第二章 随机变量及其分布

§4 连续型随机变量及其概率密度

- 概率密度函数的导出
- 连续型随机变量的概念与性质
- 一些常用的连续型随机变量
  - 均匀分布
  - 指数分布
  - 正态分布
  - Γ-分布

3. 正态分布(Normal Distribution)

- 应用最广泛的一种连续型分布。
- 德莫佛（De Moivre)最早发现了二项分布的一个近似公式，认为是正态分布的首次露面
- 十九世纪前叶由高斯(Carl Friedrich Gauss)加以推广，所以通常称为高斯分布。

德莫佛(1667-1754)

正态分布定义

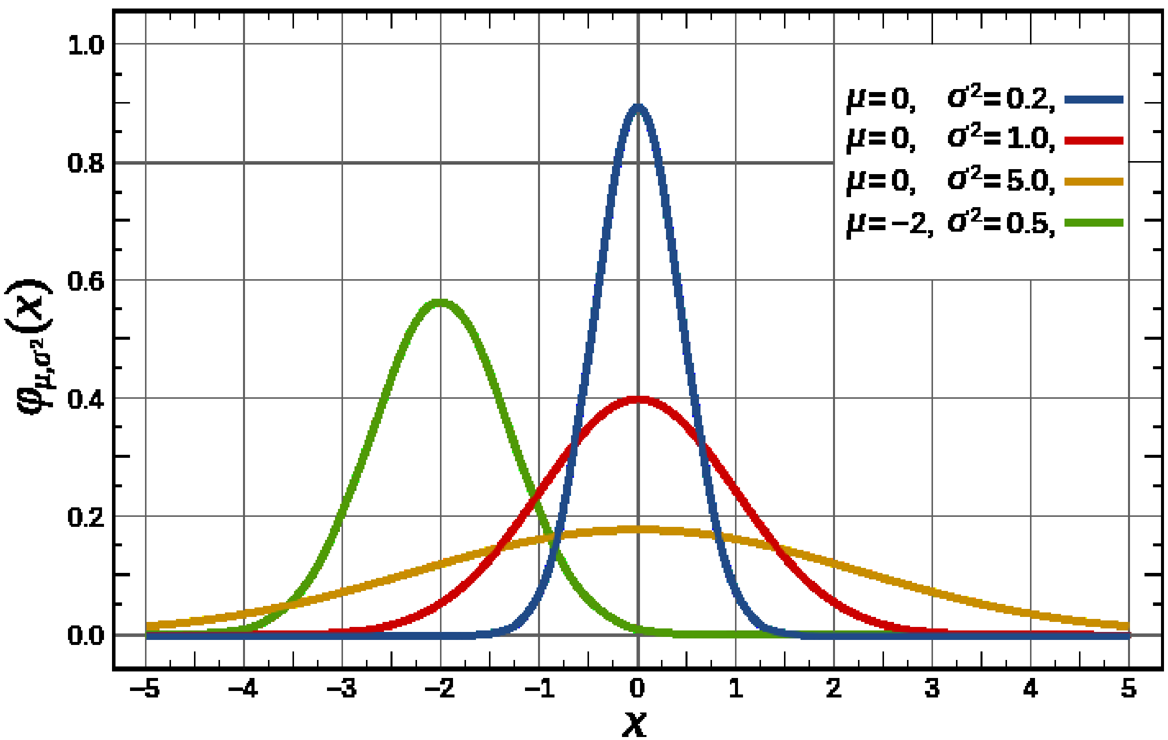
如果连续型随机变量X的概率密度函数为：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},(-\infty<x<\infty)$$

其中$(-\infty<\mu<\infty,\sigma>0$为参数)

则称随机变量X服从参数为(μ,σ^2)的正态分布。

记为：$X\sim N(\mu,\sigma^2)$



密度函数的验证

设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$f(x)$是其密度函数，则有

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}>0,(-\infty<x<\infty)$$

下面验证

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=1$$

证明：

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx\right)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}dx\,dy$$

做极坐标变换：$x = r\cos\theta , x = r\sin\theta$ ，则有

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx\right)^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} re^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}dr$$

$$= -2\pi\sigma^2 e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\Big|_0^{+\infty} = 2\pi\sigma^2$$

于是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = \sqrt{2\pi}\sigma$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = 1$$

