Probabilidad y Estadística

UTEC San José

Probabilidad condicional e independencia

Definición de probabilidad condicional

Sea B un suceso con probabilidad no nula, llamamos probabilidad condicional de A dado B a la probabilidad de que ocurra A sabiendo que B va a ocurrir o de hecho ya ocurrió.

Esta es la fórmula que se utiliza en caso de conocer las probabilidades como si no se tuviera certeza sobre la ocurrencia de B.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Tener en cuenta que en la probabilidad condicional se tiene la certeza sobre la ocurrencia de B.

Probabilidad condicional e independencia

Sucesos independientes

Dos sucesos A y B se dicen que son independientes sí y solo si la probabilidad condicional de que ocurra A dado que B ya ocurrió o es seguro que va a ocurrir es igual a la probabilidad de A

$$P(A/B) = P(A)$$

Probabilidad condicional e independencia

Sucesos independientes

En este caso, combinando fórmulas, suponiendo que la probabilidad del suceso que condiciona no es nula, se tiene:

$$P(A/B) = P(A) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

De forma análoga se tiene: A y B son independientes $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Dos sucesos excluyentes no son independientes

Recordamos que A y B son independientes $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

La independencia entre sucesos no es transitiva

Supongamos una caja así. Con 6 bolas, 2 azules y 4 rojas. Una roja tiene un número 1 marcado, hay 2 rojas con un 2 marcado y hay una última roja con un 3 marcado. Mientras que una azul tiene un uno y otra azul tiene un 2.

Roja 1
Roja 2

Azul 1
Azul 2

Roja 2
Roja 3

Sean los sucesos.

A ={extraigo una bola roja}
B={extraigo un 2}
C={extraigo una bola azul}

Ejemplo

Si $P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,4$ y $P(A \cap B)=0,18$. Calcular:

a) $P(A|B)$
b) $P(B|A)$

Ejemplo

El 76 % de los estudiantes de Ingeniería Civil han aprobado resistencia de materiales y el 45 % aprobaron estática. Además, el 30 % aprobaron resistencia de materiales y estática. Si Camilo aprobó resistencia de materiales, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado también estática?

Ejemplo

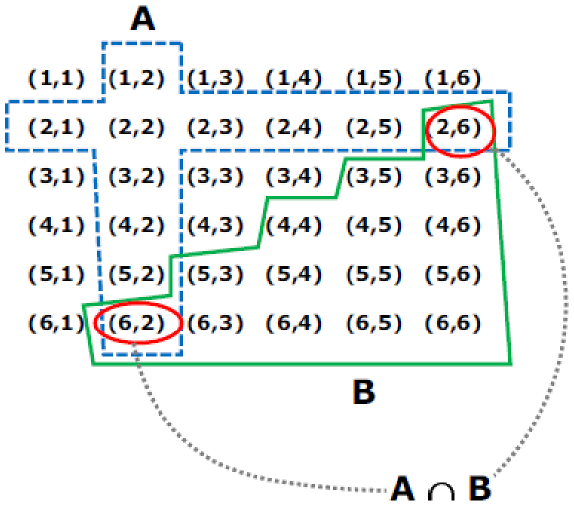
Example 2.19 Suppose we roll two independent fair dice again. Consider the following events:

- A = 'at least one of the scores is 2'.
- B = 'the sum of the scores is greater than 7'.

There are shown in Figure 2.9. Now $P(A) = 11/36 \approx 0.31$, $P(B) = 15/36$ and $P(A \cap B) = 2/36$. The conditional probability of A given B is therefore:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/36}{15/36} = \frac{2}{15} \approx 0.13.$$

Learning that B has happened causes us to *revise* (update) the probability of A downwards, from 0.31 to 0.13.



Práctico 1

Ejercicio 1.27

Supongamos que P(A) = p   P(B) = 2p, $p(A \cup B) = \frac{3}{4}$

a) Calcular p y P (A / B) suponiendo que A y B son independientes.

b) Calcular y y P (A/ B) suponiendo que A y B son mutuamente excluyentes.

