组合数学第四讲

授课时间: 2018年10月8日　授课教师: 孙晓明　记录人: 张志成　薛迪展

1　选做题回顾

例 1　已知集族$\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$。若$\mathcal{F}$满足：对于$\forall A, B \in \mathcal{F}, A \cap B \neq \emptyset$,并且$\mathcal{F}$是一个反链。求$\max|\mathcal{F}|$。

证明　欲证$\max|\mathcal{F}| = \binom{n}{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}$，我们先证明如下引理：

引理 1. 设π是一个$[n]$上的圆排列，集合$A_1, A_2, \cdots, A_r \in \mathcal{F}$中的元素在$\pi$上连续（记为$A_i$包含于$\pi$），那么

$$\sum_{i=1}^{r} \binom{n}{|A_i|} \leq n \binom{n}{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}。$$

引理的证明　因为$\mathcal{F}$为反链，所以以某确定元素起始的包含于π的集合至多只有一个，故有$r \leq n$。

当n为奇数时，由二项式系数的单峰性，$\forall A_i, \binom{n}{|A_i|} \leq \binom{n}{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}$，引理得证；

当n为偶数时，

(i)若$r = n$，则π上每个元素都有且只有一个对应的以该元素起始的集合，设集合按下标依次排列。因为$\mathcal{F}$为反链，所以$|A_i| \leq |A_{i+1}|$，否则$A_i \supseteq A_{i+1}$。那么有

$$|A_1| \leq |A_2| \leq \cdots |A_r| \leq |A_1|$$

$$\Rightarrow |A_i| = k, \forall i \in \{1, \cdots, r\}, k\text{为常数。}$$

因为$\mathcal{F}$为交族，所以$k \neq \frac{n}{2}$，则

$$\forall A_i, \binom{n}{|A_i|} \leq \binom{n}{\frac{n}{2}+1} = \binom{n}{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}。$$

(ii)若$r < n$，因为$\mathcal{F}$为交族，对于长度为$\frac{n}{2}$的互补区间，至多有一个包含于π，所以r个集合中至多有$\frac{n}{2}$个集合长度为$\frac{n}{2}$，此时考虑最大的情况：

$$\sum_{i=1}^{r} \binom{n}{|A_i|} \leq \frac{n}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}} + (r - \frac{n}{2})\binom{n}{\frac{n}{2}+1} \leq \frac{n}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}} + (\frac{n}{2} - 1)\binom{n}{\frac{n}{2}+1} = n\binom{n}{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}。$$

其他情况下显然不等式成立。

综上，

$$\sum_{i=1}^{r} \binom{n}{|A_i|} \leq n \binom{n}{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}。$$

□

回到原题，下面与EKR定理的证明类似。引理中令r最大，考虑$\mathcal{F}$中所有元素(集合)对应的所有循环n排列，则引理所证不等式左边变为

$$\sum_{\pi} \sum_{i=1}^{r} \binom{n}{|A_i|} = \sum_{i=1}^{|\mathcal{F}|} |A_i|!(n - |A_i|)! \binom{n}{|A_i|} = \sum_{i=1}^{|\mathcal{F}|} n! = |\mathcal{F}| n!$$

因为循环n排列最多有$(n-1)!$种，由引理，该式一定小于等于

$$(n-1)!n\binom{n}{\lceil\frac{n+1}{2}\rceil} = n!\binom{n}{\lceil\frac{n+1}{2}\rceil}。$$

所以

$$|\mathcal{F}|n! \leq n!\binom{n}{\lceil\frac{n+1}{2}\rceil},$$

从而

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lceil\frac{n+1}{2}\rceil}。$$

当取集合长度均为$\lceil\frac{n+1}{2}\rceil$时等号成立，所以$\max|\mathcal{F}| = \binom{n}{\lceil\frac{n+1}{2}\rceil}$。 □

