Pratiquer l'algorithmique

THÈME 1 Qu'est-ce qu'un algorithme ?

Activité

2 – Tracé d'au moins deux hauteurs issues des sommets du triangle.

– Tracé du point H, intersection des hauteurs tracées.

3 Traitement : le tracé des hauteurs.

Exercices

1 **1.** Les points O et A.

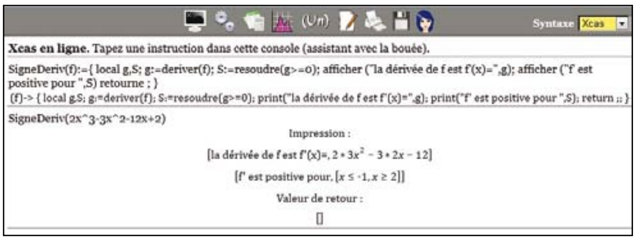
2. Un carré de centre O et dont un sommet est A.

2 Éléments donnés : l'expression de $f(x)$ et la valeur a. Question posée : « Donnez l'équation de la tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse a.

3 Entrées : les coefficients A, B et C du trinôme.
Traitements : le calcul du discriminant DELTA.
Sorties : les valeurs α et β.

4 **1.** On peut déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle I.

2. b)



f' est positive pour $x \leqslant -1$ et pour $x \geqslant 2$. Donc la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty\,;-1]$ et $[2\,;+\infty[$ et strictement décroissante sur $[-1\,;2]$.

5 Les entrées de ces deux algorithmes ne sont pas identiques. On ne peut donc pas dire que ces algorithmes sont équivalents.

6 • Créez dans l'ordre : le triangle ABC, deux bissectrices intérieures à ce triangle, le point d'intersection D des deux bissectrices, la perpendiculaire à l'un des côtés passant par le point D, le point d'intersection E entre cette perpendiculaire et le côté utilisé, le cercle de centre D passant par E.

• Utilisez la commande « Créer un nouvel outil ».

• Choisissez le cercle inscrit dans l'onglet « objets finaux », les points A, B et C dans l'onglet « objets initiaux ».

THÈME 2 Variables et affectation

Activité

1 On obtient $f(4)$.

2 5 [–] 3 [EXE] [÷] [–] 2 [EXE]

Exercices

7 5 [×] 5 [+] 4 [×] 4 [EXE] [√] [EXE]

8 **a)** 4 [→] [A] [EXE] [A] [–] 2
[→] [B] [EXE] [A] [×] [B] [+] 5 [EXE]

b) 4 [+] 2 [→] [A] [EXE] 2 [–] 5 [÷] [A] [EXE]

9 A – 2 ; B – 3 ; C – 1.

10 **1. a)** On peut envisager jusqu'à cinq variables : le premier nombre A, le carré B de ce premier nombre, le second nombre C, le carré D de ce second nombre, la somme E de B et D.

b) Oui. Voir la question 2.

2. Avec AlgoBox :

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  a PREND_LA_VALEUR a*a
  LIRE b
  b PREND_LA_VALEUR b*b
  a PREND_LA_VALEUR a+b
  AFFICHER* a
FIN_ALGORITHME
```

11 **1.** p, n, t, PHT et PTTC.

2. PHT PREND_LA_VALEUR n*p
PTTC PREND_LA_VALEUR PHT*(1+t/100)

3. a) p, n, t.
b) p PREND_LA_VALEUR n*p
p PREND_LA_VALEUR p*(1+t/100)
c) L'économie du nombre de variables dégrade la lisibilité de l'algorithme.

THÈME 3 L'instruction conditionnelle

Activité

	A	B	C	D
1	Taille (cm)	Bornes des classes	Effectifs Cumulés croissants	Regroupement en classes
2	173	155	=NB.SI($A$2:$A$16;"<"&B2)	=C2
3	157	165	=NB.SI($A$2:$A$16;"<"&B3)	=C3-C2
4	182	175	=NB.SI($A$2:$A$16;"<"&B4)	=C4-C3
5	175	185	=NB.SI($A$2:$A$16;"<"&B5)	=C5-C4
6	189	195	=NB.SI($A$2:$A$16;"<"&B6)	=C6-C5

Exercices

12 **T.I.**

```
PROGRAM:FCTMRCX
:Input X
:If X≥0
:Then
:Disp X²-2X-1
:Else
:Disp -2X-1
:End
```

Casio

```
======FCTMRCX =
?→X↵
If X≥0↵
Then X²-2X-1◢
Else -2X-1◢
IfEnd↵
```

13 **1.** Il suffit d'ajouter une variable p et la ligne de traitement « p prend la valeur b-m*a ».

2. Avec AlgoBox :

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  d EST_DU_TYPE NOMBRE
  m EST_DU_TYPE NOMBRE
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER «Saisissez les coordonnées
           du point A.»
  LIRE a
  LIRE b
  AFFICHER «Saisissez les coordonnées
           du point B.»
  LIRE c
  LIRE d
  // On calcule les paramètres de la
  droite
  m PREND_LA_VALEUR (d-b)/(c-a)
  AFFICHER «Le coefficient directeur
           de (AB) est »
  AFFICHER m
  p PREND_LA_VALEUR b-m*a
  AFFICHER «L'ordonnée à  l'origine
           de (AB) est »
  AFFICHER p
FIN_ALGORITHME
```

3. Avec AlgoBox :

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  d EST_DU_TYPE NOMBRE
  m EST_DU_TYPE NOMBRE
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER «Saisissez les coordonnées
           du point A.»
  LIRE a
  LIRE b
  AFFICHER «Saisissez les coordonnées
           du point B.»
  LIRE c
  LIRE d
  SI (a==c) ALORS
    DEBUT_SI
    AFFICHER «(AB) est parallèle à (Oy)
             et a pour équation x = »
    AFFICHER a
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      m PREND_LA_VALEUR (d-b)/(c-a)
      AFFICHER «Le coefficient directeur
               de (AB) est »
      AFFICHER m
      p PREND_LA_VALEUR b-m*a
      AFFICHER «L'ordonnée à l'origine
               de (AB) est »
      AFFICHER p
      FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

14 **a)** Cet algorithme teste la colinéarité ou l'orthogonalité de deux vecteurs définis par leurs coordonnées.

Ligne 15 : « … colinéaires. »

Ligne 19 : « … orthogonaux. »

b) et **c)** Le programme AlgoBox final peut être :

```
1   VARIABLES
2     a EST_DU_TYPE NOMBRE
3     b EST_DU_TYPE NOMBRE
4     c EST_DU_TYPE NOMBRE
5     d EST_DU_TYPE NOMBRE
6     k EST_DU_TYPE NOMBRE
7     message EST_DU_TYPE CHAINE
8   DEBUT_ALGORITHME
9     AFFICHER «Entrez les coordonnées du
               vecteur u.»
10    LIRE a
11    LIRE b
12    AFFICHER «Entrez les coordonnées du
               vecteur v.»
13    LIRE c
14    LIRE d
15    SI (a==0 et b==0) ALORS
16      DEBUT_SI
17      AFFICHER «u est nul.»
18      FIN_SI
19    SI (c==0 et d==0) ALORS
20      DEBUT_SI
21      AFFICHER «v est nul.»
22      message PREND_LA_VALEUR «v= 0 u.»
23      FIN_SI
24      SINON
25        DEBUT_SINON
26        SI (c==0) ALORS
27          DEBUT_SI
28          k PREND_LA_VALEUR b/d
29          message PREND_LA_VALEUR
                    «u = «+k+» v.»
30          FIN_SI
31          SINON
32            DEBUT_SINON
33            k PREND_LA_VALEUR a/c
34            message PREND_LA_VALEUR
                      «u = «+k+» v.»
35            FIN_SINON
36        FIN_SINON
37    SI (a*d-b*c==0) ALORS
38      DEBUT_SI
39      AFFICHER «u et v sont colinéaires.»
40      AFFICHER message
41      FIN_SI
42    SI (a*c+b*d==0) ALORS
43      DEBUT_SI
44      AFFICHER «u et v sont orthogonaux.»
45      FIN_SI
46  FIN_ALGORITHME
```

15 **T.I.**

```
:Disp "AX²+BX+C"
:Prompt A,B,C
:B²-4AC→D
:Disp "DELTA=",D
▶Frac
:If D<0
:Then
:Disp "PAS DE RA
CINE REELLE"
:Else
:If D=0
:Then
:Disp "UNE SEULE
 RACINE : ",(-B)
/(2A)▶Frac
:Else
:Disp "2 RACINES
 : ",(-B-√(D))/(
2A)▶Frac
:Disp (-B+√(D))/
(2A)▶Frac
:End
:End
```

Casio

```
"AX²+BX+C"↵
"A"?→A↵
"B"?→B↵
"C"?→C↵
"DELTA":B²-4AC→D◢
If D<0↵
Then "PAS DE RACINE R
EELE"↵
Else If D=0↵
Then "UNE SEULE RACIN
E : ":(-B)⌟(2A)◢
Else "2 RACINES : "↵
(-B+√D)⌟(2A)◢
(-B-√D)⌟(2A)◢
IfEnd↵
IfEnd↵
```

16 **1.**

Entrées			Sorties		
A	**B**	**C**	**A**	**B**	**H**
4	8	7	4	7	8
8	7	4	4	7	8
8	4	7	7	4	8
4	7	8	4	7	8

2. Cet algorithme affecte à la variable H la plus grande des valeurs A, B, C initialement saisies.

Avec AlgoBox :

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  h EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE b
  LIRE c
  h PREND_LA_VALEUR c
  SI (a<b) ALORS
    DEBUT_SI
    SI (b>c) ALORS
      DEBUT_SI
      h PREND_LA_VALEUR b
      b PREND_LA_VALEUR c
      FIN_SI
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      SI (a>c) ALORS
        DEBUT_SI
        h PREND_LA_VALEUR a
        a PREND_LA_VALEUR c
        FIN_SI
      FIN_SINON
  SI (h*h==a*a+b*b) ALORS
    DEBUT_SI
  AFFICHER «Le triangle est rectangle.»
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      AFFICHER «Le triangle n'est pas
               rectangle.»
      FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

THÈME 4 La boucle conditionnelle

Activité

4 Le dixième carré a un côté inférieur à 0,5.

Exercices

17 **1.** et **2.**

T.I.

```
:0→A:0→N
:Repeat B=0
:Input B
:A+B→A
:N+1→N
:End
:Disp "NOMBRE D
ARTICLES :",N-1
:Disp "TOTAL :",
A
```

Casio

```
0→A↵
0→N↵
Do↵
?→B↵
A+B→A↵
N+1→N↵
LpWhile B≠0↵
"NOMBRE D ARTICLES :"
:N-1◢
"TOTAL :":A◢
```

Remarque. Dans le langage de programmation CASIO, les instructions d'une boucle « Do-LpWhile » sont exécutées une première fois, puis tant que la condition est vérifiée.

18 **1.** Au début du jeu, le lièvre et la tortue sont derrière la ligne de départ. Un dé est lancé. Si le résultat de ce lancer est 6, alors le lièvre arrive directement sur la case « Arrivée » et remporte la manche. Sinon, la tortue avance d'un nombre de cases égal au résultat du lancer. Si la tortue arrive sur la case « Arrivée », alors elle remporte la manche. On relance le dé jusqu'à ce que l'un des protagonistes remporte la manche.

2. Avec AlgoBox :

```
VARIABLES
  T EST_DU_TYPE NOMBRE
  L EST_DU_TYPE NOMBRE
  D EST_DU_TYPE NOMBRE
  GL EST_DU_TYPE NOMBRE
  GT EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  i PREND_LA_VALEUR 0
  GT PREND_LA_VALEUR 0
  GL PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (i<1000) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    i PREND_LA_VALEUR i+1
    D PREND_LA_VALEUR 0
    T PREND_LA_VALEUR 0
    L PREND_LA_VALEUR 0
    TANT_QUE (T<7 ET L!=7) FAIRE
      DEBUT_TANT_QUE
      SI (D==6) ALORS
        DEBUT_SI
        L PREND_LA_VALEUR 7
        GL PREND_LA_VALEUR GL+1
        FIN_SI
        SINON
          DEBUT_SINON
          T PREND_LA_VALEUR T+D
          FIN_SINON
      SI (T>=7) ALORS
        DEBUT_SI
```

```
31          GT PREND_LA_VALEUR GT+1
32          FIN_SI
33        D PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_ALEA_
            ENT(1,6)
34        FIN_TANT_QUE
35      FIN_TANT_QUE
36    AFFICHER «Nombre de parties gagnées
                par le lièvre : »
37    AFFICHER GL
38    AFFICHER «Nombre de parties gagnées
                par la tortue : »
39    AFFICHER GT
40  FIN_ALGORITHME
```

3.

```
1   VARIABLES
2     T EST_DU_TYPE NOMBRE
3     L EST_DU_TYPE NOMBRE
4     D EST_DU_TYPE NOMBRE
5     GL EST_DU_TYPE NOMBRE
6     GT EST_DU_TYPE NOMBRE
7     gagnant EST_DU_TYPE CHAINE
8   DEBUT_ALGORITHME
9    //La tortue et le lièvre sont derrière
     la ligne de départ.
10   T PREND_LA_VALEUR 0
11   D PREND_LA_VALEUR 0
12   TANT_QUE (T<7 ET L!=7) FAIRE
13     DEBUT_TANT_QUE
14     //On lance un dé tant qu'il n'y a
       pas de vainqueur.
15     D PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_ALEA ENT(1,6)
16     AFFICHER D
17     //Si le dé indique 6 alors le
       lièvre arrive directement sur la
       case arrivée et gagne la partie.
18     SI (D==6) ALORS
19       DEBUT_SI
20       L PREND_LA_VALEUR 7
21       gagnant PREND_LA_VALEUR «le lièvre.»
22       FIN_SI
23       SINON
24        DEBUT_SINON
25        //Sinon la tortue avance du
          nombre de cases indiquées par le
          dé.
26        T PREND_LA_VALEUR T+D
27        FIN_SINON
28     SI (T>=7) ALORS
29       DEBUT_SI
30       //Si la tortue franchit la ligne
         d'arrivée alors elle gagne la
         partie.
31       gagnant PREND_LA_VALEUR «la tortue.»
32       FIN_SI
33     FIN_TANT_QUE
34    AFFICHER «Le gagnant est : »
35    AFFICHER gagnant
36  FIN_ALGORITHME
```

4. La tortue semble avantagée. En modifiant le programme, on peut conjecturer que pour 10 ou 11 cases, le jeu est plus équitable.

19 **1.** Avec AlgoBox :

```
1   VARIABLES
2     u EST_DU_TYPE NOMBRE
3     v EST_DU_TYPE NOMBRE
4     a EST_DU_TYPE NOMBRE
5     b EST_DU_TYPE NOMBRE
6     p EST_DU_TYPE NOMBRE
7   DEBUT_ALGORITHME
8     u PREND_LA_VALEUR 2
9     v PREND_LA_VALEUR 1
10    LIRE p
11    TANT_QUE (u-v>p) FAIRE
12      DEBUT_TANT_QUE
13      a PREND_LA_VALEUR (u+v)/2
14      b PREND_LA_VALEUR 4/(u+v)
15      u PREND_LA_VALEUR a
16      v PREND_LA_VALEUR b
17      FIN_TANT_QUE
18    AFFICHER v
19    AFFICHER u
20  FIN_ALGORITHME
```

2. On modifie les lignes suivantes :

```
8     u PREND_LA_VALEUR 5
14    b PREND_LA_VALEUR 10/(u+v)
```

20 **1.** Selon les habitudes de programmation, les réponses peuvent être variées.

Voici un algorithme utilisant les opérateurs de base :

```
Variables
a, b et c sont de type numérique
Entrée
Lire a et b
Tant que a>0
  R prend la valeur a
  a prend la valeur a-b
Fin de boucle
Sortie
Afficher R
```

2. La structure « jusqu'à » n'existe pas pour tous les langages de programmation. On utilise alors une structure « tant que » en s'assurant que les instructions de la boucle seront exécutées au moins une fois. Exemple avec AlgoBox :

```
1  VARIABLES
2    A EST_DU_TYPE NOMBRE
3    B EST_DU_TYPE NOMBRE
4    R EST_DU_TYPE NOMBRE
5  DEBUT_ALGORITHME
6    R PREND_LA_VALEUR 1
7    LIRE A
8    LIRE B
9    TANT_QUE (R!=0) FAIRE
10     DEBUT_TANT_QUE
11     R PREND_LA_VALEUR A%B
12     A PREND_LA_VALEUR B
13     B PREND_LA_VALEUR R
14     FIN_TANT_QUE
15   AFFICHER* A
16 FIN_ALGORITHME
```

3. PGCD(660 ; 1 050) = 30 et PGCD(4 410 ; 2 100) = 210.

La boucle incrémentale

Activité

1 **a)** Ligne 6 : u prend la valeur 5
Ligne 10 : Tant que i < p
Ligne 11 : u prend la valeur 0.9u.

b) T.I.

```
PROGRAM:SUITEGEO
:0→I:5→U
:Disp "ENTREZ LE
 RANG":Prompt P
:While I<P
:U*0.9→U:I+1→I
:End
:Disp U
```

Casio

```
0→I:5→U↵
"ENTREZ LE RANG P"?→P
↵
While I<N↵
0.9U→U:I+1→I↵
WhileEnd↵
U◢
```

2. T.I.

```
:0→I:5→U
:Disp "ENTREZ LE
 SEUIL":Prompt S
:While U>S
:0.9U→U:I+1→I
:End
:Disp I
:▮
```

Casio

```
0→I:5→U↵
"ENTREZ LE SEUIL"?→S↵
While U>S↵
0.9U→U:I+1→I↵
WhileEnd↵
I◢
```

Exercices

21 **1.** T.I.

```
PROGRAM:SUITEGEO
:5→U
:Disp "ENTREZ LE
 RANG":Prompt P
:For(I,1,P)
:0.9U→U
:End
:Disp U
```

Casio

```
5→U↵
"ENTREZ LE RANG P"?→P
↵
For 1→I To P↵
0.9U→U↵
Next↵
U◢
```

2. Non car il serait nécessaire de connaitre par avance le nombre d'itérations de la boucle.

22 **1.** Répondre aléatoirement à chaque question revient à attribuer à chaque réponse la note aléatoire 0 ou 1. La fonction ALGOBOX_ALEA_ENT(0,1) retourne aléatoirement 0 ou 1. On simule ici par une boucle une réponse aléatoire aux dix questions successives.

2. Il s'agit d'un problème d'initialisation de la variable Note. La ligne 14 doit être déplacée entre les lignes 9 et 10.

3. On peut envisager plusieurs solutions avec une structure conditionnelle. On peut aussi changer la formule de calcul de la note pour prendre en compte une pénalité P ($P > 0$) :

```
VARIABLES
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
  j EST_DU_TYPE NOMBRE
  Note EST_DU_TYPE NOMBRE
  somme EST_DU_TYPE NOMBRE
  moyenne EST_DU_TYPE NOMBRE
  P EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
LIRE P
  POUR i ALLANT_DE 1 A 10000
    DEBUT_POUR
    Note PREND_LA_VALEUR 0
    POUR j ALLANT_DE 1 A 10
      DEBUT_POUR
      Note PREND_LA_VALEUR Note-P+(P+1)*ALGOBOX_ALEA_ENT(0,1)
      FIN_POUR
    somme PREND_LA_VALEUR somme+Note
    FIN_POUR
  moyenne PREND_LA_VALEUR somme/10000
  AFFICHER* moyenne
FIN_ALGORITHME
```

23 **1. a)** Hormis 1, le plus petit diviseur de N peut être 2. Dans ce cas, $\frac{N}{2}$ est le plus grand des diviseurs de N, hormis N lui-même.

b) On peut tester si le reste de la division euclidienne de N par I est nul (voir la question **1.** de l'exercice **20**).

c) Avec AlgoBox :

```
VARIABLES
I EST_DU_TYPE NOMBRE
N EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
LIRE N
I PREND_LA_VALEUR 1
TANT_QUE (I<=N/2) FAIRE
  DEBUT_TANT_QUE
  SI (N%I==0) ALORS
    DEBUT_SI
    AFFICHER* I
    FIN_SI
  I PREND_LA_VALEUR I+1
  FIN_TANT_QUE
  AFFICHER* N
FIN_ALGORITHME
```

2. a) Avec AlgoBox :

```
VARIABLES
I EST_DU_TYPE NOMBRE
N EST_DU_TYPE NOMBRE
nb EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
LIRE N
I PREND_LA_VALEUR 1
nb PREND_LA_VALEUR 1
TANT_QUE (I<=N/2) FAIRE
  DEBUT_TANT_QUE
  SI (N%I==0) ALORS
    DEBUT_SI
    nb PREND_LA_VALEUR nb+1
    FIN_SI
  I PREND_LA_VALEUR I+1
  FIN_TANT_QUE
  AFFICHER* nb
FIN_ALGORITHME
```

b) Avec AlgoBox :

```
VARIABLES
  I EST_DU_TYPE NOMBRE
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
  nb EST_DU_TYPE NOMBRE
  j EST_DU_TYPE NOMBRE
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
  total EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  total PREND_LA_VALEUR 0
  LIRE p
  POUR j ALLANT_DE 1 A 100
    DEBUT_POUR
    N PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_ALEA_ENT(1,100)
    I PREND_LA_VALEUR 1
    nb PREND_LA_VALEUR 1
    TANT_QUE (I<=N/2) FAIRE
      DEBUT_TANT_QUE
      SI (N%I==0) ALORS
        DEBUT_SI
        nb PREND_LA_VALEUR nb+1
        FIN_SI
      I PREND_LA_VALEUR I+1
      FIN_TANT_QUE
    SI (nb>=7) ALORS
      DEBUT_SI
      total PREND_LA_VALEUR total+p
      FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        SI (nb==2) ALORS
          DEBUT_SI
          total PREND_LA_VALEUR total-10
          FIN_SI
          SINON
            DEBUT_SINON
            total PREND_LA_VALEUR total+1
            FIN_SINON
        FIN_SINON
    FIN_POUR
  AFFICHER "Le score pour 100 parties est : "
  AFFICHER total
FIN_ALGORITHME
```

Commentaire. On convient que dans le cas N = 1 (un seul diviseur), le joueur marque aussi 1 point.
L'algorithme proposé permet le calcul du score à l'issue des 100 parties.
Une autre approche est possible en faisant afficher le gain algébrique moyen :

$$\text{gain moyen} = \frac{\text{score}}{\text{nombre de parties}}.$$

c) En modifiant l'algorithme pour simuler un grand nombre de parties et en effectuant plusieurs simulations, on peut conjecturer une valeur de p proche de 10.

Commentaire. On note G la variable aléatoire qui indique le gain algébrique lors d'une partie.
Dire que le jeu est équitable signifie que E(G) = 0.
L'utilisation du programme de la question **2. a)** permet de dénombrer le nombre de diviseurs des entiers de 1 à 100 :

^{1}**1**	^{2}**2**	^{3}**2**	^{4}**3**	^{5}**2**	^{6}**4**	^{7}**2**	^{8}**4**	^{9}**3**	^{10}**4**
^{11}**2**	^{12}**6**	^{13}**2**	^{14}**4**	^{15}**4**	^{16}**5**	^{17}**2**	^{18}**6**	^{19}**2**	^{20}**6**
^{21}**4**	^{22}**4**	^{23}**2**	^{24}**8**	^{25}**3**	^{26}**4**	^{27}**4**	^{28}**6**	^{29}**2**	^{30}**8**
^{31}**2**	^{32}**4**	^{33}**4**	^{34}**4**	^{35}**4**	^{36}**9**	^{37}**2**	^{38}**4**	^{39}**4**	^{40}**8**
^{41}**2**	^{42}**8**	^{43}**2**	^{44}**6**	^{45}**6**	^{46}**4**	^{47}**2**	^{48}**10**	^{49}**3**	^{50}**6**
^{51}**4**	^{52}**6**	^{53}**2**	^{54}**8**	^{55}**4**	^{56}**8**	^{57}**4**	^{58}**4**	^{59}**2**	^{60}**12**
^{61}**2**	^{62}**4**	^{63}**6**	^{64}**7**	^{65}**4**	^{66}**8**	^{67}**2**	^{68}**6**	^{69}**4**	^{70}**8**
^{71}**2**	^{72}**12**	^{73}**2**	^{74}**4**	^{75}**6**	^{76}**6**	^{77}**4**	^{78}**8**	^{79}**2**	^{80}**10**
^{81}**5**	^{82}**4**	^{83}**2**	^{84}**12**	^{85}**4**	^{86}**4**	^{87}**4**	^{88}**8**	^{89}**2**	^{90}**12**
^{91}**4**	^{92}**6**	^{93}**4**	^{94}**4**	^{95}**4**	^{96}**12**	^{97}**2**	^{98}**6**	^{99}**6**	^{100}**9**

Ainsi entre 1 et 100, il existe :
- 20 nombres entiers ayant au moins 7 diviseurs,
- 25 nombres premiers,
- 55 nombres entiers ayant entre 3 et 6 diviseurs ou bien égal à 1.

Loi de G:

k	-10	1	p
P(G = k)	0,25	0,55	0,2

D'où E(G) = 0,2p – 1,95.
Ainsi, E(G) = 0 $\Leftrightarrow$ 0,2p – 1,95 = 0 $\Leftrightarrow$ p = 9,75.
La conjecture sur la valeur entière de p qui rende ce jeu le plus équitable possible est en accord avec ce résultat.

CHAPITRE 1

Suites

ACTIVITÉS (page 22)

Activité 1

1 Pour tout entier naturel non nul n, $u_n = 2^n$: la suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 2.

2 Comme 4 h = 12 × 20 min, $u_{12} = 2^{12} = 4\,096$.

3 $u_{25} = 33\,554\,432$ et $u_{26} = 67\,108\,864$ donc au bout de 26 × 20 min, soit 8 h 40 min, la population de bactéries dépasse les 38 000 000.

4 1 km = 10^9 µm, d'où $V_{\text{Terre}} = \dfrac{4\pi}{3} \times (6\,370 \times 10^9)^3$ µm^3

$V_{\text{Terre}} \approx 1{,}08 \times 10^{39}$. Or $2^{129} \leqslant 1{,}08 \times 10^{38} \leqslant 2^{130}$.
En théorie, le volume de la descendance dépasse celui de la Terre en 130 × 20 min soit 43 h 20 min.

Activité 2

1 La population rurale diminue de 10 % (d'où le terme $0{,}9r_n$) mais 5 % des citadins viennent s'ajouter (d'où le terme $0{,}05u_n$).
Inversement, les citadins perdent 5 % (il reste $0{,}95u_n$) et voient arriver 10 % des ruraux ($0{,}10r_n$).

2 **a)** La population totale reste constante (par hypothèse) et égale à 10 (en millions d'habitants).
Donc, pour tout entier naturel n, $u_n + r_n = 10$, et

$$u_n = 10 - r_n.$$

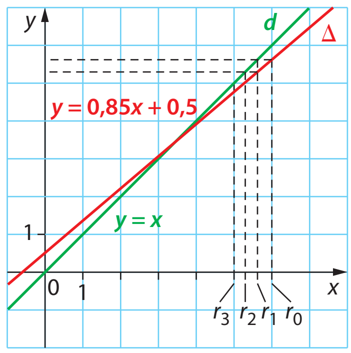
b) Pour tout entier naturel n,

$$r_{n+1} = 0{,}9r_n + 0{,}05(10 - r_n) = 0{,}85r_n + 0{,}5.$$

3 **a)** et **b)** Graphique ci-après.

4 **a)** La suite (r_n) semble décroissante et donc la suite (u_n) croissante.
b) Cependant, la suite (r_n) semble se « stabiliser » vers une valeur supérieure à 3, donc on ne peut pas, suivant ce modèle, envisager une désertification des zones rurales.

5 $r_{30} \approx 3{,}353$ et donc $u_{30} \approx 6{,}647$.



Activité 3

1 **a)** Raisonnons par l'absurde. Si $a < \sqrt{2}$ et $\dfrac{2}{a} < \sqrt{2}$, les nombres étant tous strictement positifs, on peut multiplier membre à membre ces inégalités, et alors $2 < 2$, ce qui est impossible. Donc le nombre $\sqrt{2}$ ne peut être strictement supérieur à a et à $\dfrac{2}{a}$.
De la même manière, on montre que $\sqrt{2}$ ne peut être strictement inférieur à a et à $\dfrac{2}{a}$.
Conclusion, $\sqrt{2}$ est compris entre a et $\dfrac{2}{a}$.
b) Supposons $a < \dfrac{2}{a}$.
La propriété démontrée dans les quatre lignes qui suivent peut être admise sans démonstration…

$$a < \frac{2}{a} \Leftrightarrow a + \frac{2}{a} < \frac{2}{a} + \frac{2}{a} \Leftrightarrow b < \frac{2}{a}.$$

$$a < \frac{2}{a} \Leftrightarrow a + a < a + \frac{2}{a} \Leftrightarrow a < b.$$

D'où $a < \dfrac{2}{a} \Leftrightarrow b \in \left]a\,;\dfrac{2}{a}\right[$.

De la même manière, $a > \dfrac{2}{a} \Leftrightarrow b \in \left]\dfrac{2}{a}\,;a\right[$.

On suppose donc que $a < \dfrac{2}{a}$ et que $b \in \left]a\,;\dfrac{2}{a}\right[$.

Les nombres étant tous strictement positifs,

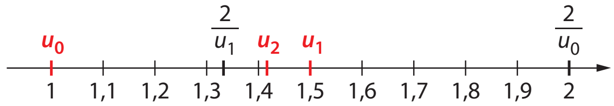
$a < b < \frac{2}{a} \Leftrightarrow \frac{a}{2} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \Leftrightarrow a < \frac{2}{b} < \frac{2}{a}$ et ainsi :

$$\frac{2}{b} \in \left]a\,;\frac{2}{a}\right[.$$

De la même manière, $a > \frac{2}{a} \Leftrightarrow \frac{2}{b} \in \left]\frac{2}{a}\,;a\right[$.

c) Le raisonnement fait en **a)** nous permet d'affirmer que $\sqrt{2}$ appartient à l'intervalle ouvert d'extrémités b et $\frac{2}{b}$. Comme d'après **b)** cet intervalle est contenu (strictement) dans l'intervalle ouvert d'extrémités a et $\frac{2}{a}$, on obtient bien un encadrement plus fin de $\sqrt{2}$.

2 **a)** $u_0 = 1$, $\frac{2}{u_0} = 2$, $u_1 = \frac{3}{2}$, $\frac{2}{u_1} = \frac{4}{3}$, $u_2 = \frac{17}{12}$.

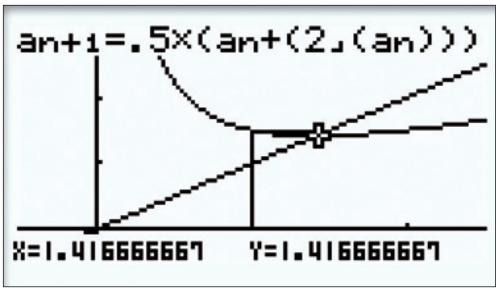


b) $u_3 = 1{,}414\,215$ et $u_4 = 1{,}414\,213$ à 10^{-6} près par défaut. On peut donc en conclure que $1{,}414\,214$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-6} près.

3 **a)** Sur $]0\,;2]$, $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \Leftrightarrow x = \frac{2}{x} \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

Les courbes se coupent donc au point de coordonnées $(\sqrt{2}\,;\sqrt{2})$.

b)



La représentation graphique permet de conjecturer que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

PROBLÈMES OUVERTS

1 Pour tout entier naturel n, on note r_n le reste de la division euclidienne de 3^n par 8. Ainsi :

$3^1 = 0 \times 8 + 3$ $\quad r_1 = 3$; $\quad 3^2 = 1 \times 8 + 1$ $\quad r_2 = 1$

$3^3 = 3 \times 8 + 3$ $\quad r_3 = 3$; $\quad 3^4 = 10 \times 8 + 1$ $\quad r_4 = 1$

On peut vérifier que $r_{14} = 1$ et $r_{15} = 3$ et conjecturer que $r_{2012} = 1$.

Avec les acquis de ce chapitre, on peut démontrer par récurrence que $r_n = 1$ si n est pair et que $r_n = 3$ si n est impair.

• Supposons n pair : $n = 2k$, avec $k \in \mathbb{N}$.

Soit (P_k) la proposition : $r_{2k} = 1$.

Initialisation : $r_2 = 1$ donc (P_1) est vraie.

Hérédité : supposons (P_k) vraie ($r_{2k} = 1$).

$r_{2k} = 1$ signifie que $3^{2k} = 8q + 1$ avec $q \in \mathbb{N}$.

$3^{2(k+1)} = 9(8q + 1) = 8(9q + 1) + 1$, donc $r_{2(k+1)} = 1$: (P_k) vraie entraîne (P_{k+1}) vraie.

Conclusion : pour tout entier naturel k, $r_{2k} = 1$, ce qui revient à dire que pour tout entier naturel pair n, le reste de la division euclidienne de 3^n par 8 est égal à 1.

• On démontre de la même manière que pour tout entier naturel impair n, le reste de la division euclidienne de 3^n par 8 est égal à 3.

Ainsi, $r_{14} = 1$, $r_{15} = 3$ et $r_{2012} = 1$.

2 • $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} = \frac{2}{3}$, $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} = \frac{3}{4}$,

$\frac{1}{2 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} = \frac{4}{5}$.

On peut conjecturer que la somme proposée est $\frac{2\,012}{2\,013}$ et que l'entier le plus proche est 1.

• La démonstration nécessite l'utilisation d'un outil présenté dans le chapitre : le raisonnement par récurrence.

Pour tout naturel non nul n, posons

$$u_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Hypothèse de récurrence : $u_n = \frac{n}{n+1}$.

Initialisation : $u_1 = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$: la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : supposons-la vraie au rang n et calculons u_{n+1}.

$$u_{n+1} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

La propriété est héréditaire.

Conclusion : pour tout naturel non nul n, $u_n = \frac{n}{n+1}$.

La somme proposée est bien $\frac{2\,012}{2\,013}$ et l'entier le plus proche est 1.

1 **1.** n est un entier naturel non nul, soit (P_n) la proposition : $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Initialisation : $\dfrac{1^2(1+1)^2}{4} = 1 = 1^3$. (P_1) est vraie.

Hérédité : supposons (P_n) vraie, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

donc (P_n) vraie entraîne (P_{n+1}) vraie.

Conclusion : pour tout entier $n \geqslant 1$, (P_n) est vraie.

2. Pour tout entier naturel n non nul,
$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$.

2 n est un entier naturel non nul, soit (P_n) la proposition :

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Initialisation : $1 \times 2 = \dfrac{1(1+1)(1+2)}{3}$. (P_1) est vraie.

Hérédité : supposons (P_n) vraie, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \ldots + (n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}.$$

(P_n) vraie entraîne (P_{n+1}) vraie.

Conclusion : pour tout entier $n \geqslant 1$, (P_n) est vraie.

3 n est un entier naturel non nul, soit (P_n) la proposition :

$$1 + (2 \times 2!) + (3 \times 3!) + \ldots + (n \times n!) = (n+1)! - 1.$$

Initialisation : $1 = 2! - 1$, (P_1) est vraie.

Hérédité : supposons (P_n) vraie, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 + (2 \times 2!) + (3 \times 3!) + \ldots + (n+1) \times (n+1)!$$
$$= (n+1)! - 1 + (n+1) \times (n+1)!$$
$$= (n+1)!\,[1 + n + 1] - 1 = (n+2)! - 1.$$

(P_n) vraie entraîne (P_{n+1}) vraie.

Conclusion : pour tout entier $n \geqslant 1$, (P_n) est vraie.

4 n est un entier naturel non nul, soit (P_n) la proposition :

$$n! \geqslant 2^{n-1}.$$

Initialisation : $1! = 1 = 2^{1-1}$, (P_1) est vraie.

Hérédité : supposons (P_n) vraie, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(n+1)! = (n+1)\,n! \geqslant 2 \times n! \geqslant 2^n.$$

(P_n) vraie entraîne (P_{n+1}) vraie.

Conclusion : pour tout entier $n \geqslant 1$, (P_n) est vraie.

5 Soit (P_n) la proposition : $u_n \geqslant n^2$.

Initialisation : $u_0 = 1 \geqslant 0^2$, (P_1) est vraie.

Hérédité : supposons (P_n) vraie, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} \geqslant n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

(P_n) vraie entraîne (P_{n+1}) vraie.

Conclusion : pour tout entier naturel n, (P_n) est vraie.

6 n est un entier naturel, $n \geqslant 4$.

Soit (P_n) la proposition : $u_n \geqslant 2^n$.

Initialisation : $u_4 = 26 \geqslant 2^4 = 16$, (P_4) est vraie.

Hérédité : supposons (P_n) vraie, pour $n \geqslant 4$:

$$u_n^2 \geqslant 2^{2n} \text{ donc } u_{n+1} \geqslant 2^{2n} + 1 = 2^{n+1} \times 2^{n-1} + 1 \geqslant 2^{n+1}.$$

(P_n) vraie entraîne (P_{n+1}) vraie.

Conclusion : pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, (P_n) est vraie.

7 n est un entier naturel.

Soit (P_n) la proposition : $0 < u_n < 2$.

Initialisation : $u_0 = 1$, donc (P_0) est vraie.

Hérédité : supposons (P_n) vraie, pour $n \in \mathbb{N}$.

Il en résulte $1 < u_n + 1 < 3$ et la fonction racine carrée étant strictement croissante sur $[0\,; +\infty[$,

$$1 < \sqrt{u_n + 1} < \sqrt{3} \text{ d'où } 0 < u_{n+1} < 2.$$

(P_n) vraie entraîne (P_{n+1}) vraie.

Conclusion : pour tout entier naturel n, (P_n) est vraie.

8 n est un entier naturel.

Soit (P_n) la proposition : $2 \leqslant u_n < 3$.

Initialisation : $u_0 = 2$, donc (P_0) est vraie.

Hérédité : supposons (P_n) vraie, pour $n \in \mathbb{N}$.

Il en résulte $7 < u_n + 5 < 8$ et la fonction racine carrée étant strictement croissante sur $[0\,; +\infty[$,

$$\sqrt{7} < \sqrt{u_n + 5} < \sqrt{8} \text{ d'où } 2 < u_{n+1} < 3.$$

(P_n) vraie entraîne (P_{n+1}) vraie.

Conclusion : pour tout entier naturel n, (P_n) est vraie.

9 n est un entier naturel.

Soit (P_n) la proposition : $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n < 1$.

Initialisation : $u_0 = \dfrac{1}{2}$, donc (P_0) est vraie.

Hérédité : supposons (P_n) vraie, pour $n \in \mathbb{N}$.

La fonction f telle que $f(u_n) = u_{n+1}$,

$f : x \mapsto x^2 - x + 1$ a pour tableau de variation :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
f	↘	$\frac{3}{4}$	↗ 1	↗

Donc si $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n < 1$, alors $\dfrac{3}{4} \leqslant u_{n+1} < 1$.

(P_n) vraie entraîne (P_{n+1}) vraie.

Conclusion : pour tout entier naturel n, (P_n) est vraie.

10 **1.** $S_2 = 1$, $S_3 = 3$, $S_4 = 6$, $S_5 = 10$.

2. $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

3. n est un entier naturel, $n \geqslant 2$.

Soit (P_n) la proposition : $S_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Initialisation : $S_2 = 1 = \dfrac{2(2-1)}{2}$, donc (P_2) est vraie.

Hérédité : supposons (P_n) vraie, pour $n \geqslant 2$.

Ajoutons, sur le cercle, un point (distinct des n précédents). Nous avons exactement n nouveaux segments à tracer : d'extrémités le nouveau point et un des n points précédents.

Donc $S_{n+1} = S_n + n = \dfrac{n(n-1)}{2} + n = \dfrac{n(n-1)+2n}{2}$ soit $S_{n+1} = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et (P_n) vraie entraîne (P_{n+1}) vraie.

Conclusion : pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, (P_n) est vraie.

11 Pour tout entier naturel non nul n, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ donc $-\dfrac{3}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{7}{n}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{3}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7}{n} = 0$.

Le théorème des gendarmes (théorème 2) nous permet de conclure : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

12 Pour tout entier naturel non nul n, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ donc $-\dfrac{5}{n} \leqslant \dfrac{5(-1)^n}{n} \leqslant \dfrac{5}{n}$ et $2 - \dfrac{5}{n} \leqslant u_n \leqslant 2 + \dfrac{5}{n}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 - \dfrac{5}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 + \dfrac{5}{n}\right) = 2$.

Le théorème des gendarmes (théorème 2) nous permet de conclure : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

13 Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant -(-1)^n \leqslant 1$, donc $3n - 1 \leqslant u_n$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (3n-1) = +\infty$, donc le théorème de comparaison (théorème 1) nous permet de conclure : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

14 Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant \sin(n^2+1) \leqslant 1$, donc

$$-\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$. Nous sommes dans les conditions d'utilisation du théorème des gendarmes (théorème 2) et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

15 **1.** Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$,

$$u_n = \frac{n^2+1}{\sqrt{n-2}} \geqslant \frac{n^2}{\sqrt{n-2}} \geqslant \frac{n^2}{\sqrt{n}} = n\sqrt{n}.$$

2. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sqrt{n} = +\infty$, le théorème de comparaison (théorème 1) nous permet de conclure :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

16 **1.** Pour tout entier k,

$$(0 \leqslant k \leqslant n) \Leftrightarrow (0 \leqslant \sqrt{k} \leqslant \sqrt{n})$$

(stricte croissance de la fonction racine carrée) et

$$(0 \leqslant \sqrt{k} \leqslant \sqrt{n}) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

(passage à l'inverse dans $]0\,;+\infty[$).

Pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, chacun des n termes de la somme u_n est supérieur à $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, donc

$$u_n \geqslant n \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

2. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$, le théorème de comparaison (théorème 1) nous permet de conclure :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

17 **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} 3n = +\infty$.

Nous sommes en présence d'une forme indéterminée.

Pour tout entier naturel n, $u_n = n(n-3)$ est le produit de deux facteurs ayant pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, donc (théorème 4) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sqrt{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$: nous sommes en présence d'une forme indéterminée.

Pour tout entier naturel n, $u_n = n\sqrt{n}\,(1 - \sqrt{n})$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - \sqrt{n}) = -\infty$, le théorème 4 permet de conclure : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

18 **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ (théorème 7).

Nous sommes en présence d'une forme indéterminée.

Pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n\left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ (conséquence du théorème 7), donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} 5^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ (théorème 7).

Il en résulte $\lim\limits_{n\to+\infty} (5^n - 1) = \lim\limits_{n\to+\infty} (4^n + 3) = +\infty$.

Nous sommes en présence d'une forme indéterminée.

$$u_n = \frac{5^n\left(1 - \dfrac{1}{5^n}\right)}{4^n\left(1 - \dfrac{1}{4^n}\right)} = \left(\frac{5}{4}\right)^n \times \frac{\left(1 - \dfrac{1}{5^n}\right)}{\left(1 - \dfrac{1}{4^n}\right)}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{5^n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{4^n}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{5}{4}\right)^n = +\infty$ $\left(\text{car } \dfrac{5}{4} > 1\,;\text{ théorème 7}\right)$. Il en résulte $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

19 **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} (5n^2 - 5) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n(n+1) = +\infty$.

Nous sommes en présence d'une forme indéterminée.

$$u_n = \frac{5n^2\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)}{2n^2\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)} = \frac{5}{2} \times \frac{1 - \dfrac{1}{n^2}}{1 + \dfrac{1}{n}}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1$, nous pouvons conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{5}{2}$.

• Autre méthode (à retenir) : u_n est une fonction rationnelle de n et se comporte à l'infini comme le quotient de ses monômes de plus haut degré :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{5n^2}{2n^2} = \frac{5}{2}.$$

• Autre méthode (situation très particulière) : le numérateur se factorisant en $5(n+1)(n-1)$, la simplification par $(n+1)$ est envisageable.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} (7n+3) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$: nous sommes en présence d'une forme indéterminée.

En divisant numérateur et dénominateur par n (non nul), il vient $u_n = \dfrac{7 + \dfrac{3}{n}}{n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(7 + \dfrac{3}{n}\right) = 7$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$. Nous pouvons conclure (théorème 5) : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

20 • **Étude de (u_n).** $\lim\limits_{n\to+\infty} (3n^2 - 4) = \lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$.

Nous sommes en présence d'une forme indéterminée.

En divisant numérateur et dénominateur par n (non nul), il vient $u_n = \dfrac{3n - \dfrac{4}{n}}{1 + \dfrac{1}{n}}$, expression qui permet de lever l'indétermination car :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(3n - \frac{4}{n}\right) = +\infty \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Il en résulte, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

• **Étude de (v_n)**

$$v_n = \frac{3n^2 - 4}{n^2 + n} = \frac{3 - \dfrac{4}{n^2}}{1 + \dfrac{1}{n}} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_n = 3.$$

• **Étude de (w_n)**

$$w_n = \frac{3n^2 - 4}{n + 1} - 3n = \frac{3n^2 - 4 - 3n^2 - 3}{n + 1} = \frac{-7}{n + 1} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} w_n = 0.$$

21 **a)** $2n^2 - 5 \geqslant n^2$ dès que $n \geqslant 3$. La fonction racine carrée est croissante sur $]0\,; +\infty[$ donc pour $n \geqslant 3$, $u_n \geqslant \sqrt{n^2} = n$. Le théorème de comparaison (théorème 1) nous permet de conclure : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b) Pour tout entier naturel n, $n^2 + 3n \geqslant n^2$.

