组合数学第九讲

授课时间: 2018年11月19日　授课教师: 孙晓明　记录人: 赵鑫浩　包浩然

1 分拆数（Partition Numbers）

定义 1 (分拆数). 把自然数n拆分成若干个正整数之和的方案数记为$P(n)$，称为n的分拆数。

定义 2 (m-分拆数). 把自然数n拆分成m个正整数之和的方案数记为$P(n,m)$,称为n的m-分拆数。

根据上述定义，当$m > n$时，$P(n,m) = 0$。且显然有，$P(n) = \sum_{m=1}^{n} P(n,m)$。

定义 3. 把自然数n拆分成不多于m个正整数之和的方案数记为$P(n, \leq m)$。等价地，在球盒模型下，$P(n, \leq m)$恰为把n个完全相同的球放入m个完全相同的盒子里的方案数。

定义 4 (Ferrers diagram). 设n的一个m-分拆为$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$,其中$n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_m \geq 1$。则此$m$-分拆的*Ferrers diagram*是一个左对齐点阵，该点阵有m行，且第i行有n_i个点（$1 \leq i \leq m$）。

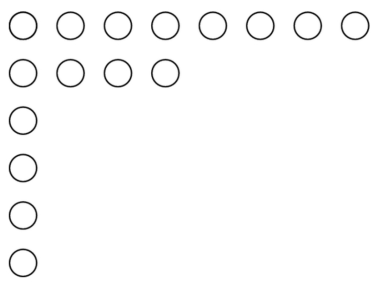

图 1: $16 = 8 + 4 + 1 + 1 + 1 + 1$的Ferrers diagram

定理 5. $P(n+m,m) = P(n, \leq m)$。

证明　考虑$P(n+m,m)$的一个分拆$n+m = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$，画出其Ferrers diagram。由于$n_i \geq 1$ $(1 \leq i \leq m)$，因此该图的第一列共有m个点。删掉该图的第一列，剩余的n个点组成一个新的Ferrers diagram，表示分拆$n = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \cdots (n_m - 1)$。由此，我们从$P(n+m,m)$的一个分拆得到了$P(n, \leq m)$的一个分拆，并且容易验证这一映射是单射。

反之，考虑$P(n, \leq m)$的一个分拆$n = n_1 + n_2 + \cdots n_m$，这里$n_1 \geq n_2 \geq \cdots n_m \geq 0$，在其Ferrers diagram的最左边新加入一列点，共m个。新生成的Ferrers diagram表示分拆$n + m = (n_1 + 1) + (n_2 + 1) + \cdots + (n_m + 1)$。由此，我们从$P(n, \leq m)$的一个分拆得到了$P(n+m,m)$的一个分拆，并且容易验证这一映射是单射。

综上所述，$P(n+m,m) = P(n, \leq m)$。 □

推论 6. $P(n+m,m) = P(n),\ n \leq m$。

证明　当$n \leq m$时，$P(n, \leq m) = P(n)$；因此，$P(n+m,m) = P(n, \leq m) = P(n)$。 □

定义 7. 集合$\{(a_1, a_2, \cdots, a_k) | n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k,\ m = a_1 \geq a_2 \geq \cdots a_k \geq 1, a_i \in \mathbb{N}, \forall\, 1 \leq k \leq n\}$的元素个数记为$Q(n,m)$，表示将正整数$n$拆分成最大值恰为$m$的若干个正整数之和的方案数。

定义 8. 集合$\{(a_1,a_2,\cdots,a_k)|n=a_1+a_2+\cdots+a_k,\ m\geq a_1\geq a_2\geq\cdots a_k\geq 1, a_i\in\mathbb{N},\forall\ 1\leq k\leq n\}$的元素个数记为$Q(n,\leq m)$，表示将正整数$n$拆分成不大于$m$的若干个正整数之和的方案数。

