第七章 参数估计

§1 点估计
§2 估计量的评选标准
§3 区间估计
§4 正态总体均值与方差的区间估计
§5 0-1分布参数的区间估计
§6 单侧置信区间

§3 区间估计
区间估计的基本概念

点估计提供了对未知参数θ基于样本观察值$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$的估计值$\hat{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

优点：明确的数量概念

缺点：这是个不知道偏离误差有多远的近似值

区间估计就是根据样本给出未知参数的一个范围，并希望知道这个范围包含该参数的可信程度

置信区间的定义

对于总体X的分布函数$F(x;\theta)$含有一个未知参数，对于给定值$\alpha(0<\alpha<1)$，若由样本$(X_1,X_2,\dots,X_n)$确定的两个统计量

$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\dots,X_n)$和$\bar{\theta}=\bar{\theta}(X_1,X_2,\dots,X_n)$满足

$$P\left\{\underline{\theta}(X_1,X_2,\dots,X_n)<\theta<\bar{\theta}(X_1,X_2,\dots,X_n)\right\}=1-\alpha$$

则称

随机区间$(\underline{\theta},\bar{\theta})$是$\theta$的置信度为$1-\alpha$的置信区间

$\underline{\theta}$和$\bar{\theta}$分别为置信度为$1-\alpha$的双侧置信区间的置信下限和置信上限

$1-\alpha$为置信度

说明：

被估计的参数θ虽然是未知的，但它是一个常数，**没有随机性**，而区间$(\underline{\theta},\bar{\theta})$是随机的

定义

$$P\{\underline{\theta}(X_1,X_2,\dots,X_n)<\theta<\bar{\theta}(X_1,X_2,\dots,X_n)\}=1-\alpha$$

的本质是：

区间$(\underline{\theta},\bar{\theta})$以$1-\alpha$的概率包含参数$\theta$的真值，

而不是参数θ以$1-\alpha$的概率落入区间$(\underline{\theta},\bar{\theta})$

套圈

打靶

定义中的表达式

$$P\{\underline{\theta}(X_1,X_2,\ldots,X_n) < \theta < \bar{\theta}(X_1,X_2,\ldots,X_n)\} = 1-\alpha$$