La fonction racine carrée est croissante sur $]0\,; +\infty[$ donc pour tout n, $u_n \geqslant \sqrt{n^2} = n$. Le théorème de comparaison (théorème 1) nous permet de conclure :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

22 **a)** On utilise l'expression conjuguée pour lever l'indétermination.

$$u_n = \frac{\left(\sqrt{2n^2 - 5} - n\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2n^2 - 5} + n\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2n^2 - 5} + n\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-5}{\sqrt{2n^2 - 5} + n\sqrt{2}}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n^2 - 5} = +\infty$ (*cf.* exercice **21.a)** du manuel) et $\lim_{n\to+\infty} n\sqrt{2} = +\infty$, il en résulte que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{2n^2 - 5} + n\sqrt{2}\right) = +\infty \text{ et (théorème 5) } \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

b) On utilise l'expression conjuguée pour lever l'indétermination.

$$u_n = \frac{n\left(\sqrt{2 + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2 + \dfrac{1}{n}} + \sqrt{2}\right)}{\sqrt{2 + \dfrac{1}{n}} + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2 + \dfrac{1}{n}} + \sqrt{2}}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, il en résulte $\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

23 **a)** Pour tout entier naturel non nul n, $2n + 1 > 2n - 1 \geqslant n$. La fonction racine carrée est croissante sur $]0\,; +\infty[$ donc pour tout n non nul, $\sqrt{2n + 1} > \sqrt{2n - 1} \geqslant \sqrt{n}$. De plus $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Le théorème de comparaison (théorème 1) nous permet d'affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n + 1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n - 1} = +\infty.$$

On utilise l'expression conjuguée pour lever l'indétermination.

$$u_n = \frac{\left(\sqrt{2n + 1} - \sqrt{2n - 1}\right)\left(\sqrt{2n + 1} + \sqrt{2n - 1}\right)}{\sqrt{2n + 1} + \sqrt{2n - 1}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2n + 1} + \sqrt{2n - 1}}$$

et (théorème 5) $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

b) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} + \sqrt{1 + \dfrac{2}{n}}}$. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$,

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} = 1 = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{1 + \dfrac{2}{n}}$,

donc (théorème 5) $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

24 **a)** $u_n = n \times \dfrac{\sqrt{n + 2} - \sqrt{n + 1}}{\sqrt{n + 1} \times \sqrt{n + 2}}$.

$$u_n = n \times \frac{1}{\sqrt{n + 1} \times \sqrt{n + 2} \times \left(\sqrt{n + 2} + \sqrt{n + 1}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} \times \sqrt{1 + \dfrac{2}{n}} \times \left(\sqrt{n + 2} + \sqrt{n + 1}\right)}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{1 + \dfrac{2}{n}} = 1$, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n + 2} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n + 1} = +\infty$, les théorèmes 3, 4 et 5 nous permettent de conclure : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

b) Nous sommes, au numérateur, en présence d'une forme indéterminée. On utilise l'expression conjuguée pour lever l'indétermination.

$$u_n = \frac{-1}{\sqrt{n^2 + 5}\,(3n + \sqrt{9n^2 + 1})}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2 + 5} = \lim_{n\to+\infty} 3n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{9n^2 + 1} = +\infty$ (tous supérieurs à n par exemple). Les théorèmes 3, 4 et 5 nous permettent de conclure : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

25 On reconnaît la somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme $\dfrac{1}{3}$ et de raison $\dfrac{1}{3}$:

$$S_n = \frac{\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3^{n+1}}}{1 - \dfrac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right).$$

Comme $\left|\dfrac{1}{3}\right| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3^n} = 0$, donc (conséquence du théorème 7), $\lim_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{2}$.

26 On reconnaît la somme des $(n + 1)$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$:

$$S_n = \frac{1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 + \dfrac{1}{2}} = \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

$\lim_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$, donc (conséquence du théorème 7),

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{2}{3}.$$

27 On reconnaît la somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme 0,6 et de raison 0,6.

$$S_n = \frac{0{,}6 - 0{,}6^{n+1}}{1 - 0{,}6} = \frac{3}{2}(1 - 0{,}6^n).$$

Comme $|0{,}6| < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}6^n = 0$, (conséquence du théorème 7), $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{3}{2}$.

28 **1.** En cm², $a_0 = \frac{\pi}{2}$, $a_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$,

$a_2 = \frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{32} = \frac{11\pi}{32}$, $a_3 = \frac{11\pi}{32} - \frac{\pi}{128} = \frac{43\pi}{128}$.

2. $a_n = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{4^n}\right)\right]$

$$= \frac{\pi}{2}\left[1 - \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4^{n+1}}}{1 - \frac{1}{4}}\right] = \frac{\pi}{2}\left[1 - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)\right].$$

Comme $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{4^n} = 0$ (conséquence du théorème 7),

et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{\pi}{3}$.

EXERCICES Activités de recherche (page 36)

33 **Conjecturer puis démontrer**

• ***L'outil***

– Raisonnement par récurrence

• ***Les objectifs***

– Savoir conjecturer une propriété à partir du calcul des premiers termes.

– Savoir prouver la conjecture.

1. $u_1 = \frac{1}{3}$, $u_2 = \frac{1}{7}$, $u_3 = \frac{1}{15}$, $u_4 = \frac{1}{31}$, $u_5 = \frac{1}{63}$, $u_6 = \frac{1}{127}$.

2. $7 - 3 = 2^2$, $15 - 7 = 2^3$, $31 - 15 = 2^4$, $63 - 31 = 2^5$, $127 - 63 = 2^6$.

3. a) On peut conjecturer que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{1}{2^{n+1} - 1}$.

b) Notons (P_n) la proposition : $u_n = \frac{1}{2^{n+1} - 1}$.

$\frac{1}{2^{n+0} - 1} = 1 = u_0$: (P_0) est vraie.

Supposons (P_n) vraie pour un entier naturel n.

$$u_{n+1} = \frac{\frac{1}{2^{n+1} - 1}}{\frac{1}{2^{n+1} - 1} + 2} = \frac{1}{1 + 2^{n+2} - 2} = \frac{1}{2^{n+2} - 1}.$$

(P_n) vraie entraîne (P_{n+1}) vraie.

Conclusion : pour tout entier n, $u_n = \frac{1}{2^{n+1} - 1}$.

34 **Une suite arithmético-géométrique**

• ***Les outils***

– Raisonnement par récurrence.

– Représentation graphique de fonctions affines.

– Propriétés des suites géométriques.

• ***Les objectifs***

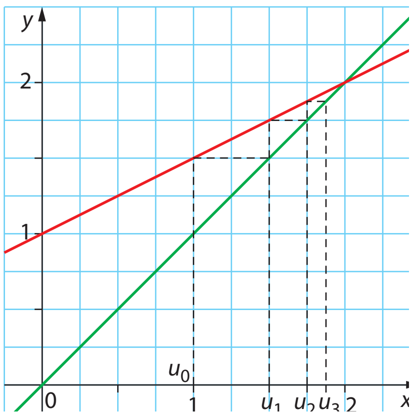
– Repérer graphiquement les premiers termes de la suite.

– Conjecturer le comportement de la suite à partir de l'étude graphique.

– Prouver la convergence d'une suite.

– Calculer la limite d'une suite convergente en utilisant une suite auxiliaire.

1.



2. a) Notons(P_n) la proposition : $u_n \leqslant u_{n+1} < 2$.

$u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{3}{2}$, soit $u_0 \leqslant u_1 < 2$: (P_0) est vraie.

Supposons (P_n) vraie pour un entier naturel n, c'est-à-dire $u_n \leqslant u_{n+1} < 2$.

Il en résulte $\frac{1}{2}u_n + 1 \leqslant \frac{1}{2}u_{n+1} + 1 < \frac{1}{2} \times 2 + 1$ soit $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 2$. (P_n) vraie entraîne (P_{n+1}) vraie.

Conclusion : pour tout entier n, $u_n \leqslant u_{n+1} < 2$.

b) Ainsi la suite (u_n) est croissante et majorée : elle est donc convergente (théorème 9).

3. a) $v_{n+1} = 2 - u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2}u_n = \frac{1}{2}v_n$.

De plus $v_0 = 2 - u_0 = 1$. La suite (v_n) est géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{2}$.

b) Comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, le théorème 7 nous permet d'affirmer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

35 **Un encadrement utile**

• ***L'outil***

– Théorème des gendarmes.

• ***Les objectifs***

– Encadrer la somme de nombres positifs ordonnés.

– Savoir utiliser le théorème des gendarmes.

1. u_n est la somme de n termes dont le plus petit est $\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}$ et le plus grand $\dfrac{1}{n+\sqrt{1}}$.

2. a) Il en résulte que

$$n \times \frac{1}{n+\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant n \times \frac{1}{n+\sqrt{1}}$$

soit $\dfrac{n}{n+\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n}{n+1}$.

b) $\dfrac{n}{n+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}$ et donc, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+\sqrt{n}} = 1.$$

D'autre part, $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

c) Nous sommes dans les conditions d'utilisation du théorème des gendarmes et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

36 Narration de recherche

$u_0 \leqslant u_1 \leqslant \ldots u_n \leqslant 1$: la suite est minorée par u_0 et majorée par 1 : elle est bien bornée et Alain a raison.

La suite (v_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = -\dfrac{1}{n}$ est croissante et majorée par 1. Cependant tous les termes (une infinité) sont négatifs : Béatrice a tort.

37 Narration de recherche

$u_{n+1} - u_n = 5 - u_n - \dfrac{5}{u_n+1} = \dfrac{-u_n^2 + 4u_n}{u_n+1} = \dfrac{u_n(4-u_n)}{u_n+1}$.

Il en résulte (récurrence immédiate) que si $u_0 = 0$ ou $u_0 = 4$, alors la suite (u_n) est constante.

• **Supposons $0 < u_0 < 4$**

Montrons par récurrence que, si $0 < u_0 < 4$, alors pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 4$.

Notons (P_n) cette proposition.

La proposition est vraie au rang 0, par hypothèse.

Supposons (P_n) vraie et remarquons que

$$u_{n+1} = \frac{5u_n}{1+u_n} = \frac{5}{1+\dfrac{1}{u_n}}.$$

$$0 < u_n < 4 \Leftrightarrow \frac{1}{u_n} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{u_n} > \frac{5}{4} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{1+\dfrac{1}{u_n}} < \frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow 0 < u_{n+1} < 4.$$

(P_n) vraie entraîne (P_{n+1}) vraie.

La propriété est héréditaire et vraie au rang 0.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 4$.

Ceci entraîne $u_{n+1} - u_n > 0$.

La suite est donc (strictement) croissante et majorée par 4 : elle converge vers ℓ, avec $\ell \leqslant 4$.

• **Supposons $4 < u_0$**

On démontre de même que la suite est strictement décroissante et minorée par 4 : elle converge vers ℓ, avec $\ell \geqslant 4$.

38 TD – Dépasser un seuil

A 1. b) $u_n > 800$ pour $n \geqslant 87$; $u_n > 10\,000$ pour $n \geqslant 465$.

2. $u_n > 10^6$ pour $n \geqslant 10\,001$; $u_n > 5 \times 10^6$ pour $n \geqslant 29\,241$.

B 1. a) et **b)**

```
VARIABLES
  A EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  n PREND_LA_VALEUR 0
  AFFICHER "Saisissez le nombre à dépasser : A = "
  LIRE A
  AFFICHER A
  TANT_QUE (F1(n) <=A) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER "Le premier terme qui dépasse A est le terme d'indice :"
  AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

2. a) Notons g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$g(x) = \frac{1-x^3}{2x+1}.$$

Ainsi pour tout entier naturel n, $g(n) = v_n$.

g est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$g'(x) = -\frac{4x^3+3x^2+2}{(2x+1)^2} < 0.$$

g est décroissante sur $[0\,;+\infty[$, il en est de même de la suite (v_n).

D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-n^3}{2n} = -\infty$.

b)

```
TANT_QUE (F1(n) >=-A) FAIRE
  DEBUT_TANT_QUE
  n PREND_LA_VALEUR n+1
  FIN_TANT_QUE
AFFICHER "Le premier terme inférieur à - A est le terme d'indice :"
```

$u_n < -800$ pour $n \geqslant 41$;
$u_n < -10\,000$ pour $n \geqslant 142$;
$u_n < -5 \times 10^6$ pour $n \geqslant 3\,163$.

C 1.

```
VARIABLES
  A EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  U EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  n PREND_LA_VALEUR 1
  U PREND_LA_VALEUR 2
  AFFICHER "Saisissez le nombre à dépasser : A = "
  LIRE A
  AFFICHER A
  TANT_QUE (U< A) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    U PREND_LA_VALEUR F1(U)
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER "Le premier terme qui dépasse A est le terme d'indice :"
  AFFICHER n
FIN_ALGORITHME

Fonction numérique utilisée :
F1(x)=x+sqrt(x)
```

2. $u_n > 10^6$ pour $n \geqslant 2\,002$.

39 TD – Au voisinage de la limite

A 1. Pour tout entier naturel n, $n + 2 > 0$.

Il en résulte :

$$2{,}9 < \frac{3n+1}{n+2} < 3{,}1 \Leftrightarrow 2{,}9\,(n+2) < 3n+1 < 3{,}1\,(n+2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4{,}8 < 0{,}1n \\ -5{,}2 < 0{,}1n \end{cases} \text{ donc } n > 48.$$

Conclusion : pour tout $n > 48$, u_n est dans l'intervalle $]2{,}9\,;3{,}1[$.

2. $2{,}999 < \dfrac{3n+1}{n+2} < 3{,}001$

$$\Leftrightarrow 2{,}999\,(n+2) < 3n+1 < 3{,}001\,(n+2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4{,}998 < 0{,}001n \\ -5{,}002 < 0{,}001n \end{cases} \quad \text{donc } n \geqslant 4\,999.$$

Conclusion : pour tout $n > 4\,998$, u_n est dans l'intervalle $]2{,}999\,;\,3{,}001[$.

B 1. • Ligne 7 : u prend la valeur 1, associée à $n = 0$ à la ligne suivante. C'est la valeur du premier terme u_0.

• La fonction f est définie (F1) à la ligne 22.

2. • La boucle conditionnelle teste la non-appartenance du terme u_n à l'intervalle prédéfini $]\ell - r\,;\,\ell + r[$.

• « On sort » de cette boucle lorsque u_n est dans l'intervalle.

3. a) Pour tout $n \geqslant 9$, $u_n \in\,]5{,}99\,;\,6{,}01[$.

b) Pour tout $n \geqslant 19$, $u_n \in\,]6 - 10^{-5}\,;\,6 + 10^{-5}[$.

4. Une étude graphique à l'aide des droites d'équation $y = \dfrac{x}{3} + 2$ et $y = x$ nous permet de conjecturer que la suite (u_n) est croissante et a pour limite 3.

À l'aide de l'algorithme précédent adapté à la situation, pour tout $n \geqslant 7$, u_n est dans l'intervalle $]2{,}999\,;\,3{,}001[$.

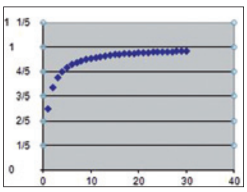
40 TD – Suite définie par une somme

A 1. a)

	A	B	C
1	n	1/n(n+1)	Un
2	1	0,5	1/2
3	2	0,166666667	2/3
4	3	0,083333333	3/4
5	4	0,05	4/5
6	5	0,033333333	5/6
7	6	0,023809524	6/7
8	7	0,017857143	7/8
9	8	0,013888889	8/9
10	9	0,011111111	9/10
11	10	0,009090909	10/11
12	11	0,007575758	11/12
13	12	0,006410256	12/13
14	13	0,005494505	13/14
15	14	0,004761905	14/15
16	15	0,004166667	15/16
17	16	0,003676471	16/17
18	17	0,003267974	17/18
19	18	0,002923977	18/19
20	19	0,002631579	19/20
21	20	0,002380952	20/21
22	21	0,002164502	21/22
23	22	0,001976285	22/23
24	23	0,001811594	23/24
25	24	0,001666667	24/25
26	25	0,001538462	25/26
27	26	0,001424501	26/27
28	27	0,001322751	27/28
29	28	0,001231527	28/29
30	29	0,001149425	29/30
31	30	0,001075269	30/31

b) On peut conjecturer que pour tout naturel n non nul, $u_n = \dfrac{n-1}{n}$.

2.



On peut conjecturer que la suite est croissante et converge vers 1.

B 1. a) $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{k+1-k}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k(k+1)}$.

b) $u_4 = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\right) + \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5}\right)$

soit $u_n = 1 - \dfrac{1}{5} = \dfrac{4}{5}$.

2. a) $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}.$$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ et $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ est décroissante, on peut (encore) conjecturer que la suite est croissante et converge vers 1.

C. a) Pour n entier naturel non nul, notons (P_n) la proposition « $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ ».

$u_1 = \dfrac{1}{1(1+1)} = \dfrac{1}{2} = 1 - \dfrac{1}{1+1}$: (P_1) est vraie.

Supposons (P_n) vraie pour un entier naturel non nul n, c'est-à-dire $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \text{ (d'après } \mathbf{B\ 1.\ a)}\text{)}.$$

Il en résulte : $u_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+2}$ donc (P_{n+1}) est vraie.

(P_1) est vraie et (P_n) vraie entraîne (P_{n+1}) vraie : la proposition est vraie pour tour entier $n \geqslant 1$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$, ce qui confirme les conjectures réalisées précédemment.

D Pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{2(2k+1)}.$$

On démontre de la même manière que :

$$v_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \ldots - \frac{1}{2(2n+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2}$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$.

41 TD – Approximation du nombre π

A 1. $M(x\,;\,y) \in \overset{\frown}{AB} \Leftrightarrow x \in [0\,;\,1],\ y \in [0\,;\,1]$ et $x^2 + y^2 = 1$

$$\Leftrightarrow x \in [0\,;\,1] \text{ et } y = \sqrt{1 - x^2}.$$

2. $S_{10} = \dfrac{1}{10}\left[f\left(\dfrac{1}{10}\right) + f\left(\dfrac{2}{10}\right) + \ldots + f\left(\dfrac{9}{10}\right)\right]$

$$= \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{9} \sqrt{1 - \left(\frac{k}{10}\right)^2}.$$

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$

B 1. a) $F1(x) = y = \sqrt{1 - x^2}$.

b) On obtient à l'affichage le nombre $4 \times S_n$, valeur approchée (…) du nombre π.

2. a) et **b)** On obtient avec AlgoBox :

$S_{100\,000} = 3{,}141\,572\,6$, valeur approchée de π à 10^{-4} près (ce qui est loin de l'approximation obtenue directement avec une calculatrice…).

c) On obtient avec AlgoBox : $S_{1000} = 3{,}139\,555$, valeur d'une précision inférieure à celle obtenue par Archimède : $3{,}140\,845 < \pi < 3{,}142\,858$.

EXERCICES Entraînement (page 42)

DE TÊTE

42 $u_1 = \frac{1}{2}$; $u_2 = \frac{2}{3}$; $u_3 = \frac{3}{4}$; conjecture : $u_{2\,012} = \frac{2012}{2013}$ (à rapprocher éventuellement de la suite de l'exercice **40. A** du manuel).

43 $u_1 = 3 = u_2 = u_3 = u_{2\,012}$.

44 $-1 < \frac{2}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

45 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

46 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

47 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n} = 1$.

48 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n}{n^2} = 0$.

49 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

50 La suite u_n n'a pas de limite.

51 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-n^2}{n} = -\infty$.

RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

52 $5^2 = 25$ et $4^2 + 3^2 = 25$: (P_2) est vraie.
Supposons (P_n) vraie pour un entier naturel $n \geqslant 2$.
$5^{n+1} = 5 \times 5^n \geqslant 5 \times 4^n + 5 \times 3^n \geqslant 4^{n+1} + 3^{n+1}$. (P_{n+1}) est vraie.
(P_2) est vraie et (P_n) vraie entraîne (P_{n+1}) vraie : la proposition est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$.
Conclusion : pour tout entier $n \geqslant 2$, $5^n \geqslant 4^n + 3^n$.

53 *Corrigé sur le site élève.*

54 $3 \times 2^2 = 12$ et $(2 + 1)^2 = 9$: (P_2) est vraie.
Supposons (P_n) vraie pour un entier naturel $n \geqslant 2$.
$3(n + 1)^2 = 3n^2 + 6n + 3 \geqslant (n + 1)^2 + 6n + 2$,
soit $3(n + 1)^2 \geqslant n^2 + 8n + 4 = (n + 2)^2 + 4n$,
donc $3(n + 1)^2 \geqslant (n + 2)^2$. (P_{n+1}) est vraie.
(P_2) est vraie et (P_n) vraie entraîne (P_{n+1}) vraie : la proposition est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$.
Conclusion : pour tout entier $n \geqslant 2$, $3n^2 \geqslant (n + 1)^2$.
• **Remarque.** Une autre méthode
$3n^2 - (n + 1)^2 = 2n^2 - 2n - 1$.
La fonction $f : x \mapsto 2x^2 - 2x - 1$ est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2} ; +\infty\right[$, $f(2) = 3$, donc $\forall n \geqslant 2$, $f(n) \geqslant 0$ soit

$$3n^2 \geqslant (n + 1)^2.$$

55 $3^5 = 243$ et $2^5 + 5 \times 5^2 = 32 + 125 = 157$,
donc $3^5 \geqslant 2^5 + 5 \times 5^2$: (P_5) est vraie.
Supposons (P_n) vraie pour un entier naturel $n \geqslant 5$.
$3^{n+1} = 3 \times 3^n \geqslant 3(2^n + 5n^2) \geqslant 2 \times 2^n + 5 \times 3n^2$.
Or (ex 54), pour $n \geqslant 2$, $3n^2 \geqslant (n + 1)^2$.
Pour $n \geqslant 5$, $3^{n+1} \geqslant 2^{n+1} + 5 \times (n + 1)^2$. (P_{n+1}) est vraie.
(P_5) est vraie et pour tout entier $n \geqslant 5$, (P_n) vraie entraîne (P_{n+1}) vraie.
Conclusion : pour tout entier $n \geqslant 5$, $3^n \geqslant 2^n + 5n^2$.

56 $4^0 + 5 = 6 = 3 \times 2$: (P_0) est vraie.
Supposons (P_n) vraie pour un entier naturel n, c'est-à-dire $4^n + 5 = 3p$ (avec $p \in \mathbb{N}$).
$4^{n+1} + 5 = 4(3p - 5) + 5 = 3(4p - 5)$: (P_{n+1}) est vraie.
(P_0) est vraie et pour tout entier naturel n, (P_n) vraie entraîne (P_{n+1}) vraie.
Conclusion : pour tout entier naturel n, $4^n + 5$ est un multiple de 3.

57 $2^{3\times0} - 1 = 0$ et $2^{3\times1} - 1 = 7$: (P_0) (et P_1) est (sont) vraie(s).
Supposons (P_n) vraie pour un entier naturel n.
$2^{3(n+1)} - 1 = 2^3 \times 2^{3n} - 1 = 2^3(2^{3n} - 1) + 2^3 - 1$
$= 2^3 \times 7p - 7 = 7(2^3p - 1)$: (P_{n+1}) est vraie.
(P_0) est vraie et pour tout entier naturel n, (P_n) vraie entraîne (P_{n+1}) vraie.
Conclusion : pour tout entier naturel n, $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7.

58 **1.** $3^0 = 1$ et $(0 + 2)^2 = 4$; $3^1 = 3$ et $(1 + 2)^2 = 9$;
$3^2 = 9$ et $(2 + 2)^2 = 16$; $3^3 = 27$ et $(3 + 2)^2 = 25$.
(P_0), (P_1) et (P_2) sont fausses et (P_3) est vraie.
2. Supposons (P_n) vraie pour un entier naturel $n \geqslant 3$.

$$3^{n+1} = 3 \times 3^n \geqslant 3(n + 2)^2 = 3n^2 + 12n + 12.$$

Comparons $3n^2 + 12n + 12$ et $[(n + 1) + 2]^2$ en étudiant le signe de leur différence.

$$3n^2 + 12n + 12 - (n + 3)^2 = 2n^2 + 6n + 3 > 0.$$

Donc $3^{n+1} \geqslant (n + 3)^2$: (P_{n+1}) est vraie.
(P_3) est vraie et pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, (P_n) vraie entraîne (P_{n+1}) vraie.
Conclusion : pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, on a

$$3^n \geqslant (n + 2)^2.$$

59 **1.** $u_0 = 3$; $u_1 = 1$; $u_2 = 3$; $u_3 = 1$; $u_4 = 3$; $u_5 = 1$.
Il semble donc que lorsque n est pair, $u_n = 3$ et lorsque n est impair, $u_n = 1$.
2. Notons (P_n) la proposition « $u_{2n} = 3$ et $u_{2n+1} = 1$ ».
(P_0) est vraie.
Supposons (P_n) vraie pour un entier naturel n.
Alors $\begin{cases} u_{2n+2} = -u_{2n+1} + 4 = 3 \\ u_{2n+3} = -u_{2n+2} + 4 = 1 \end{cases}$ et (P_{n+1}) est vraie.
(P_0) est vraie et pour tout entier naturel n, (P_n) vraie entraîne (P_{n+1}) vraie.
Conclusion : pour tout entier naturel n, $u_{2n} = 3$ et $u_{2n+1} = 1$.

60 *Corrigé sur le site élève.*

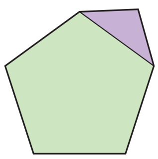
61 Notons (P_n) la proposition « $u_n = 2$ ».
Initialisation : $u_0 = 2$: (P_0) est vraie.
Hérédité : supposons (P_n) vraie pour un entier naturel n.
$u_{n+1} = 5 \times 2 - 8 = 2$: (P_n) vraie entraîne (P_{n+1}) vraie.
La propriété est donc vraie pour tout naturel n et la suite est constante.

62 **1.** $S_1 = 1$; $S_2 = 4$; $S_3 = 9$; $S_4 = 16$. On conjecture que $S_n = n^2$.
2. (P_1) est vraie.
Supposons (P_n) vraie pour un entier naturel $n \geqslant 1$.
$S_{n+1} = S_n + [2(n+1) - 1] = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$: (P_{n+1}) est vraie.
(P_1) est vraie et (P_n) vraie entraîne (P_{n+1}) vraie : la proposition est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.
Conclusion : pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_n = n^2$.
3. S_n est la somme des n premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2,

d'où $S_n = \dfrac{[1 + (2n-1)] \times n}{2} = n^2$.

63 $u_0 \in \,]0\,;1[$; (P_0) est vraie. Supposons (P_n) vraie pour un entier naturel n : $0 < u_n < 1$.
$u_{n+1} = f(u_n)$ avec f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(2-x)$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2(1-x) > 0$ sur $]0\,;1[$.
f est donc strictement croissante sur $[0\,;1]$.
Puisque $0 < u_n < 1$, alors $f(0) < f(u_n) < f(1)$; autrement dit $0 < u_{n+1} < 1$: (P_{n+1}) est vraie.
(P_0) est vraie et pour tout entier naturel n, (P_n) vraie entraîne (P_{n+1}) vraie.
Conclusion : pour tout entier naturel n, $0 < u_{n+1} < 1$.

64 (P_3) est vraie, car la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à π radians.
Supposons (P_n) vraie pour un entier naturel $n \geqslant 3$.
Un polygone convexe à $(n+1)$ côtés peut se décomposer en un polygone convexe à n côtés et un triangle.



En radians, la somme des mesures des angles est alors égale à
$$(n-2)\pi + \pi = [(n+1) - 2]\pi.$$
(P_{n+1}) est donc vraie.
(P_3) est vraie et pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, (P_n) vraie entraîne (P_{n+1}) vraie.
Conclusion : pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, (P_n) est vraie.

CALCULS DE LIMITES

65 **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+3}{3n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n}{3n} = \dfrac{2}{3}$ (termes dominants).
b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n-3}{3n-5} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n}{3n} = \dfrac{5}{3}$ (termes dominants).
c) $\forall n > 0$, $\dfrac{4}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{6}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6}{n} = 0$.
Théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

66 **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (théorème 3).
b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n}{4} - 2\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$,
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (théorème 3).

67 *Corrigé sur le site élève.*

68 **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{10n-1}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{10n}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{10}{n} = 0$
(termes dominants).
b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2-1}{3n+7} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2}{3n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n}{3} = +\infty$
(termes dominants).

69 **a)** $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$,
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (théorème 5).
b) Pour $n \neq 0$, $u_n = \dfrac{\sqrt{n}+1}{1+\dfrac{2}{n}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n}+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{2}{n}\right) = 1$,
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (théorème 5).

70 **a)** $u_n = \dfrac{\left[\sqrt{n^2+2n} - (n+1)\right]\left[\sqrt{n^2+2n} + (n+1)\right]}{\sqrt{n^2+2n} + (n+1)}$

soit $u_n = \dfrac{-1}{\sqrt{n^2+2n} + (n+1)}$. Or $\sqrt{n^2+2n} + n + 1 > n$,
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+2n} + (n+1) = +\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (théorème 5).
b) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}}$,
pour $n \neq 0$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n^2}} + \sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}\right)}$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (théorème 5).

71 *Corrigé sur le site élève.*

72 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{1+\sqrt{\dfrac{1}{n}}} = 2$;

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n}{n} = 3$;
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = 2 + 3 = 5$;
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = 2 \times 3 = 6$;
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{2}{3}$.

73 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{2n^2} = \dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0^+$;
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \dfrac{1}{2} + 0 = \dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = \dfrac{1}{2} \times 0 = 0$;
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$ (théorème 6).

74 **a)** $u_n = n + \dfrac{1}{n+1}$ et $v_n = -n + \dfrac{1}{n+1}$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n = \dfrac{2}{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = 0$.

b) $u_n = n + 10$ et $v_n = -n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = 10$.

c) $u_n = n$ et $v_n = -n^2$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = 0$.

d) $u_n = 5n$ et $v_n = -n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = -5$.

75 **1. a)** Oui, croissante et majorée par M, la suite (u_n) est convergente.
b) Non, la suite étant croissante, cela signifie que pour tout nombre M, tous les termes de la suite sont (sauf un nombre fini) dans l'intervalle $]M ; +\infty[$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. a) Non. Pour la suite (v_n) définie pour tout entier naturel non nul par $v_n = 1 + \dfrac{1}{n}$, il existe bien un nombre M qui minore l'ensemble des termes (par exemple 1). Cependant la suite n'a pas pour limite $+\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.
b) Oui. C'est la définition 2.

ÉTUDE DE SUITES

76 *Corrigé sur le site élève.*

77 **1.** $0 \leqslant u_0 \leqslant 2$: (P_0) est vraie.
Supposons (P_n) vraie pour un entier naturel n, c'est-à-dire $0 \leqslant u_n \leqslant 2$. Il en résulte $2 \leqslant u_n + 2 \leqslant 4$ et la fonction racine carrée étant strictement positive sur $\mathbb{R}^+$, $\sqrt{2} \leqslant \sqrt{u_n + 2} \leqslant \sqrt{4}$ et donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
(P_{n+1}) est vraie. Donc pour tout naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
2. $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 2} - u_n = \dfrac{u_n + 2 - u_n^2}{\sqrt{n_n + 2} + u_n}$.
Le dénominateur étant positif d'après **1.**, $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $u_n + 2 - u_n^2$.
Étudions le signe du trinôme $-x^2 + x + 2$ sur $[0 : 2]$.
Le trinôme est positif entre ses racines -1 et 2.
Donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$: la suite est croissante.
3. Croissante et majorée par 2, la suite (u_n) est convergente (théorème 8) et de limite $\ell \leqslant 2$.

78 **1.** On utilise le résultat suivant :
Si $0 \leqslant a \leqslant 1$ et $0 \leqslant b \leqslant 1$, alors $0 \leqslant ab \leqslant 1$.
Ici, $u_n = \dfrac{1}{n} \times \left[\dfrac{2}{n} \times \dfrac{3}{n} \times \ldots \times \dfrac{n}{n}\right]$.
Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, $0 \leqslant \dfrac{k}{n} \leqslant 1$.
Ainsi, $0 \leqslant \left[\dfrac{2}{n} \times \dfrac{3}{n} \times \ldots \times \dfrac{n}{n}\right] \leqslant 1$ et donc, pour tout entier naturel non nul n, $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, donc (théorème des gendarmes) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

79 **1.** Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant -\cos(n) \leqslant 1$ et donc $n \leqslant u_n \leqslant n + 2$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et pour tout entier n, $n \leqslant u_n$. On en conclut (théorème 1) que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

80 **1. a)** $u_0 = 1$; $u_1 = 0$; $u_2 = 3$; $u_3 = 2$; $u_4 = 5$; $u_5 = 4$.
b) Le calcul des premiers termes montre que la suite n'est pas monotone. Mais l'ensemble des valeurs prises par la suite est l'ensemble des entiers naturels, donc la suite n'est pas majorée ($u_{2n} = 2n + 1$ et $u_{2n+1} = 2n$).
Autre approche : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n - 1 \leqslant u_n$.
2. a) Quel que soit le nombre A, $A < E(A) + 1$.
Posons $n_0 = E(A) + 2$, alors $A < n_0 - 1$.
Pour tout $n > n_0$, $n_0 - 1 < n - 1 \leqslant u_n$, d'où $A < u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (définition 2).
b) Il n'est donc pas nécessaire que la suite soit croissante pour avoir pour limite $+\infty$.
3. a) La condition est suffisante (théorème 3) mais n'est pas nécessaire. Les deux suites peuvent ne pas avoir une limite finie ℓ.
b) La condition n'est pas suffisante :
si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, nous sommes dans le cas d'une forme indéterminée.
Implicitement, le fait d'écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ implique que les suites ont une limite (finie ou non). Alors la condition est nécessaire car pour tout naturel n, $u_n = (u_n - v_n) + v_n$ donc (théorème 3)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 + \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Sinon, la condition n'est pas nécessaire.
Prenons le cas où pour tout entier naturel n, $u_n = v_n$ et les suites n'ont pas de limite.
Par exemple, $u_n = v_n = n(-1)^n$.

81 **1.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n^2 + 1} > 1$, donc $\dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} < 1$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n^2 + 1} > \sqrt{n^2} = n$, donc $\dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} < \dfrac{1}{n}$.
3. Comme, pour tout entier naturel non nul n, u_n est positif, le premier renseignement nous permet d'affirmer que la suite est bornée.
Le second nous permet d'affirmer qu'elle converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (théorème des gendarmes).

82 **1.** Notons (P_n) la proposition « $u_n \in [1 ; 3]$ ».
(P_0) est vraie par hypothèse.
Supposons (P_n) vraie pour un entier naturel n, c'est-à-dire $1 \leqslant u_n \leqslant 3$. Il en résulte $3 \leqslant 3u_n \leqslant 9$ et, la fonction racine carrée étant strictement positive sur $\mathbb{R}^+$, $\sqrt{3} \leqslant \sqrt{3u_n} \leqslant \sqrt{9}$ d'où $\sqrt{3} \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$, soit $u_{n+1} \in [1 ; 3]$: (P_{n+1}) est vraie.
Donc pour tout naturel n, $u_n \in [1 ; 3]$.
2. La lecture du graphique permet de conjecturer que la suite (u_n) est croissante.

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{3u_n} - u_n = \frac{3u_n - u_n^2}{\sqrt{3u_n} + u_n}.$$

D'après la question **1.** le dénominateur est toujours strictement positif, le signe de $u_{n+1} - u_n$ est celui de $3u_n - u_n^2$, c'est-à-dire du produit $u_n(3 - u_n)$.
Or, d'après la question **1.**, les deux facteurs sont positifs : pour tout naturel n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et la suite (u_n) est croissante.
3. Croissante et majorée (par 3), la suite est convergente (théorème 8). On peut affirmer que sa limite est inférieure ou égale à 3. On peut conjecturer (lecture du graphique) que sa limite est 3.

83 **1.** $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$: la suite (u_n) est croissante.

2. a) $u_1 = 1 \leqslant 2 - \dfrac{1}{1}$: (P_1) est vraie.

Supposons (P_n) vraie pour un naturel non nul n.

$u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)^2} \leqslant 2 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

$\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)} > \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

donc $-\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{(n+1)^2} < -\dfrac{1}{n+1}$ et $u_{n+1} \leqslant 2 - \dfrac{1}{n+1}$.

(P_1) est vraie et pour tout entier naturel n, (P_n) vraie entraîne (P_{n+1}) vraie.

Conclusion : pour tout entier naturel non nul n, $u_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$.

b) Croissante et majorée (par 2), la suite (u_n) est convergente et de limite ℓ avec $\ell \leqslant 2$ (théorème 8).

84 *Corrigé sur le site élève.*

85 **1.** Le plus petit est $\dfrac{n}{n^2+n}$, le plus grand est $\dfrac{n}{n^2+1}$.

2. $n \times \dfrac{n}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant n \times \dfrac{n}{n^2+1}$

soit $\dfrac{n^2}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n^2}{n^2+1}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n^2} = 1$.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ (théorème des gendarmes).

86 **1.** Cet algorithme a pour objectif d'afficher les n premiers termes (n choisi par l'utilisateur) de la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3} + 2$.

2. Voir le TP 39, **B.4.** page 39.

3. On peut conjecturer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

4. Avec $u_0 = 1$, la suite est croissante. Avec $u_0 = 4$, la suite est décroissante (mais toujours de limite 3).

SUITES DU TYPE $u_{n+1} = a\,u_n + b$

87 **1.** On peut conjecturer que la suite est décroissante et qu'elle converge vers –3.

A	B
n	*Un*
0	-2
1	-2,33333
2	-2,55556
3	-2,7037
4	-2,80247
5	-2,86831
6	-2,91221
7	-2,94147
8	-2,96098
9	-2,97399
10	-2,98266
11	-2,98844
12	-2,99229
13	-2,99486
14	-2,99657

15	-2,99772
16	-2,99848
17	-2,99899
18	-2,99932
19	-2,99955
20	-2,9997
21	-2,9998
22	-2,99987
23	-2,99991
24	-2,99994
25	-2,99996
26	-2,99997
27	-2,99998
28	-2,99999
29	-2,99999
30	-2,99999

2. Pour tout naturel n, $v_n = u_n + 3$.

a) $v_0 = 1$; $v_1 = \dfrac{2}{3}$; $v_2 = \dfrac{4}{9}$.

b) $v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = \dfrac{2}{3} u_n + 2$

$= \dfrac{2}{3}(u_n + 3) = \dfrac{2}{3} v_n$.

La suite (v_n) est géométrique, de premier terme $v_0 = 1$, de raison $\dfrac{2}{3}$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ et $u_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 3$.

3. $-1 < \dfrac{2}{3} < 1$, donc (conséquence du théorème 7), $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -3$.

4. a) $S_n = (v_0 - 3) + (v_1 - 3) + \ldots + (v_n - 3)$

$$S_n = -3(n+1) + \dfrac{1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{2}{3}}$$

$$S_n = -3\left(n + \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right).$$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

88 **1.** $u_0 = 1$; $u_1 = 0$; $u_2 = -\dfrac{1}{2}$; $u_3 = -\dfrac{3}{4}$; $u_4 = -\dfrac{7}{8}$.

2. a) $v_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{2} - \alpha = \dfrac{1}{2}(u_n - 1 - 2\alpha)$.

(v_n) géométrique $\Leftrightarrow -1 - 2\alpha = -\alpha \Leftrightarrow \alpha = -1$.

b) $v_{n+1} = \dfrac{1}{2} v_n$ avec $v_n = u_n + 1$.

Comme $v_0 = 2$, pour tout naturel n,

$$v_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} \text{ et } u_n = -1 + \dfrac{1}{2^{n-1}}.$$

c) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{2^{n-1}} = -\dfrac{1}{2^n} < 0$: la suite (u_n) est décroissante. Comme de plus elle est minorée par –1, elle est convergente (théorème 8).

Remarque. L'expression de u_n suffit pour prouver la convergence et donne de plus sa limite –1.

d) $-1{,}0001 < u_n < -0{,}9999 \Leftrightarrow -0{,}0001 < u_n + 1 < 0{,}0001$

$\Leftrightarrow -0{,}0001 < v_n < 0{,}0001$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2^{n-1}} < 10^{-4} \Leftrightarrow 2^{n-1} > 10^4$.

Or $2^{13} = 8\,192$ et $2^{14} = 16\,384$, donc $n = 15$.

AVEC LES TICE

89 **1. a)** $p_n = p_0 \times 1{,}05^n$.

b) $1{,}05 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}05^n = +\infty$ (théorème 7).

2. $\dfrac{p_{47}}{p_0} \approx 9{,}9$ et $\dfrac{p_{48}}{p_0} \approx 10{,}4$.

Sous ces hypothèses, la population aura été multipliée par 10 dans 48 ans.

3. a)