定理 9. $P(n,m)=Q(n,m)$，$P(n,\leq m)=Q(n,\leq m)$。

证明 考虑$P(n,m)$的一个分拆，画出其Ferrers diagram。该图共有m行，因此每一列的点数不超过m；且第一列恰有m个点。若对该图做类似于矩阵转置的操作，将第i行第j列的点放到第j行第i列上，则得到了一个新的Ferrers diagram。新图的每一行的点数不超过m，且第一行恰有m个点。因此新图对应于$Q(n,m)$的一个分拆。同理，对于$Q(n,m)$的一个分拆，将其Ferrers diagram转置，会得到$P(n,m)$的一个分拆。容易验证，上述关系是一一对应的，因此$P(n,m)=Q(n,m)$。最后，由于$P(n,\leq m)=\sum_{k=1}^{m}P(n,k)$，$Q(n,\leq m)=\sum_{k=1}^{m}Q(n,k)$，因此第二个等式也成立。 □

定义 10. $Odd(n)$表示将自然数n拆分成若干个正奇数之和的方案数。

定义 11. $Diff(n)$表示将自然数n拆分成若干个互不相同的正整数之和的方案数。

定理 12. $Odd(n)=Diff(n)$。

证明 [法一] Odd(n)的任意一个分拆可以表示成$n=\sum_i a_in_i$的形式，其中a_i为正奇数，且各不相同，n_i为该正奇数的个数。将n_i唯一地写作$n_i=\sum_j c_{ij}2^j$的形式，则原分拆可以表示成一个新的分拆：$n=\sum_i a_i\sum_j c_{ij}2^j=\sum_i\sum_j a_ic_{ij}2^j$。注意到被加项$a_ic_{ij}2^j$两两不同，因此这是Diff($n$)里的一个分拆。容易验证这是一个从Odd($n$)到Diff($n$)的单射。

对于Diff(n)，考虑其一个分拆$n=\sum_i n_i$，将n_i写作$n_i=c_i\times 2^{d_i}$的形式，其中c_i为正奇数，d_i为正整数，则分拆可以写作$n=\sum_i c_i\times 2^{d_i}$，将所有相同的$c_i$合并，则有$n=\sum_i c_i(2^{d_{i_1}}+2^{d_{i_2}}+\cdots)$。这一分拆可以看做是Odd($n$)的一个分拆，其中正奇数$c_i$的个数为$(2^{d_{i_1}}+2^{d_{i_2}}+\cdots)$。注意到，当$n_i$互不相同时，若$c_i=c_j$，则$d_i\neq d_j$。这意味着我们构造了一个Diff($n$)到Odd($n$)的一个单射。

综上所述，Odd(n) = Diff(n)。

[法二] 考虑Odd(n)的生成函数$O(x)$。由定理14，

$$\begin{aligned}
O(x) &= \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^3}\frac{1}{1-x^5}\cdots\\
&= \frac{1}{1-x}\frac{1-x^2}{1-x^2}\frac{1}{1-x^3}\frac{1-x^4}{1-x^4}\frac{1}{1-x^5}\frac{1-x^6}{1-x^6}\cdots\\
&= \frac{1}{1-x}\frac{(1-x)(1+x)}{1-x^2}\frac{1}{1-x^3}\frac{(1-x^2)(1+x^2)}{1-x^4}\frac{1}{1-x^5}\frac{(1-x^3)(1+x^3)}{1-x^6}\cdots\\
&= \prod_{j\geq 1}(1+x^j)\\
&= D(x)。
\end{aligned}$$

其中，由定理15，$D(x)$为Diff(n)的生成函数。因此，Odd(n) = Diff(n)。 □

1.1 分拆数的生成函数

定理 13. $P(n)$的生成函数为$P(x)$满足

$$P(x)=\sum_{n\geq 0}P(n)x^n=\prod_{j\geq 1}\frac{1}{1-x^j}。$$

证明 上式的右端为

$$(1+x+\cdots+x^{1n_1}+\cdots)(1+\cdots+x^{2n_2}+\cdots)(1+\cdots+x^{3n_3}+\cdots)\cdots$$

若x^n出现在这个乘积当中，则乘积的第一项贡献的因子为x^{1n_1}，第二项贡献的因子为x^{2n_2}，等等，且满足$1n_1+2n_2+3n_3+\cdots=n$。$(n_1,n_2,n_3,\cdots)$的一个取值恰好对应于n的一个分拆，因此每个拆分为x^n贡献的系数为1，则x^n前面的系数为$P(n)$。 □

