

组合数学作业三

题目1-10请于10月29号前提交至课程网站。选做题提交电子版至助教，并抄送给孙老师。

老师及助教邮箱：sunxiaoming@ict.ac.cn, sunyuan2016@ict.ac.cn, zhangzhijie@ict.ac.cn。

请同学们阅读《组合数学》(Richard A. Brualdi 著；冯速等译，北京：机械工业出版社)第六章和第七章。

1 求解如下递推关系：

a) (1分) $h_0 = 0; \quad h_1 = 1; \quad h_2 = 2;$

$$h_n = h_{n-1} + 9h_{n-2} - 9h_{n-3}, \quad (n \geq 3)$$

b) (1分) $h_0 = -1; \quad h_1 = 0;$

$$h_n = 8h_{n-1} - 16h_{n-2}, \quad (n \geq 2)$$

c) (2分) $h_0 = 2;$

$$h_n = (n+2)h_{n-1} + (n+2), \quad (n \geq 1)$$

2 设 S 是多重集合 $\{\infty \cdot e_1, \infty \cdot e_2, \infty \cdot e_3, \infty \cdot e_4\}$ 。请确定数列 $h_1, h_2, \dots, h_n, \dots$ 的生成函数，其中 h_n 表示满足下面各种限制的 S 的 n 组合数：

a) (1分) 每个 e_i 出现的次数为3的倍数；

b) (1分) e_1 不出现， e_2 至多出现一次；

c) (1分) 每个 e_i 至少出现10次。

3 (1分) 确定满足下面条件，给 $1 \times n$ 的棋盘染色的方案数：用红色、蓝色、绿色和橙色着色，其中红色格子数为偶数，绿色格子数也为偶数。

4 (1分) 在一个圆上选出等间隔的 $2n$ 个点，设 h_n 表示将这些点连成 n 对使得所连接的线段不相交的方法数，试建立 h_n 的递推关系并求解 h_n 。

5 (2分) 给定一个 n 个节点的扇形（记为 W_n ，见下图），问 W_n 有多少棵不同的生成树？（图中顶点各不相同）

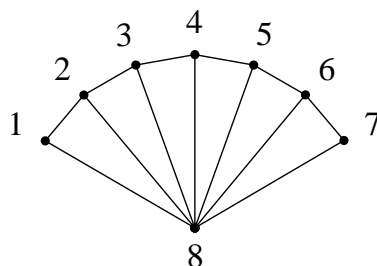


图 1: 8节点扇形 W_8

6 (2分) 已知 $G(z) = \frac{a}{1-\alpha z} + \frac{b}{1-\beta z}$ 。求 $G^n(z)$ 的部分分式分解。

7 计算如下数列：

- a) (1分) n 叶子二叉树种类数 T_n ，表示共有 T_n 种不同的包含 n 个叶子节点的二叉树；
- b) (1分) n 对括号匹配数 B_n ，表示共有 B_n 种不同括号序列，其中包含 n 对可以合法匹配的括号。

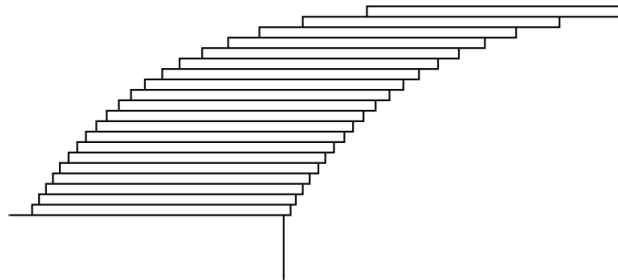
8 (2分) 有随机序列 $\{M_t\}_{t \geq 0}$ ，定义 $M_0 := 1$ 且对于任意正整数 t ，递归地定义 M_t 为满足

$$\Pr(M_t = M_{t-1} + 1) = p; \quad \Pr(M_t = M_{t-1} - 1) = 1 - p$$

的随机变量，其中参数 $p \in [0, 1]$ 。又定义随机变量 $T := \min\{t \in \mathbb{N} \mid M_t = 0\}$ ，试求 $E[T]$ 。