```
Variables
n, p
Algorithme
n reçoit 1
p reçoit 1
Tant Que p < 10
   p reçoit 1,05^n
   n reçoit n+1
Fin Tant Que
Afficher n
```

Prendre toutes les initiatives

90 $u_n = \dfrac{3}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n+1}$. Alors $\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{3(n+1)}{n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n}{n} = 3$.

91 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-\dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (théorème des gendarmes).

Le jour du BAC (page 46)

92 *Corrigé sur le site élève.*

93 **1.** $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc pour tout nombre A, il existe p entier naturel tel que si $n > p$, alors $u_n > A$.
Notons m le plus grand des deux nombres n_0 et p.
Si $n > m$, alors $A < u_n < v_n$, et donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
2. a) Raisonnement par récurrence.
$v_0 = 1 \geqslant 0^2$: (P_0) est vraie. Supposons (P_n) vraie.
$v_{n+1} = v_n + 2n + 3 \geqslant n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. Donc (P_{n+1}) est vraie, et pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant n^2$.
b) Comme de plus, $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ la propriété démontrée en **1.** permet de conclure : $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

94 **1. a)** $(1+a)^1 = 1 + a$: (P_1) est vraie.
Pour n entier non nul, supposons (P_n) vraie, c'est-à-dire $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.
$(1+a)^{n+1} = (1+a)(1+a)^n \geqslant (1+a)(1+na)$.
$(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a + na^2 \geqslant 1 + (n+1)a$.
Donc (P_{n+1}) est vraie, et pour tout entier naturel non nul n, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.
b) $q > 1$. Notons a le nombre strictement positif tel que $q = 1 + a$. D'après le **a)**, pour tout entier naturel non nul n, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$, soit $q^n \geqslant 1 + na$.
Or $\lim_{n\to+\infty} (1 + na) = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ (théorème 1 de comparaison page 25 ; voir exercice précédent).
Conclusion : une suite géométrique de raison $q > 1$ a pour limite $+\infty$ si son premier terme est positif, et $-\infty$ si son premier terme est négatif.
2. a) $\sqrt{3} + 1 > 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{3}+1\right)^n = +\infty$.
b) $1{,}01 > 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} 1{,}01^n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1{,}01^n} = 0$.

95 **1.** $u_1 = -\dfrac{5}{3}$; $u_2 = -\dfrac{14}{9}$; $u_3 = -\dfrac{14}{27}$.
2. a) Raisonnement par récurrence.
$u_4 = \dfrac{67}{81} \geqslant 0$: (P_4) est vraie.
On suppose (P_n) vraie pour $n \geqslant 4$.
$u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3} + n - 2$. Or $u_n \geqslant 0$ et $n - 2 \geqslant 2$ donc (P_{n+1}) est vraie. Pour tout $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$.
b) Pour tout $n \geqslant 4$, $u_{n+1} \geqslant n - 2$, donc pour tout $n \geqslant 5$, $u_n \geqslant (n-1) - 2 = n - 3$.
c) $\lim_{n\to+\infty} (n-3) = +\infty$, donc (théorème 1) $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
3. a) $v_{n+1} = -\dfrac{2}{3} u_n - 2n + 4 + 3(n+1) - \dfrac{21}{2}$.

$$v_{n+1} = -\frac{2}{3} u_n + n - \frac{7}{2} = \frac{1}{3}\left(-2u_n + 3n - \frac{21}{2}\right) = \frac{1}{3} v_n.$$

La suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et son premier terme est $v_0 = -\dfrac{25}{2}$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = -\dfrac{25}{2} \times \dfrac{1}{3^n}$.

$$u_n = -\frac{1}{2}\left(-\frac{25}{2} \times \frac{1}{3^n}\right) + \frac{3}{2} n - \frac{21}{4}.$$

$$u_n = \frac{25}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{3}{2} n - \frac{21}{4}.$$

c) $S_n = \dfrac{25}{4} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^n} + \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{n} n - \frac{21}{4}(n+1)$.

$$S_n = \frac{25}{4} \times \frac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{3}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{21}{4}(n+1).$$

$$S_n = \frac{75}{8}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) + \frac{3}{4}(n+1)(n-7).$$

96 **1.** $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+2} - \dfrac{1}{n}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+1)(2n+2)}.$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-3n - 2 < 0$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$: la suite (u_n) est strictement décroissante.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$. Décroissante et minorée, la suite (u_n) est convergente (théorème 8).

97 **1. Faux.** Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ (en restant positive), alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$: la suite (v_n) n'est pas convergente.
2. Vrai. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$2 \leqslant u_n \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{u_n} \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 > -\frac{2}{u_n} \geqslant -1.$$

3. Faux. Contre-exemple : la suite (u_n) définie pour tout n par $u_n = \dfrac{11}{2} - n$ est décroissante. Par contre, $v_0 = -\dfrac{4}{11}$, $v_1 = -\dfrac{4}{9}$ soit $v_0 > v_1$: la suite (v_n) n'est pas croissante.
Remarque. Le choix de $\dfrac{11}{2}$ est lié à l'existence de v_n pour tout n.
4. Faux. La suite (u_n) définie pour tout naturel n par $u_n = (-1)^n$ n'est pas convergente.
Or, pour tout naturel n, $v_n = -\dfrac{2}{(-1)^n} = 2(-1)^{n-1}$: la suite (v_n) n'est pas convergente.

98 **1.** $10w_{10} = 11w_9 + 1 = 210$, d'où $w_{10} = 21$.
2. On peut conjecturer que la suite est arithmétique de raison 2 et de premier terme 1, c'est-à-dire que, pour tout n, $w_n = 2n + 1$.
Démonstration par récurrence :
$w_0 = 2 \times 0 + 1 = 1$: (P_0) est vraie.
On suppose (P_n) vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}(n+1)\, w_{n+1} &= (n+2)\, w_n + 1 = (n+2)(2n+1) + 1\\ &= 2n^2 + 5n + 3 = (2n+3)(n+1),\end{aligned}$$

$(n+1)$ étant non nul, $w_{n+1} = 2n + 3 = 2(n+1) + 1$.
(P_{n+1}) est vraie. Pour tout naturel n, $w_n = 2n + 1$.
Ainsi, $w_{2\,009} = 4\,019$.

99 **1. a)** $f'(x) = \dfrac{1}{10}(20 - x) - \dfrac{x}{10} = 2 - \dfrac{x}{5}$.

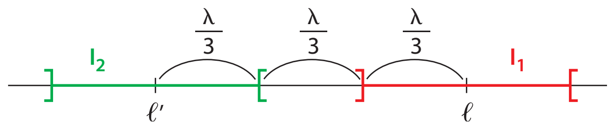
x	0		10		20
f'		+	0	–	
f	0	↗	10	↘	0

b) f est continue et strictement croissante sur $[0\,;10]$: $f(0) = 0$ et $f(10) = 10$, donc $f([0\,;10]) = [0\,;10]$.
$\forall x \in [0;\,10]\,;\, f(x) \in [0;\,10]$.
2. $u_0 = 1$ et $u_1 = 1{,}9$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 = f(u_0) \leqslant 10$: (P_0) est vraie. On suppose (P_n) vraie pour $n \in \mathbb{N}$:
$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10.$$
La fonction f étant croissante sur $[0;\,10]$, on en déduit $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(10)$, soit
$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 10 : (P_{n+1}) \text{ est vraie.}$$
Conclusion : Pour tout naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.
3. Croissante et majorée, la suite (u_n) est convergente (théorème 8) de limite ℓ telle que $\ell = f(\ell)$.
$\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = \dfrac{\ell}{10}(20 - \ell)$. Comme $\ell \neq 0$ (car $u_0 = 1$),
$$\ell = f(\ell) \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{10}(20 - \ell) \Leftrightarrow \ell = 10.$$

EXERCICES Pour aller plus loin (page 48)

100 **1.** $0 < q < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{q} > 1$ soit $p > 1$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} p^n = +\infty$ (théorème10) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ (théorème 5).
2. Si $-1 < q < 0$, alors $0 < |q| < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} |q|^n = 0$.
On admet que pour tout n, $|q^n| = |q|^n$.
$-|q|^n \leqslant q^n \leqslant |q|^n$ et donc (théorème des gendarmes)
$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0.$$
3. Si $-1 < q < 1$, la suite géométrique (q^n) converge vers 0.

101 **1. a)**



b) Quel que soit le point A de l'axe, $d(A, \ell) + d(A, \ell') \geqslant \lambda$.
Si $A \in I_1$, alors $d(A, \ell) < \dfrac{\lambda}{3}$.
$$d(A, \ell') \geqslant \lambda - d(A, \ell) \geqslant \lambda - \frac{\lambda}{3} = \frac{2\lambda}{3} \text{ et } A \notin I_2.$$
Les intervalles I_1 et I_2 sont donc disjoints.
2. I_1 contient tous les termes de la suite sauf (peut-être) un nombre fini : il n'y a qu'un nombre fini de termes de la suite qui n'appartiennent pas à I_1.
L'intervalle I_2 ne contient alors qu'un nombre fini de termes de la suite, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse « ℓ' est limite de la suite ».
Donc une suite convergente ne peut avoir deux limites distinctes : elle admet une seule limite.

102 **1.** Raisonnement par récurrence. Notons (P_n) la proposition « $u_n > 0$ », avec $n \in \mathbb{N}$.
$u_0 = 1 > 0$: (P_0) est vraie.
Pour n entier naturel, supposons (P_n) vraie.
u_{n+1}, quotient de deux nombres strictement positifs (u_n et $\sqrt{u_n^2 + 1}$) est strictement positif.
(P_{n+1}) est vraie. Pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
2. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$. Or, $\sqrt{u_n^2 + 1} > 1$, donc $\dfrac{1}{\sqrt{u_n^2 + 1}} < 1$ et la suite (u_n) est décroissante.
3. Décroissante et minorée, la suite (u_n) est convergente (théorème 8).
4. a) $u_0 = 1$; $u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $u_3 = \dfrac{1}{2}$; $u_4 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.
Conjecture : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.
b) $u_0 = \dfrac{1}{\sqrt{0+1}} = 1$: (P_0) est vraie.
Pour n entier naturel, supposons (P_n) vraie.
$$u_{n+1} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{\dfrac{1}{n+1} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{\dfrac{1}{n+1} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{n+2}}.$$
(P_{n+1}) est vraie.
Pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$ donc (théorème 5) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

103 **1.** Pour tout naturel n,
$$v_{n+1} = 3 - \sqrt{3u_n} = \frac{\left(3 - \sqrt{3u_n}\right)\left(3 + \sqrt{3u_n}\right)}{3 + \sqrt{3u_n}} = \frac{9 - 3u_n}{3 + \sqrt{3u_n}}$$
$$v_{n+1} = \sqrt{3}\,\frac{3 - u_n}{\sqrt{3} + \sqrt{u_n}}.$$
2. Pour tout naturel n, $u_n \geqslant 1$ donc $\sqrt{u_n} \geqslant 1$ et
$$v_{n+1} = \frac{\sqrt{3}v_n}{\sqrt{3} + \sqrt{u_n}} \leqslant \frac{\sqrt{3}\,v_n}{\sqrt{3} + 1}.$$
3. $v_0 = 2 \leqslant 2 \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}\right)^0$: (P_0) est vraie.
Pour n entier naturel, supposons (P_n) vraie.
$v_{n+1} \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}\, v_n \leqslant 2 \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}\right)^{n+1}$. (P_{n+1}) est vraie.
Pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant \left(\dfrac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}\right)^n$.
4. De plus, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 3$ donc $v_n \geqslant 0$.
Donc $0 \leqslant v_n \leqslant \left(\dfrac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}\right)^n$. Or $-1 < \dfrac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} < 1$.

La suite géométrique $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^n$ a pour limite 0.

Il en résulte (théorème des gendarmes) que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

104 **1. a)** f est sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ la somme des deux fonctions $x \mapsto \dfrac{x}{2}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ dérivables sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$: f est donc dérivable pour tout x non nul.

b) $\forall x \neq 0, f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-2}{2x^2} = \dfrac{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)}{2x^2}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	$\sqrt{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

2. a) $u_1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{17}{12} \approx 1{,}416\,67$;

$$u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12}+\frac{24}{17}\right) = \frac{577}{408} \approx 1{,}414\,22.$$

b) $\sqrt{2} < \dfrac{17}{12} < \dfrac{3}{2}$ soit $\sqrt{2} < u_1 < u_0 \leqslant \dfrac{3}{2}$: (P_0) est vraie.

Supposons (P_n) vraie pour n entier naturel, c'est-à-dire $\sqrt{2} < u_{n+1} < u_n \leqslant \dfrac{3}{2}$.

f est strictement croissante sur $\left[\sqrt{2}\,;+\infty\right[$ donc

$$f\left(\sqrt{2}\right) < f\left(u_{n+1}\right) < f\left(u_n\right) \leqslant f\left(\frac{3}{2}\right) \text{ soit}$$

$$\sqrt{2} < u_{n+2} < u_{n+1} \leqslant \frac{17}{12} \leqslant \frac{3}{2}.$$

(P_{n+1}) est vraie. Pour tout entier naturel non nul n,

$$\sqrt{2} < u_{n+1} < u_n \leqslant \frac{3}{2}.$$

Décroissante et minorée, la suite (u_n) est convergente (théorème 8).

c) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > \sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{u_n} < \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{u_n} - \sqrt{2} < -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Or $u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{u_n} - \sqrt{2}$.

Donc $u_{n+1} - \sqrt{2} < \dfrac{1}{2}u_n - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$.

d) $2^0 = 1$ donc (P_0) est vraie.

Supposons (P_n) vraie pour n entier naturel, c'est-à-dire $0 < u_n - \sqrt{2} \leqslant \dfrac{1}{2^n}\left(u_0 - \sqrt{2}\right)$.

D'après **c)**, $u_{n+1} - \sqrt{2} < \dfrac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$ donc

$$u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}\left(u_0 - \sqrt{2}\right) = \frac{1}{2^{n+1}}\left(u_0 - \sqrt{2}\right).$$

(P_{n+1}) est vraie. Pour tout entier naturel n,

$$0 < u_n - \sqrt{2} \leqslant \frac{1}{2^n}\left(u_0 - \sqrt{2}\right).$$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n}\left(u_0 - \sqrt{2}\right) = 0$. Le théorème des gendarmes nous permet de conclure : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n - \sqrt{2}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$.

105 $E\left(\dfrac{k}{2}\right) \leqslant \dfrac{k}{2} \leqslant E\left(\dfrac{k}{2}\right) + 1 \Leftrightarrow \dfrac{k}{2} - 1 \leqslant E\left(\dfrac{k}{2}\right) \leqslant \dfrac{k}{2}$.

Donc, $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} k - n \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} E\left(\dfrac{k}{2}\right) \leqslant \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} k$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{4} - n \leqslant \sum_{k=1}^{n} E\left(\frac{k}{2}\right) \leqslant \frac{n(n+1)}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n^2-3n}{4} \leqslant \sum_{k=1}^{n} E\left(\frac{k}{2}\right) \leqslant \frac{n^2+n}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n^2-3n}{4n^2} \leqslant u_n \leqslant \frac{n^2+n}{4n^2}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-3n}{4n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+n}{4n^2} = \dfrac{1}{4}$, donc (théorème des gendarmes) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{4}$.

106 **A.1.** $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$;

$v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \sqrt{1 + v_u}$.

2.

	A	B			
1	1	1	16	1,61803445	1,61803397
2	2	1,41421356	17	1,61803381	1,61803398
3	1,5	1,55377397	18	1,61803406	1,61803399
4	1,66666667	1,59805318	19	1,61803396	1,61803399
5	1,6	1,61184775	20	1,618034	1,61803399
6	1,625	1,61612121	21	1,61803399	1,61803399
7	1,61538462	1,6174428	22	1,61803399	1,61803399
8	1,61904762	1,61785129	23	1,61803399	1,61803399
9	1,61764706	1,61797753	24	1,61803399	1,61803399
10	1,61818182	1,61801654	25	1,61803399	1,61803399
11	1,61797753	1,6180286	26	1,61803399	1,61803399
12	1,61805556	1,61803232	27	1,61803399	1,61803399
13	1,61802575	1,61803347	28	1,61803399	1,61803399
14	1,61803714	1,61803383	29	1,61803399	1,61803399
15	1,61803279	1,61803394	30	1,61803399	1,61803399

3. Les deux suites semblent convergentes vers le même nombre. Une seule semble monotone : la suite (v_n) qui semble croissante, ce qui est confirmé par les vues d'écran.

B. 1. a) $u_1 = 1$, $u_2 = \dfrac{3}{2}$, donc $\dfrac{3}{2} \leqslant u_2 \leqslant 2$: (P_2) est vraie.

Supposons (P_n) vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$ avec $\dfrac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$ soit $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{2}{3}$ et

$\dfrac{3}{2} \leqslant 1 + \dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{5}{3} \leqslant 2$. (P_{n+1}) est vraie.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $\dfrac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$.

b) $\phi \approx 1{,}618\,033\,9$.

c) ϕ est solution de l'équation $x = 1 + \dfrac{1}{x}$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \text{ et } x \neq 0.$$

$\Delta = 5$, l'équation admet deux solutions $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

ϕ est la racine positive donc $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Comme $2 \leqslant \sqrt{5} \leqslant 3$, $\dfrac{3}{2} \leqslant \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \leqslant 2$.

d) $\left|\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \left(1+\dfrac{1}{\phi}\right)\right| = \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\phi}\right| = \left|\dfrac{\phi - x}{x\phi}\right|$.

Comme $x \geqslant \dfrac{3}{2}$ et $\phi \geqslant \dfrac{3}{2}$, $x\phi \geqslant \dfrac{9}{4}$ soit $\dfrac{1}{x\phi} \leqslant \dfrac{4}{9}$, donc

$$\left|\left(1+\frac{1}{x}\right) - \left(1+\frac{1}{\phi}\right)\right| \leqslant \frac{4}{9}\left|x - \phi\right|.$$

e) Pour $x = u_n$ (puisque pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $\dfrac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$), $\left|u_{n+1} - \phi\right| \leqslant \dfrac{4}{9}\left|u_n - \phi\right|$.

Comme $\left(\dfrac{4}{9}\right)^0 = 1$, (P_2) est vraie.

Supposons (P_n) vraie pour entier naturel $n \geqslant 2$,
$|u_{n+1} - \phi| \leqslant \dfrac{4}{9}\,|u_n - \phi| \leqslant \dfrac{4}{9} \times \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-2} |u_2 - \phi|$, donc (P_{n+1}) est vraie.
Pour tout naturel $n \geqslant 2$, $|u_n - \phi| \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-2} |u_2 - \phi|$.

f) Comme $-1 < \dfrac{4}{9} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-2} = 0$ et le théorème des gendarmes permet de conclure :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \phi.$$

2. a) $v_2 = \sqrt{2}$ donc (P_2) est vraie.
Supposons (P_n) vraie pour entier naturel $n \geqslant 2$,
c'est-à-dire $\sqrt{2} \leqslant v_n \leqslant \phi \Leftrightarrow 1 + \sqrt{2} \leqslant 1 + v_n \leqslant 1 + \phi = \phi^2$.
La fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$,
donc $\sqrt{2} \leqslant \sqrt{1+\sqrt{2}} \leqslant \sqrt{1 + v_n} \leqslant \phi$,
soit $\sqrt{2} \leqslant v_{n+1} \leqslant \phi$, donc (P_{n+1}) est vraie.
Pour tout naturel $n \geqslant 2$, $\sqrt{2} \leqslant v_n \leqslant \phi$.

b) Cela résulte de $1 + \dfrac{1}{\phi} = \phi$.

c) Pour tout naturel non nul n,

$$w_{n+1} = \phi - \sqrt{1+v_n} = \frac{\left(\phi - \sqrt{1+v_n}\right)\left(\phi + \sqrt{1+v_n}\right)}{\phi + \sqrt{1+v_n}},$$

$$w_{n+1} = \frac{\phi^2 - 1 - v_n}{\phi + \sqrt{1+v_n}} = \frac{\phi - v_n}{\phi + \sqrt{1+v_n}} = \frac{\phi - v_n}{\phi + v_{n+1}}.$$

$\phi \geqslant \dfrac{3}{2}$ et $v_{n+1} \geqslant \dfrac{3}{2}$ donc $\phi + v_{n+1} \geqslant 3$ et $w_{n+1} \leqslant \dfrac{\phi - v_n}{3}$,
soit $w_{n+1} \leqslant \dfrac{w_n}{3}$.

d) $w_1 = 1 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{1-1}$: (P_1) est vraie.
Supposons (P_n) vraie pour entier naturel n non nul.
$w_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{3} w_n \leqslant \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, donc (P_{n+1}) est vraie.
Pour tout naturel non nul n, $w_n \leqslant \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.
Comme $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2} = 0$ et le théorème des gendarmes permet de conclure : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

e) Pour tout naturel non nul n, $v_n = \phi - w_n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \phi$.

107 **1. a)** Dans B2 : $= 1 + \frac{1}{1}!$

Dans B3 : $= 1 + \frac{1}{1}! + \frac{1}{2}!$

b)

A	B		
n	Un		
1	2	16	2,718281828
2	2,5	17	2,718281828
3	2,666666667	18	2,718281828
4	2,708333333	19	2,718281828
5	2,716666667	20	2,718281828
6	2,718055556	21	2,718281828
7	2,718253968	22	2,718281828
8	2,71827877	23	2,718281828
9	2,718281526	24	2,718281828
10	2,718281801	25	2,718281828
11	2,718281826	26	2,718281828
12	2,718281828	27	2,718281828
13	2,718281828	28	2,718281828
14	2,718281828	29	2,718281828
15	2,718281828	30	2,718281828

On peut conjecturer que la suite est croissante et convergente vers $\ell \leqslant 3$.

2. a) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$: la suite (u_n) est strictement croissante.

b) $\dfrac{1}{1!} = 1 = \dfrac{1}{2^0}$: (P_1) est vraie.
Supposons (P_k) vraie pour tout entier naturel k non nul,
c'est-à-dire que $\dfrac{1}{k!} \leqslant \dfrac{1}{2^{k-1}}$.
Pour $k \geqslant 1$, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
$\dfrac{1}{(k+1)!} = \dfrac{1}{k+1} \times \dfrac{1}{k!} \leqslant \dfrac{1}{2^k}$, donc (P_{n+1}) est vraie.
Pour tout naturel $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{k!} \leqslant \dfrac{1}{2^{k-1}}$.

c) $u_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{2^0} + \dfrac{1}{2^1} + \ldots + \dfrac{1}{2^{n-1}} = 1 + \dfrac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}$,

$u_n \leqslant 1 + 2\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right) = 3 - \dfrac{1}{2^{n-1}} < 3$.

d) Croissante et majorée, la suite (u_n) est convergente (théorème 8).

CHAPITRE

2 Fonctions : limites

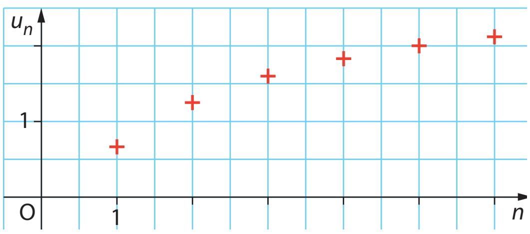
ACTIVITÉS (page 52)

Activité 1

1 **a)**

A	B		
n	Un	10	2,4166667
0	-0,5	11	2,4615385
1	0,6666667	12	2,5
2	1,25	13	2,5333333
3	1,6	14	2,5625
4	1,8333333	15	2,5882353
5	2	16	2,6111111
6	2,125	17	2,6315789
7	2,2222222	18	2,65
8	2,3	19	2,6666667
9	2,3636364	20	2,6818182

b)



c) La suite semble croissante et de limite comprise entre 2,7 et 3.

2 **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n}{n} = 3$.

b) $\forall x \geqslant 0$, $f'(x) = \dfrac{7}{(x+2)^2} > 0$. f est donc (strictement) croissante sur $[0\,;+\infty[$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $n < n+1$ donc $f(n) < f(n+1)$ soit $u_n < u_{n+1}$. La suite (u_n) est (strictement) croissante.

c) (u_n) est croissante et de limite 3 : donc pour tout naturel n, $u_n \leqslant 3$ (théorème 10 page 28 du manuel).

3 **b)** $\forall x \geqslant 0$, $f(x) - 3 = \dfrac{3x-1}{x+2} - 3 = \dfrac{-7}{x+2} < 0$.

c) $\forall x \geqslant 0$, $2{,}99 < f(x) < 3 \Leftrightarrow -0{,}01 < f(x) - 3 < 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{100} < \frac{-7}{x+2} \Leftrightarrow \frac{x+2}{7} > 100 \Leftrightarrow x > 698.$$

A = 699.

d) $3 - \alpha < f(x) < 3 < 3 + \alpha \Leftrightarrow -\alpha < \dfrac{-7}{x+2} < 0$

$$\Leftrightarrow x + 2 > \frac{7}{\alpha} \Leftrightarrow x > \frac{7}{\alpha} - 2 = \text{A}.$$

4 **a)** Non. **b)** Non.

Activité 2

1 $\forall x > 0, f'_1(x) = 1, f'_2(x) = 2x, f'_3(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}, f'_4(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,
$f'_5(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

2 **a)** $\forall x \geqslant 1$, $\sqrt{x} \leqslant x$ donc $x \leqslant x\sqrt{x} \leqslant x^2$ soit

$$f_1(x) \leqslant f_3(x) \leqslant f_2(x).$$

b) Cela résulte du **a)**.

3 **a)** On utilise la stricte croissance de la fonction carrée sur $]0\,;+\infty[$.

Pour $x > 0$: $\sqrt{x} > 1\,000 \Leftrightarrow x > 10^6$

$\sqrt{x} > 10^6 \quad \Leftrightarrow x > 10^{12}$.

b) $\sqrt{x} > \text{M} \Leftrightarrow x > \text{M}^2$, donc $\text{A} = \text{M}^2$.

4 **a)** $\forall x > 0$, $f'_5(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$, donc f_5 est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

b) $\forall x > 0$, $\dfrac{1}{x} > 0$ donc $f_5(x) < 1$. La courbe représentative de f_5 est située sous la droite d'équation $y = 1$.

c) Pour $x > 0$:

• $f_5(x) > 0{,}999 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{x} > 1 - \dfrac{1}{1\,000}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{1\,000} \Leftrightarrow x > 1\,000.$$

• $f_5(x) > 1 - 10^{-6} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{10^6} \Leftrightarrow x > 10^6$.

d) $f_5(x) > 1 - \alpha \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} < \alpha \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{\alpha}$.

PROBLÈME OUVERT

Notons H le point de coordonnées $(x\,;0)$.

$\boldsymbol{x > 1}$. Pour tout x, aire de OAH $= \frac{1}{2} \times x \times \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$.

Lorsque x prend des grandes valeurs, AH et BD tendent vers 0 et on peut conjecturer que l'aire du trapèze ABDH devient aussi petite que l'on veut. L'aire de OABD est voisine de $\frac{1}{2}$.

$\boldsymbol{0 < x < 1}$. L'aire de OAH reste constante et égale à $\frac{1}{2}$. Par contre l'aire du trapèze ABDH devient aussi grande que l'on veut et donc tend vers $+\infty$.

À la fin du chapitre :

Aire de OABD $= \mathcal{A}(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right)$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathcal{A}(x) = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \mathcal{A}(x) = +\infty$.

EXERCICES Application (page 59)

1 **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2 = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-2x^4) = -\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-2x^4) = -\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^5 = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$.

2 **a)** $f(x) = -3x^2 + x + 1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-3x^2) = -\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-3x^2) = -\infty$.

b) $f(x) = 6x^3 - x + 2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 6x^3 = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 6x^3 = -\infty$.

3 **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-x^4) = -\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x^4) = -\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-3x^6) = -\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-3x^6) = -\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-3x^5) = -\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-3x^5) = +\infty$.

4 **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+3)^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x-1)^2 = +\infty$, donc

$\lim\limits_{x\to+\infty} (x+3)^2\,(2x-1)^2 = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+5)^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x+2)^3 = +\infty$, donc

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x+5)^2\,(-x+2)^3 = +\infty$.

5 **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x} = 1$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = -\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

6 **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x^3}{x^4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x^3}{x^4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^5}{2x^5} = \frac{1}{2}$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^5}{2x^5} = \frac{1}{2}$.

7 **a)** $\boldsymbol{n < 4}$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{4-n}} = 0$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^{4-n}} = 0$.

b) $\boldsymbol{n = 4}$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x^4} = 1$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^4}{x^4} = 1$.

c) $\boldsymbol{n > 4}$ **et** $\boldsymbol{n}$ **pair** : $(n-4)$ est pair.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{n-4} = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^{n-4} = +\infty$.

d) $\boldsymbol{n > 4}$ **et** $\boldsymbol{n}$ **impair** : $(n-4)$ est impair.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{n-4} = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^{n-4} = -\infty$.

8 **Si** $\boldsymbol{a = 0}$, $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = 2$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x}{x} = 2$.

Si $\boldsymbol{a > 0}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ax^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} ax = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{ax^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} ax = -\infty$.

Si $a<0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} ax=-\infty$;

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^2}{x}=\lim_{x\to-\infty} ax=+\infty.$$

9 **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x}{x}=-3$: la droite Δ d'équation $y=-3$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

$$f(x)-(-3)=\frac{13}{x+4}.$$

$\forall x>-4$, $x+4>0$ donc $f(x)>-3$: $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de Δ.

2. $\begin{cases}\dfrac{13}{x+4}<\dfrac{1}{10}\\ x+4>0\end{cases} \Leftrightarrow x+4>130 \Leftrightarrow x>126$ donc il suffit de prendre $A \geqslant 126$.

10 **1. a)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^2}{x^2}=4$.

b) La droite d'équation $y=4$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

2. $\forall x<0$, $x^2>0$ donc :

$$3{,}99<f(x)<4{,}01 \Leftrightarrow 3{,}99<\frac{4x^2-4x+1}{x^2}<4{,}01$$
$$\Leftrightarrow 3{,}99\,x^2<4x^2-4x+1<4{,}01\,x^2$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}0<0{,}01\,x^2-4x+1 & \textbf{[1]}\\ 0<0{,}01\,x^2+4x-1 & \textbf{[2]}\end{cases}.$$

Comme $x<0$, $4x-1<-4x+1$, la résolution de **[2]** suffit.

$\Delta=16{,}04$.

$x_1=\dfrac{-4-\sqrt{16{,}04}}{0{,}02}<0$ et $x_2=\dfrac{-4+\sqrt{16{,}04}}{0{,}02}>0$.

Sur $]-\infty\,;0[$, le trinôme $0{,}01x^2+4x-1$ est positif pour $x<x_1\approx-400{,}25$ (par défaut).

Conclusion : $A\leqslant-400{,}25$ convient.

11 $\forall x>0$, $3x-1\leqslant 3x-\sin(x)\leqslant 3x+1$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-1}{x^2}\leqslant f(x)\leqslant\frac{3x+1}{x^2}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x}=0.$

Le théorème des gendarmes permet de conclure :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

12 $\forall x>1$, $5+\dfrac{1}{x^2}\leqslant f(x)\leqslant 5+\dfrac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5+\dfrac{1}{x^2}\right)=5=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5+\dfrac{3}{x}\right).$

Le théorème des gendarmes permet de conclure :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=5.$$

13 $\dfrac{1}{2}\left(3-\dfrac{x-1}{x+1}\right)\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{2}\left(3-1+\dfrac{1}{x}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2}{x+1}\leqslant f(x)\leqslant\frac{2x+1}{2x}.$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+2}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{2x}=1$. Le théorème des gendarmes permet de conclure : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

14 **a)** $x^3-1\leqslant x^3-\cos(x)\leqslant x^3+1$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-1)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+1)=-\infty$

donc (théorème 1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-\cos(x)\right)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+1)=+\infty$

donc (théorème 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-\cos(x)\right)=+\infty$.

b) Si $x>0$: $-\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{\cos(x)}{x}\leqslant\dfrac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, donc (théorème 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos(x)}{x}=0$.

Si $x<0$: $\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{\cos(x)}{x}\leqslant-\dfrac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=0$, donc (théorème 1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cos(x)}{x}=0$.

EXERCICES Activités de recherche (page 64)

19 **Courbe et asymptote**

• ***L'outil***

– Limite à l'infini d'une fonction rationnelle.

• ***Les objectifs***

– Déterminer une équation d'une droite asymptote.

– Déterminer la position relative d'une courbe représentative d'une fonction et d'une asymptote horizontale.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$: la droite Δ d'équation $y=3$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. a) $f(x)-3=\dfrac{-6x-8}{(x+1)^2}$.

b) $f(x)-3$ est du signe de $(-6x-8)$ sur $\mathbb{R}-\{-1\}$.

$$-6x-8\geqslant 0 \Leftrightarrow x\leqslant-\frac{4}{3}.$$

c) $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de Δ pour $x\in\left]-\infty\,;-\dfrac{4}{3}\right[$ et

$\mathscr{C}_f$ est sous Δ pour $x\in\left]-\dfrac{4}{3}\,;-1\right[\cup\,]-1\,;+\infty[$.

20 **Comparez des courbes à l'infini**

• ***Les outils***

– Calculs de limites.

– Lever des indéterminations à l'aide d'expressions conjuguées.

• ***Les objectifs***

– Conjecturer le comportement à l'infini de deux fonctions et l'allure de leurs représentations graphiques.

– Mettre en évidence une droite asymptote non parallèle à un des axes.

1. Pour $x > 1$, posons $Y = x^2 + 1$. $\lim\limits_{x \to +\infty} Y = +\infty$ et $\lim\limits_{Y \to +\infty} \sqrt{Y} = +\infty$. Donc (théorème de la fonction composée (théorème 3)), $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$.

De même, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-1} = +\infty$.

2. a) Pour $x \geqslant 1$, $x^2 - 1 \leqslant x^2 \leqslant x^2 + 1$. La fonction racine carrée étant croissante sur $[1\,; +\infty[$,

$$\sqrt{x^2-1} \leqslant \sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x^2+1} \text{ soit } g(x) \leqslant x \leqslant f(x).$$

$\mathscr{C}_f$ est au-dessus de Δ qui est au-dessus de $\mathscr{C}_g$.

b) Les égalités s'obtiennent en multipliant par les expressions conjuguées.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - x\right] = 0$ (par valeurs positives).

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-1} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2-1} + x\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[g(x) - x\right] = 0$ (par valeurs négatives).

d) Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont de plus en plus « proches » de Δ et $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de Δ qui est au-dessus de $\mathscr{C}_g$.

21 Retrouver l'équation d'une courbe

• ***Les outils***

– Représentation graphique d'une fonction rationnelle.

– Expression algébrique d'une fonction rationnelle.

• ***Les objectifs***

– Savoir traduire algébriquement les propriétés de la courbe représentative (hyperbole).

– Savoir vérifier les calculs effectués.

1. a) f n'est pas définie pour $x = -1$.

b) $-1 + c = 0 \Leftrightarrow c = 1$.

2. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$.

b) Si $a = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc $a \neq 0$;

si $a \neq 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ax}{x} = a$ donc $a = 3$.

3. a) $f(x) = \dfrac{3x+b}{x+1}$ et $f(0) = -1$, donc $b = -1$ et $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+1}$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x-1}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{x} = 3$.

$\lim\limits_{x \to -1} (3x-1) = -4$, $\lim\limits_{x \to -1^-} (x+1) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -1^+} (x+1) = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$.

22 Narration de recherche

$f(x)$ est le quotient de deux polynômes : $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ donc $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ soit deg P < deg Q.

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$ donc $\lim\limits_{x \to 0} Q(x) = 0$, soit $Q(0) = 0$.

Il en résulte que le terme constant de Q est nul : on peut mettre x en facteur. $Q(x) = x\,Q_1(x)$, où Q_1 est un polynôme (avec degré de Q_1 = (degré de Q) – 1).

De plus, f n'est pas définie en 0 et en 2.

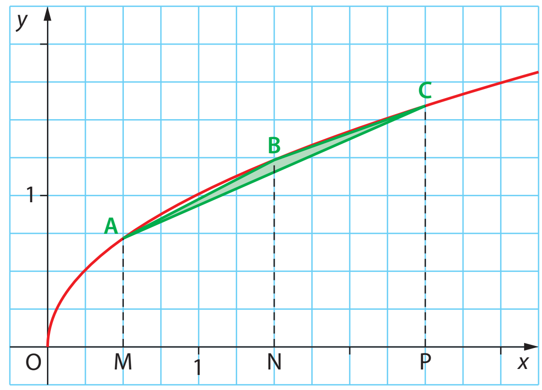
On peut conjecturer que $f(x) = \dfrac{ax+b}{x(x-2)}$.

$f(1) = -1 \qquad \Leftrightarrow a + b = 1.$

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -1 \qquad \Leftrightarrow -\dfrac{a}{2} + b = -\dfrac{5}{4}$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ -\dfrac{a}{2} + b = -\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{2} \\ b = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ et } f(x) = \frac{3x-1}{2x(x-2)}.$$

23 Narration de recherche



Notons M, N et P les projetés orthogonaux respectivement de A, B et C sur l'axe des abscisses.

S(x) = Aire ABNM + Aire BCPN – Aire ACPM.

Aire ABNM $= \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{2}$, Aire BCPN $= \dfrac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}}{2}$,

Aire ACPM $= \sqrt{x} + \sqrt{x+2}$.

$$S(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} + \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}}{2},$$

$$S(x) = \frac{1}{2\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)} - \frac{1}{2\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}\right)} \text{ et } \lim_{x \to +\infty} S(x) = 0.$$

24 TD – Au voisinage de la limite

A 1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$. **2.** $x > 1$ donc $x - 1 > 0$.

Il en résulte que $1{,}99(x-1) < 2x + 1 < 2{,}01(x-1)$

$\Leftrightarrow 1{,}99x - 2{,}99 < 2x < 2{,}01x - 3{,}01$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2{,}99 < 0{,}01x \\ 3{,}01 < 0{,}01x \end{cases} \Leftrightarrow x > 301$ et M = 302.

3. $2 - 10^{-6} < f(x) < 2 + 10^{-6}$

$\Leftrightarrow (2 - 10^{-6})(x-1) < 2x + 1 < (2 + 10^{-6})(x-1)$

$\Leftrightarrow (2 - 10^{-6})x - 3 + 10^{-6} < 2x < (2 + 10^{-6})x - 3 - 10^{-6}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 + 10^{-6} < 10^{-6}x \\ 3 + 10^{-6} < 10^{-6}x \end{cases} \Leftrightarrow x > 3 \times 10^6 + 1$

et A = 3 000 001.

B 1. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3}{x^3} = 5$.

b) Des calculs comme **A** conduisent à une inéquation du 3[e] degré dont la résolution n'est pas possible « à la main ».

2. a) 5 est la première valeur de x pour laquelle $g(x) \in$ I.

b) g semble croissante sur $[0\,; 9]$, puis décroissante.

3. a) $h'(x) = -6x(x-6)$.

x	1		6		10		$+\infty$
h'		+	0	–			
h	17	↗		↘	–199	↘	

$g'(x)$ est du signe de $h(x)$ sur $[1\,; +\infty[$ donc négatif sur $[10\,; +\infty[$.

$g(10) = \dfrac{5\,009}{1\,001} \approx 5{,}004 < 5{,}01$ donc $\forall x \geqslant 10$, $g(x) \leqslant 5{,}01$.

b) N = 29 (Fonction Table de la calculatrice).

25 **TD – Quelle méthode utiliser en présence de radicaux ?**

A Posons $Y = x^2 + x$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} Y = +\infty$ et $\lim\limits_{Y\to+\infty} \sqrt{Y} = +\infty$ (théorème de la fonction composée (théorème 3)).

B 1re méthode

a) $f(x)$ est la somme de deux expressions ayant pour limite $+\infty$ en $+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) Cette méthode ne convient pas pour g et h car elle conduit à une forme indéterminée.

2e méthode

a) Pour $x > 0$, $x^2 + x = x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ et $\sqrt{x^2} = x$.

b) Posons $Y = 1 + \frac{1}{x}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} Y = 1$.

Comme $\sqrt{1} = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1$.

Soit $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 2\right) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

c) $h(x) = x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1\right)$. Cette forme ne permet pas de conclure car $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1\right) = 0$ et nous sommes de nouveau en présence d'une forme indéterminée.

3e méthode

a) Pour $x > 0$: $f(x) = \dfrac{\left(\sqrt{x^2 + x} - x\right)\left(\sqrt{x^2 + x} + x\right)}{\sqrt{x^2 + x} + x}$.

$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1}$, ce qui permet de lever l'indétermination.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1\right) = 2$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

C a) Remarque. $\forall x \in \mathbb{R}$, $2x^2 - x + 1 > 0$.

En $-\infty$: pour $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x$.

$f(x) = -x\left(\sqrt{2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1\right)$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1\right) = \sqrt{2} + 1 > 0$,

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

En $+\infty$: pour $x > 0$, $\sqrt{x^2} = x$.

$f(x) = x\left(\sqrt{2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1\right)$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1\right) = \sqrt{2} - 1 > 0$,

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) En $-\infty$: $g(x) = -2x\left(\sqrt{1 + \frac{3}{4x^2}} - 1\right)$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{3}{4x^2}} - 1\right) = 0$ et nous sommes en présence d'une forme indéterminée.

L'utilisation de l'expression conjuguée conduit à :

$$g(x) = \frac{3}{\sqrt{4x^2 + 3} - 2x} = \frac{3}{-2x\left(\sqrt{1 + \frac{3}{4x^2}} + 1\right)}.$$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{3}{4x^2}} + 1\right) = 2$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

En $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2 + 3} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.

EXERCICES Entraînement (page 68)

DE TÊTE

26 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 5x^3 = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 5x^3 = -\infty$.

27 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^5 = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$.

28 $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x - 10) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} (2x - 10) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

29 *Corrigé sur le site élève.*

30 • $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty$,

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

31 *Corrigé sur le site élève.*

32 **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to0} f(x) = +\infty$.

33 $x > 1$. $\lim\limits_{x\to1} \sqrt{x-1} = 0$ par valeurs positives, donc $\lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty$.

34 Faux. $f(3) = 2$. Par contre $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$: la droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$.

35 Vrai. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x-2} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$: l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ (remarque : en $-\infty$ aussi).

$\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$: $\mathscr{C}_f$ admet deux asymptotes verticales d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

36 **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)\times g(x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\times\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty.$

b) Forme indéterminée.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2f(x)\times g(x)\right]=2\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty.$

LIMITE D'UNE FONCTION

37 **1.** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

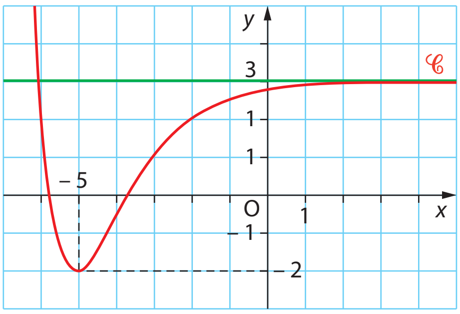
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

38 On peut conjecturer que la courbe admet deux asymptotes : une horizontale, d'équation $y=2$ et une verticale, d'équation $x=3$.

39 On peut conjecturer que f n'est pas définie en 3 et qu'elle n'a pas de limite en 3. On peut aussi conjecturer que $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=+\infty$.

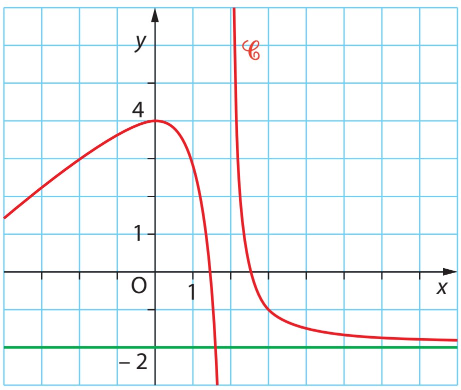
40 **1.** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$. La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y=3$.

2.



41 **1.** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-2$.

2.



42 f et 2, g et 6, h et 3, k et 5, m et 4, n et 1.

43 *Corrigé sur le site élève.*

44 $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$.

■ $f(x)=\dfrac{x(x+b)}{(x+1)(x-2)}$.

• Si $b=1$, pour $x\neq-1$, $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$. f ne convient pas car elle a une seule asymptote verticale d'équation $x=2$.

• Si $b=-2$, pour $x\neq2$, $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$. f ne convient pas car elle a une seule asymptote verticale d'équation $x=-1$.

• Si b est différent de 1 et de –2, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$,

$\lim\limits_{x\to-1}(x+1)(x-2)=0$ et $\lim\limits_{x\to-1}x(x+b)=1-b\neq0$ donc $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\infty$: la droite d'équation $x=-1$ est asymptote verticale à la représentation de f.

$\lim\limits_{x\to2}(x+1)(x-2)=0$ et $\lim\limits_{x\to2}x(x+b)=4+2b\neq0$ donc $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\infty$: la droite d'équation $x=2$ est asymptote verticale à la représentation de f.

■ $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x^2}=0$, la droite d'équation $y=1$ n'est pas asymptote donc g ne convient pour aucune valeur de b.

■ • Si $b=0$, $h(x)=\dfrac{1}{x+1}+1$ et $h(2)=\dfrac{4}{3}$: la droite d'équation $x=2$ n'est pas asymptote verticale à la représentation de h.

• Si $b\neq0$, $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{1}{x+1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{b}{x-2}+1=\dfrac{4}{3}$ donc $\lim\limits_{x\to-1^+}h(x)=+\infty$: la droite d'équation $x=-1$ est asymptote verticale à la représentation de f.

De même, $\lim\limits_{x\to2^+}h(x)=$ (signe de b) ∞ : la droite d'équation $x=2$ est asymptote verticale à la représentation de h.

45 **1.** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x}=2$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2$;

$\lim\limits_{x\to1^-}(2x+1)=3$ et $\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)=0$ par valeurs négatives, donc $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to1^+}(2x+1)=3$ et $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)=0$ par valeurs positives, donc $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$.

2. $\mathscr{C}_f$ admet deux asymptotes : une horizontale Δ d'équation $y=2$ en $+\infty$ et en $-\infty$, une verticale d'équation $x=1$.

$f(x)-2=\dfrac{3}{x-1}$, donc du signe de $x-1$.

Si $x<1$, alors $\mathscr{C}_f$ est en dessous de Δ.

Si $x>1$, alors $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de Δ.

46 **1.** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x}{x}=-2$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x}{x}=-2$;

$\lim\limits_{x\to-1^-}(-2x)=2$ et $\lim\limits_{x\to-1^-}(x+1)=0$ par valeurs négatives, donc $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-1^+}(-2x)=2$ et $\lim\limits_{x\to-1^+}(x+1)=0$ par valeurs positives, donc $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=+\infty$.

2. $\mathscr{C}_f$ admet deux asymptotes : une horizontale Δ d'équation $y=-2$ en $+\infty$ et en $-\infty$, une verticale d'équation $x=-1$.

$f(x)+2=\dfrac{2}{x+1}$ du signe de $x+1$.

Si $x<-1$, alors $\mathscr{C}_f$ est en dessous de Δ.

Si $x>-1$, alors $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de Δ.

47 **1.** $\lim\limits_{x \to -2^-} (x^2 - 1) = 3$ et $\lim\limits_{x \to -2^-} (2x + 4) = 0$ par valeurs négatives, donc $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - 1) = 3$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} (2x + 4) = 0$ par valeurs positives, donc $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$.

2. Pour $x < -2$, $2x + 4 < 0$.

$\frac{x^2 - 1}{2x + 4} < -10 \Leftrightarrow x^2 - 1 > -20x - 40 \Leftrightarrow x^2 + 20x + 39 > 0$

$\Leftrightarrow x < -10 - \sqrt{61} \approx -17{,}8$ ou $x > -10 - \sqrt{61} \approx -2{,}189$, donc on peut prendre $\alpha = 0{,}18$.

48 *Corrigé sur le site élève.*

49 **1.** $\lim\limits_{x \to 1} (5x - 1) = 4$ et $\lim\limits_{x \to 1} (x - 1)^2 = 0$ par valeurs positives, donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$.

2. $1\,000 < \frac{5x - 1}{(x - 1)^2} \Leftrightarrow 1\,000\,(x - 1)^2 < 5x - 1$

$\Leftrightarrow 1\,000x^2 - 2\,005x + 1\,001 < 0.$

$\Delta = 16\,025$, $x_1 \approx 0{,}939$ par défaut,

$x_2 \approx 1{,}065\,8$ par excès.

d'où $\begin{cases} 0{,}939 < 1 - \alpha \\ 1 + \alpha < 1{,}065\,8 \end{cases}$ soit $\begin{cases} \alpha < 0{,}061 \\ \alpha < 0{,}065\,8 \end{cases}$.

$\alpha = 0{,}06$ convient.

50 **1.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-x^2}{x} = -\infty$.

2. Pour $x > -2$, $x + 2 > 0$.

$f(x) < -1\,000 \Leftrightarrow 1 - x^2 < -1\,000(x + 2)$

$\Leftrightarrow x^2 - 1\,000x - 2\,001 > 0.$

$\Delta = 1\,008\,004$, $x_1 \approx -1{,}997$ et $x_2 \approx 1\,001{,}97$, donc $A = 1\,002$.

51 **1.** $\lim\limits_{x \to 2} (x - 2)^2 = 0^+$, donc $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$.

2. $x \neq 2$. $\frac{1}{(x - 2)^2} > 100 \Leftrightarrow 1 > 100(x - 2)^2$

$\Leftrightarrow 100x^2 - 400x + 399 < 0.$

$\Delta = 20^2$, $x_1 = \frac{400 - 20}{200} = 1{,}9$ et $x_2 = 2{,}1$.

Pour tout x de $]1{,}9\,;\,2{,}1[$, $f(x) > 100$.

52 *Corrigé sur le site élève.*

53 **a)** $x < -1$. $\lim\limits_{x \to -1^-} (x^2 - 1) = 0^+$, donc $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -1^+} (x^2 - 1) = 0^-$, donc $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$.

b) $f(x) = \frac{1}{x(1 - x)}$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} x(1 - x) = 0^-$, donc $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{x \to 0^+} x(1 - x) = 0^+$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

54 **a)** $f(x) = \sqrt{x}\left(\sqrt{2} - 1\right)$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) $x > 1$, $\lim\limits_{x \to 1^+} (x + 1) = 2$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{x - 1} = 0^+$, donc $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.

55 **a)** $x \neq 0$, $f(x) = x\left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{7}{x}\right)$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{7}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{x^2}}$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

56 **1.** Le dénominateur s'annule en -1 et 2, valeurs pour lesquelles f n'est donc pas définie.

2. $(x - 2)(x + 1) < 0 \Leftrightarrow x \in\ ]-1\,;\,2[$.

- $\lim\limits_{x \to -1^-} (x - 2)(x + 1) = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to -1^-} (x - 1) = -2$, donc $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$.
- $\lim\limits_{x \to -1^+} (x - 2)(x + 1) = 0^-$ et $\lim\limits_{x \to -1^-} (x - 1) = -2$, donc $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to 2^-} (x - 2)(x + 1) = 0^-$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} (x - 1) = 1$, donc $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$.
- $\lim\limits_{x \to 2^+} (x - 2)(x + 1) = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} (x - 1) = 1$, donc $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$.

57 **1.** Le dénominateur s'annule en -2 et 3, valeurs pour lesquelles f n'est donc pas définie.

2. $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$

$(x + 2)(x - 3) < 0 \Leftrightarrow x \in\ ]-2\,;\,3[$.

- $\lim\limits_{x \to -2^-} (x^2 - x - 6) = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to -2^-} (x - 1) = -3$, donc $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$.
- $\lim\limits_{x \to -2^+} (x^2 - x - 6) = 0^-$ et $\lim\limits_{x \to -2^+} (x - 1) = -3$, donc $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to 3^-} (x^2 - x - 6) = 0^-$ et $\lim\limits_{x \to 3^-} (x - 1) = 2$, donc $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$.
- $\lim\limits_{x \to 3^+} (x^2 - x - 6) = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 3^+} (x - 1) = 2$, donc $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$.

58 **1. a)** f, quotient de deux fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$, est dérivable sur cet intervalle.

$\forall x > 0$, $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \times 2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}(3 + \sqrt{x})}{4x} = \dfrac{-3}{4x\sqrt{x}}$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \left(3 + \sqrt{x}\right) = 3$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} 2\sqrt{x} = 0^+$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

c)

x	0	$+\infty$
f'	$-$	
f	$+\infty$ ↘	$\frac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ donc la droite Δ d'équation $y = \frac{1}{2}$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

2. a) Le problème est de déterminer une abscisse entière A à partir de laquelle la courbe $\mathscr{C}_f$ est dans la bande de plan déterminée par les droites d'équations $y = 0{,}5$ et $y = 0{,}501$.

b)