定理 14. $Odd(n)$的生成函数$O(x)$满足

$$O(x)=\sum_{n\geq 0}Odd(n)x^n=\prod_{j\geq 1}\frac{1}{1-x^{2j-1}}。$$

证明 证明与定理13类似，故省略。 □

定理 15. $Diff(n)$的生成函数$D(x)$满足

$$D(x)=\sum_{n\geq 0}Diff(n)x^n=\prod_{j\geq 1}(1+x^j)。$$

证明 若x^n出现在上式右端的乘积当中，则$1+x^j$贡献的因子为x^{jn_j}，$n_j=0,1$，且满足$1n_1+2n_2+3n_3+\cdots=n$。$(n_1,n_2,n_3,\cdots)$的一个取值恰好对应于$\mathrm{Diff}(n)$的一个分拆，因此x^n前面的系数为$\mathrm{Diff}(n)$。 □

1.2 估计$P(n)$的阶

定理 16. 对足够大的n，$\exists\ c_1>0$，$P(n)\geq 2^{c_1\sqrt{n}}$。

证明 对于下界，我们需要找到足够多的分拆。首先，观察到$1+2+\cdots+\lfloor\sqrt{n}\rfloor=\frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor(\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1)}{2}<n$；且对足够大的$n$，$n-\frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor(\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1)}{2}\geq\frac{n}{2}-\frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{2}>\lfloor\sqrt{n}\rfloor$。因此，任取集合$S\subseteq\{1,2,...\lfloor\sqrt{n}\rfloor\}$，再加上集合$S$的元素之和与$n$的差值，就能得到$n$的一个分拆。由于$S$各不相同，且加上的差值严格大于$\lfloor\sqrt{n}\rfloor$，因此由不同的$S$得到的这些分拆也各不相同。当$n$足够大时，存在常数$c_1$，使得

$$P(n)\geq 2^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\geq 2^{c_1\sqrt{n}}。$$

□

定理 17. 对足够大的n，$\exists\ c_2>0$，$P(n)\leq 2^{c_2\sqrt{n}\ln n}$。

证明 首先，我们估计$P(n, \leq\sqrt{n})$,

$$
\begin{aligned}
P(n, \leq\sqrt{n}) &= \sum_{j=1}^{\sqrt{n}} P(n,j) \\
&= \sum_{j=1}^{\sqrt{n}} |\{(a_1,a_2,...,a_j)|n=\sum_{i=1}^{j} a_i, a_1 \geq \cdots \geq a_j \geq 1\}| \\
&\leq \sum_{j=1}^{\sqrt{n}} |\{(a_1,a_2,...,a_j)|n=\sum_{i=1}^{j} a_i\}| \\
&= \sum_{j=1}^{\sqrt{n}} \binom{n+j-1}{n} \\
&= \binom{n+\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1} \\
&\leq \left(\frac{e(n+\sqrt{n})}{\sqrt{n}-1}\right)^{\sqrt{n}-1} \\
&\leq 2^{c\sqrt{n}\ln n}。
\end{aligned}
$$

上述不等式中，最后一个等号使用了朱世杰恒等式，倒数第二个不等号是由于不等式$\binom{n}{k} \leq (\frac{en}{k})^k$，最后一个不等号对某个常数$c$和足够大的$n$成立。

n的任意一个分拆可以分成两部分：大于$\sqrt{n}$的数和小等于$\sqrt{n}$的数。设前者可能的取值方案为A，后者可能的取值方案为B。根据乘法原理，$P(n) \leq |A||B|$。A中的任意一种方案最多选取$\sqrt{n}$个数，且这些数字之和不超过n，因此可以通过额外添加一个数的方式对应于n的一个分拆，因此有$|A| \leq P(n, \leq\sqrt{n})$。$B$中的任意一种方案选取的每个元素都不大于$\sqrt{n}$，且这些元素之和不超过$n$，因此可以通过额外添加一个数的方式对应于$n$的一个分拆，因此有$|B| \leq Q(n, \leq\sqrt{n})$。综上所述，我们有

$$P(n) \leq P(n,\sqrt{n})Q(n,\sqrt{n}) \leq 2^{c_2\sqrt{n}\ln n},$$

其中$c_2 = 2c$。上式对足够大的n成立。 □