Ejercicio 1.12

a) En una carrera de caballos participan tres competidores que denominaremos A, B y C. Se sabe que las posibilidad de que gane A es el doble que la de que gane B, la posibilidad de que gane C es la mitad de la que gane B. Hallar la probabilidad de ganar de cada competidor.

b) Si en la carrera de la parte anterior, participa un cuarto competidor D, con posibilidad de ganar del 30% y los restantes competidores la misma relación entre ellos, hallar la probabilidad de ganar de cada uno de los tres primeros competidores.

$$P(A) \qquad P(A) = 2P(B) \qquad P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

$$P(B) \qquad P(B) \qquad 2P(B) + P(B) + \frac{1}{2}P(B) = 1$$

$$P(C) \qquad P(C) = (1/2)P(B) \qquad \Rightarrow$$

$$P(A) \qquad P(A) = 2P(B)$$

$$P(B) \qquad P(B)$$

$$P(C) \qquad P(C) = (1/2)P(B)$$

$$P(D) \qquad P(D) = 0.3$$

$$\Rightarrow P(A + P(B) + (1/2)P(B) + 0.3 = 1$$

Ejercicio 1.17

Los empleados de una empresa se distribuyen en tres secciones: administración, operación de planta, venta comercial, como se indica en la siguiente tabla:

	Mujer	*Hombre*	*Total*
administación	20	30	50
operación de planta	60	140	200
ventas	100	50	150
Total	180	220	400

a) En una caja se colocan tarjetas de igual medida con los nombres de los empleados y se extrae una.

i. ¿Cuál es la probabilidad de que se extraiga la tarjeta de una mujer?
ii. ¿Cuál es la probabilidad de que trabaje en ventas?
iii. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer o trabaje en ventas ("o" no excluyente)?

b) La empresa debe enviar a un congreso una delegación conformada por tres delegados, uno de cada sección, todos los delegados tienen la misma jerarquía.
Calcular la probabilidad de que en la terna elegida:

i. Este formada solo por mujeres.
ii. En la terna hay por lo menos un hombre.
iii. En la terna hay mayoría de hombres.

c) Si la delegación puede estar formada por empleados de cualquier sección y hay un primer, segundo y tercer delegado, reiterar las tres partes de b)

$$P(A \cap B) \leq P(A)$$

$$P(A \cap B) \leq P(B)$$

Práctico 1

$$A = \{\text{se extrae la tarjeta de una mujer}\}$$

$$P(A) = \frac{180}{400}$$

$$B = \{\text{se extrae la tarjeta de una persona que trabaja en ventas}\}$$

$$P(B) = \frac{150}{400}$$

$$C = \{\text{se extrae la tarjeta de una persona que trabaja en ventas o una mujer}\}$$

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{180}{400} + \frac{150}{400} - \frac{100}{400} = \frac{230}{400} = 0.575$$

Práctico 1

$$A = \{\text{delegación solo conformada por mujeres}\}$$

$$P(A) = \frac{}{C_1^{50}C_1^{200}C_1^{150}} = \frac{C_1^{20}C_1^{60}C_1^{100}}{50x200x150} = \frac{20x60x100}{50x200x150} = \frac{2}{25} = \frac{8}{100} = 0.08$$

$$B = \{\text{delegación con por lo menos un hombre}\}$$

$$P(B) = \frac{}{50x200x150} = 1 - P(B^c) = \frac{92}{100}$$

Práctico 1

$$B = \{\text{delegación con por lo menos un hombre}\}$$

$$P(B) = \frac{\qquad}{50x200x150} = 1 - P(B^c) = \frac{92}{100}$$

$$P(B) = \frac{30x140x50}{50x200x150} + \left(\frac{30x140x100}{50x200x150} + \frac{30x60x50}{50x200x150} + \frac{20x140x50}{50x200x150}\right) +$$

$$\left(\frac{30x60x100}{50x200x150} + \frac{20x140x100}{50x200x150} + \frac{20x60x50}{50x200x150}\right)$$

Práctico 1

$$C = \{\text{delegación con mayoría de hombres}\}$$

$$P(C) = \frac{30x140x50}{50x200x150} + \left(\frac{30x140x100}{50x200x150} + \frac{30x60x50}{50x200x150} + \frac{20x140x50}{50x200x150} \right)$$

Práctico 1

$$A = \{\text{delegación solo conformada por mujeres}\}$$

$$P(A) = \frac{A_3^{180}}{A_3^{400}} = \frac{180x179x178}{400x399x398} = \frac{5735160}{63520800} \approx 0.09$$

$$B = \{\text{delegación con por lo menos un hombre}\}$$

$$P(B) = 1 - P(B^c) = \frac{57785640}{63520800} \approx 0.91$$

Observar que $B^c = A$

Práctico 1

Ejercicio 1.26

Una empresa tiene tres máquinas para producir un cierto producto, según la siguiente tabla:

	maq.A	*maq.B*	*maq.C*
% producción	50	35	15
% productos defectuosos	5	10	50

Se extrae al azar un artículo de la producción total.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que resulte defectuoso?

b) Si el artículo es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de sea de la máquina A?

