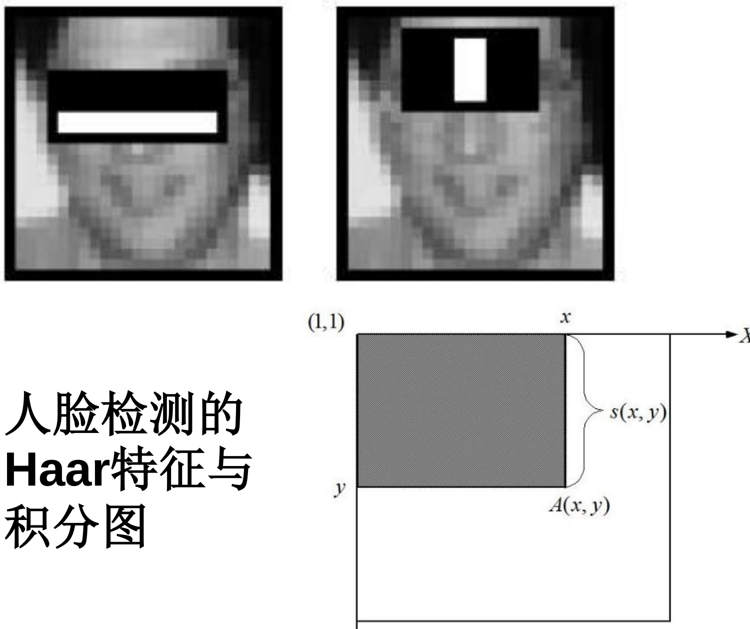
1.2 二维随机变量的分布函数

一个重要公式

设：$x_1 < x_2$，$y_1 < y_2$，则 $P\{x_1 < X \le x_2,\ \ y_1 < Y \le y_2\}$

$$= F(x_2,\ y_2) - F(x_2,\ y_1) - F(x_1,\ y_2) + F(x_1,\ y_1)$$





人脸检测的Haar特征与积分图

1.3 n维随机变量的概念

设 E 是一个随机试验，它的样本空间是 $S=\{e\}$，设 $X_1=X_1(e), X_2=X_2(e), \dots, X_n=X_n(e)$，是定义在 S 上的随机变量，由它们构成的一个 n 维向量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 叫做 n 维随机向量或 n 维随机变量.

对于任意 n 个实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$，n 元函数

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \dots, X_n \le x_n\}$$

称为随机变量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的**联合分布函数**.

1.4 二维离散型随机变量的分布律

若二维随机变量$(X,\ Y)$的取值是有限个或可列无穷个，则称$(X,\ Y)$为二维离散型随机变量.

设$(X,\ Y)$二维离散型随机变量

X的取值为 $x_1,\quad x_2,\quad \ldots,\quad x_i,\quad \ldots$

Y的取值为 $y_1,\quad y_2,\quad \ldots,\quad y_j,\quad \ldots$

则称 $p_{ij} = P\left\{ X = x_i,\quad Y = y_j \right\} \quad (i,\ j = 1,\quad 2,\quad \ldots)$

为二维离散型随机变量$(X,\ Y)$的（联合）分布律

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\cdots$

离散型随机变量(X,Y)的分布函数为

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij},$$

其中和式是对一切满足$x_i \le x, y_j \le y$的i,j求和.

1.5 二维连续型随机变量的概率密度

定义： 对于二维随机变量 (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$，如果存在非负实函数 $f(x,y)$，使得对于任意的实数 x,y 有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,du\,dv,$$

则称（X, Y）是连续型的二维随机变量，函数 $f(x,y)$ 称为二维随机变量（X, Y）的概率密度，或称为 X 和 Y 的联合概率密度。

1.5 二维连续型随机变量的概率密度–性质

1^0 $f(x,y)\geq 0$;

2^0 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = F(\infty,\infty)=1$;

3^0 若$f(x,y)$在点(x,y)连续，则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$

4^0 设 G 是平面上的一个区域，点 (X,Y)落在 G 内 的概率为：

$$P\{(X,Y)\in G\} = \iint_G f(x,y)dxdy.$$

1.5 二维连续型随机变量的概率密度-几何意义

几何上, $z = f(x, y)$ 表示空间的一个曲面.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$$

表示介于 $f(x, y)$和 xoy 平面之间的空间区域的全部体积等于1.