```
Entrer x
Tantque f(x) ⩾ 0,501
   x reçoit x + 1
FinTantque
Afficher x
```

```
1     VARIABLES
2       x EST_DU_TYPE NOMBRE
3     DEBUT_ALGORITHME
4       AFFICHER "saisir l' entier x"
5       LIRE x
6       TANT_QUE (F1(x) > 0.501) FAIRE
7         DEBUT_TANT_QUE
8         x PREND_LA_VALEUR x+1
9         FIN_TANT_QUE
10      AFFICHER x
11    FIN_ALGORITHME
12
13   Fonction numérique utilisée :
14   F1(x)=(3+sqrt(x))/(2*sqrt(x))
```

On incrémente d'abord x de 1 000 (ligne 8) pour localiser A, puis on affine la recherche.

c) A = 2 250 000.

THÉORÈMES DE COMPARAISON

59 *Corrigé sur le site élève.*

60 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-1}{x} = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{x+1} = 3$. Rien ne nous permet d'affirmer que f a une limite en $+\infty$. La seule chose qu'on peut affirmer, c'est que si f a une limite en $+\infty$, cette limite est finie et appartient à $[2\,;3]$.

61 $-\dfrac{1}{x} \leqslant 3f(x)-1 \leqslant \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{x}\right) \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{3}$.

Le théorème des gendarmes nous permet de conclure :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{3}.$$

62 Non. contre-exemple : $f(x) = \sin(x) + \dfrac{1}{x}$.

63 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{4}x^2 = +\infty$ et $\forall x < 0, f(x) \geqslant \dfrac{1}{4}x^2$.

Le théorème de comparaison nous permet de conclure :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

64 **1. a)** Vraie $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \text{ et théorème 2}\right)$.

b) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors pour tout $x \geqslant 0, f(x) \geqslant \sqrt{x}$.

c) Réciproque fausse. Contre-exemple : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2}$.

2. a) Vraie (théorème des gendarmes).

b) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$.

c) Réciproque fausse. Contre-exemple : $g(x) = f(x) - 1$ et $h(x) = f(x) + 1$.

3. a) Fausse. Contre-exemple : Activité 1 page 52 du manuel.

b) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, alors f est bornée.

c) Réciproque fausse. Contre-exemple : $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} f(x) = +\infty$.

LIMITE D'UNE FONCTION COMPOSÉE

65 *Corrigé sur le site élève.*

66 **a)** $x > 3$. $Y = \dfrac{x+2}{x-3}$, $\lim\limits_{x\to3} Y = +\infty$ et $\lim\limits_{Y\to+\infty} \sqrt{Y} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to3} \sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}} = +\infty$.

b) Si $x \in\ ]-2\,;4[$: $\lim\limits_{x\to4} (x+2) = 6$ et
$\lim\limits_{x\to4} \left(\sqrt{x+2}-2\right) = \sqrt{6}-2 > 0$.
$\lim\limits_{x\to4^-} (x+5) = 9$ et $\lim\limits_{x\to4^-} \left(\sqrt{x+5}-3\right) = 0^-$, donc $\lim\limits_{x\to4^-} f(x) = -\infty$.
Si $x > 4$: $\lim\limits_{x\to4^+} (x+5) = 9$ et $\lim\limits_{x\to4^+} \left(\sqrt{x+5}-3\right) = 0^+$, donc
$\lim\limits_{x\to4^+} f(x) = +\infty$.

67 **a)** $x < \dfrac{2}{3}$. $Y = \dfrac{x^2}{3-2x}$. $\lim\limits_{x\to-\infty} Y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{-2x} = +\infty$ et
$\lim\limits_{Y\to+\infty} \sqrt{Y} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{x^2}{3-2x}} = +\infty$.

b) $Y = x - \sqrt{x} + \dfrac{1}{x} = x\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x^2}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x^2}\right) = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} Y = +\infty$. Comme
$\lim\limits_{Y\to+\infty} Y^3 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

LIMITES ET SUITES

68 **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+1}{2n+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n^2+1}{2n+1}} = +\infty.$$

b) On utilise l'expression conjuguée afin de lever l'indétermination. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

69 **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+3}{n+3} = 2$ et $\lim\limits_{x\to2} \sqrt{x} = \sqrt{2}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$.

b) Une factorisation permet de lever l'indétermination.
Posons $Y = \sqrt{n+1}$. $u_n = Y^4 - Y$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} Y = +\infty$ et $\lim\limits_{Y\to+\infty} (Y^4 - Y) = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

70 **1.** $2^0 = 1 > 0$: (P_0) est vraie.
Supposons (P_n) vraie pour un naturel n, c'est-à-dire $2^n > n$.
Alors $2^{n+1} = 2 \times 2n > 2n \geqslant n+1$: (P_{n+1}) est vraie donc pour tout entier naturel n, $2^n > n$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ (théorème 2).

2. a) Posons $Y = 2^n$. $u_n = \dfrac{3Y+1}{Y+3}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} Y = +\infty$ et $\lim\limits_{Y\to+\infty} \dfrac{3Y+1}{Y+3} = 3$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

b) $u_n = \dfrac{Y-1}{Y^2+1}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} Y = +\infty$ et $\lim\limits_{Y\to+\infty} \dfrac{Y-1}{Y^2+1} = 0$, donc
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

AVEC LES TICE

71 **1.** $\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} g(x) = 0$.

2. $g(x) = \dfrac{1-x}{x\sqrt{x}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+x}\right)}$

$$g(x) = \frac{\frac{1}{x}-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+x}\right)}.$$

$x > 0$, $\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x}\right) = 1$ et $\lim_{x\to 0}(x\sqrt{x}) = 0$ par valeurs positives, donc $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$.

$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}-1\right) = -1$ et $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+x}\right) = +\infty$, donc $\lim_{x\to +\infty} g(x) = 0$.

3. Plus précisément, $\lim_{x\to +\infty} g(x) = 0^-$, donc la courbe est sous l'axe $(\mathrm{O}\,;x)$ en $+\infty$.

72 **1. a)** $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x+1}} = -1$.

b) $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+x}{\sqrt{x^2+4}-2} = +\infty$.

2. a) $\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x+1}} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}+1}{\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{\frac{x+1}{x}}}$.

Posons $\mathrm{Y} = \dfrac{x+1}{x}$.

$\lim_{x\to +\infty}\mathrm{Y} = 1$, donc $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{\dfrac{x+1}{x}} = \sqrt{1} = 1$.

De plus $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$, donc $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x+1}} = -1$.

b)
$$\frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+4}-2} = \frac{(x^2+x)\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}{x^2} = \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\sqrt{x^2+4}+2\right).$$

$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x^2+4}+2\right) = 4$, donc

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+4}-2} = +\infty.$$

Prendre toutes les initiatives

73 • $\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to -1^+} g(x) = +\infty$.

La droite Δ d'équation $x = -1$ est asymptote verticale commune.

• $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to -\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} g(x) = 2$.

Les courbes n'ont pas les mêmes asymptotes horizontales.

74 On utilise l'expression conjuguée afin de lever l'indétermination. Pour $x > 0$:

$$\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+x} = \frac{2-x}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+x}}$$
$$= \frac{x\left(\frac{2}{x}-1\right)}{x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+x\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \frac{\frac{2}{x}-1}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}.$$

Comme $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x} = \lim_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x^2} = 0$, $\lim_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2}{x}-1\right) = -1$,

$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}} = 1$, donc :

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+x}\right) = -\frac{1}{2}.$$

75 • Si $a < 0$, $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+2} = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} ax = -\infty$, donc $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-ax\right) = +\infty$.

• Si $a = 0$, $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+2} = +\infty$.

• Si $a > 0$, nous sommes en présence d'une forme indéterminée.

Pour $x \geqslant 0$, $\sqrt{x^2+2}-ax = x\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}-a\right)$.

$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}-a\right) = 1-a$.

• Si $0 < a < 1$, $1-a > 0$ et $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-ax\right) = +\infty$.

• Si $a = 1$, nous sommes en présence d'une forme indéterminée.

$$\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}-1 = \frac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+1\right)}$$

et $\sqrt{x^2+2}-ax = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+1}$, d'où $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-ax\right) = 0$.

• Si $1 < a$, $1 - \mathrm{a} < 0$ et $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-ax\right) = -\infty$.

EXERCICES Le jour du BAC (page 72)

76 *Corrigé sur le site élève.*

77 **1. b)** Car l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_2$.
2. a) Car l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_2$ en $+\infty$.
3. c) $\mathscr{C}_2$ est au-dessus de $\mathscr{C}_1$ pour $x \in \,]0\,;1[$ et en dessous pour $x > 1$.

78 **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{2x} = \dfrac{3}{2}$ donc **a)** est fausse et **b)** est vraie.

$\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^+} (3x+1) = -\dfrac{7}{2}$ et $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^+} (2x+3) = 0^+$, d'où

$\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^+} f(x) = -\infty$ et **c)** est vraie.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x}{2x} = \dfrac{3}{2}$ donc **d)** est fausse.

Réponses exactes : **b)** et **c)**.
2. Les limites précédentes permettent de conclure.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{3}{2}$, donc la droite d'équation $y = \dfrac{3}{2}$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
$\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^+} f(x) = -\infty$, donc la droite d'équation $x = -\dfrac{3}{2}$ est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}$.
Réponses exactes : **b)** et **c)**.
3. $f(x) - 3 = \dfrac{-7}{2(2x+3)} < 0$ donc réponse exacte : **b)**.

79 **1.** Faux. Contre-exemple : considérons la fonction f telle que pour tout $x > 0$, $f(x) = -1$. Pour tout $x > 0$,
$f(x) = -1 < \dfrac{2}{x}$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$.
2. Vrai. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ (théorème des gendarmes).
3. Faux. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 + \dfrac{3}{x}\right) = 2$.
f n'a pas nécessairement de limite en $+\infty$. Par contre, si elle a une limite, celle-ci est bien comprise entre 1 et 2.
On verra au chapitre 6 des contre-exemples comme
$f(x) = \dfrac{3+\sin(x)}{2}$.
4. Faux. Voir la représentation graphique n° 3 de l'exercice 42 page 69 du manuel.
On verra au chapitre 6 des contre-exemples comme
$f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} + a$.

80 **1.** Faux. Contre-exemple : $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$.
2. Faux. Contre-exemple : $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
3. Vrai. Théorème 2 (de comparaison).
4. Faux. Contre-exemple : $f(x) = 1$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$.
5. Faux. Contre-exemple : $f(x) = 1$ et $g(x) = x$.
6. Faux. Contre-exemple : $f(x) = x$ et $g(x) = x + 1$.

EXERCICES Pour aller plus loin (page 74)

81 $a > 1$.
$T_A : y = -\dfrac{1}{a^2}x + \dfrac{2}{a}$ coupe $(O\,;x)$ en $A'(2a\,;0)$;
$T_B : y = -a^2x + 2a$ coupe $(O\,;x)$ en $B'\left(\dfrac{2}{a}\,;0\right)$.
Notons M le point d'intersection des deux tangentes. Les coordonnées de M sont solutions du système

$$(S)\begin{cases} y = -\dfrac{1}{a^2}x + \dfrac{2}{a} \\ y = -a^2x + 2a \end{cases} ;\ (S) \Leftrightarrow \begin{cases} y = -a^2x + 2a \\ x\left(a^2 - \dfrac{1}{a^2}\right) = 2\left(a - \dfrac{1}{a}\right) \end{cases}$$

Comme $a > 1$, $a - \dfrac{1}{a} \neq 0$, $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y = -a^2x + 2a \\ x = \dfrac{2}{a + \dfrac{1}{a}} \end{cases}$.

D'où $M\left(\dfrac{2a}{a^2+1}\,;\dfrac{2a}{a^2+1}\right)$. (Remarque : $x_M = y_M > 0$).

Comme $A'B' = 2a - \dfrac{2}{a}$,

$S(a) = \dfrac{A'B' \times y_M}{2} = \dfrac{1}{2}\left(2a - \dfrac{2}{a}\right)\dfrac{2a}{a^2+1} = \dfrac{2a^2-2}{a^2+1}$ et
$\lim\limits_{a\to+\infty} S(a) = 2$.

82 **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$.
2. a) $f(x) = 1 + \dfrac{4}{x-1}$. Pour $x > 1$, $f(x) > 1$.
b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$.

3. $f\big(f(x)\big) = \dfrac{\dfrac{x+3}{x-1} + 3}{\dfrac{x+3}{x-1} - 1} = \dfrac{x+3+3(x-1)}{x+3-(x-1)} = x$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big) = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

83 Pour tout nombre a, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 + ax^2 + ax) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty$. Donc, a étant fixé, on se place sur un intervalle $[A\,;+\infty[$ sur lequel il n'y a pas de problème d'existence.

On utilise l'expression conjuguée afin de lever l'indétermination. Pour $x > 0$:

$$f(x) = x\left(\sqrt{x + a + \frac{a}{x}} - \sqrt{x+1}\right)$$

$$f(x) = x \times \frac{a + \dfrac{a}{x} - 1}{\sqrt{x + a + \dfrac{a}{x}} + \sqrt{x+1}}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \times \frac{a + \dfrac{a}{x} - 1}{\sqrt{1 + \dfrac{a}{x} + \dfrac{a}{x^2}} + \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(a + \dfrac{a}{x} - 1\right) = a - 1$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{1 + \dfrac{a}{x} + \dfrac{a}{x^2}} + \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}\right) = 2.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{a-1}{2} \times \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}$, donc :

si $a < 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$;

si $a > 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;

si $a = 1$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 1 + \dfrac{1}{x}} + \sqrt{x+1}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

84 Raisonnons par l'absurde.
Supposons qu'il existe x_0 tel que $f(x_0) > \ell$.
$\forall x > x_0, f(x) \geqslant f(x_0)$ car f est croissante sur I.
Notons α la distance non nulle de $f(x_0)$ à ℓ.
$\alpha = f(x_0) - \ell$. L'intervalle $\left]\ell - \dfrac{\alpha}{2} ; \ell + \dfrac{\alpha}{2}\right[$ ne contient ni $f(x_0)$, ni les valeurs prises par $f(x)$ pour $x > x_0$.
Ceci contredit la convergence de $f(x)$ vers ℓ.
L'hypothèse « il existe x_0 tel que $f(x_0) > \ell$ » est fausse, donc pour tout nombre x de I, $f(x) < \ell$.

85 $\forall x > 0, x - 1 < \mathrm{E}(x) \leqslant x$ donc $\dfrac{x-1}{x} < \dfrac{\mathrm{E}(x)}{x} \leqslant 1$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{E}(x)}{x} = 1$ (théorème des gendarmes).

86 **1. a)** et **b)** Lorsque $m \to +\infty, f(m) \to -2$;
lorsque $m \to -\infty, f(m) \to -2$;
lorsque $m \to 1, f(m) \to -3$;
lorsque $m \to \dfrac{1}{3}, \left(m > \dfrac{1}{3}\right), f(m) \to -\infty$;
lorsque $m \to \dfrac{1}{3}, \left(m < \dfrac{1}{3}\right), f(m) \to +\infty$.

2. a) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\,(m - 1 ; -2)$ est colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{AN}}(-1 ; y_{\mathrm{N}} - 2)$ d'où $y_{\mathrm{N}} = \dfrac{2m}{m-1}$.

b) $\overrightarrow{\mathrm{BN}}\left(3 ; \dfrac{2m}{m-1} + 1\right)$ est colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{NP}}\left(f(m) ; -\dfrac{2m}{m-1}\right)$

d'où $f(m) = -\dfrac{6m}{3m-1}$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(m) = -2 = \lim\limits_{x\to-\infty} f(m)$.

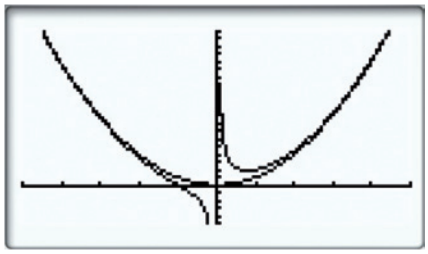
$f(1) = -3$, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^-} f(m) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^+} f(m) = -\infty$.

87 **1.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x} = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x} = +\infty$.

2.



Dès qu'on s'éloigne (pour x) de 0, les deux courbes semblent très voisines.

3. $f(x) - g(x) = \dfrac{1}{x}$, donc du signe de x :
si $x < 0$ $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de $\mathscr{C}_g$ et si $x > 0$, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$.

4. a) On peut conjecturer que la distance MP tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$, comme quand x tend vers $+\infty$.

b) $\mathrm{MP} = |f(x) - g(x)| = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ si } x > 0 \\ -\dfrac{1}{x} \text{ si } x < 0 \end{cases}$

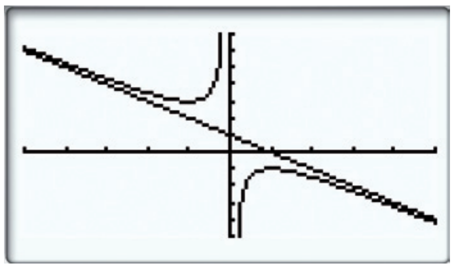
et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

ASYMPTOTES OBLIQUES

88 **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

2. a) La représentation graphique de f est de plus en plus « proche » de la droite d'équation $y = -x + 1$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

b)



89 **1.** Conjectures :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) $y = x + 1$.

2. Calculs :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2}{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^-} (2x^2 - x - 2) = 4$ et $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^-} (2x - 3) = 0^-$, donc

$\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^-} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^+} (2x - 3) = 0^+$, donc $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^+} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

3. a) Lorsque x tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$, les branches de la courbe semblent rectilignes.

b) La direction de la droite convient, mais elle est trop « basse ».

c) On construit la droite parallèle à la précédente dont l'ordonnée à l'origine est 1 (c'est-à-dire d'équation $y = x + 1$).

4. a) $2x^2 - x - 2 = (ax + b)(2x - 3) + c$

$= 2ax^2 + x(2b - 3a) - 3b + c.$

Par identification, $a = 1$, $b = 1$ et $c = 1$, d'où

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{2x-3}.$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x-3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{2x-3} = 0$, ce qui confirme le choix fait précédemment.

90 **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{2} = -\infty.$

2. a)

b) Non, la droite δ ne convient pas.

$f(x) - \dfrac{x}{2} = \dfrac{x^2-5}{2x+3} - \dfrac{x}{2} = \dfrac{-3x-5}{2x+3}.$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - \dfrac{x}{2}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[f(x) - \dfrac{x}{2}\right] = -\dfrac{3}{2}$ donc la courbe ne « s'approche » pas de δ.

3. a) $x^2 - 5 = (ax + b)(2x + 3) + c$

$= 2ax^2 + x(3a + 2b) + 3b + c.$

Par identification, $a = \dfrac{1}{2}$, $b = -\dfrac{3}{4}$ et $c = -\dfrac{11}{4}$, d'où

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{4} - \frac{11}{8x+12}.$$

b) Pour des valeurs de x tendant vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, la courbe est très « proche » (et même de plus en plus « proche ») de la droite Δ d'équation $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{4}$.

Confirmation : $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\dfrac{11}{8x+12}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{11}{8x+12}\right) = 0.$

91 $x^2 - 7x + 3 = (ax + b)(x - 2) + c$

$= ax^2 + x(b - 2a) - 2b + c.$

Par identification, $a = 1$, $b = -5$ et $c = -7$, d'où

$$f(x) = x - 5 - \frac{7}{x-2}.$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{7}{x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7}{x-2} = 0$, donc la droite d'équation $y = x - 5$ est asymptote oblique à la représentation de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

CHAPITRE

3 Fonction exponentielle

ACTIVITÉS (page 78)

Activité 1

1

A	B		
0	7		
1	7,084	16	8,47200572
2	7,169008	17	8,57366978
3	7,2550361	18	8,67655382
4	7,34209653	19	8,78067247
5	7,43020169	20	8,88604054
6	7,51936411	21	8,99267302
7	7,60959648	22	9,1005851
8	7,70091163	23	9,20979212
9	7,79332257	24	9,32030963
10	7,88684245	25	9,43215334
11	7,98148455	26	9,54533918
12	8,07726237	27	9,65988325
13	8,17418952	28	9,77580185
14	8,27227979	29	9,89311147
15	8,37154715	30	10,0118288

a) Dans 20 ans : $7 \times 1{,}012^{20} \approx 8{,}886$ milliards.
b) Elle atteindra 10 milliards dans 30 ans.
c) 59 ans sont nécessaires au doublement.

Activité 2

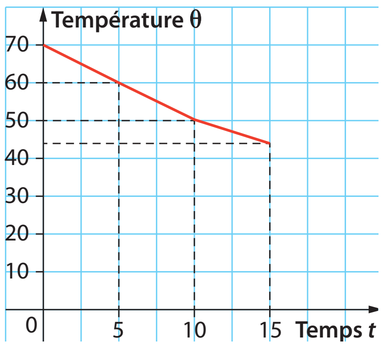
1 **a)** On peut conjecturer que les abscisses des points M_0, M_1 et M_2 sont des entiers consécutifs.
Les vecteurs $\overrightarrow{M_0A_0}\,(-m_0\,;\,1)$ et $\overrightarrow{A_0A_1}\,(1\,;\,1)$ sont colinéaires, donc $m_0 = -1$.
Les vecteurs $\overrightarrow{M_1A_1}\,(1-m_1\,;\,2)$ et $\overrightarrow{A_1A_2}\,(1\,;\,2)$ sont colinéaires, donc $m_1 = 0$.
Les vecteurs $\overrightarrow{M_2A_2}\,(2-m_2\,;\,4)$ et $\overrightarrow{A_2A_3}\,(1\,;\,4)$ sont colinéaires, donc $m_2 = 1$.

3 **a)** f étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, pour tout point A, $f'(x_A) > 0$.
b) $y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A)$.
c) $0 = f'(x_A)(x_M - x_A) + f(x_A)$, d'où $x_M - x_A = -\dfrac{f(x_A)}{f'(x_A)}$ et M a pour abscisse $x_M = x_A - \dfrac{f(x_A)}{f'(x_A)}$.
d) f vérifie $\mathcal{P}$ $\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{C},\ x_M = x_A - 1$

$$\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{C},\ \frac{f(x_A)}{f'(x_A)} = 1$$
$$\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{C},\ f(x_A) = f'(x_A)$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f'(x)$$
$$\Leftrightarrow f = f'.$$

PROBLÈME OUVERT

1 En première approximation, on suppose que la température baisse linéairement par palier de 5 minutes.
• Sur le premier palier (de 0 à 5 min) :
$\dfrac{\theta(5)-\theta(0)}{5-0} = -2$. On en déduit $k = \dfrac{\theta'(0)}{\theta(0)} = -\dfrac{2}{70}$.
• Sur le second palier (de 5 à 10 min) :
$\theta(5) = 60$, donc $\theta'(5) = -\dfrac{12}{7}$.
$y = -\dfrac{12}{7}x + b$ d'où $60 = -\dfrac{12}{7} \times 5 + b$, soit $y = -\dfrac{12}{7}x + \dfrac{480}{7}$.
• Sur le dernier palier (de 10 à 15 min) :
$\theta(10) = \dfrac{360}{7}$ donc $\theta'(10) = -\dfrac{72}{49}$.
$y = -\dfrac{72}{49}x + b$ d'où $\dfrac{360}{7} = -\dfrac{72}{49} \times 10 + b$,
soit $y = -\dfrac{72}{49}x + \dfrac{3\,240}{49}$, d'où $\theta(15) = \dfrac{2\,160}{49} \approx 44°$.
On peut conjecturer que la température sera de 44° après 15 minutes.



• ***À la fin du chapitre :*** $\theta(t) = ae^{kt}$.

$\theta(0) = 70$, donc $a = 70$.

$\theta(5) = 60$, donc $70\,e^{5k} = 60 \Leftrightarrow e^{5k} = \dfrac{6}{7}$.

À la calculatrice (en attendant le chapitre 5), on trouve

$k \approx -0{,}030\,83$. (Remarque : $-\dfrac{2}{70} \approx -0{,}028$.)

D'où $\theta(t) = 70\,e^{-0{,}030\,83t}$ et $\theta(15) \approx 44{,}08°$.

EXERCICES Application (page 85)

1 **1. a)** Pour tout nombre x,

$$g(-x) = \frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{2e^{-x}\times e^{x}}{(1+e^{-x})\times e^{x}} = \frac{2}{1+e^{x}} \text{ d'où}$$

$$g(x) + g(-x) = \frac{2e^{x}}{1+e^{x}} + \frac{2}{1+e^{x}} = \frac{2(1+e^{x})}{1+e^{x}} = 2.$$

b) Pour tout x de $\mathbb{R}$, on considère les points $M(x\,;\,g(x))$ et $M'(-x\,;\,g(-x))$.

Il s'agit de prouver que J est le milieu de [MM'].

• $\dfrac{x_M + x_{M'}}{2} = 0 = x_J$,

• $\dfrac{y_M + y_{M'}}{2} = \dfrac{g(x)+g(-x)}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 = y_J$.

Ainsi J est le milieu de [MM'] donc J est centre de symétrie de $\mathscr{C}_g$.

2. a) $f(x) \geqslant g(x) \Leftrightarrow e^{2x} \geqslant \dfrac{2e^{x}}{1+e^{x}}$

$\Leftrightarrow e^{3x} + e^{2x} - 2e^{x} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow e^{2x} + e^{x} - 2 \geqslant 0 \qquad (1)$

On pose $X = e^{x}$.

L'inéquation s'écrit $X^2 + X - 2 \geqslant 0$ donc dans $\mathbb{R}$, $X \leqslant -2$ ou $X \geqslant 1$. Or $X > 0$ donc l'inéquation (1) équivaut à $e^{x} \geqslant 1$ soit $x \geqslant 0$.

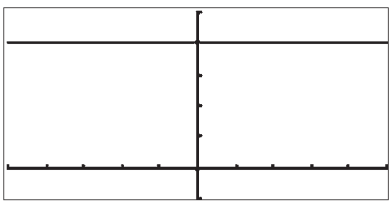
Ensemble des solutions : $\mathscr{S} = [0\,;+\infty[$.

b) On en déduit que :

• Sur $[0\,;+\infty[$, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$.

• Sur $]-\infty\,;0[$, $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de $\mathscr{C}_g$.

2 **1.** Représentation graphique :



2. On conjecture que f est une fonction constante de valeur 4.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (e^{x} + e^{-x})^2 - (e^{x} - e^{-x})^2$

$f(x) = e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x}) = 4$.

3 **1.** • On note T_0 la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

$T_0 : y = f'(0)x + f(0)$ avec $f'(x) = f(x) = e^{x}$, donc $T_0 : y = x + 1$.

• On note Δ_0 la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0.

$\Delta_0 : y = g'(0)x + g(0)$ avec $g(x) = \dfrac{x^2}{2} + x + 1$ et $g'(x) = x + 1$, donc $\Delta_0 : y = x + 1$.

• Ainsi $\Delta_0 = T_0$ (tangente commune à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$).

2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = f(x) - g(x)$.

a) $\varphi'(x) = f'(x) - g'(x) = e^{x} - (x+1)$.

b) La courbe de la fonction exponentielle est située au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0, d'équation $y = x + 1$, donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^{x} - (x+1) \geqslant 0$.

Ainsi $\varphi'(x) \geqslant 0$, d'où le tableau de variation de φ :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
φ'		$+$	0	$+$	
φ		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

c) Sur $]-\infty\,;0]$, $\varphi(x) \leqslant 0$ donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de $\mathscr{C}_g$. Sur $]0\,;+\infty[$, $\varphi(x) > 0$ donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$.

4 **1. a)** $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^{x}(e^{x} - e^{-x})}{2e^{x}} = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$.

Ainsi $f'(x) > 0$ d'où le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'		$+$	
f	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

b) $T_0 : y = f'(0)x + f(0)$ donc $T_0 : y = x$.

3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $d(x) = f(x) - x$.

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $d'(x) = f'(x) - 1 = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} - 1$

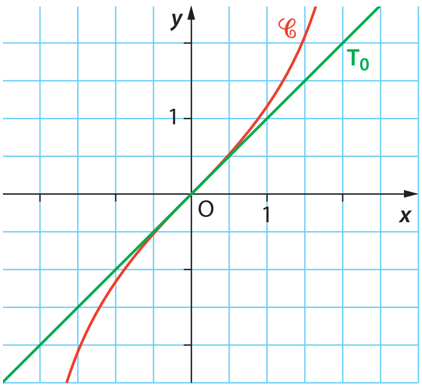
$$d'(x) = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2} = \frac{(e^x + e^{-x} - 2) \times e^x}{2 \times e^x}$$

$$= \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{2e^x} \text{ donc } d'(x) = \frac{(e^x - 1)^2}{2e^x}.$$

b) Ainsi $d'(x) \geqslant 0$ d'où le tableau de variation de d :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
d'		$+$	0	$+$	
d		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

c) Sur $]-\infty ; 0]$, $d(x) \leqslant 0$ donc $\mathscr{C}$ est au-dessous de T_0.
Sur $]0 ; +\infty[$, $d(x) > 0$ donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de T_0.



5 On note f (resp. g) la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ (resp. $g(x) = e^{-x}$).

1. $T_1 : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ avec $f'(x) = e^x$.
$T_1 : y = e(x - 1) + e$ soit $T_1 : y = ex$.
$\Delta_1 : y = g'(1)(x - 1) + g(1)$ avec $g'(x) = -e^{-x}$.
$\Delta_1 : y = -e^{-1}(x - 1) + e^{-1}$ soit $T_2 : y = -e^{-1}x + 2e^{-1}$.

2. T_1 a pour vecteur directeur $\vec{u_1}(1 ; e)$; Δ_1 a pour vecteur directeur $\vec{v_1}(1 ; -e^{-1})$.
Or $\vec{u_1} \cdot \vec{v_1} = 1 \times 1 + e \times (-e^{-1}) = 0$ donc $\vec{u_1} \perp \vec{v_1}$.
Ainsi T_1 et Δ_1 sont perpendiculaires.

3. Dans le cas général, pour tout a de $\mathbb{R}$: T_a a pour coefficient directeur $f'(a) = e^a$ donc pour vecteur directeur $\vec{u_a}(1 ; e^a)$; de même, Δ_a a pour vecteur directeur $\vec{v_a}(1 ; -e^{-a})$.
Alors $\vec{u_a} \cdot \vec{v_a} = 1 \times 1 + e^a \times (-e^{-a}) = 0$ donc $\vec{u_a} \perp \vec{v_a}$.
Ainsi T_a et Δ_a sont perpendiculaires.

6 **1.** La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f'(0)x + f(0)$ avec pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^{2x} + 1) \text{ et } f'(x) = e^{2x}.$$

D'où l'équation : $y = x + 1$. Ainsi Δ est tangente commune à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ au point $A(0 ; 1)$.

2. a) La courbe de la fonction exponentielle est située au-dessus de n'importe laquelle de ses tangentes, donc en particulier au-dessus de Δ (*cf.* exercice résolu B page 86 du manuel).

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $d(x) = g(x) - f(x)$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $d'(x) = g'(x) - f'(x) = e^x - e^{2x} = e^x(1 - e^x)$.
Le signe de $d'(x)$ est celui de $1 - e^x$:

$$1 - e^x \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \leqslant 1 \Leftrightarrow x \leqslant 0.$$

D'où le tableau de variation de d :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
d'		$+$	0	$-$	
d		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}$, $d(x) \leqslant 0$ donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$.

c) Finalement, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de Δ donc $\mathscr{C}_g$ est entre Δ et $\mathscr{C}_f$.
D'où l'encadrement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x + 1 \leqslant e^x \leqslant \frac{1}{2}(e^{2x} + 1).$$

7 **a)** Pour tout nombre x, $x \neq -1$ et $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x + 1} = \frac{e^x(1 - e^{-x})}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{e^x}{x} \times \frac{1 - e^{-x}}{1 + \frac{1}{x}}.$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 + \frac{1}{x}} = 1$ donc :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

b) Pour tout nombre x, $x \neq 0$,

$$g(x) = \frac{e^{2x} + e^x}{x^2 + 1} = \frac{e^{2x}(1 + e^{-x})}{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \left(\frac{e^x}{x}\right)^2 \times \frac{1 + e^{-x}}{1 + \frac{1}{x^2}}.$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right)^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1 + e^{-x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$ donc :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty.$$

8 **1.** La suite (u_n) est à termes strictement positifs donc pour étudier son sens de variation il suffit de comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n + 1)e^{-n}}{ne^{1-n}} = \frac{n + 1}{n} e^{-1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-1}.$$

Or $n \geqslant 1$ donc $1 + \frac{1}{n} \leqslant 2$.

Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 2e^{-1} < 1$ avec $u_n > 0$.

La suite (u_n) est strictement décroissante.

2. a) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = ne \times e^{-n} = e \times \frac{n}{e^n} = e \times \frac{1}{\frac{e^n}{n}}$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^n}{n}} = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Remarque. On peut aussi conclure en utilisant la transformation d'écriture $u_n = -e(-ne^{-n})$ et la limite connue $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$.
On pose $x = -n$.
Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (-n) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ donc

$$\lim_{n \to +\infty} (-ne^{-n}) = 0 \text{ ; d'où } \lim_{n \to +\infty} u_n = 0.$$

9 **1.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n+1}{e^{2n}} = (n+1)e^{-2n}$.

Ainsi $u_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = (x+1)e^{-2x}$. Pour trouver le sens de variation de (u_n), il suffit d'étudier celui de f. Pour tout $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = e^{-2x} - 2(x+1)e^{-2x} = (-2x-1)e^{-x}.$$

Ainsi $f'(x) < 0$ et f est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$. (u_n) a même sens de variation que f, donc (u_n) est décroissante.

2. a) (u_n) est à termes strictement positifs. Ainsi (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = ne^{-2n} + e^{-2n}$

$$= -\frac{1}{2}(-2n)e^{-2n} + e^{-2n}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(-2n) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(-2n)e^{-2n} = 0$.

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-2n} = 0$ donc finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

10 • $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{(xe^x)^2}{e^x+1}$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+1) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Ainsi l'axe des abscisses d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

• $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2e^{2x}}{e^x+1} = \dfrac{x^2e^{2x}}{e^x(1+e^{-x})} = \dfrac{x^2e^x}{1+e^{-x}}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^{-x}) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

La limite n'est pas finie, donc $\mathscr{C}_f$ n'admet pas d'asymptote horizontale en $+\infty$.

EXERCICES Activités de recherche (page 90)

15 **Tangentes passant par l'origine**

• ***Les outils***

– Fonction exponentielle.

– Équation d'une tangente.

– Position relative d'une droite et d'une courbe.

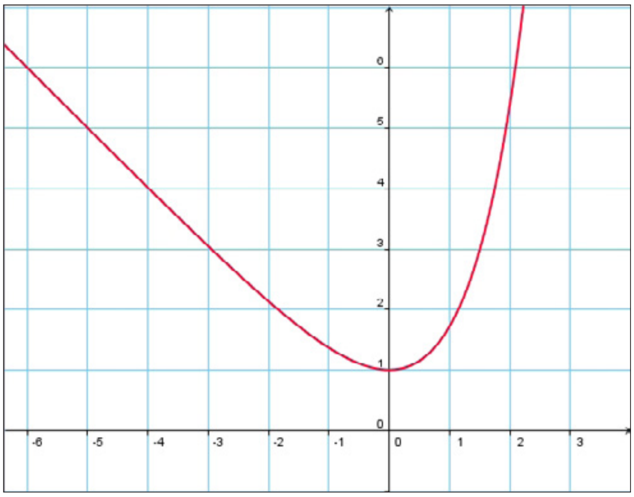
• ***Les objectifs***

– Déterminer des tangentes passant par un point donné.

– Confirmer ou infirmer par le calcul une observation graphique.

1. a) $f'(x) = e^x - 1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	



b) Il semble qu'il y ait deux tangentes passant par O.

2. a) T_A a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, c'est-à-dire $y = (e^a - 1)(x-a) + e^a - a$, soit $y = (e^a-1)x + e^a(1-a)$.

b) T_A passe par l'origine si et seulement si $(0\,;0)$ vérifie son équation, autrement dit $e^a(1-a) = 0$, soit $a = 1$.

3. a) Pour tout nombre réel x, $f(x) > -x$, puisque $e^x > 0$. Donc $\mathscr{C}$ est strictement au-dessus de Δ.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$. Donc Δ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

16 **Dérivabilité**

• ***Les outils***

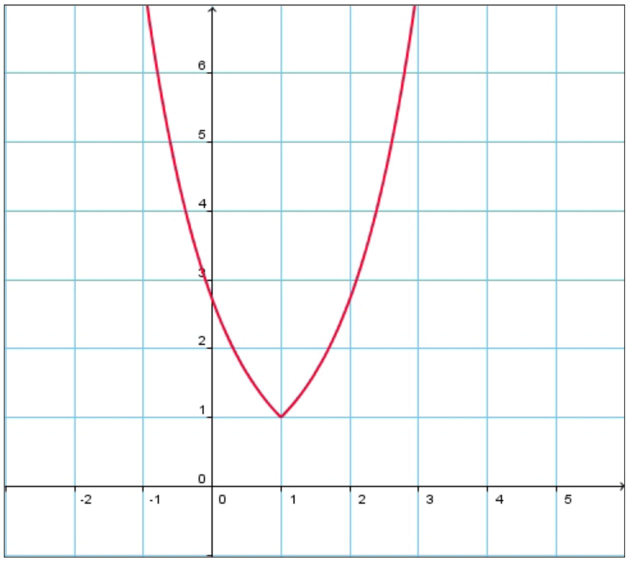
– Fonction exponentielle.

– Définition de la dérivabilité.

• ***L'objectif***

– Étudier la dérivabilité d'une fonction.

1. a)



b) f semble dérivable partout sauf en 1.

2. a) Si $x < 1$, $f(x) = e^{-x+1}$. Si $x > 1$, $f(x) = e^{x-1}$.

b) Sur $]-\infty\,;1[$ comme sur $]1\,;+\infty[$, f est dérivable, car f est la composée d'une fonction affine (dérivable) par la fonction exponentielle (dérivable).

3. a) $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h>0}} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{\substack{h\to0\\h>0}} \dfrac{e^h-1}{h} = 1$.

$\lim\limits_{\substack{h\to0\\h<0}} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{\substack{h\to0\\h<0}} \dfrac{e^{-h}-1}{h} = \lim\limits_{\substack{k\to0\\k>0}} \dfrac{e^k-1}{-k} = -1$.

b) f n'est pas dérivable en 1.

17 Tangentes et parallèles

• ***Les outils***

– Fonction exponentielle.

– Antécédents par une fonction dérivable.

• ***Les objectifs***

– Déterminer des tangentes de direction donnée.

– Résoudre une équation par l'étude d'une fonction.

1. a) f est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = (2 - x)e^x$.

b) On cherche x tel que $(2 - x)e^x = 2$.