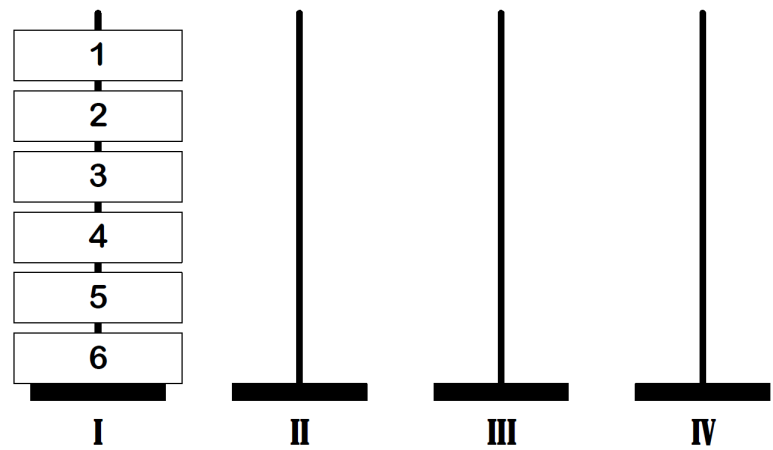
9 (2分) 用 1×1 和 1×2 的骨牌（ 1×2 的骨牌可以横放也可以竖放）不重叠地完全覆盖 $2 \times n$ 的长方形，一共有多少种不同的方案？

10 (1分) 你有 n 个木块，每块长度为1（不考虑厚度），质量相同。现在你要把它们放在一个桌子上，一个一个垒起来，如下图所示，每层只放一个木块。目标是在所有木块保持稳定的前提下使得最顶层木块最右端距离桌子最远。请求出这个最远距离，并给出方案。



选做题三（1）：四柱汉诺塔

考虑汉诺塔问题的一个新版本。如下图所示现在有从左到右编号为I、II、III和IV的4根杆子，初始状态I号杆套着 n 个圆盘，从上到下依次编号 $1, 2, \dots, n$ 。大小顺序为 $1号 < 2号 < \dots < n号$ 。其他三个圆盘均空。



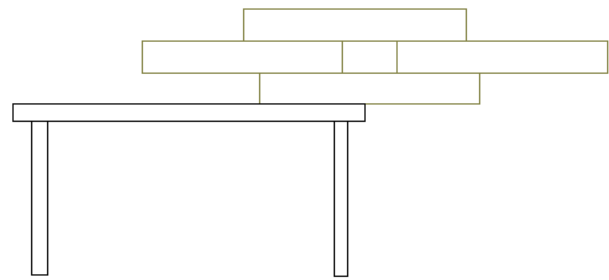
现在需要把所有圆盘通过若干步移动转移到IV号杆上，对于每步移动，有如下限制：

- a. 仅允许移动某个杆子最上面的盘子；
- b. 仅允许将小盘子放到大盘子上方，或者将某个盘子放入空柱子。

现在请给出一个（优于3柱版本的）可行方案，或者证明可行方案所需步数的下界。

选做题三（2）：堆木块问题拓展

第10题的扩展版本。你有 n 个木块，每块长度为1（不考虑厚度），质量相同。现在你要把它们放在一个桌子上，按照任意方式垒起来，如下图所示，每层可以放多个木块。目标是在所有木块保持稳定的前提下使得最远离桌子的木块最右端距离桌子最远。请求出这个最远距离，并给出方案。



选做题三（3）

考虑汉诺塔问题的一个变种。如下图所示，现在有从左到右编号为I、II、III和IV的4根柱子，初始状态I号柱子套着 n 个圆盘，从上到下编号依次为 $1, 2, \dots, n$ ，其他三个柱子均为空。现在需要把所有圆盘通过若干步移动转移到IV号柱子上。对于每步移动，有如下限制：

- a. 只允许I号柱的盘子转移到II号柱，II号柱的盘子转移到III号柱，III号柱的盘子转移到IV号柱；
- b. 只允许移动某个柱子最上面的盘子。

考虑如下两个问题：

1. 不同的转移方案共能得到多少种编号的排列（按照从上到下的顺序）？
2. 是否所有编号的排列都能通过上述方案得到？如果不能，至少需要几根柱子，能得到所有编号的排列？

