MAT13-sammendrag

Christian Braathen

12. november 2017

Innhold

1

Viktig om eksamen, notasjon, og lignende

1.1 Eksamen

1.1.1 Viktige temaer, jf oppsummeringsforelesning

Hovedoppgaver i kurset – minst 2 av disse 3 kommer:

- Standardproblem hvor vi har ikke-lineært problem med $\leq$ og K–T. **I 1. forelesning sa han at det kommer på eksamen**
  - Tilleggsspørsmål: skyggepriser og innhylling.
- Standardproblem med ikke-negativitetskrav. **I 1. forelesning sa han at det kommer på eksamen**
  - Kuhn-Tucker
  - Lagrange
  - Varianter
    * Lagrange-problem (kun likheter)
    * Blandet problem ($\leq, =$): ikke så viktig for eksamen siden man kan redusere mye.
    * Føringsbetingelsen

- LP (simpleksmetoden)
  - Tilleggsspørsmål: grafisk, LP*, følsomhetsanalyse, komplementær slakk, sterk/svak dualitet, $y^* = (B^{-1})^T C_B$

Spørsmål som kan komme:

- Konveksitet
- Nettverk
  1. Formuler nettverksproblem
  2. Løs:
     (a) med inspeksjon; eller
     (b) ved å redusere antall variabler (se ItsLearning)
       - til 1 variabel (lineær funksjon på intervall)
       - til 2 variabler (løses grafisk), fx transportproblem
- Tre måter å løse LP på – minst ev av de 3 kommer garantert på eksamen:
  1. Simpleks
  2. Grafisk
  3. varianter:
     (a) $LP \to LP^*$
     (b) $LP*$ løses grafisk
     (c) $y^* \to x^*$ ved hjelp av komplementær slakk (finnes i notater om komplementær slakk på ItsLearning) (bruker dualen til å løse primalen)
- Gradient

1.1.2 Kommentar på oppsummeringen

«Eksamensoppgave på åpent intervall har ikke vært på eksamen før», men det kan være høy sannsynlighet for at det kommer nå. Side 3 på oppsummeringsnotatene mine er enormt viktige.

2

Nyttige småtriks og annet viktig

- $p \cdot ln\left(\frac{p}{q}\right) = -p \cdot ln\left(\frac{q}{p}\right)$ fordi $p\ln(\frac{p}{q} = p(\ln p - \ln q) = -p(\ln q - \ln p) = -p\ln(\frac{q}{p})$
- Husk å vise alt av rekkereduksjoner (i hvert fall én gang, men kanskje alltid med mindre det blir altfor mye).
- $\frac{\partial}{\partial x}[a^x] = a^x \cdot ln(a)$
- $g(x,y) = a^x b^y \Leftrightarrow g(x,y) = exp[\ln(a^x b^y)] \Leftrightarrow g(x,y) = exp[x\ln a + y\ln b]$, hvilket er en sammensatt funksjon av en voksende, konveks funksjon og av en lineær funksjon. {txty}
- "Vis at $f(tx,ty) = tf(x,y)\forall t > 0$". Med $f(x,y) = [x^r + y^r]^{\frac{1}{r}}$, har vi $f(tx,ty) = [(tx)^r + (ty)^r]^{\frac{1}{r}} = [t^r(x^r + y^r)]^{\frac{1}{r}} = t^{\frac{r}{r}}(x^r + y^r)^{\frac{1}{r}} = t(x^r + y^r)^{\frac{1}{r}} = tf(x,y)$ Siden $f(tx,ty) = tf(x,y)\forall t > 0$, vil $f(x,y)$ vokser lineært langs enhver stråle ut fra origo. Derfor kan den ikke være strengt konkav eller konveks for noen verdi av r.
- Hvis hvordan man regner invers i hvert fall én gang.
- Når man løser ligningssystemer – for eksempel i ikke-lineær programmering med likheter, så kan man prøve å legge de deriverte sammen slik at man kan substituere ut en del av uttrykket. For eksempel var det i *H15 #2* at $x + y + 2z = 0$, så da kunne man legge ligninger sammen slik at vi fikk nettopp $x + y + 2z$ i uttrykket og deretter kunne nulle dem ut. En tilsvarende oppgave har man i *H08 # 1*. Med andre ord: **har vi 0 i en restriksjon, prøv å finne en kombinasjon ved å addere de andre restriksjonene slik at vi kan sette dem lik 0.**
- ***Ekstremverdisetningen*** sier at hvis $f : S \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig over en *lukket*, *begrenset* mengde S i $\mathbb{R}^n$, da eksisterer det maksimums- og minimumspunkter for f i S.
- $(x^r + y^r)^2 \cdot x^{-2r} = (x^r + y^r)^2 \cdot (x^{-r})^2 = \left((x^r + y^r) \cdot x^{-r}\right)^2 = \left(1 + \frac{y^r}{x^r}\right)^2$

- Når vi skal bevise konvekse og konkave funksjoner, start med hva jeg har og hva jeg skal komme frem til. For eksempel:
  - Hva jeg har:
    $g\Big(\lambda(x_1,y_1)+[1-\lambda](x_2,y_2)\Big) \geq \lambda g(x_1,y_1)+[1-\lambda]g(x_2,y_2)$
  - Hva jeg skal komme frem til:
    $h\Big(\lambda(x_1,y_1)+[1-\lambda](x_2,y_2)\Big) \geq \lambda h(x_1,y_1)+[1-\lambda]g(x_2,y_2)$, der $h(x,y)=\varphi\Big(g(x,y)\Big)$
  - Det er lett å se likheten mellom disse to, og da kan det være lettere for meg å utlede svaret.
- Skriv hvert ikke-negativitetskrav på hver sin linje for å unngå tabbefeil her senere.
- Oppgaven om sannsynlighetsvektorer: dette var et nullsumsspill som studerte forventet utbytte.Man ble blant annet bedt om å vise at p^* og q^* er sannsynlighetsvektorer. Nøkkelen her er å bruke egenskapene til sannsynlighet: at $\forall i = 1,\ldots,n. \quad p_i \geq 0$ og $\sum_{i=1}^{n} = 1$. I tillegg, bruk primalen og dualen aktivt.
- På eksamen er det typisk å vise at innhyllingsteoremet holder.
- Sjeldent blandede problemer på eksamen.
- En funksjon er homogen av grad k hvis $f(\alpha u) = \alpha^k f(u)$.

3

Gradientvektorer

- $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right.$
- $\nabla f(a)$ peker – fra a – hvor $f(x)$ vokser raskest.
- Den deriverte av f langs en vektor a er gitt ved $\nabla f \cdot a$, men den retningsderiverte er gitt ved $\nabla f \cdot \frac{a}{||a||}$
- retningsderivert $f'_u(a) = \nabla f(a) \cdot u$ hvis $||\nabla u|| = 1$.
- gradienten står ortogonalt på tangentlinja og på tangentlinja til nivåkurven.

C^k betyr at $f(x)$ kan deriveres opp til k ganger.

$a = (a_1, ..., a_n)$ er et stasjonært punkt hvis $\nabla f(a) = \vec{0}$

Bruksområder for gradienter.

