Homework 6

李昊宸

2018.12.24

1.

证明：记

充分性：

若p不是素数，那么A中有p的因子，于是有

记，于是，其中k满足d-kc>0, d-(k+1)c<0

所以a|b

因

必要性：

A中元素在模p的意义下构成乘法群，每一个元素a都存在逆元a*-1*，满足aa-1=1（mod p）

由于两个互为逆的元素相乘等于1，下面我们寻找逆等于自身的元素



于是

2．

p>2时，欧拉判别法：

,,,

因，于是

P=2时只有两种情况：,此时也满足等式。

综上，等式得证

3.

证明：

假设命题错误，即不存在这样的两个球，使每个都满足新盒子中的球的个数比旧盒子中的更少

考虑m=n+1的场合

由抽屉原理，必有两个球放在同一个盒子内，于是这两个球在原盒子中的个数大于等于2

放入新盒子中，每个盒子内都只有一个球，于是这两个球满足命题的内容，这与假设不存在矛盾！于是在m=n+1时结论成立

假设m=k时命题正确，m=k+1时，相当于向k 的情况中加入一个球，加入这个球后，至少有两个球在原盒子中的个数增加1，放入新盒子中，若这两个球仍在同一个盒子，那么可将这两个球看作同一个球，采用m=k时的命题可得；若这两个球不在同一个盒子，那么可将这个新球与原来不与它在同一个盒子里的球现在在同一个盒子里的球组队，使用m=k时的命题依然可得。

4.



P为6k-1型时，由上周作业知，

P为6k+1时，

所以

综上，

5.

证明8k+5型无穷：

假设8k+5型素数有穷，为p1,…，pn

令。N为8k+5型素数

有，而仅对4k+1型素数成立，故q为8k+1或8k+5型素数

设N的素因子只有8k+1型，那么，而由N的定义式，矛盾！

所以N有8k+5型因子，这与假设矛盾，故8k+5型素数无穷。

证明8k+1型素数无穷：

假设8k+1型素数有穷，为p1,…，pn

令。N为8k+1型素数

类似对8k+5的证明，q只能为8k+1型或8k+5型。记，有

定理：对于，则

若q为8k+5型，则，即，矛盾！

所以8k+5不是素因子，故素因子只有8k+1，这又与假设矛盾！故8k+1型素数无穷。

6.

假设12k+7型素数有穷，为p1,…，pn

令。N为12k+7型素数

有，而仅对12k+1或12k+7型素数成立，故q为12k+1或12k+7型素数

设N的素因子只有12k+1型，那么，而由N的定义式，矛盾！

所以N有12k+7型因子，这与假设矛盾，故12k+7型素数无穷。

7.

，P为所有小于m的素数的集合

则

因为，故

8.



对B做归纳：

当B为空集时，

当B为单元集时，

设B等于n元集时成立

现向B中加入第n+1个元素bn+1构成B‘

通过调整不妨设bn+1是B’中最大的元素

那么amax+bn+1是{A+B}中的新元素，

于是

原式得证