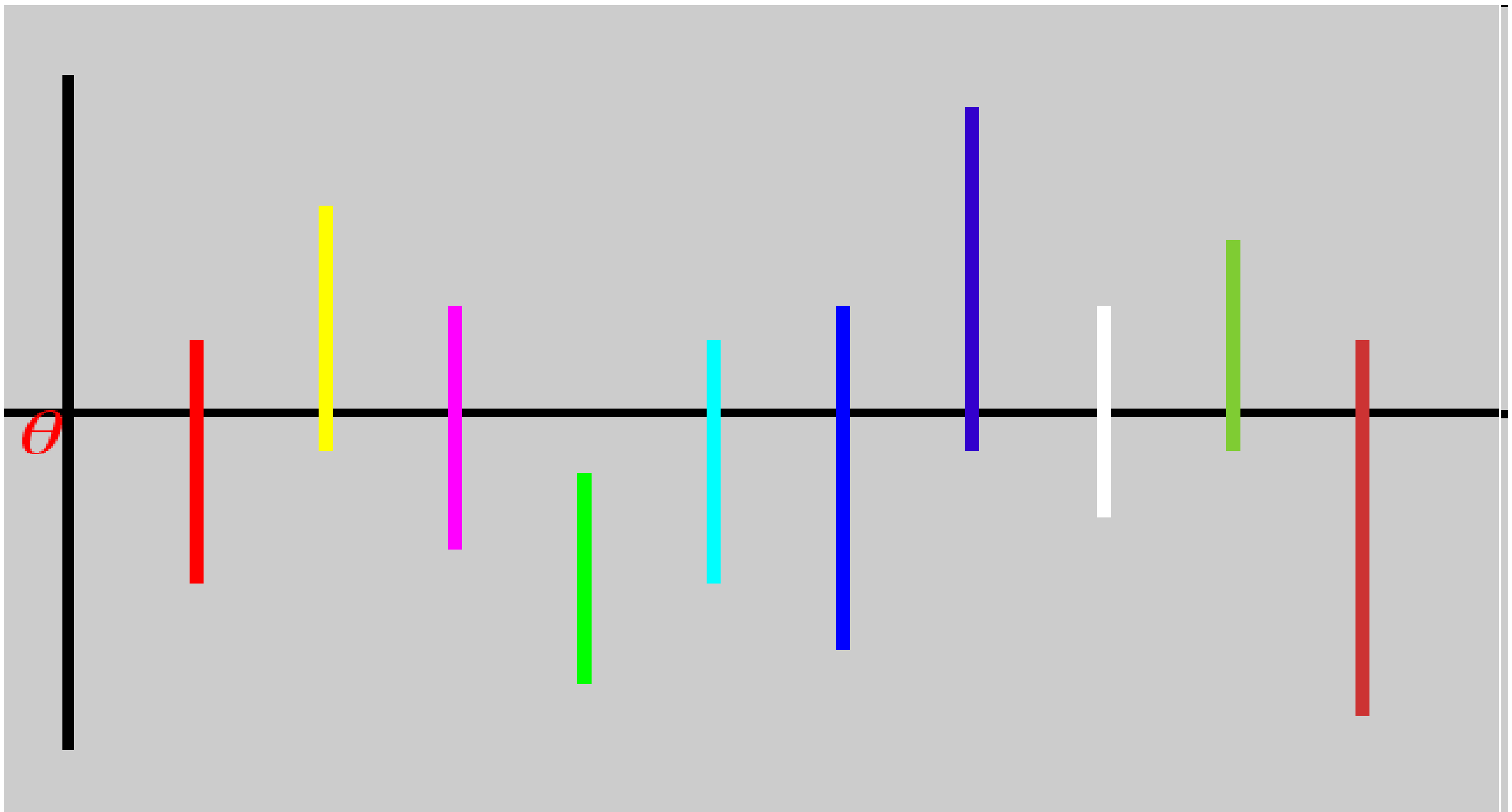
还可以理解为：

若反复抽样多次(各次的样本容量相等)，每个样本确定一个区间$(\underline{\theta},\bar{\theta})$，这样的区间可能包含或不包含$\theta$的真值

按伯努利大数定理，在众多这样的区间中，包含θ真值的约占$100(1-\alpha)\%$，不包含θ真值的约占$100\alpha\%$

通常，采用95%的置信度，有时也取99%或90%

例如，若$\alpha = 0.01$，反复抽样1000次，则得到的1000个区间中不包含θ真值的约为10个



可见，对参数θ作区间估计，就是要设法找出两个只依赖于样本的界限(构造统计量)

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1\,(X_1, X_2, \dots, X_n), \qquad \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

一旦有了样本，就以较高的概率把θ 估计在区间$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$内，这里有两个要求:

1. 要求θ以很大的可能被包含在区间$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$内，就是说概率$P\{\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2\}$要尽可能大，即要求估计尽量可靠
2. 估计的精度要尽可能的高。如要求区间长度$\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1$尽可能短(有效)，或能体现该要求的其它准则

可靠程度与精度是一对矛盾，一般是在保证可靠程度的条件下尽可能提高精度

求置信区间的一般步骤

1. 寻求一个样本$X_1, X_2, \dots, X_n$的函数：

$$Z = Z(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta)$$

其中仅包含待估计参数θ，并且Z的分布已知，且不依赖于任何未知参数(包括θ)

2. 对于给定的置信度$1-\alpha$，定出两个常数a, b，使得$P\{a < Z(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta) < b\} = 1-\alpha$

3. 若能从$a < Z(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta) < b$得到等价的不等式$\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}$，其中$\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$，$\bar{\theta} = \bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$都是统计量，那么，$(\underline{\theta}, \bar{\theta})$就是$\theta$的一个置信度为$1-\alpha$的置信区间

精度与样本容量的关系

样本容量固定——置信水平$1-\alpha$增大，置信区间长度相应增大；可信程度增大，区间估计精度相应下降

置信水平$1-\alpha$固定——样本容量增大，置信区间长度相应减小；可信程度不变，区间估计精度相应提高

例1. 设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，σ^2已知， μ未知，$X_1, X_2, \dots, X_n$是来自X的样本，求μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间。

