Homework4

2018.10.29

李昊宸

1.

能被 4 整除：2500 个　6：1666 个　7：1428 个　10：1000 个

同时被 4 和 6 整除：833 个　4 和 7：357 个　4 和 10：500 个

6 和 7：238 个　6 和 10：333 个　7 和 10：142 个

同时被 4 和 6 和 7 整除：119 个　4 和 6 和 10：166 个

4 和 7 和 10：71 个　6 和 7 和 10：47 个

同时被 4 和 6 和 7 和 10 整除：23 个

所以被整除有 4571 个

则不被整除的有 5429 个

2.

完全平方数：100 个

完全立方数：21 个

既是完全平方数又是完全立方数：1，64，729，4096 共 4 个

故不是的有 10000-121+4=9883 个

3.

当 n=3k 时，需有 3 的倍数个 1，3 的倍数个 2，那么有 $\sum_{k=0}\binom{n}{3k}=\frac{1}{3}(2^n+2\cos(\frac{n\pi}{3}))$ 个

当 n=3k-1 时，需有 3 的倍数加 1 个 2，那么有 $\sum_{k=0}\binom{n}{3k+1}=\frac{1}{3}(2^n+2\cos(\frac{(n-2)\pi}{3}))$ 个

当 n=3k-2 时，需有 3 的倍数加 2 个 2，那么有 $\sum_{k=0}\binom{n}{3k+2}=\frac{1}{3}(2^n+2\cos(\frac{(n+2)\pi}{3}))$ 个

4.首先，所有大于等于 0 的解集共有 $\binom{17}{3}$ 个

解中有 9：$\binom{4}{1}\binom{7}{2}$　解中有 10：$\binom{4}{1}\binom{6}{2}$

解中有 11：$\binom{4}{1}\binom{5}{2}$　解中有 12：$\binom{4}{1}\binom{4}{2}$

解中有 13：$\binom{4}{1}\binom{3}{2}$　解中有 14：$\binom{4}{1}\binom{2}{2}$

故有 680-224=456 个 4 元组。

5.

2 在自然位置：7!　4 在自然位置：7!　6 在自然位置：7!

8 在自然位置：7!

2，4 在自然位置：6!

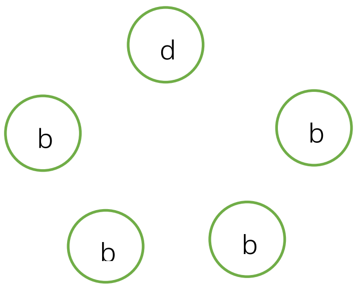
2，4，6 在自然位置：5!
2，4，6，8 在自然位置：4!
有偶数在自然位置的有 4*7! -6*6! +4*5! -4! =16296 个
所以没有偶数在自然位置的有 8! -16296=24024 个
6.

首先选择 k 个整数在其自然位置，有 $\binom{n}{k}$ 种

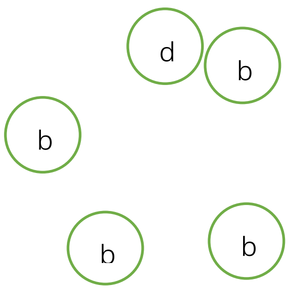
剩余 n-k 个元素错排， $D(n-k)=(n-k)![\frac{(-1)^2}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}]$

所以有 $\binom{n}{k}D(n-k)$

7.
考虑这样的圆桌，将 4 个 b 和一个 d 放入

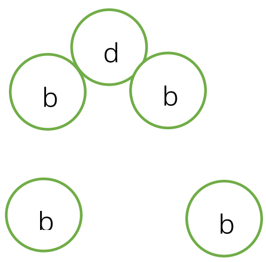


每个之间都坐一个人，有 $\binom{5}{2}$ 个



一个 db 相连，有 $6\binom{4}{3}$ 个

考虑到还可以是 bd 相连，还需乘以 2



bdb 相连，按照有没有两个 a 在两个 b 之间分类，有 $6+\binom{6}{2}$ 个

所以共有 10+48+6+15=79 个

8.
证明:
n 最多可以被拆为 n 个正整数，那么在使用个办法计算时，我们可以认为 n 始终被分为 n 份，其中可以等于 0。
于是 P(n)等于将 n 分为 n 个大于等于 0 的整数的分法数。
将这 n 个元素每个都加 1，等价转化为将 2n 分为 n 个正整数，即 P(2n，n)
9 .
证明:
P(n+1)+P（n-1）≥2P(n), n≥2
即证 P(n+1)-P(n) ≥P(n) -P(n-1)
P(n+1)=P(n+1,1)+…+P(n+1,n+1)
而 P(n+k,k)=P(n,1)+…+P(n,k),即所有将 n 分为小于等于 k 份的分法数等于将 n+k 分为 k 个正整数的分法
所以 P(n+1)=P(n,1)+[P(n-1,1)+P(n-1,2)]+…+[P(1,1)+..+P(1,n)]+1
P(n)=P(n-1,1)+[P(n-2,1)+P(n-2,2)]+…+[P(1,1)+..+P(1,n-1)]+1
于是 P(n+1)-P(n)=P(n,1)+P(n-1,2)+..+P(1,n)
P(n)-P(n-1)=P(n-1,1)+P(n-2,2)+..+P(1,n-1)
对应项相减,
显然有 P(n-k+1,k)-P(n-k,k) ≥0 (k<n)
于是原式成立。
10.
a)S₁(n,3)=

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\binom{n}{k}(k-1)!\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{n-k}{2}\right\rfloor}\binom{n-k}{j}(j-1)!(n-k-j-1)!}{A_3^3-A_2^2}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(k-1)!\sum\frac{(n-k)!}{j(n-k-j)}=\frac{1}{4}\sum\binom{n}{k}(k-1)!(n-k-1)!\sum_{j=1}^{n-k-1}\frac{1}{j}$$

$$=\frac{1}{2}(n-1)!\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-k-1}\frac{1}{kj}$$

b)$S_1(n,n-1)$

为 n 个元素的 n-1 个循环排列的个数，有 $\binom{n}{2}$ 个

c)$S_2(n,3)=$

$$\frac{1}{3!}\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\binom{3}{k}(3-k)^n$$

$$=\frac{1}{6}[3^n-3\times 2^n+3]$$

$$=\frac{1}{2}[3^{n-1}-2^n+1]$$

d)$S_2(n,n-1)$

为 n 个元素的 n-1 划分的个数，有 $\binom{n}{2}$ 个

11.

数学归纳法:

n=0 时， $x^0 = S_2(0,0)\, x^{\underline{0}} = 1$

设 n 时假设成立

$$x^{n+1} = x^n x = \sum_{k=0}^{n} S_2(n,k) x^{\underline{k}} x$$

$$= \sum_{k=0}^{n} S_2(n,k) x^{\underline{k}} [(x-n)+n]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} S_2(n,k-1) x^{\underline{k}} + \sum_{k=1}^{n} n S_2(n,k) x^{\underline{k}} + 0$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} S_2(n+1,k) x^{\underline{k}}$$