1. Stasjonære punkter: $\nabla f = \vec{0}$
2. Kjerneregelen: $\frac{d}{dt} f\big(x(t), y(t)\big) = \nabla f\big(x(t), y(t)\big) \cdot \big(x'(t), y'(t)\big)$
3. Beste lineære approksimasjon: $f(x,y) \approx f(a,b) + \nabla f(a,b) \cdot (x-a, y-b)$
4. Tangentplan: $z = f(a,b) + \nabla f(a,b) \cdot (x-a, y-b)$
5. Lagranges metode: $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$, hvilket er utledet fra $L = f(x,y) - \lambda g(x,y)$

Finne retningsderivert (økningen i f):

1. Finn ∇f
2. Skriv ned hva punktet er (her: P), og i hvilken retning (her: fra P mot Q) vi skal finne den retningsderiverte.

3. Finn enhetsvektoren $\vec{u} = \frac{\vec{P}-\vec{Q}}{||\vec{P}-\vec{Q}||}$ som peker i den retningen.
4. Finn den retningsderiverte i P og i retning fra P mot Q ved $D_{\vec{u}}f(\vec{P}) = \nabla f(\vec{P}) \cdot \vec{u}$

Finne tangentplan i et punkt $\vec{P}$ til nivåflaten gjennom punktet: $\nabla f(\vec{P}) \cdot (\vec{x} - \vec{P}) = 0$

3.0.1 Eksempel

$f(x,y) = 3x^2 + y^2$. Finn retningsderivert i punktet $a = (1,1)$ langs retningen $u = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Vi finner at $\nabla f(x,y) = (6x, 2y)$. Dermed blir $f'_u(a) = \nabla f(a) \cdot u$ lik $(6,2) \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, som gir oss $f'_u(a) = 4\sqrt{2}$.

4

Ikkelineær optimering og førsteordensbetingelser

I første forelesning skrev jeg at dette kommer på eksamen.

4.1 Noen definisjoner

- *K–T* går ut på å skrive $\nabla f = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i$. Men ved lineær avhengighet i ∇g'ene, får vi enten ingen løsning eller ∞ mange.
- ***Komplementær slakk***: ***minst*** en ulikhet i hver linje. Kan altså ha to likheter. Obs på at om vi har en $=$-restriksjon i LP-problemet, så har vi ikke fortegnskrav.
- ***Føringsbetingelsen*** er tilfredsstilt i punktet hvis ∇g til de *aktive* bibetingelsene er lineært uavhengige. Svikter den, vil ikke skyggeprisen være entydig bestemt. Merk at føringsbetingelsen svikter hvis $\nabla g = \vec{0}$ fordi da holder ikke $\nabla f = \lambda \nabla g$. Regn punktvis nedover for 1 aktiv bibetingelse, 2 aktive, osv. Ved 1 aktiv bibetingelse vil den være lineært avhengig hvis $\nabla g = \vec{0}$. Spørres det om for hvilke $c \geq 0$ finnes det løsningskandidater fra føringsbetingelsen.?", så spør de om i hvilke punkter føringsbetingelsen brytes.
- Lineært uavhengige hvis $det(A) \neq 0$ og lineært avhengige hvis $det(A) = 0$. Denne er fin å bruke når vi har like mange aktive som dimensjoner.
- ***Verdifunksjonen*** V er den maksimale verdien objektfunksjonen $f(x)$ kan ta. Vi får knekkpunkter i verdifunksjonen der føringsbetingelsen svikter. Vanlig på eksamen.

1. Denne kan for eksempel fungere som en langsiktig kostnadsfunksjon hvis vi studerer kortsiktige, intertemporale kostnadsfunksjoner.

- ***Innhyllingsteoremet*** sier at $\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial L}{\partial r} \forall r$. Dette gjelder uansett om r representerer en koeffisient eller en betingelse. Obs på at man *må* sjekke for kontinuitet ved å derivere på hver side av punktet og se om de deriverte er like hverandre. Er det innhylling på eksamen, er det smart å bruke den raske K–T-metoden.
  - Merk: vi får ofte $\frac{\partial V}{\partial p_1} = -\lambda x_1$. Tolkningen er altså er at en prisøkning reduserer hvor mye av x_1 vi konsumerer om vi ikke endrer på tolkningen vår.
- Et ***indre punkt*** er optimalt hvis $\nabla f = \vec{0}$
- Hvis jeg får flere ukjente parametre, for eksempel p, q, R, definer intervallene over R med mindre noe annet er spesifisert.
- Ved bibetingelse om inntekt og bibetingelse om rasjonering: blir man spurt hvor mye konsumenten verdsetter en rasjoneringskupong, sett $\frac{\text{\#nytte/kupong}}{\text{\#nytte}/,-}$, og dette er lik $\frac{\text{bibetingelse til rasjonering}}{\text{bibetingelse til budsjett}}$.
- Når restriksjonen b øker, økes mulighetsområdet S. Derfor vil ikke V kunne avta når $b \uparrow$, og V vil derfor være voksende. Vi kan videre si at $V(b)$ er voksende og konkav hvis 1) alle bibetingelser er $g_i \leq b_i$, om $f(x)$ er konkav, og at hver $g(x)$ er konveks.
- Kontinuitet vises ved å ta den deriverte på begge sider av punktet og evaluere i det aktuelle punktet. Er de like, så har vi kontinuitet i punktet her.

4.2 Opprinnelig Kuhn–Tuckers metode for bruk med ulikheter, likheter, og blandet

1. Skriv på standardform og finn ∇f og ∇g
2. Finn punktene der føringsbetingelsen svikter (let etter lineær uavhengighet for alle plasser der 1 er aktiv, deretter der 2 er aktiv (bruk determinant her, går raskt), der 3 er aktiv, etc). Hvis man får noen områder hvor det er lineær avhengighet, sjekk om de aktuelle aktive restriksjonene er aktive samtidig der den lineære avhengigheten oppstår. Hvis de ikke er det, så er de lineært uavhengige. Hvis de derimot er lineært uavhengige, inkluder som løsningskandidater.
3. Finn løsningskandidater med Kuhn–Tucker-betingelsene. Begynn med restriksjonen vi mistenker at binder: det letter arbeidet potensielt betraktelig.

(a) $\nabla f(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_m \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \nabla g_1 \\ \dots \\ \nabla g_m \end{pmatrix}$

(b) $\forall i = 1, \dots, m. \quad g_i(x) \le b_i, \lambda_i \ge 0$ og med komplementær slakk

4. Evaluer løsningskandidatene

5. Merk: for likhetsproblemer, trenger man ikke endre fra min til maks om det er det man får – svaret blir det samme uansett.

4.3 Raskere Kuhn–Tuckers metode for bruk med ulikheter (og blandet?)

1. Skriv på standardform og finn ∇f og ∇g

2. Finn punktene der føringsbetingelsen svikter (let etter lineær uavhengighet for alle plasser der 1 er aktiv, deretter der 2 er aktiv (bruk determinant her, går raskt), der 3 er aktiv, etc). Inkluder som løsningskandidater.

3. Finn løsningskandidater med Kuhn–Tucker-betingelsene. Begynn med restriksjonen vi mistenker at binder: det letter arbeidet potensielt betraktelig.

   (a) Skriv Lagrange-funksjonen $L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i(x) - b_i)$, hvor vi *ikke* inkludere ikke-negativitetskriteriene.

   (b) K–T-betingelsene er tilfredsstilt i x hvis:

      i. $\forall i = 1, \dots, n. \quad \frac{\partial L}{\partial x_i}(x) \le 0, x_i \ge 0$

      ii. $\forall i = 1, \dots, m. \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(x) \ge 0, \lambda_i \ge 0$

      iii. Og med komplementær slakk.