解：因为X是μ的无偏估计，且

$$U=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

不依赖于任何未知参数。

由标准正态分布的上α分位点的定义知

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$$

即

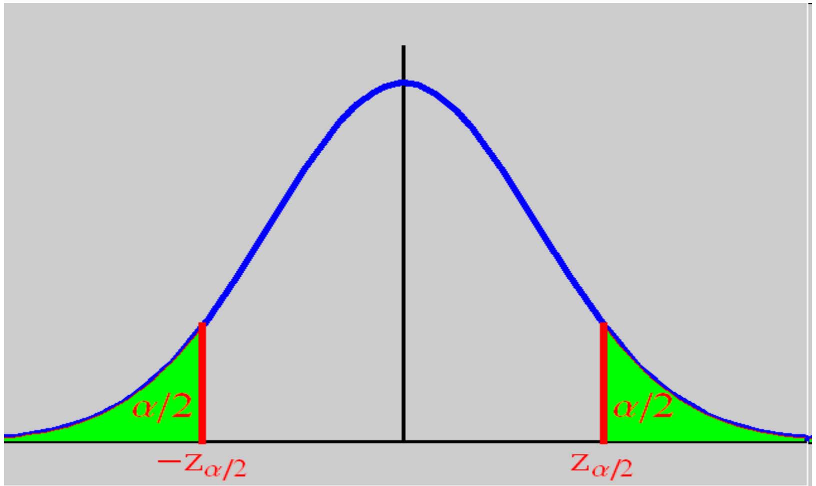
$$P\left\{\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}<\mu<\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha$$

于是得μ的**一个**置信水平为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}<\mu<\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

这样的置信区间常写成$\left(\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$

其置信区间的长度为$\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}$



关于：一个置信水平为$1-\alpha$的置信区间

注意：置信区间是不唯一的

如果在上例中取$n=16, \sigma=1$，$\alpha=0.05$，查表得：

$$z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96$$

得一个置信水平为0.95置信区间

$$\left(\bar{X}\pm\frac{1.96}{\sqrt{16}}\right)$$

由一个样本值算得样本均值的观察值$\bar{x}=5.20$，则置信区间为(5.20 ± 0.49)，即$(4.71, 5.69)$

在例中如果给定$\alpha = 0.05$,

又可以有

$$P\left\{-z_{0.04} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{0.01}\right\} = 0.95$$

则

$$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.01} < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.04}\right)$$

也是μ的置信水平为0.95的置信区间，其置信区间的长度为

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}(z_{0.01} + z_{0.04})$$

比较两个置信区间的长度

$$L_1 = \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.025} = 3.92 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$L_2 = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} (z_{0.01} + z_{0.04}) = 4.08 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

显然，$L_1 < L_2$，置信区间短表示估计的精度高

说明: 对于概率密度的图形是单峰且关于纵坐标轴对称的情况, 易证取a和b关于原点对称时,能使置信区间长度最小

例2. 设某工件的长度X服从正态分布 $N(\mu,16)$, 今抽9件测量其长度, 得数据如下(单位:mm): 142, 138, 150, 165, 156, 148, 132, 135, 160。试求参数μ的置信水平为95%的置信区间。

解：根据上例得μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

由$n=9,\sigma=4,\alpha=0.05,z_{0.025}=1.96,\bar{X}=147.333$知

μ的置信度为0.95的置信区间为(144.720, 149.946)

§4 正态总体均值与方差的区间估计

一、单个正态总体参数的区间估计

设给定置信水平为$1-\alpha$，并设$X_1, X_2, \ldots, X_n$为总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本，$\bar{X}, S^2$分别是样本均值和样本方差

1.均值μ的置信区间

情形1：σ^2为已知

由上节例1可知:

μ的一个置信水平为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

例3. 包糖机某日开工包了12包糖，称得质量(单位:克)分别为506,500,495,488,504,486,505, 513, 521, 520, 512, 485. 假设重量服从正态分布，且标准差为$\sigma = 10$, 试求糖包的平均质量μ的$1-\alpha$ 置信区间(分别取$\alpha = 0.10$和$\alpha = 0.05$)

解 , $n = 12, \sigma = 10$，计算得

$$\bar{x} = 502.92$$

(1)当$\alpha = 0.10$时，$1 - \alpha/2 = 0.95$, 查表得

$$\mathrm{z}_{\alpha/2} = z_{0.05} = 1.645$$

于是

$$\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} = 502.92 - \frac{10}{\sqrt{12}} \times 1.645 = 498.17$$

$$\bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} = 502.92 + \frac{10}{\sqrt{12}} \times 1.645 = 507.67$$

即μ 的置信度为90%的置信区间为

$$(498.17, 507.67)$$

(2) 当$\alpha = 0.05$时，$1-\alpha/2 = 0.975$, 查表得

$$z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$$

于是

$$\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} = 502.92 - \frac{10}{\sqrt{12}} \times 1.96 = 497.26$$

$$\bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} = 502.92 + \frac{10}{\sqrt{12}} \times 1.96 = 508.58$$

