

组合数学作业四

题目1-11请于11月22号交至课程网站，选做题提交电子版至助教，并抄送给孙老师。

老师及助教邮箱：sunxiaoming@ict.ac.cn, sunyuanyuan2016@ict.ac.cn, zhangzhijie@ict.ac.cn。

1(1分) 求从1到10000中不能被4、6、7或10整除的整数个数。

2(1分) 求出从1到10000中既不是完全平方数也不是完全立方数的数的个数。

3(2分) 确定由数字1, 2组成的且能被3整除的 n 位数的个数。

4(2分) 确定满足 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 14, 0 \leq x_i \leq 8, x_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2, 3, 4$ 的四元组 (x_1, x_2, x_3, x_4) 的个数。

5(2分) 确定 $\{1, 2, \dots, 8\}$ 的排列中没有偶数在它自然位置（对于排列 π , k 在其自然位置指 $\pi(k) = k$ ）的排列数。

6(1分) 确定计数集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的排列中恰有 k 个整数在它自然位置上的排列数。

7(2分) 多重集合 $\{3 \cdot a, 4 \cdot b, 2 \cdot c, 1 \cdot d\}$ 的循环排列中有多少种循环排列满足对于每种类型字母该类型的所有字母不连续出现。

8(1分) 证明：

$$P(n) = P(2n, n)$$

其中 $P(n)$ 是将整数 n 拆分成若干正整数（不考虑顺序）的方法数； $P(n, m)$ 是将整数 n 拆分成 m 个正整数（不考虑顺序）的方法数。

9(2分) 证明：

$$P(n+1) + P(n-1) \geq 2P(n) \quad (n \geq 2)$$

其中 $P(n)$ 的定义同上题目。

10 求下列斯特林数的表达式：

a) (1分) $S_1(n, 3)$;

b) (1分) $S_1(n, n-1)$;

c) (1分) $S_2(n, 3)$;

d) (1分) $S_2(n, n-1)$.

11(2分) 求证对于任意 $n \in \mathbb{N}$, 如下公式成立：

$$x^n = \sum_{k=0}^n S_2(n, k) \cdot x^k$$

选做题：信封问题

考虑包含3个参数 n, m, k ($m \geq n \geq k$)的如下游戏模型：现有编号为1到 n 的参与者和编号为1到 m 的信封，将分别写有所有参与者编号的 n 张纸条随机地装入信封中，且每个信封中最多有一张纸条。每名参与者可以从 m 个信封中挑选 k 个检查（可以在看到前一封结果后再决定接下来看哪一封），如果其中某个信封中的纸条写有这个参与者的编号，称这个参与者通过了测试。如果所有人均通过测试，那么参与者一方获胜。在游戏过程中，参与者之间不能通信，但在游戏开始前，他们可以商定策略。请设计一种策略使得参与者获胜的概率尽可能大。

对以下不同的三元组参数 (n, m, k) 求解这个问题：

1. $n = m, k = m/3$ （假定 $m/3$ 是整数）；
2. $n = 3m/4, k = m/2$ （假定 $m/4$ 是整数）。