   (c) merk at vi kan justere kravet ovenfor til å gjelde for =-betingelser også (og da må vi fjerne lambda-kriteriet)

4. Evaluer løsningskandidatene

4.4 Generell oppskrift

1. Skriv på standardform og list gradientene
2. Definer K–T-betingelsene
3. List alle scenarioene og kommenter hvilke som er urimelige eller umulige.
4. Sjekk hvor FB eventuelt bryter
5. Sjekk scenarioene som er rimelige. De som er kandidat, sett at de er definert for restriksjonsparameteren (ofte R eller c)
6. List alle kandidatene, inkludert kandidatene fra FB-brudd.
7. Husk å sjekke knekkpunktene!
8. Ved flere kandidater i et punkt, evaluer hvilket som er best
9. List verdifunksjonen
10. Deriver verdifunksjonen og se om $\frac{\partial V}{\partial param} = \frac{\partial L}{\partial param}$, også i knekkpunktene (kan få bruk for derivert c^+ og derivert c^-.

4.4.1 Eksempel fra oppsummeringsforelesning – svært eksamensrelevant

Oppgaven nedenfor er for lett i forhold til eksamen, men det relevante her er at man får flere løsningskandidater for en gitt a.

Vi har følgende ikke-lineært optimeringsproblem:

$$\max f(x) = x^2 + ax, \; x \in [-1;1], \; a \in \mathbb{R}$$

Vi finner ingen brudd på føringsbetingelsen, så vi undersøker hvert alternativ. Vi får følgende tre løsningskandidater:

$$x = \frac{-a}{2}, a \in [-2;2]$$
$$x = 1, \; a \in \langle -2; \infty \rangle$$
$$x = -1, \; a \in \langle \infty; 2 \rangle$$

Vi ser altså at vi har flere løsningskandidater for alle $a \in [-2;2]$. Vi må derfor studere intervallene for å kunne konkludere hvilken kandidat som gir optimal løsning for den gitte a'en. Kandidatene våre er dermed:

$$\begin{array}{llll}
\forall a \in \langle -\infty; -2\rangle. & x = -1 & & \\
\forall a \in [-2;-2]. & x = \frac{-a}{2} = 1 & \& \quad x = -1 & \\
\forall a \in \langle -2; 2\rangle. & x = \frac{-a}{2} & \& \quad x = -1 & \& \quad x = 1 \\
\forall a \in [2;2]. & x = \frac{-a}{2} = -1 & \& \quad x = 1 & \\
\forall a \in \langle 2; \infty\rangle. & x = 1 & &
\end{array}$$

Vi må vurdere hva funksjonsverdien er i disse intervallene.

For den første har vi:

$$\forall a \in \langle -\infty; -2\rangle. \quad x = -1 \rightarrow f(-1) = \underline{\underline{1-a}}$$

For den andre har vi:

$$\begin{array}{l}
\forall a \in [-2;-2]. \\
x = \frac{-a}{2} = 1 \rightarrow f(1) = \underline{\underline{-1}} \\
x = -1 \rightarrow f(-1) = \underline{\underline{3}}
\end{array}$$

For den tredje har vi:

$$\begin{array}{l}
\forall a \in \langle -2; 2\rangle. \\
x = \frac{-a}{2} \rightarrow f(\frac{-a}{2}) = \underline{\underline{\frac{-a^2}{4}}} \\
x = 1 \rightarrow f(1) = \underline{\underline{1+a}} \\
x = -1 \rightarrow f(-1) = \underline{\underline{1-a}}
\end{array}$$

For å kunne konkudere hvem som er best her, må vi evaluere litt videre. Vi søker altså $\max\limits_{a \in \langle -2;2\rangle} \left(\frac{-a^2}{4},\ 1+a,\ 1-a\right)$. Vi ser enkelt at over dette intervallet vil $\frac{-a^2}{4}$ aldri kunne bli størst.

Vi kan derfor redusere problemet til $\max\limits_{a \in \langle -2;2 \rangle} \big(1+a,\ 1-a\big)$. Løsningen vår blir dermed:

$$\max_{a \in \langle -2;2 \rangle} \big(\frac{-a^2}{4},\ 1+a,\ 1-a\big) = \begin{cases} 1-a & a \in \langle -2;0 \rangle, \quad \text{hvilket tilhører } x=-1 \\ 1-a = 1+a & a \in [0;0], \quad \text{hvilket tilhører } x=1 \text{ og } x=-1 \\ 1+a & a \in \langle 0;2 \rangle, \quad \text{hvilket tilhører } x=1 \end{cases}$$

For den fjerde har vi:

$$\begin{aligned} &\forall a \in [2;2]. \\ &x = \tfrac{-a}{2} = -1 \to f(-1) = \underline{\underline{-1}} \\ &x = -1 \to f(-1) = \underline{\underline{3}} \end{aligned}$$

Og for den femte har vi:

$$\begin{aligned} &\forall a \in \langle 2;\infty \rangle. \\ &x = 1 \to f(1) = \underline{\underline{1+a}} \end{aligned}$$

Alt dette kan vi derfor koke ned til følgende løsning:

$$\begin{cases} a<0, & x=-1 \\ a=0, & x=-1 \text{ og } x=1 \\ a>0, & x=1 \end{cases}$$

Verdifunksjonen blir dermed:

$$V(a) = \begin{cases} 1-a, & a<0 \\ 1, & a=0 \\ 1+a, & a>0 \end{cases}$$

Verdifunksjonen holder som tidligere vist i disse knekkpunktene, den er kontinuerlig (men ikke deriverbar på grunn av et knekkpunkt).

5

Konveksitet

5.1 Konvekse mengder

En mengde S er konveks hvis $\forall \vec{x}, \vec{y} \in S, \forall \lambda \in [0;1]. \quad \lambda \vec{x} + (1-\lambda)\vec{y} \in S$.

$S = \bigcap_{i=1}^{n}$, hvor alle s_i er konvekse, vil også være en konveks mengde.

5.1.1 Bevis for konveks mengde

"Vis at hvis A og B er konvekse mengder, så er $A+B$ en konveks mengde."

Vi velger to punkter i $A+B$ og en $\lambda \in [0;1]$

$$\begin{aligned} \vec{x} = (x_1, x_2) = a+b = (a_1+b_1, a_2+b_2) \\ \vec{y} = (y_1, y_2) = c+d = (c_1+d_1, c_2+d_2) \\ a, c \in A, \quad b, d \in B. \end{aligned}$$

Siden A er konveks, er $\lambda a + [1-\lambda]c \in A$.

Siden B er konveks, er $\lambda b + [1-\lambda]d \in B$.

Da blir:

$$
\begin{aligned}
&\lambda\vec{x}+[1-\lambda]\vec{y} \\
&= \lambda(a+b)+[1-\lambda](c+d) \\
&= [\lambda a+(1-\lambda)c]+[\lambda b+(1-\lambda d] \\
&= \lambda[a+b]+(1-\lambda)[c+d] \\
&= \lambda\vec{x}+(1-\lambda)\vec{y}
\end{aligned}
$$

Det følger at alle punktet på linjestykket mellom $\vec{x}$ og $\vec{y} \in A+B$, så $A+B$ er konveks.