$$P\{(X,Y)\in G\} = \iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

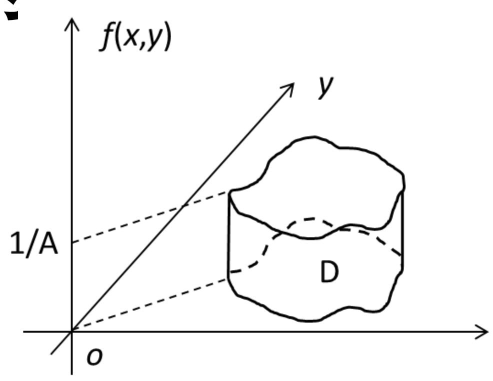
$P\{(X,Y)\in G\}$的值等于以G为底,以曲面$z = f(x,y)$为顶面的柱体体积.

1.5 二维连续型随机变量的概率密度–常用分布

二维均匀分布：设D是平面上的有界区域,其面积为A

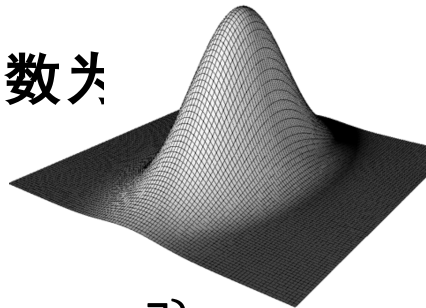
如果二维随机变量$(X,\ Y)$的密度函数为

$$f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A} & (x,\ y)\in D\\ 0 & (x,\ y)\notin D\end{cases}$$



则称二维随机变量$(X,\ Y)$服从区域D上的均匀分布.

1.5 二维连续型随机变量的概率密度-常用分布



二维正态分布： 设二维随机变量(X, Y)的密度函数为

$$f(x, y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

则称随机变量(X, Y)服从参数为$(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$的正态分布，记作 $(X, Y)\sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2\ \rho)$

$$-\infty<\mu_i<+\infty\ (i=1, 2),\qquad \sigma_i>0\ (i=1, 2),\qquad -1<\rho<1.$$

§2　边缘分布

如果$(X, \ Y)$是一个二维随机变量,则它的分量X（或者Y）是一维随机变量，因此 分量X（或者Y）也有分布．我们称X（或者Y）的分布为二维随机变量$(X, \ Y)$关于X（或者Y）的边缘分布．

边缘分布也称为边沿分布或边际分布.

联合分布 $\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ **边缘分布**

- (1)已知联合分布函数求边缘分布函数

设二维随机变量(X, Y)的分布函数为$F(x, y)$，则分量X的分布函数为

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < +\infty\}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} F(x, y) = F(x, +\infty)$$

同理，分量Y的分布函数为

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X < +\infty, Y \le y\}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} F(x, y) = F(+\infty, y)$$

(2)已知联合分布律求边缘分布律

X 以及 Y 的边缘分布律也可以由下表表示

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	1

(3)已知联合密度函数求边缘密度函数

若(X, Y)的联合密度函数为 $f(x, y)$，

则随机变量 X 的边缘密度函数为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dy$$

随机变量 Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx$$

§3.1 离散型随机变量的条件分布

设(X,Y)是二维离散型随机变量，对于固定的j，若$P\{Y=y_j\}>0$，则称

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}, i=1,2,\cdots$$

为在$Y=y_j$条件下随机变量X的条件分布律。

对于固定的i, $P\{X=x_i\}>0$, 则称

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}},$$

$$j=1,2,\cdots$$

为在$X=x_i$条件下随机变量Y的条件分布律.

§ 3. 2 连续型随机变量的条件分布和密度

则当 $f_Y(y)>0$ 时，可得随机变量 X 在 $Y=y$ 的条件下的条件密度函数为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,\quad y)}{f_Y(y)}$$

当 $f_X(x)>0$ 时，可得随机变量 Y 在 $X=x$ 的条件下的条件密度函数为

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,\quad y)}{f_X(x)}$$

联合分布、边缘分布、条件分布的关系

§ 4 独立分布

设$(X,\ Y)$是二维随机变量，其联合分布函数为$F(x,\ y)$，又随机变量X的分布函数为$F_X(x)$，随机变量Y的分布函数为$F_Y(y)$. 如果对于任意的$x,\ y$，有

$$F(x,\ y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$$

则称$X,\ Y$是相互独立的随机变量.