2 递推数列

例 2 三根柱子的汉诺塔问题: 有一根柱子上套了n个圆盘，从下到上圆盘的直径递减，另外还有两根空柱子，每次移动圆盘时，只能将某根柱子最上方的圆盘移动到另一根柱子的最上方，而且不能将较大的圆盘放在较小的圆盘上。问：将第一根柱子上的n个圆盘全部移动到另一根柱子上，至少需要移动多少次？

解 考虑将要移动第n号圆盘到第三根柱子的时候，必须要将比它小的$n-1$个圆盘已经被移动到第二根柱子上去。移动完第n个圆盘后，又要把$n-1$个圆盘移到第三根柱子上。

设原问题需要的最少移动次数为h_n，我们有递推关系式:

$$h_1 = 1,\ h_n \geq h_{n-1} + 1 + h_{n-1} = 2h_{n-1} + 1\ (n \geq 2)。$$

为求解此关系式，可以做变形:

$$h_n + 1 \geq 2\left(h_{n-1} + 1\right)。$$

令$h'_n = h'_n + 1$，则递推式变为$h'_1 = 2,\ h'_n \geq 2h'_{n-1}$，故$h'_n \geq 2^n,\ h_n \geq 2^n - 1$。

这个下界是可以达到的，利用数学归纳法我们可以轻易证明以下算法的正确性：对于n个圆盘，我们用2^{n-1}步将前$n-1$个圆盘放到第2个柱子，再将第n个圆盘放到第3个柱子，最后用2^{n-1}步将前$n-1$个圆盘放到第3个柱子。故$h_n = 2^n - 1$。

例 3 一个二维平面，用n条直线来将其划分，问至多能分成几部分？

解 考虑依次向平面中添加这n条直线。在加入第n条直线的时候，该直线会与前$n-1$条直线产生交点，至多$n-1$个。故第n条直线至多被分成n段，每一段对区域的个数贡献为1。

记原问题的答案为g_n，我们有递推关系式:

$$g_1 = 2,\ g_n = g_{n-1} + n\ (n \geq 2)。$$

迭代表明，$g_n = g_1 + \sum_{i=2}^{n} i = 2 + \frac{n(n+1)}{2} - 1 = 1 + \frac{n^2+n}{2}$。

例 4 类似地考虑用n个平面来划分三维空间的问题，至多能划分成几部分？

解 考虑按序添加这n个平面。在加入第n个平面时，该平面会和前$n-1$个平面产生交线，至多$n-1$条。而这$n-1$条交线对第n个平面构成了划分，由前一题知这样的数目至多为g_{n-1},且每个区域对空间划分贡献为1。

记原问题的答案为g'_n, 我们有递推关系：

$$g'_1 = 2,\ g'_n = g'_{n-1} + g_{n-1}\ (n \geq 2)。$$

迭代表明，

$$\begin{aligned}
g'_n &= g'_1 + \sum_{i=1}^{n-1} g_i \\
&= g'_1 + \sum_{i=1}^{n-1}(1 + \frac{i^2+i}{2}) \\
&= 2 + (n-1) + \frac{n(n-1)}{4} + \frac{(n-1)n(2n-1)}{12} \\
&= \frac{1}{6}(6 + 5n + n^3)。
\end{aligned}$$

例 5 归并排序问题：将一个长度为n的序列归并排序，问需要多少次操作？(此处只考虑阶)

解 考虑最后一次归并操作，已经得到了前$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$的有序序列$b_1, b_2, \ldots, b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$和后$n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$的有序序列$b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}, \ldots, b_n$。本次归并包含了$O(n)$次操作,记原问题答案为$h_n$, 我们得到递推关系：

$$h_1 = 0,\ h_n = 2h_{\frac{n}{2}} + O(n)\ (n \geq 2)。$$

进行变形：

$$\frac{h_n}{n} = \frac{h_{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}} + O(1)。$$

令$h'_n = \frac{h_n}{n}$, 则$h'_n = O(\log n), h_n = O(n \log n)$。

例 6 递推关系式 $f_n = nf_{n-1} + n^2$如何求解？

解 做变形：

$$\frac{f_n}{n!} = \frac{f_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{n}{(n-1)!}。$$

令$f'_n = \frac{f_n}{n!}$, 则$f'_n = f'_{n-1} + \frac{n}{(n-1)!}$。迭代表明，$f'_n = f'_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{i}{(i-1)!}$。

例 7 一般的，递推关系$f_n = c(n)f_{n-1} + h_n$应该如何处理?