5.1.2 Bevis for konveks mengde

Vis as mengden $S = \{x : \vec{u}\cdot\vec{x} \leq d\}$, hvor $\vec{u}$ er forskjellig fra nullvektoren.

- $\vec{x} \in S, \vec{y} \in S, \lambda \in [0;1]$
- $\therefore \vec{u}\cdot\vec{x} \leq d$ og $\vec{u}\cdot\vec{y} \leq d$
- Vi må vise at $\vec{u}\cdot(\lambda\vec{x}+[1-\lambda]\vec{y}) \leq d$

Utgangspunktet vårt er altså:

$$\vec{u}\cdot\vec{x} \leq d$$

Siden $\lambda \in [0;1]$, så gjelder $\lambda VS \leq \lambda HS$

$$\vec{u}\cdot\lambda\vec{x} \leq \lambda d$$

Tilsvarende har vi:

$$\vec{u}\cdot\vec{y} \leq d$$

Siden $1-\lambda \in [0;1]$, så gjelder $(1-\lambda)VS \leq (1-\lambda)HS$

$$\vec{u}\cdot(1-\lambda)\vec{y} \leq (1-\lambda)d$$

Vi kan deretter legge sammen $\vec{u}\cdot\vec{y} \leq d$ og $\vec{u}\cdot(1-\lambda)\vec{y} \leq (1-\lambda)d$

$$\vec{u}\cdot\vec{x}+\vec{u}\cdot(1-\lambda)\vec{y} \leq \lambda d+(1-\lambda)d$$

Vi faktoriserer og får:

$$\vec{u}\cdot\big(\vec{x}+(1-\lambda)\vec{y}\big) \leq \lambda d+d-\lambda d$$

Vi summerer høyre side og får:

$$\vec{u}\cdot\big(\vec{x}+(1-\lambda)\vec{y}\big) \leq d$$

$\therefore \lambda\vec{x}+[1-\lambda]\vec{y} \in S$, og mengden er konveks.

5.1.3 Bevis for konveks mengde

La $h(x,y)$ være en (generell) konkav funksjon og la S være mengden av punktet (x,y) slik at $h(x,y) \geq 0$. Vis at S er en konveks mengde."

Vi starter først med å definere S:

$$S = \{(x,y) : h(x,y) \geq 0\}$$

Deretter la $(x_1,y_1) \in S, (x_2,y_2) \in S, \lambda \in [0;1]$.

$h(x,y)$ er konkav, så definisjonsmessig har vi:

$$h\big(\lambda(x_1,y_1)+[1-\lambda](x_2,y_2)\big) \geq \lambda h(x_1,y_1)+[1-\lambda]h(x_2,y_2)$$

Fra definisjonen har vi at hvert av leddene på høyre side av ulikheten er større eller lik 0. Derfor får vi:

$$h\big(\lambda(x_1,y_1)+[1-\lambda](x_2,y_2)\big) \geq 0 \quad \forall \quad \lambda \in [0;1]$$

$$\therefore \lambda(x_1, y_1) + [1-\lambda](x_2, y_2) \in S \quad \forall \quad \lambda[0;1]$$

Derfor må S være en konveks mengde.

5.1.4 Bevis for konveks mengde

La mengden S være gitt ved $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|+|y| \leq 1\}$. Avgjør om S er konveks. Hint: du kan bruke at $|x| = \max(-x; x)$

Ved å bruke hintet, får vi altså fire tilfeller som vi kan splitte opp i: x og $-x$, og y og $-y$. Vi får dermed at $x+y \leq 1$, $x-y \leq 1$, $-x+y \leq 1$, og $-x-y \leq 1$.

Dermed gjelder følgende utregning:

$$\begin{aligned}
S &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|+|y| \leq 1\} \\
S &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \leq 1,\ x-y \leq 1,\ -x+y \leq 1,\ -x-y \leq 1\} \\
S &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \leq 1\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-y \leq 1\} \\
&\cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x+y \leq 1\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x-y \leq 1\}
\end{aligned}$$

Snittet av konvekse mengder er konveks. Derfor er S konveks.

5.2 Konvekse og konkave funksjoner

Merk: for å kunne snakke om funksjonen f(x) er konveks eller konkav, *må* selve mengden S være konveks.

Tips: sier oppgaven at man skal vise konkav men ikke strengt konkav (eller tilsvarende for konveks), først vis at funksjonen er konkav og dermonstrer med et moteksempel at den ikke er strengt konkav – for eksempel med en linje på grafen.

"Med noe forklaring kan man løse konveks/konkav-funksjoner grafisk – noen oppgaver er lette og noen er vanskelig analytisk eller grafisk."

Tre måter å avgjøre konveksitet og konkavitet til en funksjon:

1. Definisjonen (kan alltid brukes)

2. Førstederiverte (hvis de eksisterer): altså at grafen ligger på eller over enhver tangentlinje.

3. Andrederiverte (hvis de eksisterer). Kan bruke hessiske matriser.

Det er tre måter å argumentere for om formen på en sammensatt funksjon:

1. Ved å vise hvordan $g(x)$-formen og $\Phi(t)$-formen er, og deretter bruke definisjonen til å konkludere.

2. Ved å diskutere nivåflatene. For eksempel for $f(x,y,z) = \exp[x+2y+3z]$: nivåflatene til $g(x,y,z) = x+2y+3z$ er lineære plan, og disse blir også nivåflater for $f(x,y,z)$. Velger vi to punkt i samme nivåflate, for eksempel $(2,0)$ og $(0,1)$, så blir $f(x,y,z)$ konstant på linjen mellom disse punktene. Da kan ikke $f(x,y,z)$ være strengt konveks.

3. Kan bruke hessiske matriser hvis $f(x,y,z)$ er en C^2-funksjon.

Sjekke for konvekse og konkave funksjoner ved hjelp av hessiske matriser $D^2 f(x)$:

1. test for PD: $\forall k. \quad D_k > 0$

2. test for PSD: $\forall k. \quad \Delta_k \geq 0$

3. test for ND: $\forall k. \quad (-1)^k D_k > 0$

4. test for NSD: $\forall k. \quad (-1)^k \Delta_k \geq 0$

Test for PSD/NSD først.

D_k regner man ut ved å ta determinanten til de k første radene og kolonnene. Δ_k regner man ut ved å ta determinanten til k rader og kolonner langs diagonalen – og derfor ikke bare de k første radene/kolonnene!

Merk at jeg enkelt kan finne egenverdiene også hvis jeg heller vil det.

Tips! Sett alle felles faktorer utenfor matrisen og spesifiser om de er større eller mindre enn null.

5.2.1 Mer om PD/ND/PSD/NSD

PD/ND/PSD/NSD-testene er som en hypotesetest: har du tilstrekkelig bevis, forkast og konkluder. Men har du ikke tilstrekkelig bevis, betyr det ikke at den ikke er (hva vi tester).

For eksempel, om vi ikke finner noe på ND, men på NSD: vi kan si at vi har en konkav funksjon, men vi kan ikke si enda om den er strengt konkav bare på grunn av ND-brudd.

Det greieste er å regne ut egenverdiene hvis det er enkelt og greit. Hvis ikke, se på nivåflatene.

5.2.1.1 Eksempel

For å vise at $f(x,y,z) = \ln(x+2y+3z)$ faktisk ikke er strengt konkav, observerer vi at nivåflatene $f(x,y,z) = c$ er lineære plan: $\ln(x+2y+3z) = c \Leftrightarrow x+2y+3z = e^c$.

