ECO401-sammendrag

Christian Braathen

14. november 2017

Abstract

{Skriv abst

Innhold

Figurer

Kapittel 1

Viktig og generelt

- Forklaringer blir vektlagt.
- Det er viktig å tenke på hvordan markedet vil endre seg av en hendelse.
- Hvis du har en vanskelig målfunksjon å optimere, kan du optimere logaritmen av denne målfunksjonen – målfunksjonsverdien blir ulik, men optimal løsning er lik.
- Når vi regner ut MRTS, MRT, eller MRS, husk negativt fortegn.
- Bliss point: et metningspunkt hvor alle andre konsumnivåer ville gitt mindre nytte. Antar vi at dette ikke finnes, er ikke λ lik 0.

Kapittel 2

Del 1

2.1 Generell oppskrift fra MAT13

I. Skriv på standardform og list gradientene

II. Definer K–T-betingelsene

III. List alle scenarioene og kommenter hvilke som er urimelige eller umulige.

IV. Sjekk hvor føringsbetingelsen (constraint qualificiation) eventuelt bryter. Føringsbetingelsen er tilfredsstilt i punktet hvis ∇g til de *aktive* bibetingelsene er lineært uavhengige. Svikter den, vil ikke skyggeprisen være entydig bestemt. Merk at føringsbetingelsen svikter hvis $\nabla g = \vec{0}$ fordi da holder ikke $\nabla f = \lambda \nabla g$. Regn punktvis nedover for 1 aktiv bibetingelse, 2 aktive, osv. Ved 1 aktiv bibetingelse vil den være lineært avhengig hvis $\nabla g = \vec{0}$. Spørres det om for hvilke $c \geq 0$ finnes det løsningskandidater fra føringsbetingelsen.?", så spør de om i hvilke punkter føringsbetingelsen brytes.

V. Sjekk scenarioene som er rimelige. De som er kandidat, sett at de er definert for restriksjonsparameteren (ofte R eller c)

VI. List alle kandidatene, inkludert kandidatene fra FB-brudd.

VII. Husk å sjekke knekkpunktene!

VIII. Ved flere kandidater i et punkt, evaluer hvilket som er best

IX. List verdifunksjonen

X. Deriver verdifunksjonen og se om $\frac{\partial V}{\partial param} = \frac{\partial L}{\partial param}$, også i knekkpunktene (kan få bruk for derivert c^+ og derivert c^-.

2.2 Lineær algebra

- Hvis 1) A beholder 85 % av kundene men mister 5 % til B og 10 % til C, 2) B beholder 55 % av kundene men mister 10 % til A og 35 % til C, og 3) C beholder 85 % av kundene men mister 10 % til A og 5 % til B, så kan vi sette det opp i en matrise $T = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.10 & 0.10 \\ 0.05 & 0.55 & 0.05 \\ 0.10 & 0.35 & 0.85 \end{pmatrix}$. Dette kan man multiplisere med opprinnelig markedsandelsvektor for å få den nye markedsandelen.
- Hvis avkastningen til flere returns er lineært avhengige, så kan man replikere porteføljen. Men merk at prisen på asset'ene må være slik at man ikke kan ha arbitrasjemuligheter.

2.3 Optimering

- $\forall j. \quad F_j(\bar{x}) = \lambda G_j(\bar{x})$
- Total differential, here illustrated with the constraint: $dG = \frac{\partial G(\bar{x}_1,\bar{x}_2)}{\partial x_1} \mathrm{d}x_1 + \frac{\partial G(\bar{x}_1,\bar{x}_2)}{\partial x_2} \mathrm{d}x_2$
- Når $G_1(\bar{x}) \neq 0$ og $G_2(\bar{x}) \neq 0$, vil optimum være der som nivåkurven til $F(\cdot)$ har den samme helningen som nivåkurven til $G(\cdot)$.
- When $G_1(\bar{x}) = G_2(\bar{x}) = 0$, nothing can be concluded. Thus we have the **constraint qualification** that states that the optimization model works only if at least one $G_i \neq 0$.
- Weierstrass' Theorem: sufficient but not necessary condition for a solution to the optimization problem to exist: $F(\cdot)$ is continuous and the set of feasible points is closed and bounded.
- Gradienten peker der hvor funksjonen øker mest i det punktet. Den er altså 90 grader på tangenten.
- Jacobian er en matrise førstederiverte av en rekke funksjoner, slik som restriksjoner.
- Hessian er en matrise med andrederiverte av en funksjon.
- Lagrangian: $L(x\lambda) = F(x) + \sum_{j=1}^{n} \lambda [c - G(x)]$
- Komplementær slakk holder ikke nødvendigvis i akkurat det punktet hvor man går fra en kandidat til en annen.
- Komplementær slakk i et problem med ikke-negativitetskrav:

I. $\frac{\partial L(\bar{x},\bar{\lambda})}{\partial x_i} \leq 0 \quad (\frac{\partial L(\bar{x},\bar{\lambda})}{\partial x_i} \geq 0$ for min-problem)

II. $\bar{x}_i \cdot \frac{\partial L(\bar{x},\bar{\lambda})}{\partial x_i} = 0$

III. $\bar{x}_i \geq 0$

IV. $\frac{\partial L(\bar{x},\bar{\lambda})}{\partial \lambda_j} \geq 0$

V. $\bar{\lambda}_j \cdot \frac{\partial L(\bar{x},\bar{\lambda})}{\partial x_j} = 0$

VI. $\bar{\lambda}_j \geq 0$

- Husk å sette optimeringsproblemet på normalform ($\leq$ for max, $\geq$ for min.
- Gradientpilen til F vil ligge mellom gradientpilene til de bindende G'ene.
- I optimum gjelder $\frac{F_1(\bar{x})}{F_2(\bar{x})} \leq \frac{G_1(\bar{x})}{G_2(\bar{x})}$
- Ved flere betingelser sier føringsbetingelsen at de restriksjonene som binder må være lineært uavhengige. Ved én restriksjon må gradienten være ulik nullvektoren.
- Ved forskjellige løsninger over flere intervaller, husk å liste intervallene.
- The envelope theorem/omhyllingsteoremet: $\frac{\partial \bar{F}(\theta;c)}{\partial \theta} = \frac{\partial L(\bar{x},\theta,c)}{\partial \theta}$. Høyre side vil alltid være lik λ når θ er høyresiderestriksjonen. Med andre ord at $\bar{F}'(m) = \lambda$.
- En annen måte å se på dette på, er at $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}c} = \lambda \iff \mathrm{d}v = \lambda\,\mathrm{d}c$, hvor $v = F(\bar{x})$ er den høyest mulige oppnådde verdien. Den høyest mulige oppnådde verdien for enhver c kalles verdifunksjonen, $V(c)$.
- $V(\theta) = \max_x \{F(x;\theta) | G(x) = c\}$ (og min hvis vi har et minimeringsproblem. Helningen her blir altså lik λ. Obs: husk å se etter knekkpunkter. Er det ingen, er λ entydig.
- For max-problemet må envelopen være mer konveks enn hvilke som helst andre kurver som utgjør envelopen. For min må den være mer konkav.
- I max-problemer har vi en upper envelope og min-problemer har vi en lower envelope. I en økonomisk sammenheng vil envelopen være langtidskurven.
- Vi trenger second order conditions til å avgjøre hva slags kritisk punkt vi har.
- Taylor kan brukes til dette – og er nyttig for å diskutere "nabolaget" til det kritiske punktet – og det sentrale spørsmålet der er hvilket fortegn feilleddet har. Det kan vi avgjøre ved å studere definitthetsegenskapene.
- Definittheter *uten* restriksjoner:

  - PD if $x^T Ax > 0$, hvilket oppnås ved $\det(A_{kk}) > 0\ \forall k$
  - PSD if $x^T Ax \geq 0$, hvilket oppnås ved $\Delta(A_{kk}) > 0\ \forall k$
  - ND if $x^T Ax < 0$, hvilket oppnås ved $\det(A_{kk}) \cdot (-1)^k > 0\ \forall k$
  - NSD if $x^T Ax \leq 0$, hvilket oppnås ved $\Delta(A_{kk}) \cdot (-1)^k > 0\ \forall k$
  - ID ellers

- Definittheter *med* restriksjoner (k betyr å inkludere til og med rad og kolonne k i A (så $k = 2$, som er den laveste k'en, er den øverst til venstre 3×3-matrisen:
  - PD $\forall x \in X(b)$ hvis $(-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & b_k^T \\ b_k & A_{kk} \end{pmatrix} > 0\ \forall k = 2, 3, \ldots, n$
  - PSD $\forall x \in X(b)$ hvis $(-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & b_k^T \\ b_k & A_{kk} \end{pmatrix} \geq 0\ \forall k = 2, 3, \ldots, n$
  - ND $\forall x \in X(b)$ hvis $(-1)^k \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & b_k^T \\ b_k & A_{kk} \end{pmatrix} < 0\ \forall k = 2, 3, \ldots, n$
  - NSD $\forall x \in X(b)$ hvis $(-1)^k \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & b_k^T \\ b_k & A_{kk} \end{pmatrix} \leq 0\ \forall k = 2, 3, \ldots, n$
  - ID ellers
  - Det kan være at vi kan bruke Δ på PSD og NSD her også, men det har jeg ikke prøvd ut. Så jeg får enn så lenge bruke den svakere formen og bruke ledende prinsipale underdeterminant på PSD og NSD istedenfor alle prinsipale underdeterminanter.