§4.1 离散型随机变量的独立性

设(X, Y)是二维离散型随机变量 其联合分布律为

$$p_{ij} = P\{X = x_i, \; Y = y_j\} \qquad (i, \; j = 1, \; 2, \; \ldots)$$

又随机变量X的分布律为

$$p_{i\cdot} = P\{X = x_i\} \qquad (i = 1, \; 2, \; \ldots)$$

随机变量Y的分布律为

$$p_{\cdot j} = P\{Y = y_j\} \qquad (j = 1, \; 2, \; \ldots)$$

如果对于任意的$i, \; j$

$$p_{ij} = p_{i\cdot} \, p_{\cdot j}$$

则称$X, \; Y$是相互独立的随机变量

联合分布律以及边缘分布律表

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	

§ 4.2 连续型随机变量的独立性

设(X, Y)是二维连续型随机变量 其联合密度函数为$f(x, y)$, 又随机变量X的边缘密度函数为$f_X(x)$, 随机变量Y的边缘密度函数为$f_Y(y)$,

如果对于几乎所有的 x, y 有

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

则称 X, Y 是相互独立的随机变量 .

特别地，上式对$f(x,y)$的所有连续点(x,y)必须成立.

§ 4. 3 n维随机变量的独立性

设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是n维随机变量，其联合分布函数为$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，又随机变量X_i的分布函数为$F_{X_i}(x_i)$,$(i=1, 2, \ldots, n)$. 如果对于任意的n维实数组$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \ldots F_{X_n}(x_n)$$

则称 $X_1, X_2, \cdots, X_n$是相互独立的随机变量.

§5 连续型随机变量函数的分布

(1) 连续型随机变量和的分布

设二维连续型随机变量(X, Y)的联合密度函数为$f(x, y)$，则$Z = X + Y$的密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)dx$$

或

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)dy$$

第三章　　习题课

特别地，如果随机变量X与Y相互独立，则有

$$f(x,\quad y)=f_X(x)f_Y(y)$$

此时，我们有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

$$f_X(x) * f_Y(y)$$　　卷积公式！

一般地，我们有如下结论：

如果随机变量 X 与 Y 相互独立，且

$$X \sim N(\mu_1, \ \sigma_1^2), \quad Y \sim N(\mu_2, \ \sigma_2^2)$$

$$Z = X + Y,$$

则 $Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \ \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$

更一般地，我们有如下结论：

如果随机变量 X_1，X_2，…，X_n相互独立，

$$X_i \sim N(\mu_i,\ \sigma_i^2) \qquad (i=1,\ 2,\ \dots,\ n)$$

又 a_1，a_2，…，a_n 为 n 个实常数，

令 $Z=\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$，

则 $Z \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i,\ \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$.

§5 连续型随机变量函数的分布

(2) 其它的分布

设(X, Y)是二维连续型随机变量 其联合密度函数为$f(x, y)$， $Z = g(X, Y)$

求随机变量函数$\boldsymbol{Z = g(X, Y)}$的密度函数$\boldsymbol{f_Z(z)}$

解题步骤

1. 先求随机变量函数$Z = g(X,Y)$的分布函数$F_Z(z)$
2. 再求随机变量函数$Z = g(X,Y)$的密度函数$f_Z(z) = F_Z'(z)$,

设$\boldsymbol{X_1, X_2, \cdots, X_n}$是独立的连续型随机变量，$\boldsymbol{X_i}$的分布函数为$\boldsymbol{F_i(x)}$ $(\boldsymbol{i = 1, 2, \cdots n})$. 令：

$$\boldsymbol{Z_1} = \min(X_1, \quad X_2, \quad \cdots, \quad X_n),$$
$$\boldsymbol{Z_2} = \max(X_1, \quad X_2, \quad \cdots, \quad X_n),$$

设随机变量$\boldsymbol{Z_1}$的分布函数为$F_{\boldsymbol{Z_1}}(\boldsymbol{z})$，

$$F_{\boldsymbol{Z_1}}(z) = P\{Z_1 \leq z\}$$
$$= 1 - [1 - F_1(\boldsymbol{z})][1 - F_2(\boldsymbol{z})] \ \ldots \ 1 - F_n(\boldsymbol{z})]$$