从而

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

满足密度函数的两个基本条件，因此是密度函数

正态分布的特点：

(1) 关于μ对称， μ决定中心位置

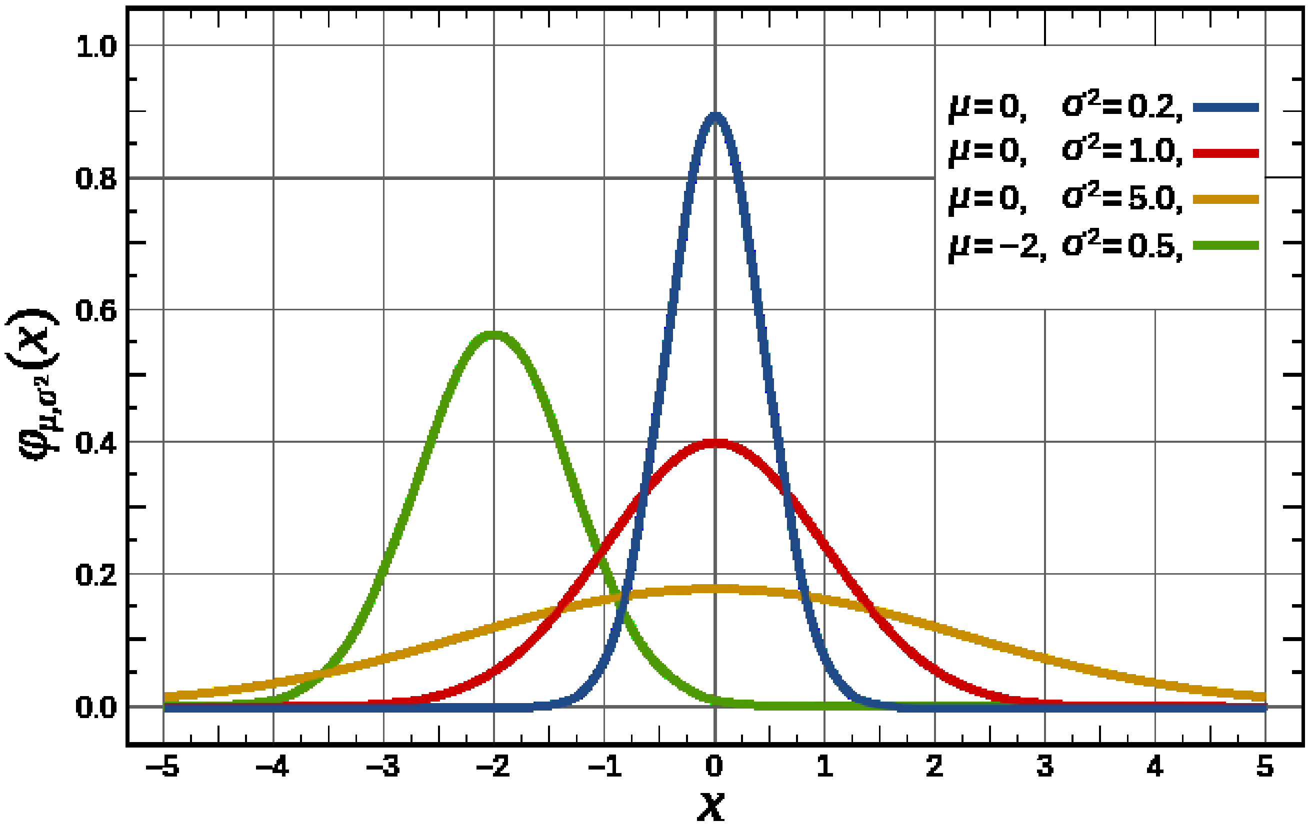
$$f(\mu+c)=f(\mu-c)$$

$$f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}>f(\mu+c),(c\neq 0)$$

正态分布的特点：

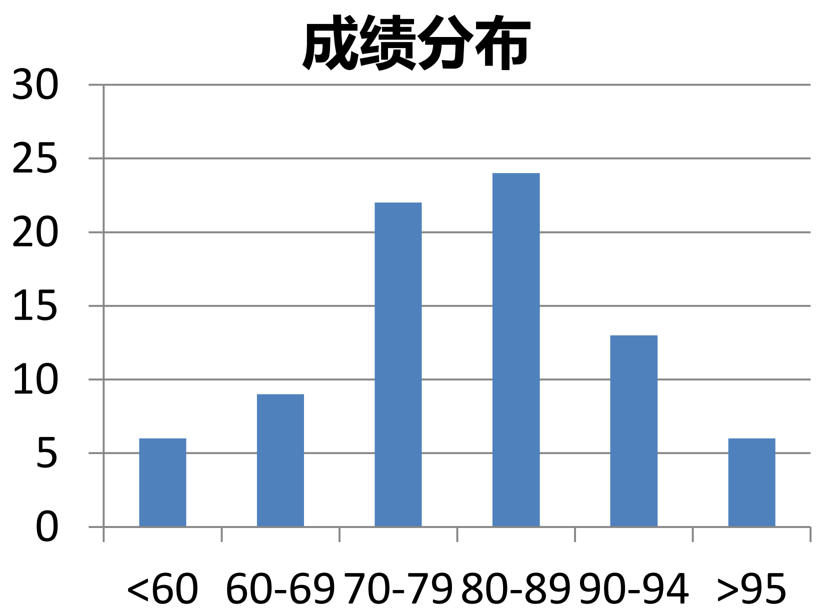
(2) 分布的集中程度由σ决定

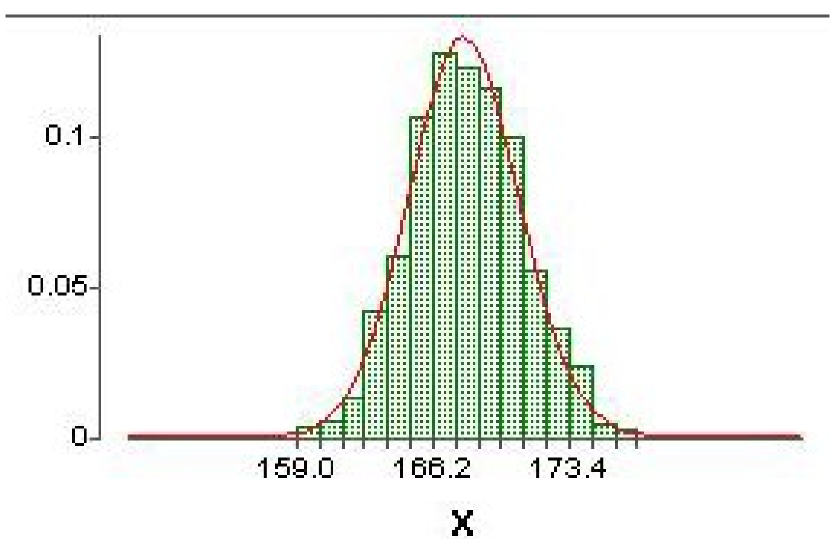
令 $f''(x)=0$，并由$f''(x)$在$x=\mu\pm\sigma$两侧的符号可知，$x=\mu\pm\sigma$为$f(x)$的两个拐点



生活中的正态分布

除了我们在前面遇到过的年降雨量和身高外，在正常条件下各种产品的质量指标，如零件的尺寸；纤维的强度和张力；农作物的产量；小麦的穗长、株高；测量误差；射击目标的水平或垂直偏差；信号噪声等等，都服从或近似服从正态分布





某大学大学生的身高的数据

正态分布的重要性

正态分布是概率论中最重要的分布：

（1）正态分布是自然界及工程技术中最常见的分布之一，大量的随机现象都是服从或近似服从正态分布的。
可以证明，如果一个随机变量受到诸多因素的影响，但其中任何一个因素都不起决定性作用，则该随机变量一定服从或近似服从正态分布。

