Homework5

李昊宸

1.

T(1)=0

T(2)=O(2log2)~2

数学归纳法，设在n时有T(n)=O(nlogn)



于是原式得证

2.

欲证ap+bq=gcd(a,b)

设a=Ac b=Bc c=gcd(a,b), 即证Acp+Bcp=c

即Ap+Bq=1,A、B互素

两边mod A，即证 存在q，使得Bq=1(mod A)

取

若存在Bq1=Bq2 （mod A），即B（q1-q2）mod A=0

因B与A互素，所以q1-q2=kA，与矛盾！

所以B1,B2,…,B(A-1)构成A-1个不同的数，且等于{1，2，…,A-1}

于是存在q，使Bq=1（mod A）

原式得证

3.

记gcd（m,n）=c

m=cd n=ce, d,e互素

于是欲证明原式，即证gcd(adc-1,aec-1)=ac-1

记为gcd(xd-1,xe-1)=x-1

Xd-1=(x-1)(xd-1+…+1), Xe-1=(x-1)(xe-1+…+1)

所以(x-1)| Xd-1 , (x-1)| Xe-1

下证gcd((xd-1+…+1), (xe-1+…+1))=1:

设(xd-1+…+1)=kc 其中k，c，d都为正整数且k大于等于2

(xe-1+…+1)=kd，xd-e(xe-1+…+1)=kdxd-e不妨令d>e

则=k(xe-2+…+1)- (xd-2+…+1)

代回，得到xd-e+…+1=k(dxd-e-c)，被k整除

辗转，得xd mod e+…+1 被k整除

因d，e互素，所以左边是一个连续且不为常数的量，与始终被k整除矛盾！

于是假设错误，k=1，从而gcd(adc-1,aec-1)=ac-1

原式得证

4.



  
记m=ca, n=cb, c=gcd(m,n)

则



由第三题结论知，

于是

其中k<m+1,且k是最大的使其为正整数的整数值

经计算，k=c，从而

5.

两边取p的模，

6.

hp(n)表示n！中素因子p的个数

易知，每一个pi贡献i个

所以



显然由高斯取整函数的性质，我们有

于是

7.

记，且已知为正整数

我们用数学归纳法证明f（m，n）为整数，从而证明分母能整除分子

假设结论对所有的n-1都成立

n时



所以n时假设也成立，原式得证

8.

1）

2）

9.



P mod 4 =(6k)mod 4+1=

于是



所以

10.

由杨表的钩子公式知，是所有可能的种类数

不难发现，这一数字恰好符合卡特兰数的公式