设随机变量$\boldsymbol{Z_2}$的分布函数为$\boldsymbol{F_{Z_2}}(\boldsymbol{z})$，

$$F_{\boldsymbol{Z_2}}(\boldsymbol{z}) = P\{\boldsymbol{Z_2} \leq \boldsymbol{z}\} = F_1(\boldsymbol{z})F_2(\boldsymbol{z}) \cdots F_n(\boldsymbol{z})$$

§ 5 连续型随机变量函数的分布

解题步骤

1. 先求随机变量函数$Z=g(X,Y)$的分布函数$F_Z(z)$
2. 再求随机变量函数$Z=g(X,Y)$的密度函数$f_Z(z)=F_Z'(z)$，

直观理解

$$Z=X+Y \quad \rightarrow \quad f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,z-x)dx$$

$$Z=Y/X \quad \rightarrow \quad f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x,xz)dx$$

$$Z=XY \quad \rightarrow \quad f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{x}\right| f\left(x,\frac{z}{x}\right)dx$$

$$F(z)=\iint_D f(x,y)dxdy \qquad dy \rightarrow ?\, dz$$

例1　某箱装有100件产品，其中一、二、三等品数目分别是80，10，10件，现在从中不放回地依次取两件，令

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{件是一等品}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\qquad i=1,2.\text{试求：}$$

（1） X_1 和 X_2的联合分布率；（2）说明 X_1 和 X_2 是否独立.

解： $P\{X_1=1, X_2=1\}$

$P\{X_1=1, X_2=0\}$

$P\{X_1=0, X_2=1\}$

$P\{X_1=0, X_2=0\}$

第三章　　习题课

X1 / X2	1	0	$p_{i\cdot}$
1	0.638	0.162	0.8
0	0.162	0.038	0.2
$p_{\cdot j}$	0.8	0.2	**1**

由于$P\{X_1=1,X_2=1\}=\mathbf{0.638}\neq P\{X_1=1\}\cdot P\{X_2=1\}=\mathbf{0.8}*\mathbf{0.8}=\mathbf{0.64},$

因此X_1**与** X_2 **是不独立。**

例2： 盒子里装有3只黑球，2只红球，2只白球，在其中任意取4只。以X表示取到黑球的只数，Y表示取到红球的只数。

（1）求X和Y的联合分布律；

（2）求P{X>Y}，P{X+Y=3}

解： （1）X={0, 1, 2, 3}，Y={0, 1, 2}

X(黑) \ Y(红)	0	1	2	3
0				
1				
2				

例2： 盒子里装有3只黑球，2只红球，2只白球，在其中任意取4只。以X表示取到黑球的只数，Y表示取到红球的只数。

（1）求X和Y的联合分布律；

（2）求P{X>Y}，P{X+Y=3}

解： （1）X={0, 1, 2, 3}，Y={0, 1, 2}

Y(红) \ X(黑)	0	1	2	3
0	0	0	$\frac{3}{35}$	$\frac{2}{35}$
1	0	$\frac{6}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{2}{35}$
2	$\frac{1}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	0

例2： 盒子里装有3只黑球，2只红球，2只白球，在其中任意取4只。以X表示取到黑球的只数，Y表示取到红球的只数。

（1）求X和Y的联合分布律；

（2）求P{X>Y}，P{X+Y=3}

解： （2）求P{X>Y}=P{X=1, Y=0}+P{X=2, Y=0/1}+P{X=3, Y=0/1/2}=$\frac{19}{35}$

Y(红) \ X(黑)	0	1	2	3
0	0	0	$\frac{3}{35}$	$\frac{2}{35}$
1	0	$\frac{6}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{2}{35}$
2	$\frac{1}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	0

例2： 盒子里装有3只黑球，2只红球，2只白球，在其中任意取4只。以X表示取到黑球的只数，Y表示取到红球的只数。

（1）求X和Y的联合分布律；

（2）求P{X>Y}, P{X+Y=3}

解： （2）求$P\{X+Y=3\}=P\{X=1, Y=2\}+P\{X=2, Y=1\}+P\{X=3, Y=0\}=\frac{20}{35}$

Y(红) \ X(黑)	0	1	2	3
0	0	0	$\frac{3}{35}$	$\frac{2}{35}$
1	0	$\frac{6}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{2}{35}$
2	$\frac{1}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	0

例3 设二维随机变量（X，Y）的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}15x^2y & 0<x<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

（1）求边缘概率密度函数 $f_X(x)$, $f_Y(y)$;

（2）求 $f_{Y|X}(y|x)$;

(3) 求$P\{X+Y\leq 1\}$.