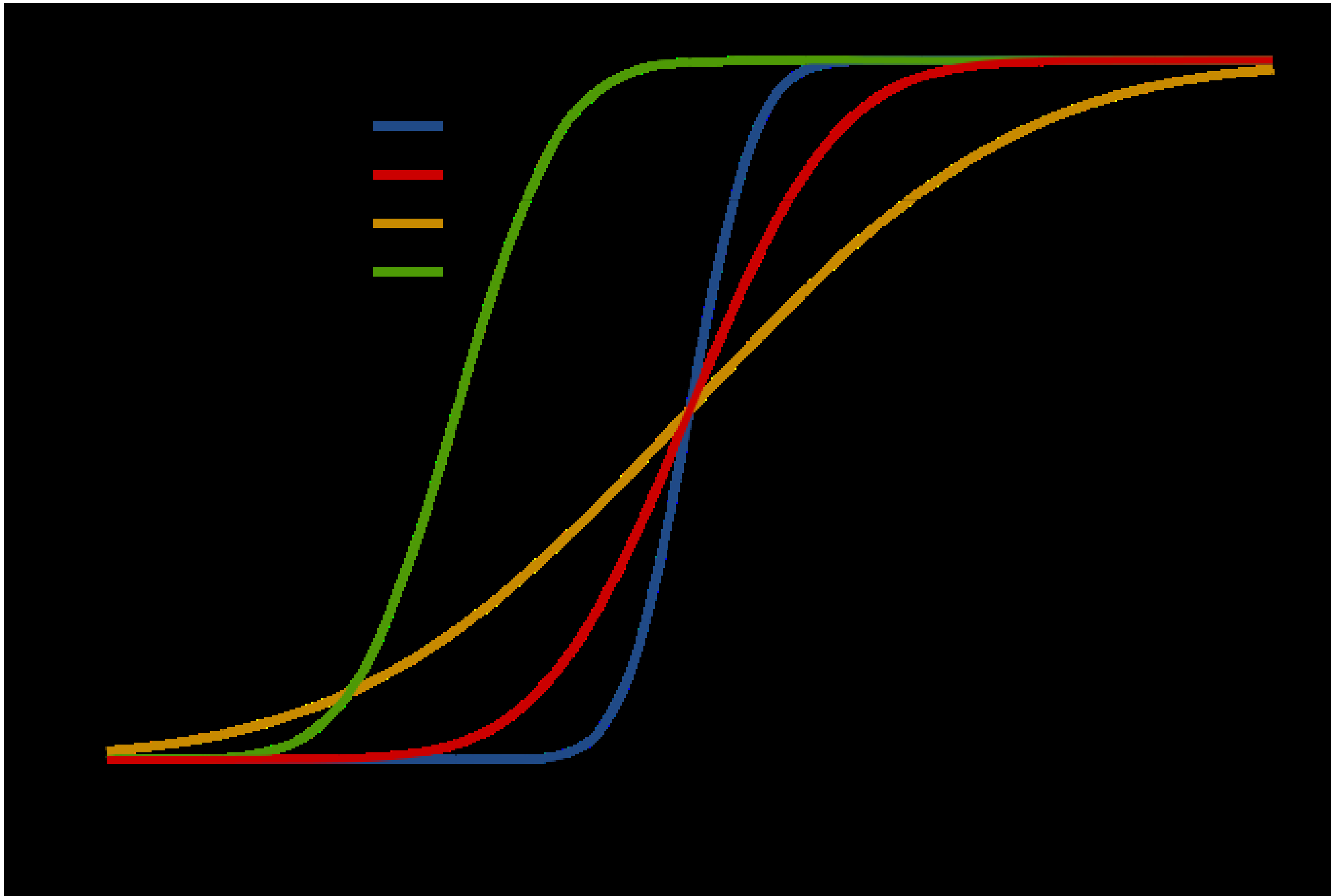
（2）正态分布有许多良好的性质，这些性质是其它许多分布所不具备的。

（3）正态分布可以作为许多分布的近似分布。

正态分布的分布函数

设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则X的分布函数是

$$F(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt,-\infty<x<+\infty$$



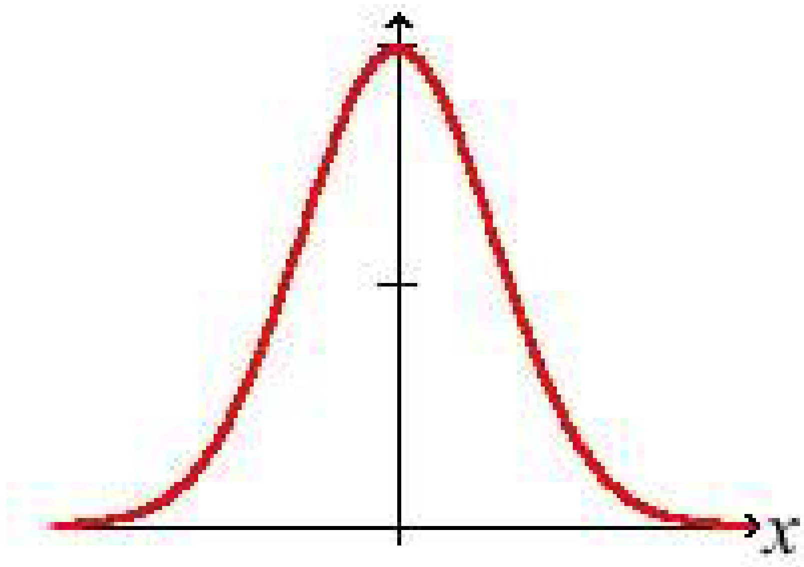
标准正态分布

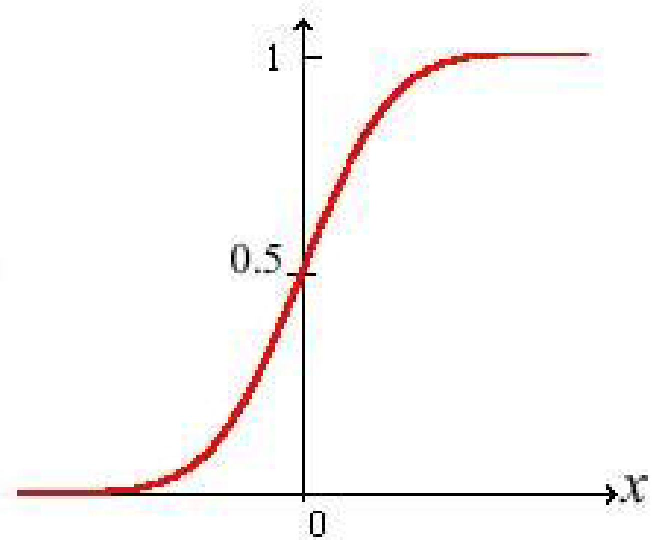
$\mu=0,\sigma=1$的正态分布称为标准正态分布。

其密度函数和分布函数常用$\varphi(x)$和$\Phi(x)$ 表示：

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}},-\infty<x<+\infty$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$





标准正态分布的重要性在于，任何一个一般的正态分布都可以通过线性变换转化为标准正态分布.

