Homework 7

李昊宸

2018.12.29

1.

：

设，构建关于A的陪集。假设，那么就有.于是对于任意的 由于A选取的任意性，这意味着b-a=0（mod p）于是与B为二元组矛盾！

2.

52个整数，取出后两位做51个盒子

{00}，{01，99}，{02，98}，…，{50}

那么必有两个数落在同一个盒子里面

若这两个数尾数相同，则相减即被100整除

若尾数不同，则相加被100整除

3.

反证法：

如果假设错误，那么对于任意两个人，同时认识或不认识的人数至多有个

设除了A,B外，恰好认识A,B中一人的有k个人，则 

设C恰好认识A,B中一人，这样的A,B对有C（n，2）个，记这样的（C,A,B）对有S个，那么 

对于C而言，设其余n-1个人中h个认识C，那么对于单个C有 

所以对于所有的C，有,矛盾！

于是假设正确。

4. D

E F

A C

B

不妨设DEF已经构成红色三角形

若定理错误，则ABC不能为红色或黑色

不妨设AC,AB为黑，BC为红

考虑到A和EDF的关系，若不出现红三角，则

AE,AF,AD中必有两个以上的黑，设AF为黑

那么BF和CF必须为红，否则ACF或ABF是黑三角

但是此时BCF是红三角。

D 再考虑第二种情况，AC和AB为红色

CD,CE,CF至少有两个为黑，不妨设CD,CE 为黑

E F 那么BE.BD必须为红色，但此时DEB为红三角。

综上，定理正确。

A C

B

5.

1）.R（3，4）

设有九个点v1，…，v9

若对所有的点，d（v）=3，那么边数E=3·9/2=13.5，不可能！

所以存在维数不是3的点

命题等价于证明图中若没有三个点的完全图（红色的三角形），则必有四个点的独立集（黑色的K4）

假设途中没有三个点的红色三角形

1. d（vk）<3

则至少六个点与vk之间的边为黑色（不相邻）

由R(3,3)=6知，必有三个点之间的连线全为黑色（因假设没有红色三角形），于是这四个点构成独立集

1. d(vk)>3

则至少有四个点a.b.c.d与vk相邻（红色边）但是因为没有红色三角，所以A,B,C,D之间的连线全都是黑色，即四点独立集

于是定理得证，也即

2）.反例如图

3).R(3,3,3)

17个点中，选出一个点，有16条边，所以其中至少有6条边同色

B 如果六个点中有一条边为红色，那么就有红色三角形

C 如果没有红色边，那么必有一个蓝色三角形或者黑色三角形

A

D

E 所以17个点是能满足的

F

G

6.

固定一个点作为圆上的基准点，1，2，3，4，5，6作为序号

A,B,C,D,E,F,分别表示相邻两个角之间的读数

有A+B+C+D+E+F=360°

若每个都大于60°，则等式不成立！

所以存在等于或小于60°的角，则这两个点之间距离小于1.

7.

有一个颜色至少有6个点，不妨设为红色  
实质上，定理应解释为对数轴上的点二染色，任意连续11个点有上述结论，于是不妨令1染为红色  
记ABCDE为前一个红色减后一个红色的差值  
有A＋B＋..＋E=10  
不能有两个相邻的相等，也不能有大于3的值  
若有两个3，则剩下的是1 1 2  
     因为1+2=3 ，所以1和2不能相邻.所以只有1 3 2 3 1。但是     1 2 5 7 10 11中有蓝色的3 6 9  
若有一个3  有1 2 2 2   只有  2 3 2 1 2即1 3 6 8 9 11.  
但是1 6 11是等差数列。  
若没有3，则所有都是2，显然  
综上定理得证

8.

该定理即阿基米德定理

当a为整数时，显然当pa=q时等式恒成立

当a不为整数，我们取a，2a，…,(n-1)a，再把[0,1）区间分成n份，每份长1/n

看这n-1个数，若有1个落在[0,1/n）或[(n-2)/n,(n-1)/n)中，原式成立

若都不落在这两个区间，则由抽屉原理，必有两个落在同一区间，设为ia，ja，

那么|（i-j）a|<1/n,于是命题成立。