- For å få ikke-negativ skyggepris, husk å sette problemet på normalform slik at en økning i høyresideparameteren slacker problemet.
- Hvis A er PD eller ND, vil en invers eksistere, og da vil kolonnene være lineært uavhengige.

2.4 Second-order conditions

Takeaway: vil du studere kurvatur, er Hessian alltid den beste å studere.

2.4.1 Unconstrained og generelt

Takeaway: unconstrained Hessians sjekker for konkavitet og konveksitet i funksjonen.

- Unconcstrained SONC: $F(\bar{x};\theta)$ er NSD for *lokalt* maks-problemer og PSD for min-problemer.
- Unconstrained SOSC: $F(\bar{x};\theta)$ er ND for *lokalt* maks-problemer og PD for min-problemer.
- Hvis vi kan si at funksjonen er strengt konkav, da har vi global maks.
- Hvis vi kan si at funksjonen er strengt konveks, da har vi global min.
- Kan studere selve funksjonen også, ikke bare kurvaturen, og si at en funksjon er **konveks** hvis $\forall x, y \in X,\ \forall \lambda \in [0;1].\quad f[\lambda x + (1-\lambda)y] \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ (midtpunktet ligger på en høyere nivåkurve). For **strengt konveks**, bruk streng ulikhet $<$.
- Tilsvarende, en funksjon er **konkav** hvis $\forall x, y \in X,\ \forall \lambda \in [0;1].\quad f[\lambda x + (1-\lambda)y] \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ (midtpunktet ligger på en lavere nivåkurve). For **strengt konkav**, bruk streng ulikhet $>$.
- Konveks mengde: $\forall x, y \in X,\ \forall \lambda \in [0;1].\quad \lambda x + (1-\lambda)y \in X$.
- **Hvis alt *over* en nivåkurve er en (strengt) *konveks* mengde, og dette holder for alle nivåkurver, da er funksjonen (strengt) *kvasikonkav*.**
  - La α representere nivåkurveverdien.
  - For kvasikonkav har vi altså at mengden $H(\alpha) = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$ må være konveks, og dette må holde for enhver $\alpha \in \mathbb{R}$.
  - For strengt kvasikonkav har vi altså at mengden $H(\alpha) = \{x \in X : f(x) > \alpha\}$ må være konveks, og dette må holde for enhver $\alpha \in \mathbb{R}$.
  - For kvasikonveks har vi altså at mengden $H(\alpha) = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$ må være konveks, og dette må holde for enhver $\alpha \in \mathbb{R}$.
  - For strengt kvasikonveks har vi altså at mengden $H(\alpha) = \{x \in X : f(x) < \alpha\}$ må være konveks, og dette må holde for enhver $\alpha \in \mathbb{R}$.
- **Hvis alt *under* en nivåkurve er en *konveks* mengde, og dette holder for alle nivåkurver, da er funksjonen *kvasikonveks*.**
- Konkavitet er strengere enn kvasikonkavitet fordi konkavitet har restriksjoner for hele funksjonen imens kvasikonkavitet har restriksjoner på nivåkurvene.

2.4.2 Constrained

Takeaway: constrained (bordered) Hessians kan brukes til to ting:

1) Det første er å sjekke om vi er i lokalt maksimum eller minimum ved å sjekke $\begin{pmatrix} 0 & \nabla G^T \\ \nabla G & H^{\mathscr{L}} \end{pmatrix}$ **om kun en restriksjon binder.**

Det andre er å sjekke for kvasikonkavitet og kvasikonveksitet i en spesifikk funksjon hvis du setter opp matrisen som $\begin{pmatrix} 0 & \nabla F^T \\ \nabla F & H^F \end{pmatrix}$ **eller** $\begin{pmatrix} 0 & \nabla G^{i\,T} \\ \nabla G^i & H^{G^i} \end{pmatrix}$**.**

- FOC er at $F_j = \lambda G_j(\bar{x})\ \forall j = 1,2$
- Husk at ved maksproblem i optimum må man ha at F er mer konveks enn G.
- Tilsvarende, for minproblem i optimum må man ha at F er mer konkav enn G.
- Concstrained SONC: $L(\bar{x};\theta)$ er NSD for *lokalt* maks-problemer og PSD for min-problemer. Dette har implikasjonen at F er mer kurvet enn G.
- Constrained SOSC: $L(\bar{x};\theta)$ er ND for *lokalt* maks-problemer og PD for min-problemer.
- Merk at den eneste forskjellen mellom constrained og unconstrained, er at vi bruker Lagrangian i constrained men målfunksjonen i unconstrained. Det betyr at dette essensielt er det samme problemet fordi en Lagrangian uten restriksjoner er det samme som målfunksjonen. Men husk at de kvadratiske formene ser litt forskjellige ut.

2.4.3 Optimeringsperspektiver

"The Manager" ønsker å finne en løsning på problemet. Steg:

I. Finn kritiske punkter for (P)

II. Sjekk at constraint qualificiation er tilfredsstilt (at aktive restriksjoner har $\nabla G(x^*) \neq 0$.

III. Sjekk SOSC for et *constrained* problem.

IV. Trekk konklusjoner om x^* og λ^*.

  - Hvis du kan vise at F er en (strengt) konkav funksjon og at G er lineær, da kan du si at x^* er et (strengt) globalt maksimum. Tilsvarende med konveks og minimum.

"The Auditor" ønsker å sjekke påstanden om at (P) løser problemet. Steg:

I. Hvis $\nabla G(x^*) \neq 0$, må følgende to holde:

   (a) $\nabla F(x^*) = \lambda \nabla G(x^*)$

   (b) $G(x^*) = c$

II. For (x^*, λ^*) må SONC holde.

Kapittel 3

Del 2

3.1 Notasjon for hele del 2

3.1.1 The Firm

z_i: mengde brukt av input i
q: antall enheter output
ϕ: produksjonsfunksjon
$\phi_i(z)$: marginalprodukt MP_i
w_i: pris på input i
p: output-pris
$C(w,q)$: kostnadsfunksjon fra cost minimization-problemet
$C_q(w,q)$: marginalkostnad (fra cost minimization-problemet)
$C_{qq}(w,q)$: kurvaturen til kostnadsfunksjonen/helningen på marginalkostnaden (fra cost minimization-problemet)
$\frac{C(w,q)}{q}$: average cost.
$H^i(w,g)$: conditional demand (etterspørsel etter input funnet fra cost minimization-problemet)
Π: profit

3.1.2 The Consumer

x_i: mengde kosnumert av gode i
$x = (x_1,...,x_n)$: konsumvektoren

X: settet av alle goder x
P_i: prisen til gode i
$P = (P_1, ..., P_n)$: prisvektoren
y: inntekt
$\succsim$: weak preference relation
$\triangleright$: revealed preference relation
U: nyttefunksjon
v (required) utility level
$H^i(P, v)$: compensated Hicksian demand. Finnes fra minimeringsproblemet.
$D^i(P, y)$: ordinær etterspørselsfunksjon. Finnes fra maksimeringsproblemet.

3.1.3 The Consumer and the Market

R_i: initial endowment av gode i.
R: endowment-vektoren.
y^h: husholdning h's inntekt (da blir y økonomiens inntekt)
x_i^h: husholdning h's konsum av gode i (da blir x økonomiens konsum)
n_h: antall husholdninger i økonomien
$\bar{y}$: gjennomsnittlig inntekt
$\bar{x}_i$: gjennomsnittlig konsum av gode i

3.1.4 Robinson Crusoe Economy

q: net output vector for hele økonomien

3.1.5 General equilibrium

$U^h, h = 1, ..., n_h$: husholdning h's nytte
$\phi_i^f, f = 1, ..., n_f$: bedrifts f's produksjonskapasitet
$R_i, i = 1, ..., n$: resource stocks av ressurs i
x_i^h: husholdning h's konsum av gode i (da blir x økonomiens konsum)
$\vec{x}^h$: husholdning h's konsum-bundle
$[\vec{x}] = [\vec{x}^1, ..., \vec{x}^{n_h}]$: konsum-bundles for alle husholdninger
q_i^f: net output av gode i av bedrift f.
$\vec{q}^f$: net output valgt av bedrift f.
$[\vec{q}] = [\vec{q}^1, ..., \vec{q}^{n_f}]$: net outputs for alle bedrifter

R_i^h: initial endowment av gode i hos husholdning h.
$\vec{R}^h$: husholdning h's endowment i alt.
$[\vec{R}] = [\vec{R}^1, \dots, \vec{R}^{n_h}]$: endowments for alle husholdninger.
$\vec{a} = ([\vec{x}], [\vec{q}], \vec{P})$.
ς_f^h: husholdning h's eierandel i bedrift f.
$d = ([R], [\varsigma])$: distribution of property among households.