引理 若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则

(1) $Y=aX+b\sim N\left(a\mu+b,a^2\sigma^2\right)$,

其中$a\neq 0,b$为常数

(2)

$$Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$$

证明：(1) 分别记Y 的分布函数和概率密度分别为$F_Y(y)$, $f_Y(y)$。

当$a > 0$时，有

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{aX + b \leq y\}$$
$$= P\left\{X \leq \frac{y-b}{a}\right\} = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

当$a < 0$时，有

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{aX + b \leq y\}$$
$$= P\left\{X \geq \frac{y-b}{a}\right\} = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

将上面两式分别对x 求导整理得

$$f_Y(y)=\frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)=\frac{1}{|a|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(\frac{y-b}{a}-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

即

$$f_Y(y)=\frac{1}{|a|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y-(a\mu+b))^2}{2a^2\sigma^2}}$$

故

$$Y=aX+b\sim N\left(a\mu+b,a^2\sigma^2\right)$$

(2) 在(1)中令$a=1/\sigma$，$b=-\mu/\sigma$得

$$Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$$

注：若$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

根据引理，只要将标准正态分布的分布函数制成表格， 就可以解决一般正态分布的概率计算问题。

正态分布表及其使用

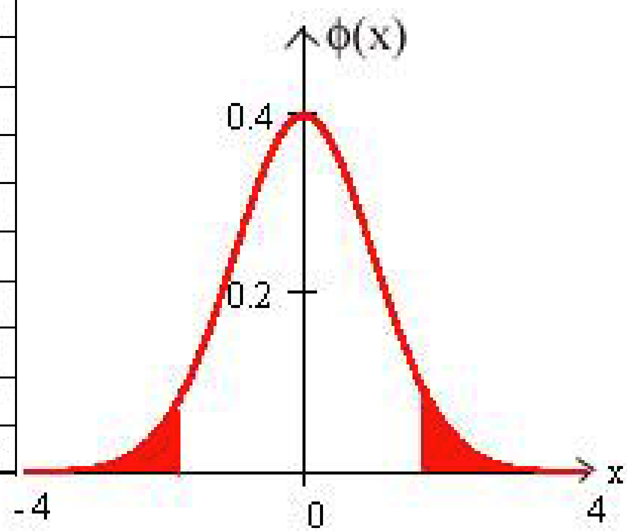
书末附有标准正态分布表，对应正态分布

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

注：表中给的是$x>0$时, $\Phi(x)$的值。当$x<0$时，

$$\Phi(x)=1-\Phi(-x)$$

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.500 0	0.504 0	0.508 0	0.512 0	0.516 0	0.519 9	0.523 9	0.527 9	0.531 9	0.535 9
0.1	0.539 8	0.543 8	0.547 8	0.551 7	0.555 7	0.559 6	0.563 6	0.567 5	0.571 4	0.575 3
0.2	0.579 3	0.583 2	0.587 1	0.591 0	0.594 8	0.598 7	0.602 6	0.606 4	0.610 3	0.614 1
0.3	0.617 9	0.621 7	0.625 5	0.629 3	0.633 1	0.636 8	0.640 4	0.644 3	0.648 0	0.651 7
0.4	0.655 4	0.659 1	0.662 8	0.666 4	0.670 0	0.673 6	0.677 2	0.680 8	0.684 4	0.687 9
0.5	0.691 5	0.695 0	0.698 5	0.701 9	0.705 4	0.708 8	0.712 3	0.715 7	0.719 0	0.722 4
0.6	0.725 7	0.729 1	0.732 4	0.735 7	0.738 9	0.742 2	0.745 4	0.748 6	0.751 7	0.754 9
0.7	0.758 0	0.761 1	0.764 2	0.767 3	0.770 3	0.773 4	0.776 4	0.779 4	0.782 3	0.785 2
0.8	0.788 1	0.791 0	0.793 9	0.796 7	0.799 5	0.802 3	0.805 1	0.807 8	0.810 6	0.813 3
0.9	0.815 9	0.818 6	0.821 2	0.823 8	0.826 4	0.828 9	0.835 5	0.834 0	0.836 5	0.838 9
1	0.841 3	0.843 8	0.846 1	0.848 5	0.850 8	0.853 1	0.855 4	0.857 7	0.859 9	0.862 1



若$X \sim N(0,1)$,

$$P\{a < X < b\} = P\{a < X \leq b\} = \Phi(b) - \Phi(a)$$

若$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$$P\{a < X < b\} = P\left\{\frac{a-\mu}{\sigma} < X < \frac{b-\mu}{\sigma}\right\}$$