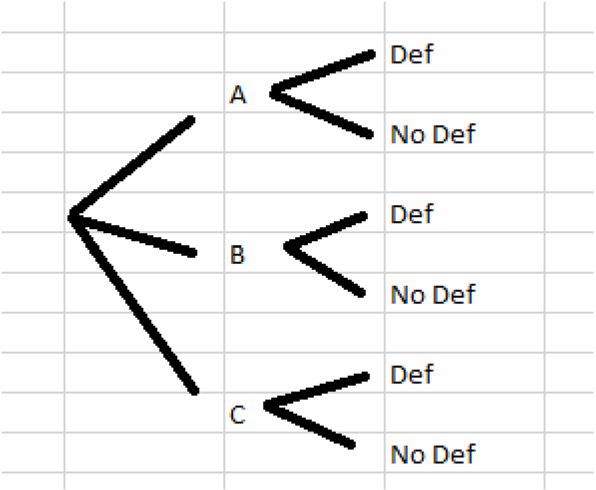
Práctico 1

	A	B	C	Total
Def				
No Def				
Total				

¿Cuál es la función de probabilidad en este caso?

$P_X(k) = P(X = k) = ¿?$

Práctico 1



¿Cuál es la función de probabilidad en este caso?

$P_X(k) = P(X = k) = ¿?$

Práctico 1

$$A = \{\text{se elige al azar una pieza de la máquina A}\}$$
$$B = \{\text{se elige al azar una pieza de la máquina B}\}$$
$$C = \{\text{se elige al azar una pieza de la máquina C}\}$$
$$D = \{\text{se elige al azr una pieza defectuosa}\}$$

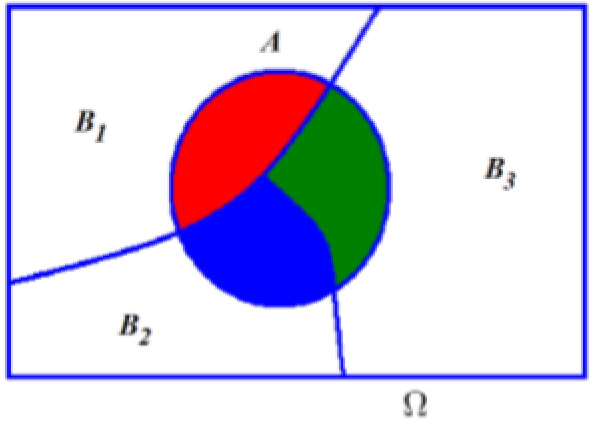
$$D = (D \cap A) \cup (D \cap B) \cup (D \cap C)$$
$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C)$$
$$P(D) = P(D / A)P(A) + P(D / B)P(B) + P(D / C)P(C)$$
$$P(D) =$$
$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = -$$

¿Cuál es la función de probabilidad en este caso?

