



计算机科学导论

张家琳

中国科学院计算技术研究所

zhangjialin@ict.ac.cn

2018-4-20



思考题

- 输入：111...11000...00，判断1和0的个数是否相等？
- 上节课讲的图灵机需要花费大约 $2n^2$ 的时间，是否能够做的更快？



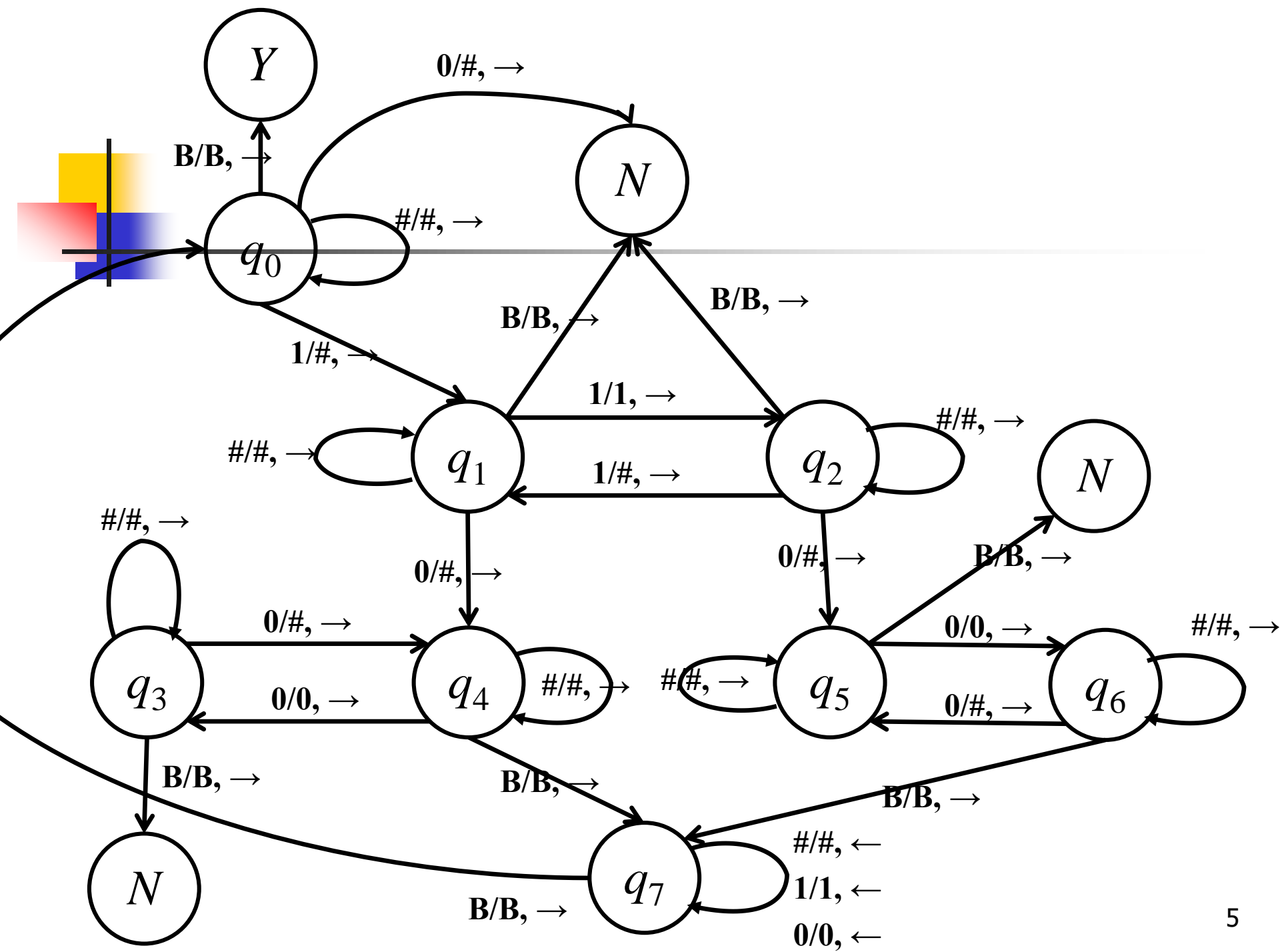
思考题

- 方案一：每次匹配最中间的1和0
 - $1+2+3+4+\dots+(2n-1) \approx 2n^2$
- 方案二：增加纸带字符数目或状态数
 - $111 \rightarrow \$\#\%$
 - q_1, q_2, q_3
 - $\approx cn^2$



