组合数学第七讲

授课时间: 2018年10月29日　授课教师: 孙晓明　　　　记录人: 张诗杨

1　选做题：二维与三维的随机游走问题

问题1. 考虑二维的随机游走$\{P_t\}_{t\geq 0}$。初始时$P_0=(0,0)$，每次在上下左右四个方向上等概率选择一个方向移动长度1，即递归地定义二维随机向量P_t满足：

$$\begin{aligned}&\Pr(P_t=P_{t-1}+(0,1))=\Pr(P_t=P_{t-1}+(0,-1))=\\&\Pr(P_t=P_{t-1}+(-1,0))=\Pr(P_t=P_{t-1}+(1,0))=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

又定义$r_t:=\Pr(P_t=(0,0)\wedge\bigwedge_{k=1}^{t-1}P_k\neq(0,0))$，表示游走点在$t$时刻首次回到$(0,0)$的概率。请问：游走点是否一定会经过回到原点$(0,0)$，即$\sum_{t=1}^{\infty}r_t=1$是否满足？如果在三维的网格上呢？

解. 先考虑二维的情形。首先，要回到原点需要走偶数步，不妨设为$2n$步，其中n为整数。故对于任何一条在$2n$步后回到原点的路径P，我们有$\Pr(P)=(\frac{1}{4})^{2n}$。

现在假设P中有k步为向左移动，则必有k步向右移动，以及向上移动和向下移动各$n-k$步。满足这样条件的路径P共有$\binom{2n}{k,k,n-k,n-k}=\frac{(2n)!}{(k!)^2((n-k)!)^2}$条。

则$2n$步后在原点的概率为(用A_{2n}表示这一事件)：

$$\begin{aligned}\Pr(A_{2n})&=(\frac{1}{4})^{2n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{(k!)^2((n-k)!)^2}\\&=(\frac{1}{4})^{2n}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{n!}{k!(n-k)!}\\&=(\frac{1}{4})^{2n}\binom{2n}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\\&=(\frac{1}{4})^{2n}\binom{2n}{n}^2=((\frac{1}{4})^n\binom{2n}{n})^2\end{aligned}$$

注意这个事件并不是$2n$步后**首次**回到原点的概率。

现在设p表示游走开始后最终回到原点的概率（即$p=\sum_{t=1}^{\infty}r_t$），N表示游走过程中回到原点次数的数学期望。则我们有：

$$N=\sum_{k=1}^{\infty}kp^{k-1}(1-p)=\frac{1}{1-p}.$$

因此，为了证明$p=1$，我们只需证明$N=\infty$。反之若N是一个收敛的值，则$p<1$。

定义一个0/1随机变量I_{2k}，表示随机游走$2k$步后在原点处的指标函数，即

$$I_{2k}=\begin{cases}1 & ,\text{如果}2k\text{步后在原点处。}\\0 & ,\text{否则。}\end{cases}$$

则有$E[I_{2k}]=\Pr(I_{2k}=1)=\Pr(A_{2k})=((\frac{1}{4})^k\binom{2k}{k})^2$。故$E[N]=E[\sum_{k=1}^{\infty}I_{2k}]=\sum_{k=1}^{\infty}E[I_{2k}]=\sum_{k=1}^{\infty}((\frac{1}{4})^k\binom{2k}{k})^2$。

最后，由斯特林公式，我们有

$$\begin{aligned}(\frac{1}{4})^k\binom{2k}{k} &= (\frac{1}{4})^k\frac{(2k)!}{k!k!}\\ &\sim (\frac{1}{4})^k\frac{\sqrt{4\pi k}(\frac{2k}{e})^{2k}}{2\pi k(\frac{k}{e})^{2k}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi k}}\end{aligned}$$

因此，$\sum_{k=1}^{\infty}E[I_{2k}]\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k}=+\infty$。

故二维情形下以概率1回到原点。

三维的情形：用类似的方法分析。对于任何一条在$2n$步后回到原点的路径P，我们有$\Pr(P)=(\frac{1}{6})^{2n}$。现在假设$P$中有$k$步为向左移动，$j$步向上移动，这样的路径共有$\binom{2n}{k,k,j,j,n-k-j,n-k-j}=\frac{(2n)!}{(k!)^2(j!)^2((n-k-j)!)^2}$条。

则$2n$步后在原点的概率为(用B_{2n}表示这一事件)：

$$\begin{aligned}\Pr(B_{2n}) &= (\frac{1}{6})^{2n}\sum_{k+j\le n}\frac{(2n)!}{(k!)^2(j!)^2((n-k-j)!)^2}\\ &= (\frac{1}{6})^{2n}\binom{2n}{n}\sum_{k+j\le n}\frac{(n!)^2}{(k!j!(n-k-j)!)^2}\\ &= (\frac{1}{2})^{2n}\binom{2n}{n}\sum_{k+j\le n}(\frac{1}{3^n})^2(\frac{n!}{k!j!(n-k-j)!})^2\\ &\le (\frac{1}{2})^{2n}\binom{2n}{n}\binom{n}{\frac{n}{3},\frac{n}{3},\frac{n}{3}}\sum_{k+j\le n}(\frac{1}{3^n})^2\frac{n!}{k!j!(n-k-j)!} \qquad (1)\\ &= (\frac{1}{2})^{2n}\binom{2n}{n}\binom{n}{\frac{n}{3},\frac{n}{3},\frac{n}{3}}\frac{1}{3^n} \qquad (2)\\ &= (\frac{1}{2})^{2n}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{n!}{((\frac{n}{3})!)^3}\frac{1}{3^n}\\ &\sim \frac{1}{2^{2n}}\frac{2\sqrt{\pi n}(\frac{2n}{e})^{2n}}{2\pi n(\frac{n}{e})^{2n}}\frac{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}{((\frac{n}{3})!)^3}\frac{1}{3^n}\\ &= \frac{O(1)}{n^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