2. a) $g(x) = (2 - x)e^x - 2$, donc $g'(x) = (1 - x)e^x$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g	-2	$\nearrow$	$e - 2$	$\searrow$	$-\infty$

b) Le tableau indique que g s'annule deux fois, puisque $e - 2 > 0$.

Donc il y a deux tangentes solutions. L'une est la tangente au point $(0\,;\,1)$.

18 Narration de recherche

L'énoncé pourrait mettre sur la voie du développement de e^x en série entière.

En effet, si on cherche une fonction polynôme P de la forme $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$, la condition $P(0) = 1$ fournit $a_0 = 1$, et la condition $P' = P$ fournit la récurrence $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+1}$. On en déduit $a_n = \dfrac{1}{n!}$ pour tout entier naturel n. Cela permet de conclure que la fonction exp n'est pas une fonction polynôme (sinon le nombre de termes serait fini), mais qu'on peut écrire $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots$ (sous réserve de prouver la convergence du membre de droite).

Mais la question peut être résolue de façon plus simple :

• Si exp était une fonction polynôme, sa limite en $-\infty$ serait $+\infty$ ou $-\infty$. Or $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

• Si exp était une fonction polynôme de degré n, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n}$ serait finie. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$.

19 Narration de recherche

1. Posons pour tout $x > 0$: $f(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ et étudions les variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

$$f'(x) = \frac{xC'(x) - C(x)}{x^2} = \frac{20xe^{\frac{x}{1\,000}} - 20\,000e^{\frac{x}{1\,000}}}{x^2}$$

$$= 20(x - 1\,000)\,\frac{e^{\frac{x}{1\,000}}}{x^2}.$$

On en déduit le tableau de variation de f :

x	0		$1\,000$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Le coût moyen unitaire est donc minimal quand la quantité produite est égale à 1 000.

Commentaire : pour cette quantité, le coût marginal $C'(1\,000)$ est égal au coût moyen $\dfrac{C(1\,000)}{1\,000}$, soit $20e \approx 54{,}37$ €.

2. Le bénéfice (algébrique) $b(x)$ est égal à $80x - C(x)$.

Étudions les variations de la fonction b sur $[0\,;+\infty[$.

$b'(x) = 80 - C'(x) = 80 - 20e^{\frac{x}{1\,000}}$.

$b'(x) > 0$ équivaut à $80 > 20e^{\frac{x}{1\,000}}$, soit $e^{\frac{x}{1\,000}} < 4$.

Notons a l'antécédent de 4 par la fonction exp : $a \approx 1{,}386$ (on verra au chapitre 5 que $a = \ln(4)$).

$e^{\frac{x}{1\,000}} < e^a$ équivaut à $\dfrac{x}{1\,000} < a$, soit $x < 1\,000\,a$.

On en déduit le tableau de variation de b :

x	0		$1\,000\,a$		$+\infty$
b'		$+$	0	$-$	
b	$-20\,000$	$\nearrow$	m	$\searrow$	$-\infty$

On constate que $b(x)$ est maximal quand $x = 1\,000\,a \approx 1\,386$.

Commentaire : pour cette quantité, le coût marginal $C'(1\,000\,a)$ est égal au prix de vente unitaire, soit 80 €.

20 TD – Réglage et évolution d'une perfusion

1. $\lim\limits_{t\to+\infty} c(t) = \dfrac{d}{Cl}$, car $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{Cl}{16V}t} = 0$.

2. a) $\dfrac{d_1}{7{,}2} = 15$ implique $d_1 = 7{,}2 \times 15 = 108$.

b) $c(t) = \dfrac{108}{Cl}\left(1 - e^{-\frac{Cl}{80}t}\right)$,

donc $c(5) = \dfrac{108}{Cl}\left(1 - e^{-\frac{Cl}{16}}\right) = 5{,}9$.

Cette égalité est vérifiée pour $Cl \approx 4{,}4$ (voir le tableau du paragraphe **3)**.

Le patient a une clairance de 4,4 L/h.

c) $c(10) = \dfrac{108}{4{,}4}\left(1 - e^{-\frac{4{,}4}{80}10}\right) \approx 10{,}38$.

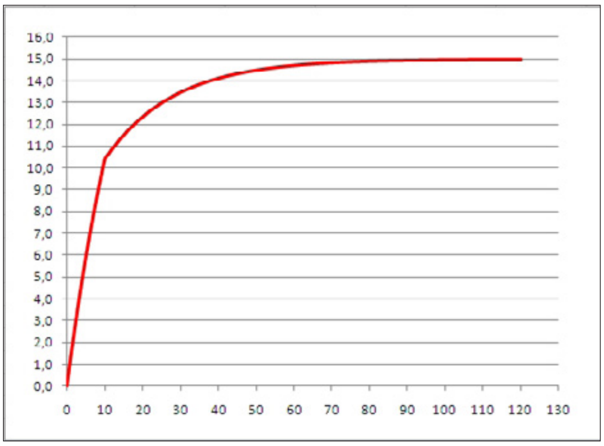
d) $c_P = \lim\limits_{t\to+\infty} c(t) = c(10) + \dfrac{d_2}{Cl}$.

Donc $d_2 = (c_P - c(10))\,Cl \approx (15 - 10{,}38) \times 4{,}4$

$\approx 20{,}3$.

Le bon débit est de 20,3 mg/L.

3.

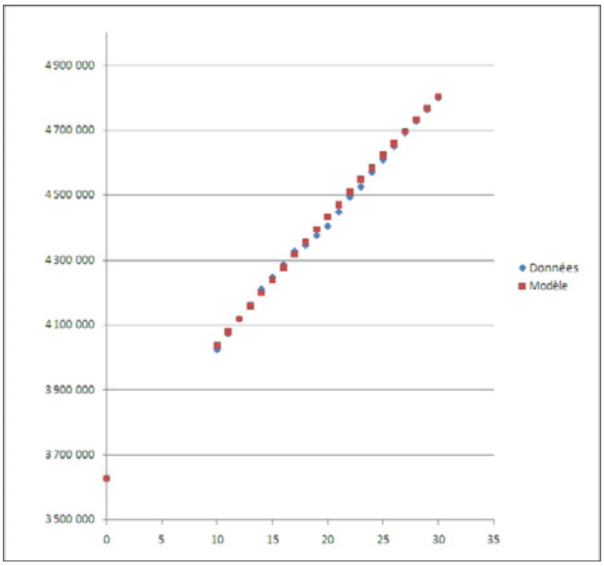


a) Pour $t \leqslant 10$, $c(t) = 24{,}5(1 - e^{-0{,}055t})$.
Pour $t \geqslant 10$, $c(t) = 10{,}4 + 4{,}6(1 - e^{-0{,}055(t-10)})$.
Remarque. Pour $t = 10$, la fonction c est continue mais non dérivable.
b) Le seuil de 12 mg/L a été dépassé entre $t = 18$ et $t = 120$, soit pendant 103 heures.
c) Avec le débit initial de 108 mg/h, le seuil de toxicité aurait été dépassé dès la 20e heure.

21 TD – Fonctions logistiques

A. 1. a) La fonction $t \mapsto e^{-kt}$ est décroissante sur $[0\,;+\infty[$.
Comme $\frac{P_m}{P_0} - 1 > 0$, la fonction $t \mapsto 1 + \left(\frac{P_m}{P_0} - 1\right)e^{-kt}$ est aussi décroissante sur $[0\,;+\infty[$.
Donc la fonction P est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = P_m.$$
b) La population augmente vers la valeur limite P_m, capacité d'accueil maximale du milieu.

2.



B. 1. La fonction $t \mapsto e^{-kt}$ est décroissante sur $[0\,;+\infty[$.
Comme $b > 0$, la fonction $t \mapsto 1 + be^{-kt}$ est aussi décroissante sur $[0\,;+\infty[$.
Donc la fonction T est croissante sur $[0\,;+\infty[$. D'ailleurs $T'(t) = \frac{kbe^{-kt}}{(1+be^{-kt})^2} > 0$. $\lim_{t\to-\infty} T(t) = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} T(t) = 1$.
Le taux d'équipement croît de 0 (aucun ménage équipé) à 1 (tous les ménages équipés).

2. $T(t) = \frac{1}{1 + e^{-0{,}16t}}$.
a) $T(3) \approx 0{,}62$: 62 % des ménages étaient équipés d'un téléphone mobile en 2003.
$T(10) \approx 0{,}83$: 83 % des ménages étaient équipés d'un téléphone mobile en 2010.
b) $T(15) \approx 0{,}92$: on peut prévoir 92 % de ménages équipés en 2015.

22 TD – La fonction exponentielle en physique

A. 1. a) La fonction $t \mapsto e^{-\frac{kt}{M}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $t \mapsto -e^{-\frac{kt}{M}}$ est croissante sur $\mathbb{R}$, donc la fonction v est croissante sur $[0\,;+\infty[$. $\lim_{t\to+\infty} v(t) = \frac{Mg}{k}$ puisque $\lim_{t\to+\infty} -e^{-\frac{kt}{M}} = 0$.

b) La vitesse augmente, mais a tendance à se stabiliser à la valeur $\frac{Mg}{k}$.
c) $v'(t) = ge^{-\frac{kt}{M}}$, donc $v'(0) = g$. La tangente a donc pour équation $y = gt$.
Cela signifie qu'au début de la chute, la vitesse étant faible, les frottements le sont aussi, si bien qu'on retrouve la formule de la chute libre $v(t) = gt$.

2. $\lim_{t\to+\infty} v(t) = \frac{Mg}{k} = \frac{2{,}7 \times 10^{-3} \times 9{,}8}{5{,}4 \times 10^{-3}} = 4{,}9\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.
$4{,}9 - v(t) < 10^{-3}$ équivaut à $4{,}9e^{-2t} < 10^{-3}$, soit $e^{-2t} < \frac{10^{-3}}{4{,}9}$, c'est-à-dire $-2t < -3\ln(10) - \ln(4{,}9)$.
On trouve $t > \frac{3\ln(10) + \ln(4{,}9)}{2} \approx 4{,}2$ s.

B. 1. a) $u'(t) = \frac{E}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} > 0$. Donc u est croissante sur $[0\,;+\infty[$. $\lim_{t\to+\infty} u(t) = E$.
b) $u'(0) = \frac{E}{RC}$, donc la tangente a pour équation $y = \frac{E}{RC}x$.
Elle coupe la droite d'équation $y = E$ au point d'abscisse $x = RC = \tau$.
c) $i(t) = Cu'(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$. La fonction i est décroissante et a pour limite 0 en $+\infty$.
d) $u(t) = 6(1 - e^{-t})$, donc $u(10) = 6(1 - e^{-10}) \approx 6$.

2. a) $u'(t) = -\frac{E}{RC}e^{-\frac{t-10}{RC}} < 0$. Donc u est décroissante sur $[0\,;+\infty[$. $\lim_{t\to+\infty} u(t) = 0$.
b) $i(t) = Cu'(t) = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}} < 0$, car le courant va en sens inverse de la situation 1.
La fonction i est croissante, mais en valeur absolue le courant diminue, et tend vers 0.
c) $i(t) = 0{,}006e^{-(t-10)}$, donc $i(20) = 0{,}006e^{-20} \approx 0$.

23 TD – Fonctions transformant les sommes en produits

1. a) $f(0 + 0) = f(0) \times f(0)$, soit $f(0) = f(0)^2$. Donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
b) Si $f(0) = 0$, alors pour tout nombre x,
$f(x) = f(x + 0) = f(x)f(0) = 0$. f est la fonction nulle.
2. $f(0) = 1$.
a) Pour tout nombre x, $f(x)f(-x) = f(x - x) = f(0) = 1$.
b) Si on avait $f(x) = 0$, on en déduirait $f(x)f(-x) = 0$, ce qui contredirait l'égalité précédente.
3. $g(x) = f(a + x)$.
a) $g(x) = f(a)f(x)$, donc $g'(x) = f(a)f'(x)$.
b) Mais d'autre part $g'(x) = f'(a + x)$.
Donc $f'(a + x) = f(a)f'(x)$.
En particulier, si $x = 0$: $f'(a) = f(a)f'(0)$.
Cette égalité étant vraie quel que soit a, on peut écrire $f' = kf$, en posant $k = f'(0)$.
4. $g(x) = \frac{f(x)}{e^{kx}}$.
a) Pour tout x, $g'(x) = \frac{e^{kx}f'(x) - kf(x)e^{kx}}{e^{2kx}} = \frac{f'(x) - kf(x)}{e^{kx}} = 0$.
Donc g est constante sur $\mathbb{R}$.

b) Pour tout x, $g(x) = g(0) = f(0) = 1$. Donc pour tout x, $f(x) = e^{kx}$.

5. La fonction nulle vérifie $f(a + b) = f(a)\, f(b)$, puisque $0 = 0 \times 0$.

Si $f(x) = e^{kx}$, alors $f(a + b) = e^{k(a+b)} = e^{ka+kb} = e^{ka}e^{kb} = f(a)\, f(b)$.

6. Les fonctions transformant les sommes en produits sont la fonction nulle et les fonctions de la forme $x \mapsto e^{kx}$, où k est un nombre réel.

Remarque. Si $k = 0$, c'est la fonction constante égale à 1. Dans tous les cas, si on pose $b = e^k$, e^{kx} s'écrit b^x.

24 TD – Comparaison à l'infini de e^x et x^n

1. a) $\dfrac{e^x}{x^n} = \dfrac{e^{nY}}{(nY)^n} = \dfrac{(e^Y)^n}{n^nY^n} = \dfrac{1}{n^n}\left(\dfrac{e^Y}{Y}\right)^n$.

b) On sait que $\lim\limits_{Y \to +\infty} \dfrac{e^Y}{Y} = +\infty$. On en déduit

$\lim\limits_{Y \to +\infty} \dfrac{1}{n^n}\left(\dfrac{e^Y}{Y}\right)^n = +\infty$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} Y = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\left(\dfrac{e^x}{x^n}\right)} = 0$.

2. a) $x^ne^x = (-Y)^n\, e^{-Y} = (-1)^n \dfrac{Y^n}{e^Y}$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} Y = +\infty$ et $\lim\limits_{Y \to +\infty} \dfrac{Y^n}{e^Y} = 0$ d'après **1.c)**.

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} x^ne^x = 0$.

EXERCICES Entraînement (page 96)

DE TÊTE

25 a) e^{2-x}.
b) e^x.
c) e^{-3}.

26 a) $e^{x-3} = 1 \Leftrightarrow x - 3 = 0$, soit $x = 3$.

b) $e^{x^2} = e^{-x} \Leftrightarrow x^2 = -x$, soit $x = -1$ ou $x = 0$.

27 a) $e^{2x} < e^x \Leftrightarrow x < 0$ donc $x \in\ ]-\infty\,; 0[$.
b) $e^{x+1} \leqslant 1 \Leftrightarrow x + 1 \leqslant 0$ donc $x \in\ ]-\infty\,; -1]$.

28 a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$.

29 a) $f'(x) = 2e^{2x+1}$.
b) $f'(x) = 3e^{-x}$.

30 $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{u(x)} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{u(x)} = 1$.

CALCULS AVEC LA FONCTION EXPONENTIELLE

31 a) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ soit $x = 3$ ou $x = \dfrac{1}{2}$.
b) $x + 1 = \dfrac{2}{x}$ soit $x^2 + x - 2 = 0$ donc $x = 1$ ou $x = -2$.

32 a) $\begin{cases} X = e^x \\ 3X^2 + X - 4 = 0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} X = e^x \\ X = 1 \text{ ou } X = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$.

Or $e^x > 0$, donc $e^x = 1$ et $x = 0$.

b) $2e^{-x} = \dfrac{1}{e^x + 3} \Leftrightarrow \dfrac{2}{e^x} = \dfrac{1}{e^x + 3}$ soit $e^x = -6$, donc l'équation n'a pas de solution.

33 a) $e^{2x+3} = e^{\frac{5}{x}} \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 5 = 0$ soit $x = 1$ ou $x = -\dfrac{5}{2}$.
b) $e^{x^2} = e^{-2x}e^3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$ soit $x = 1$ ou $x = -3$.

34 a) $e^x \leqslant e^{x^2-12} \Leftrightarrow x^2 - x - 12 \geqslant 0$
$\Leftrightarrow x \in\ ]-\infty\,; -3] \cup [4\,; +\infty[$.

b) $e^{2x+1} \leqslant e^{\frac{3}{x}} \Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 \leqslant 0$ soit $x \in \left[-\dfrac{3}{2}\,; 1\right]$.

35 a) $e^{x^2-5} \leqslant e^{-4x} \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 \leqslant 0$ soit $x \in [-5\,; 1]$.

b) $e^x + e^{-x} - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = X \\ X + \dfrac{1}{X} - 2 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = X \\ X^2 - 2X + 1 \geqslant 0 \end{cases}$,

soit $(X - 1)^2 \geqslant 0$, donc $x \in \mathbb{R}$.

36 Pour tout x de $\mathbb{R}$ $e^x > 0$ et pour tout $x \in [-1\,; 1]$, $1 - x^2 \geqslant 0$ donc le produit $(1 - x^2)\, e^x \geqslant 0$.

37 $e^{2x} - e^{x+1} = (e^x)^2 - ee^x = e^x(e^x - e)$.
$e^x > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ donc $e^{2x} - e^{x+1} \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant e$ soit $x \in [1\,; +\infty[$.

38 1. $(e^x + e^{-x})^2 - 4 = (e^x + e^{-x} + 2)(e^x + e^{-x} - 2) \geqslant 0$.
$e^x + e^{-x} + 2 > 0$ et $e^x + e^{-x} - 2 \geqslant 0$ (*cf.* exercice 35 du manuel), donc pour tout x de $\mathbb{R}$ $(e^x + e^{-x})^2 - 4 \geqslant 0$.

2. Il résulte de $e^x + e^{-x} \geqslant 2$ que $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \geqslant 1$.

39 1. $[g(x)]^2 = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}$; $[h(x)]^2 = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}$
donc $[g(x)]^2 - [h(x)]^2 = 1$.

2. $2[g(x)]^2 - 1 = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{2} - 1 = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = g(2x)$

$2g(x)\, h(x) = \dfrac{1}{2}\,(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x}) = \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = h(2x)$.

40 *Corrigé sur le site élève.*

ÉTUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

41 a) $f'(x) = e^x - 1$.
b) $f'(x) = e^{-x}[-x] = -x\, e^{-x}$.

42 **a)** $f'(x) = (x^2 + 3x)\,e^x$.
b) $f'(x) = -(x^2 + 1)\,e^{-x}$.

43 *Corrigé sur le site élève.*

44 **a)** $f'(x) = \dfrac{xe^{-x} - 1 + e^{-x}}{x^2} = \dfrac{(x+1)\,e^{-x} - 1}{x^2}$.

b) $f'(x) = \dfrac{xe^x - e^x}{x^2} = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$.

45 **a)** $f'(x) = 1 - 2\,\dfrac{e^x(e^x+1) - e^{2x}}{(e^x+1)^2}$

$= 1 - \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}$.

b) $f'(x) = e^{1-x}(-x^2 - 2x) + (2x+2)\,e^{1-x}$.

$= e^{1-x}(-x^2 + 2)$.

46 *Corrigé sur le site élève.*

47 **1.** $f(0) = 2$ et $f(-2) = 0$ soit $\begin{cases} b = 2 \\ 0 = (-2a + b)\,e^2 \end{cases}$

soit $b = 2$ et $a = 1$ donc $f(x) = (x+2)\,e^{-x}$.

2. $f'(x) = (-x - 1)\,e^{-x}$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	e	$\searrow$	

Donc A a pour coordonnées $(-1\,;\,e)$.

48 *Corrigé sur le site élève.*

DES LIMITES IMPORTANTES

49 **a)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

50 **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$.

51 **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

52 **a)** $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

b) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

53 **a)** $f(x) = \left(\dfrac{e^x}{x}\right)^2$; $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b) $f(x) = \left(\dfrac{x}{e^x}\right)^2$; $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

54 **a)** $e^x = u(x)$; $f(x) = \dfrac{u(x) - u(0)}{2x}$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

b) $\dfrac{1 - e^{-x}}{x} = \dfrac{e^x - 1}{e^x\,x} = \dfrac{1}{e^x} \times \dfrac{e^x - 1}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 1$.

c) $e^{2x} = u(x)$ $\quad f(x) = 2\left[\dfrac{u(2x) - u(0)}{2x}\right]$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 2$.

d) $f(x) = \dfrac{e^{3x} - 1}{3x} \times \dfrac{3}{5}$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \dfrac{3}{5}$.

55 **1.** $f'(x) = \dfrac{e^x(x+1)^2 - 2e^x(x+1)}{(x+1)^4} = \dfrac{e^x[x-1]}{(x+1)^3}$.

$x \in\,]-1\,;+\infty[$ donc $(x+1)^3 > 0$. $f(1) = \dfrac{e}{4}$.

x	-1		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{e}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. M a pour coordonnées $(a\,;f(a))$. La tangente en M a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
La tangente passe par l'origine si et seulement si $f(a) = af'(a)$, soit :

$$\frac{e^a}{(a+1)^2} = \frac{a(a-1)e^a}{(a+1)^3} \Leftrightarrow a + 1 = a^2 - a,$$

soit $a^2 - 2a - 1 = 0$.
$a_1 = 1 + \sqrt{2}$ ou $a_2 = 1 - \sqrt{2}$.
Il existe donc deux valeurs de a.

56 **1.** $f(0) = 1$; $f'(0) = 0$; $f'(1) = 0$.
$f'(x) = e^{-x}(-ax^2 - bx - c) + e^{-x}(2ax + b)$,
$= e^{-x}[-ax^2 + x(2a - b) + b - c]$.
$f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$.
$f'(0) = 0 \Leftrightarrow b - c = 0$.
$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 0 = e^{-1}(-a + 2a - b + b - c)$
soit $a - c = 0$
donc $b = c = a = 1$ et $f(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x}$ et
$f'(x) = (-x^2 + x)e^{-x} = (1 - x)xe^{-x}$.

2.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\dfrac{3}{e}$	$\searrow$	0

57 *Corrigé sur le site élève.*

SUITES ET EXPONENTIELLES

58 **a)** $u_n = \dfrac{1 - e^{-n}}{2 + 3e^{-n}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{3}$.

59 *Corrigé sur le site élève.*

60 **1.** $u_{n+1} = e^{1-\frac{n+1}{3}} = e^{1-\frac{n}{3}}\,e^{-\frac{1}{3}} = e^{-\frac{1}{3}}\,u_n$, donc la suite u_n est une suite géométrique de premier terme $u_0 = e$ et de raison $e^{-\frac{1}{3}}$.

2. a) $P_n = u_0 \times u_0q \times \ldots \times u_0q^n = u_0^{\,n+1} \times q^{1+2+\ldots+n}$

soit $P_n = e^{n+1}\,e^{-\frac{1}{3}\frac{n(n+1)}{2}} = e^{\frac{-n^2+5n+6}{6}}$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = 0$.

61 **1.** $u_0 > 0$ et si $u_n > 0$ alors $u_{n+1} > 0$ car $e^{-u_n} > 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n} = \dfrac{1}{e^{u_n}} < 1$ et $u_n > 0$, donc la suite (u_n) est décroissante.

3. La suite (u_n) est décroissante et minorée par zéro, donc convergente.

62 **1.** f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 80 - 27^{-0,1x}$, donc $f'(x) = 27e^{-0,1x} > 0$ donc f est une fonction strictement croissante et la suite (u_n) est strictement croissante.

2. a) $v_{n+1} = e^{-0,1n} \times e^{-0,1} = e^{-0,1}v_n$, donc (v_n) est une suite géométrique de premier terme $e^{-0,1}$ et de raison $e^{-0,1}$.

b) $v_1 + \ldots + v_{12} = \dfrac{v_1[1 - (e^{-0,1})^{12}]}{1 - e^{-0,1}} = \dfrac{e^{-0,1}[1 - e^{-1,2}]}{1 - e^{-0,1}}$,

ou encore $v_1 + \ldots + v_{12} = \dfrac{1 - e^{-1,2}}{e^{0,1} - 1}$.

3. $u_n = 80 - 27v_n$ donc

$$u_1 + \ldots + u_{12} = 80 \times 12 - 27\,\frac{1 - e^{-1,2}}{e^{0,1} - 1} \approx 956.$$

EXERCICES DE SYNTHÈSE

63 • $g(0) = 0$; $g(1) = 1e^0 = 1$.

• $g'(x) = e^{x-1}\,[x + 1] > 0$ pour $x \in [0\,;\,1]$.

• $g(x) - x = xe^{x-1} - x = f(x)$.

$f'(x) = e^{x-1}\,(x + 1) - 1$.

$f''(x) = e^{x-1}\,(x + 2)$.

x	0		α		1
f''			$+$		
f'	$\frac{1}{e} - 1$	$-$ ↗	0	$+$ ↗	1
f	0	↘	$f(\alpha)$	↗	0

Donc sur $[0\,;\,1]$, $f(x) \leqslant 0$ donc $g(x) \leqslant x$.
Ainsi, g vérifie les trois conditions.

64 *Corrigé sur le site élève.*

65 **1.** $f'(x) = e^x[1 - x - 1] = -xe^x$.

$f'(1) = -e$; $f'(-1) = \dfrac{1}{e}$.

La tangente en A a pour vecteur directeur $\vec{u}_1(1\,;\,-e)$ et celle en B a pour vecteur directeur $\vec{u}_2\left(1\,;\,\dfrac{1}{e}\right)$.

$\vec{u}_1.\vec{u}_2 = 0$ donc les tangentes sont perpendiculaires. La tangente en B a pour équation :

$$y = \frac{1}{e}(x + 1) + \frac{2}{e} = \frac{1}{e}(x + 3).$$

2. a) $g'(x) = -xe^x - \dfrac{1}{e}$.

$g''(x) = (-x - 1)e^x$.

b)

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
g''		$+$	0	$-$	
g'		↗	0	↘	
g		↘	$\frac{2}{e} - \frac{2}{e} = 0$	↘	

c) Donc $g(x) > 0$ si $x < -1$ et $g(x) < 0$ si $x > -1$, donc, pour $x < -1$, $\mathscr{C}$ est au-dessus de la tangente et $\mathscr{C}$ est en dessous de la tangente pour $x > -1$.

66 *Corrigé sur le site élève.*

67 **1.** La tangente en M a pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

donc la tangente passe par O si et seulement si :

$$-af'(a) + f(a) = 0.$$

2. $f'(x) = \dfrac{e^x(x + 2) - e^x}{(x + 2)^2} = \dfrac{e^x(x + 1)}{(x + 2)^2}$

$-af'(a) + f(a) = \dfrac{e^a}{a + 2} - \dfrac{ae^a(a + 1)}{(a + 2)^2} = 0$

soit $(a + 2) - a(a + 1) = 0$ donc $a^2 - 2 = 0$,

soit $a = \sqrt{2}$ ou $a = -\sqrt{2}$.

Il existe donc deux tangentes passant par l'origine du repère.

68 **1.** $g'(x) = e^x - 1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Pour tout x réel, $g(x) > 0$ donc $e^x > x$; il en résulte que :

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

2. $h'(x) = 1 - 4\left[\dfrac{e^x(e^x + 1) - e^{2x}}{(e^x + 1)^2}\right] = \dfrac{(e^x + 1)^2 - 4e^x}{(e^x + 1)^2} = \dfrac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2}$

donc $h'(x) = 0$ si $x = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) \geqslant 0$.

$h(0) = \dfrac{-4}{2} = -2$. $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

$h(x) = x - \dfrac{4}{1 + e^{-x}}$. $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

69 **1.** • $\dfrac{e^x}{x^2} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{e^{2y}}{y^2}\right) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{e^y}{y}\right)^2$,

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{e^y}{y}\right)^2 = +\infty$.

• Si $Y = -x$, $x^2e^x = y^2e^{-y} = \dfrac{y^2}{e^y}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\,e^x = \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{y^2}{e^y} = 0$.

2. $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}x(2 - x)$.

$f'(x) > 0$ pour $x \in\ ]0\,;\,2[$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{-x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = 0$, d'où le tableau.

70 **1.** $\varphi'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
φ'		$-$	0	$+$	
φ		↘	0	↗	

Donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $\varphi(x) \geqslant 0$.

2. $\varphi^{(1)} = xe^x$ est de la forme $e^x(x+n-1)$.

Supposons que $\varphi^{(n)}(x) = e^x(x+n-1)$.

Alors $\varphi^{(n+1)}(x) = e^x[1 + x + n - 1] = e^x(x+n)$.

Donc si $\varphi^{(n)}(x)$ est vrai il en est de même pour $\varphi^{(n+1)}(x)$. Donc pour tout $n \geqslant 1$:

$$\varphi^{(n)}(x) = e^x(x+n-1).$$

3. a) $\dfrac{1}{(p-1)!} - \dfrac{1}{p!} = \dfrac{p}{p!} - \dfrac{1}{p!} = \dfrac{p-1}{p!}$.

b) $S_n = \dfrac{0}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{n-1}{n!}$

$= \dfrac{0}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} + \ldots + \dfrac{1}{(n-1)!} - \dfrac{1}{n!} = 1 - \dfrac{1}{n!}$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 1$.

71 **1.** $Q'(t) = [Q_e - Q_0]0{,}06e^{-0{,}06t} > 0$, donc Q est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

$$\lim_{t \to +\infty} Q(t) = Q_e.$$

2. a) $0{,}06Q_e - 0{,}06Q(t) = 0{,}06[Q_e - Q(t)]$

$= 0{,}06[Q_e - Q_e + (Q_e - Q_0)e^{-0{,}06t}]$

$= 0{,}06(Q_e - Q_0)e^{-0{,}06t} = Q'(t)$.

b) v est le « facteur » constant dans l'expression de $Q'(t)$: $v = 0{,}06Q_e$, d'où :

$$Q_e = \frac{v}{0{,}06} \approx 633 \text{ kg/ha}.$$

72 **1.** $T'(t) = -k(T_0 - T_a)e^{-kt}$.

- Si $k > 0$: si $t_0 < T_a$, $T'(t) > 0$ pour tout $t > 0$, donc la fonction est croissante.
- Si $T_0 = T_a$, T est une fonction constante.
- Si $T_0 > T_a$, la fonction T est décroissante.

2. $(180 - 20)e^{-k/2} + 20 = 100$, d'où $e^{-k/2} = \dfrac{1}{2}$.

$(180 - 20)e^{-kt} + 20 = 30$, d'où $e^{-kt} = \dfrac{1}{16}$.

$e^{-kt} = (e^{-k/2})^{2t} = \dfrac{1}{2^{2t}} = \dfrac{1}{16}$, donc $t = 2$.

On pourra servir le gâteau à 22 heures.

AVEC LES TICE

73 **1. b)** I semble se déplacer sur la courbe $\mathscr{C}_g$.

2. a) $f'(x) = e^x$

$y = e^t(x - t) + e^t$

$y = e^t x + e^t(1 - t)$.

Si $x = 0$, $y = e^t(1 - t)$.

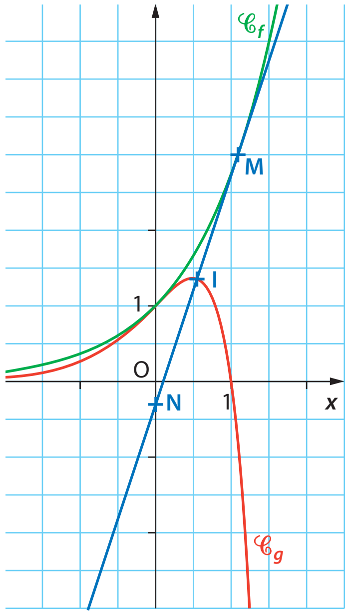
b) Donc N a pour coordonnées $(0\,; e^t(1-t))$ et $M(t\,; e^t)$.

c) Donc I a pour coordonnées $x = \dfrac{t}{2}$ et $y = \dfrac{e^t(2-t)}{2}$.

En conclusion : $t = 2x$ donc

$y = \dfrac{e^{2x}(2-2x)}{2} = (1-x)e^{2x}$,

donc I appartient à $\mathscr{C}_g$.



74 **2. a)** Il semble que le point correspondant au minimum de f_m appartient à Γ.

b) Il semble que T_m passe par un point fixe.

3. a) $f'_M(x) = e^x(x + m + 1)$.

x	$-\infty$		$-(m+1)$		$+\infty$
f'_M		$-$	0	$+$	
f_M	0	↘	$-e^{-(m+1)}$	↗	$+\infty$

b) Donc S_m a pour coordonnées $x = -(m+1)$ et $y = -e^{-(m+1)}$, donc $y = -e^x$ et S_m appartient à (Γ).

c) $f'_m[1] = e(m+2)\,; f_m(1) = (m+1)e$.

Donc la tangente en M a pour équation :

$y = e(m+2)(x-1) + e(m+1)$

$= e[2x - 1 + mx]$.

Pour $x = 0$, $y = -e$ donc pour tout nombre m, T_m passe par le point $A(0\,;-e)$.

75 **1. b)** Il semble que les tangentes en M et N soient perpendiculaires. Il semble que I se déplace sur $\mathscr{C}_h$.

Il semble que la droite (PI) soit tangente à $\mathscr{C}_h$ en I.

2. a) La tangente en M a pour équation :

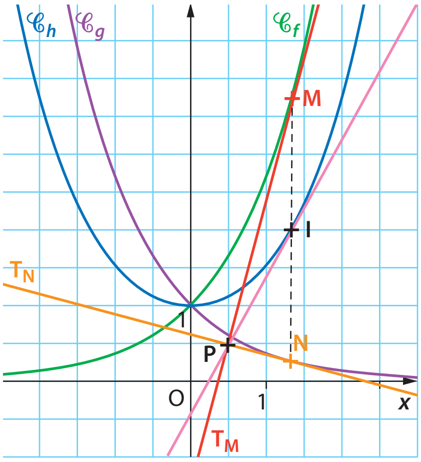
$$y = xe^t + e^t(1-t)$$

et la tangente en N :

$$y = -xe^{-t} + e^{-t}(1+t).$$

Donc la tangente en M a pour vecteur directeur $\vec{u}(1\,; e^t)$ et en N $\vec{v}(1\,; -e^{-t})$.

Donc $\vec{u}.\vec{v} = 0$ et les tangentes sont perpendiculaires.



b) Le point P de coordonnées $(x\,;\,y)$ est tel que :

$$\begin{cases} y = x\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^t(1-t) \\ y = -x\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-t}(1+t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t - \dfrac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^t + 2^{-t}} \\ y = \dfrac{2}{\mathrm{e}^t + 2^{-t}}. \end{cases}$$

Donc P a pour coordonnées $\left(t - \dfrac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}\,;\, \dfrac{2}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}\right)$.

c) I a pour coordonnées $\left(t\,;\, \dfrac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}\right)$.

Donc $x = t$; $y = \dfrac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}$,

soit $y = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ donc $\mathrm{I} \in \mathscr{C}_h$.

d) Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{PI}}$ a pour coordonnées :

$$\left(\frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}\,;\, \frac{(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})^2}{2(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})}\right)$$

Il est colinéaire au vecteur $\vec{w}$ de coordonnées :

$$\left(1\,;\, \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}\right).$$

Or $h'(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}$. La tangente en I a donc pour vecteur directeur $\left(1\,;\, \dfrac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}\right)$ c'est-à-dire $\vec{w}$. Il en résulte que la droite (PI) est la tangente en I à $\mathscr{C}_h$.

Prendre toutes les initiatives

76 (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 1, donc $u_n = 1 + n$. Il en résulte que $v_n = \mathrm{e}^{-1-n}$.

$$v^{n+1} = \mathrm{e}^{-1-n-1} = \mathrm{e}^{-1}\,\mathrm{e}^{-1-n} = \mathrm{e}^{-1}\,v_n.$$

La suite v_n est donc une suite géométrique de premier terme e^{-1} et de raison e^{-1}.

Donc $v_0 + \ldots + v_n = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}(1 - \mathrm{e}^{-(n+1)})}{1 - \mathrm{e}^{-1}} = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-(n+1)}}{\mathrm{e} - 1}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{-n-1} = 0$ donc

$$\lim_{n \to +\infty} (v_0 + \ldots + v_n) = \frac{1}{\mathrm{e} - 1}.$$

77 $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^{1/n} - 1}{\dfrac{1}{n}}$. On pose $\dfrac{1}{n} = \mathrm{X}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{\mathrm{X} \to 0^+} \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{X}} - 1}{\mathrm{X}} = 1$. La suite converge vers 1.

EXERCICES Le jour du BAC (page 102)

78 *Corrigé sur le site élève.*

79 **1. a)** $f(-1) = 0$, $f'(-1) = 0$, $f(0) = 1$.

$f'(x) = (-ax^2 - bx - cx + 2ax + b)\mathrm{e}^{-x}$
$\quad = [(-ax^2 + x(2a - b) + b - c]\mathrm{e}^{-x}$.

$f(0 = c = 1$; $f(-1) = (a - b + c)\mathrm{e} = 0$;

$f'(-1) = [-a - 2a + b + b - \mathrm{c}]\mathrm{e} = 0$, soit

$$\begin{cases} c = 1 \\ a - b + c = 0 \\ -3a + 2b - c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = 2 \\ a = 1. \end{cases}$$

Donc $f(x) = (x^2 + 2x + 1)\mathrm{e}^{-x} = (x + 1)^2\mathrm{e}^{-x}$

$f'(x) = [-x^2 + 1]\mathrm{e}^{-x}$.

b) D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$\dfrac{4}{\mathrm{e}}$	↘	0

2. a) La tangente en B de coordonnées $(0\,;\,1)$ a pour équation $y = f'(0)(x) + 1$, soit $y = x + 1$.

On cherche donc le signe de

$\Psi(x) = (x + 1)^2\,\mathrm{e}^{-x} - (x + 1) = (x + 1)\,[(x + 1)\mathrm{e}^{-x} - 1]$.

On note φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = (x + 1)\mathrm{e}^{-x} - 1.$$

b) $\varphi'(x) = \mathrm{e}^{-x}[-x - 1 + 1] = -x\mathrm{e}^{-x}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
φ'		$+$	0	$-$	
φ	$-\infty$	↗	0	↘	-1

• Si $x \in \,]-\infty\,;\,-1]$, $x + 1 < 0$, $\varphi(x) < 0$ donc $\Psi(x) > 0$ et $\mathscr{C}$ est au-dessus de la tangente T.

• Si $x \in [-1\,;\,0]$, $x + 1 > 0$, $\varphi(x) < 0$ donc $\Psi(x) < 0$ et $\mathscr{C}$ est en dessous de la tangente T.

• Si $x > 0$, $x + 1 > 0$, $\varphi(x) < 0$ donc $\Psi(x) < 0$ et $\mathscr{C}$ est en dessous de T.

80 **A**

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +1$ donc $y = +1$ est asymptote horizontale.

2. $f'(x) = \dfrac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} + e^{-x} = \dfrac{2}{(x+1)^2} + e^{-x}$.

$f'(x) > 0$ pour tout x de $[0\,;+\infty[$.

3. $f(0) = -2$, $f'(0) = 2 + 1 = 3$, donc $y = 3x - 2$.

C'est une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ en $x = 0$.

x	0	1	u	2	$+\infty$
f'			$+$		
f	-2	$-\frac{1}{e} < 0$	0	$\frac{1}{3} - \frac{1}{e^2} > 0$	$+1$

$f(1) < 0$ et $f(2) > 0$ et f est strictement croissante sur $[1\,;2]$, donc il existe $u \in\ ]1\,;2[$ unique tel que $f(x) = 0$.

B. 1. $f_n'(x) = \dfrac{(x+n)-(x-n)}{(x+n)^2} + e^{-x} = \dfrac{2n}{(x+n)^2} + e^{-x} > 0$.

x	0	n	u_n	$n+1$	$+\infty$
f_n'			$+$		
f_n	-2	$-e^{-n} < 0$	0	$f_n(n+1) > 0$	$+1$

2. a) $f_n(n) < 0$.

b) Pour $n = 0$, $e > 1$ est vrai.

Si $e^{n+1} > 2n + 1$, alors $e^{n+2} > (2n+1) \times e$.

$\varphi(n) = (2n+1)e - (2n+3) = 2n(e-1) + e - 3$.

φ est une fonction linéaire croissante et $\varphi(1) = 3e - 5 > 0$, donc $(2n+1)e > 2n + 3$. Donc $e^{n+2} > 2n + 3$.

Ainsi, $e^{n+1} > 2n + 1$ est vrai pour tout n.

c) $f_n(n+1) = \dfrac{1}{2n+1} - e^{-(n+1)}$.

Or $e^{n+1} > 2n + 1$, donc $\dfrac{1}{e^{n+1}} < \dfrac{1}{2n+1}$ et $f_n(n+1) > 0$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $u_n \in\ ]n\,;n+1[$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

3. $n < u_n < n + 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

$1 < \dfrac{u_n}{n} < 1 + \dfrac{1}{n}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 1$.

81 **1. a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 0\,;\ \lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty$.

b) $f_1'(x) = e^{-x}(-x+1)$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f_1'		$+$	0	$-$	
f_1	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

c) $f_R(x) \geqslant 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$. Or si k est impair, $k_R(x) \leqslant 0$ pour $x \in\ ]-\infty\,;0]$ d'où la conclusion.

2. a) $f(0) = 0$ et $f_n(1) = \dfrac{1}{e}$, donc toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par O(0; 0) et B$\left(1\,;\dfrac{1}{e}\right)$.

b) $f_n'(x) = -x^n e^{-x} + nx^{n-1}e^{-x} = x^{n-1}e^{-x}[n - x]$.

3. $f_3'(x) = x^2e^{-x}(3 - x)$, d'où le maximum pour $x = 3$.

4. a) $f_k'(1) = \dfrac{k-1}{e}$, $f_k(1) = \dfrac{1}{e}$, donc la tangente en M à $\mathscr{C}_k$ a pour équation :

$$y = \frac{k-1}{e}(x-1) + \frac{1}{e} = \frac{k-1}{e}(x) - \frac{k}{e} + \frac{2}{e},$$

donc la tangente coupe l'axe des ordonnées au point A de coordonnées $\left(0\,;\dfrac{2-k}{e}\right)$.

b) A a pour coordonnées $\left(0\,;-\dfrac{4}{e}\right)$, donc $\dfrac{2-k}{e} = -\dfrac{4}{e}$ soit $k = 6$.

c) $f_6(x) = x^6e^{-x}$ et $f_6'(x) = x^5e^{-x}[6 - x]$.

x	$-\infty$		0		6		$+\infty$
f_6'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f_6		↘	0	↗	$\frac{6^6}{e^6}$	↘	0

Donc f_6 n'est pas strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = 0$.

EXERCICES Pour aller plus loin (page 104)

82 **A 1.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

$f'(x) = -xe^{-x}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	1	↘	0

2. $\mathscr{C}_{-1}$ est la courbe verte de la figure.

B 1. a) f_0 est une fonction affine représentée par une droite.

b) $f_0(x) = f_1(x) \Leftrightarrow (x+1) = (x+1)e^x$, soit $(x+1)(1 - e^x) = 0$. Les solutions sont $x = -1$ et $x = 0$. Or $f_m(0) = 1$ et $f_m(-1) = 0$. Donc toutes les courbes $\mathscr{C}_m$ passent par A(0; 1) et B(– 1; 0).

2. $f_{m+1}(x) - f_m(x) = (x+1)e^{(m+1)} - (x+1)e^{mx}$
$= (x+1)\,e^{mx}(e^x - 1)$.

	-1		0	
$\mathscr{C}_{m+1}$ est au-dessus de $\mathscr{C}_m$		$\mathscr{C}_{m+1}$ est en dessous de $\mathscr{C}_m$		$\mathscr{C}_{m+1}$ est au-dessus de $\mathscr{C}_m$
	$f_m(-1) = f_{m+1}(-1)$		$f_m(0) = f_{m+1}(0)$	

3. a) $f'_m(x) = m(x+1)e^{mx} + e^{mx}$

$= e^{mx}\,[mx + m + 1]$.

b) $m > 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{m+1}{m}$		$+\infty$
f'_m		$-$	0	$+$	
f_m	0	↘	$f\left(-\left(\frac{m+1}{m}\right)\right)$	↗	$+\infty$

$m < 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{m+1}{m}$		$+\infty$
f'_m		$+$	0	$-$	
f_m	$-\infty$	↗	$f\left(-\left(\frac{m+1}{m}\right)\right)$	↘	0

4. La courbe rouge est $\mathscr{C}_{-3}$; $\mathscr{C}_{-1}$ est la verte ; $\mathscr{C}_1$ est la violette et $\mathscr{C}_2$ est la bleue.

83 **1.** a) $f^{(1)}(x) = (x^2 + 3x + 2)e^x$.

b) Pour $n = 1$, $f^{(1)}(x)$ est de la forme $(x^2 + a_n x + b_n)e^x$ avec $a_1 = 3$ et $b_1 = 2$.

Supposons $f^{(n)}(x) = (x^2 + a_n x + b_n)e^x$ et calculons $f^{(n+1)}(x)$:

$$f^{(n+1)}(x) = [x^2 + (a_n + 2)x + a_n + b_n]e^x.$$

$a_{n+1} = a_n + 2$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$. Comme a_n et b_n sont des entiers naturels, il en est de même pour a_{n+1} et b_{n+1}.

2. a) $a_{n+1} = a_n + 2$. La suite a_n est une suite arithmétique de premier terme $a_1 = 3$ et de raison 2. Il en résulte que :

$$a_n = 3 + (n-1)2 = 2n + 1.$$

b) $+\begin{cases} b_n = a_{n-1} + b_{n-1} \\ b_{n-1} = a_{n-2} + b_{n-2} \\ \vdots \\ b_2 = a_1 + b_1. \end{cases}$

Par addition :

$b_n = b_1 + a_1 + \ldots + a_{n-1}$ soit $b_n = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i$.

Or $a_1 + \ldots + a_{n-1} = \dfrac{(n-1)(a_1 + a_{n-1})}{2} = n^2 - 1$.

Donc $b_n = n^2 + 1$.

c) $f^{(2012)}(x) = (x^2 + 4\,025x \times (2012)^2 + 1)e^x$.

84 **A 1. a)** $\varphi'(x) = e^x - x$, $\varphi''(x) = e^x - 1$.

b)

x	0		∞
φ''		$+$	
φ'	1	↗	$+\infty$
φ	1	↗	$+\infty$

c) Donc $\varphi(x) > 0$ et $e^x > \dfrac{x^2}{2}$, soit $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

2. a) $\Psi'(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2} = \varphi(x) > 0$.

Donc Ψ est croissante avec $\Psi(0) = 1 > 0$. Il en résulte que, pour tout $x > 0$, $e^x > \dfrac{x^3}{6}$.

b) De **a)** il découle que $\dfrac{e^x}{x^2} > \dfrac{x}{6}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$.

B 1. $f'(x) = (-x^2 + 2x)e^x = x(2-x)e^{-x}$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$\dfrac{4}{e^2}$	↘	0

2. $f(x) - g(x) = e^{-x}(x^2 - 1)$.

Si $x \in\,]-1\,;1[$, $f(x) < g(x)$ donc $\mathscr{C}$ est en dessous de Γ et si $x < -1$ ou $x > 1$, $\mathscr{C}$ est au-dessus de Γ.

3. a) Si $x < -1$, $\mathscr{C}$ est au-dessus de (Γ), donc $x_p - x_q > 0$ et $PQ = x_p - x_q$.

b) $x_q = x_p - 1$, donc $f(x_p) = g(x_p - 1) = m$.

c) Il s'ensuit que $x_p^2\, e^{-x_p} = e^{-x_p + 1}$ donc $e^{-x_p}(x_p^2 - e) = 0$, soit $x_p^2 = e$ et $x_p = -\sqrt{e}$, donc $x_q = -\sqrt{e} - 1$.

85 **1. a)** $\varphi'(0) = 1$ donc $1 - [\varphi(0)]^2 = 1$ soit $\varphi(0) = 0$.

Si $\varphi'(x) = 0$ pour tout x, alors $[\varphi(x)]^2 = -1$, ce qui est impossible.

b) $2\varphi'(x)\,\varphi''(x) - 2\varphi'(x)\,\varphi(x) = 0$.

$2\varphi'(x)\,[\varphi''(x) - \varphi(x)] = 0$.

Or $\varphi'(x) \neq 0$ donc pour tout x réel, $\varphi''(x) = \varphi(x)$.

2. a) $u(x) = \varphi'(x) + \varphi(x)$ et $v(x) = \varphi'(x) - \varphi(x)$.

$u(0) = \varphi'(0) + \varphi(0) = 1$ et $v(0) = \varphi'(0) - \varphi'(0) = 1$.

