Matemática Discreta y Lógica 1
Sede San José

Práctico 2: Relaciones y funciones

Definiciones
Decimos que una relación R en A es *asimétrica* si $(a, a') \in R \Rightarrow (a', a) \notin R$.
Decimos que una relación R en A es *irreflexiva* si $(a, a) \notin R$ para todo $a \in A$.
Dada una relación R en A, la *relación complementaria* es $\bar{R} = \{(a, a') : (a, a') \notin R\}$.

Relaciones

Ejercicio 1 Sea A un conjunto con $|A| = n$, Sea $R \subseteq A \times A$ una relación y M una matriz de relación para R. Demostrar que:

- R es reflexiva sí y solo sí $I_n \leq M$
- R es simétrica sí y solo sí $M = M^T$
- R es transitiva sí y solo sí $M^2 \leq M$

Ejercicio 2 Se consideran en en $A = \{4, 3, 2, 1\}$ las siguientes relaciones

A. $R_1 = \{(1, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 3), (3, 4), (4, 4)\}$,

B. $R_2 = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 3)\}$,

C. $R_3 = \{(3, 1), (1, 1), (1, 3), (2, 1), (3, 3), (4, 4)\}$,

D. $R_4 = \emptyset$,

E. $R_5 = A \times A$.

i) Representarlas mediante un digrafo.

ii) Determinar cuál(es) de las siguientes propiedades se verifican

- reflexiva,
- simétrica,
- antisimétrica,
- transitiva.

iii) Determinar si alguna de ellas es relación de orden o de equivalencia. En caso de ser relación de orden dibujar el Diagrama de Hasse y en caso de ser relación de equivalencia determinar el conjunto cociente A/R.

Ejercicio 3 ¿Toda relación asimétrica es antisimetrica? ¿Toda relación antisimetrica es asimétrica?

Ejercicio 4 Definamos la relación $\equiv$ en $\mathbb{Z}$, llamada congruencia módulo 2 de la siguiente forma:

$$a \equiv b \Leftrightarrow a - b \text{ es divisible entre } 2.$$

A. Probar que $\equiv$ es una relación de equivalencia.

B. Hallar $A/\equiv$.

Ejercicio 5 Definamos la relación $\equiv$ en $\mathbb{Z}$, llamada congruencia módulo 3 de la siguiente forma:

$$a \equiv b \Leftrightarrow a - b \text{ es divisible entre } 3.$$

A. Probar que $\equiv$ es una relación de equivalencia.

B. Hallar $A/\equiv$.

Ejercicio 6 Sea $X = \{a, b, c\}$ y $A = \mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$. Consideremos en A la relación de inclusión, es decir, $R = \{(Y, Z) : Y \subset Z\}$. Probar que R es una relación de orden y dibujar el diagrama de Hasse. ¿es una relación de orden total? Estudiar la existencia de elementos maximales, minimales, máximo y mínimo.

Ejercicio 7 Consideremos en $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ la relación "divide a", es decir,

$$R = \{(a, b) : a \text{ divide a } b\}.$$

Probar que es una relación de orden y dibujar el diagrama de Hasse. ¿es una relación de orden total? Estudiar la existencia de elementos maximales, minimales, máximo y mínimo.

Ejercicio 8 Sea R una relación de equivalencia sobre $A = \{1, 2, 3\}$. Sabiendo que el conjunto cociente A/R tiene un único elemento, defina R por extensión, represente la matriz de la relación y dibuje su digrafo. Repita lo realizado sabiendo que A/R tiene tres elementos. ¿Cuántas relaciones posibles hay si A/R tiene dos elementos?

Ejercicio 9 Pruebe que si R es simétrica entonces $R = R^{-1}$.

Ejercicio 10 Pruebe que si R es reflexiva entonces R^{-1} es reflexiva y $\bar{R}$ es irreflexiva.

Ejercicio 11 Sea la relación R de orden parcial en $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ tal que la matriz de relación (generada tomando los elementos en el orden escrito) es:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinar si es un orden total, hallar un elemento maximal, un elemento minimal, determinar si tiene máximo y/o mínimo, y determinar si es un retículo.