Hvis to punkter ligger på *samme* nivåflate, så vil $f(x,y,z)$ ha samme verdi c langs hele linjestykket mellom de to punktene. For en strengt konkav funksjon ville verdiene langs linjestykket vært ekte større enn verdiene i endepunktene. Det følger at $f(x,y,z)$ ikke kan være strengt konkav.

5.2.2 Bevis for ikke strengt konkav funksjon

"$f(tx,ty) = \left(a(tx)^r + b(ty)^r\right)^{1/r}$. Vis at $f(tx,ty) = tf(x,y) \forall t > 0$. Bruk dette til å vise at $f(x,y)$ ikke er strengt konkav uansett hvilken verdi r har."

Den første delen av dette beviset er vist på side 3.

Videre, med $t \cdot f(x,y)$ følger det at funksjonen vokser lineært på stråler ut fra origo og den kan da ikke være strengt konkav.

Vi kan bruke definisjonen for streng konkavitet:

$$f\left(\lambda(x_1,y_1) + [1-\lambda](x_2,y_2)\right) > \lambda f(x_1,y_1) + [1-\lambda] f(x_2,y_2) \forall (x_1,y_1), \forall (x_2,y_2), \forall \lambda \in \langle 0;1 \rangle$$

Si at $(x_1,y_1) = (1,1), (x_2,y_2) = (3,3)$, og $\lambda = \frac{1}{2}$. Da blir uttrykkene like store og den strenge ulikheten holder ikke.

Derfor: for å vise at en funksjon ikke blir strengt konkav, kan vi bruke at $f(tx,ty) = tf(x,y)$.

5.2.3 Voksende og konkav verdifunksjon

$V(b)$ er voksende og konkav hvis samtlige punkter holder:

1. om alle bibetingelser er på formen $g_i \leq b_i$;

2. om $f(x)$ er konkav; og
3. om hver $g(x)$ er konveks

5.2.4 Sammensatte funksjoner

1. $f(\vec{x})$ er konveks og Φ er konveks og voksende $\Rightarrow g(\vec{x}) = \Phi(f(\vec{x}))$ er konveks. Eksempel er $g(x,y,z) = exp[f(x,y,z)]$, der $f(x,y,z) = x^2 + (3y-2z)^2$. $\Phi(t) = exp[t]$ er konveks og voksende, og med hessiske matriser finner man at $f(x,y,z)$ er konveks. Ergo er $g(\vec{x})$ konveks.

5.2.4.1 Bevis med sammensatte funksjoner

La $f(x,y)$ være en generell konveks funksjon og la $\Phi(t)$ være en konveks, voksende funksjon. Vis at $\Phi\big(f(x,y)\big)$ er konveks.

Definisjonen sier at $f(x,y)$ er konveks hvis:

$$f\big(\lambda(x_1,y_1) + [1-\lambda](x_2,y_2)\big) \leq \lambda f(x_1,y_1) + [1-\lambda] f(x_2,y_2)$$

Siden Φ er voksende, vil ulikheten ovenfor holde når vi tar $\Phi(VS) \leq \Phi(HS)$.

$$\Phi\Big(f\big(\lambda(x_1,y_1) + [1-\lambda](x_2,y_2)\big)\Big) \leq \Phi\Big(\lambda f(x_1,y_1) + [1-\lambda] f(x_2,y_2)\Big)$$

Definisjonen sier at $\Phi(\ldots)$ er konveks hvis:

$$\Phi\Big(\lambda f(x_1,y_1) + [1-\lambda] f(x_2,y_2)\Big) \leq \lambda\Phi\Big(f(x_1,y_1)\Big) + [1-\lambda]\Phi\Big(f(x_2,y_2)\Big)$$

Vi kan substituere med det blå feltet, og vi vil derfor få ulikheten:

$$\Phi\Big(f\big(\lambda(x_1,y_1) + [1-\lambda](x_2,y_2)\big)\Big) \leq \lambda\Phi\Big(f(x_1,y_1)\Big) + [1-\lambda]\Phi\Big(f(x_2,y_2)\Big)$$

Vi ser altså at $\Phi(f(x,y))$ er konveks.

5.2.4.2 Bevis ved sammensatte funksjoner

La $g(x,y)$ være en (generell) konkav funksjon, ikke nødvendigvis deriverbar. La $\varphi(t)$ være konkav og voksende. Vis at $\varphi\big(g(x,y,)\big)$ er konkav.

Vi starter med definisjonen av en konkav funksjon. Vi sier at $g(x,y)$ er konkav hvis:

$$g\big(\lambda(x_1,y_1)+[1-\lambda](x_2,y_2)\big) \geq \lambda g(x_1,y_1)+[1-\lambda]g(x_2,y_2)$$

Vi vet at $\varphi(t)$ er voksende, så ulikheten holder om vi tar $\varphi(VS) \geq \varphi(HS)$.

$$\color{red}{\varphi\left(g\left(\lambda(x_1,y_1)+[1-\lambda](x_2,y_2)\right)\right)} \geq \color{blue}{\varphi\left(\lambda g(x_1,y_1)+[1-\lambda]g(x_2,y_2)\right)}$$

$\varphi(t)$ er konkav, så derfor setter vi inn definisjonen av en konkav funksjon, i tillegg til å bruke $\varphi\big(g(x,y)\big)$ og får:

$$\color{blue}{\varphi\left(\lambda g(x_1,y_1)+[1-\lambda]g(x_2,y_2)\right)} \geq \color{green}{\lambda\varphi\left(g(x_1,y_1)\right)+[1-\lambda]\varphi\left(g(x_2,y_2)\right)}$$

Siden det grønne uttrykket er mindre enn det blå, og siden det blå uttrykket er mindre enn det rød, så følger det at det grønne uttrykket må være mindre enn det rød.

$$\color{red}{\varphi\left(g\left(\lambda(x_1,y_1)+[1-\lambda](x_2,y_2)\right)\right)} \geq \color{green}{\lambda\varphi\left(g(x_1,y_1)\right)+[1-\lambda]\varphi\left(g(x_2,y_2)\right)}$$

Vi kan forenkle uttrykket og si at $\varphi\left(g(x,y)\right) = h(x,y)$. Da får vi:

$$\color{red}{h\left(\lambda(x_1,y_1)+[1-\lambda](x_2,y_2)\right)} \geq \color{green}{\lambda h(x_1,y_1)+[1-\lambda]h(x_2,y_2)}$$

Dette er definisjonen for en konkav funksjon, så vi kan dermed konkludere og si at $h(x,y) = \varphi\left(g(x,y)\right)$ er konkav.

5.2.5 Ved *min*-funksjoner

Blir vi bedt om å vise at en *min*-funksjon er konkav, skal vi gjøre følgende:

1. List hva funksjonsverdiene er. For eksempel $f(x,y) = \begin{cases} x, & x \leq 2y \\ 2y, & x > 2y \end{cases}$. Denne kan vi dekomponere.
2. Vi må vise at ulikheten $f(\lambda\vec{x} + (1-\lambda)\vec{y} \geq \lambda f(\vec{x}) + (1-\lambda) f(\vec{y})$ holder i alle mulige tilfeller.
3. Vi velger derfor to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2), og vi må vise at ulikheten holder i alle mulige tilfeller:
   (a) $x_1 \leq 2y_1, x_2 \leq y_2$
   (b) $x_1 > 2y_1, x_2 \leq y_2$
   (c) $x_1 \leq 2y_1, x_2 > y_2$
   (d) $x_1 > 2y_1, x_2 > y_2$

5.2.6 Bevis for konkav funksjon

La $f(x,y,z) = min(x, 2y, 3z), x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$. Vis at $f(x,y,z)$ er en konkav funksjon.