3.2 The Firm

3.2.1 Nevnt som sentralt på oppsummering

- Produksjonsfunksjon
  - MRTS
  - Elasticity of substitution
  - Homogen/homotetisk
- Optimeringsmetodene: kostnadsminimering og profittmaksimering
  - Kostnadsminimering: velg optimal mengde inputs gitt et kvantum
  - Profittmaksimering: velg optimal kvantum gitt output-pris og den optimerte kostnadsstrukturen fra steg 1.
  - En indre løsning gir $MRTS_{12} = \frac{w_2}{w_1}$ (men generelt gjelder $MRTS_{ij} \leq \frac{w_j}{w_i}$)
- Effekten av en prisendring for en input. Med hjelp av conditional demand H^i kan man dele dette opp i en substitusjonseffekt og en outputeffekt. MÅ GJØRES!
- Generalisering av produksjonsfunksjonen til en net-output-vektor.

3.2.2 Viktige formler

- $MRTS_{12} = \frac{\phi_2(z)}{\phi_1(z)}$ (og i optimum i en indre løsning har vi $MRTS_{12} = \frac{w_2}{w_1}$
- $\sigma_{ij} := \frac{-\,\mathrm{d}\log(\frac{z_j}{z_i})}{\mathrm{d}\log(\frac{\phi_j(\mathbf{z})}{\phi_i(\mathbf{z})})}$

- $\varepsilon = (-1) \cdot \frac{\mathrm{d}q/q}{\mathrm{d}p/p}$ (vanlig elasticity)
- $C(w,q) = \min_{\{z \geq 0, \phi(z) \geq q\}} \sum_{i=1}^{m} w_i z_i = \sum_{i=1}^{n} w_i z_i^*$ er cost minimization-problemet (steg 1).
- $\frac{\partial C(w,q)}{\partial w_i} = z_i^*$ er Sheppard's lemma (på toppen er det flatt) og er en extension av the envelope theorem. Ved omskriving får vi altså at $\frac{\partial C(w,q)}{\partial w_i} = H^i(w,q)$.
- $\frac{\partial C(w,q)}{\partial q} = \lambda^*$
- $z_i^* = H^i(w,q)$ (fra cost minimization-problemet).
- Homotetiske funksjoner har egenskapen $\frac{-\phi_1(tz)}{\phi_2(tz)} = \frac{-\phi_1(z)}{\phi_2(z)}$ – altså at helningen til isoquantene er konstante i stråler fra origo.
- $\phi(tz) = t^r \phi(z)$: homogen av grad r, $t, r > 0$.
- $\Pi^* = \max_{\{q \geq 0\}} (pq - C(w,q))$ er profit maximization-problemet (steg 2). Merk at steg 1 settes inn i steg 2.
- $z_i^* = D^i(w,P)$ (fra profit maximization-problemet).
- $q^* = S(w,p)$ er supply-funksjonen.
- $D^i(w,P) = H^i(w,S(w,P))$ er sammenhengen mellom unconditional og conditional demand.

3.2.3 Assumptions

- Firms are trying to maximize their profit
- No production without inputs: $\phi(0) = 0$.
- Firm is a price-taker (samtlige hvis vi studerer en industri).
- Ingen produksjonseksternaliteter: at produksjonsavgjørelsene til ett selskap ikke påvirker MC'en til et annet.

3.2.4 Viktige momenter

En god fremgangsmåte på firm-siden:

I. Regn ut MRTS

II. Sett opp $\phi(z)$-uttrykket og substituer $\phi(z)$ med q hvis rimelig.

III. Løs dette for z_i og substituer z_i^* med $H^i(w,q)$.

IV. Sett opp $P = MC$ hvis FK.

V. Utled og løs for q.

VI. Sett $q = S(w,P)$ for å få supply-funksjonen.

VII. Finn $D^i(w,p)$ ved å bruke funnene fra steg 3 og 6 siden $D^i(w,P) = z_i^* = H^i(w,S(w,P))$. Merk at oppgang i outputpris P øker etterspørselen etter inputs og oppgang i inputpris w reduserer etterspørselen etter inputs.

- En funksjon er homogen av grad r hvis $\phi(tz) = t^r\phi(z),\ t,r > 0$.
- En funksjon har increasing/constant/decreasing returns to scale hvis $\phi(tz) > / = / < t^1\phi(z)$. Ved increasing will expansion path'en være bøyd oppover, ved konstant vil den være en stråle fra origo, og ved decreasing vil den være bøyd nedover.
- Constant returns to scale impliserer at MC er konstant.
- MC konstant impliserer at average cost er constant.
- En technique er et punkt på isokvanten. For eksempel teknikken $z^1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ representerer punktet $(0.2, 0.5)$. Så en spesifikk vektor av z kalles en technique.
- Isokvanten er $\{z : \phi(z) = q\}$.
- Produksjonsconstraint: $q \leq \phi(z)$ (bedriften er technologically efficient hvis likhet).
- Constant returns to scale innebærer at isokvantene har identisk form (FIGUR side 1)
- Technological efficiency: punktene som utgjør isokvanten – altså å produsere en gitt q til lavest mulig inputmengde.
- Economical efficiency: produserer et gitt q (vi er altså på isokvanten) til lavest mulig input-kostnad. Economical efficiency er derfor det kostnadsminimerende punktet på isokvanten.
- MRTS er lik helningen til *isokvantene*, og i denne grafen er aksene merket z_1 og z_2. Den sier hvor mange stk av i vi må legge til hvis vi fjerner 1 stk av j gitt at produksjonsnivået/output skal være uendret.
  - Her er altså lik marginalproduktet til input på y-akse delt på marginalprodukt til input på x-akse.

- MRT – Marginal Rate of Transformation – derimot, er helningen til produksjonsmulighetskurven, og i denne grafen er aksene merket med q_1 og q_2. Merk dog at vi begynner å bruke MRT fra og med vi bruker net output vectors (i multiproduct firms). Derfor har vi inputs her også, og derfor brukes nesten samme notasjon om MRT som med MRTS: $MRT = \frac{\phi_j(q)}{\phi_i(q)}$. Merk også at $\phi(q) \leq 0$.
- $C(w,q)$ er kostnadsfunksjonen vi får fra cost minimization-problemet.
  - $C_q(w,q)$ er derfor lik marginalkostnaden.
  - $C_q q(w,q)$ er kurvaturen til kostnadsfunksjonen, men mer interessant beskriver denne om MC stiger, faller, eller er konstant.
    * $C_{qq}(w,q) > 0 \iff$ decreasing returns to scale (marginalkostnaden blir større av å øke volum)
    * $C_{qq}(w,q) = 0 \iff$ constant returns to scale
    * $C_{qq}(w,q) < 0 \iff$ increasing returns to scale (marginalkostnaden blir mindre av å øke volum)
- Et nyttig triks i denne delen av kurset er å splitte opp eksponenten slik at jeg kan slå to terms sammen siden nå de deler samme eksponent. En enkel illustrasjon er $2^6 \cdot 5^2 = (2^3)^2 \cdot 5^2 = (2^3 \cdot 5)^2$.
- Fant på en nettside, har ikke verifisert dette enda: the production function is said to be homogeneous when the elasticity of substitution is equal to one. Antar her de mener homogen av grad 1.
- Tangentene i strålene fra disse homotetiske funksjonene kan vi anse som isocost-linjer. Så man kan anse punktet $\frac{z_1^*}{z_2^*}$ som et optimum under q'. Siden $z_i^* = H^i(w,q)$, får vi $\frac{H^1(w,q')}{H^2(w,q')}$. Siden funksjonen er homotetisk, vil vi i samme stråle men for to forskjellige kvantum ha samme helning. Altså at $\frac{H^1(w,q')}{H^2(w,q')} = \frac{H^1(w,q'')}{H^2(w,q'')}$. Sette samme ouput på én side gir $\frac{H^1(w,q')}{H^1(w,q'')} = \frac{H^2(w,q')}{H^2(w,q'')}$. Men vi bryr oss bare om relative forskjeller mellom kvantumene, så vi kan likegreit bare sette $q'' = 1$ selv om likheten holder for alle q. Det gir $\frac{H^1(w,q')}{H^1(w,1)} = \frac{H^2(w,q')}{H^2(w,1)}$. Denne likheten må holde for enhver stråle gjennom origo. Siden hver stråle har ulik helning på isocosten, betyr det at denne likheten må holde for alle mulige (w_1,w_2). Derfor er denne likheten uavhengig av w. Videre, likeheten må holde for alle goder (selv om jeg har illustrert det kun med to goder). La oss kalle denne likheten for $b(q)$. Derfor kan vi sette $\frac{H^1(w,q')}{H^1(w,1)} = b(q') \iff H^1(w,q') = b(q')H^1(w,1)$. Innsatt i kostnadsfunksjonen får vi nå $C(w,q') = b(q') \sum_{i=1}^{n} w_i H^1(w,1)$. Men $\sum_{i=1}^{n} w_i H^1(w,1)$ er jo bare avhengig av w, så vi kna

omskrive dette til $a(w)$. Vi ender derfor opp med $C(w,q') = b(q')a(w)$.

