选做题2

李昊宸

October 8, 2018

a.当n为奇数时，取最中间一层，有$\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$个元素两两不属于对方
所以$|F| \geq \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$
设A为反链中的元素，则从空集走到全集有$|A|!(n-|A|)!$种
所以$\sum_{A \in F} |A|!(n-|A|)! \leq n!$
即$\sum_{A \in F} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \leq 1$
而$\binom{n}{|A|} \leq \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$
所以$\sum_{A \in F} \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$
即$\sum_{A \in F} \leq \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$
所以最多$\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$
当n为偶数时，注意到取$\frac{n}{2}$个元素时，每个集合都存在一个互补集合也在这个集族中，故该取法取出的总数减少一半
于是我们考虑取出$\frac{n}{2}+1$个元素
易知该取法是当前最大的取法
综上，总数为$\binom{n}{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}$
b.任意$|A \cap B| \geq k$,则我们先选定k个元素作为这个集族中集合的公共元素
先考虑两种取法：1.取出所有包含固定k个元素的集合，即为2^{n-k}个
2.取出含有$\lceil \frac{n}{2} + \frac{k}{2} \rceil$个元素的所有集合，有$\sum_{k=\lceil \frac{n}{2} + \frac{k}{2} \rceil} \binom{n}{k}$个
此时任意两个集合的交有大于等于k个元素
当k比较小的时候，方法1取出的元素更多
当k比较大的时候，方法2取出的元素更多
（老师，关于这里的证明我还在考虑中，不知道这个答案对不对。）c.关于对称差运算
若每两个集合之间的对称差均大于等于k，则最多应有
$\lfloor \frac{n}{\lceil \frac{k}{2} \rceil} \rfloor$
原理即将N个元素划分为每组K（偶）或K+1（奇）个的组别，再将每组等分.
若每两个集合之间的对称差均小于等于k,则最多应有
$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} ... + \binom{n}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$