0 Christian Braathen
MAT10, 4. gr. time

Regneregler for determinanter:

Elementære operasjoner	$\lvert A\rvert=0$	Resten
(I) Bytter to linjer/kolonner plass, bytter determinanten fortegn.	(IV) Hvis alle elementene i en linje/kolonne i A er 0.	(VII) $\lvert A^T\rvert=\lvert A\rvert$
(II) om B er matrisen en får ved å multiplisere en linje eller kolonne i A med tallet α, er $\lvert B\rvert=\alpha\lvert A\rvert$.	(V) Hvis to linjer/kolonner er like	(VIII) $\lvert AB\rvert=\lvert A\rvert\cdot\lvert B\rvert$
(III) Hvis en multippel legges til en annen linje eller kolonne, endrer det ikke determinanten.	(VI) Hvis to linjer/kolonner er proporsjonale	(IX) $\lvert\alpha A_{n\times n}\rvert=\alpha^n\lvert A\rvert$
		(X) $\lvert A+B\rvert\neq\lvert A\rvert+\lvert B\rvert$
		(XI) Lineært uavhengige vektorer $\Leftrightarrow \lvert A\rvert\neq 0$
		(XII) Skal du finne det(A) og har identiske ledd i en rekke eller søyle, kan du faktorisere.

(XIII) Cramers regel: $x_i=\frac{D_i}{\lvert A\rvert}\ \forall\ i=1,2,3$

(XIV) Skjevsymmetriske matriser har egenskapen $A^T=-A$

Merk: rref-kommandoen på kalkulatoren din (redusert trappeform) vil løse mye av matrise regningen din. Foreslår du googler og lærer deg den.

3,4,3

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & -11 & 2 \end{vmatrix} \xRightarrow{\text{IV}} \underline{\underline{|A| = 0}}$$

b)

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & -6 & -9 & -12 \end{vmatrix} \xRightarrow{\text{VI}} \underline{\underline{|B| = 0}}$$

"$(-3)\cdot\{\text{rekke } 1\} = \{\text{rekke } 4\}$

$(-3)\cdot\{1,2,3,4\} = \{-3,-6,-9,-12\}$"

Vi kan også se at dette er lik 0 på en annen måte. Ved å bruke III og addere en multippel på (+3) fra linje 1 til linje 4, får vi 0 i nederste rekke. IV sier da at $|B|=0$.

2

5.4.4

"Jeg kommer til å bruke litt forskjellige metoder for å vise at det er flere måter å regne ut determinanter på. Likevel er det den 'tradisjonelle' metoden som oftest er den greieste."

a)

Metode 1: den tradisjonelle

"rekke- og kolonneplasseringen til"

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \quad \Big| \text{ Utleder}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 6) + (-1) \cdot 2 \cdot (2 \cdot 8 - 5 \cdot 3) + 1 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 6 - 4 \cdot 3) \quad \Big| \Sigma$$

$$= 2 - 2 + 0 \quad \Big| \Sigma$$

$$\underline{\underline{|A| = 0}}$$

Metode 2: den raske

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

$$2 \cdot \{\text{søyle } 1\} = \{\text{søyle } 2\}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \{1, 2, 3\} = \{2, 4, 6\} \overset{\text{VI}}{\Longrightarrow} \underline{\underline{|A| = 0}}$$

Metode 3: den alternative (Rule of Sarrus)

$$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{matrix}$$

$$|A| = 1 \cdot 4 \cdot 8 + 2 \cdot 5 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 \cdot 3 - 6 \cdot 5 \cdot 1 - 8 \cdot 2 \cdot 2 \quad \Big| \text{ Utleder}$$

$$= 32 + 30 + 36 - 36 - 30 - 32 \quad \Big| \Sigma$$

$$\underline{\underline{|A| = 0}}$$

3

b)

Metode 1

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} b & a+c \\ c & a+b \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} a & b+c \\ c & a+b \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} a & b+c \\ b & a+c \end{vmatrix} \quad \Big| \text{ Utleder}$$

$$= \left([ab+b^2] - [ac+c^2]\right) - \left([a^2+ab] - [bc+c^2]\right) + \left([a^2+ac] - [b^2+bc]\right) \quad \Big| \ \Sigma$$

$$|B| = 0$$

Metode 2 (hopp over denne)

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \quad \Big| \ \text{VII}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \quad \cdot(-a) \quad \cdot(-[b+c]) \quad \Big| \ \text{III}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & a-b & a-c \end{vmatrix} \quad \cdot(+1) \quad \Big| \ \text{III}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \Big| \ \text{IV}$$

$$|B| = 0$$

Metode 3

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \quad \cdot(+1) \quad \Big| \ \text{III}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} \quad \Big| \ \text{XII}$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} \quad \Big| \ \text{V}$$

$$|B| = 0$$

4

c)

$$|C| = \begin{vmatrix} x-y & x-y & x^2-y^2 \\ 1 & 1 & x+y \\ y & 1 & x \end{vmatrix} \quad \Bigg| \quad x^2-y^2 = (x+y)(x-y)$$

$\cdot(-[x+y])$

$\cdot(-1)$

[redacted] $= \begin{vmatrix} x-y & x-y & (x+y)(x-y) \\ 1 & 1 & x+y \\ y & 1 & x \end{vmatrix}$ III

$$= \begin{vmatrix} x-y & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ y & 1-y & x-xy-y^2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1}(x-y)\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1-y & x-xy-y^2 \end{vmatrix} + 0 + 0 \quad \Big| \text{ Utleder}$$

$$= (x-y)(0-0) \quad \Big| \Sigma$$

$$\underline{\underline{= 0}}$$

3a) fra ItsLearning

"Hvis A er en skjev-symmetrisk 3×3-matrise, så er $|A|=0$."