解： (1)由$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

则$0<x<1$时，　$f_X(x)=\int_x^1 15x^2 y dy=\frac{15}{2}x^2(1-x^2).$

因此$f_X(x)=\begin{cases}\frac{15}{2}x^2(1-x^2) & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

由$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$

则$0<y<1$时，　$f_Y(y)=\int_0^y 15x^2 y dx=5y^4.$

$$\text{因此} f_Y(y) = \begin{cases} 5y^4 & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(2)由于 $0 < x < 1$ 时，$f_X(x) > 0$,

$$\text{因此} f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \dfrac{2y}{1-x^2} & x < y < 1 \\ 0 & \text{其它.} \end{cases}$$

$$(3)P\{X+Y \le 1\} = \iint\limits_{x+y\le 1} f(x,y)dxdy = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{1-x} 15x^2 y dy = \frac{5}{64}.$$

第三章　习题课

例4 设(X, Y)在区域$D=\{(x,y)|\ 0<x<1, 0<y<2\}$上服从均匀分布，

（1）求X和Y的联合概率密度。

（2）设含有a的二次方程为 $a^2+2Xa+Y=0$.试求a有实根的概率。

解： 由题意知

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2},(x,y)\in D,\\ 0,\text{其它。}\end{cases}$$

方程有实根的条件为

$$4X^2-4Y\geq 0,\quad \text{即}Y\leq X^2.$$

因此 $P\{Y\leq X^2\}=\int_0^1\int_0^{x^2}\frac{1}{2}dydx=\int_0^1\frac{x^2}{2}dx=\frac{1}{6}.$

例5　设 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 独立同分布,且

$$P\{\xi_i=0\}=0.6,\quad P\{\xi_i=1\}=0.4,\quad i=1,2,3,4.$$

求:(1) 行列式 $\xi=\begin{vmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \xi_3 & \xi_4\end{vmatrix}$ 的概率分布;

(2) 方程组 $\begin{cases}\xi_1x_1+\xi_2x_2=0\\ \xi_3x_1+\xi_4x_2=0\end{cases}$ 只有零解的概率.

[思路]

要求行列式 ξ 的分布律,先要将 ξ 的所有可能值找到,然后利用独立性将取这些值的概率计算出来,而第二问就是求系数行列式 $\xi\neq 0$ 的概率 .

解：　(1) 记 $\eta_1=\xi_1\xi_4$, $\eta_2=\xi_2\xi_3$,

则 $\xi=\xi_1\xi_4-\xi_2\xi_3=\eta_1-\eta_2$,

由于 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 相互独立, 故 η_1,η_2 也相互独立,

且 η_1,η_2 都只能取 0, 1 两个值,

而　$P\{\eta_1=1\}=P\{\eta_2=1\}=P\{\xi_2=1,\xi_3=1\}$

$$=P\{\xi_2=1\}P\{\xi_3=1\}=0.16,$$

$$P\{\eta_1=0\}=P\{\eta_2=0\}=1-0.16=0.84.$$

随机变量$\xi=\eta_1-\eta_2$有3个可能取值$-1, 0, 1.$

$$P\{\xi=-1\}=P\{\eta_1=0,\eta_2=1\}=P\{\eta_1=0\}P\{\eta_2=1\}$$

$$=0.84\times0.16=0.1344,$$

$$P\{\xi=1\}=P\{\eta_1=1,\eta_2=0\}$$

$$=P\{\eta_1=1\}P\{\eta_2=0\}$$

$$=0.16\times0.84=0.1344,$$

$$P\{\xi=0\}=1-P\{\xi=-1\}-P\{\xi=1\}=0.7312.$$

于是行列式ξ的分布律为

ξ	-1	0	1
P	0.1344	0.7312	0.1344

(2)由于齐次方程

$$\begin{cases} \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 = 0 \\ \xi_3 x_1 + \xi_4 x_2 = 0 \end{cases}$$