b) $u' = \varphi'' + \varphi' = \varphi + \varphi' = u$.

$v' = \varphi'' - \varphi' = \varphi - \varphi' = -v$.

3. D'après les résultats admis :

$$u(x) = e^x \text{ et } v(x) = e^{-x}.$$

Donc $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}(u - v) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

86 **A 1.** $g'(x) = e^x - 1$.

x	0	$1/2$	1	$+\infty$
g'	0	$+$		
g	0	↗		$+\infty$

2. Pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $g(x) \geqslant 0$.

3. a) Pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $e^x - x \geqslant 1 > 0$.

b) $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - \dfrac{3}{2}$, $g(1) = e - 2$,

donc si $x \in \left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$, alors $\sqrt{e} - \dfrac{3}{2} \leqslant g(x) \leqslant e - 2$, soit :

$\sqrt{e} - \dfrac{1}{2} \leqslant e^x - x \leqslant e - 1$ et $\dfrac{1}{e-1} \leqslant \dfrac{1}{e^x - x} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{e} - \frac{1}{2}}$,

soit $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{e-1} < \dfrac{1}{e^x - x} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{e} - \frac{1}{2}} \leqslant \dfrac{9}{10}$.

B 1. a) $f'(x) = \dfrac{e^x[e^x - x] - (e^x - 1)^2}{(e^x - x)^2}$.

$f'(x) = \dfrac{e^{2x} - xe^x - e^{2x} + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2} = \dfrac{e^x(2 - x) - 1}{(e^x - x)^2}$.

On note, pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $h(x) = e^x(2 - x) - 1$.

b) $h'(x) = e^x(1 - x)$.

x	0	$u = \frac{1}{2}$	1
h'		$+$	
h	1	$\nearrow$	$e - 1$
f	0	$\nearrow$ u_1	1

c) Il résulte du tableau précédent que si $x \in [0\,;\,1]$, alors $f(x) \in [0\,;\,1]$.

2. a) $f(x) - x = \dfrac{e^x - 1 - xe^x + x^2}{e^x - 1} = \dfrac{e^x(1 - x) - (1 + x)(1 - x)}{e^x - 1}$,

soit $f(x) - x = \dfrac{(1 - x)[e^x - 1 - x]}{e^x - 1} = \dfrac{(1 - x)\,g(x)}{e^x - 1}$.

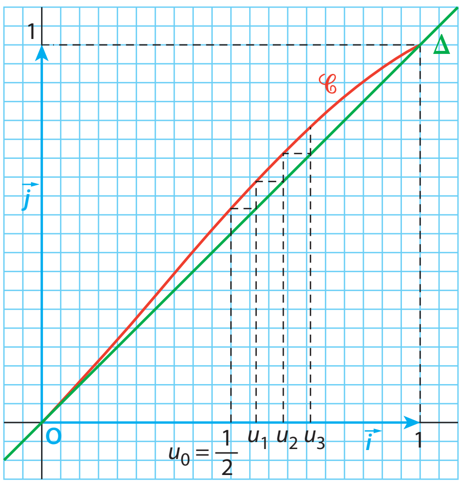
b) $1 - x \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$, $e^x - 1 > 0$, donc $f(x) - x \geqslant 0$ et $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ.

C 1. Voir la figure ci-après.

La suite (u_n) semble croissante et converger vers 1.

2. a) $u_0 \in [0\,;\,1]$ donc $f(u_0) = u_1 \in [0\,;\,1]$.

De plus, si $u_n \in [0\,;\,1]$, $f(u_n) \in [0\,;\,1]$ soit $u_{n+1} \in [0\,;\,1]$.



$u_1 = \dfrac{\sqrt{e} - 1}{\sqrt{e} - \frac{1}{2}} \geqslant u_0$ donc $u_0 \leqslant u_1$.

Si $u_{n-1} \leqslant u_n$ pour $n \geqslant 1$, la fonction f étant croissante, on a $f(u_{n-1}) \leqslant f(u_n)$, soit $u_n \leqslant u_{n+1}$.

Ainsi on montre par récurrence que la suite est croissante.

De plus, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \in [0\,;\,1]$ avec $u_0 = \dfrac{1}{2}$ donc :

$$\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$

b) $f(x) - 1 = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} - 1 = \dfrac{x - 1}{e^x - x} \leqslant \dfrac{9}{10}(x - 1)$.

Donc $u_n - 1 \leqslant \dfrac{(u_{n-1} - 1)}{2}\,\dfrac{9}{10}$

$$u_{n-1} - 1 \leqslant (u_{n-2} - 1)\,\frac{9}{10}$$

$$\vdots$$

$$u_1 - 1 \leqslant (u_0 - 1)\,\frac{9}{10}$$

soit : $u_n - 1 \leqslant \left(\dfrac{9}{10}\right)^n (u_0 - 1)$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{9}{10}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

87 **1. a)** On pose $\varphi(x) = e^x - 1 - x$. Alors $\varphi'(x) = e^x - 1$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
φ'	$-$	0	$+$
φ	$\searrow$	0	$\nearrow$

Donc pour tout x réel $\varphi(x) \geqslant 0$, soit $1 + x \leqslant e^x$. **[1]**

b) En remplaçant x par $-x$ on obtient $1 - x \leqslant e^{-x}$, soit $e^{-x} + x - 1 \geqslant 0$.

2. Si $x < 1$, $\dfrac{1}{e^x} \geqslant 1 - x$, $1 - x > 0$ donc :

$$e^x \leqslant \frac{1}{1 - x}. \text{ [2]}$$

3. a) Si $x = \dfrac{1}{n}$ il vient $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \leqslant e^{\frac{1}{n}}$ soit $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant e$.

b) D'après **[2]**, en prenant $x = \dfrac{1}{n + 1}$, on a

$$e^{\frac{1}{n+1}} \leqslant \frac{n + 1}{n}.$$

Donc $e \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

4. a) D'après les questions précédentes :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

soit

$$u_n \leqslant e \leqslant \frac{n + 1}{n} \times u_n$$

donc $\dfrac{ne}{n + 1} \leqslant u_n \leqslant e$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n + 1}\,e = e$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$.

CHAPITRE 4

Continuité et dérivation

ACTIVITÉS

(page 108)

Activité 1

1 a) $2{,}5 \in [2\,;3[$, $E(2{,}5) = 2$;
$4 \in [4\,;5[$, $E(4) = 4$;
$\pi \in [3\,;4[$, $E(\pi) = 3$;
$\frac{3}{4} \in [0\,;1[$, $E\left(\frac{3}{4}\right) = 0$;
$-2 \in [-2\,;-1[$, $E(-2) = -2$;
$-0{,}1 \in [-1\,;0[$, $E(-0{,}1) = -1$.

b) $E(0{,}1) = 0$. L'équation $E(x) = 0$ admet pour ensemble solution l'intervalle $[0\,;1[$.
Pour n entier, l'équation $E(x) = n$ admet pour ensemble solution l'intervalle $[n\,;n+1[$.

c) $E(x) = 0{,}3$ n'a pas de solution car pour tout nombre x, $E(x)$ est, par définition, un nombre entier.

2 b) On peut lire que $E(x) = 0{,}3$ pour x voisin de 1, $x \leqslant 1$, ce qui n'est pas cohérent avec la propriété émise en **1. c)**.

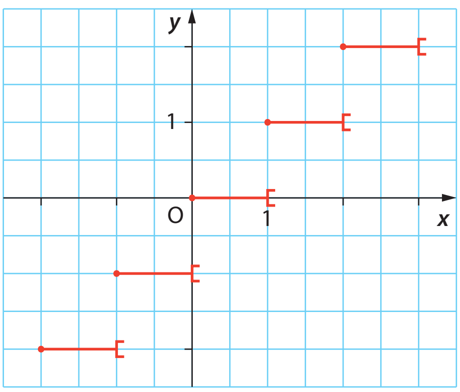
c) Changer de fenêtre ne règle pas le problème.
Le nombre 0,3 n'apparaît jamais dans la table de valeurs.

d) $E(1) = 1$.
Lorsque x tend vers 1, $x < 1$, $E(x) = 0$ et lorsque x tend vers 1, $x > 1$, $E(x) = 1$.
En termes de limites :

$$\lim_{x \to 1^-} E(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \to 1^+} E(x) = 1.$$

On retrouve cette discontinuité pour tout entier relatif.

e)



Activité 2

1 a) $QF = 21\,500 : 2{,}5 = 8\,600$ €.
$I = 21\,500 \times 0{,}055 - (327{,}97 \times 2{,}5) = 362$ €.

b) On ne sait pas *a priori* quelle tranche est concernée.
$R \times 0{,}14 - 1\,339{,}13 = 3\,600$ a pour solution $R = 35\,278$ ce qui est impossible dans cette tranche ($R < 26\,420$ €).
$R \times 0{,}30 - 5\,566{,}33 = 3\,600$ € a pour solution $R = 30\,553$ € qui convient car cette tranche correspond à
$26\,420$ € $< R \leqslant 70\,830$ €.

c) si $R = 26\,420$ €, $I \approx 2\,359{,}67$ € donc $I = 2360$ €.
et si $R = 26\,421$ €, $I \approx 2\,359{,}97$ € donc $I = 2360$ €.
Le changement de tranche pour 1 € n' a pas modifié le montant de l'impôt.

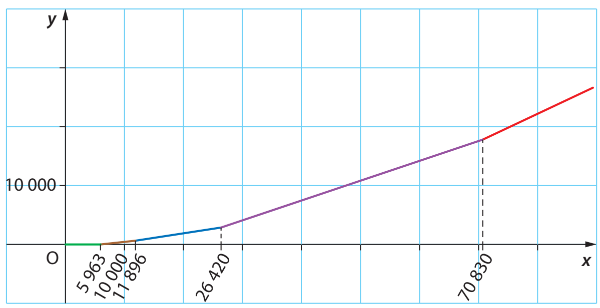
2 a) Dans le cas d'une personne ayant une seule part, la fonction « Impôt » f est définie sur $\mathbb{R}^+$.

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 5\,963 \\ 0{,}055x - 327{,}97 & \text{si } 5\,963 < x \leqslant 11\,896 \\ 0{,}14x - 1\,339{,}13 & \text{si } 11\,896 < x \leqslant 26\,420 \\ 0{,}30x - 5\,566{,}33 & \text{si } 26\,420 < x \leqslant 70\,830 \\ 0{,}41x - 13\,357{,}63 & \text{si } 70\,830 < x. \end{cases}$$

b) Sur chacun des intervalles :
$[5\,963\,;11\,896[$, $[11\,896\,;26\,420[$, $[26\,420\,;70\,830[$ et $[70\,830\,;+\infty[$, f est affine. Les coefficients directeurs étant respectivement 0,055 ; 0,14 ; 0,30 et 0,41, f est strictement croissante sur chacun de ces intervalles.

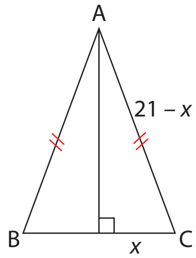
3 a) $\lim\limits_{R \to 11\,896^+} f(R) = 326{,}31 = \lim\limits_{R \to 11\,896^-} f(R)$.

b) et **c)** La représentation de f est une ligne brisée constituée de quatre segments et une demi-droite.



PROBLÈME OUVERT

Notons $2x$ (en cm) la longueur de la base du triangle.
L'aire $\mathscr{A}(x)$ s'exprime (en cm²) par $\mathscr{A}(x) = x\sqrt{(24-x)^2 - x^2}$, soit $\mathscr{A}(x) = 4x\sqrt{36-3x}$.
À la calculatrice, la représentation de $\mathscr{A}$ coupe deux fois la droite d'équation $y = 108$.



Le problème semble donc admettre deux solutions.
• ***À la fin du chapitre*** :
$\mathscr{A}$ est dérivable sur $[0\,;12[$ et $\mathscr{A}'(x) = \dfrac{18(8-x)}{\sqrt{36-3x}}$.
Cette dérivée s'annule pour $x = 8$, valeur en laquelle $\mathscr{A}$ atteint un maximum d'environ 110.
On retrouve (théorème des valeurs intermédiaires) deux valeurs pour lesquelles $\mathscr{A}(x) = 108$.

EXERCICES Application (page 115)

1 f est affine donc continue sur chacun des intervalles $[0\,;2[$, $[2\,;4]$ et $]4\,;6]$.
$\lim\limits_{x\to 2^-}(x-2) = 0$ et $f(2) = -1$ donc
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq f(2)$: f n'est pas continue en 2.
$f(4) = -5 = \lim\limits_{x\to 4^+}(x-9)$: f est continue en 4.

2 f est une fonction usuelle continue sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$, $[0\,;4]$ et $]4\,;+\infty[$.
$\lim\limits_{x\to 0^-} x^2 = 0 = f(0) = \sqrt{0}$: f est continue en 0.
$f(4) = 2 \neq \lim\limits_{x\to 4^+} x$: f n'est pas continue en 4.

3
$$\begin{cases} f(x) = -1 & \text{si } x < 0 \\ f(0) = 0 & \\ f(x) = 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$
f est constante donc continue sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1 \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$: f n'est pas continue en 0.

4 f est une fonction polynôme donc continue sur chacun des intervalles $]-\infty\,;1[$ et $[1\,;+\infty[$.
$$\lim_{x\to 1^-}(-x^2 + ax + a) = 2a - 1 \text{ et } f(1) = 2.$$
f continue en 1 $\Leftrightarrow 2a - 1 = 2 \Leftrightarrow a = \dfrac{3}{2}$.

5 $f(-1) = \mathrm{e}$, $f(1) = 1$ et f est affine sur $]-1\,;1]$:
$$y = \frac{1-\mathrm{e}}{2}x + \frac{1+\mathrm{e}}{2}.$$

6 **1.** f est dérivable sur $I = [-1{,}5\,;-1[$ et, pour tout x de I, $f'(x) = \dfrac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$. $f'(x)$ est donc du signe de $2x+3$, c'est-à-dire strictement positive sur $]-1{,}5\,;-1[$. f est donc strictement croissante sur I.
2. $f(-1{,}5) = 6{,}75$ et $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = +\infty$. f étant continue et strictement croissante sur I, $f(\mathrm{I}) = [6{,}75\,;+\infty[= \mathrm{J}$.
$10 \in \mathrm{J}$, donc il existe un unique nombre α de I tel que $f(\alpha) = 10$ (théorème 4).

7 f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre x :
$$f'(x) = x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3).$$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	$\dfrac{29}{2}$	↘	$-\dfrac{19}{3}$	↗	$+\infty$

Sur $\mathrm{I} =]-\infty\,;-3[$, f est continue et strictement croissante, $f(\mathrm{I}) = \left]-\infty\,;\dfrac{29}{2}\right[$ qui contient 4. $f(x) = 4$ admet donc (théorème 4) une unique solution sur I.
Il en est de même sur $[-3\,;2]$ et sur $]2\,;+\infty[$ qui contiennent 4. L'équation $f(x) = 4$ admet donc trois solutions dans $\mathbb{R}$:
$-4{,}84 < \alpha < -4{,}83$; $-0{,}49 < \beta < -0{,}48$ et $3{,}82 < \gamma < 3{,}83$.

8 **1.** $f(-1) = -\dfrac{3}{2}$; $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$; $f(0) = -\dfrac{1}{2}$ et $f(1) = \dfrac{1}{2}$.
2. f est continue sur $\left[-1\,;-\dfrac{1}{2}\right]$. $f(-1) < 0 < f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.
Il existe au moins un nombre x de $\left[-1\,;-\dfrac{1}{2}\right]$ tel que $f(x) = 0$ (théorème des valeurs intermédiaires). Il en est de même sur $\left[-\dfrac{1}{2}\,;0\right]$ et sur $[0\,;1]$. f admet (au moins) trois racines.
On peut montrer qu'elle n'en admet que trois.

9 **a)** $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

$\forall x < 1$, $f(x) \leqslant -1$.
Sur $[1\,;+\infty[$, f est continue et strictement croissante.
$f([1\,;+\infty[) = [-2\,;+\infty[$ qui contient 0 : l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

$f(1) = -2$ et $f(2) = 3$ soit $f(1) \times f(2) < 0$, donc la solution $\alpha \in [1 ; 2]$.

b) Plus précisément, $1{,}6 < \alpha < 1{,}7$.

10 $f(-1) = -1$, $f(0) = 1$ et f est continue.

$f(-1) \times f(0) < 0$, donc il existe au moins un nombre c de $]-1 ; 0[$ tel que $f(c) = 0$.

En fait, comme $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, la fonction est strictement monotone, le nombre c est unique.

Pour info : $-0{,}7 < c < -0{,}6$.

11 **1.** f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre x,

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2).$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Pour tout $x > -2$, $f(x) \geqslant 1$.

Une seule solution α appartenant à $]-\infty ; -2[$.

2. $-3{,}11 < \alpha < -3{,}10$.

12 $f(x) = -3$ admet une unique solution sur chacun des intervalles $]-\infty ; -1[$, $]-1 ; 4[$ et $]4 ; +\infty[$ car, sur chacun d'eux, f est continue, strictement monotone et les intervalles images par f contiennent le nombre -3.

13 **1.** Déterminer les points communs à la courbe et à l'axe des abscisses revient à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} + x - 2 = 0$. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} + x - 2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2e^{2x} + 1 > 0$.

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^{2x}}{x} + 1 - \frac{2}{x}\right) = +\infty,$$

donc $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.

2. $0{,}27 < \alpha < 0{,}28$.

14 **a)** f est une fonction polynôme (ici sous une forme factorisée) donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3(-3)(4 - 3x)^2 = -9(4 - 3x)^2.$$

b) De même, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = 5\,(14x + 1)(7x^2 + x - 3)^4.$$

15 **a)** $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction $u : x \mapsto x^2 + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $u(x) \neq 0$ et la fonction $\frac{1}{u}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

f, somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x - \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

b) $u : x \mapsto 2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement positive sur $]0 ; +\infty[$ donc u est dérivable et non nulle sur $]0 ; +\infty[$.

Ainsi, f est définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

$$\forall\, x > 0, f'(x) = \frac{\dfrac{-2}{2\sqrt{2x}}}{2x} = -\frac{1}{2x\sqrt{2x}}.$$

16 **a)** $x \mapsto \sqrt{2x}$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, donc f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

$$\forall\, x > 0, f'(x) = \sqrt{2x} + x \times \frac{1}{\sqrt{2x}} = \frac{3x}{\sqrt{2x}} = \sqrt{\frac{9x}{2}}.$$

Remarque. f est dérivable en 0 car $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

b) $x \mapsto x^3 - 2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement positive sur $I =]-\sqrt{2} ; 0[$ et sur $J =]\sqrt{2} ; +\infty[$. f est donc dérivable sur $I \cup J$.

$$\forall x \in I \cup J, f'(x) = \frac{3x^2 - 2}{2\sqrt{x^3 - 2x}}.$$

17 **a)** $x \mapsto 3x^2 - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement positive sur $I = \left]-\infty ; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ et sur $J = \left]\frac{1}{\sqrt{3}} ; +\infty\right[$.

f est donc dérivable sur $I \cup J$.

$$\forall x \in I \cup J, f'(x) = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 - 1}} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 - 1}}.$$

b) $x \mapsto \dfrac{3x - 2}{2x - 3}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$ et strictement positive sur $I = \left]-\infty ; \frac{2}{3}\right[$ et sur $J = \left]\frac{3}{2} ; +\infty\right[$. f est donc dérivable sur $I \cup J$.

$$\forall x \in I \cup J, f'(x) = \frac{\dfrac{-5}{(2x - 3)^2}}{2\sqrt{\dfrac{3x - 2}{2x - 3}}}$$

$$= -\frac{5}{2}\sqrt{\frac{2x - 3}{3x - 2}} \times \frac{1}{(2x - 3)^2}.$$

18 **a)** f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{3\}$.

$$\forall x \neq 3, f'(x) = \frac{-3}{(x - 3)^4}.$$

b) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

$$\forall x \neq \frac{3}{2}, f'(x) = 5(-2) \times \frac{-2}{(3 - 2x)^3} = \frac{20}{(3 - 2x)^3}.$$

19 **a)** $x \mapsto 3x^2 - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 6xe^{3x^2 - 1}$.

b) $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto x^2 - 1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2e^{2x} + 2xe^{x^2 - 1}.$$

20 **a)** f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$.

$$\forall x \neq 0, f'(x) = \frac{2xe^{2x} - e^{2x}}{x^2} = \frac{(2x - 1)e^{2x}}{x^2}.$$

b) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (2x + 2)e^{x + 1}.$$

Activités de recherche (page 120)

25 **Polynômes de degré impair**

• ***Les outils***

– Limite à l'infini d'une fonction polynôme.

– Théorème des valeurs intermédiaires.

• ***L'objectif***

– Montrer que tout polynôme de degré impair a au moins une racine.

1. b)

x	$-\infty$	$+\infty$
P_1	$-\infty$ ↗	$+\infty$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P_3'(x) = -3x^2 < 0$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
P_3'		$-$		
P_3	$+\infty$	↘		$-\infty$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P_5'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^2+1)(x+1)(x-1)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
P_5'		$+$	0	$-$	0	$+$	
P	$-\infty$	↗	5	↘	-3	↗	$+\infty$

2. $P_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $P_3(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $P_5(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

3. a) Soit P un polynôme de degré n impair.

Si $a_n > 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} a_n x^n = a_n \times \lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} a_n x^n = a_n \times \lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$.

Si $a_n < 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} a_n x^n = a_n \times \lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} a_n x^n = a_n \times \lim\limits_{x\to+\infty} x^n = -\infty$.

b) Quel que soit l'entier naturel n impair, P est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, donc l'équation $P(x) = 0$ a au moins une solution (théorème des valeurs intermédiaires).

26 **Utiliser une fonction auxiliaire**

• ***Les outils***

– Dérivées d'un produit, d'une somme et de e^u.

– Utilisation d'une fonction auxiliaire pour étudier le signe d'une dérivée.

– Théorème des fonctions continues strictement monotones.

• ***Les objectifs***

– Étudier les variations d'une fonction.

– Infirmer une conjecture résultant de la lecture d'un écran graphique.

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{x-1}(x^2+2x) - x$.

2. $f'(x) = x \times g(x)$, avec $g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1$.

3. a) $g'(x) = (x+3)e^{x-1}$.

b)

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g	-1	↘	$-e^4-1$	↗	$+\infty$

$g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1 = \dfrac{(x+2)}{(x-1)}(x-1)e^{x-1} - 1$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-1)e^{x-1} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$.

c) $\forall x \leqslant 3$, $g(x) < 0$.

Sur $[3\ ;+\infty[$, g est continue et strictement croissante et $g([3\ ;+\infty[) = [-e^4-1\ ;+\infty[$ qui contient 0. Il existe donc un unique nombre α tel que $g(\alpha) = 0$ (théorème 4).

$g(0{,}20) \approx -0{,}011$ et $g(0{,}21) \approx 0{,}002\,9$ donc :

$$0{,}20 < \alpha < 0{,}21.$$

d) si $x < \alpha$, $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$, $g(x) > 0$.

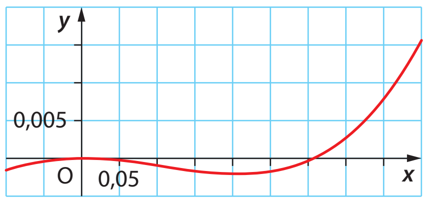
4. a) et **b)**

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	0	↘		↗	$+\infty$

c) La fonction f n'est pas croissante comme conjecturé.

d) L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions : $x_1 = 0$ et $x_2 > \alpha$.

e)



27 **Narration de recherche**

$x \geqslant -a$ et $x \geqslant \dfrac{1}{2}$.

$\sqrt{2x-1} = x + a \Rightarrow 2x - 1 = (x+a)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 2(a-1)x + a^2 - 1 = 0$ **(E).**

$\Delta = -8a$

Si $a > 0$, **(E)** n'admet pas de solution.

Si $a = 0$, une solution $x = 1$ (qui convient car $1 > \dfrac{1}{2} > 0$).

Si $a < 0$, **(E)** admet deux solutions :

$$x_1 = (1-a) + \sqrt{-2a} \text{ et } x_2 = (1-a)\sqrt{-2a}.$$

$\forall a < 0$, $x_1 \geqslant -a$ et $x_1 \geqslant 1 > \dfrac{1}{2}$, donc x_1 convient.

Pour x_2, on a bien $x_2 > \dfrac{1}{2}$ mais a-t-on aussi $x_2 \geqslant -a$? Graphiquement, on peut conjecturer que le résultat change selon la place de a par rapport au nombre $-\dfrac{1}{2}$.

$x_2 \geqslant -a \Leftrightarrow 1\sqrt{-2a} \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 \geqslant \sqrt{-2a} \Leftrightarrow 1 \geqslant 2a$

$\Leftrightarrow a \geqslant -\dfrac{1}{2}.$

Conclusion :

Si $-\dfrac{1}{2} \leqslant a < 0$, **(E)** admet deux solutions.

Si $a < -\dfrac{1}{2}$, **(E)** admet une unique solution.

28 Narration de recherche

1. $v_1'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$ du signe de $u'(x)$, donc v_1 et u varient dans le même sens.

2. $v_2'(x) = [u(x) + u'(x)]\, e^{u(x)}$.

x	$-\infty$		0		a		b		$+\infty$
u'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
u						$-$	0	$+$	
v								$+$	

Le seul intervalle sur lequel il est possible de déterminer le sens de variation de v_2 est $[b\,; +\infty[$.

29 TD – La dérivée n'est pas toujours continue

A f est continue en a mais non dérivable en a.

B 1. b) Sur chacun des intervalles $I =]-\infty\,; 2[$ et $J = [2\,; +\infty[$, f est une fonction polynôme donc continue.

$\lim\limits_{x\to 2^+} (-x^2 + 4) = 0 = f(2)$: f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

2. Sur chacun des intervalles I et J, f est une fonction polynôme donc dérivable.

3. a)

• $h < 0$

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{-(2+h)^2 + 4 - 0}{h} = \frac{-h^2 - 4h}{h} = -h - 4.$$

$\lim\limits_{h\to 0^-} (-h - 4) = -4 = f_g'(2).$

• $h > 0$

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 - 4}{h} = h + 4.$$

$\lim\limits_{h\to 0^-} (h + 4) = 4 = f_d'(2).$

b) $f_g'(2) \neq f_d'(2)$: f n'est pas dérivable en 2.

4. $f'(x) = \begin{cases} -2x \text{ si } x < 2 \\ 2x \text{ si } x > 2. \end{cases}$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	|	$+$	
f	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

C a) f est affine sur $]-\infty\,; 0]$ donc continue et dérivable sur $]-\infty\,; 0]$.

La fonction racine carrée est continue et dérivable sur $]0\,; +\infty[$.

$f_g'(0) = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = +\infty$ donc f n'est pas dérivable en 0.

b) Sur les trois intervalles, f est une fonction polynôme donc continue et dérivable.

En 0

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$: f est continue en 0.

$h < 0$: $\dfrac{f(h) - f(0)}{h} = -h + 2$ donc $f_g'(0) = 2$.

$h > 0$: $\dfrac{f(h) - f(0)}{h} = h$ donc $f_d'(0) = 0$.

$f'_g(0) \neq f_d'(0)$: f n'est pas dérivable en 0.

En 2

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 4 = f(2)$: f est continue en 2.

$h < 0$: $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = h + 2$ donc $f_g'(2) = 2$.

$h > 0$: $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = -h + 4$ donc $f_d'(2) = 4$.

$f_g'(2) \neq f_d'(2)$: f n'est pas dérivable en 2.

30 TD – Lorsque la dérivée est bornée

A 1. b) On peut conjecturer que les coefficients directeurs sont compris entre 1 et 8.

2. b) De même, le taux d'accroissement de f semble compris ente 1 et 8.

B 1. $f''(x) = 3x^2 > 0$ sur I, donc f' est strictement croissante sur I : pour tout x de I,

$f'(1) \leqslant f'(x) \leqslant f'(2)$ soit $1 \leqslant f'(x) \leqslant 8$.

2. a) ϕ, somme de deux fonctions dérivables sur I, est dérivable sur I.

$\forall x \in I$, $\phi'(x) = 8 - x^3 \geqslant 0$, donc ϕ est croissante.

b) $a < b \Rightarrow \phi(a) \leqslant \phi(b) \Leftrightarrow 8a - f(a) \leqslant 8b - f(b)$

$\Leftrightarrow 8(a - b) \leqslant f(a) - f(b)$

$\Leftrightarrow 8 \geqslant \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}.$

c) Le coefficient directeur de la droite (AB) étant égal à $\dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}$, d'après la question précédente, il ne dépasse pas 8.

3. a) $\psi(x) = x - f(x)$.

$\forall x \in I$, $\psi'(x) = 1 - x^3 \leqslant 0$, donc ψ est décroissante.

$a < b \Rightarrow \psi(a) \geqslant \psi(b) \Leftrightarrow a - f(a) \geqslant b - f(b)$

$\Leftrightarrow (a - b) \geqslant f(a) - f(b)$

$\Leftrightarrow 1 \leqslant \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}.$

b) Le coefficient directeur de toute sécante à $\mathscr{C}$ (en deux points distincts) est compris entre 1 et 8.

DE TÊTE

31 $f(3) = 2$, $\lim\limits_{x \to 3} \frac{2}{3}x = 2$ donc f est continue en $x = 3$ et sur $\mathbb{R}$.

32 $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ donc f n'est pas continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$.

33 $f(-3) \times f(6) < 0$ donc $f(x) = 0$ a au moins une solution dans I.

34 **1.** $f(x) = 0$ admet 2 solutions :
2. $-3 < \alpha < -1$ et $1 < \beta < 3$.

35 Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2xe^{x^2+1}$.

36 f est la fraction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = x^3 + 3x - 2.$$
$f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$$f(0) = -2.\ f(1) = 2.$$
L'équation $f(x) = 0$ a donc une unique solution.

DÉRIVATION DE $\sqrt{u}$

37 *Corrigé sur le site élève.*

38 **a)** Pour tout $x \in\ ]-i\ ;\ 1[$, $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

b) Pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+3}}$.

39 **a)** $f'(x) = -1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

b) $f'(x) = \left[\sqrt{x+1} - \dfrac{x}{2\sqrt{x+1}}\right] \times \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x+2}{2(x+1)^{3/2}}$.

40 **a)** $f'(x) = \dfrac{\dfrac{2}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}} = \dfrac{1}{(1-x)^2\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}}$.

b) $f'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$.

41 Le raisonnement est faux. La fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{3x}{2\sqrt{x}}$.
Pour savoir si elle est dérivable en 0, on cherche
$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{h\sqrt{h}}{h} = 0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
Par conséquent, la tangente a pour équation $y = 0$.

42 *Corrigé sur le site élève.*

43 **1.** $f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}$,
soit $\sqrt{1+x^2}\, f'(x) = f(x)$.

2) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} f'(x) + \sqrt{1+x^2}\, f''(x) = f'(x)$.
$$x f'(x) + (1+x^2) f''(x) = \sqrt{1+x^2}\, f'(x)$$
soit
$$(1+x^2) f''(x) + x f'(x) = f(x).$$

44 **1.** f est dérivable sur $]-1\ ;\ +\infty[$
et $f'(x) = 2x\sqrt{x+1} + \dfrac{x^2}{2\sqrt{x+1}}$,
soit $f'(x) = \dfrac{4x(x+1)+x^2}{2\sqrt{x+1}} = \dfrac{x(5x+4)}{2\sqrt{x+1}}$.

x	-1		$-\frac{4}{5}$		0		$+\infty$
f'	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	↗	$\frac{16}{25\sqrt{5}}$	↘	0	↗	

2) A a pour coordonnées $\left(-\dfrac{4}{5}\ ;\ \dfrac{16}{25\sqrt{5}}\right)$.

45 **1.** $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$, $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.
Donc la tangente en A a pour équation $y = \dfrac{1}{2}x + 1$;
c'est la droite d.

2. $g(x) = \sqrt{x+1} - \dfrac{x}{2} - 1$.

$g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}$.

x	-1		0		$+\infty$
g'	‖	$+$	0	$-$	
g	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↘	$-\infty$

Pour tout x de $[-1\ ;\ +\infty[$, $g(x) \leqslant 0$ donc $\mathscr{C}$ est en-dessous de d.

DÉRIVATION DE u^n ET $\dfrac{1}{u^n}$

46 **a)** $f'(x) = 4(2x-2)(x^2-2x)^3$.
b) $f'(x) = -15(1-3x)^4$.

47 **a)** $f'(x) = 6(3x-1)(1-2x)^3 - 6(1-2x)^2(3x-1)^2$
$= 6(3x-1)(1-2x)^2(2-5x)$.
b) $f'(x) = 2x(1-x)^3 - 3x^2(1-x)^2$
$= x(1-x)^2(2-5x)$.

48 **a)** $f'(x) = \dfrac{6}{(1-2x)^4}$. **b)** $\dfrac{-12}{(3x+1)^3}$.

49 **a)** $f'(x) = \dfrac{-6(x+2)}{(x-1)^3}$. **b)** $f'(x) = \dfrac{-x-3}{(x+1)^3}$.

50 **a)** $f'(x) = \dfrac{6(2x-1)^2(1-x)}{x^7}$.

b) $f'(x) = 2\left(1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)\left(\dfrac{2}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}\right)$.

51 $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{x^4} = \dfrac{x^4 - 2x^2 - 3}{x^4} = \dfrac{(x^2+1)(x^2-3)}{x^4}$.

x	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f'	||	$-$	0	$+$	
f	|| $+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	$+\infty$

52 *Corrigé sur le site élève.*

DÉRIVATION DE e^u

53 **a)** $f'(x) = 2e^{2x} - e^x$.
b) $f'(x) = -2x\,e^{-x^2}$.

54 **a)** $f'(x) = 2[e^{x-1} + (x-1)\,e^{x-1}]$
$= 2xe^{x-1}$.
b) $f'(x) = e^{-x} - (x+2)\,e^{-x} = e^{-x}(-1-x)$.

55 *Corrigé sur le site élève.*

56 **a)** $f'(x) = \dfrac{2}{(1-x)^2}\,e^{\frac{1+x}{1-x}}$.

b) $f'(x) = \dfrac{-8e^{2x}}{(2e^{2x}+1)^2}$.

57 **1. a)** u est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ donc e^u est dérivable sur cet intervalle.
b) $f'(x) = e^{\sqrt{x}} + x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,e^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}}\left(1 + \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)$.

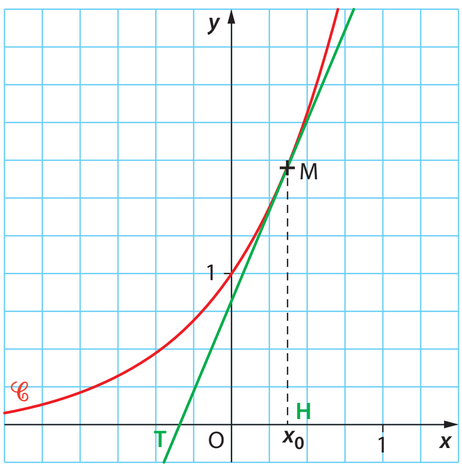
2. On pose $\mathcal{T}(h) = \dfrac{he^{\sqrt{h}} - 0}{h} = e^{\sqrt{h}}$.

$\lim\limits_{h\to 0^+} \mathcal{T}(h) = 1$, donc f est dérivable en zéro et $f'(0) = 1$.

58 La tangente sur M a pour équation
$y = ae^{ax_0}(x - x_0) + e^{ax_0}$ soit :
$y = ae^{ax_0}\,x + e^{ax_0}(1 - ax_0)$.
Le point T a donc pour coordonnées $\left(x_0 - \dfrac{1}{a}\,;0\right)$ et $H(x_0\,;0)$

donc $\overrightarrow{HT}$ a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{a}\,;\,0\right)$, donc $HT = \dfrac{1}{|a|}$.

Cette distance ne dépend donc pas du choix de M sur $\mathscr{C}$.



59 *Corrigé sur le site élève.*

60 $N'(t) = \dfrac{-\dfrac{1}{2\sqrt{t}}}{t}\,e^{-\frac{2d^2}{t}} + \dfrac{1}{\sqrt{t}} \times \dfrac{2d^2}{t^2}\,e^{-\frac{2d^2}{t}}$

soit $N'(t) = -\dfrac{1}{2t\sqrt{t}}\,e^{-\frac{2d^2}{t}} + \dfrac{2d^2}{t^2\sqrt{t}}\,e^{-\frac{2d^2}{t}}$

$= e^{-\frac{2d^2}{t}} \cdot \dfrac{1}{2t^2\sqrt{t}}[-t + 4d^2]$.

t	0		$4d^2$		$+\infty$
N'		$+$	0	$-$	
N	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2d\sqrt{e}}$	$\searrow$	0

Donc $N(t_1) = \dfrac{1}{2d\sqrt{e}}$.

LA CONTINUITÉ

61 **1.** $f(1) = -4$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -4$.
f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. La dérivée à gauche est $f'(1) = -1$.

$\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{5}{1+h} = 5$,
donc f n'est pas dérivable en 1 donc sur $\mathbb{R}$.

62 **1.** $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} \times \dfrac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$ et $f(0) = \dfrac{1}{2}$,
donc f est continue en $x = 0$.

63 *Corrigé sur le site élève.*

64 **1.** $f'(x) = -2xe^{1-x^2} + 2x^3\,e^{1-x^2}$
$= 2xe^{1-x^2}(x^2 - 1)$.

Sur $[0\,;+\infty]$, $f'(x) = 0$ pour $x = 1$ et pour $x > 1$ $f'(x) > 0$.
De plus, $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{1-x^2} = 0$.

2. Pour $n \geqslant 2$, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet deux solutions distinctes sur $[0\,;+\infty[$.

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

65 f est strictement croissante sur $]-\infty\,;0]$ et
$-1 \in\ ]-\infty\,;1]$ donc -1 a un antécédent unique dans $]-\infty\,;0]$.
Pour la même raison, -1 a un antécédent unique dans $[0\,;2]$ et dans $[2\,;+\infty[$.
Donc $f(x) + 1 = 0$ a trois solutions et trois seulement dans $\mathbb{R}$.

66 **1.** $f(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} < 0$.

x	1		α		$+\infty$
f''	||				
f'	|| $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

2. a) f est strictement décroissante sur $]1\,;+\infty[$ et l'image de l'intervalle $]1\,;+\infty[$ est $\mathbb{R}$.
Donc 0 a un antécédent unique dans $]1\,;+\infty[$.
$f(2) = 1 - \sqrt{2} < 0$ donc $\alpha \in\ ]1\,;2[$.
b) $1{,}75 \leqslant \alpha \leqslant 1{,}76$.

67 **1.** Si $f(x) = x^3 - x + 1$, alors $f'(x) = 3x^2 - 1$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$1+\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	$1-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Donc l'équation $x^3 - x + 1 = 0$ a une unique solution α telle que $-2 < \alpha < -1$.

2. Vrai et $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{2\sqrt{x^3 - x + 1}}$.

3. Vrai lorsque $1 - \dfrac{2}{3\sqrt{3}} < m < 1 + \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

68 $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x$
$= 12x(x^2 + x - 2)$.

x	$-\infty$	α	-2	β	0	γ	1	δ	$+\infty$
f'			0	$+$	0		0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$ 0	-28	$\nearrow$ 0	4	$\searrow$ 0	-1	$\nearrow$ 0	$+\infty$

$f(x) = 0$ a donc quatre solutions dans $\mathbb{R}$, avec
$-2{,}73 \leqslant \alpha \leqslant -2{,}72\,; -0{,}55 \leqslant \beta \leqslant -0{,}54\,; 0{,}73 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}74\,;$
$1{,}22 \leqslant \delta \leqslant 1{,}23$.

69 $f'(x) = \dfrac{-3x^2(x+2) + x^3}{(x+2)^2} = \dfrac{x^2(-2x-6)}{(x+2)^2}$.

x	-2		α		$+\infty$
f'	$\Vert$				
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Il existe un α unique tel que $f(\alpha) = 2$,
avec $-1{,}18 \leqslant \alpha \leqslant -1{,}17$.

70 *Corrigé sur le site élève.*

71 **1. a)** $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.

x	$-\infty$		-1		1		α		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$			
g	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b) Donc $g(x) = 0$ a une unique solution α telle que $\alpha \approx 2{,}1$.
c) Si $x \leqslant \alpha$, $g(x) \leqslant 0$, et si $x > \alpha$, $g(x) > 0$.

2. a) $f'(x) = \dfrac{6x^2(x^2-1) - (2x^3+3)2x}{(x^2-1)^2}$

$= \dfrac{2x[3x^3 - 3x - 2x^3 - 3]}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2x\,g(x)}{(x^2-1)^2}$.

b)

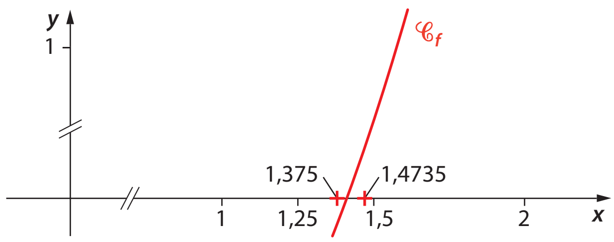
x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
f'		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-\infty$ $\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

c) $f(\alpha) = \dfrac{2\alpha^3 + 3}{\alpha^2 - 1}$ or $g(\alpha) = \alpha^3 - 3\alpha - 3 = 0$
donc $\alpha^3 = 3\alpha + 3$,
soit $f(\alpha) = \dfrac{6\alpha + 9}{\alpha^2 - 1} = \dfrac{3(2\alpha + 3)}{\alpha^2 - 1}$.

72 **1.**

a	b	c
1	2	1,5
1	1,5	1,25
1,25	1,5	1,375
1,375	1,5	1,4735

À l'affichage : 1.4735.
2. a) La fonction f est polynomiale, donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$:
$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2x.$$
Sur $[1\,;2]$, $f'(x) < 0$ et f est strictement croissante.
$f(1) \times f(2) = -1 \times 2 < 0$. Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\,;2]$.
b)



Les valeurs successives de c s'approchent de l'abscisse du point d'intersection de la courbe et de l'axe des abscisses, c'est-à-dire de la solution (positive) de l'équation $f(x) = 0$.
L'objectif de l'algorithme est d'obtenir une valeur approchée de cette solution : $\sqrt{2}$.
c) p est la précision ou plus exactement la distance maximum acceptée entre a et b.
3. $0{,}596 < \alpha < 0{,}597$.

73 **1.** $g(a) = f(a) - a = -a < 0$ car $0 < a < 1$.
$g(b) = f(b) - b = 1 - b > 0$ car $0 < b < 1$.
2. $g(a)\,g(b) < 0$ et g est continue sur $]0\,;1[$.
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $g(x) = 0$ admet au moins une solution sur $]0\,;1[$. Il en est donc de même pour l'équation $f(x) = x$.

APPLICATION À L'ÉTUDE DE SUITES

74 **1.** $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geqslant 0$ donc la suite (u_n) est croissante.
2. $f'(x) = 2x + 1$.
a)

x	-1		$-\frac{1}{2}$		0
f'		$-$	0	$+$	
f	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0

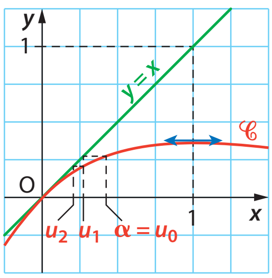
donc, si $x \in]-1\,;0[$, $f(x) \in \left[-\frac{1}{4}\,;0\right[\subset]-1\,;0[$.

b) Par hypothèse, $u_0 = a \in]-1\,;0[$.
Si $u_n \in]-1\,;0[$, $u_{n+1} = f(u_n) \in]-1\,;0[$ (voir la question **2. a)**).