- Både boka og Thomas hopper ofte over slackness conditions og går rett på FOC uten dem. I tillegg virker det som Thomas ikke studerer λ i kostnadsminimeringen.
- Husk minuset i elasticity of substitution.
- Husk å bruke at i likevekt er $P = MC$ i alle tilfeller bortsett fra om vi jobber med monopoler.
- Hvis jeg skal løse et minimeringsproblem, så kan jeg bruke enten:
  - $\min \sum_{i=1}^{n} w_i z_i + \lambda(q - \phi(z))$ med (noen av) CS $\frac{\partial L}{\partial z_i} \geq 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda} \geq 0$; eller
  - $\max \sum_{i=1}^{n} (-w_i z_i) + \lambda(\phi(z) - q)$ med (noen av) CS $\frac{\partial L}{\partial z_i} \leq 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda} \geq 0$.
- Når de spør om FOC på eksamen, spør de om FOC med complementary slackness.
- **OBS OBS – denne er ofte i bruk**. Genial måte å vise at z_i ikke kan være 0 og derfor kvitte oss med nesten samtlige scenarioer: anta at vi har $z_i^{\rho-1}, \rho < 1, \rho \neq 0$. Vi ser altså at $\rho - 1 < 0$. En negativ eksponent betyr altså at z_i vil stå i nevner ($\frac{\cdots}{z_i^{\cdots}}$). Men vi kan jo ikke ha 0 i nevner, og derfor kan ikke z_i være 0.
- OBS: MÅ FINNE UT AV BRØKENE I HJØRNELØSNINGENE. Jeg har i hvert fall at:
  - hvis $z_i^* > 0$, har vi $\lambda^* \cdot \phi_i(z^*) = w_i$.
  - hvis $z_i^* = 0$, har vi $\lambda^* \cdot \phi_i(z^*) < w_i$.
- Hvis du blir spurt hva optimalt produksjonsvolum er, løser du med $P = MC$. Hvis du finner at MC er konstant (ingen q i seg), så produserer du uendelig mye hvis $P > MC$, alle $q \geq 0$ er optimalt ved $P = MC$, og du produserer 0 hvis $P < MC$.
- Hvis du skal legge sammen etterspørsel, må du bruke de vanlige (ikke inverse) etterspørselsfunksjonene. Så anta at i marked 1 er $q_1 = 84 - \frac{3}{4}p_1$ og $q_2 = 24 - \frac{1}{4}p_2$. Slår vi markedene sammen, blir samlet etterspørsel derfor $\hat{q} = 108 - \hat{p}$ (altså bare enkel addering).
- En homogen funksjon har konstant helning lang en stråle gjennom origo. Dette er altså det samme som for homotetiske, men grunnen er enkel: alle homogene funksjoner er homotetiske, men alle homotetiske funksjoner er ikke homogene. Så vi kan altså si at *homotetiske funksjoner har konstant helning lang en stråle gjennom origo*. Siden en homogen funksjon er per def også homotetisk, gjelder dette for homogene funksjoner også. $\therefore$ $\{$homogene funksjoner$\} \subset \{$homotetiske funksjoner$\}$.

- En homotetisk funksjon er en produksjonsfunksjon som er en positiv monoton transformasjon av en homogen produksjonsfunksjon.
- Lav elasticity of substitution gir sterk krumming. Høy EoS gir svak krumming. Så lav gir sterk og høy gir svak.
- Generell likevektsmodell, når vi kommer dit, inkluderer ikke i) eksternaliteter, ii) markedsmakt, iii) asymmetrisk informasjon, eller iv) atferdsaspekter slik som bounded rationality.
- Når vi har funnet optimum z^*, må vi sjekke optimumet med second-order conditions. Ved én constraint, kan vi sjekke dette ved å se på bordered Hessian: $\begin{pmatrix} 0 & (\nabla G(z^*))^T \\ \nabla G(z^*) & \frac{\partial^2 \mathscr{L}(z^*,\lambda^*)}{\partial z \partial z^T} \end{pmatrix}$. Vi bruker denne ikke for å se om den er min/maks i hele domenet, men om den er min/maks i det feasible området. Husk at min gir PD og maks gir ND. Husk også at ved bordered Hessian ved min-sjekk får PD minus foran.
- I profittmaksimeringsproblemet trenger vi at:
  - FOC at $P = MC$ ved $q^* > 0$ og $P < MC$ ved $q^* = 0$.
  - Man er på den stigende delen av MC-kurven, så $C_{qq}(w,q) \geq 0$.
  - $\Pi > 0$ for q^*.
- I profittmaksimeringsproblemet finner vi at $P\phi_i(z^*) \leq w_i$ (og med likhet hvis $z_i^* > 0$). Med andre ord at verdien av marginalproduktet til en input i skal være mindre eller lik prisen av input'en. Hvis verdien er lavere enn prisen, kjøper vi ikke noe av denne input'en. Hvis verdien er lik prisen, kjøper vi en positiv mengde av input'en.
- Vi optimerer i to steg fordi steg 1 er svært mobiliserbart og gir oss derfor mye innsikt.
- Hvis indifferenskurvene til kostnadsfunksjonen er konveks, så er kostnadsminimerende punkt unikt (kommer fra Sheppard's lemma).
- Egenskaper ved kostnadsfunksjonen $C(w,q)$:
  - nondecreasing and continuous in w.
  - homogeneous of degree 1 in w.
  - concave in w.
  - strictly increasing in at least one w_i.
  - if the production function is continuous, then $C(w,q)$ is strictly increasing in q.

  - At every point where the differential is defined, $\frac{\partial}{\partial w_i}[C(w,q)] = z_i^*$ (optimal demand for input i.

- $q^* = S(w,P)$ er supply-funksjonen – hvor mye bedriften skal tilby avhenger av input- og output-prisene – og denne er homogen av grad 0 (dobler du w og P, får vi samme S.)

- Spørsmålet blir da hvor mye man skal bruke av inputs. Vel, i minimeringsproblemet har vi at $z_i^* = H^i(w,q)$. I maksimeringsproblemet trenger vi ikke ta hensyn til et gitt q fordi, som vi ser med $q^* = S(w,P)$, avgjøres q av input- og output-prisene. Vi kan derfor si at fra et profittmaksimeringsperspektiv har vi $z_i^* = D^i(w,P)$, Hvor $D^i(w,P)$ er unconditional demand – altså ubetinget på q. Men siden z_i^* er lik uavhengig av om den kommer fra kostnadsminimerings- eller profittmaksimeringsproblemet, kan vi sette at $D^i(w,P) = H^i(w,q)$. Men vi vet at q avgjøres av input- og output-prisene, så vi kan sette inn $q^* = S(w,P)$. Det gir oss følgende sammenheng mellom unconditional og conditional demnad: $D^i(w,P) = H^i(w,S(w,P))$.

- Hvis man ikke har tydelig angitte ikke-negativitetskrav, si at FOC med hensyn på x og y holder med likhet. Videre, hvis vi har en likhet i restriksjonen, vil FOC med hensyn på λ holde med likhet.

- **Hvis vi skal evaluere om kritiske punkter er max eller min og vi har restriksjoner i optimeringsproblemet, *må* man huske å sjekke definitthetsegenskapene til bordered Hessian, ikke vanlig Hessian.**

- Ofte en feil fremgangsmåte på disse problemene: løse for z_1 og z_2 for å finne λ. Istedenfor er en måte som ofte gir riktige svar er å **løse for λ og bruke det til å finne z_1 og z_2.**

- **Skriv optimeringsproblemene som et maksimeringsproblem. Da er jeg sikker på at bordered Hessian-evalueringen blir riktig.**

- I multifirm-settings kan det ofte være nyttig å anta identiske bedrifter (selv om kundene anser produktene som noe differensierte).