由此易得游走过程中回到原点次数的数学期望是一个收敛的值。因此三维情形下并不以概率1回到原点。

注：(1)处是因为对任意$k,j\ge 0$，$k+j\le n$，我们有$\frac{n!}{k!j!(n-k-j)!}\le\binom{n}{\frac{n}{3},\frac{n}{3},\frac{n}{3}}$；(2)处是因为恒等式$3^n=\sum_{k+j\le n}\binom{n}{k,j,n-k-j}$。

$\square$

2 容斥公式（Inclusive-Exclusive Formula）

我们考虑如下一个问题：给定全集I上的n个子集A_1，A_2，...，A_n，求$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n|$。

事实2.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

现在我们将上述结论一般化：

定理 3. 对于一般的n，我们有

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - ... + (-1)^{n+1} |A_1 \cap ... \cap A_n|.$$

证明. 考虑$\forall x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n$对等式左右两端的贡献。显然其对等式左端贡献为1。对等式右端，不妨设它恰属于A_1，A_2，...，A_n中的k个，则其在$\sum_i |A_i|$中出现$\binom{k}{1}$次，在$\sum_{i<j} |A_i \cap A_j|$中出现$\binom{k}{2}$次，......，所以$x$对等式右端的贡献为$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - ...... + (-1)^{n+1}\binom{k}{k} = \binom{k}{0} = 1$，与左边相等，得证。

□

推论4.

$$\left|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n}\right| = |I| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n|$$

$$= |I| - \sum_i |A_i| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| - ... + (-1)^n |A_1 \cap ... \cap A_n|.$$

例5. 设函数$\pi(n)$表示在$[1, n]$之中所有质数的个数。求$\pi(100)$。

解. 若一个100以内的数为合数，那么它一定有一个小于10的质因子。设集合A_i $(i = 2, 3, 5, 7)$表示100以内所有i的倍数组成的集合，则

$$\begin{aligned}\pi(100) &= \left|\overline{A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7}\right| + 4 - 1 \\ &= 100 - \lfloor\frac{100}{2}\rfloor - \lfloor\frac{100}{3}\rfloor - \lfloor\frac{100}{5}\rfloor - \lfloor\frac{100}{7}\rfloor + \lfloor\frac{100}{2\times 3}\rfloor + \lfloor\frac{100}{2\times 5}\rfloor + \lfloor\frac{100}{2\times 7}\rfloor + ... + \lfloor\frac{100}{2\times 3\times 5\times 7}\rfloor \\ &= 22.\end{aligned}$$

□

例6. 求欧拉函数$\varphi(n)$, 即n以内所有与n互质的数的个数。

解. 设n的质因子分解为$n = p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}$。令$B_i$是1到$n$之中能整除$p_i$的所有数组成的集合。则

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= \left|\overline{B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_k}\right| \\ &= n - \sum_i \frac{n}{p_i} + \sum_{i<j} \frac{n}{p_i p_j} - ... + (-1)^k \frac{n}{p_1 p_2 ... p_k} \\ &= n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2})...(1 - \frac{1}{p_k}).\end{aligned}$$

□

例7. 错位排列问题（编号1到n的n封信装入编号1到n的n个对应的信封，结果没有一封信装对的方案个数）。

解. 设A_i表示第i封信装对的所有方案的集合，则所求方案为$\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n}$。由容斥原理，我们有

$$\begin{aligned}\left|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n}\right| &= n! - (n-1)!\binom{n}{1} + (n-2)\binom{n}{2} - (n-3)!\binom{n}{3} + ... + (-1)^n \times 1 \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(n-k)!(-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}(-1)^k \\ &= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(-1)^k \\ &\sim n! e^{-1}.\end{aligned}$$

□

例8. 考虑如下游戏：现有编号为1到n的参与者和编号为号1到n的信封，将写有所有参与者编号的n张纸条随机地装入信封中，且每个信封中恰有一张纸条。每名参与者可以从n个信封中挑选$\frac{n}{2}$个检查（可以在看到前一封结果后再决定接下来看哪一封），如果其中某个信封中的纸条写有这个参与者的编号，称这个参与者通过了测试，如果所有人均通过测试，那么参与者一方获胜。在游戏过程中，参与者之间不能通信，但在游戏开始前，他们可以商定策略。请设计一种策略使得参与者获胜的概率尽可能大。

解. 考虑如下策略：对每个参赛者，其打开自己编号对应的盒子，若盒子内不是自己的编号，则打开这个编号对应的盒子，如此重复下去，直到找到自己编号或者打开$\frac{n}{2}$个盒子为止。

对于盒子内编号所对应的全排列a_1，a_2，... a_n，考虑其对应的图论模型：n个点n条有向边，构造方法为点i向点a_i连一条有向边$1 \le i \le n$。如果这个图中所有的圈长度均不超过$\frac{n}{2}$，则参赛者总会成功。否则一定存在一条长度至少为$\frac{n}{2}+1$的圈。注意这样的圈至多只有1个。

设调和级数$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$。参赛者失败的概率

$$\begin{aligned}
\Pr &= \sum_{k>\frac{n}{2}}^{n} \binom{n}{k}(k-1)!(n-k)!/n! \\
&= \sum_{k>\frac{n}{2}}^{n} \frac{1}{k} \\
&= H_n - H_{\frac{n}{2}} \\
&\sim \ln n - \ln \frac{n}{2} \\
&= \ln 2.
\end{aligned}$$

□