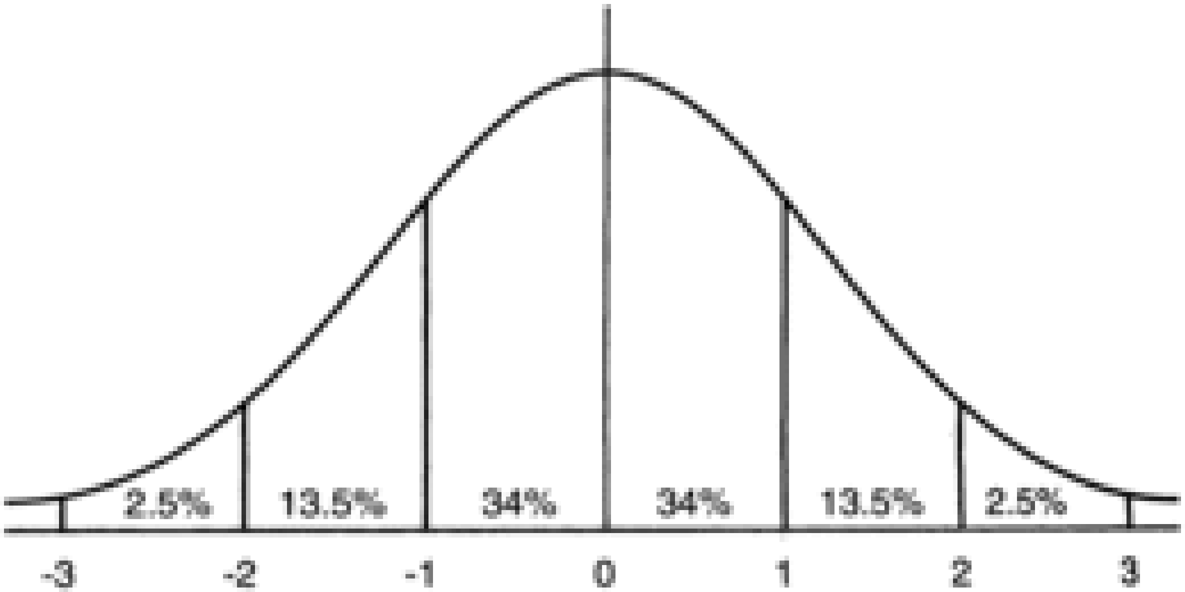
$$= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

3σ准则

由标准正态分布查表可得，当$X \sim N(0,1)$时，

$$P(|X| \le 1) = 2\Phi(1) - 1 = 0.6826$$
$$P(|X| \le 2) = 2\Phi(2) - 1 = 0.9544$$
$$P(|X| \le 3) = 2\Phi(3) - 1 = 0.9974$$

这说明，X的取值几乎全部集中在[-3,3]区间内，超出这个范围的可能性仅占不到0.3%。



上述结论推广到一般的正态分布，$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$时，

$$P(|Y-\mu| \leq \sigma) = 0.6826$$
$$P(|Y-\mu| \leq 2\sigma) = 0.9544$$
$$P(|Y-\mu| \leq 3\sigma) = 0.9974$$

可以认为，Y 的取值几乎全部集中在$[\mu-3\sigma, \mu+3\sigma]$区间内，统计上称为“$3\sigma$准则”（三倍标准差准则）

例15 设随机变量$X \sim N(0,1)$ ，试求

(1) $P\{1 \le X < 2\}$; (2) $P\{-1 < \mathrm{X} < 2\}$

解：(1) $P\{1 \le X < 2\} = \Phi(2) - \Phi(1)$

$$= 0.9772 - 0.8413 = 0.1359$$

(2) $P\{-1 < X < 2\} = \Phi(2) - \Phi(-1)$

$$= \Phi(2) - [1 - \Phi(1)]$$

$$= 0.9772 - 1 + 0.8413$$

$$= 0.8185$$

例16 设随机变量$X \sim N(2,9)$ ，试求

(1) $P\{1 \le X < 5\}$; (2) $P\{|\mathrm{X}-2| > 6\}$

解：(1) $P\{1 \le X < 5\} = P\left\{\frac{1-2}{3} \le \frac{X-2}{3} \le \frac{5-2}{3}\right\}$

$$= \Phi\left(\frac{5-2}{3}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{3}\right) = \Phi(1) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \Phi(1) + \Phi\left(\frac{1}{3}\right) - 1 = 0.4706$$

(2) $P\{|X-2| > 6\} = 1 - P\{|X-2| \le 6\}$

$$= 1 - P\left\{\frac{-4-2}{3} \le \frac{X-2}{3} \le \frac{8-2}{3}\right\}$$

$$= 1 - [\Phi(2) - \Phi(-2)] = 2 \times [1 - \Phi(2)]$$

$$= 2 \times [1 - 0.9772] = 0.0456$$

例17 设随机变量$X \sim N(d, 0.5^2)$，若使$P\{X \geq 80\} \geq 0.99$，则d至少应为多少？

解： $P\{X \geq 80\}$

$$= P\left\{\frac{X-d}{0.5} \geq \frac{80-d}{0.5}\right\} = 1 - P\left\{\frac{X-d}{0.5} < \frac{80-d}{0.5}\right\}$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{80-d}{0.5}\right) = \Phi\left(\frac{d-80}{0.5}\right)$$

由于$\Phi(2.33) = 0.9901$

于是

$$\frac{d-80}{0.5} \geq 2.33$$

故 $d \geq 81.165$

例18 设随机变量$X \sim N(2,\sigma^2)$，且$P\{2 < X < 4\} = 0.3$，则$P\{X < 0\} =?$

解：$P\{X < 0\} = \Phi\left(\frac{0-2}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) \qquad (1)$

由于

$$0.3 = P\{2 < X < 4\} = \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) - \Phi(0) = \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) - 0.5$$

于是

$$\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) = 0.8$$

直接带入(1)，有

$$P\{X < 0\} = 0.2$$

例19 某地区的月降水量服从$N(40,4^2)$ (单位：cm)的正态分布。求从某月起连续10个月的月降水量都不超过50cm的概率

解：设X: 该地区的月降水量，则$X\sim N(40,4^2)$

设事件A={月降水量不超过50cm}

则

$$P(A)=P\{X\le 50\}$$
$$=\Phi\left(\frac{50-40}{4}\right)=\Phi(2.5)=0.9938$$

于是，

$$P\{\text{连续}10\text{个月降水量都不超过}50cm\}=\ 0.9938^{10}$$
$$=0.9396$$

例20 (1) 假设某地区成年男性的身高（单位：cm）$X \sim N(170, 7.69^2)$，求该地区成年男性的身高超过175cm的概率?

(2) 公共汽车车门的高度是按成年男性与车门顶头碰头机会在0.01以下来设计的，问车门高度至少应多少?