从此例可以看出，

当置信度$1-\alpha$较大时，置信区间也较大

当置信度$1-\alpha$较小时，置信区间也较小

情形2：σ^2为未知

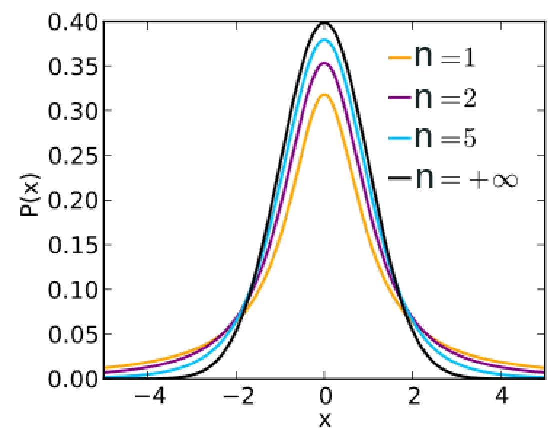
结论：μ的一个置信水平为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$$

导出过程:

由于区间$\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$中含有未知参数$\sigma$，不能直接使用此区间，考虑到$S^2$是$\sigma^2$的无偏估计，可用$S=\sqrt{S^2}$代替$\sigma$，又由第六章§3中定理三知

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$



于是，

$$P\left\{-t_{\alpha/2}(n-1) < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

即，

$$P\left\{\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \mu < \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right\}$$
$$= 1-\alpha$$

于是得μ 的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$$

例4. 有一大批糖果,现从中随机地取**16**袋, 称得重量**(**克**)**如下**:**

506， 508， 499， 503， 504， 510， 497 512

514， 505， 493， 496， 506， 502， 509 496

设袋装糖果的重量服从正态分布**,** 试求总体均值μ的置信度为 0.95 的置信区间。

解：$\alpha = 0.05, n - 1 = 15$,

查$t(n-1)$分布表可知：$t_{0.025}(15) = 2.1315$,

同时计算得到：$\bar{x} = 503.75, s = 6.2022$

得μ的置信度为 95%的置信区间

$$\left(503.75 \pm \frac{6.2022}{\sqrt{16}} \times 2.1315\right), 即(500.4, 507.1)$$

就是说估计袋装糖果重量的均值在500.4克与507.1克之间, 这个估计的可信程度为95%

若依此区间内任一值作为μ的近似值，其误差不大于

$$\frac{6.2022}{\sqrt{16}} \times 2.1315 \times 2 = 6.61(g)$$

这个误差的可信度为95%

例5.设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中μ, σ^2未知，设随机变量L是关于μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间的长度，求$E(L^2)$

解：当σ^2未知时，μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$$

置信区间长度

$$L = \frac{2S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

于是

$$L^2 = \frac{4S^2}{n}\left[t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right]^2$$

又因为

$$E(S^2)=\frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-nE(\bar{X}^2)\right\}=\sigma^2$$

于是

$$E(L^2)=E\left(\frac{4S^2}{n}\left[t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right]^2\right)=\frac{4}{n}\left[t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right]^2\sigma^2$$

2. 方差σ^2的置信区间

情形1：μ为已知

结论：方差$\boldsymbol{\sigma}^2$ 的置信度为$1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)},\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right)$$

导出过程：

由第六章§3中χ^2分布的推论知

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$$

于是,

$$P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n) < \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n)\right\} = 1-\alpha$$

即,

$$P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)} < \sigma^2 < \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right\} = 1-\alpha$$

于是得方差$\boldsymbol{\sigma}^2$的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right)$$

情形2：μ为未知

结论：方差$\boldsymbol{\sigma}^2$ 的置信度为$1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

