组合数学作业一

题目*1-11*请将电子版于*9*月*17*号之前提交到*SEP*，**选做题**提交电子版至助教邮箱，并抄送给孙老师。
老师及助教邮箱：*sunxiaoming@ict.ac.cn, zhangzhijie@ict.ac.cn, sunyuan2016@ict.ac.cn*

1. (*1*分) 证明$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{i\geq 0}\binom{\frac{1}{2}}{i}x^i = \sum_{i\geq 0}\frac{(\frac{1}{2})^{\underline{i}}}{i!}x^i$，其中$0<|x|<1$。

2. 计算下列和式：

a. (*1*分) $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}\cdot\binom{n}{i}$;

b. (*3*分) $\sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k}$, $\sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k+1}$, $\sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k+2}$;

c. (*1*分) $\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}$;

d. (*2*分) $\sum_{i=1}^{n}i^3$.

3. (*1*分) 证明对任意k, x^k可以表示为$\{x^{\underline{k}}, x^{\underline{k-1}}, ..., x\}$的线性组合。

4. (*1*分) 比较二项式系数序列的大小：$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, ..., \binom{n}{n}$，其中$n$为正整数。

5. (*2*分) 证明：$(\frac{n}{k})^k \leq \binom{n}{k} \leq (\frac{en}{k})^k$，其中$k$为正整数且$k\leq n$。

6. (*1*分) 4名男士和8名女士围着一张圆桌就座，如果每两名男士之间恰好有两名女士，一共有多少种就座方法？

7. (*2*分) 15个人围着一张圆桌就座，如果B拒绝坐在A旁边，一种有多少种就座方法？如果B只拒绝坐在A的右边，一共有多少种就座方法？

8. (*1*分) 在一个聚会上有15名男士和20名女士，请问有多少种方式形成10对男女共舞？

9. (*1*分) 桥牌是4个人之间的一种游戏，使用的是普通的52张一副牌，开始时每个人手里有13张牌，请问桥牌开局有多少种不同的状态（不计桥牌实际是在两组对家之间进行的事实）？

10. (*1*分) 确定下面的多重集合的10排列的数目（10排列是指包含10个元素的排列）。

$$S = \{3\cdot a, 4\cdot b, 5\cdot c\} = \{a,a,a,b,b,b,b,c,c,c,c,c\}$$

11. (*2*分) 考虑大小为$3n+1$的多重集合$\{n\cdot a, n\cdot b, 1, 2, 3, \ldots, n+1\}$，确定它的$n$组合数。

注： 对于多重集合S,其n组合是S中的n个对象的无序选择。例如对于多重集合$S=\{2\cdot a, b, 3\cdot c\}$,其*3*组合是 $\{2\cdot a, b\}, \{2\cdot a, c\}, \{a,b,c\}, \{a, 2\cdot c\}, \{b, 2\cdot c\}, \{3\cdot c\}$。

选做题

一个富翁有两个儿子，富翁希望能公平的将其所有资产分给两个儿子，问存不存在一种分配使得其所有亲戚都认为分配是公平的？若存在，请给出。

问题的数学描述：已知$f_1, f_2, \ldots, f_n$为n个概率密度函数，即对于所有的$1 \leq i \leq n$满足

$$\int_0^1 f_i(x)\mathrm{d}x = 1$$

且

$$\forall x \in [0,1] : f_i(x) \geq 0.$$

a. 当$n = 2$时，是否存在一个对$[0,1]$区间的划分(A, B)，使得$A \cup B = [0,1], A \cap B = \emptyset$，且对于所有的$1 \leq i \leq n$满足

$$\int_A f_i(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

b. 当$n > 2$时，上述结论是否依然成立？