3. La suite (u_n) est croissante et majorée par 0, donc elle est convergente vers ℓ tel $f(\ell) = \ell$ et $\ell^2 + \ell = \ell$, soit $\ell = 0$.

75 **A 1.** $f'(x) = (1 - x)e^{-x}$, $f'(0) = 1$, $f(0) = 0$; donc la tangente en $x = 0$ a pour équation $y = x$.
2. a)

x	$-\infty$	0		α	1		β	$+\infty$
g'			$+$		0	$-$		
g	$-\infty$	0	↗	m	$\frac{1}{e}$	↘	m	0

Si $m \in \left]0\,;\frac{1}{e}\right[$, f est strictement croissante sur $[0\,;1]$ et l'image de $[0\,;1]$ est $\left[0\,;\frac{1}{e}\right]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un α unique de $]0\,;1[$ tel que $f(\alpha) = m$.
On prouve de même qu'il existe β unique de $]1\,;+\infty[$ tel que $f(\beta) = m$.
b) Si $m = \frac{1}{4}$ alors $0{,}35 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}36$.
B. $u_0 = \alpha$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
1. a)



b) La suite (u_n) semble converger vers 0 en décroissant.
2. a) $u_0 = \alpha > 0$.
Si $u_n > 0$, $f(u_n) = u_{n+1} > 0$ (voir le tableau de variation de f).
Donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 0$.
b) Tous les u_n sont positifs et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n} < 1$,
donc la suite est décroissante.
c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par zéro donc elle converge vers ℓ tel que $f(\ell) = \ell$ soit $\ell e^{-\ell} = \ell$ ou $\ell(e^{-\ell} - 1) = 0$.
Donc $\ell = 0$.

76 **1. c)** Les courbes présentent un minimum si n est impair et deux minima et un maximum si n est pair.
d) Les courbes semblent passer par les points fixes O(0 ; 0) et A(2 ; 0).
2. a) $f_n'(x) = n(2x - 2)(x^2 - 2x)^{n-1}$.
b) • ***n* pair, *n* ⩾ 2**

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$(-1)^n = 1$	↘	0	↗	$+\infty$

• ***n* impair, *n* ⩾ 3**

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	$+\infty$

• ***n* = 1**

$f(x) = x^2 - 2x$ et $f_1'(x) = 2x - 2$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f_1'		$-$	0	$+$	
f_1	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

c) $x^2 - 2x = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$, soit $x = 1 + \sqrt{2}$ ou $x = 1 - \sqrt{2}$.
Donc on vérifie que la courbe $\mathscr{C}_n$ passe par 4 points fixes de coordonnées respectives :
$(0\,;0)$; $(2\,;0)$; $(1 + \sqrt{2}\,;1)$; $(1 - \sqrt{2}\,;1)$.

Prendre toutes les initiatives

77 $f'(x) = (x + 2)e^x$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	0	↘	$-\frac{1}{e^2}$	↗	$+\infty$

$-\frac{1}{16} \approx -0{,}0625$ et $-\frac{1}{e^2} \approx -0{,}135 \ldots$ donc $-\frac{1}{e^2} < -\frac{1}{16} < 0$.
Donc $f(x) = -\frac{1}{16}$ a deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$.

78 On pose, pour tout x de $\mathbb{R}$:
$\varphi(x) = 2e^x - 2x - 1$, $\varphi'(x) = 2(e^x - 1)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
φ'		$-$	0	$+$	
φ	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Donc $\varphi(x) \geqslant 1$ pour tout x de $\mathbb{R}$, d'où il découle que $\varphi(x) > 0$ et f est donc définie sur $\mathbb{R}$.

79 $f : x \mapsto xe^x$ si $x \leqslant 1$ $\quad x \mapsto ax + b$ si $x > 1$.
$f(1) = e$ donc f est continue en d si $a + b = e$.
Dérivée à gauche en 1 : $f'(x) = (x + 1)e^x$, donc $f'(1) = 2e$.
Donc f est dérivable en 1 si $a = 2e$ et $b = -e$.

80 $f'(x) = (x + 1)e^x - 3$. $\quad f''(x) = (x + 2)e^x$.

x	$-\infty$		-2		α	$+\infty$
f''		$-$	0	$+$		
f'	-3	↘	$-\frac{1}{e^2} - 3$	↗	0	$+\infty$

Il existe α unique de $]-2 ; +\infty[$ tel que $f'(x) = 0$, avec $\alpha \approx 0{,}62$.

x	$-\infty$		β		α		γ		$+\infty$
f'				$-$	0	$+$			
f	$+\infty$	↘	0	↘	$f(\alpha)$	↗	0	↗	$+\infty$

$$f(\alpha) = -\frac{(3\alpha^2 + 2\alpha + 2)}{\alpha + 1} \text{ car } e^\alpha = \frac{3}{\alpha + 1},$$

donc $f(\alpha) < 0$. Il existe donc β et γ tels que $f(\beta) = f(\gamma) = 0$ avec $\beta \approx -0{,}79$ et $\gamma = 1{,}47$.
Si $x \in [\beta ; \gamma]$, $f(x) \leqslant 0$. Si $x < \beta$ ou $x > \gamma$, $f(x) > 0$.

81 Démontrons que f est continue et dérivable en 0.

1. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{-X}$ en posant $\frac{1}{x^2} = X$.
Donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, f est continue en 0 et par suite sur $\mathbb{R}$.

En posant $\frac{1}{h} = X$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \lim_{X \to +\infty} Xe^{-X^2} = \lim_{X \to +\infty} \frac{X}{e^{X^2}} = 0.$$

Donc f est dérivable en 0 et par suite sur $\mathbb{R}$.

2. $f'(h) = \frac{2}{h^3} e^{-\frac{1}{h^2}}$ si $h \neq 0$ et $f'(0) = 0$.

Or $\lim\limits_{h \to 0} f'(h) = 0$ donc f' est continue en $x = 0$.

EXERCICES Le jour du BAC (page 129)

82 *Corrigé sur le site élève.*

83 **A** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ car la limite en 0 de $\frac{e^x - 1}{x}$ est le nombre dérivée de la fonction $x \mapsto e^x$ en $x = 0$.

B 1. a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

b) $x\left(1 + \frac{1}{e^x - 1}\right) = \frac{xe^x}{e^x - 1} = f(x)$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

2. a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^x \times \frac{x}{e^x - 1}$.

Or $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$, donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.
Il en résulte que f est continue en $x = 0$.
b) On pose $\varphi(x) = e^x - x - 1$. $\varphi'(x) = e^X - 1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
φ'		$-$	0	$+$	
φ	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Du tableau de variation, on déduit que pour tout x de $\mathbb{R}$, $\varphi(x) \geqslant 0$, avec $\varphi(x) = 0$ uniquement pour $x = 0$. Donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^x \geqslant x + 1$.

3. a) $f'(x) = \frac{(x + 1)e^x(e^x - 1) - xe^x \times e^x}{(e^x - 1)^2}$.

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{e^x[xe^x + e^x - x - 1 - xe^x]}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x\, g(x)}{(e^x - 1)^2}$

avec $g(x) = e^x - x - 1$.

b)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'	0	$+$	‖	$+$	
f	0	↗	1	↗	$+\infty$

4. a) $f(-x) = \frac{-xe^{-x}}{e^{-x} - 1} = \frac{-x}{1 - e^x} = \frac{x}{e^x - 1}$.

b) Le coefficient directeur de (MM') est :

$$\frac{y_{M'} - y_M}{x_{M'} - x_M} = \frac{\frac{x}{e^x - 1} - \frac{xe^x}{e^x - 1}}{-2x} = \frac{1}{2}.$$

c) Le résultat précédent suggère que la fonction f semble dérivable en 0 et que $f'(0) = \frac{1}{2}$.

84 **1. a)** f_n est croissante sur $[0 ; +\infty[$ et

$f'_n(x) = \frac{2n}{(x + n)^2} + e^{-x} > 0$ pour tout réel $x \geqslant 0$.

b) $f_n(0) = -2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 1$.

2. a) $f_n(n) = -e^{-n} < 0$.

x	0		n	u_n	$n + 1$	$+\infty$
f'_n			$+$			
f_n	-2	↗	$-e^{-n}$	0	$f_n(n + 1) > 0$	$+\infty$

b) Pour $n = 1$, $e^2 > 3$ est vraie.
Supposons $e^{n+1} > 2n + 1$. Alors

$$e^{n+2} = e^{n+1} \times e > e(2n + 1).$$

Or $e(2n+1)-(2n+3) = 2n(e-1)+e-3$.
Si $n > 1$, $2n(e-1)+e-3 > 3e-5 > 0$.
Donc $e^{n+2} > 2n+3$.
D'où, pour tout $n \geqslant 1$, e^{n+1}, $e^{n+1} > 2n+1$.

c) $f_n(n+1) = 1 - \dfrac{2n}{2n+1} - e^{-(n+1)} = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{e^{n+1}}$.

D'après la question précédente :

$$\frac{1}{e^{n+1}} < \frac{1}{2n+1} \text{ donc } f_n(n+1) > 0.$$

3. Sur l'intervalle $[n\,;\,n+1]$, la fonction f_n est strictement croissante, $f_n(n) < 0$ et $f_n(n+1) > 0$. Donc 0 est l'image d'un réel unique u_n de l'intervalle $]n\,;\,n+1[$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

85 **1.** $g'(x) = -xe^x$.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$			
g	1	↗	2	↘	0	↘	$-\infty$

Donc $g(x) = 0$ a une seule solution $\alpha \in\,]0\,;\,+\infty[$: la proposition est vraie.

2. La proposition est fausse : voir le tableau ci-dessus.

3. $f'(x) = \dfrac{e^x + 1 - xe^x}{e^x+1} = \dfrac{g(x)}{e^x+1}$.

Donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. La proposition est fausse.

4. Si $g(a) = 0$ alors $e^a = \dfrac{1}{a-1}$ et $e^a + 1 = \dfrac{a}{a-1}$

et $f(a) = \dfrac{a}{e^a+1} = \dfrac{a(a-1)}{a} = a-1$,

avec $a \neq 0$ et $a \neq 1$. La proposition est vraie.

86 **1. a)** $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{4}e^{-x}[-x-1+1] = 1 + \dfrac{1}{4}xe^{-x}$

$f''(x) = \dfrac{1}{4}e^{-x}(-x+1)$.

b)

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
f''			$+$		0	$-$	
f'	$-\infty$	↗	0	↗	$1+\dfrac{1}{4e}$	↘	1

c) Pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$. f' est strictement croissante sur $\left]-\infty\,;\,1+\dfrac{1}{4e}\right[$.

Donc, d'après le tableau des valeurs intermédiaires, 0 est l'image d'un unique réel α de l'intervalle $]-\infty\,;\,1]$. De plus, $f(-1{,}21) \approx -0{,}014$ et $f(-1{,}20) \approx 0{,}004$. Donc $-1{,}2 < \alpha < -1{,}20$.

2. a)

x	$-\infty$		α		-1		0		$+\infty$
f'		$-$	0			$+$			
f	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	-1	↗	$-\dfrac{1}{4}$	↗	$+\infty$

b) $f(-1) = -1$, $f(0) = -\dfrac{1}{4}$ et f est strictement croissante sur I. Donc $f(\mathrm{I}) = \left[-1\,;\,-\dfrac{1}{4}\right] \subset [-1\,;\,0]$ et $f(x) \in \mathrm{I}$ dès que $x \in \mathrm{I}$.

B 1. Il semble que la suite soit décroissante et converge vers (-1).

2. a) $u_0 = 0$ donc $u_1 = -\dfrac{1}{4} \in\,]-1\,;\,0[$.

Si $u_n \in\,]-1\,;\,0[$, d'après la question précédente

$$u_{n+1} = f(u_n) \in\,]-1 : 0[.$$

Donc pour tout $n \geqslant 1$, $-1 < u_n < 0$.

b) $u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{4}(u_n+1)\,e^{-u_n}$,

soit $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1}{4}(u_n+1)\,e^{-u_n} < 0$.

Donc la suite est décroissante.

c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par -1 donc elle est convergente vers ℓ telle que $f(\ell) = \ell$,

soit $\ell = \ell - \dfrac{1}{4}(\ell+1)e^{-\ell}$.

Donc $-\dfrac{1}{4}(\ell+1)\,e = 0$, soit $\ell = -1$.

87 **1. a)** $f'(x) = e^{-x}(1-x)$ donc $f'(x) + f(x) = e^{-x}$. Il en résulte que la proposition est vraie.

b) Proposition fausse : $f'(0) = 1 > \dfrac{1}{2}$.

c)

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'			$+$		0	$-$	
f	$-\infty$	↗	0	↗	$\dfrac{1}{e}$	↘	0

$\dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{e}$ donc l'équation $f(x) = \dfrac{1}{4}$ a deux solutions, l'une dans l'intervalle $[0\,;\,1]$ et l'autre dans $[2\,;\,3]$.

2. a) La tangente en M à $\mathscr{C}_f$ a pour équation :

$$y = e^{-m}(1-m)(x-m) + me^{-m}.$$

Donc N d'abscisse 0 a pour ordonnée $m^2\,e^{-m}$.

Or P d'abscisse m a pour ordonnée $m^2\,e^{-m}$, donc la proposition est vraie.

b) La tangente en M passe par H si et si seulement si :

$$h = e^{-m}(1-m)(-m) + m\,e^{-m} = g(m).$$

Or $g'(x) = (2x - x^2)\,e^{-x}$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	
g	$+\infty$	↘	0	↗	$\dfrac{4}{e^2}$	↘	0

Si $h \in \left]0\,;\,\dfrac{4}{e^2}\right[$, l'équation $g(m) = h$ a 3 solutions d'où 3 valeurs de m et 3 tangentes(cf. tableau). La proposition est vraie.

88 **A. 1.** x est solution de (E) si et seulement si $e^x = \dfrac{1}{x}$ soit $xe^x = 1$, donc $x = e^{-x}$ ou encore $f(x) = 0$.

2. a) $f'(x) = 1 + e^{-x} > 0$. D'où le tableau :

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	α	1	$+\infty$
f'			$+$			
f	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$1-\frac{1}{2}$	$+\infty$

b) L'image de $\mathbb{R}$ par f est $\mathbb{R}$. De plus, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc 0 a un antécédent unique α.

c) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} < 0$ et $f(1) = 1 - \frac{1}{e} > 0$, donc $\alpha \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$.

d) Sur l'intervalle $[0 ; \alpha]$, $f(x) \leqslant 0$ (cf. tableau).

B. 1. $g(x) = x$ équivaut à $1 + x = x + xe^x$ soit $xe^x = 1$, donc $f(x) = 0$.

2. D'après la question précédente $g(\alpha) = \alpha$ équivaut à $f(\alpha) = 0$.

3. $g'(x) = \dfrac{1 + e^x - e^x(1 + x)}{(1 + e^x)^2} = \dfrac{1 - xe^x}{(1 + e^x)^2} = \dfrac{e^x(e^{-x} - x)}{(1 + e^x)^2} = \dfrac{-e^x f(x)}{(1 + e^x)^2}$.

Or sur $[0 ; \alpha]$, $f(x) \leqslant 0$ donc $g'(x) \geqslant 0$ et la fonction g est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

C 1. g est croissante sur $[0 ; +\infty]$ et $g(0) = \frac{1}{2}$ et $g(\alpha) = \alpha$, donc $g(x) \in [0 ; \alpha]$.

• $u_0 = 0 \in [0 ; \alpha]$ de plus si $u_n \in [0 ; \alpha]$, $u_{n+1} = g(u_n) \in [0 ; \alpha]$.

• Si $u_{n-1} \leqslant u_n$ alors $g(u_{n-1}) \leqslant g(u_n)$ soit $u_n \leqslant u_{n+1}$ et $u_1 = \frac{1}{2}$, donc $u_0 < u_1$. Il en résulte que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

2. La suite (u_n) est croissante et majorée par α, donc elle converge vers ℓ.

3. g est continue sur $[0 ; \alpha]$ donc $g(\ell) = \ell$ qui équivaut à $f(\ell) = 0$, donc $\ell = \alpha$.

4. $u_1 \approx 0{,}567\ 138$.

89 **1. a)** $f'(x) = e^x - 1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$		-2		$+\infty$

b) En vertu du théorème des valeurs intermédiaires, sur chacun des intervalles $]-\infty ; 0[$ et $]0 ; +\infty[$, $f(x) = 0$ admet une unique solution.

c) $f(0) = -2$ et $f(2) \approx 7{,}3 > 0$, donc $f(0) \times f(2) < 0$: la solution positive appartient à $]0 ; 2[$.

2. a) Affichage : 1,5 et 1,6.

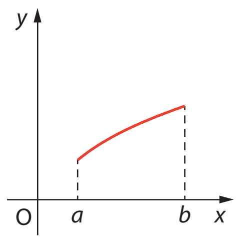
b) La solution positive de $f(x) = 0$ appartient à $]1{,}5 ; 1{,}6[$.

c)

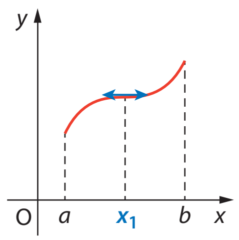
```
y reçoit 1
Tant que y > 0
x reçoit x – h
```

EXERCICES Pour aller plus loin (page 132)

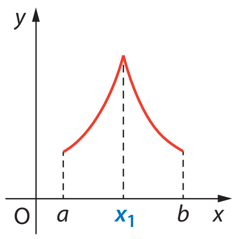
90 **1.** (P) $\Rightarrow$ (Q) et (Q) $\Rightarrow$ (P) sont des propositions fausses car on ne précise pas l'appartenance de k à $[f(a) ; f(b)]$.



2. (P) $\Rightarrow$ (Q) est une proposition fausse. Exemple :



(Q) $\Rightarrow$ (P) est une proposition fausse. Exemple :



3. (P) $\Rightarrow$ (Q) est vraie.

(Q) $\Rightarrow$ (P) est faux. Exemple : $f : x \mapsto x\sqrt{x}$ est dérivable en 0 mais $x \mapsto \sqrt{x}$ ne l'est pas.

91 **1.** I a pour coordonnées $(1 ; 0)$ et $H(x ; 0)$, donc $\overrightarrow{HI}$ a pour coordonnées $(1 - x ; 0)$, et $IH = 1 - x$ car $x \in [-1 ; 1]$.

De plus, $MH^2 = OM^2 - OH^2 = 1 - x^2$ donc $MH = \sqrt{1 - x^2}$.

Ainsi, aire (MNI) $= (1 - x)\sqrt{1 - x^2}$.

2. a) $\mathcal{T}(h) = \dfrac{f(-1 + h) - f(-1)}{h} = \dfrac{(2 - h)\sqrt{2h - h^2}}{h}$, $h > 0$,

soit $\mathcal{T}(h) = \dfrac{(2 - h)\sqrt{2 - h}}{\sqrt{h}}$. $\lim\limits_{h \to 0^+} \mathcal{T}(h) = +\infty$,

donc f n'est pas dérivable en $x = -1$.

On pose $x = 1 - h$, $h > 0$.

$$\mathcal{T}'(h) = \frac{f(1 - h) - f(-1)}{h} = \frac{h\sqrt{2h - h^2}}{h} = \sqrt{2h - h^2}.$$

$\lim\limits_{h \to 0^+} \mathcal{T}(h) = 0$, donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$.

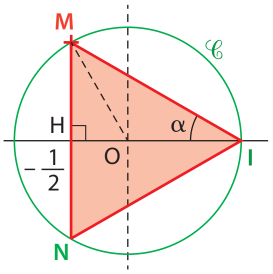
b) $f'(x) = -\sqrt{1 - x^2} + \dfrac{(1 - x)(-x)}{\sqrt{1 - x^2}} = \dfrac{-1 + x^2 + x^2 - x}{\sqrt{1 - x^2}}$

$= \dfrac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1 - x^2}}$ avec $x \in]-1 ; 1[$.

Sur l'intervalle $]-1 ; 1[$, on a $f'(x) = 0$ pour $x = -\frac{1}{2}$.

x	-1		$-\frac{1}{2}$		1
f'	‖	$+$	0	$-$	
f	0		$\frac{3\sqrt{3}}{4}$		0

3. a) L'aire du triangle est maximale pour $x = -\dfrac{1}{2}$.



b) $MH = \sqrt{1 - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$IH = \dfrac{3}{2}$ donc $\tan \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$\alpha = 30°$

donc $\widehat{MIN} = \widehat{NIM} = 2\alpha = 60°$.

Le triangle IMN est équilatéral.

92 **1.** $\cos\theta = \dfrac{h}{AS}$ or $AS = \sqrt{OA^2 + OS^2} = \sqrt{h^2 + 9}$.

Donc l'intensité est proportionnelle à $\dfrac{\cos\theta}{AS^2}$,

soit à $\dfrac{h}{(h^2+9)\sqrt{h^2+9}}$.

2. $f'(x) = \dfrac{(x^2+9)\sqrt{x^2+9} - x \times 3x\sqrt{x^2+9}}{(x^2+9)^3}$

$= \dfrac{\sqrt{x^2+9}\,[9 - 2x^2]}{(x^2+9)^3}$.

x	0		$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		↗		↘	

Donc $f(x)$ est maximum pour $x = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

3. Ainsi, pour $h = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ m, l'éclairement est maximum.

93 **1. a)** Si f est une fonction définie et dérivable sur I telle que, pour tout x de I, $f(x) > 0$, la fonction $g = f^2$ a pour dérivée $2f'f = g'$.
Comme pour tout x de I $f(x) > 0$, f' et g' ont le même signe et f et g varient dans le même sens.
On peut donc dire que « AM est minimal » équivaut à « AM² est minimal ».

b) $AM^2 = (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 = (x-1)^2 + \left(\dfrac{1}{x} + 1\right)^2$

soit $d(x) = x^2 - 2x + 2 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ avec $x > 0$.

c) $d'(x) = 2x - 2 - \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{2x^4 - 2x^3 - 2x - 2}{x^3}$

$= \dfrac{2[x^4 - x^3 - x - 1]}{x^3}$.

On pose $f(x) = x^4 - x^3 - x - 1$.

2. a) $(x-1)(4x^2 + x + 1) = 4x^3 - 4x^2 + x^2 - x + x - 1$

$= 4x^3 - 3x^2 - 1$.

b) $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 1 = (x-1)(4x^2 + x + 1)$

Or pour tout $x > 0$, $4x^2 + x + 1 = 0$.

x	0		1		α	$+\infty$
f'		$-$	0	$+$		
f	-1	↘	-2	↗	0	$+\infty$

3. a) Pour tout x de $[0\,;\,1]$, $f(x) < 0$.
$f(1) = -2$, f est croissante strictement sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ qui a pour image $]-2\,;\,+\infty[$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe α unique de l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ tel que : $f(x) = 0$.

b) $1{,}61 \leqslant \alpha \leqslant 1{,}62$.

4.

x	0		α		$+\infty$
d'	‖	$-$	0	$+$	
d	‖ $+\infty$	↘	$d(\alpha)$	↗	$+\infty$

Ainsi, pour $x = \alpha$ la distance AM est minimale.

5. M_0 a pour coordonnées $\left(\alpha\,;\,\dfrac{1}{\alpha}\right)$ et la tangente en M_0 à $\mathscr{C}$ a pour coefficient directeur $-\dfrac{1}{\alpha^2}$ et pour vecteur directeur $\vec{u}\left(1\,;\,-\dfrac{1}{\alpha^2}\right)$. Or $\overrightarrow{AM_0}\left(\alpha - 1\,;\,\dfrac{1}{\alpha} + 1\right)$.

$\vec{u}.\overrightarrow{AM_0} = \alpha - 1 - \dfrac{1}{\alpha^3} - \dfrac{1}{\alpha^2} = \dfrac{\alpha^4 - \alpha^3 - \alpha - 1}{\alpha^3} = \dfrac{f(\alpha)}{\alpha^3}$.

Or $f(\alpha) = 0$ donc $\vec{u}.\overrightarrow{AM_0} = 0$ et ainsi la tangente en M_0 est perpendiculaire à (AM_0).

94 **1. a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$; $\lim\limits_{n\to-\infty} f_n(x) = 0$.

b) $f_n'(x) = \dfrac{e^x(x+1) - ne^x}{(x+1)^{n+1}} = \dfrac{e^x(x+1-n)}{(x+1)^{n+1}}$.

Si n est pair

x	$-\infty$		-1		$n-1$		$+\infty$
f'		$+$	‖	$-$	0	$+$	
f	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\dfrac{e^{n-1}}{n^n}$	↗	$+\infty$

Si n est impair

x	$-\infty$		-1		$n-1$		$+\infty$
f'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\dfrac{e^{n-1}}{n^n}$	↗	$+\infty$

2. Le point $(0\,;\,1)$ est commun à toutes les courbes.

3. $f_n(x) - n f_{n+1}(x) = \dfrac{e^x}{(x+1)^n} - \dfrac{ne^x}{(x+1)^{x+1}}$

$= \dfrac{(x+1)e^x - ne^x}{(x+1)^{n+1}} = f_n'(x)$.

95 **1. a)** $f^{(1)}(x) = (2 - 4x - 2)e^{2x} = -4xe^{2x}$.

$f^{(2)}(x) = (-4 - 8x)e^{2x}$.

$f^{(3)}(x) = (-8 - 16x - 8)e^{2x} = (-16 - 16x)e^{2x}$.

b) Si $n = 1$, $f^{(1)}(x) = 2(-2x)e^{2x} = -4x\,e^{2x}$.

Donc pour $n = 1$ la proposition est vraie.

Si $f^{(n)}(x) = 2^n(1 - n - 2x)e^{2x}$ alors

$f^{(n+1)}(x) = 2^n[2 - 2n - 4x - 2]e^{2x}$

$= 2^n[-2n - 4x]e^{2x}$

$= 2^{n+1}(-n - 2x)e^{2x}$.

Donc si la proposition est vraie pour n, elle est vraie pour $n+1$. En conclusion elle est vraie pour tout n non nul.

2. a) $f^{(n+1)}(x) = 2^{n+1}(-n-2x)e^{2x}$,

donc $f^{(n+1)}(x) = 0$ pour $x = -\dfrac{n}{2}$.

Ainsi M_n a pour coordonnées $\left(-\dfrac{n}{2}\ ;\ 2^n e^{-n}\right)$.

b) $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ et $x_{n+1} - x_n = \dfrac{-(n+1)}{2} + \dfrac{n}{2} = -\dfrac{1}{2}$.

Donc la suite x_n est une suite arithmétique de premier terme $-\dfrac{1}{2}$ et de raison $-\dfrac{1}{2}$.

c) $y_n = 2^n e^{-n}$; $y_{n+1} = 2^{n+1} e^{-n-1}$.

Donc $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} = \dfrac{2^{n+1} e^{-n} e^{-1}}{2^n e^{-n}} = \dfrac{2}{e}$ et $y_1 = \dfrac{2}{e}$.

On en déduit que la suite (y_n) est une suite géométrique de premier terme $\dfrac{2}{e}$ et de raison $\dfrac{2}{e}$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} (y_n) = 0$.

96 **A 1.** $g'(x) = e^x - (x+1)e^x = -xe^x$.

x	0	1	α	2	$+\infty$
g'			–		
g	2 ↘	1 ↘	0 ↘	$1-e^2$ ↘	$-\infty$

2. a) et **b)** D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe α unique tel que $g(\alpha) = 0$, avec $1 < \alpha < 2$

$$1{,}27 < \alpha < 1{,}28.$$

c) $g(\alpha) = 0$ équivaut à $e^{\alpha}(1-\alpha) = -1$, soit

$$e^{\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

B 1. Il semble que B soit le point de la courbe correspondant au maximum de la fonction f.

Calculons $f'(x) = \dfrac{4(e^x+1) - 4xe^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{4g(x)}{(e^x+1)^2}$.

Donc $f'(x) = 0$ pour $g(x) = 0$ soit $x = \alpha$.

x	0		α		$+\infty$
f'		+	0	–	
f		↗	$f(\alpha)$	↘	

Ainsi f atteint son maximum pour $x = \alpha$.

2. Il semble que lorsque $x = \alpha$ l'aire est maximale.

M a pour coordonnées $\left(x\ ;\ \dfrac{4}{e^x+1}\right)$ avec $x > 0$.

Donc P a pour coordonnées $(x\ ;\ 0)$ et $Q\left(0\ ;\ \dfrac{4}{e^x+1}\right)$.

Donc aire (OPMQ) $= \dfrac{4x}{e^x+1} = f(x)$.

L'aire est maximale pour $x = \alpha$.

3. $h'(x) = \dfrac{-4e^x}{(e^x+1)^2}$. Si M a pour abscisse m alors la tangente en M a pour vecteur directeur $\vec{u}\left(1\ ;\ \dfrac{-4e^m}{(e^m+1)^2}\right)$ et $\overrightarrow{PQ}$ a pour coordonnées $\left(-m\ ;\ \dfrac{4}{e^m+1}\right)$.

Si $m = \alpha$ alors $e^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$, donc $\vec{u}$ a pour coordonnées $\left(1\ ;\ -\dfrac{4(\alpha-1)}{\alpha}\right)$ et $\overrightarrow{PQ}$ a pour coordonnées $(-\alpha\ ;\ 4(\alpha-1))$.

Il en résulte que $\overrightarrow{PQ} = -\alpha\vec{u}$. Ainsi la tangente en M est parallèle à (PQ).

4. Le point de coordonnées $\left(1\ ;\ \dfrac{4}{e+1}\right)$ est le seul point commun aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_h$. Or $g(1) = e - e + 1 = 1 \neq \dfrac{4}{e+1}$, donc les trois courbes n'ont pas de point commun.

97 **1.** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{X\to-\infty} (1+X)e^{-X} = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} (1+X)e^{-X} = 0$.

f n'est pas continue en $x = 0$.

2. $f'(x) = \dfrac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}}$

donc $f'(x)$ sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et sur $]0\ ;\ +\infty[$ est du signe de x.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		–	‖	+	
f	1	↘	$-\infty$ ‖ 0	↗	1

Donc pour tout réel x, $f(x) \leqslant 1$.

CHAPITRE

5 Fonction logarithme népérien

ACTIVITÉS (page 136)

Activité 1

1 **a)** $2 \times 3 = 6$ et $0{,}693\ 15 + 1{,}098\ 61 = 1{,}791\ 76$.
$3 \times 4 = 12$ et $1{,}098\ 61 + 1{,}386\ 29 = 2{,}484\ 90$.
b) 10 associé à $0{,}693\ 15 + 1{,}609\ 44 = 2{,}302\ 59$;
15 associé à $1{,}098\ 61 + 1{,}609\ 44 = 2{,}708\ 05$;
20 associé à $1{,}386\ 29 + 1{,}609\ 44 = 2{,}995\ 73$.
c) 1 doit être associé à 0.

2 **a)** Le quotient (à gauche) doit être associé à la différence (à droite).
b) Ainsi à 7 (= 14/2) doit être associée la différence
$$2{,}639\ 06 - 0{,}693\ 15 = 1{,}945\ 61.$$
À 1,5 (= 3/2) doit être associée la différence
$$1{,}098\ 61 - 0{,}693\ 15 = 0{,}405\ 46.$$
À 0,5 (= 1/2) doit être associée la différence
$$0 - 0{,}693\ 15 = -\ 0{,}693\ 15.$$
À 0,1 (= 1/10) doit être associé la différence
$$0 - 2{,}302\ 59 = -\ 2{,}302\ 59.$$

3

1	0
2	0,693 15
4	1,386 29
8	2,07 944
16	2,772 59

Les termes de la première colonne sont en progression géométrique de raison 2.
Les termes de la deuxième colonne sont (aux arrondis près) en progression arithmétique de raison le nombre associé à 2.

4

9	2,197 22
18	2,890 37

5 **a)** Le logarithme du carré d'un nombre est le double du logarithme de ce nombre.
b)

25	$2 \times 1{,}609\ 44 = 3{,}218\ 88$
100	$2 \times 2{,}302\ 59 = 4{,}605\ 18$
0,01	$2 \times (-\ 2{,}302\ 59) = -\ 4{,}605\ 18$
0,25	$2 \times (-\ 0{,}693\ 15) = -1{,}386\ 29$

6 **a)** Le logarithme de la racine carrée d'un nombre est la moitié du logarithme de ce nombre.
b)

$\sqrt{2}$	$0{,}693\ 15 : 2 = 0{,}346\ 57$
$\sqrt{5}$	$1{,}609\ 44 : 2 = 0{,}804\ 72$

Activité 2

1 **a)** On peut conjecturer que les points A et B sont symétriques par rapport à Δ.
Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}\,;\dfrac{3}{2}\right)$:
il appartient à la droite Δ d'équation $y = x$.
De plus le point O est équidistant de A et de B :
$$OA^2 = 2^2 + 1^2 = 5 \text{ et } OB^2 = 1^2 + 2^2 = 5.$$
O et I sont deux points de Δ médiatrice de [AB].
A et B sont bien symétriques par rapport à Δ.
b) Le milieu K de [MN] a pour coordonnées
$\left(\dfrac{x+y}{2}\,;\dfrac{x+y}{2}\right)$: il appartient à Δ comme le point 0 qui est équidistant de M et de N ($OM^2 = ON^2 = x^2 + y^2$).
Ainsi Δ est la médiatrice de [MN] : M et N sont bien symétriques par rapport à Δ.

2 **a)** f est définie sur $]0\,;+\infty[$.
Le point de coordonnées $(1\,; f(1))$ est le symétrique du point de coordonnées $(f(1)\,;1)$.
$f(1)$ est donc le nombre qui a pour image 1 par la fonction exponentielle donc $f(1) = 0$.
b) $M(a\,; e^a)$ donc $M'(e^a\,; a)$ et $f(e^a) = a$.
c) $b > 0$. $N(b\,; f(b))$ donc $N'(f(b)\,; b)$ et $e^{f(b)} = b$.
d) $\forall x \in \mathbb{R}, f(e^x) = x$ et $\forall x > 0, e^{f(x)} = x$.

3 **a)** On peut conjecturer :

- la stricte croissance de f sur $I =]0\,;+\infty[$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$.

b) $g'(x) = f'(x) \times e^{f(x)} = x f'(x)$. Or pour tout x de I, $g(x) = x$ donc $g'(x) = 1$ et $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

$\forall x \in I$, $f'(x) > 0$. La conjecture concernant la stricte croissance de f est confirmée.

PROBLÈME OUVERT

Notons n le nombre de chiffres de 2012^{2012}.

10^n est le plus petit nombre de $(n+1)$ chiffres

donc $10^{(n-1)} < 2012^{2012} < 10^n$

$$\Leftrightarrow (n-1)\ln(10) < 2012\ln(2012) < n\ln(10)$$

$$\Leftrightarrow n-1 < \frac{2012\ln(2012)}{\ln(10)} < n$$

ce qui équivaut à :

$$\frac{2012\ln(2012)}{\ln(10)} < n < \frac{2012\ln(2012)}{\ln(10)} + 1.$$

Comme $\dfrac{2012\ln(2012)}{\ln(10)} \approx 6\,646{,}89$, on obtient :

$$n = 6\,647.$$

EXERCICES Application (page 142)

1 a) $\ln(125) = \ln(5^3) = 5\ln(3)$.

b) $\ln\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(5) - \ln(5) = -\dfrac{1}{2}\ln(5)$.

c) $\ln\left(\dfrac{1}{625}\right) = \ln(5^{-4}) = -4\ln(5)$.

2 **a)** $A = \ln(3) + \ln\left(\dfrac{1}{9}\right) = \ln(3) - 2\ln(3) = -\ln(3)$.

b) $B = 3\ln\left(\sqrt{2}\right) - \dfrac{1}{2}\ln(8) = \dfrac{3}{2}\ln(2) - \dfrac{3}{2}\ln(2) = 0$.

c) $C = \ln\left(\sqrt{27}\right) + 2\ln(2) - \ln(9) - \ln(8)$

$$= \frac{3}{2}\ln(3) + 2\ln(2) - 2\ln(3) - 3\ln(2)$$

$$= -\frac{\ln(3)}{2} - \ln(2).$$

3 **a)** $A = 5 - \ln\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = 5 + 2 = 7$.

b) $B = \ln\left(e\sqrt{e^3}\right) = \ln(e) + \ln\left(\sqrt{e^3}\right) = 1 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$.

c) $C = \ln\left(\dfrac{\sqrt{e}}{e^{-2}}\right) = \ln\left(\sqrt{e}\right) - \ln\left(e^{-2}\right) = \dfrac{1}{2} + 2 = \dfrac{5}{2}$.

4 **a)** $A = 3\ln(x) - 2\ln(y) = \ln\left(\dfrac{x^3}{y^2}\right)$.

b) $B = \ln(4x) + \ln\left(\dfrac{y}{16}\right) + 1 = \ln\left(\dfrac{xy}{4}\right) + \ln(e)$

$$= \ln\left(\frac{exy}{4}\right).$$

5 **1.** Le nombre x doit vérifier les conditions :

$\left[\dfrac{1+x}{1-x} > 0 \text{ et } 1+x > 0 \text{ et } 1-x > 0\right]$ c'est-à-dire

$\left[-1 < x < 1 \text{ et } x > -1 \text{ et } x < 1\right]$ donc $x \in \left]-1;1\right[$.

Ainsi pour tout x de $]-1\,;1[$,

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x).$$

2. a) Dans l'intervalle $\left]-1;1\right[$, d'après **1.**, l'inéquation $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) < \ln(1+x)$ s'écrit :

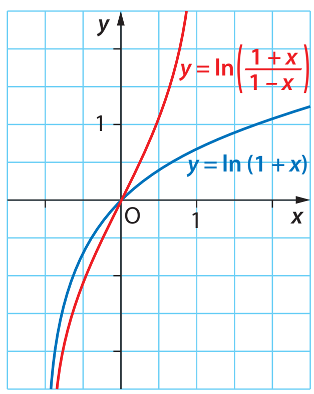
$$\ln(1+x) - \ln(1-x) < \ln(1+x) \text{ soit } \ln(1-x) > 0.$$

Elle équivaut à $\ln(1-x) > \ln(1)$ puis $1 - x > 1$,

donc $x < 0$.

D'où l'ensemble des solutions : $\mathscr{S} = \left]-1;0\right[$.

b) Sur $]-1\,;0[$, la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ est au-dessous de la courbe de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$; *a contrario*, sur $[0;1[$ elle est au-dessus.



6 **1.** Sur la calculatrice la courbe de f est confondue avec l'axe des abscisses.

2. On conjecture que f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) + \ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$$
$$= \ln\left[\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right]$$
$$= \ln(x^2+1-x^2) = \ln(1) = 0.$$

7 **1.** $\forall x \in \left]0;+\infty\right[,\ f(x)-g(x) = [\ln(x)]^2 - \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$
$$= [\ln(x)]^2 + \ln(x)$$
$$= \ln(x)[\ln(x)+1].$$

2. a) Sur $\left]0;+\infty\right[$, l'inéquation $f(x)-g(x)<0$ s'écrit $\ln(x)[\ln(x)+1]<0$.

On étudie le signe de ce produit sur $\left]0;+\infty\right[$.

$\ln(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geqslant \ln(1) \Leftrightarrow x \geqslant 1$.

$\ln(x)+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geqslant \ln(e^{-1}) \Leftrightarrow x \geqslant e^{-1}$.

D'où le tableau de signes du produit :

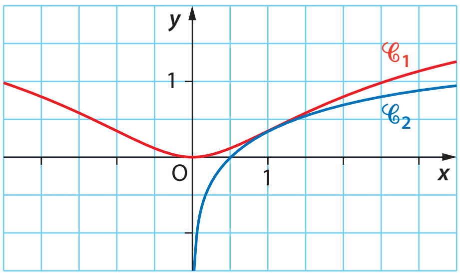
x	0		e^{-1}		1		$+\infty$
$\ln(x)$	||	$-$	|	$-$	0	$+$	
$\ln(x)+1$	||	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)-g(x)$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi : $f(x)-g(x)<0 \Leftrightarrow e^{-1}<x<1$.

D'où l'ensemble des solutions : $\mathcal{S} = \left]e^{-1};1\right[$.

b) Sur $\left]e^{-1};1\right[$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$; sur $\left]0;e^{-1}\right]$ ou sur $\left[1;+\infty\right[$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$.

8 **1.** On conjecture que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont un seul point commun et donc sont tangentes au point A d'abscisse 1.



2. On étudie l'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $x^2+1>0$ donc la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction $g : x \mapsto \ln\sqrt{2x}$ est définie sur $\left]0;+\infty\right[$.

L'équation $f(x)=g(x)$ est donc définie sur $\left]0;+\infty\right[$.

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = \sqrt{2x} \Leftrightarrow x^2+1 = 2x$

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0$

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x=1$.

$\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont un seul point commun, celui d'abscisse 1, et donc sont tangentes en $A\left(1;\dfrac{1}{2}\ln(2)\right)$.

9 $\forall a>1,\ \ln(a)+2\ln\left(\sqrt{a}-1\right) = \ln\left[a\left(\sqrt{a}-1\right)^2\right]$
$$= \ln\left[\left(\sqrt{a}\right)^2\left(\sqrt{a}-1\right)^2\right]$$
$$= \ln\left[\left(a-\sqrt{a}\right)^2\right]$$
$$= 2\ln\left(a-\sqrt{a}\right).$$

10 **1.** $\forall x \in \left]-1;+\infty\right[$:

$f(x) = \ln(1+x)$ et $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$;

$g(x) = -\dfrac{x^2}{2}+x$ et $g'(x) = -x+1$.

Pour $x=0$, $f(0)=g(0)=0$ et $f'(0)=g'(0)=1$.

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont le point O(0 ; 0) en commun et les tangentes respectives en O ont le même coefficient directeur 1, donc ces tangentes sont confondues.

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont pour tangente commune $T_0 : y = x$.

2. $\forall x>-1,\ \varphi(x) = f(x)-g(x)$.

a) $\forall x>-1,\ \varphi'(x) = f'(x)-g'(x) = \dfrac{1}{x+1}+x-1$.

$\varphi'(x) = \dfrac{1+(x-1)(x+1)}{x+1} = \dfrac{x^2}{x+1}$.

b) $\forall x>-1,\ f'(x) \geqslant 0$.

D'où le tableau de variation de φ :

x	-1		0		$+\infty$
φ'	||	$+$	0	$+$	
φ	||	↗	0	↗	

c) Sur $]-1\,;0[$, $\varphi(x)<0$ donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$.
Sur $[0;+\infty[$, $\varphi(x)\geqslant 0$ donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$.

11 **1.** Sur $\left]0;+\infty\right[$:

- $\ln(x)=1 \Leftrightarrow x=e$ donc $x_A = e$.
- $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=1 \Leftrightarrow \ln(x)=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1}$ donc $x_B=e^{-1}$.

2. a) On note f et g les fonctions définies sur $\left]0;+\infty\right[$ par $f(x)=\ln(x)$ et $g(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.

$T_A : y = f'(x_A)(x-x_A)+f(x_A)$ avec

$f(x_A) = \ln(e) = 1$ et $f'(x_A) = \dfrac{1}{e} = e^{-1}$.

$T_A : y = e^{-1}(x-e)+1$ soit $T_A : y = e^{-1}x$.

$\Delta_B : y = g'(x_B)(x-x_B)+g(x_B)$ avec

$g(x_B) = -\ln\left(e^{-1}\right) = 1$ et $g'(x_B) = -\dfrac{1}{e^{-1}} = -e$.

$\Delta_B : y = -e(x-e^{-1})+1$ soit $\Delta_B : y = -ex+2$.

b) T_A a pour vecteur directeur $\vec{u}_A(1;e^{-1})$; Δ_B a pour vecteur directeur $\vec{v}_B(1;-e)$.

Or $\vec{u}_A \cdot \vec{v}_B = 1 \cdot 1 + e^{-1} \cdot (-e) = 0$ donc $\vec{u}_A \perp \vec{v}_B$.

Ainsi T_A et Δ_B sont perpendiculaires.

3. Dans le cas général, pour tout b de $\mathbb{R}$, l'abscisse du point de $\mathcal{C}_1$ d'ordonnée b est telle que $\ln(x)=b$ donc $x=e^b$. De même, l'abscisse du point de $\mathcal{C}_2$ d'ordonnée b est telle que $-\ln(x)=b$ donc $x=e^{-b}$.

T a pour coefficient directeur $f'(e^b) = \dfrac{1}{e^b} = e^{-b}$ donc pour vecteur directeur $\vec{u}(1;e^{-b})$; Δ a pour coefficient directeur $g'(e^{-b}) = -\dfrac{1}{e^{-b}} = -e^b$ et donc pour vecteur directeur $\vec{v}(1;-e^b)$.

Alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1 \cdot 1 + e^{-b} \cdot (-e^b) = 0$ donc $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Ainsi T et Δ sont perpendiculaires.

12 **1. a)** T : $y = f'(m)(x-m) + f(m)$ avec

$$f(m) = 2\ln(m) \text{ et } f'(m) = \frac{2}{m}.$$

Donc T : $y = \frac{2}{m}x - 2 + 2\ln(m)$.

b) L'ordonnée de A est l'ordonnée à l'origine de T donc $y_A = -2 + 2\ln(m)$.

Ainsi A a pour coordonnées $(0; -2 + 2\ln(m))$.

2. a) $A = O \Leftrightarrow -2 + 2\ln(m) = 0$

$$\Leftrightarrow \ln(m) = 1 \Leftrightarrow m = \mathrm{e}.$$

Ainsi A est en O si et seulement si $m = \mathrm{e}$.

b) $\text{aire}(ABM) = \frac{1}{2}AB \cdot BM$

$$= \frac{1}{2} \cdot [2\ln(m) - (-2 + 2\ln(m))] \cdot m$$

$$= m$$

Ainsi l'aire du triangle ABM est la fonction identique $m \mapsto m$ définie sur $]0;+\infty[$.

13 **1. a)** $\forall x > 0$, $\varphi(x) = \sqrt{x} - \ln(x)$.

φ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-2}{2x}.$$

$\varphi'(x)$ a même signe que le numérateur $\sqrt{x} - 2$:

$$\varphi'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geqslant 2 \Leftrightarrow x \geqslant 4.$$

D'où le tableau de variation de φ :

x	0		4		$+\infty$
φ'	‖	$-$	0	$+$	
φ	‖	↘	$2-2\ln(2)$	↗	

b) Pour tout $x > 0$, $\varphi(x) \geqslant 2 - 2\ln(2) > 0$.

Ainsi $g(x) - f(x) > 0$ donc $\sqrt{x} > \ln(x)$.

2. a) Pour tout $x > 1$, $\ln(x) > 0$, d'où l'encadrement $0 < \ln(x) < \sqrt{x}$. Par division par x, on obtient :

$$0 < \frac{\ln(x)}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x} \text{ soit } 0 < \frac{\ln(x)}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

b) Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ donc d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

14 **1.** $\forall x > 0$, $f(x) = x + \ln(x)$.

f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$; ainsi $f'(x) > 0$.

D'où le tableau de variation de f :

x	0		α_n		$+\infty$
f'	‖	$+$			
f	‖ $-\infty$	↗	n	↗	$+\infty$

Remarque. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$; tout entier naturel n appartient à l'intervalle image $]-\infty;+\infty[$, donc l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution α_n dans $]0;+\infty[$.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on compare α_{n+1} et α_n :