解 考虑类似的处理:

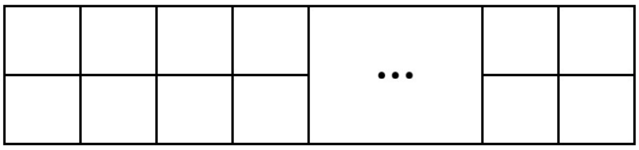
$$\frac{f_n}{c(1)c(2)\ldots c(n)} = \frac{f_{n-1}}{c(1)c(2)\ldots c(n-1)} + \frac{h_n}{c(1)c(2)\ldots c(n)}。$$

令$f'_n=\frac{f_n}{c(1)c(2)...c(n)}$，则我们有

$$f'_n=f'_{n-1}+t_n\Longrightarrow f'_n=f'_1+\sum_{i=2}^{n}t_n$$

其中$t_n=\frac{h_n}{c(1)c(2)...c(n)}$。问题转为求和。

例 8　有$2\times n$的方格，用1×2或2×1的多米诺骨牌来不重叠地完全覆盖，问：有多少种覆盖方法？



解　设一共有F_n种覆盖方法。考虑处于右上角的那块骨牌，

(i)若该骨牌竖放(如图1)，则其左方$2\times(n-1)$的方格被1×2的多米诺骨牌覆盖，有F_{n-1}种覆盖方法。

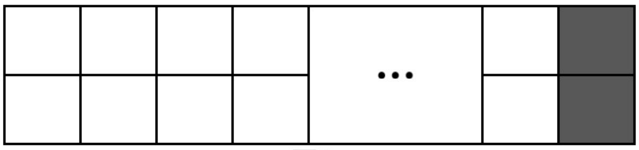


图1

(ii)若该骨牌横放，则右下角的骨牌也只能横放(如图2)，此时其左方$2\times(n-2)$的方格被1×2的多米诺骨牌覆盖，有F_{n-2}种覆盖方法。

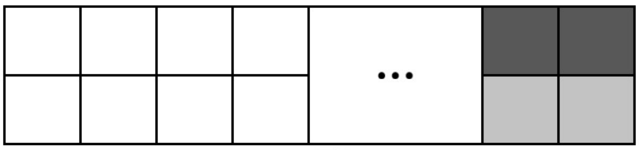


图2

综上，则有$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$。当$n=1,2$时，枚举得$F_1=1,F_2=2$。我们规定$F_0=1$以使其满足递推式。接下来考虑用生成函数法求数列的通项公式。

定义形式幂级数$F(x)=\sum_{i=0}^{\infty}F_ix^i$,

$$\because F_n=F_{n-1}+F_{n-2},F_0=F_1=1,$$

$$\therefore F(x)=xF(x)+x^2F(x)+F_0,$$

$$\therefore F(x)=\frac{F_0}{-x^2-x+1}=\frac{1}{-x^2-x+1}=-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}-\frac{1}{x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}-\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{x}x}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{i=0}^{\infty}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{i+1}x^i-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{i+1}x^i)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{i+1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{i+1})x^i,$$

$$\therefore F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}),n\in\mathbb{N}。$$

斐波那契数列 满足$F_0=F_1=1$(或$F_0=0,F_1=1$)，$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n(n\in\mathbb{N})$的数列$\{F_n\}$称为斐波那契数列。定义$F_0=1$时, $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1})$。

