

FACULTAD DE CIENCIAS
GRUPO ESTUDIANTIL DE MATEMÁTICA
Problemas de Teoría de Números

Jimmy Espinoza

09 de diciembre del 2017

1. Un número racional a/b con $(a, b) = 1$ es llamada "fracción reducida". Si la suma de dos fracciones reducidas a/b y c/d es un entero, probar que $|b| = |d|$.
2. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que $(a, b) = 1$. Probar que:
 - $(a + b, a - b)$ es 1 ó 2;
 - $(a + b, a^2 - ab + b^2)$ es 1 ó 3.
 - $(a^n, b^k) = 1$ para todo n, k enteros positivos.
3. Un entero es llamado "libre de cuadrados" si no es divisible por un número cuadrado perfecto mayor que 1. Probar que para cada $n \geq 1$, existen únicos a, b enteros positivos con b libre de cuadrados tal que $n = a^2b$.
4. Sean a, b, c, n enteros positivos. Si $(a, b) = 1$ y $ab = c^n$, probar que $a = x^n$ y $b = y^n$ para algunos x, y enteros positivos.
5. Hallar $(a^{2^m} + 1, a^{2^n} + 1)$ en función de a .
6. Sean a, b, x, y enteros positivos. Si $(a, b) = 1$ y $x^a = y^b$ entonces probar que $x = n^b$ y $y = n^a$ para algún n entero positivo.
7. Si a, m, n son enteros positivos con $a > 1$, probar que $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m, n)} - 1$.
8. Sea n un entero positivo y sea S un conjunto de enteros positivos menores o iguales a $2n$ tal que si a y b están en S y a y b son diferentes, entonces a no divide a b . Hallar el máximo número de elementos de S .
9. Hallar todos los pares de enteros positivos (a, b) tales que $a|b + 1$ y $b|a + 1$.
10. Hallar todos los pares de enteros positivos (a, b) tales que $a|8b + 1$ y $b|8a + 1$.