解：(1)

$$
\begin{aligned}
P\{X > 175\} &= 1 - P\{X \leq 175\} \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{175 - 170}{7.69}\right) \\
&= 1 - \Phi(0.65) = 0.2578
\end{aligned}
$$

(2) 设车门高度为h cm, 按设计要求

$$P\{X \geq h\} \leq 0.01$$

或

$$P\{X < h\} > 0.99$$

于是

$$P\{X < h\} = \Phi\left(\frac{h-170}{7.69}\right) \geq 0.99$$

查表$\Phi(2.33) = 0.9901 > 0.99$

故，

$$\frac{h-170}{7.69} = 2.33$$

即$h = 170 + 17.92 = 187.92$

4. Γ –分布

如果连续型随机变量X的密度函数为

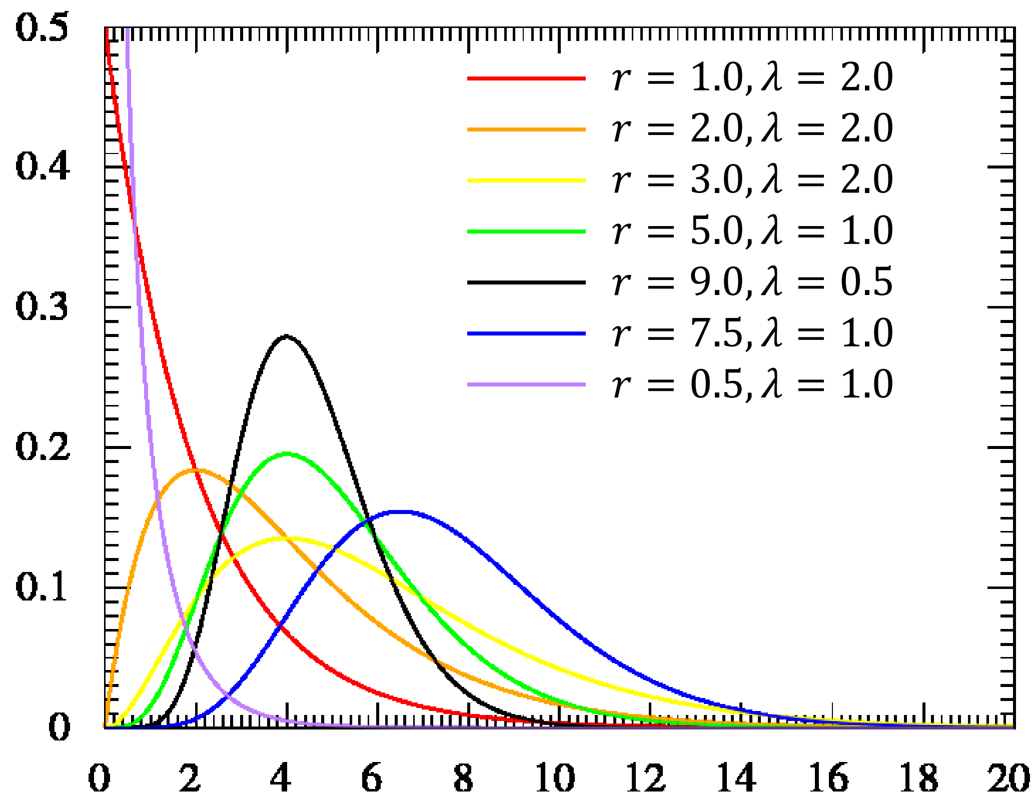
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

(其中$r>0, \lambda>0$为参数)

则称随机变量X服从参数为(r,λ)的Γ –分布，记为：$X\sim\Gamma(r,\lambda)$

r– 形状参数

λ– 尺度参数



Γ −函数

Γ −函数的定义：$\Gamma(r)=\int_0^{+\infty} x^{r-1}e^{-x}dx$

Γ −函数的定义域：$(0,+\infty)$

Γ −函数的性质：$\Gamma(r+1)=r\Gamma(r)$

$$\Gamma(1)=1,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

如果n为自然数，则$\Gamma(n)=(n-1)!$

说明：

如果$r=1$，则由$\Gamma(1)=1$，得

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

这正是参数为λ的指数分布。

如果$r=n$，由$\Gamma(n)=(n-1)!$，得

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

我们称此分布为 *Erlang* 分布，它是排队论中重要的分布之一。

说明：

如果$r = n/2, \lambda = 1/2$，其中n为自然数，则有，

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

称此分布为自由度为n的χ^2-分布，记作$\chi^2(n)$，是数理统计中重要的分布之一

§5 随机变量函数的分布

随机变量的函数

设 X 是一个随机变量，Y 是 X 的函数，$Y = g(X)$，则 Y 也是一个随机变量。

当 X 取值 x 时，Y取值 $y = g(x)$。

本节的问题：

已知随机变量 X 的分布，并且已知 $Y = g(X)$，要求随机变量 Y 的分布。

两类情形

离散型随机变量的函数

连续型随机变量的函数

一、离散型随机变量的函数

设X是离散型随机变量，其分布律为

$$P\{X=x_n\}=p_n,(n=1,2,\dots)$$

或

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

Y是X的函数$Y=g(X)$，则Y也是离散型随机变量，它的取值为$y_1,y_2,\dots,y_n,\dots$

其中

$$y_n=g(x_n),(n=1,2,\dots)$$

第一种情形

如果$y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$两两不相同(一 一映射)，则由

$$P\{Y = y_n\} = P\{X = x_n\}\ ,\ (n = 1,2, \dots)$$

可知随机变量Y的分布律为

$$P\{Y = y_n\} = p_n\ ,\ (n = 1,2, \dots)$$

或

Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

第二种情形

如果$y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ 有相同的项，则把这些相同的项合并(看做一项)，并把相应的概率相加，即可得到随机变量$Y = g(X)$的分布律。

如$y_1 = y_2 = y_3 = y_0$，则

$$P\{y = y_0\} = P\{X = x_1\} + P\{X = x_2\} + P\{X = x_3\}$$

例 1 设离散型随机变量X的分布律为

X	-3	-1	0	2	6	9
P	$\frac{1}{252}$	$\frac{5}{252}$	$\frac{15}{252}$	$\frac{35}{252}$	$\frac{70}{252}$	$\frac{126}{252}$