Nøkkelen er å definere mengden som er *under* grafen til funksjonen. Hvis det er en konveks mengde, må f være konkav[1].

$$S = \{(x,y,z,w) : \mathbf{w} \leq f(x,y,z) \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\}$$

Setter inn $f(x,y,z) = min(x, 2y, 3z)$ og får:

$$S = \{(x,y,z,w) : \mathbf{w} \leq min(x, 2y, 3z) \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\}$$

Men en minimumsfunksjon kan vi dekomponere slik at w skal være mindre eller lik hver og en av disse.

$$S = \{(x,y,z,w) : w \leq x \wedge w \leq 2y \wedge w \leq 3z \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\}$$

[1] Tilsvarende, skal man vise at funksjonen konveks, sjekk om mengden *over* grafen er konveks.

Vi kan dele opp denne i seks mengder:

$$S = \{(x,y,z,w) : w \leq x\} \cap \{(x,y,z,w) : w \leq 2y\} \cap \{(x,y,z,w) : w \leq 3z\} \cap \\ \{(x,y,z,w) : x \geq 0\} \cap \{(x,y,z,w) : y \geq 0\} \cap \{(x,y,z,w) : z \geq 0\}$$

S er altså snittet av 6 konvekse mengder, og derfor er også S konveks.

Siden mengden *under* grafen til funksjonen er konveks, må funksjonen være konkav.

5.2.7 Bevis på ikke strengt konveks/konkav

Vi har funksjonen $g(x,y) = e^{x+2y}$. $f(x,y) = x+2y$ er konstant på linjen c, så da er funksjonen ikke strengt konveks.

En annen måte: si at vi har funksjonen $g(x_1,x_2,x_3) = -exp[-f(x_1,x_2,x_3)]$. Vi kan velge to punkter slik at g er lineær på den rette linjen mellom dem. ved å vise at $g(\lambda x^1 + [1-\lambda]x^0) = \lambda g(x^1) + [1-\lambda]g(x^0)$, ser vi at alle punktene mellom disse endepunktene ligger på funksjonskurven. Derfor kan ikke funksjonen være strengt konkav. Cluet er at du velger to punkter som er på samme nivåflate, også viser du at et punkt mellom disse også ligger på samme nivåflate. Men velg punktene riktig! **Dette bør nok være min foretrukne måte å løse oppgaven på hvis jeg klarer å identifsere to slike punkter** (her er den faktisk ikke konkav heller).

Eksempel á la den metoden jeg snakket om over: $g(x_1,x_2,x_3) = -e^{x_1^2+(x_2+2x_3)^2)}$. Vi velger to punkter slik at g er lineær på den rette linja mellom dem. **Dette betyr altså at du velger 1) to punkter på samme nivåkurve hvor 2) funksjonen er flat mellom dem**. Ta for eksempel $(0,4,0)$ og $(0,0,2)$ som ligger på samme nivåkurve. Vi vil da få $g(\lambda x^1 + [1-\lambda]x^0) = \lambda g(x^1) + [1-\lambda]g(x^0) = -e^1 6$. Med andre ord er den ikke strengt konkav.

Vi har $g(x,y) = exp[x \ln a + y \ln b]$ Hvis vi sier at $a = 2$ og $b = 2$, og velger punktene $(x_1,y_1) = (2,0)$, $(x_2,y_2) = (0,2)$, og $\lambda = \frac{1}{2}$, får vi ved å sette inn $g(\lambda x^1 + [1-\lambda]x^0) = \lambda g(x^1) + [1-\lambda]g(x^0) = 4$. Ved motbevis har vi demonstrert at funksjonen ikke er strengt konkav fordi likheten er der.

Hvis $f(tx,ty) = tf(x,y) \forall t > 0$, så er funksjonen garantert ikke strengt konveks/konkav.

Hvis $f(x,y) = (x^{1/3} + y^{1/3})^3$, så kan vi med motbevis $((x_1,y_1) = (1,1)$ og $(x_2,y_2) = (3,3)$ vise at $g(\lambda x^1 + [1-\lambda]x^0) = \lambda g(x^1) + [1-\lambda]g(x^0) = 16$. Funksjonen er derfor ikke strengt konkav.

Hvis $f(x,y,z) = \exp[x+2y+3z]$, så kan vi med motbevis ($(x_1,y_1,z_1) = (4,0,0)$ og $(x_2,y_2,z_2) = (0,2,0)$ vise at $g(\lambda x^1 + [1-\lambda]x^0) = \lambda g(x^1) + [1-\lambda]g(x^0) = e^4$. Funksjonen er derfor ikke strengt konveks.

Hvis $f(x,y,z) = \exp[x^2 + (3y-2z)^2]$, så kan vi med motbevis ($(x_1,y_1,z_1) = (0,0,0)$ og $(x_2,y_2,z_2) = (0,4,6)$ vise at $g(\lambda x^1 + [1-\lambda]x^0) = \lambda g(x^1) + [1-\lambda]g(x^0) = 1$. Funksjonen er derfor ikke strengt konveks.

Hvis $f(x,y) = (\frac{1}{2}x^r + \frac{1}{2}y^r)^{1/r}$, så kan vi med motbevis ($(x_1,y_1) = (1,1)$ og $(x_2,y_2) = (3,3)$ vise at $g(\lambda x^1 + [1-\lambda]x^0) = \lambda g(x^1) + [1-\lambda]g(x^0) = 2$.

Hvis $f(x,y,z) = \ln(x+2y+3z)$, så kan vi med motbevis ($(x_1,y_1,z_1) = (4,0,0)$ og $(x_2,y_2,z_2) = (0,2,0)$ vise at $g(\lambda x^1 + [1-\lambda]x^0) = \lambda g(x^1) + [1-\lambda]g(x^0) = \ln(4)$. Funksjonen er derfor ikke strengt konkav.

Hvis $f(x,y) = (2\sqrt{x} + 2\sqrt{y})^2$, så kan vi med motbevis ($(x_1,y_1) = (1,1)$ og $(x_2,y_2) = (4,4)$ vise at $g(\lambda x^1 + [1-\lambda]x^0) = \lambda g(x^1) + [1-\lambda]g(x^0) = 40$. Funksjonen er derfor ikke strengt konkav.

6

Lineær programmering

I første forelesning skrev jeg at dette kommer på eksamen.

6.1 Simpleksalgoritmen

Simpleksalgoritmen er langt mer effektiv enn K–T-betingelsene, og vi bruker derfor denne til lineær programmering.