$$P_X(k) = P(X = k) = ¿?$$

Fórmula de las Probabilidades Totales y Teorema de Bayes

Práctico 1



Formula de las probabilidades totales

B1, B2, B3 forman una particion de omega

$\Omega = B1 \cup B2 \cup B3$

B1, B2 y B3 son disjuntos

$A = (A \cap B1) \cup (A \cap B2) \cup (A \cap B3)$

FORMULA DE LAS PROBABILIDADES TOTALES

$P(A) = P(B1)P(A/B1) + P(B2)P(A/B2) + P(B3)P(A/B3)$

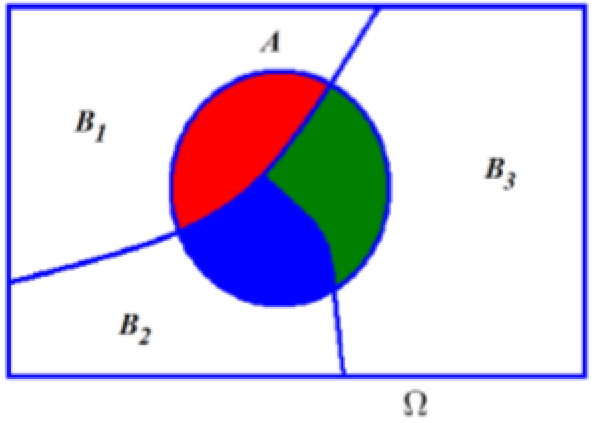
TEOREMA DE BAYES

$$P(B1/A) = \frac{P(B1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B1)P(A/B1)}{P(B1)P(A/B1) + P(B2)P(A/B2) + P(B3)P(A/B3)}$$

$$P(B2/A) = \frac{P(B2 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B2)P(A/B2)}{P(B1)P(A/B1) + P(B2)P(A/B2) + P(B3)P(A/B3)}$$

$$P(B3/A) = \frac{P(B2 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B3)P(A/B3)}{P(B1)P(A/B1) + P(B2)P(A/B2) + P(B3)P(A/B3)}$$

Práctico 1



¿Cuál es la función de probabilidad en este caso?

$P_X(k) = P(X = k) = ¿?$

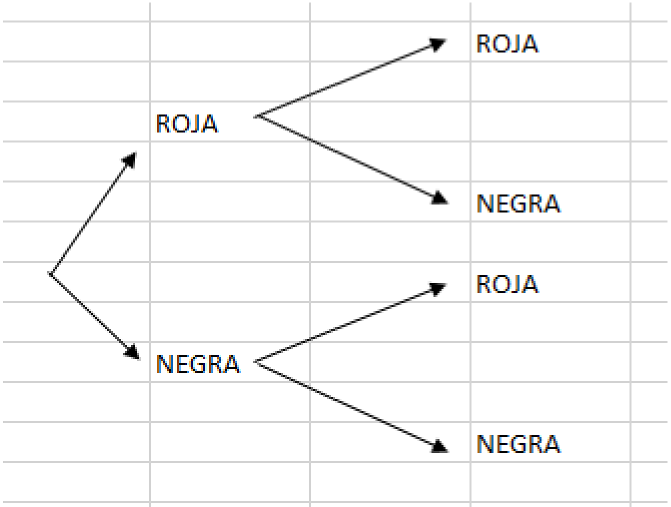
Práctico 1

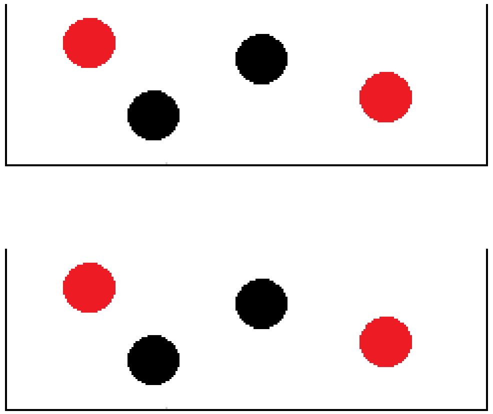
Ejercicio 1.29

Dos cajas contienen cada una, dos bolillas rojas y dos negras. Determine en qué caso se tiene mayor probabilidad de obtener exactamente dos bolillas rojas:

a) Sacando una bolilla de cada caja.

b) Juntando las ocho y sacando dos sin reposición.