$$A = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{vmatrix}, \quad a,b,c \in \mathbb{R}$$

Bruker XIV

$$A^T_{3\times3} = -A_{3\times3} \quad \Big| \ \det(VS) = \det(HS)$$

$$\det(A^T_{3\times3}) = \det(-A_{3\times3}) \quad \Big| \ \text{IX}$$

$$\det(A^T_{3\times3}) = (-1)^3 \det(A_{3\times3}) \quad \Big| \ (-1)^3 = -1$$

$$\det(A^T_{3\times3}) = -\det(A_{3\times3}) \quad \Big| \ \text{VII}$$

$$\det(A_{3\times3}) = -\det(A_{3\times3}) \quad \Big| \ \text{Flytter over og } \Sigma$$

$$2\det(A_{3\times3}) = 0 \quad \Big| \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{\det(A_{3\times3}) = 0}}$$

6

6.3.2

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 \quad\quad &= b_1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= b_2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Matriseform

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}} \overset{\vec{x}}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} = \overset{\vec{b}}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}} \Longrightarrow \det(A) = -10.$$

Bruker (XIII). "Vi finner først D_1, D_2, og D_3. Ifølge Cramers regel, bruker vi D_1 for å finne x_1. Så vi bytter ut kolonnen som lister x_1-verdiene med kolonnen på høyre side av likhetstegnet (her: $\vec{b}$) og finner determinanten."

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & -1 & 2 \\ b_3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} b_1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot b_2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot b_3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Utleder og Σ

$$= -5b_1 + b_2 + 2b_3$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & b_1 & 0 \\ 1 & b_2 & 2 \\ 2 & b_3 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} b_1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} b_2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} b_3 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Utleder og Σ

$$= 5b_1 - 3b_2 - 6b_3$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & b_1 \\ 1 & -1 & b_2 \\ 2 & 3 & b_3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} b_1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} b_2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} b_3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Utleder og Σ

$$= 5b_1 - 7b_2 - 4b_3$$

$$x_1 = \frac{D_1}{|A|} = \frac{-5b_1 + b_2 + 2b_3}{(-10)} = \frac{1}{2} b_1 - \frac{1}{10} b_2 - \frac{1}{5} b_3$$

$$x_2 = \frac{D_2}{|A|} = \frac{5b_1 - 3b_2 - 6b_3}{(-10)} = \frac{-1}{2} b_1 + \frac{3}{10} b_2 + \frac{3}{5} b_3$$

$$x_3 = \frac{D_3}{|A|} = \frac{5b_1 - 7b_2 - 4b_3}{(-10)} = \frac{-1}{2} b_1 + \frac{7}{10} b_2 + \frac{2}{5} b_3$$

Kan også skrives

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{10} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{10} & \frac{3}{5} \\ \frac{-1}{2} & \frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Svar: uavhengig av $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$, får x_1, x_2, x_3 entydig bestemt løsning.

7

7.1.1

"Løsningsforslaget bruker Cramer, men det er tungvint om dere har lært å bruke rref-kommandoen på kalkulatoren deres. Så jeg bruker elementære rekkeoperasjoner isteden."

$$\begin{matrix} 2\alpha - \beta = 8 \\ 5\alpha + 3\beta = 9 \end{matrix} \Longrightarrow \overset{A}{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \overset{\vec{b}}{\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 8 \\ 5 & 3 & 9 \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot \frac{1}{2} \\ \end{matrix} \cdot (-5)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{-1}{2} & 4 \\ 0 & \frac{11}{2} & -11 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \cdot \frac{2}{11} \end{matrix} \cdot \left(+\frac{1}{2}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}}}$$

Svar: $\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, så lineært uavhengige.

7.1.2

a) Vi ser at $1\cdot\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix} = (-3)\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow 1\cdot\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, så lineært avhengige.

Med rekkeoperasjoner ser det slik ut:

$$\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}-1 & 3 & 0\\ 2 & 6 & 0\end{array}\right)\begin{array}{l}\cdot(-1)\quad \cdot(-2)\\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right) \Rightarrow \alpha - 3\beta = 0$$

$$\underline{\underline{\alpha = 3\beta}} \quad \text{(lineært avhengige)}$$

b)

$$\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c}2 & 3 & 0\\ -1 & 4 & 0\end{array}\right)\begin{array}{l}\cdot\frac{1}{2}\quad \cdot(+1)\\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{9}{2} & 0\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \cdot\frac{2}{9}\quad \cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{array}\right) \Rightarrow \underline{\underline{\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}}$$

Lineært uavhengige fordi det kun er for $\alpha = \beta = 0$ at likheten gjelder.

c)

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c}-1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{array}\right)\begin{array}{l}\cdot(-1)\quad \cdot(-1)\\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right) \Longrightarrow \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \alpha - \beta = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = \beta}} \quad \text{(lineært avhengige.)}$$

7,1,3

Vi har $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, og $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. Disse kan listes i en matrise:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ | Bruker XI, så $|VS| = |HS|$

$$|A| = \begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 0 \begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}$$ | Utleder

$$= 1 + 2 + 0$$ | Σ

$$|A| = 3 \neq 0 \Leftrightarrow \text{lineært uavhengige vektorer.}$$