只有零解的充要条件是系数行列式不为0，等价于

$$P\{\xi \neq 0\} = 1 - P\{\xi = 0\} = 1 - 0.7312 = 0.2688.$$

例6 设随机变量X，Y相互独立，且具有相同的分布，它们的概率密度均如下，求Z=Y/X的概率密度

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

解： $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x,zx)dx=\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)f(zx)dx$

$$=\int_0^{\infty}xe^{-(1+z)x}dx$$

$$=x\left(-\frac{1}{1+z}e^{-(1+z)x}\right)\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}-\frac{1}{1+z}e^{-(1+z)x}dx$$

$$=-\frac{1}{(1+z)^2}e^{-(1+z)x}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{(1+z)^2}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases} \frac{1}{(1+z)^2}, & z>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\int f(x)g(x)dx=f(x)G(x)-\int f'(x)G(x)dx$$

例 7　设随机变量 X 与 Y 相互独立，分别服从参数为 λ_1 与 λ_2 的指数分布，令 $Z=\dfrac{X}{Y}$，试求随机变量 Z 的密度函数.

解：

由题意，可知

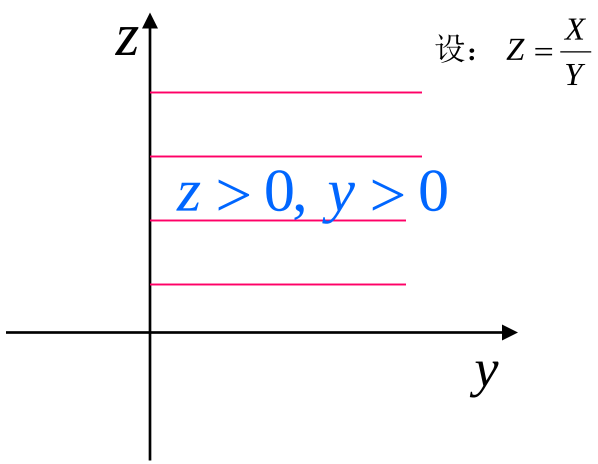
$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\lambda_2 e^{-\lambda_2 y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

由随机变量 X 与 Y 相互独立性，我们有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f_X(yz)f_Y(y)dy \qquad yz>0,\ y>0$$

(1). 若 $z\le 0, f_Z(z)=0$.

(2). 若 $z>0$,



$$f_Z(z)=\int_0^{+\infty} y\lambda_1 e^{-\lambda_1 yz}\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}dy$$

$$=\lambda_1\lambda_2\int_0^{+\infty} y e^{-(\lambda_2+\lambda_1 z)y}dy=\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_2+\lambda_1 z)^2}$$

所以，$Z=\dfrac{X}{Y}$的密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_2+\lambda_1 z)^2} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

例8 设随机变量X，Y相互独立，且具有相同的分布，它们的概率密度均如下，求Z=X+Y的概率密度

$$f(x)=\begin{cases} e^{1-x}, & x>1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

解： $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,z-x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(z-x)dx$$
$$=\int_1^{\infty} e^{(1-x)+(1-z+x)}dx$$
$$=\int_1^{\infty} e^{(2-z)}dx=\int_1^{z-1} e^{(2-z)}dx$$
$$=e^{(2-z)}x\Big|_1^{z-1}=(z-2)e^{(2-z)}$$

$$f_Z(x)=\begin{cases} (z-2)e^{(2-z)}, & z>2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

例9　设二维随机变量有密度函数：

$$f(x,y)=\begin{cases} Ae^{-(4x+3y)}, x>0, y>0; \\ 0, 其他 \end{cases}$$

（1）求常数A

（2）求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$

（3）X,Y 是否相互独立。

解：（1） $1=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} Ae^{-(4x+3y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{A}{12}$

则 $A=12.$

（**2**）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} 4e^{-4x}, x>0 \\ 0, \quad\quad 其他 \end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} 3e^{-3y}, y>0 \\ 0, \quad\quad 其他 \end{cases}$$

（**3**）$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

所以 X,Y **相互独立.**

例10设随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} cxe^{-y}, & 0<x<y<+\infty, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 求常数 c;

(2) X 与 Y 是否独立?为什么?