6.1.1 Utledning av kriteriene

- Grunnproblemet vårt er $\max z = c^T x$ gitt $Ax = b, x \geq 0$, hvor slakkvariabler er innført. Obs: ikkenegativitetskriteriene skal ikke med i A.
- Vi kan dele x i to: i x_B og x_N. Vi trenger like mange elementer i x_B som vi har restriksjoner. Vi kan i utgangspunktet velge ganske fritt hvilke variabler som hører til hvor. **$\mathbf{x_N}$ kan vi velge helt fritt så lenge ikke-negativitetskriteriene oppfylles.**
- Tilsvarende må koeffisientene deles opp: c til c_B og c_N, og A til B og N.
- Problemet vårt kan dermed omskrives til
  $\max z = c_B^T x_B + c_N^T x_N$ gitt $Bx_B + Nx_N = b, x_B \geq 0, x_N \geq 0$.
- Vi ønsker å uttrykke basiske variabler ved hjelp av ikke-basiske variabler, så vi flytter på restriksjonen og får $\mathbf{x_B} = \mathbf{B^{-1}b} + \mathbf{B^{-1}Nx_N}$. Dette er første nøkkel i simpleksalgoritmen.
- Dette kan vi sette inn i målfunksjonen, og vi får $z = c_B^T B^{-1} b - B^{-1} N x_N + C_N^T x_N$. Omskrevet får vi dermed $z = c_B^T B^{-1} b + (C_N^T - C_B B^{-1} N) x_N$.

- I den optimale løsningen kommer alle de ikke-basiske variablene til å være lik 0. Derfor får vi et krav om at $\mathbf{x_B} = \mathbf{B^{-1}b} \geq \mathbf{0}$ komponentvis.
- Vi går tilbake til målfunksjonen. Vi kan som sagt velge verdien på de ikke-basiske variablene fritt. Hvis vi skal ønske å sette dem lik 0 – som er optimum siden ingen ikke-basiske variabler vil kunne forbedre målfunksjonen – så må det skyldes at $(\mathbf{C_N^T} - \mathbf{C_B B^{-1} N}) \leq \mathbf{0}$ komponentvis. Dette er vårt andre kriterie.
- Oppfyller man begge kriteriene, er man i optimum. Men merk at vi ikke vet om løsningen er entydig.

6.1.2 Oppskrift

1. Skriv problemet
2. Innfør slakkvariabler
3. Velg et starthjørne (typisk origo). Skriv hvilke av x og r som er lik 0 og hvem som er større eller lik 0 i dette hjørnet.
4. Splitt opp i x_B, x_N, c_B, c_N, B, N.
5. Krav: alle elementer i $B^{-1}b \geq 0$ og $C_N^T - C_B^T B^{-1} N \leq 0$.
6. Hvis $C_N^T - C_B^T B^{-1} N \nleq 0$, flytt variabelen med størst koeffisient inn i basis. La oss kalle den x_α
7. Den variabelen i basisen som blir null først når vi øker x_α, skal flyttes ut av basis. Dette gjøres på følgende måte:
   (a) Skriv $x_B = B^{-1}b + B^{-1}Nx_N$
   (b) Vi har krav om at $x_B \geq 0$, så skriv $0 \leq B^{-1}b + B^{-1}Nx_N$ og med en merkelapp på hvilken variabel som hører til hvilken linje.
   (c) Sett alle $x_N = 0$ med unntak av den jeg skal bytte ut, x_alpha, lik 0
   (d) Finn hvilken ulikhet som er strengest – denne blir altså null først når x_α øker.
   (e) Basisvariabelen som hører til denne ulikheten skal ut av basis.
8. Gjenta helt til vi får $B^{-1}b \geq 0$ og $C_N^T - C_B^T B^{-1} N \leq 0$.

6.2 Simpleksmetoden uten matrisenotasjon

1. List z-funksjonen og ligningene som har de basiske variablene på venstre side. Vi vil dermed få de ikke-basiske på høyre side.
2. Er noen av koeffisientene i z-funksjonen positive? I så fall er det ikke optimalt å sette de ikke-basiske variablene lik null.
3. Flytt derfor inn i basis den variabelen med høyest koeffisient i z.
4. Deretter finn hvilken av de eksisterende basiske variablene som blir 0 først når nevnte variabel øker. Flytt den som blir 0 først ut av basis og lag den nye ligningen for ny basisk variabel.
5. Erstatt alle steder av denne nye basiske variabelen med ligningen.
6. Repeter stegene ovenfor helt til alle koeffisientene i z er negative. Da er det optimalt å sette ikke-basiske variabler lik 0, og vi har dermed funnet løsningen.

Et godt eksempel finnes på side 180 i eksamensnotatene.

6.3 Dualitet

6.3.1 Tolkning

Tolkningen av det duale problemet avhenger av hvordan vi tolker det primale problemet.

Hvis primalproblemet er total salgsverdi av produksjonen, vil dualen studere hva som skjer om vi selger alle innsatsfaktorene istedenfor å bruke dem i vår egen produksjon. Det duale problemet blir dermed å finne den *minste* samlede verdien av alle innsatsfaktorene slik at vi ikke kan tjene mer på å produsere selv enn på å selge innsatsfaktorene til disse prisene.

6.3.2 Komplementær slakk

Skal vi løse et dualproblem, får vi ofte bruk for komplementær slakk-kravet. La x være variabler og r være slakkvariabler i primalen, og la y være variabler og s være slakkvariabler i dualen. Da gjelder følgende om komplementær slakk:

$$r_i^* y_i^* = 0$$
$$s_j^* x_j^* = 0$$

Løsningen på dualproblemet er følgende:

$$y^* = (B^{-1})^T c_B$$

6.3.3 Sterk og svak dualitet

Svak dualitet sier at hvis x er tillatt for det primale problemet og y er tillatt for det duale problemet, så vil nødvendigvis $c \cdot x \leq b \cdot y$.

Sterk dualitet sier at den optimale løsningen av det primale problemet og den optimale løsningen av det duale problemet ha samme verdi. $\therefore z^* = c \cdot x^* = b \cdot y^* = w^*$

Får vi at funksjonsverdiene i primal- og dualproblemet er like, kan vi på grunn av svak dualitet være sikre på at y^* er den optimale løsningen i dualproblemet.

6.3.4 Kommentar

Blir vi bedt om å løse det duale problemet grafisk, har jeg en tendens til å tegne inn det riktige umiddelbart. Jeg bør dog nevne hvilke andre hjørnepunkter som også er mulige men ikke optimale.

6.3.5 Eksempel

I forelesningsnotatene mine at Roman sa at følgende er en god eksamensoppgave:

$$\begin{aligned} \max z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\ \text{gitt} \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ x1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

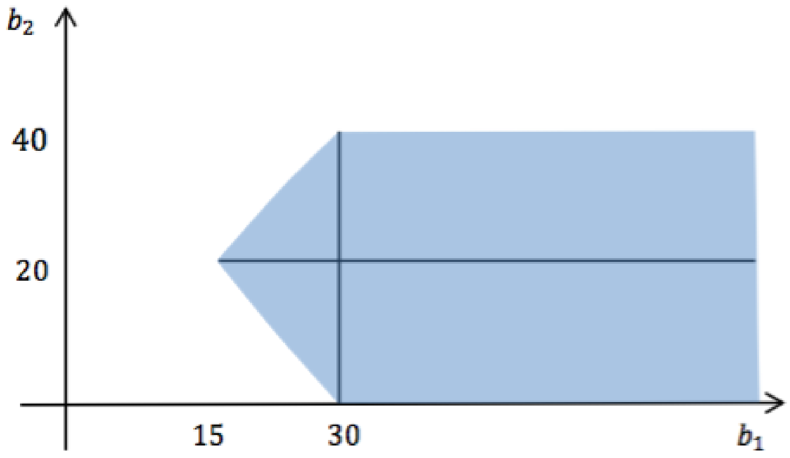
Det er ikke lett å løse primalen grafisk, men det er lett å løse dualen. Noe sånt *kan* komme til eksamen.