导出过程：

因为S^2是σ^2的无偏估计，由第六章§3中定理二知

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

于是，

$$P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

即，

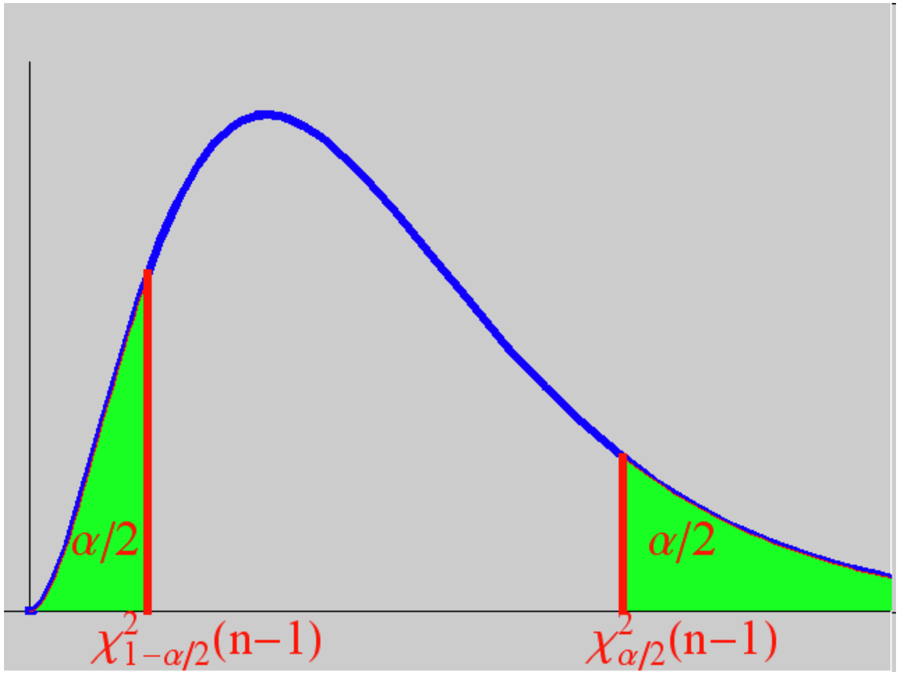
$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right\} = 1-\alpha$$

于是得方差$\boldsymbol{\sigma}^2$的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

进一步可得，标准差σ的一个置信度为$1-\alpha$的置信区间$\left(\dfrac{\sqrt{(n-1)}S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, \dfrac{\sqrt{(n-1)}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right)$

注意：通常，即使在密度函数不对称时，如χ^2分布和F分布，习惯上仍取对称的分位点来确定置信区间



例6. 从一大批糖果中随机取**16**袋, 重量(克)如下:

506 508 499 503 504 510 497 512

514 505 493 496 506 502 509 496

设袋装糖果的重量服从正态分布, 试求总体标准差σ的置信度为 0.95 的置信区间。

解：$\frac{\alpha}{2}=0.025, 1-\frac{\alpha}{2}=0.975, n-1=15$,

查$\chi^2(n-1)$分布表可知：

$$\chi^2_{0.025}(15)=27.488, \chi^2_{0.975}(15)=6.262$$

计算得到：$s=6.2022$

代入公式$\left(\frac{\sqrt{(n-1)}S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, \frac{\sqrt{(n-1)}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right)$

得到标准差的置信区间为(4.58, 9.60)

例7.包糖机某日开工包了12包糖，称得质量(单位:克)分别为506,500,495,488,504,486,505, 513, 521, 520, 512, 485. 假设重量服从正态分布，试求总体方差σ^2和标准差σ的置信度为0.95的置信区间。

解，$\frac{\alpha}{2}=0.025, 1-\frac{\alpha}{2}=0.975,\ n-1=11,$

查$\chi^2(n-1)$表得

$$\chi^2_{0.025}(11)=21.920, \chi^2_{0.975}(11)=3.816$$

计算得：$S^2=157.4.$

代入$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$，有方差$\sigma^2$的置信区间为(78.97, 453.64)

标准差σ的置信区间(8.87, 21.30)

单个正态总体参数的区间估计

待估参数		随机变量	随机变量的分布	双侧置信区间的上、下限
μ	$\boldsymbol{\sigma^2}$ 已知	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0,1)$	$\bar{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}$
	$\boldsymbol{\sigma^2}$ 未知	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$	$t(n-1)$	$\bar{X}\pm\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)$
$\boldsymbol{\sigma^2}$	$\boldsymbol{\mu}$ 已知	$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}$	$\chi^2(n)$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)},\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}$
	$\boldsymbol{\mu}$ 未知	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$	$\chi^2(n-1)$	$\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}$

二、两个正态总体$N(\mu_1,\sigma_1^2),N(\mu_2,\sigma_2^2)$的情况

前提:

设给定置信度为$1-\alpha$，并设$X_1,X_2,\ldots,X_{n_1}$为第一个总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$的样本， $Y_1,Y_2,\ldots,Y_{n_2}$为第二个总体$N(\mu_2,\sigma_2^2)$的样本，$\bar{X},\bar{Y}$分别是第一、二个总体的样本均值，S_1^2,S_2^2分别是第一、二个总体的样本方差

讨论两个整体总体均值差和方差比的估计问题.