思考题

- 能不能用更少的转移次数？
- 每次不是只把一个1改成#，而是把“一半”的1改成#！
- $\approx cn \log n$





逻辑思维主要内容

- 逻辑学基础
 - 布尔逻辑、真值表
 - 合取范式、析取范式
 - 谓词逻辑
 - 公理系统
- 图灵机模型



真值表

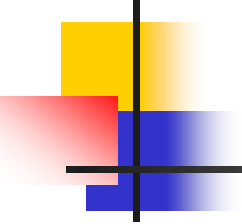
x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \oplus y$
0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0



布尔逻辑

■ 性质:

- $x \vee 0 = x, x \vee 1 = 1, x \wedge 0 = 0, x \wedge 1 = x$
- $x \vee \neg x = 1, x \wedge \neg x = 0$
- $x \wedge y = y \wedge x, x \vee y = y \vee x, x \oplus y = y \oplus x$
(交换律)
- $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
(结合律)
- $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
- $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$
(分配律)
- $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$
- more ??



■ 性质:

- $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$

- $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$

- $x \rightarrow y = \neg x \vee y$

- $x \rightarrow y = \neg y \rightarrow \neg x$

- $x \oplus y = (\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y)$

- $x \oplus y = (x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)$

$$x \vee y = \neg(\neg x \wedge \neg y)$$

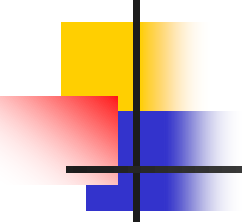
(**De Morgan律**)

(**逆否命题**)



范式

- 合取范式(conjunctive normal form, CNF)
 - $f(x_1, \dots, x_n) = Q_1 \wedge Q_2 \wedge Q_3 \dots \wedge Q_m$
 - 其中: $Q_i = l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_n$, $l_j = x_j$ 或 $\neg x_j$
- 析取范式(disjunctive normal form, DNF)
 - $f(x_1, \dots, x_n) = Q_1 \vee Q_2 \vee Q_3 \dots \vee Q_m$
 - 其中: $Q_i = l_1 \wedge l_2 \wedge \dots \wedge l_n$, $l_j = x_j$ 或 $\neg x_j$

- 
- 例: $x \rightarrow (y \rightarrow z) = ?$

- 合取范式: $(\neg x \vee \neg y \vee z)$

- 析取范式: $(\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z)$

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1



思考题

- 根据De Morgan律和合取范式（或析取范式），使用 \neg 和 \wedge （或 \vee ）可以表示出所有的布尔函数（？）。
- 问题：能否只用 \wedge, \vee 表示出所有的布尔函数？
 - 不能！
 - 单调性： $f(x) \leq f(x')$ if $x \leq x'$



思考题

- 问题：能否只用 \oplus ？（允许使用0,1）
- 问题：如果只用 \rightarrow 呢？（允许使用0,1）



谓词逻辑

- 全称量词 \forall 和存在量词 \exists
 - 每天都有24个小时。
 - 存在一个素数不是奇数。
 - “都不是” 和 “不都是”
 - $\forall x (\neg P(x)), \quad \exists x (\neg P(x))$
 - $\exists x (\neg P(x)) = \neg(\forall x (P(x)))$



谓词逻辑

■ 量词的范围

- 任何一个自然数，要么它本身为偶数，要么加1后为偶数。
- $\forall n [\text{Even}(n) \vee \text{Even}(n + 1)]$ ，其中断言 $\text{Even}(n)$ 表示 n 是偶数
- $\forall n \in \mathbb{N} [\text{Even}(n) \vee \text{Even}(n + 1)]$