(3) 求 $f_{X|Y}(x|y)$, $f_{Y|X}(y|x)$;

(4) 求 $P\{X<1|Y<2\}, P\{X<1|Y=2\}$;

(5) 求 (X,Y) 的联合分布函数;

(6) 求 $Z=X+Y$ 的密度函数;

(7) 求 $P\{X+Y<1\}$;　(8) 求 $P\{\min(X,Y)<1\}$.

解: (1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$, 得

$$1 = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}y \int_0^y cx\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x = \frac{c}{2}\int_0^{+\infty} y^2\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = \frac{c}{2}\Gamma(3) = c,$$

$$\Rightarrow c = 1.$$

$$\Gamma(\mathrm{r}) = \int_0^{\infty} x^{r-1}e^{-x}dx, = (r-1)!$$

(2)
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_x^{+\infty} x\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x\mathrm{e}^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\int_0^y x\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}y^2\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

由于在 $0<x<y<+\infty$上, $f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$,

故 X 与 Y 不独立.

(3) $$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2x}{y^2}, & 0<x<y<+\infty,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$=\begin{cases}e^{x-y}, & 0<x<y<+\infty,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(4) $$P\{X<1|Y<2\}=\frac{P\{X<1,Y<2\}}{P\{Y<2\}}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{1}\int_{-\infty}^{2}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\int_{-\infty}^{2}f_Y(y)\,\mathrm{d}y}=\frac{\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^2 x\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y}{\int_0^2\frac{1}{2}y^2\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y}$$

$$=\frac{1-2\mathrm{e}^{-1}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}}{1-5\mathrm{e}^{-2}}.$$

又由条件密度的性质知

$$P\{X<1|Y=2\}=\int_{-\infty}^{1}f_{X|Y}(x|2)\,\mathrm{d}x,$$

而 $f_{X|Y}(x|2)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

从而有

$$P\{X<1|Y=2\}=\int_0^1\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.$$

(5) 由于 $F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$, 故有:

当 $x<0$ 或 $y<0$ 时,有 $F(x,y)=0.$

当 $0\le y<x<+\infty$ 时, 有

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$$

$$=\int_0^y \mathrm{d}v\int_0^v u\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^y v^2\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v$$

$$=1-(\frac{y^2}{2}+y+1)\mathrm{e}^{-y}.$$

当$0\le x<y<+\infty$时，有　　$\int f(x)g(x)dx=f(x)G(x)-\int f'(x)G(x)dx$

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=\int_0^x \mathrm{d}u\int_u^y u\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^x u(\mathrm{e}^{-u}-\mathrm{e}^{-y})\mathrm{d}u$$

$$=1-(x+1)\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-y}.$$

故得

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ 或 } y<0,\\ 1-(\frac{y^2}{2}+y+1)e^{-y}, & 0\le y<x<\infty,\\ 1-(x+1)e^{-x}-\frac{1}{2}x^2e^{-y}, & 0\le x<y<\infty.\end{cases}$$

(6)　根据 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\,\mathrm{d}x,$

由于要被积函数 $f(x,z-x)$ 非零,只有当

$0<x<z-x,$ 即 $0<x<\frac{z}{2}$ 时，从而有:

当 $z<0$ 时，$f_Z(z)=0$;

当 $z\geq 0$ 时，$f_Z(z)=\int_0^{\frac{z}{2}} x\mathrm{e}^{-(z-x)}\,\mathrm{d}x$

$$=\mathrm{e}^{-z}\int_0^{\frac{z}{2}} x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{e}^{-z}+(\frac{z}{2}-1)\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}};$$

因此 $$f_Z(z)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-z}+\left(\dfrac{z}{2}-1\right)\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}} & z\geq 0,\\ 0, & z<0.\end{cases}$$

(7) $P\{X+Y<1\}=\int_{-\infty}^{1} f_Z(z)\mathrm{d}z$

$$=\int_0^1[\mathrm{e}^{-z}+(\frac{z}{2}-1)\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}]\mathrm{d}z=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}-\mathrm{e}^{-1}.$$

(8) $P\{\min(X,Y)<1\}=1-P\{\min(X,Y)\geq 1\}$

$$=1-P\{X\geq 1,Y\geq 1\}$$

$$=1-\int_1^{+\infty}\mathrm{d}v\int_0^v u\mathrm{e}^{-v}\mathrm{d}u$$

$$=1-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}v^2\mathrm{e}^{-v}\mathrm{d}v=1-\frac{5}{2}\mathrm{e}^{-1}.$$