1. 两个总体均值差$\mu_1-\mu_2$的置信区间

情形1：σ_1^2和σ_2^2均为已知

结论： $\mu_1-\mu_2$的一个置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

导出过程:

由 $\bar{X},\bar{Y}$ 的独立性及

$$\bar{X}\sim N\left(\mu_1,\frac{\sigma_1^2}{n_1}\right),\bar{Y}\sim N\left(\mu_2,\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

有

$$\bar{X}-\bar{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

或

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

于是得$\mu_1-\mu_2$的一个置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

情形2：$\boldsymbol{\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2}$，但$\boldsymbol{\sigma^2}$未知

结论： $\mu_1-\mu_2$的一个置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

其中

$$S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2},S_w=\sqrt{S_w^2}$$

导出过程(略)

例8. 为比较I, II两种型号步枪子弹的枪口速度，随机地取I型子弹10发, 得到枪口速度的平均值为 $\bar{x}_1 = 500(m/s)$， 标准差$s_1 = 1.10(m/s)$， 随机地取II型子弹20发, 得枪口速度平均值为 $\bar{x}_2 = 496(m/s)$， 标准差$s_2 = 1.20(m/s)$。

假设两总体都可认为近似地服从正态分布,且由生产过程可认为它们的方差相等, 求两总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信度为0.95的置信区间。

解 由题意, 两总体样本独立且方差相等(但未知),

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025, n_1 = 10, n_2 = 20, n_1 + n_2 - 2 = 28$$

查$t(n-1)$分布表可知：

$$t_{0.025}(28) = 2.0484$$

$$S_w^2=\frac{9\times1.10^2+19\times1.20^2}{28}，\ S_w=\sqrt{S_w^2}=1.1688$$

于是得$\mu_1-\mu_2$的一个置信度为0.95的置信区间

$$\left(\bar{x}_1-\bar{x}_2\pm S_w\times t_{0.025}(28)\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{20}}\right)=(4\pm0.93)$$

即所求置信区间为(3.07, 4.93)

情形3：$\boldsymbol{\sigma_1^2}$和$\boldsymbol{\sigma_2^2}$均未知，且$\boldsymbol{\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2}$，但$\boldsymbol{n_1 = n_2 = n}$

结论： $\mu_1 - \mu_2$的一个置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm \frac{t_{\alpha/2}(n-1)S_Z}{\sqrt{n}}\right)$$

其中

$$S_Z^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \bar{Z})^2, Z_i = X_i - Y_i$$

2. 两个总体方差比σ_1^2/σ_2^2的置信区间

仅讨论总体均值μ_1,μ_2为未知的情况

结论：$\boldsymbol{\sigma_1^2/\sigma_2^2}$的一个置信度为$1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)$$

推导过程如下:

由于

$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\sim\chi^2(n_1-1),\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\sim\chi^2(n_2-1)$$

由假设知相互独立，根据F分布的定义，知

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

即

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}=\frac{\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\Big/(n_1-1)}{\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\Big/(n_2-1)}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

$$P\left\{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)<\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}<F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\right\}$$
$$=1-\alpha$$

于是

$$P\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<\frac{S_1^2}{S_2^2F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right\}$$
$$=1-\alpha$$

故$\boldsymbol{\sigma_1^2/\sigma_2^2}$的一个置信度为$1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)$$

例9. 研究由机器 A 和机器 B 生产的钢管内径, 随机抽取机器 A 生产的管子 18 只, 测得样本方差为 $s_1^2 = 0.34(mm^2)$，抽取机器B生产的管子 13 只, 测得样本方差为$s_2^2 = 0.29(mm^2)$。设两样本相互独立, 且设由机器 A 和机器 B 生产的钢管内径分别服从正态分布$N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$, μ_i, σ_i^2均未知, 求方差比σ_1^2/σ_2^2的置信度为0.90的置信区间。

解：$n_1 = 18, n_2 = 13,\ \alpha = 0.10$

$$s_1^2 = 0.34,\quad s_2^2 = 0.29$$

于是：$F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) = F_{0.05}(17,12) = 2.59$

$$F_{1-\alpha/2}(17,12\ ) = \frac{1}{F_{0.05}(12,17)} = \frac{1}{2.38}$$

于是σ_1^2/σ_2^2的置信度为0.90的置信区间

$$\left(\frac{0.34}{0.29} \times \frac{1}{2.59}, \frac{0.34}{0.29} \times 2.38\right) = (0.45, 2.79)$$

