Homework1

李昊宸

October 15, 2018

1

a.
$f_1 + f_2 + ... + f_{2n-1} = f_1 + [f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + ... + f_{2n-3} + f2n - 2]$
$= 1 + [f_1 + ... + f_{2n-2}] = (f_2 + f_1) + f_2 + f_3 + ... = f_3 + f_2 + ...$
$= f_{2n-2} + f2n - 3 + f2n - 2 = 2f_{2n-2} + f_{2n-3}$
b.
$f_0 - f_1 + f_2 ... + (-1)^n f_n = f_2 + f_4 + ... + f_{n-2}$(n为偶) 或$f_2 + f_4 + ... f_{n-3} - f_n$（n为奇）
n为偶数时，原式$= f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_{n-4} + f_{n-3} = 2f_{n-3} + f_{n-4} - 1$
n为奇数时，原式$= f_0 + f_1 + ... + f_{n-5} + f_{n-4} - f_n = 2f_{n-4} + f_{n-5} - 1 - f_n$

2

a.
证明$l_n = f_{n-1} + f_{n+1}$
设$l_n - kl_{n-1} = (1-k)[l_{n-1} + \frac{1}{1-k} l_{n-2}]$
其特征方程为$k^2 - k - 1 = 0, \Delta = \sqrt{5}$,两个特征根为

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

所以$l_n = a{x_1}^n + b{x_2}^n$
将$l_0 = 2, l_1 = 1$代入，得$a = 1 = b$
于是$l_n = {x_1}^n + {x_2}^n$
已知

$$f_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}[{x_1}^{n-1} - {x_2}^{n_1}] \quad f_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}[{x_1}^{n-1}\frac{3+\sqrt{5}}{2} - {x_2}^{n-1}\frac{3-\sqrt{5}}{2}]$$

从而有$f_{n-1} + f_{n+1} = l_n$
b.
证明${l_0}^2 + ... + {l_n}^2 = l_n l_{n+1} + 2, n \geq 0$
原式左边$= {l_0}^2 + l_1 l_0 + {l_1}^2 + .. + {l_n}^2 - l_1 l_0 = {l_0}^2 + l_1 l_2 + {l_2}^2 + .. + {l_n}^2 - l_1 l_0$
$= l - 0^2 + l_{n-1} l_n + {l_n}^2 - l_1 l_0 = l_n l_{n+1} + 4 - 2 = l_n l_{n+1} + 2$

3

$h_n + 3\times 2^n = 4[h_{n-1} + 3\times 2^{n-1}]$
公差为4，通项公式$a_n = h_n + 3\times 2^n = 4^{n-1}$
于是$h_n = 4^{n+1} - 3\times 2^n$

4

$h_n + n + 2 = 2[h_{n-1} + (n_1) + 2]$
公差为2，通项公式$a_n = h_n + n + 2 = 3\times 2^n$
于是$h_n = 3\times 2^n - n - 2$

5

1个圆可将平面分为2个区域
2个圆可将平面分为4个区域
每加入一个圆，与之前n-1个圆最多有$2(n-1)$个交点，圆被分为$2(n-1)$个圆弧，即增加$2(n-1)$个区域
得到递推公式$l_n = l_{n-1} + 2(n-1)$
解递归方程，得$l_n = n^2 - n + 2$

6

考虑每加入一个球面，最多可与之前的n个球面相交，交线形成的区域数即为新增加的空间数
即$B_{n+1} = B_n + l_n = B_n + n^2 - n + 2$
求和，得$B_n = \frac{n^3-3n^2+8n}{3}$

7

证明$h_n = h_{n-1} + \binom{n+1}{3} + n$
从n-1推广至n时：
1.首先已经有h_{n-1}个区域
2.新加入$n-1$条对角线和2条边，将原图形外部的区域分为n块
3.考虑这样新形成的四边形：由三个旧顶点和1个新顶点形成，故旧的边形成的三角形会被1条新形成的对角线分成两个部分，从而区域数加1
于是$h_n = h_{n-1} + \binom{n+1}{3} + n$
生成函数$F_n = \sum_0[\binom{n+1}{3} + n]x^n$
$xF_n = \sum_1[\binom{n}{3} + n - 1]x^n$
相减，得$F_n = \sum[\frac{n(n-1)}{2} + 1]\frac{x^n}{1-x} = \sum[\frac{n(n-1)}{2} + 1]x^n(1 + x + x^2 + ...)$
$= \sum(\sum\frac{n(n-1)}{2} + \sum 1)x^n$
$= \sum(\binom{n+2}{4} + \frac{n(n+1)}{2})x^n$