例 9 $\{F_n\}$为斐波那契数列，求证：$F_mF_{n-m}+F_{m-1}F_{n-m-1}=F_n,\forall 1\le m\le n-1$。

证明 考虑上题中的多米诺骨牌覆盖$2\times n$方格问题，将覆盖好的方格从第m和第$(m+1)$列之间割开(如图3)。

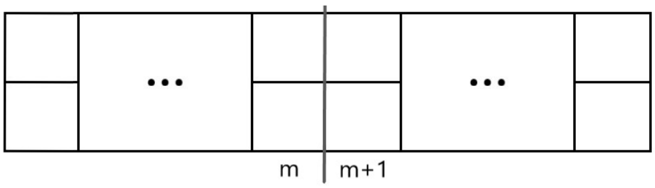


图3

(i)若此切割不破坏任一骨牌，则割线左右分别被1×2的骨牌覆盖，有F_mF_{n-m}种覆盖方法。

(ii)若此切割破坏骨牌(如图4)，则其前$(m-1)$列方格和后$(n-m-1)$列方格被1×2的骨牌覆盖，有$F_{m-1}F_{n-m-1}$种覆盖方法。

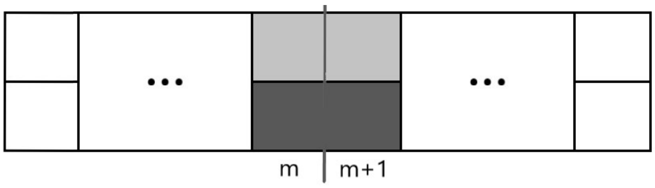


图4

而总的覆盖方法有F_n种，故$F_mF_{n-m}+F_{m-1}F_{n-m-1}=F_n$。 □

例 10 用数字1、2、3组成一个n位数，满足有偶数位为1，则共有多少个这样的数？

解 设满足题意的数有T_n个，亦设用数字1、2、3组成的有奇数位为1的n位数有S_n个。枚举得$T_1=2,S_1=1$。考虑满足题意的数的最后一位数字。若最后一位数字为2或3，则前$(n-1)$位组成的数中也有偶数位1，故此时有$2T_{n-1}$个满足题意的数；若最后一位数字为1，则前$(n-1)$位组成的数中有奇数个1，故此时有S_{n-1}个满足题意的数。于是我们得到$T_n=2T_{n-1}+S_{n-1}$,同理可得$S_n=2S_{n-1}+T_{n-1}$。下面我们用两种方法（消元和母函数）解这个递推式组。

$$\begin{cases} T_n=2T_{n-1}+S_{n-1} & (+) \\ S_n=2S_{n-1}+T_{n-1} & (*) \end{cases} \tag{1}$$

(i) 将$S_{n-1}=T_n-2T_{n-1}$，$S_n=T_{n+1}-2T_n$代入$(*)$解得$T_{n+1}=4T_n-3T_{n-1}$。得数列$\{T_n\}$特征方程$x^2-4x+3=0$，解得特征根$\alpha=3,\beta=1$，故$T_n=A\cdot 3^n+B\cdot 1^n$。将$T_1=2,T_2=5$代入解得$A=B=\frac{1}{2}$。故$T_n=\frac{1}{2}(3^n+1)$，即共有$\frac{1}{2}(3^n+1)$个满足题意的数。

(ii) 补设$T_0=1$，$S_0=0$。考虑数列$\{T_n\}$和$\{S_n\}$的母函数$T(x)=\sum_{i\ge 0}T_ix^i$，$S(x)=\sum_{i\ge 0}S_ix^i$。由$(+)$ $(*)$二式可得

$$T(x)=1+2xT(x)+xS(x),\ S(x)=2xS(x)+xT(x)。$$

进而可解出$T(x)$，$S(x)$以及$\{T_n\}$，$\{S_n\}$。

例 11　用数字1、2、3组成一个n位数，满足有偶数位为1，有奇数为2，则共有多少个这样的数？

提示 模仿上题，根据含数字1、2位数的奇偶性定义数列$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\},\{d_n\}$，推导类似的递推式求解数列通项公式。