两个正态总体未知参数的置信区间

待估参数		随机变量	随机变量的分布	双侧置信区间的上、下限
$\boldsymbol{\mu_1 - \mu_2}$	$\boldsymbol{\sigma_1^2, \sigma_2^2}$ 均已知	$\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$N(0,1)$	$\bar{X}-\bar{Y} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$
	$\boldsymbol{\sigma_1^2 = \sigma_2^2}$，但未知	$\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}$	$t_{\alpha/2}(m+n-2)$	$\bar{X}-\bar{Y} \pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}$

$$S_w^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

两个正态总体未知参数的置信区间

待估参数		随机变量	随机变量的分布	双侧置信区间的上、下限
$\boldsymbol{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}$	μ_1,μ_2 为未知	$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}$	$F(m-1,n-1)$	$\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}$, $\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}$

§5 (0-1)分布参数的区间估计

前提：

设有一容量n>50的大样本，它来自(0-1)分布的总体X，X的分布律为$f(x;p)=p^x(1-p)^{1-x},x=0,1,$
其中p为未知参数，则p的置信度为$1-\alpha$的置信区间是

$$\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

其中，$a=n+z_{\alpha/2}^2,b=-\left(2n\bar{X}+z_{\alpha/2}^2\right),c=n\bar{X}^2$

导出过程:

因为(0–1)分布的均值和方差分别为

$$\mu = p, \sigma^2 = p(1-p)$$

设$X_1, X_2, \dots, X_n$是一个样本，因为容量n较大，

由中心极限定理知

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{n\bar{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

近似地服从$N(0,1)$分布

$$P\left\{-z_{\alpha/2} < \frac{n\bar{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}} < z_{\alpha/2}\right\} \approx 1 - \alpha$$

不等式$-z_{\alpha/2} < \frac{n\bar{X}-np}{\sqrt{np(1-p)}} < z_{\alpha/2}$

等价于

$$\left(n + z_{\alpha/2}^2\right)p^2 - \left(2n\bar{X} + z_{\alpha/2}^2\right)p + n\bar{X}^2 < 0$$

令

$$p_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, p_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

其中

$$a = n + z_{\alpha/2}^2, b = -\left(2n\bar{X} + z_{\alpha/2}^2\right), c = n\bar{X}^2$$

则p的近似置信水平为$1 - \alpha$ 的置信区间是

$$(p_1, p_2)$$

例10. 设从一大批产品的100个样品中, 得一级品60个, 求这批产品的一级品率 p 的置信水平为0.95的置信区间

解 一级品率 p 是(0-1)分布的参数,

$$n = 100, \bar{x} = \frac{60}{100} = 0.6,$$

$$1 - \alpha = 0.95, \qquad z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$$

则 $a = n + z_{\alpha/2}^2 = 103.84$

$$b = -\left(2n\bar{X} + z_{\alpha/2}^2\right) = -\left(2n\bar{x} + z_{\alpha/2}^2\right), = -123.84$$

$$c = n\bar{X}^2 = n\bar{x}^2 = 36$$

于是$p_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0.5, p_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0.69$

率 p 的置信水平为0.95的置信区间(0.50,0.69)

§6 单侧置信区间

在以上各节的讨论中对于未知参数θ，我们给出两个统计量$\underline{\theta}, \bar{\theta}$，得到的双侧置信区间$(\underline{\theta}, \bar{\theta})$

在某些实际问题中, 例如,

对于设备、元件的寿命来说, 关心的是平均寿命的“下限”

考虑产品的废品率 p时, 关心参数 p的“上限”，

这些都是单侧的，于是有单侧置信区间的概念

单侧置信区间的定义

对于给定值α $(0 < \alpha < 1)$，若由样本$X_1, X_2, \dots, X_n$确定的统计量$\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$，

对于任意$\theta \in \Theta$满足

$$P\{\theta > \underline{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)\} \geq \ 1 - \alpha$$

则称随机区间$(\underline{\theta}, +\infty)$是$\theta$的置信度为$1 - \alpha$的单侧置信区间，$\underline{\theta}$称为$\theta$的置信水平为$1 - \alpha$的单侧置信区间的置信下限

单侧置信区间的定义

对于给定值$\alpha\ (0<\alpha<1)$，若由样本$X_1,X_2,\ldots,X_n$确定的统计量$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\ldots,X_n)$，

又如果统计量$\bar{\theta}=\bar{\theta}(X_1,X_2,\ldots,X_n)$，对于任意$\theta\in\Theta$满足

$$P\{\theta<\bar{\theta}\ (X_1,X_2,\ldots,X_n)\}\geq 1-\alpha$$

则称随机区间$(-\infty,\bar{\theta})$是θ的置信度为$1-\alpha$的单侧置信区间，$\bar{\theta}$称为θ的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信区间的置信上限