- Elastisitet: huskeregel for å vite hva som går i teller og hva som går i nevner. (Price) elasticity of demand sjekker hvor mye output endres av en prosentvis økning i pris. Så $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}P}$. Opp-ned gir derfor $\frac{P}{q}$, så elasticity of demand-formelen blir $\varepsilon = (-1) \cdot \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}P}\frac{P}{Q}$.

- Den absolutt laveste prisen man kan ta for et produkt er der AVC er på minimum. For alle andre priser over dette gjelder $P = MC$ i FK-settingen.

- Monopolister tar utgangspunkt i $\varepsilon = (-1) \cdot \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}P}\frac{P}{Q}$. Jo mindre priselastisk konsumentene er, jo høyere mark-up kan monopolistene ta. Derfor, hvis vi ser på elastisitet som en positiv verdi, beregner vi mark-up'en som $P = \frac{MC}{1-\frac{1}{\varepsilon}}$.

- Som diskriminerende monopolist, kan du velge å selge i ett eller flere markeder. Bruker man entry fees, gir det $P = MC$ og $F_0 = CS$.
- I et multi-firm market, antar vi at bedrifter entrer så lenge profitt kan tjenes, så vi forventer at bedrifter entrer markedet helt til long run-profitt er 0.
- Monopolistisk konkurranse: hver bedrift opptrer som en monopolist for et unikt produkt. Disse tar altså *ikke* prisen for gitt. Men markedet har entry/exit-muligheter, så da skiftes hver bedrift sin demand-kurve til å bli mer priselastisk. Dette driver profitten lavere og lavere nedover, og den marginale monopolistiske konkurrenten vil ende opp med 0 profitt.
- Jo mindre kurvatur på isokvantene, jo større elastisitet.

3.2.4.1 $P\uparrow$'s effect on q^*

Vi tilpasser oss der

$$P = MC$$

Dette kan vi omskrive til

$$P = C_q(w, q^*)$$

Men vi vet at optimalt kvantum er lik supply-funksjonen, så vi kan sette inn $q^* = S(w, p)$ og få

$$P = C_q(w, S(w, P))$$

Partiellderivert med hensyn på P gir

$$\frac{\partial}{\partial P}[P] = \frac{\partial}{\partial P}[C_q(w, S(w, P))]$$

Vi kan bruke kjerneregelen og få $\frac{\partial}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial P}$. Men husk at $q^* = S(w,P)$, så vi kan sette $\frac{\partial q}{\partial P}$ som $\frac{\partial S(w,p)}{\partial P}$. Det gir

$$1 = \frac{\partial}{\partial P}[C_q(w,S(w,P))]\frac{\partial}{\partial P}[S(w,P)]$$

Omskrevet blir det

$$1 = C_{qq}(w,S(w,P)) \cdot S_P(w,P)$$

Løser vi for $S_P(w,P)$ får vi altså

$$S_P(w,P) = \frac{1}{C_{qq}(w,S(w,P))} \tag{3.1}$$

Dette viser altså hvilken effekt på q^* en prisøkning P har.

3.2.4.2 $P\uparrow$'s effect on z_i

Vet vet at i optimum brukes mengde z_i^* av input i. Men z_i^* kan skrives på to forskjellige måter:

$$D^i(w,P) = H^i(w,q^*)$$

Vi bruker at $q^* = S_P(w,P)$ og får

$$D^i(w,P) = H^i(w,S_P(w,P))$$

Partiellderivert med hensyn på P gir

$$\frac{\partial}{\partial P}[D^i(w,P)] = \frac{\partial}{\partial P}[H^i(w,S_P(w,P))]$$

Vi kan bruke kjerneregelen og få $\frac{\partial}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial P}$. Men husk at $q^* = S(w,P)$, så vi kan sette $\frac{\partial q}{\partial P}$ som $\frac{\partial S(w,p)}{\partial P}$. Det gir

$$\frac{\partial}{\partial P}[D^i(w,P)] = \frac{\partial}{\partial q}[H^i(w,S_P(w,P))] \cdot \frac{\partial S(w,P)}{\partial P}$$

Omskrevet blir det

$$D_P^i(w,P) = H_q^i(w,S(w,P)) \cdot S_P(w,P)$$

Første ledd på høyre side er som regel > 0 imens andre ledd er alltid > 0.

Sheppard's lemma er at $C_i(w,q) = z_i^* = H^i(w,q)$. Partiellderivere med hensyn på q gir derfor $C_{iq}(w,q) = H_q^i(wq,)$. Setter vi inn, får vi

$$D_P^i(w,P) = C_{iq}(w,q) \cdot S_P(w,P) \tag{3.2}$$

Med andre ord, en endring i etterspørsel av input i avhenger av kostnads- og supplyfunksjonen.

3.2.4.3 $w\uparrow$'s effect on z_i

Igjen vet vi at z_i^* kan skrives på to måter:

$$D^i(w,P) = H^i(w,q^*)$$

Vi substituerer $q^* = S(w,P)$ og får

$$D^i(w,P) = H^i(w,S(w,P))$$

Partiellderiverer vi med hensyn på w_j, gir det

$$\frac{\partial}{\partial w_j}[D^i(w,P)] = \frac{\partial}{\partial w_j}[H^i(w,S(w,P))]$$

Her må vi bruke produktregelen og kjerneregelen på høyre side siden w inngår både i H direkte og i H indirekte gjennom $S(w,P)$. Vi skriver $S(w,P) = q$ igjen med viten om at q avhenger av w og P.

$$\frac{\partial}{\partial w_j}[D^i(w,P)] = \frac{\partial}{\partial w_j}[H^i(w,q^*)] + \frac{\partial}{\partial q}[H^i(w,q^*)]\frac{\partial q}{\partial w_j}$$

I $\frac{\partial q}{\partial w_j}$ bruker vi at $q = S(w,P)$ og får

$$D^i_j(w,P) = H^i_j(w,q^*) + H^i_q(w,q^*) \cdot S_j(w,P)$$

Sheppard's lemma er at $C_i(w,q) = z_i^* = H^i(w,q)$. Partiellderivere med hensyn på q gir derfor $C_{iq}(w,q) = H^i_q(wq,)$. Setter vi inn, får vi

$$D^i_j(w,P) = H^i_j(w,q^*) + C_{iq}(w,q) \cdot S_j(w,P)$$

Vi vet at i optimum er $P = MC$.

Setter vi inn at $MC = C_q(w,S(w,P))$, får vi $P = C_q(w,S(w,P))$.

Partiellderiverer vi dette med hensyn på w_j, $\frac{\partial}{\partial w_j}P = \frac{\partial}{\partial w_j}C_q(w,S(w,P))$, får vi
$0 = \frac{\partial}{\partial w_j}[C_q(w,q)] + \frac{\partial}{\partial q}[C_q(w,q)] \cdot \frac{\partial q}{\partial w_j}$.

Vi kan bruke at $q^* = S(w,P)$ og sette inn slik at vi får $0 = \frac{\partial}{\partial w_j}[C_q(w,q)] + \frac{\partial}{\partial q}[C_q(w,q)] \cdot \frac{\partial S(w,P)}{\partial w_j}$.

Omskrevet penere blir dette $C_{qj}(w,q) + C_{qq}(w,q) \cdot S_j(w,P)$, hvilket vi igjen kan omskrive til $S_j(w,P) = \frac{-C_{qj}(w,q)}{C_{qq}(w,q)}$. Satt inn i funksjonen gir det

$$D^i_j(w,P) = H^i_j(w,q^*) + C_{iq}(w,q) \cdot \frac{-C_{qj}(w,q)}{C_{qq}(w,q)}$$

Renskrevet litt videre får vi

$$D^i_j(w,P) = H^i_j(w,q^*) - C_{iq}(w,q) \cdot \frac{C_{qj}(w,q)}{C_{qq}(w,q)} \tag{3.3}$$

Første ledd på høyre side er substituion effect og andre ledd er output effect.

Just as a consumer's response to a change in the price of a good can be broken into a substitution effect and an income effect, a firm's response to an input price change can be broken into a substitution effect and an output effect. For the consumer, the substitution effect shows how he would change his purchases if his income were adjusted to leave him at his original level of well-being, and the income effect shows how he would change his purchases due to the adjustment in purchasing power at the new output prices. **For the firm, the substitution effect shows how the firm would change its use of inputs if it were to continue producing the same amount of output, and the output effect shows how the firm adjusts its use of inputs when it chooses a new profit-maximizing output level.**

3.3 The Consumer

3.3.1 Viktige formler og axiomer

Axioms

Revealed preferences:

- $x \triangleright x'$: x er avslørt foretrukket til x'
- if $x \triangleright x'$, then $x' \not\triangleright x$: Weak Axiom of Revealed Preferences **WARP**.