■ 量词的顺序

- $\forall x, \exists y (y = x + 1)$
- $\exists y, \forall x (y = x + 1)$

- 布尔逻辑和谓词逻辑的更多性质
 - 后续课程会学
- 以上已经学习的
 - 逻辑学的基本知识点
 - 不是逻辑思维！
- 什么是逻辑思维？



逻辑思维

- 存在无穷多个素数。
- 如何用数学语言描述？



Euclid of Alexandria
Elements

$$\forall n, \exists m, [(m > n) \wedge (\text{Prime}(m))]$$

$$\forall n, \exists m, \forall p, q [(m > n) \wedge (p, q > 1 \rightarrow pq \neq m)]$$



怎么证明？

- 存在无穷多个素数。

$$\forall n, \exists m, [(m > n) \wedge (\text{Prime}(m))]$$

- 方法一：

- 任意给定一个正整数 n ，我都可以找到一个比 n 大的素数，

- 方法二：欧几里得的证明方法

- 假如只有有限个素数，, 得出矛盾

$$\neg (\exists n, \forall m, [(m > n) \rightarrow \neg(\text{Prime}(m))])$$



逻辑思维

- 存在无穷多个素数。
- 假如只有有限个素数，.....，得出矛盾
$$\forall n, \exists m, [(m > n) \wedge (\text{Prime}(m))]$$
$$\neg (\exists n, \forall m, [(m > n) \rightarrow \neg(\text{Prime}(m))])$$
- 能自己想明白
- 能和别人说明白



- 对 $n > 2$, 丢潘图方程 $x^n + y^n = z^n$ 不存在非平凡解。

$$\forall a, b, c, n [(abc \neq 0) \wedge (n > 2) \rightarrow a^n + b^n \neq c^n]$$



课后思考

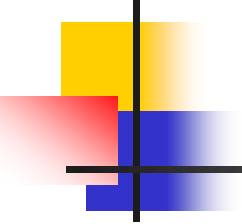
- 存在无穷多对孪生素数。
- 对任何一个正整数 n ，如果是奇数则乘3加1，如果是偶数则除2，重复此过程，最终将得到1。





$3n + 1$ 猜想

- $6 \rightarrow 3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$
- $15 \rightarrow 46 \rightarrow 23 \rightarrow 70 \rightarrow 35 \rightarrow 106 \rightarrow 53 \rightarrow 170 \rightarrow 85 \rightarrow 256 \rightarrow 128 \rightarrow 64 \rightarrow 32 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$
- Solve it!!

- 
- 四色定理：任何平面图都可以被四着色，使得任何两个相邻的顶点不同色。

\forall 平面图 $G = (V, E), \exists c: V \rightarrow \{1, 2, 3, 4\} \quad \forall (u, v) \in E, [c(u) \neq c(v)]$

- 可满足性问题(SAT)：给定CNF公式 φ ，是否存在一种赋值，使得这个CNF为真

$(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_4 \vee \neg x_6) \wedge (x_2 \vee x_4 \vee \neg x_8) \wedge \dots$

$\exists A: \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \rightarrow \{0, 1\}, [\varphi(x_1, \dots, x_n) = 1]$



练习：皮埃诺公理之一

- 每个自然数有后继数，且这个后继数也是自然数



课后思考

- 连续函数的定义
 - 仅考虑一元实函数: $f : R \rightarrow R$
- 答案请见微积分课本



课后思考

- 连续函数的介值性
 - f 是 $[0,1]$ 上的连续函数，若 $f(0)=A$ ， $f(1)=B$ ，且 $A \neq B$ 。则对 A 、 B 之间的任意实数 C ，在开区间 $(0,1)$ 上至少有一点 c ，使 $f(c)=C$
 - 直观理解
 - 如何严格证明？
- 积分的直观概念 VS 积分的定义



逻辑思维

- 能自己想明白
- 能和别人说明白



总结

- 逻辑学基础

- 命题逻辑
- 合取范式、析取范式
- 谓词逻辑

- 逻辑思维

- 思考题

- 能否只用 \oplus （允许使用0,1）表示所有布尔函数？如果只用 \rightarrow （允许使用0,1）呢？
- 猜帽子

思考题

- 问题： n 名同学围成一圈，每个人随机的分配一顶红色或者蓝色的帽子，要求所有人同时猜出自己帽子的颜色。请设计一种策略，使得同时猜对的概率最高。





谢谢！