正态总体均值与方差的单侧置信区间

设$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1, X_2, \dots, X_n$是一个样本，由

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

有

$$P\left\{\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_\alpha(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

即

$$P\left\{\mu > \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

于是得μ的一个置信水平为$1-\alpha$的单侧置信区间

$$\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1),+\infty\right)$$

μ的置信水平为$1-\alpha$的置信下限

$$\underline{\mu}=\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)$$

又根据

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

有

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}>\chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right\}=1-\alpha$$

即

$$P\left\{\sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right\} = 1-\alpha$$

于是得σ^2的一个置信水平为$1-\alpha$的单侧置信区间

$$\left(0, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right)$$

σ^2的置信水平为$1-\alpha$的置信上限

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$$

例11. 设从一批灯泡中, 随机地取5只作寿命试验, 测得寿命(以小时计)为 1050, 1100, 1120, 1250, 1280, 设灯泡寿命服从正态分布, 求灯泡寿命平均值的置信水平为 0.95 的单侧置信下限。

解：$1-\alpha=0.95,\ n=5,\ \bar{x}=\ 1160,$

$$s^2=9950, t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(4)=2.1318$$

μ的置信水平为0.95的置信下限

$$\underline{\mu}=\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)=1065$$

例12.设总体X在$[0,\theta]$上服从均匀分布其中$\theta(>0)$，$X_1,X_2,\ldots,X_n$是一个样本，给定α，求θ的置信水平为$1-\alpha$的置信下限和置信上限

解：令$X_h=\max\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$，

对于给定的α，找到$0<\underline{\theta}<1$，使得

$$P\left\{\theta>\frac{X_h}{\underline{\theta}}\right\}=1-\alpha$$

即$1-\alpha=\int_0^{\underline{\theta}} nz^{n-1}dz=\underline{\theta}^n$

于是$\underline{\theta}=\sqrt[n]{1-\alpha}$,

所以，$P\left\{\theta>\frac{X_h}{\sqrt[n]{1-\alpha}}\right\}=1-\alpha$

θ的置信水平为$1-\alpha$ 的置信下限$\underline{\theta}=\frac{X_h}{\sqrt[n]{1-\alpha}}$

对于给定的α，找到$0 < \bar{\theta} < 1$，使得

$$P\left\{\theta < \frac{X_h}{\bar{\theta}}\right\} = 1 - \alpha$$

即$1 - \alpha = \int_{\bar{\theta}}^{1} nz^{n-1}dz = 1 - \bar{\theta}^n$

于是$\bar{\theta} = \sqrt[n]{\alpha}$,

所以,

$$P\left\{\theta < \frac{X_h}{\sqrt[n]{\alpha}}\right\} = 1 - \alpha$$

θ的置信水平为$1 - \alpha$ 的置信上限$\bar{\theta} = \frac{X_h}{\sqrt[n]{\alpha}}$

小结

参数估计

- 点估计
  - 矩估计
  - 极大似然估计量
- 区间估计
  - 置信区间和上下限 → 求置信区间的步骤
  - 正态总体均值方差的置信区间与上下限

第6章

三大抽样分布

- χ^2分布
- t 分布
- F 分布

四个关于样本和方差的定理

矩估计：

1. 求$\mu_1 = E[X]$ ($\mu_2 = E[X^2], \ldots$)
2. 设$A_1 = \mu_1$ ($A_2 = \mu_2, \ldots$)
3. 解上面的方程(组)，得$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \ldots, X_k)$，$\left(\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \ldots, X_k), \ldots\right)$

极大似然估计

选取得到观察值$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，构造

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$$

由

$$\frac{dL(\theta)}{d\theta} = 0$$

或

$$\frac{d}{d\theta} \ln L(\theta) = 0$$

获得对θ的估计值$\hat{\theta}$

求置信区间的一般步骤

1. 寻求一个样本$X_1, X_2, \dots, X_n$的函数：

$$Z = Z(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta)$$

其中仅包含待估计参数θ，并且Z的分布已知，且不依赖于任何未知参数(包括θ)

2. 对于给定的置信度$1-\alpha$，定出两个常数a,b，使得$P\{a < Z(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta) < b\} = 1-\alpha$

3. 若能从$a < Z(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta) < b$得到等价的不等式$\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}$，其中$\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$，$\bar{\theta} = \bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$都是统计量，那么，$(\underline{\theta}, \bar{\theta})$就是$\theta$的一个置信度为$1-\alpha$的置信区间

作业

概率论与数理统计

pp. 175-176, #16，#19，#22，#25