因此$h_n = \binom{n+2}{4} + \frac{n(n+1)}{2}$

8

奇数有1，3，5，7，9
运用指数生成函数，有方程

$$g(x) = (1 + x + \frac{x^2}{2!} + ...)^3(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ...)^2$$

有$e^{3x}[\frac{e^x+e^{-x}}{2} - 1]^2 = e^x[\frac{e^2x+1}{2} - e^x] = \frac{e^{5x}}{4} - e^{4x} + \frac{3}{2}e^{3x} - e^{2x} + \frac{1}{4}e^x$
所以我们得到系数通项公式$h_n = \frac{5^n}{4} - 4^n + \frac{3}{2}3^n - 2^n + \frac{1}{4}$

9

考虑递归方程：
a.3×2的方格，有3种覆盖方法：两竖一横，一竖两横，三横
b.3×4的方格，去掉上面的覆盖方法之后，还有两种
于是递推方程为$f(n) = 3 \times f(n-2) + 2 \times f(n-4)$
其特征方程为$k^2 - 3k - 2 = 0$,特征根为

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$$

$$x_2 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}$$

因此$f(n) = a{x_1}^n + b{x_2}^n$ 将$f(2) = 3$,$f(4) = 11$代入，解得

$$a = \frac{7}{2} - \frac{85}{6\sqrt{17}} \quad b = \frac{7}{2} + \frac{85}{6\sqrt{17}}$$

于是$f(n) = [\frac{7}{2} - \frac{85}{6\sqrt{17}}][\frac{3+\sqrt{17}}{2}]^n + [\frac{7}{2} + \frac{85}{6\sqrt{17}}][\frac{3-\sqrt{17}}{2}]^n$

10

考虑递归方程：
a.当最后一位是2时，前面一位可以任取，有f（n-1）种
b.当最后一位是1时，前面一位只能为2，有f(n-2)种
c.当最后一位是0时，前面一位只能是2，有f(n-2)种
所以$f(n) = f(n-1) + 2f(n-2)$
特征方程为$k^2 - k - 2 = 0$,特征根为

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -1$$

于是$f(n) = a{x_1}^n + b{x_2}^n$
将$f(1) = 3 \quad f(2) = 5$代入，解得$a = \frac{4}{3}, b = \frac{1}{3}$
所以$f(n) = \frac{4}{3}2^n + \frac{1}{3}(-1)^{n+1}$

11

a.
若规定k为最多测量次数，第一次测量第k层
1.灯泡碎掉，则剩余k-1次一定能够测出
2.灯泡未碎，则测量2k-1层
2.1灯泡碎掉，则剩余k-2次一定能测出
2.2灯泡未碎，则...... 综上，总共可测量$k + (k-1) + ... + 1 = \frac{k(k+1)}{2}$层解方程$\frac{k(k+1)}{2} /gen$,解得$k /ge \frac{-1+\sqrt{1+8n}}{2}$
于是n层楼至少需要测$\lceil \frac{-1+\sqrt{1+8n}}{2} \rceil$次
b.
由a知，两个灯泡测k-1次可测$\frac{k(k-1)}{2}$层
设k为最多测试次数,按照同a相同的计算策略，从$\frac{k(k-1)}{2} + 1$层测起
1.若碎，则再测k-1次一定能测出
2.若未碎，则测$\frac{k(k-1)}{2} + 1 + \frac{(k-1)(k-2)}{2} + 1$层
求和为$\frac{1}{2}[\frac{k(k-1)}{2} + \frac{(k-1)(k-2)}{2} + ... + 2 \times 1] + k$
$= \frac{k^3+5k}{6}$
解方程$\frac{k^3+5k}{6} /gen$,得到的最小的正整数k即为我们要找的最少测量数。

12

a.考虑圆排列π上的连续位置$A_1, A_2, ..., A_K, ..., A_n$
取$S_1 = A_1, A_2, ..., A_n \quad (S_1, \pi) \in R$
若满足任意$S_1, S_2 \in F$ $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$，因$2k \leq n$，故不存在两集合首尾均相交
由于圆排列的对称性，不妨取S_1为处于最外侧的集合，即S_1有一端的元素仅属于它自身。
易知最多有k-1个集合与S_1相交，所以$|r(S, \pi)| \leq k$
b.与集合S_1有关的圆排列有$k!(n-k)!$种
于是$|F|k!(n-k)! \leq k(n-1)!$
即$|F| \leq \binom{n-1}{k-1}$