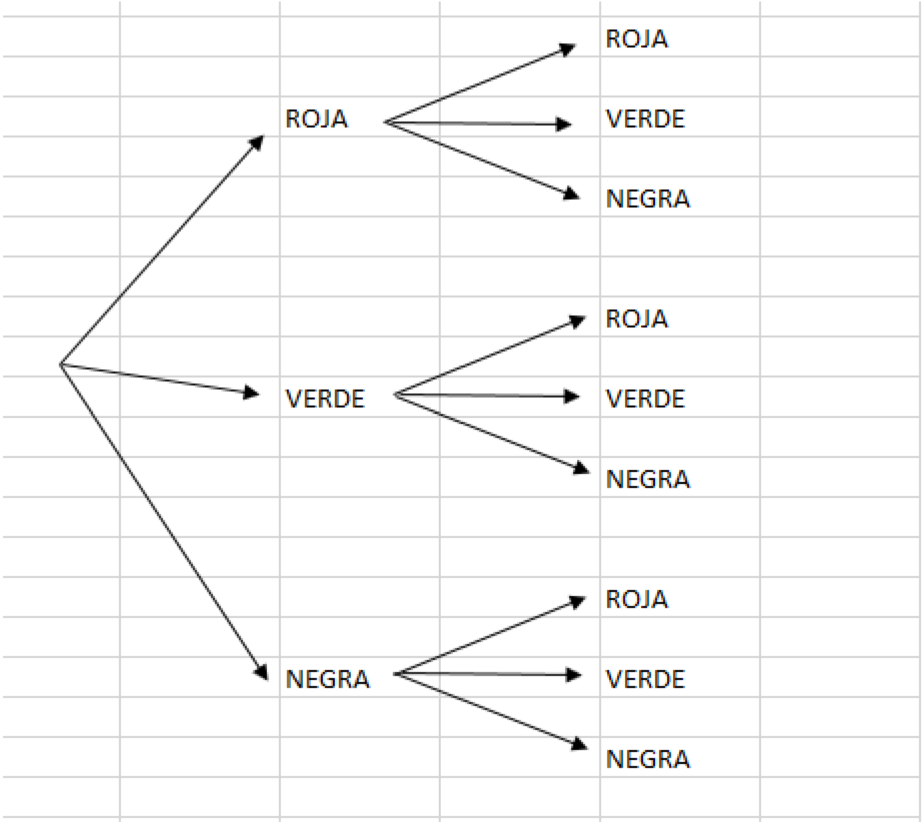


¿Cuál es la función de probabilidad en este caso?

$P_X(k) = P(X = k) = ¿?$

Ejercicio 1.30

De una urna que contiene tres fichas rojas, dos verdes y dos negras, se extraen al azar y sin reposición dos fichas. Calcule la probabilidad de que las dos fichas sean del mismo color.



¿Cuál es la función de probabilidad en este caso?

$P_X(k) = P(X = k) = ¿?$

Práctico 1

Ejercicio 1.28 (Parcial antiguo)

Se tiene una caja con α bolas rojas y β bolas azules y una segunda caja con β bolas rojas y α azules. Se extrae una bola al azar de la primera caja y se la coloca en la segunda. A continuación, se extrae una bola al azar de la segunda caja.

a) Calcular la probabilidad de que la primera bola sea azul.

b) Calcular la probabilidad de que la segunda bola sea azul, sabiendo que la primera lo es.

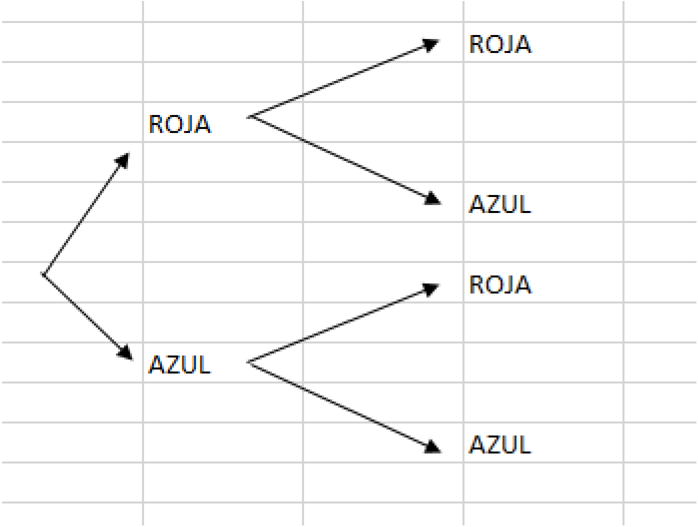
c) Calcular la probabilidad de que la segunda bola sea azul.

d) Sabiendo que la segunda bola es azul, calcular la probabilidad de que la primera sea roja.

¿Cuál es la función de probabilidad en este caso?

$P_X(k) = P(X = k) =$ ¿?