The axiomatic approach:

- Completeness (nødvendig for å jobbe med nyttefunksjoner): $\forall x, x' \in X. \quad$ enten $x \succsim x', x' \succsim x$, eller begge.
- Transitivity (nødvendig for å jobbe med nyttefunksjoner): $\forall x, x', x'' \in X. \quad$ hvis $x \succsim x'$ og $x' \succsim x''$, så er $x \succsim x'$.
- Continuity (nødvendig for å jobbe med nyttefunksjoner): $\forall x \in X$ er settet som inneholder både alle x' med $x \succsim x'$ og alle x' med $x' \succsim x$ er lukket.
- Greed: Hvis $\mathbf{x} > \mathbf{x}'$, så er $U(\mathbf{x}) > U(\mathbf{x}')$.
- Strict quasiconcavity: $\forall x', x'' \in X$ s.t. $U(x') = U('')$, we have that $U(t \cdot x' 0 (1-t) \cdot x'' > U(x')$ (which also gives $> U(x'')$.
- Smoothness: U er dobbeltderiverbar.

Formler

- $MRS_{ij} = \frac{U_j(x)}{U_i(x)}$ (og i optimum er $\frac{U_j(x)}{U_i(x)} = \frac{P_j}{P_i}$ (merk indeksene)
- v: required utility level (i.e. $U(x) \geq v$)
- $C(P, v) = \min\limits_{(x_i \geq 0, U(x) \geq v)} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} P_i x_i \right) = \sum\limits_{i=1}^{n} P_i x_i^*$
- $\frac{\partial C(P,v)}{\partial P_i} = x_i^*$ (Shephard's lemma – på toppen er det flatt).
- $x_i^* = H^i(P, v)$: compensated Hicksian demand. Finnes fra minimeringsproblemet. Optimal etterspørsel gitt priser P og påkrevd nyttenivå v. Med andre ord at du blir kompensert slik at du fortsatt kan oppnå v under de nye prisene.
- $x_i^* = D^i(P, y)$: ordinær etterspørselsfunksjon. Finnes fra maksimeringsproblemet.
- $D^i_j(P, y) = H^i_j(P, v) - x_j^* D^i_y(P, y)$: Slutsky
- $V(P, y) = \max\limits_{(x_i \geq 0, \sum\limits_{i=1}^{n} P_i x_i \leq y)} \Big(U(x) \Big) = U(x^*)$: indirekte nyttefunksjon
- $V_i(P, y) \leq 0$: prisøkning gir lavere nytte
- $V_u(P, y) = \mu^*$: økning i nytteverdi ved inntektsøkning er lik Lagrange-multiplikatoren.
- $V(P, C(P, v)) = v$

- $x_i^* = \frac{-V_i(P,y)}{V_y(P,y)}$: Roy's identity. Dette er under forutsetning at Sheppard's lema holder: $C_i(P,v) = x_i^*$.
- $CV(P \to P') := C(P,v) - C(P',v) = \int_{P_1'}^{P_1} H^1(\rho_1, P2, ..., P_n, v)\,\mathrm{d}\rho$ (compensating variation)
- Alternativ: Løs $v(p', y - CV) = v(P,y)$ for CV.
- $EV(P \to P') := C(P,v') - C(P,v) = \int_{P_1'}^{P_1} H^1(P_1, P2, ..., P_n, v')\,\mathrm{d}p$
- $CS(P \to P') := C(P,v') - C(P,v) = \int_{P_1'}^{P_1} D^1(\rho, P2, ..., P_n, y)\,\mathrm{d}\rho$

3.3.2 Assumptions

- List of commodities
- Divisible commodities
- No upper limit on the consumption amounts
- From the consumer's point of view, all goods are available at any potential quantity but at a given and known list of unit prices.
- The consumer has a utility function
- Revelead preferences: assume they choose the option they prefer

3.3.3 Viktige momenter

- Hver konsument har en budsjettbetingelse som kan presenteres på én av to måter: $\sum P_i x_i \leq y$ (monetary income endowment) og $\sum P_i x_i \leq \sum P_i R_i$ (resource endowments).
- x er avslørt foretrukket til x' hvis x ble valgt når x' også var tilgjengelig. WARP sier at hvis du først velger x med x' tilgjengelig, og choice set'et endres (budsjettlinja flytter på seg) og begge valgene er fortsatt tilgjengelige, så velger du fortsatt x.
- Med completeness-, transitivity-, og continuity-axiomene, kan vi si at det eksisterer en nyttefunksjon $U(x)$ med $U(x) \geq U(x')$ iff $x \succsim x' \quad \forall x, x' \in X$. Disse tre axiomene lar oss altså jobbe med nyttefunksjoner istedenfor avslørte preferanser.

- MRS sier hvor mange enheter av gode i vi må legge til for å kompensere for en enhet reduksjon i gode j og fortsatt oppnå samme nytte.
- Husk at U er kun ordinal.
- **"Jeg kan for eksempel gi dere en oppgave om perfekte substitutter og spørre hvilket axiom som blir violated (svar: perfekte substitutter fucker opp strick quasiconcavity)**
- Huskeregelen for consumentaxiomer er CSS CGT:

  I. C: Continuity

  II. S: Smoothness

  III. S: Strict quasiconcavity

  IV. C: Completeness

  V. G: Greed

  VI. T: Transitivity

- Så axiomene oppsummert:
  - **CSS**: **nyttefunksjonene** må ikke bare være kontinuerlige (C), men også dobbelderiverbare (**S**moothness) og strengt kvasikonkave (S).
  - **CGT**: **preferansene** må ikke bare være komplette (C), men vi må ville ha mer av alt (**G**reed) og preferansene må være transitive (T).
- Samme som med firm optimization, finner vi H^i fra minimeringsproblemet (minimer kostnader gitt påkrevd nytte) og D^i fra maksimeringsproblemet (maksimer nytte gitt budsjett). Men merk at $D^i(P,y)$ er den ordinære etterspørselsfunksjonen, og denne er homogen av grad 0.
- Førsteordensbetingelsene til nyttemaksimeringsproblemet er at $\frac{U_j(x^*)}{U_i(x^*)} \leq \frac{P_j}{P_i}$ og med likhet hvis vi har en indre løsning.
- v er required utility level (i.e. $U(x) \geq v$) – det er med andre ord maksimalt oppnådd nytte i nyttemaksimeringsproblemet. Denne er homogen av grad 0 i alle priser og inntekter, og den er kvasikonkav i priser.
- Slutsky-funksjonen er $D^i_j(P,y) = H^i_j(P,v) - x^*_j D^i_y(P,y)$. Merk at $H^i_j(P,v)$ er substitusjonseffekten, og denne er positiv for substitutter og negativ for komplementer. $-x^*_j D^i_y(P,y)$ er inntektseffekten (realinntekten/kjøpekraften din endres av prisendring for en gitt nominell

y) og denne er positiv for normale goder og negativ for inferiøre goder. I alle andre tilfeller enn for Giffen-goder vil substitusjonseffekten være større enn inntektseffekten.

- Et viktig poeng her som er lett å vise numerisk er at når inntektseffekten $IE = 0$, da er $CV = EV = CS$.

- Giffen-gode: inntektseffekten overstiger substitusjonseffekten.
- Merk at $H_i^i(P,v) \leq 0$: en prisøkning på gode i har en negativ substitusjonseffekt på gode i. Det gir mening: man kan anse gode i som et "komplement" til gode i – øker prisen på gode i, faller etterspørselen til gode i.
- Husk at $D(P,y)$ kommer fra U-maks.
- Roy's identity: This gives a method of deriving the Marshallian demand function of a good for some consumer from the indirect utility function of that consumer. It is also fundamental in deriving the Slutsky equation.

3.3.3.1 Welfare

- $V(P,y) = \max\limits_{(x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} P_i x_i \leq y)} \Big(U(x) \Big)$ kan brukes til å se hva som skjer med konsumentvelferd når enten P eller y endres. Merk at siden $U(x)$ er ordinal, er $V(P,y)$ også det.
- Si at prisen endres fra P til P', men at y er uendret. Si også at dette er et prisfall. Et prisfall er bra for konsumenten, så v' er større enn v. Det er to måter å studere dette på:

  I. finn inntektsnivået som ville gitt v istedenfor v'. Dette er *compensating variation* **(CV)** og finnes med $CV(P \to P') := C(P,v) - C(P',v)$. Altså hvor mye man skal kompenseres (her: straffes) i inntekt for å oppnå samme nytte.