6.4 Følsomhetsanalyse

Man har to typer følsomhetsanalyser: enten endrer man restriksjonen b, eller så endrer man målfunksjonskoeffisientene c. Vi har som nevnt to restriksjoner for optimum: $B^{-1}b \geq 0$ og $C_N^T - C_B^T B^{-1} N \leq 0$, og vi undersøker for hvilke b eller c begge disse restriksjonene holder. Merk at b inngår i bare én ulikhet, og tilsvarende for c, så vi trenger bare å sjekke i hvilke intervaller den ene ulikheten holder siden den andre alltid vil være det.

6.4.1 100 %-regelen

Når vi løser et LP-problem med dataverktøy, for eksempel med Excel Solver, så får vi ut et intervall for hver parameter som angir hvor mye den gitte parameteren kan endres – *imens de andre holdes faste* – uten at vi trenger å endre basis når alle de andre parametrene holdes fast.



Figur 6.1: 100 %-regelen: her ser vi for hvilke (b_1, b_2) det er optimalt med samme valg av basiske variabler når både b_1 og b_2 kan variere. Dette er hva Excel Solver ville gitt oss. Merk at med følsomhetsanalysen beskrevet med matrisenotasjon typisk får et større mulig område med samme basis enn hva problemløseren antyder.

I figuren ovenfor ser vi fire punkter (endepunktene på linjene) som Excel Solver ville oppgitt. Men den konvekse innhyllingen – den minste konvekse mengden som inneholder de fire punktene – vil også inngå i området. Den konvekse innhyllingen er derfor det blå skraverte området ovenfor.

Nøkkelen med 100 %-regelen er at hvis endringene i b_1 og b_2 fra opprinnelige verdier samlet er mindre eller lik 100 %, så beholder vi samme basis.

6.5 Sammenhengen mellom K–T-betingelsene og optimalitetsbetingelsene i LP-teorien

Lagrange-funksjonen blir:

$$L = c \cdot x - \lambda(Ax - b)$$
$$L = \sum_j c_j x_j - \sum_i \lambda_i (\sum_j a_{ij} x_j - b_i)$$
$$L = \sum_j c_j x_j - \sum_i \sum_j (\lambda_i a_{ij} x_j - b_i)$$

Kuhn-Tucker-betingelsene blir:

$$\left.\begin{array}{lll} \forall j. \frac{\partial L}{\partial x_j} \leq 0: & \forall j.\ c_j - \sum_i \lambda_i a_{ij} \leq 0, & x_j \geq 0 \\ \forall i. \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} \geq 0: & \forall i.\ b_i - \sum_j a_{ij} \geq 0, & \lambda_i \geq 0 \end{array}\right\} \text{Med komplementær slakk}$$

Vi kan skrive disse betingelsene som:

$$\left.\begin{array}{ll} A^T \lambda \geq c, & x \geq 0 \\ Ax \leq b, & \lambda \geq 0 \end{array}\right\} \text{Med komplementær slakk}$$

Skyggeprisene (λ'ene) er de samme som de duale variablene i LP – typisk betegnet $y_1, \ldots, y_m$. Betingelsen $A^T \lambda \leq c$ sier ermed at λ skal være tillatt for det duale LP-problemet.

Kravet om komplementær slakk gir dermed at $x^T A^T \lambda = c \cdot x$ og $\lambda^T A x = b \cdot \lambda$. Her kan vi bruke transponeringsreglene gir oss at $x^T A^T x = \lambda^T A x$. Så hvis x og λ tilfredsstiller K–T-betinelsene, så må vi ha $c \cdot x = b \cdot \lambda$ (sterk dualitet).

Det følger da at siden svak dualitet gjelder for alle tillatte x og λ, da må x være optimal for LP og λ være optimal for LP*.

7

Optimering i nettverk

Nøklene i nettverksoptimering:

- En variabel representerer en kant.
- Restriksjonene per node sier at det som går ut må tilsvare det som kommer inn. Dette kalles balanseligninger. Vi bruker derfor $\sum_k x_k = b_i + \sum_\ell x_\ell$ $\forall$ noder i for å vise at det som går ut er lik det som kommer inn. Strømmer fra kantene x til node i representerer interne strømmer, og b_i representerer en ekstern strøm inn til node i. Har man en ekstern strøm ut av node i, vil b_i være negativ. Ved å flytte variablene på høyre side av likheten, får vi dermed $\sum_k x_k - \sum_\ell x_\ell = b_i$ $\forall$ noder i. Tips: variablene i disse restriksjonene kommer til sammen å nulle hverandre ut.
- Vi har restriksjoner per kant (kapasitet til kantene). Disse restriksjonene er $x_k \leq u_k \forall k$. Kanter med uendelig kapasitet er overflødige, og de trenger vi ikke en kapasitetsrestriksjon på. I tillegg har vi ikke-negativitetsbetingelsen $x_k \geq 0 \forall k$.
- Siden nettverksproblemer typisk handler om å minimere kostnader, er et nettverksproblem på standardform definert som et minimumsproblem.

Tips:

- skriv inn problemene uten alle gaps"i restriksjonene.
- beskriv først i ord hva jeg skal oppnå.
- dropp binær-restriksjonen: man får det samme svaret med større eller lik 0, og da er det ikke vits i å "outsmartenoen.
- Kan bruke simpleks til å løse disse, men det kan være arbeidskrevende. Oftere greiere å

gjøre det ved inspeksjon.

7.1 Typiske nettverksproblemer

- ***Korteste sti***: Her skal vi sende én enhet strøm fra start- til sluttnoden. Ekstern strøm inn til startnoden blir derfor 1 ($b = 1$) og ekstern strøm ut av sluttnoden blir derfor 1 ($b = -1$). Det er ingen kapasitetsbegrensninger i dette problemet, kun balanseligningene for å vise hvor strømmen kan gå. Husk ikke-negativitetskravet. Merk: siden vi sier at x skal være mellom 0 og ∞, og hvis det er flere like korte veier, da får vi ∞ mange løsninger.
- ***Maksimalstrømproblemer***: Vi har ingen eksterne strømmer b som kan dytte inn eller ta ut strøm fra nodene (vi kjenner dem ikke siden det er dem vi skal maksimere!), så vi må lage en fiktiv kant $x_{T,0}$ med ubegrenset kapasitet slik at strømmen i nettverkes loopes i det uendelige. Siden sluttnoden sender strømmen den mottar gjennom denne kanten, finner vi løsningen på problemet ved å maksimere denne. Problemet på standardform:
$\min z = -x_{T,0}$ gitt $\sum\limits_k x_k - \sum\limits_\ell x_\ell = b_i \; \forall$ noder i, $k \leq u_k \; \forall k$, $x_k \geq 0 \; \forall k$.
Merk: man kan trenge å måtte innføre en superkilde og et supersluk.
- ***Minimumkostnads nettverksstrøm***: Man har noen lagre som skal sende varer og noen sentraler som skal ta imot. For å vite hvor mye man skal sende fra hvert lager, lager vi en superkilde med en kant til hvert lager. Kapasiteten til kanten er lik antall varer lageret har.