Práctico 1



$$P(1A) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$$

$$P(2A/1A) = \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+1}$$

$$P(2A) = \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+1}\right) + \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}\right)$$

$$P(1R/2A) = \frac{\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}\right)}{\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+1}\right) + \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}\right)}$$

1ERA	2DA
ALFA ROJAS	BETA ROJAS
BETA AZULES	ALFA AZULES

Práctico 1

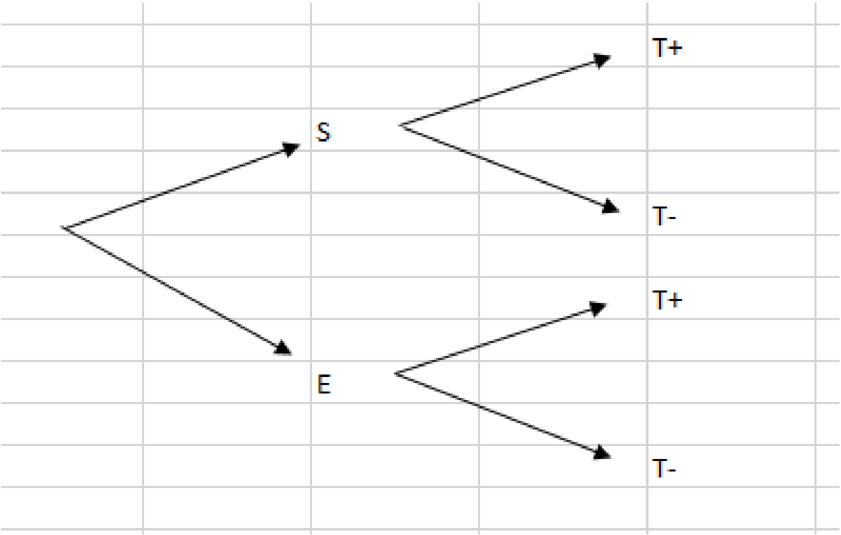
Se descubre una nueva enfermedad que se sabe afecta al 1 % de la población. La misma no presenta ningún tipo de síntomas. Por lo tanto, un especialista ha diseñado un estudio para determinar si un paciente dado sufre o no de dicha enfermedad. Se ha comprobado que el estudio tiene una precisión del 98 % sobre resultados positivos y del 97 % sobre resultados negativos. Es decir que si un paciente está enfermo, el estudio le dará positivo con una probabilidad del 98 %. De manera similar, si el paciente no está enfermo, el estudio dará negativo con 97 % de probabilidad.

Usted se hace este estudio y obtiene un resultado positivo. ¿Cuál es la probabilidad de que efectivamente esté enfermo?.

¿Cuál es la función de probabilidad en este caso?

$P_X(k) = P(X = k) =$ ¿?

Práctico 1



¿Cuál es la función de probabilidad en este caso?

$P_X(k) = P(X = k) = ¿?$

Práctico 1

	S	E	Total
T+			
T-			
Total			

¿Cuál es la función de probabilidad en este caso?

$P_X(k) = P(X = k) = ¿?$

Práctico 1

$$\mathrm{T+} = \text{"test positivo"}$$
$$\mathrm{T-} = \text{"test negativo"}$$
$$\mathrm{E} = \text{"persona enferma"}$$

$$\mathrm{P(E)} = 0.01$$

$$\mathrm{P(T+/E)} = 0.98 = \frac{\mathrm{P(T+\cap E)}}{\mathrm{P(E)}} \Leftrightarrow \mathrm{P(T+\cap E)} = 0.98\mathrm{x}0.01$$

$$\mathrm{P(T-/E^c)} = 0.97 \Rightarrow \mathrm{P(T+/E^c)} = 0.03 \Rightarrow$$

$$\mathrm{P(E/T+)} = \frac{\mathrm{P(E\cap T+)}}{\mathrm{P(T+)}} = \frac{0.98\mathrm{x}0.01}{0.03x0.99 + 0.98x0.01} = 0.24$$

$$\mathrm{T+} = \left(\mathrm{T}+\cap E\right)\cup\left(\mathrm{T}+\cap \mathrm{E}^c\right)$$

$$\mathrm{P(T+)} = P\left(\mathrm{T}+\cap E\right) + P\left(\mathrm{T}+\cap \mathrm{E}^c\right)$$

$$P\left(\mathrm{T}+\cap \mathrm{E}^c\right) = 0.03x0.99$$

¿Cuál es la función de probabilidad en este caso?

$$\mathrm{P_X(k)} = \mathrm{P(X = k)} = ¿?$$

Práctico 1

¿Cuál es la función de probabilidad en este caso?

$P_X(k) = P(X = k) = ¿?$

Práctico 1

¿Cuál es la función de probabilidad en este caso?

$P_X(k) = P(X = k) = ¿?$