  II. finn inntektsnivået som ville gitt v' istedenfor v. Dette er *equivalent variation* **EV** av og finnes med $EV(P \to P') := C(P,v') - C(P,v)$

- Hvis vi ønskerå vite hvor stor prosentvis endring i inntekten vi får på grunn av en prisendring men gitt uendret v, så må vi spørre oss hva vi skal bruke som sammenligningsår (base year eller current year). Bruker vi v, base-year, skal vi bruke CV. Bruker vi v', current-year, skal vi bruke EV.

3.4 The Consumer and the Market

3.4.1 Viktige formler

- $y = \sum_{i=1}^{n} P_i R_i$ (eiendomsrettigheter)
- $\frac{\partial y}{\partial P_j} = R_j$
- $x_i^* = D^i(P, y) = D^i(P, \sum_{i=1}^{n} P_i R_i)$ (optimal løsning fra nyttemaksimeringsproblemet)
- $\frac{\mathrm{d}x_i^*}{\mathrm{d}R_j} = D_y^i(P, y) \cdot P_j$ (for eksempel hvordan å oppdage mer olje endrer konsumet)
- $\frac{\mathrm{d}x_i^*}{\mathrm{d}P_j} = H_j^i(P, v) - (x_j^* - R_j) \cdot D_y^i(P, y)$ (for eksempel hvordan økt oljepris endrer konsumet). Merk at $H_j^i(P, v)$ er substitusjonseffekten og $-(x_j^* - R_j) \cdot D_y^i(P, y)$ er inntektseffekten. Merk at inntektseffekten avhenger av om du er netto tilbyder eller netto konsument.
- $S(P) := R_1 - x_1$ (supply-funksjonen)
- $\frac{P_1}{P_2} = 1 + r$
- $y := R_1 + \frac{R_2}{1+r} = y_1 + \frac{y_2}{1+r}$ (intertemporalt budsjett, enten man anser det som endowments eller som cash flows).
- $S(r, \mathbf{y}) := y_1 - x_1$ (sparing)
- $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{n_h} y^h$ (gjennomsnittlig inntekt/inntekten til en representativ konsument)
- $\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{n_h} x_i^h$ (gjennomsnittlig konsum av gode i/konsumet til en representativ konsument)
- Vi kan omskrive den over til $\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{n_h} D^{hi}(P, y^h)$ hvis etterspørsel D^{hi} er uavhengig av inntekt.
- $x_i(P) = \sum_{h=1}^{n_h} D^{hi}(P, y^h)$ (aggregate demand)

3.4.2 Assumptions

- Goods are pure private goods (rival and excludable)
- Antall goder produsert er minst like mye som aggregert konsum
- Representativ konsument: etterspørsel påvirkes ikke av inntektsnivået (tough assumption)

3.4.3 Viktige momenter

- Vi kan selvfølgelig si at husholdningen har inntekt y, men vi kan også si at de ar eiendomsrettigheter på gode $1,2,...,n$. Så vi kan si at $y = \sum_{i=1}^{n} P_i R_i$.
- Da blir optimeringsproblemet å maksimere nytte gitt at kostnaden er mindre eller lik verdien av ressursene.
- Inntektseffekten ved en prisøkning avhenger av om du er nettokonsument eller -tilbyder. Er du nettotilbyder, vil en prisøkning i gode j gi økt inntekt. Hvis normalt gode, vil etterspørselen etter gode i øke. Er du nettokonsument, vil en prisøkning av gode j gi redusert inntekt. Ved normalt gode i vil du etterspørre mindre.
- **The offer curve** viser hvordan konsumet av gode x_1^* og x_2^* endrer seg ved prisendringer. Prisendringer gjør at budsjettlinja pivoterer rundt **R** og dermed får vi en venstrestilt bananform som offer curve. Innsikten er at ved litt prisøkning i gode 1 konsumerer jeg mer av gode 2 og mindre av gode 1. Men ved høy prisøkning konsumerer jeg mer av gode 1 igjen (i.e. mer av begge – dette henger nok sammen med at vi foretrekker et balansert budsjett fremfor et spesialisert et). *Merk at aksene er x_1 og x_2.*
- **The Supply Curve** har en høyrestilt bananform og aksene er $R_1 - x_1$ og P_1. Den viser den samme innsikten men tydeliggjør prisøkningen på gode 1: ved litt prisøkning på gode 1 vil du beholde mindre (i.e. konsumere mer av de andre gode, slik som offer curve også sier), men ved en stor prisøkning vil du beholde mer selv.
- Eksempel med labor supply:
  - R_1 er antall timer tilgjengelig
  - x_1 er timer du kan konsumere på hvile. Prisen på hvile er $P_1 = w$ siden hvile i seg selv ikke koster noe direkte men har en alternativkostnad i form av tapt lønn. Så timelønna di blir timeprisen på hvile.
    - Man kan dele inn i SE og IE her også hvis man vil det.
  - $l = R_1 - x_1$ er derfor en persons labor supply
- **Sparing**. Vi har to goder: konsum i dag og konsum i fremtiden. Prisforholdet er $\frac{P1}{P_2} = 1 + r$. Merk at $1 + r$ reflekterer trade-off'en melom konsum nå og i neste periode. Altså at for hver enhet av x_1 jeg ofrer, får jeg $(1 + r)x_2$ tilbake senere.
- **Aggregering av goder**: Hvis de relative prisene til en gruppe commodities forblir uendret, kan vi behandle gruppen som at de er én commodity.

- **I Cowell-oppgavene om dette temaet har det vært nyttig å sette opp de to første FOC slik at y (eventuelt y minus en minsteforbrukskomponent k) står på venstre side og resten (λ og mer) på høyre side slik at man kan addere de to ligningene sammen og deretter omgjøre høyresiden til y.**
- En person supplier markedet hvis konsum er mindre enn endowment.
- Hvis man legger på en rasjoneringskvote c på for eksempel gode 2, får vi et av to følgende scenarioer:
  - Hvis optimalt konsum var opprinnelig mindre enn c, så endres ingenting.
  - Ellers: $x_2 = c$. Da må du sette opp $\sum_{i=1}^{n} P_i x_i = y$, eventuelt $\sum_{i=1}^{n} = \sum_{i=1}^{n} P_i R_i$, og løse for den andre x'en. Merk også at:
    * hvis $c > R_2$, så supplier du mer av gode 1 til markedet for å finansiere $x_2 - R_2 = c - R_2$.
    * hvis $c < R_2$, så supplier du mindre av gode 1 til markedet for å konsumere selv.
- **Intertemporal etterspørsel**: Optimeringsproblemet vårt er $\max U(\mathbf{x})$ s.t. $x_1 + \frac{x_2}{1+r} \leq y$. Men merk at vi kan se på y som endowments av cash flows over flere tidsperioder, så det blir $x_1 + \frac{x_2}{1+r} \leq y_1 + \frac{y_2}{1+r}$ istedet. Dette innebærer altså at vi kan spare eller låne i periode 1, og sparefunksjonen er $S(r, \mathbf{y}) := y_1 - x_1$.
- $\frac{P_1}{P_2} = 1 + r$ reflekterer trade-off mellom konsum nå og i neste periode.
- $x_i(P) = \sum_{h=1}^{n_h} D^{hi}(P, y^h)$ aggregate demand – merk at effekten av en prisendring kan avhenge av fordelingen av inntekt. Derfor må vi behandle aggregert etterspørsel som en multippel av en representativ konsument.

FIGUR AV OFFER CURVE OG SUPPLY CURVE.

3.5 Robinson Crusoe Economy

3.5.1 Viktige formler og axiomer

3.5.1.1 Axiomer

I. $\mathbf{0} \in Q$: *possibility of inaction*—must be possible not to produce

II. $Q \cap \mathbb{R}^n_+ = \emptyset$ (alternativt $\exists i.\ q_i \geq 0 \land \exists j.\ q_j \leq 0$): *no free lunch*—you can't have a technique that gives output without input

III. $Q \cap (-Q) = \emptyset$: *irreversibility*—you can't reverse production

IV. $q^0 \in Q \land q \leq q^0 \implies q \in Q$: *free disposal*—outputs may be thrown away and wasted.

V. $q', q'' \in Q \implies q' + q'' \in Q$: *additivity*—adding feasible technologies is also feasible

VI. $q^0 \in Q \implies tq^0 \in Q \quad \forall t \in \langle 0; 1 \rangle$: *divisibility*—any point joining a feasible input/output combo to the origin is feasible.