随机变量$Y = 2X - 3$，试求Y的分布律。

解：随机变量$Y = 2X - 3$的取值为：

-9，-5，-3，1，9，15

这些取值互不相同，于是$Y = 2X - 3$的分布律为

Y	-9	-5	-3	1	9	15
P	$\frac{1}{252}$	$\frac{5}{252}$	$\frac{15}{252}$	$\frac{35}{252}$	$\frac{70}{252}$	$\frac{126}{252}$

例 2 设随机变量 X 具有以下的分布律，

X	-1	0	1	2
p_k	0.2	0.3	0.1	0.4

试求 $Y = (X-1)^2$ 的分布律。

解： Y 有可能取的值为 0，1，4

且 $Y = 0$对应于 $(X-1)^2 = 0$，解得 $X = 1$

所以，$P\{Y = 0\} = P\{X = 1\} = 0.1$

同理 $P\{Y = 1\} = P\{X = 0\} + P\{X = 2\} = 0.7$

$$P\{Y = 4\} = P\{X = -1\} = 0.2$$

所以，$Y = (X-1)^2$ 的分布律为

Y	0	1	4
p_k	0.1	0.7	0.2

例 3 设随机变量 X 具有以下的分布律

X	1	2	$\cdots$	n	$\cdots$
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2^n}$	$\cdots$

$$Y = g(X) = \begin{cases} -1 & X\text{为奇数} \\ 1 & X\text{为偶数} \end{cases}$$

试求 Y 的分布律。

解：$P\{Y = -1\}$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X = 2k+1\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2^2}} = \frac{2}{3}$$

解（续）：

$$P\{Y=1\}=\sum_{k=1}^{\infty}P\{X=2k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}}=\frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2^2}}=\frac{1}{3}$$

所以Y 的分布律为

Y	-1	1
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

二. 连续型随机变量函数的分布

设X是一连续型随机变量，其密度函数为$f_X(x)$，再设$Y=g(X)$是X的函数，我们假定Y也是连续型随机变量，求$Y=g(X)$的概率密度函数$f_Y(y)$

求解思路：

(1) 先求$Y=g(X)$的分布函数

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}=\int_{g(x)\le y} f_X(x)dx$$

(2) 利用$Y=g(X)$的分布函数与密度函数之间的关系求$Y=g(X)$的密度函数$f_Y(y)$=$F_Y'(y)$

例 4 设随机变量 X 具有概率密度

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}, & 0<x<4\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

试求 $Y=2X+8$ 的概率密度？

解：(1) 先求 $Y=2X+8$ 的分布函数 $F_Y(y)$：

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X+8\le y\}$$

$$=P\left\{X\le\frac{y-8}{2}\right\}=\int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}}f_X(x)dx$$

解（续）：(2) 利用$F_Y'(y) = f_Y(y)$可以求得

$$f_Y(y) = \left(\frac{y-8}{2}\right)' f_X\left(\frac{y-8}{2}\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{y-8}{2}\right) & 0 < \frac{y-8}{2} < 4 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

整理得 $Y=2X+8$ 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y-8}{32} & 8 < y < 16 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

推广：上例用到变限定积分求导公式，一般地

如果

$$F(x)=\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt$$

则

$$F'(x)=f[\varphi(x)]\varphi'(x)-f[\psi(x)]\psi'(x)$$

例 5 设随机变量 X 具有概率密度$f_X(x)$, $(-\infty < x < \infty)$，求$Y = X^2$的概率密度。

解：(1) 先求$Y = X^2$ 的分布函数 $F_Y(y)$

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X^2 \le y\}$$

由于$Y = X^2 \ge 0$，故当$y \le 0$时$F_Y(y) = 0$

当$y > 0$时

$$F_Y(y) = P\{-\sqrt{Y} \le X \le \sqrt{Y}\} = \int_{-\sqrt{Y}}^{\sqrt{Y}} f_X(x)dx$$

利用$F'_Y(y) = f_Y(y)$及限定积分求导，有

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})], & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})], & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

例如, 设 $X\sim N(0,1)$,

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty<x<\infty$$

则$Y=X^2$的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

称Y服从自由度为1的χ^2分布

例 6 设随机变量 X 的概率密度函数为$f_X(x), (-\infty < x < \infty)$，求$Y = |X|$的概率密度函数$f_Y(y)$。

解：设随机变量X的分布函数为$F_X(x)$，随机变量Y的分布函数为$F_Y(y)$

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{|X| \le y\}$$

(1) 若y<0，则

$$F_Y(y) = P(\emptyset) = 0$$

(2) 若$y \ge 0$，则

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \le y\} = P\{|X| \le y\} \\ &= P\{-y \le X \le y\} = F_X(y) - F_X(-y) \end{aligned}$$

综上所述，随机变量Y的分布函数为

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(y) - F_X(-y) & y \ge 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

对上式求导，可得$Y = |X|$的概率密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(y) + f_X(-y) & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

严格单调函数的分布

定理 设随机变量 X 具有概率密度

$$f_X(x), (-\infty < x < \infty),$$

又设$g(x)$处处可导，且恒有$g'(x) > 0$(或< 0)，则$Y = g(X)$是连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

其中 $h(y)$ 是 $g(x)$ 的反函数，即

$$x = g^{-1}(y) = h(y)$$

$$\alpha = \min\{g(-\infty), g(+\infty)\}, \beta = \max\{g(-\infty), g(+\infty)\}$$

注意：若$f(x)$在有限区间$[a,b]$之外等于零，则只需假设在$[a,b]$上恒有$g'(x)>0$(或恒有$g'(x)<0$)，此时仍有

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha<y<\beta \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

$$\alpha=\min\{g(a),g(b)\},\beta=\max\{g(a),g(b)\}$$

证明：设随机变量$Y=g(X)$的分布函数为$F_Y(y)$，有

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}$$

由题设，当随机变量X在区间$(-\infty,+\infty)$上变化时，随机变量Y在区间(α,β)上变化，其中

$$\alpha=\min\{g(-\infty),g(+\infty)\},\beta=\max\{g(-\infty),g(+\infty)\}$$

因此，

当$y<\alpha$时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\emptyset\}=0;$

当$y>\beta$时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\Omega\}=1;$

不妨设$y \in (\alpha, \beta)$时，$g(X)$是严格单调增函数，即$g'(X) > 0$，

于是

$$F_Y(y) = P\{X \le g^{-1}(y)\} = P\{X \le h(y)\}$$
$$= \int_{-\infty}^{h(y)} f_X(x)dx$$

