组合数学作业五

作业请将电子版于 *12* 月 *17* 号前提交至课程网站。选做题请提交至老师和助教的电子邮箱。
老师及助教邮箱：*sunxiaoming@ict.ac.cn*，*sunyuan2016@ict.ac.cn*，*zhangzhijie@ict.ac.cn*。

1(*2* 分) 快速排序的期望时间复杂度有如下递推：

$$T(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(T(k) + T(n-k-1) + O(n))$$

求证 $T(n) = O(n \log n)$。

2(*2* 分) 证明：$\forall a, b \in \mathbb{N}, \exists p, q \in \mathbb{Z}, ap + bq = \gcd(a, b)$。

3(*2* 分) 证明：$\forall a > 1, m, n \in \mathbb{N}, \gcd(a^m - 1, a^n - 1) = a^{\gcd(m,n)} - 1$。

4(*2* 分) 已知 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Fibonacci 数列，证明：任给 $m, n \in \mathbb{N}$，$\gcd(F_m, F_n) = F_{\gcd(m,n)}$。

5(*2* 分) 证明：对于素数 $p > 2$，$\binom{2p}{p} \equiv 2 \pmod{p}$。

6(*1* 分) 对于素数 p 定义 $h_p(n)$ 为 $n!$ 中素数因子 p 的个数，求证 $h_p(2n) \geq 2h_p(n)$。

7(*2* 分) 证明：任给 $m, n \in \mathbb{N}$，都有 $m!n!(m+n)! | (2m)!(2n)!$。

8 计算下列式子，其中 $(\frac{a}{p})$ 表示 Legendre 符号，即如果 a 是 p 的二次剩余，则 $(\frac{a}{p}) = 1$，如果 a 是 p 的二次非剩余，则 $(\frac{a}{p}) = -1$：

a) (*1* 分) $(\frac{20}{67})$；

b) (*1* 分) $(\frac{14}{73})$。

9(*2* 分) $p = 6k + 5 (k \in \mathbb{N})$ 是素数，计算 $(\frac{-3}{p})$。

10(*3* 分) 将 $1 \sim 2n$ 填入 $2 \times n$ 的杨氏图表（即要求图表中每行每列均单调递增），有多少种不同的方案？

选做题

给定一张图 $G = (V, E)$，顶点的子集 $S \subseteq V$ 被称为图 G 的独立集，若任意 $u, v \in S$，$(u, v) \notin E$；即，独立集的任意两个顶点之间不存在一条边。$|S|$ 记做独立集的大小。请设计一个算法，找到图 G 中最大的独立集，并分析算法的时间复杂度。