3.5.1.2 Formler

- $\forall i.\ x_i \leq q_i + R_i$ (materials balance condition)
- $A(R; \phi) = \{x : x \in X, x \leq q + R, \phi q \leq 0\}$ (production possibility set)

3.5.2 Assumptions

- Antar ingen eksternaliteter mellom bedrifter slik at vi kan legge sammen produksjonsprosessene og få en produksjonsfunksjon for hele økonomien.
- Ingen handel med verden utenfor
- Én økonomisk agent
- All produksjon må lages fra nåværende ressurser

3.5.3 Viktige momenter

- Robinson Crusoe-modellen er den enkleste generelle likevektsmodellen.
- Hvis A er konveks, U er konkavformet, og U tilfredsstiller greed-aksiomet, så eksisterer det skyggepriser ρ slik at vi kan splitte optimeringsproblemet i to og få:
$$\max_{x,q} U(x) \text{ s.t. } x \leq X, \phi(q) \leq 0, x \leq q + R = \begin{cases} 1. \quad \max\limits_{q} \sum\limits_{i=1}^{n} P_i(q_i + R_i) \text{ s.t. } \phi(q) \leq 0 \\ 2. \quad \max\limits_{x} U(x) \text{ s.t. } x \in X, \sum\limits_{i=1}^{n} P_i x_i \leq y \end{cases}$$
dette impliserer blant annet at et separat firma og en konsument oppnår de samme økonomiske valgene (høyre side av likheten med bedrift øverst og konsument nederst) som en

single “planner” (venstre side av likheten) gitt det riktige settet med skyggepriser. **Dette er hva som får generell likevekt til å fungere.**

- Handel frikobler q^* og x^* og konveksifiserer og øker A.
- Optimum finner vi der $\frac{\phi_i}{\phi_j} = \frac{U_i}{U_j}$ – Altså der $MRT = MRS$
- Additivity rules out DRTS og divisibility rules out IRTS, så sammen har de implikasjonen at vi antar CRTS: at hvis $q \in Q$, så er $tq \in Q, t \geq 0$.

3.6 The General Equilibrium Model

3.6.1 Viktige formler

- $\forall$ goder i. $\sum_{h=1}^{n_h} x_i^h \leq \sum_{f=1}^{n_f} q_i^f + \sum_{h=1}^{n_h} R_i^h$ (generalized material balance condition)
- $y^h = \sum_{i=1}^{n} P_i R_i^h + \sum_{f=1}^{n_f} \varsigma_f^h \pi^f$ (husholdnings inntekt er ressursene de eier pluss eierandelene i selskapene).
- $\pi^f = \sum_{i=1}^{n} P_i q_i^f$ (profittfunksjon)
- $y^h = \sum_{i=1}^{n} P_i \left(R_i^h + \sum_{f=1}^{n_f} \varsigma_f^h q_i^f \right)$ (omskrevet husholdningens inntekt)
- $E_i(P) := x_i(P) - q_i(P) - R_i$ (excess demand)
- $E_i^*(P) \leq 0, \quad P_i^* E_i^*(P), \quad P_i^* \geq 0$ (CS-betingelsene for excess demand)
- $\sum_{i=1}^{n} P_i E_i(P) = 0$ (Walras’ Law)

3.6.2 Assumptions

- Bytteøkonomi: kvasikonkave preferanser
- Bytteøkonomi: begge tjener på handel – altså at ingen vil si ja til allokeringer de vet de kunne ha forbedret.

3.6.3 Viktige momenter

- Hvis man i en generell likevektsmodell hvor vi vet hvilke q_i som er inputs og hvilke som er outputs, og deretter blir spurt om å tegne isokvanten og transformasjonskurven, må du huske på følgende: isokvanten brukes inputs som akser og transformasjonskurven bruker outputs som akser. Eksempler hvor q_1, q_2 er outputs og q_3, q_4 er inputs:
  - $\phi(q) = q_1^2 + q_2^2 + q_3 + q_4$
    - Input-delen av produksjonsfunksjonen er $q_3 + q_4$, og derfor blir isokvanten en rett linje.
    - Output-delen av produksjonsfunksjonen er $q_1^2 + q_2^2$, og derfor blir transformasjonskurven sirkulær.
  - $\phi(q) = q_1 + q_2 + max(q_3, q_4)$
    - Input-delen av produksjonsfunksjonen er $max(q_3, q_4)$, og derfor blir isokvanten rektangelformet.
    - Output-delen av produksjonsfunksjonen er $q_1 + q_2$, og derfor blir transformasjonskurven en rett linje.
- *State of the economy* er definert med $[\vec{x}]$ og $[\vec{q}]$. Dette kalles for en allokering $\vec{a}$.
- En allokering er en *competitive allocation* $\vec{a}^* = ([\vec{x}^*], [\vec{q}^*], \vec{P})$ iff **hver eneste bedrift og konsument optimerer sitt egne scenarioer**. Med andre ord en competitive allocation iff **alle** $\vec{x}^h \in [\vec{x}]$ er en løsning til konsumentens *maksimeringsproblem* $\max\limits_{x^h} U^h(\vec{x}^h)$ s.t. $x^h \in X, \sum\limits_{i=1}^{n} P_i x_i^h \leq y^h$ **og** iff **alle** $\vec{q}^f \in [\vec{q}^f]$ er en løsning til bedriftens *maksimeringsproblem* $\max\limits_{q^f} \sum\limits_{i=1}^{n} P_i q_i^f$ s.t. $\phi^f(q^f) \leq 0$.
- Generalized material balance condition sier at etterspørsel (konsum) kan ikke overstige tilbud.
- Inntekt kommer fra to kilder: 1) verdi av privat-eide ressurser og 2) verdier (bedritens profitt) fra eierandeler i selskaper.
- Husholdninger eier ressursene. Bedriftene har bare produksjonsteknologien, men husholdningene eier inputs.
- I en bytteboks mellom to personer har vi ingen produksjon fordi bedrifter ikke eksisterer og konsum må være lik det man har (siden mer er bedre). Så en spesifikk material balance

constraint blir derfor $\forall$ goder i. $\sum_{h=1}^{n_h} x_i^h = \sum_{h=1}^{n_h} R_i^h$

- Priser må fungere som en rasjoneringsmekanisme, så tilfeldige priser i en bytteøkonomi vil føre til at material balance constraint'en brytes.
- Hvor vi ender opp på kontraktskurven avhenger av indifferenskurvene og initial endowment. Derfra vil prisforholdet hjelpe oss til et Pareto-optimalt punkt.
- 1. velferdsteorem: det eksisterer alltid et prisforhold som gir Pareto-optimum (SAM020: FK-likevekten er økonomisk effektiv).
- 2. velferdsteorem: ved å endre initialallokeringen i favør less well-off, vil partene bytte seg til en rettferdig fordeling (Pareto-optimum).
- Alle punkter mellom opprinnelige indifferenskurver representerer Pareto-forbedringer.
- Husk utregningen av MRS:

  I. $P_1 x_1 + P_2 x_2 = y$. Tar vi $\cdot \frac{\partial}{\partial x_1}$, får vi

  II. $P_1 + P_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = 0$. Stokker vi om og deler, får vi

  III. $\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \frac{-P_1}{P_2}$
- I autarki-likevekt har vi at $MRT = MRS$. Altså at $\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \frac{\partial q_2}{\partial q_1}$. Men i autarki er $x_i = q_i$, så likheten holder.
- Åpner vi opp for handel, vil vi utnytte de komparative fortrinnene våre (produsere det godet vi har produsert relativt billig i autarki sammenlignet med verden).
- *The core* er settet med feasible allocations gitt preferansene til de n_h husholdningene og property distribution d. Her har ingen parter insentiv til å bryte ut av et samarbeid. I Edgeworth-boksen er den delen av kontraktkurven som er mellom de opprinnelige nyttekurvene kjernen.
- Jo flere aktører, jo mindre er kjernen fordi det er så mange alternativer til å bryte ut. Under spesifikke forutsetninger vil kun pristakende atbeif overleve i likevekt.
- Hver excess demand-funksjon må være homogen av grad 0.
- **Walras' Law**: for alle priser og fullt rasjonelle, ikke-mette agender i en økonomi med privat eierskap, gjelder det at $\sum_{i=1}^{n} P_i E_i(P) = 0$ (du kan ha excess demand i noen goder, men samlet må det være likt 0 [inntekt blir lik kostnader])
- Tre issues med excess demand:

I. *eksistens*: vi trenger boundedness og continuity.

II. *unikhet*: inntektseffekter gjør at etterspørselskurver kan helle "feil vei" og dermed får vi flere likevekter. Men hvis vi omdanner prisen til en normalisert likevektsprisvektor og hvis aggregate demand tilfredsstiller WARP, så kan vi si at prisen må være unik

III. *stabilitet*: vi må få en stabil likevekt.

- Siden prisene er en rasjoneringsmekanisme, vil prisene bestemme allokeringen.
- Om to nyttefunksjoner begge er strengt positive transformasjoner av en underliggende funksjon, da må nyttefunksjonene ha samme preferanser over bundles.
- Alltid en god idé å vite hvem som eier hva.
- **"Jeg anbefaler dere å tenke ut fra material balance constraints."**