故

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{d}{dy}\left(\int_{-\infty}^{h(y)} f_X(x)dx\right)$$
$$= f_X\big(h(y)\big) \cdot h'(y) = f_X\big(h(y)\big) \cdot |h'(y)|,$$
$$(h'(y) > 0)$$

若$g(X)$是严格单调减函数，即$g'(X) < 0$，于是

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{Y \le y\} = P\{g(X) \le y\} \\
&= P\{X \ge g^{-1}(y)\} = P\{X \ge h(y)\} \\
&= \int_{h(y)}^{+\infty} f_X(x)dx
\end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= F_Y'(y) = \frac{d}{dy}\left(\int_{h(y)}^{+\infty} f_X(x)dx\right) \\
&= -f_X\big(h(y)\big) \cdot h'(y) = f_X\big(h(y)\big) \cdot |h'(y)|,
\end{aligned}
$$

(此时$h'(y) < 0$)

综上，有

$$
f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & otherwise \end{cases}
$$

补充定理(分段单调)：

若$g(x)$在不相叠的区间$I_1, I_2, \ldots$上逐段严格单调，其反函数分别为$h_1(x), h_2(x), \ldots$均为连续函数，

那么$Y = g(x)$是连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y) = f_X[h_1(y)]|h_1'(y)| + f_X[h_2(y)]|h_2'(y)| + \cdots,$$

$$y \in (\alpha, \beta)$$

例 7 设随机变量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y=e^x$，试求随机变量Y的密度函数$f_Y(y)$。

解：$\because f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},(-\infty<x<\infty)$

并且$y=e^x$是严格单调增函数，且

$$x\in(-\infty,+\infty)\Leftrightarrow y\in(0,+\infty)$$

其反函数为$x=\ln y$, 故当$y\in(0,+\infty)$时

$$f_Y(x)=f_X(\ln y)|(\ln y)'|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y}e^{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

于是$y=e^x$的密度函数为

$$f_Y(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}y\sigma}e^{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$ (对数正态分布)

例8 设随机变量$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，试证明X的线性函数$Y = aX + b, (a \neq 0)$也服从正态分布。

证明：X 的概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, (-\infty < x < \infty)$$

$y = g(x) = ax + b, g'(x) = a$, 满足单调性

$$h(y) = \frac{y-b}{a}, 且 h'(y) = \frac{1}{a}$$

由定理的结论得

$$f_Y(y) = f_X[h(y)]|h'(x)| = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma|a|} e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma|a|} e^{-\frac{(y-(a\mu+b))^2}{2a^2\sigma^2}}$$

即有

$$Y = aX + b \sim N(a\mu + b, (a\sigma)^2)$$

例 9 设随机变量 X 具有概率密度

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

试求$Y=\sin X$的概率密度。

解：因为$y=\sin x$在$(0,\frac{\pi}{2}]$上严格单调递增，$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上严格单调递减，

且

$$x=\arcsin y=h_1(y)\text{，}x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$x=\pi-\arcsin y=h_2(y)\text{，}x\in(\pi/2,\pi)$$

注意到$x \in (0, \pi)$时， $y \in (0,1)$，

则当$y \in (0,1)$时，

$$f_Y(y) = f_X[h_1(y)]|h_1'(y)| + f_X[h_2(y)]|h_2'(y)|$$

$$= \frac{2}{\pi^2}\arcsin y \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{2}{\pi^2}(\pi - \arcsin y) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$= \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}$$

于是

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0 < y < 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

§6. 小结

- 随机变量——设E 是一个随机试验，S 是其样本空间。若对每一个$\omega \in S$，都有唯一确定的一个实数$X(\omega)$，与之对应，则称$X(\omega)$为一个随机变量
- 离散型随机变量及其分布律
- 连续型随机变量及其分布函数、概率密度函数
- 随机变量函数的分布
  - 离散型
  - 连续型
    - 从概率分布函数导出概率密度函数
    - 单调或分段单调的情形可以直接导出

$$f_Y(y) = f_X\big(h(y)\big) \cdot |h'(y)|$$

扩展：多项分布 (Multinomial Distribution)

多项分布是二项分布的扩展，它给出了K-状态离散随机变量的概率分布：

$$\mathrm{Mult}(m_1, m_2, \ldots, m_K; n, \boldsymbol{p}) = \binom{n}{m_1 m_2 \ldots m_K} \prod_{k=1}^{K} p_k^{m_k}$$

其中，$m_1 + \cdots + m_K = n$,

$\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_K)^T, \sum_k p_k = 1$

$$\binom{n}{m_1 m_2 \ldots m_K} = \frac{n!}{m_1! \ldots m_K!}$$

当K=2时，即为二项分布。

例：掷12个骰子，问骰子每面都出现两次的概率是多少？

解：$n = 12,\ m_k = 2,\ p_k = \frac{1}{6}$

P(骰子每面都出现两次)

$$= \binom{12}{2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2} \prod_{k=1}^{6} p_k^2$$

$$= \frac{12!}{2! \ldots 2!} \left(\frac{1}{6}\right)^{12} \approx 0.0034$$

常用概率分布及其关系

多项分布

$$M(n,\boldsymbol{p}) = \binom{n}{m_1 m_2 \dots m_K} \prod_{k=1}^{K} p_k^{m_k}$$

$K = 2$

$X_1 + \cdots + X_n$

贝努利分布

$$B(1,p) = p$$

泊松分布

$$P(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$n \to \infty,$
$\lambda = np$

二项分布

$$B(n,p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$n = 1$

标准正态分布

$$N(0,1) == \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2}$$

$\frac{X-\mu}{\sigma}$

正态分布

$$N(\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

指数分布

$$E(\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$$

χ^2 −分布

$$\chi^2(n) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$$

$r = \frac{n}{2},$
$\lambda = \frac{1}{2}$

Γ −分布

$$\Gamma(r,\lambda) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x}$$

$r = 1$

作业

同上次课后：

《概率论与数理统计》P56-59

12, 16, 21, 25, 29, 31, 32, 35, 37

《概率论及其应用》P147-148

1, 9, 10