si $\alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n$ alors, en raison de la stricte croissance de f sur $]0;+\infty[$, $f(\alpha_{n+1}) \leqslant f(\alpha_n)$ ce qui est impossible puisque $f(\alpha_{n+1}) = n+1$ et $f(\alpha_n) = n$; donc $\alpha_{n+1} > \alpha_n$.

La suite (α_n) est donc strictement croissante.

3. a) Pour tout nombre $x > 0$:

$f(x) \leqslant 2x - 1 \Leftrightarrow x + \ln(x) \leqslant 2x - 1 \Leftrightarrow \ln(x) \leqslant x - 1$.

Or la courbe de la fonction ln est située en dessous de n'importe laquelle de ses tangentes, en particulier en dessous de sa tangente au point d'abscisse 1, d'équation $y = x - 1$ (*cf.* exercice résolu C, page 144 du manuel).

Ainsi pour tout nombre $x > 0$, $\ln(x) \leqslant x - 1$ d'où

$$f(x) \leqslant 2x - 1.$$

b) Pour tout entier naturel n, $f(\alpha_n) \leqslant 2\alpha_n - 1$ soit $n \leqslant 2\alpha_n - 1$ donc $\alpha_n \geqslant \frac{n+1}{2}$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2} = +\infty$ donc par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$.

15 **a)** $\mathrm{e}^{2x-3} = 4 \Leftrightarrow 2x - 3 = \ln(4) \Leftrightarrow x = \frac{3+2\ln(2)}{2}$.

Ensemble des solutions : $\mathcal{S} = \left\{\frac{3+2\ln(2)}{2}\right\}$.

b) L'équation est définie sur l'intervalle $\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$.

$\ln(3x-1) = 2 \Leftrightarrow 3x - 1 = \mathrm{e}^2 \Leftrightarrow x = \frac{\mathrm{e}^2+1}{3}$.

Or $\frac{\mathrm{e}^2+1}{3} > \frac{1}{3}$ donc la valeur trouvée convient.

Ensemble des solutions : $\mathcal{S} = \left\{\frac{\mathrm{e}^2+1}{3}\right\}$.

16 **a)** $2\mathrm{e}^{2x-1} = \mathrm{e}^x \Leftrightarrow \ln(2\mathrm{e}^{2x-1}) = x$

$$\Leftrightarrow \ln(2) + 2x - 1 = x$$

$$\Leftrightarrow x = 1 - \ln(2).$$

Ensemble des solutions : $\mathcal{S} = \{1 - \ln(2)\}$.

b) Conditions : $[x + 2 > 0 \text{ et } x > 0]$. Donc $x > 0$.

L'équation est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

$\ln(x+2) = \ln(x) + 1 \Leftrightarrow x + 2 = \mathrm{e}^{\ln(x)+1} \Leftrightarrow x + 2 = \mathrm{e}x$

$$\Leftrightarrow (\mathrm{e}-1)x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{\mathrm{e}-1}.$$

Or $\frac{2}{\mathrm{e}-1} > 0$ donc la valeur trouvée convient.

Ensemble des solutions : $\mathcal{S} = \left\{\frac{2}{\mathrm{e}-1}\right\}$.

17 L'inéquation est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

On pose $X = \ln(x)$.

L'inéquation s'écrit $X^2 - 5X + 6 \geqslant 0$ donc dans $\mathbb{R}$, $X \leqslant 2$ ou $X \geqslant 3$.

L'inéquation initiale équivaut à :

$$\ln(x) \leqslant 2 \text{ ou } \ln(x) \geqslant 3$$

donc $x \leqslant \mathrm{e}^2$ ou $x \geqslant \mathrm{e}^3$.

Ensemble des solutions : $\mathcal{S} =]0;\mathrm{e}^2] \cup [\mathrm{e}^3;+\infty[$.

18 **a)** $e^{2x} + 6e^{x} - 12 < 0$.
On pose $X = e^{x}$.
L'inéquation s'écrit $X^2 + 6X - 12 < 0$ donc dans $\mathbb{R}$,
$$-3 - \sqrt{21} < X < -3 + \sqrt{21}.$$
Or $X = e^{x}$ doit être strictement positif, donc l'inéquation initiale équivaut à $e^{x} < -3 + \sqrt{21}$,
donc $x < \ln\left(-3 + \sqrt{21}\right)$.
Ensemble des solutions : $\mathcal{S} = \left]-\infty ; \ln\left(-3 + \sqrt{21}\right)\right[$.
b) $2e^{2x} - 4 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 2 \geqslant 0$
On pose $X = e^{x}$.
L'inéquation s'écrit $X^2 - 2 > 0$, soit
$\left(X + \sqrt{2}\right)\left(X - \sqrt{2}\right) > 0$ donc dans $\mathbb{R}$,
$X < -\sqrt{2}$ ou $X > \sqrt{2}$.
Or $X = e^{x}$ doit être strictement positif donc l'inéquation initiale équivaut à $e^{x} > \sqrt{2}$ donc $x > \dfrac{1}{2}\ln(2)$.
Ensemble des solutions : $\mathcal{S} = \left]\dfrac{1}{2}\ln(2) ; +\infty\right[$.

19 **a)** $e^{2x} + 3e^{x} + 2 = 0$.
On pose $X = e^{x}$.
L'équation s'écrit $X^2 + 3X + 2 = 0$ donc dans $\mathbb{R}$,
$$X = -1 \text{ ou } X = -2.$$
Or $X = e^{x}$ doit être positif, donc l'équation initiale n'a pas de solution.
Réponse : faux.
b) $[\ln(x)]^2 + \ln(x) \leqslant 0$.
L'inéquation est définie sur $]0 ; +\infty[$.
On pose $X = \ln(x)$.
L'inéquation s'écrit $X^2 + X \leqslant 0$ soit $X(X+1) \leqslant 0$.
Donc dans $\mathbb{R}$, $-1 \leqslant X \leqslant 0$.
Ainsi l'inéquation initiale équivaut à $-1 \leqslant \ln(x) \leqslant 0$ donc $e^{-1} \leqslant x \leqslant e^{0}$ soit $e^{-1} \leqslant x \leqslant 1$.
Réponse : vrai.
Remarque. Au lieu d'utiliser un changement de variable, une étude directe par factorisation et tableau de signes est également possible.
$$[\ln(x)]^2 + \ln(x) \leqslant 0 \text{ s'écrit } \ln(x)(\ln(x)+1) \leqslant 0.$$
On étudie le signe du produit sur $]0 ; +\infty[$:
$\ln(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$;
$\ln(x) + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geqslant -1 \Leftrightarrow x \geqslant e^{-1}$.
D'où le tableau de signes du produit :

x	0		e^{-1}		1		$+\infty$
$\ln(x)$	‖	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$\ln(x)+1$	‖	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$\ln(x)(\ln(x)+1)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi $\ln(x)(\ln(x)+1) \leqslant 0 \Leftrightarrow e^{-1} \leqslant x \leqslant 1$.

20 **a)** $0{,}7^{n} < 10^{-4} \Leftrightarrow n\ln(0{,}7) < -4\ln(10)$.
Or $\ln(0{,}7) < 0$ donc :
$$0{,}7^{n} < 10^{-4} \Leftrightarrow n > -\frac{4\ln(10)}{\ln(0{,}7)}.$$
Or $-\dfrac{4\ln(10)}{\ln(0{,}7)} \approx 25{,}82$ et n est un entier, donc $n \geqslant 26$.
Le plus petit entier solution est $n_0 = 26$.

b) $1{,}01^{n} \geqslant 10^{6} \Leftrightarrow n\ln(1{,}01) \geqslant 6\ln(10)$.
Or $\ln(1{,}01) > 0$ donc :
$$1{,}01^{n} \geqslant 10^{6} \Leftrightarrow n > \frac{6\ln(10)}{\ln(1{,}01)}.$$
$\dfrac{6\ln(10)}{\ln(1{,}01)} \approx 1388{,}45$ et n est un entier, donc $n \geqslant 1389$.
Le plus petit entier solution est $n_0 = 1389$.

21 $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{2n-1}$.
1. La suite (u_n) est à termes strictement positifs, donc pour étudier son sens de variation, il suffit de comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{e^{2n+1}}{e^{2n-1}} = e^2$ d'où $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.
Ainsi (u_n) est strictement croissante.
$\lim\limits_{n\to+\infty}(2n-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ donc
$\lim\limits_{n\to+\infty} e^{2n-1} = +\infty$. La suite (u_n) a pour limite $+\infty$.
2. $u_n \geqslant 10^{20} \Leftrightarrow e^{2n-1} \geqslant 10^{20} \Leftrightarrow 2n - 1 \geqslant 20\ln(10)$
$$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{1 + 20\ln(10)}{2}.$$
$\dfrac{1 + 20\ln(10)}{2} \approx 23{,}53$ et n est un entier, donc $n \geqslant 24$.
Le plus petit entier solution est $n_0 = 24$.

22 **1.** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2\ln(n) - n = n\left[2\dfrac{\ln(n)}{n} - 1\right]$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[2\dfrac{\ln(n)}{n} - 1\right] = -1$.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = e^{u_n}$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{u_n} = 0$.
La suite (v_n) a pour limite 0.

23 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n^{n}e^{-n}$ et $v_n = \ln(u_n)$.
1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln(n^{n}e^{-n}) = \ln(n^{n}) + \ln(e^{-n})$
$v_n = n\ln(n) - n = n(\ln(n) - 1)$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln(n) - 1) = +\infty$ donc
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty.$$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln(u_n)$ donc $u_n = e^{v_n}$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{v_n} = +\infty$.
Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

24 **1.** $\forall a > -1$, $g[f(a)] = e^{f(a)} - 1$
$= e^{\ln(1+a)} - 1 = 1 + a - 1 = a$.
$\forall b \in \mathbb{R}$, $f[g(b)] = \ln(1 + g(b)) = \ln(1 + e^{b} - 1)$
$= b$.
2. Pour tout a de $]-1 ; +\infty[$, et tout b de $\mathbb{R}$, on note M le point de coordonnées $(a ; b)$ et M' celui de coordonnées $(b ; a)$.
$M(a ; b) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow b = f(a) \Leftrightarrow g(b) = g[f(a)]$
$\Leftrightarrow g(b) = a$
$\Leftrightarrow M'(b ; a) \in \mathcal{C}_g$.
On sait que $M(a ; b)$ et $M'(b ; a)$ sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$ donc $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont symétriques par rapport à Δ.

25 $\forall x \in \left]0;+\infty\right[,\ f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$.

1. f est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$, et pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{1+x} \cdot x^2 - 2x\ln(1+x)}{x^4}$$

$$= \frac{\dfrac{x^2 - 2x(1+x)\ln(1+x)}{1+x}}{x^4}$$

$$= \frac{x - 2(1+x)\ln(1+x)}{(1+x)x^3} = \frac{g(x)}{(1+x)x^3}.$$

2. g est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$, et pour tout $x > 0$,

$$g'(x) = 1 - 2\left[\ln(1+x) + \cancel{(1+x)} \cdot \frac{1}{\cancel{1+x}}\right]$$

$$= -1 - 2\ln(1+x).$$

Pour tout $x > 0$, $\ln(1+x) > 0$ donc $g'(x) < 0$.

D'où le tableau de variation de g :

x	0	$+\infty$
g'	‖ $-$	
g	‖ 0 ↘	

Remarque. $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)\ln(1+x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$.

3. Le signe de $f'(x)$ sur $\left]0;+\infty\right[$ est celui de $g(x)$.

Or pour tout $x > 0$, $g(x) < 0$ donc $f'(x) < 0$.

D'où le tableau de variation de f :

x	0	$+\infty$
f'	‖ $-$	
f	‖ $+\infty$ ↘	0

Remarque. Les limites aux bornes de I ont été calculées dans l'exercice résolu F, page 148 du manuel.

26 $\forall x \in \left]0;+\infty\right[,\ f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2}$.

1. • Calcul de la limite en 0

On pose $X = x^2$. Ainsi $f(x) = \dfrac{\ln(X+1)}{X}$.

Or $\lim\limits_{x\to 0^+} X = 0^+$ et $\lim\limits_{X\to 0^+} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$.

• Calcul de la limite en $+\infty$

$$\forall x > 0,\ f(x) = \frac{\ln\left[x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\right]}{x^2};$$

$$f(x) = \frac{\ln(x^2) + \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2} = \frac{\ln(x^2)}{x^2} + \frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right).$$

On pose $U = x^2$.

Ainsi $f(x) = \dfrac{\ln(U)}{U} + \dfrac{1}{U} \cdot \ln\left(1+\dfrac{1}{U}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} U = +\infty$ et $\lim\limits_{U\to+\infty} \dfrac{\ln(U)}{U} = 0$, $\lim\limits_{U\to+\infty} \dfrac{1}{U} = 0$,

$\lim\limits_{U\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{U}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2. a) f est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ et pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\dfrac{2x}{x^2+1} \cdot x^2 - 2x\ln(x^2+1)}{x^4}$$

$$= \frac{\dfrac{2x^3 - 2x(x^2+1)\ln(x^2+1)}{x^2+1}}{x^4}$$

$$= \frac{2\left[x^2 - (x^2+1)\ln(x^2+1)\right]}{x^3(x^2+1)}.$$

b) On pose $g(x) = x^2 - (x^2+1)\ln(x^2+1)$.

g est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$, et pour tout $x > 0$,

$$g'(x) = 2x - \left(2x\ln(x^2+1) + \cancel{(x^2+1)} \cdot \frac{2x}{\cancel{x^2+1}}\right)$$

$$= -2x\ln(x^2+1).$$

Pour tout $x > 0$, $\ln(x^2+1) > 0$ donc $g'(x) < 0$.

3. Le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur et donc de $g(x)$. Ainsi pour tout $x > 0$, $f'(x) < 0$.

D'où le tableau de variation de f :

x	0	$+\infty$
f'	‖ $-$	
f	‖ 1 ↘	0

EXERCICES Activités de recherche (page 150)

31 **Placements à intérêts composés**

• ***Les outils***

– Suites géométriques.

– Fonction logarithme népérien.

• ***Les objectifs***

– Mettre en équation un problème de type financier.

– Résoudre une inéquation dont l'inconnue est en exposant.

1. a) Pour tout naturel n, $v_{n+1} = v_n + 0{,}03v_n = 1{,}03v_n$.

Donc la suite (v_n) est géométrique, de raison 1,03 et de premier terme $v_0 = 1\ 000$.

b) $v_n = 1\ 000 \times 1{,}03^n$ pour tout naturel n.

2. On cherche n naturel tel que $v_n \geqslant 1\ 500$,

c'est-à-dire $1\ 000 \times 1{,}03^n \geqslant 1\ 500$.

a) Cela équivaut à $\ln(1\ 000 \times 1{,}03^n) \geqslant \ln(1\ 500)$,

c'est-à-dire $\ln(1\ 000) + n\ln(1{,}03) \geqslant \ln(1\ 500)$.

On en déduit $n \geqslant \dfrac{\ln(1\ 500) - \ln(1\ 000)}{\ln(1{,}03)}$ car $\ln(1{,}03) > 0$.

Or $\dfrac{\ln(1\ 500) - \ln(1\ 000)}{\ln(1{,}03)} = \dfrac{\ln(1{,}5)}{\ln(1{,}03)} \approx 13{,}7$.

b) C'est donc à partir de la 14e année que la valeur acquise dépassera 1 500 €.

32 Tangentes communes

• ***Les outils***

– Tangente à une courbe.

– Théorème des valeurs intermédiaires.

• ***Les objectifs***

– Traduire analytiquement un problème géométrique.

– Résoudre une équation par l'Analyse.

1. L'observation des deux courbes suggère qu'il y a deux tangentes communes.

2. T_1 a pour équation réduite $y = e^a(x - a) + e^a$. T_2 a pour équation réduite $y = \dfrac{1}{b}(x - b) + \ln(b)$.

3. a) T_1 et T_2 sont confondues si et seulement si elles ont même coefficient directeur et même ordonnée à l'origine :

$$e^a = \frac{1}{b} \text{ et } e^a(1 - a) = \ln(b) - 1.$$

b) L'égalité $e^a = \dfrac{1}{b}$ équivaut à $a = -\ln(b)$. Donc le système (S) équivaut à

$$e^a = \frac{1}{b} \text{ et } e^a(1 - a) = -a - 1.$$

4. Posons $f(x) = e^x - \dfrac{x+1}{x-1}$.

a) $f'(x) = e^x + \dfrac{2}{(x-1)^2} > 0$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$-$	‖	$+$	
f	-1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

b) Donc f s'annule pour deux valeurs a_1 et a_2 telles que $a_1 < 1 < a_2$.

$$a_1 \approx -1{,}543 \text{ et } a_2 \approx 1{,}543.$$

c) Les solutions du système (S) sont donc les couples $(a_1 ; e^{-a_1})$ et $(a_2 ; e^{-a_2})$.

$$b_1 = e^{-a_1} \approx 4{,}68 \text{ et } b_2 = e^{-a_2} \approx 0{,}214.$$

Remarque. a_1 et a_2 sont opposés, b_1 et b_2 sont inverses, les deux tangentes communes sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

c) Il y a donc deux tangentes communes :

• l'une est tangente à $\mathscr{C}_1$ en (a_1, b_2) et à $\mathscr{C}_2$ en (b_1, a_2) ;

• l'autre est tangente à $\mathscr{C}_1$ en (a_2, b_1) et à $\mathscr{C}_2$ en (b_2, a_1).

33 Narration de recherche

Dire qu'un nombre entier naturel x s'écrit avec n chiffres signifie que $10^{n-1} \leqslant x < 10^n$.

Autrement dit $n - 1 \leqslant \log(x) < n$,

c'est-à-dire $n \leqslant 1 + \log(x) < n + 1$.

n est donc la partie entière de $1 + \log(x)$.

Si $x = 2^{43\ 112\ 609}$, $\log(x) = 43\ 112\ 609 \times \log(2) \approx 12\ 971\ 888{,}5$.

Donc x s'écrit avec 12 971 889 chiffres.

Le nombre $x - 1$ s'écrit avec le même nombre de chiffres, car x n'est pas une puissance de 10 (il n'est pas divisible par 5).

34 Narration de recherche

Notons K le capital initial, v_n sa valeur au bout de n années.

Le taux d'intérêt annuel i est égal à $\dfrac{r}{100}$.

Pour tout naturel n, $v_{n+1} = (1 + i)v_n$.

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $1 + i$ et de premier terme $v_0 = K$.

Donc pour tout naturel n, $v_n = K(1 + i)^n$.

On cherche n tel que $v_n \geqslant 2K$, c'est-à-dire $(1 + i)^n \geqslant 2$.

Cela équivaut à $n \ln(1 + i) \geqslant \ln(2)$,

soit $n \geqslant \dfrac{\ln(2)}{\ln(1+i)}$ puisque $\ln(1 + i) > 0$.

Or, d'après le théorème 8 : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, donc pour x proche de 0, $\ln(1 + x) \approx x$.

i est petit devant 1, donc $\ln(1 + i) \approx i$.

Donc $\dfrac{\ln(2)}{\ln(1+i)} \approx \dfrac{\ln(2)}{i} = \dfrac{100\ln(2)}{r} \approx \dfrac{70}{r}$.

Ainsi, un capital placé à 1 % double en 70 ans ; à 2 % il double en 35 ans ; à 5 % en 14 ans ; à 7 % en 10 ans.

Remarque. l'approximation est d'autant meilleure que i est plus faible ; elle ne serait pas valable par exemple pour $i = 70$ % (c'est-à-dire $r = 70$).

35 Autres fonctions logarithmes

A 1. $f(xy) = k\ln(xy) = k[\ln(x) + \ln(y)] = k\ln(x) + k\ln(y)$
$= f(x) + f(y)$.

2. $k\ln(10) = 1 \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{\ln(10)}$.

3. a) C'est la propriété de la question **1.**, avec $k = \dfrac{1}{\ln(10)}$.

b) $\log(10^n) = \dfrac{\ln(10^n)}{\ln(10)} = \dfrac{n\ln(10)}{\ln(10)} = n$.

4. a) $\log(3\ 470) = \log(347 \times 10) = \log(347) + \log(10)$
$\approx 2{,}5403 + 1 = 3{,}5403$.

De même, $\log(34\ 700) \approx 4{,}5403$; $\log(34{,}7) \approx 1{,}5403$; $\log(3{,}47) \approx 0{,}5403$;

$\log(0{,}347) = \log(3{,}47) - 1 \approx 0{,}4597$.

b) Si deux nombres (décimaux strictement positifs) s'écrivent avec les mêmes chiffres, sauf éventuellement des 0 à droite ou à gauche, alors leurs logarithmes décimaux diffèrent d'un entier.

En effet si $y = x \times 10^n$, $\log(y) = \log(x) + n$.

B 1. Si $f(0)$ existe, $f(0 \times 0) = f(0) + f(0)$, donc $f(0) = 2f(0)$, d'où $f(0) = 0$.

Alors pour tout x, $f(x) = f(x) + f(0) = f(x \times 0) = f(0) = 0$.

2. a) $f(1) = f(1 \times 1) = f(1) + f(1)$, donc $f(1) = 0$.

b) Soit x un nombre réel strictement positif. Les deux fonctions $y \mapsto f(xy)$ et $y \mapsto (f(x) + f(y))$ sont égales sur $]0 ; +\infty[$, or elles sont dérivables sur cet intervalle, donc elles ont même dérivée :

Pour tout $y > 0$, $x f'(xy) = f'(y)$.

En particulier $x\,f'(x) = f'(1)$. Cette égalité est vraie quel que soit $x > 0$.

3. a) Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{f'(1)}{x} = \dfrac{k}{x}$.

b) La fonction $h : x \mapsto f(x) - k\ln(x)$ définie sur $]0\,;+\infty[$, a pour dérivée $h' : x \mapsto f'(x) - \dfrac{k}{x}$ c'est-à-dire la fonction nulle sur cet intervalle. Donc elle est constante sur $]0\,;+\infty[$. Comme $h(1) = f(1) - k\ln(1) = 0$, c'est que h est nulle sur $]0\,;+\infty[$. Autrement dit, $f(x) = k\ln(x)$ pour tout $x > 0$.

4. Conclusion : les fonctions définies et dérivables sur $]0\,;+\infty[$ qui transforment les produits en sommes sont les fonctions de la forme $x \mapsto k\ln(x)$, où k est un nombre réel.

36 TD – La fonction logarithme décimal

A. 1. $-\log([H^+]) = 5$ équivaut à $\log([H^+]) = -5 = \log(10^{-5})$, soit $[H^+] = 10^{-5}$ ions-grammes par litre.

2. De $[H^+] \times [OH^-] = 10^{-14}$, on déduit

$$\log([H^+]) + \log([OH^-]) = -14.$$

$$[H^+] > [OH^-] \Leftrightarrow \log([H^+]) > \log([OH^-])$$
$$\Leftrightarrow \log([H^+]) > -14 - \log([H^+])$$
$$\Leftrightarrow -2\log([H^+]) < 14 \Leftrightarrow 2\,\text{pH} < 14 \Leftrightarrow \text{ph} < 7.$$

B. 1. Si $P_2 = 2P_1$, alors $I_2 - I_1 = 10\log(2) \approx 3$ db.

Multiplier la puissance sonore par 2, c'est augmenter l'intensité sonore de 3 db.

2. $10\log\left(\dfrac{P_2}{P_1}\right) = 10$ équivaut à $\log\left(\dfrac{P_2}{P_1}\right) = 1 = \log(10)$,

c'est-à-dire $\dfrac{P_2}{P_1} = 10$.

Augmenter l'intensité sonore de 10 db, c'est multiplier la puissance sonore par 10.

C. 1. Pour Véga, $m_0 = -2{,}5\log\left(\dfrac{E_0}{E_0}\right) = -2{,}5\log(1) = 0$.

2. Si $E_1 < E_2$, alors $\dfrac{E_1}{E_0} < \dfrac{E_2}{E_0}$ donc $\log\left(\dfrac{E_1}{E_0}\right) < \log\left(\dfrac{E_2}{E_0}\right)$,

donc $-2{,}5\log\left(\dfrac{E_1}{E_0}\right) > -2{,}5\log\left(\dfrac{E_2}{E_0}\right)$,

soit $m_1 > m_2$.

3. $m < 0$ équivaut à $2{,}5\log\left(\dfrac{E}{E_0}\right) > 0$,

c'est-à-dire $\left(\dfrac{E}{E_0}\right) > 1$, soit $E > E_0$: l'étoile est plus brillante que Véga.

4. $m = -2{,}5\log(3{,}9) \approx -1{,}48$.

5. $-2{,}5\log\left(\dfrac{E}{E_0}\right) = -26{,}7$, donc $\log\left(\dfrac{E}{E_0}\right) = 10{,}68$,

soit $\ln\left(\dfrac{E}{E_0}\right) = 10{,}68\ln(10)$.

On en déduit $\dfrac{E}{E_0} = e^{10{,}68\ln(10)} \approx 4{,}8 \times 10^{10}$.

L'éclat du Soleil est environ 48 milliards de fois celui de Véga.

37 TD – La fonction logarithme en sciences

A. 1. La demi-vie t vérifie $m_0e^{-kt} = \dfrac{m_0}{2}$, soit $e^{-kt} = \dfrac{1}{2}$,

c'est-à-dire $e^{kt} = 2$, autrement dit $kt = \ln(2)$, d'où $t = \dfrac{\ln(2)}{k}$.

2. $t = \dfrac{\ln(2)}{k}$ donc $k = \dfrac{\ln(2)}{t} \approx \dfrac{0{,}693}{5\,730} \approx 1{,}21 \times 10^{-4}$ (en an^{-1}).

3. Soit m_0 la masse de carbone 14 contenue dans le bois lorsqu'il a brûlé, et m la masse restante au bout de t années, au moment de la mesure. La masse $\propto$ de carbone 12 est restée constante.

$m = m_0e^{-kt}$ donc $\dfrac{m}{\mu} = \dfrac{m_0}{\mu}e^{-kt}$. Donc $2{,}5 \times 10^{-13} = 10^{-12}\,e^{-kt}$.

On en déduit $e^{-kt} = 0{,}25$, soit $e^{kt} = 4$, d'où $kt = \ln(4)$,

donc $t = \dfrac{\ln(4)}{k} = 2\ln(2) \times \dfrac{5\,730}{\ln(2)} = 2 \times 5\,730 = 11\,460$ ans.

B. 1. $6 = k\ln(2)$, donc $k = \dfrac{6}{\ln(2)} \approx 8{,}66$.

2. $h_2 - h_1 = \dfrac{1}{2}$ équivaut à $k\ln\left(\dfrac{f_2}{f_1}\right) = \dfrac{1}{2}$, soit $\ln\left(\dfrac{f_2}{f_1}\right) = \dfrac{1}{2k} = \dfrac{\ln(2)}{12}$

c'est-à-dire $\dfrac{f_2}{f_1} = e^{\frac{\ln(2)}{12}}$.

Les fréquences de la gamme sont donc en progression géométrique de raison $e^{\frac{\ln(2)}{12}} \approx 1{,}059\,5$.

On peut donc compléter le tableau à partir du la, par multiplications ou divisions successives par ce nombre :

Note	do	do# =ré *b*	ré	ré# =mi *b*	mi	fa	fa# =sol *b*
Fréquence (en Hz)	261,6	277,2	293,7	311,1	329,6	349,2	370,0

Note	sol	sol# =la *b*	la	la# =si *b*	si	do
Fréquence (en Hz)	392,0	415,3	440	466,2	493,9	523,3

EXERCICES Entraînement (page 155)

DE TÊTE

38 **a)** $e^{\frac{\ln 8}{3\ln 2}} = 1$. **b)** $\ln(3) + \ln\left(\frac{1}{3}\right) = 0$.

c) $\ln(\sqrt{2}+1) + \ln(\sqrt{2}-1) = \ln(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 0$.

39 **a)** $x \in\ ]0\,;1[\ \cup\ ]1\,;+\infty[$.
b) $x \in\ ]-1\,;0[\ \cup\ ]0\,;+\infty[$.
c) $x \in\ ]1\,;+\infty[$.

40 **a)** $\ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e$ soit $x \in\ ]0\,;e[$.
b) $e^x > 2 \Leftrightarrow e^x > e^{\ln 2}$ soit $x \in\ ]\ln 2\,;+\infty[$.

41 $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ pour $x \in\ ]0\,;+\infty[$.
donc f est strictement croissante.

42 **a)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$. **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \ln(x)) = +\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\ln x}{x+1} = +\infty$.

43 $u_n = \ln\frac{2n}{n+1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = \ln 2$.

CALCULS AVEC LES FONCTIONS ln ET exp

44 $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$.

45 **a)** $x^2 + 2x > 0$ soit $x \in\ ]-\infty\,;-2[\ \cup\ ]0\,;+\infty[$.
b) $e^x > 1$ soit $x \in\ ]0\,;+\infty[$.
c) $x \in\ ]0\,;+\infty[$.
d) $x \in\ ]0\,;1[\ \cup\ ]1\,;+\infty[$.
e) $x \in\ ]-\infty\,;-1[\ \cup\ ]1\,;+\infty[$.

46 *Corrigé sur le site élève.*

47 **a)** $x < \frac{3}{2}$ et $3 - 2x = e$, soit $x = \frac{3-e}{2}$.
b) $x < 3$ et $3 - x = e^{-2}$, soit $x = 3 - e^{-2}$.
c) $x^2 - 8 > 0$ et $x^2 - 8 = 1$, soit $x = 3$ ou $x = -3$.
d) $x < 0$ ou $x > 1$ et $1 - \frac{1}{x} = e^2$, soit $x = \frac{1}{1-e^2}$.

48 **a)** $x = \ln 3 - 2$.
b) $\frac{x}{x+1} = \ln 2$ soit $x = \frac{\ln 2}{1 - \ln 2}$.
c) $x = \ln 4$. **d)** $e^x + 1 = e^2$ soit $x = \ln(e^2 - 1)$.

49 **a)** $x \geqslant \frac{1+e^{-1}}{2}$. **b)** $3 < x \leqslant 3 + e^2$.
c) $\frac{1}{e} \leqslant x < e^2$ **d)** $x \leqslant \ln(e^2 - 1)$.

50 **a)** $x < \ln 2 + 1$. **b)** $x \leqslant \ln 4$.
c) $0 < x < \frac{1}{\ln 3 - 1}$. **d)** $-\ln 2 \leqslant x \leqslant \ln 2$.

51 *Corrigé sur le site élève.*

52 **a)** $x - 2 > 0$; $2x - 1 > 0$ et $x - 2 \leqslant 2x - 1$ soit $x \geqslant 2$.
b) $1 + \frac{2}{x} > 0$; $x > 0$ et $1 + \frac{2}{x} \geqslant x$ soit $0 < x \leqslant 2$.
c) $x > 0$; $x^2 - 2x > 0$ et $x^2 - 3x > 0$, soit $x \in\ [3\,;+\infty[$.

53 L'ensemble cherché est $x \in\ ]1\,;+\infty[$.

54 **a)** $\left(\frac{2}{5}\right)^n \leqslant 0{,}2$ équivaut à $n\ln\frac{2}{5} \leqslant \ln 0{,}2$,

soit $n \geqslant \frac{\ln(0{,}2)}{\ln(0{,}4)}$ donc $n \geqslant 2$.

b) $\left(1 + \frac{3}{100}\right)^n \geqslant 2$ équivaut à $n\ln(1{,}03) \geqslant \ln 2$.

Or $n \geqslant \frac{\ln 2}{\ln(1{,}03)}$ donc $n \geqslant 24$.

55 *Corrigé sur le site élève.*

56 **a)** $x > 0$; $x < 3$; $x > -1$,
et $\ln 2x = \ln(3-x)^2 - \ln(x+1)$ qui équivaut à
$$2x(x+1) = 9 - 6x + x^2.$$
$x^2 + 8x - 9 = 0$, donc $x = 1$ ou $x = -9$.
Ou $x > 0$ et $x < 3$ donc $\mathcal{S} = \{1\}$.
b) $x < 5$; $x > 1$ et $(5-x)(x-1) \geqslant 3$ est équivalent à
$$-x^2 + 6x - 5 \geqslant 3.$$
$x^2 - 6x + 8 \leqslant 0$ a pour solutions $x_1 \leqslant 4$ ou $x_2 \geqslant 2$,
donc $\mathcal{S} = [2\,;4]$.

57 **1.** $\ln x = X$ et $X^2 - 2X - 3 = 0$ avec $x > 0$.

$X = -1$ ou $X = 3$ soit $x = \frac{1}{e}$ ou $x = e^3$.

2. $(\ln x + 1)(\ln x - 3) \geqslant 0$, soit $\ln x < -1$ ou $\ln x > 3$.

Donc $x \in \left]0\,;\frac{1}{e}\right[\ \cup\ ]e^3\,;+\infty[$.

58 **1.** $e^x = X$ et $3X^2 - 7X + 2 = 0$.

Donc $X = 2$ ou $X = \frac{1}{3}$ et $x = \ln 2$ ou $x = -\ln 3$.

2. $3e^{2x} - 7e^x + 2 = 3\left(e^x - \frac{1}{3}\right)(e^x - 2)$,

soit $e^x < \frac{1}{3}$ ou $e^x > 2$, donc $x < -\ln 3$ ou $x > \ln 2$.

DES LIMITES IMPORTANTES

59 **a)** $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$.
d) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 0$.

60 **a)** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1 + x\ln x}{x} = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \ln 2$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

61 *Corrigé sur le site élève.*

62 **1.** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} [x^2 - x^2\ln(x)] = 0$.

Donc f est continue en $x = 0$.

2. a) $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = x - x\ln x$.

Or $\lim\limits_{x\to 0^+} (x - x\ln x) = 0$.

b) Donc f est dérivable en $x = 0$ et $f'(0) = 0$.

LA FONCTION ln

63 **1.** $g'(x) = (x+1)e^x$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g		↘	$1 - \frac{1}{e} > 0$	↗	

Donc pour tout x réel, $g(x) > 0$.

2. a) et **b)** $f'(x) = e^x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{g(x)}{x}$

x	0		$+\infty$
f'		$+$	
f	$-\infty$	↗	$+\infty$

f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ qui a pour image $\mathbb{R}$ par f.
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel m, l'équation $f(x) = m$ a une unique solution.

64 **1.** A a pour coordonnées $(a\,;\ln a)$ et $B(b\,;\ln b)$

donc I a pour coordonnées $\left(\dfrac{a+b}{2}\,;\dfrac{\ln a + \ln b}{2}\right)$.

Or $\dfrac{\ln a + \ln b}{2} = \dfrac{1}{2}\ln ab = \ln\sqrt{ab}$, donc la proposition est vraie.

2. J a pour coordonnées $(\ln\sqrt{ab}\,;\ln\sqrt{ab})$ donc K a pour coordonnées $(\ln\sqrt{ab}\,;e^{\ln\sqrt{ab}})$. Or $e^{\ln\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$ donc C a pour coordonnées $(\sqrt{ab}\,;\sqrt{ab})$. La proposition est fausse.

3. La tangente à $\mathcal{C}_1$ en $x = \dfrac{a+b}{2}$ a pour coefficient directeur $\dfrac{2}{a+b}$ et Δ a pour coefficient directeur 1 donc ces droites sont parallèles si et seulement si $a + b = 2$. La proposition est vraie.

4. La tangente en B a pour équation

$$y = \frac{1}{b}(x - b) + \ln b \text{ soit } y = \frac{x}{b} + \ln b - 1.$$

H a pour coordonnées $(b\,;0)$ et K $(b(1 - \ln b)\,;0)$.
K est le milieu de [OH] si et seulement si
$2b = b(1 - \ln b)$
$2 = 1 - \ln b$ or $b > 0$ donc $\ln b = 1$ et $b = \dfrac{1}{e}$.
La proposition est vraie.

65 *Corrigé sur le site élève.*

66 **1. a)** $\varphi'(x) = e^x - \dfrac{1}{x}$. $\varphi''(x) = e^x + \dfrac{1}{x^2}$.

x	0		α		1		$+\infty$
φ''							
φ'	$-\infty$	↗	0	↗	$e - 1$	↗	$+\infty$

Le théorème des valeurs intermédiaires prouve l'existence d'un α unique tel $0 < \alpha < 1$.

$$\alpha \approx 0{,}57.$$

b) M a pour coordonnées $(x\,;e^x)$ et $N(x\,;\ln x)$.
$\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées $(0\,;\ln x - e^x)$.
Or $e^x > \ln x$ pour tout $x > 0$ donc $MN = e^x - \ln x$ soit $MN = \varphi(x)$.

x	0		α		$+\infty$
φ'		$-$	0	$+$	
φ	$+\infty$	↘	$\varphi(\alpha)$	↗	$+\infty$

Il en résulte que MN est minimale pour $x = \alpha$.

2. a) $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$ car $\varphi'(x) = 0$.

b) La tangente en M a pour coefficient directeur e^α et la tangente en N, $\dfrac{1}{\alpha}$. Comme $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$ les tangentes sont parallèles.

67 **1.** $\lim\limits_{x\to 0^+} = 0$ donc f est continue en 0.

De plus, $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h^2\ln h - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} h\ln h = 0$.

Donc f est dérivable en $x = 0$.

2. a) $f'(x) = 2x\ln x + x = x(2\ln x + 1)$.

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
f'	0	$-$	0	$+$	
f	0	↘	$-\frac{1}{2e}$	↗	

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = e^{-1} \times -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2e}.$$

Donc A a pour coordonnées $\left(e^{-\frac{1}{2}}\,;-\dfrac{1}{2e}\right)$.

b) Si M a pour coordonnées $(a\,;f(a))$, la tangente en M à $\mathcal{C}$ a pour équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Cette tangente passe par 0 si et seulement si :

$$a\,f'(a) = f(a)$$

soit $a^2\ln a = 2a^2\ln a + a^2$
soit $a^2(\ln a + 1) = 0$, qui a pour racines $a = 0$ ou $a = e^{-1}$.

Les tangentes ont pour équation $y = 0$ et $y = -e^{-1}(x - e^{-1}) - e^{-2}$, soit $y = -e^{-1}x$.

68 **1.** $f'(x) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$.

x	0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	0	↗	1	↘	$-\infty$

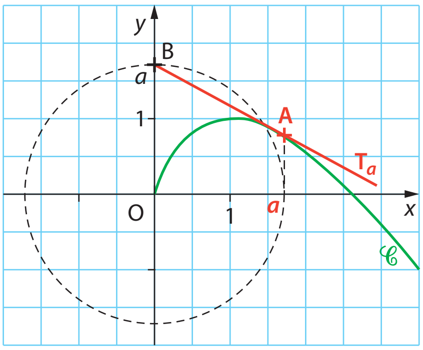
2. a) A a pour coordonnées $(a\,;\,a(1 - \ln a))$ donc T_a a pour équation :

$$y = -\ln a(x - a) + a - a\ln a$$

soit $y = -x\ln a + a$.

Donc B a pour coordonnées $(0\,;\,a)$.

b) Pour A donné, on construit $B(0\,;\,a)$ et T_a est la droite (AB).



69 **1. a)** Par hypothèse $f(1) = 0$ et $f'(1) = 3$.

Or $f'(x) = a + \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$,

donc $f(1) = 0 \Leftrightarrow a + b = 0$ et $f'(1) = 3 \Leftrightarrow a + 1 = 3$.

Donc $a = 2$ et $b = -2$.

b) $f(x) = 2x - 2 + \dfrac{\ln(x)}{x}$.

2. a) $g'(x) = 4x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2 - 1}{x}$.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g		↘	$\frac{3}{2} + \ln 2 > 0$	↗	

Donc pour tout $x > 0$, $g(x) > 0$.

b) $f'(x) = 2 + \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$, $g(x) > 0$.

Or $f(x) > 0$ donc :

x	0		$+\infty$
f'		$+$	
f	$-\infty$	↗	$+\infty$

et f strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

ÉTUDE DE FONCTIONS DU TYPE $x \mapsto \ln(u(x))$

70 *Corrigé sur le site élève.*

71 La fonction f est définie sur $\mathscr{D}$ et la fonction $x \mapsto x[\ln(x - 1) - \ln(x + 1)]$ est définie sur $]1\,;+\infty[$ donc f est différente de cette fonction.

Le raisonnement n'est donc pas exact.

72 **1.** $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$; $f'(0) = 0$; $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \ln\left(\dfrac{5}{8}\right)$.

$f'(x) = \dfrac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}$ donc

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow a\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + b\left(-\frac{1}{2}\right) + c = 1.$$

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{c} = 0 \text{ sur } b = 0.$$

$f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \ln\dfrac{5}{8} \Leftrightarrow \dfrac{a}{16} + \dfrac{b}{4} + c = \dfrac{5}{8}$.

Donc $b = 0$, $\dfrac{a}{4} + c = 1$ et $\dfrac{a}{16} + c = \dfrac{5}{8}$,

soit $b = 0$, $c = \dfrac{1}{2}$ et $a = 2$,

donc $f(x) = \ln\left(2x^2 + \dfrac{1}{2}\right)$.

2. a) $f'(x) = \dfrac{4x}{2x^2 + \dfrac{1}{2}} = \dfrac{8x}{4x^2 + 1}$.

b) $f'(x) = 0$ pour $x = 0$ et $f(x) = 0$ pour $2x^2 + \dfrac{1}{2} = 1$,

soit $x = -\dfrac{1}{2}$ et $x = \dfrac{1}{2}$.

c) De plus $f(0) = -\ln 2$; c'est la valeur du minimum de f.

73 **1.** $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g'(x) = \dfrac{2}{2n + 6} = \dfrac{1}{x + 3}$.

La tangente en $A(1\,;\,0)$ a pour coefficient directeur 1 et la tangente en $B(-2\,;\,\ln 2)$ a pour coefficient directeur $\dfrac{1}{-2 + 3} = 1$. Donc les tangentes sont parallèles.

2. C et D ont respectivement pour coordonnées $(3\,;\,\ln 3)$ et $(0\,;\,\ln 6)$ donc $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $(-3\,;\,\ln 6 - \ln 3)$ soit $(-3\,;\,\ln 2)$, et $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-3\,;\,\ln 2)$ donc ABDC est un parallélogramme.

3. M a pour coordonnées $(e^t\,;\,t)$ et $N\left(\dfrac{1}{2}e^t - 3\,;\,t\right)$.

Donc $\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}e^t + 3\,;\,0\right)$: M n'est pas constant.

4. I a pour coordonnées $(x\,;\,\ln x)$ avec $x > 0$ et J a pour coordonnées $(x\,;\,\ln(2x + 6))$.

Donc $IJ = -\ln x + \ln(2x + 6) = \ln\left(\dfrac{2x + 6}{x}\right)$.

$$\lim_{x \to +\infty} IJ = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{2x + 6}{x}\right) = \ln 2.$$

74 **1.** g est défini pour $f(x) > 0$, or $f(1) = 0$; donc g n'est pas définie sur $]-2\,;\,2[$.

2. $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$. Or $f'(0) = 0$ et $f(0) = e$ donc $g'(0) = 0$.

3. g a pour tableau de variation :

x	-2		0		1		2
g'	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	‖
g	‖ $-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖

$g(0) = 1$ et g est strictement croissante sur $]1\,;\,2[$ dont l'image est $\mathbb{R}$. Il en résulte, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation $g(x) = 1$ a une unique solution dans $]1\,;\,2[$. Donc $g(x) = 1$ a exactement deux solutions dans $]-2\,;\,2[$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \ln(f(x)) = 1.$

$\lim\limits_{x\to 0} g(g(x)) = \lim\limits_{x\to 1} g(x) = -\infty.$

75 *Corrigé sur le site élève.*

LA FONCTION ln ET LES SUITES

76 **1.** $u_0 > 0$. Si $u_n > 0$ alors $\sqrt{u_n} > 0$ donc $u_{n+1} > 0$.
Ainsi pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2. a) $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - 2 = \ln \mathrm{e} + \dfrac{1}{2}\ln u_n - 2$

$$= -1 + \frac{1}{2}\ln u_n = \frac{1}{2}(\ln u_n - 2) = \frac{1}{2}v_n.$$

Donc v_n est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 3 - 2 = 1$ et de raison $\dfrac{1}{2}$.

b) $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $\ln u_n = v_n + 2$ soit $u_n = \mathrm{e}^{v_n+2}$.

$u_n = \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}\right)^n+2}$.

3. a) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0.$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}^2.$

77 **1. a)** $f(x) = 0$ pour $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

$f'(x) = \dfrac{1-(1+\ln x)}{x^2} = -\dfrac{\ln x}{x^2}.$

$f''(x) = \dfrac{-x + 2x\ln x}{x^4} = \dfrac{x(2\ln x - 1)}{x^4} = \dfrac{2\ln x - 1}{x^3}.$

b) M_1 a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\,;\,0\right)$.

La tangente en un point quelconque est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Elle passe par l'origine du repère si et seulement si $af'(a) = f(a)$, soit $-\dfrac{\ln a}{a} = \dfrac{1+\ln a}{a}$ soit $\ln a = -\dfrac{1}{2}$.

Donc $a = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$. M_2 a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\,;\,\dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}\right)$.

$f'(x) = 0$ pour $x = 1$ donc M_3 a pour coordonnées $(1\,;\,1)$.

$f''(x) = 0$ pour $x = \sqrt{\mathrm{e}}$ donc M_4 a pour coordonnées $\left(\sqrt{\mathrm{e}}\,;\,\dfrac{3}{2\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$.

2. Les points M_1, M_2, M_3, M_4 ont respectivement pour abscisses $\dfrac{1}{\mathrm{e}}\,;\,\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\,;\,1\,;\,\sqrt{\mathrm{e}}$. Prises dans cet ordre, ces abscisses sont en progression géométrique de raison $\sqrt{\mathrm{e}}$.

78 **1. a)** $f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln(x))^2}$.

x	1		e		$+\infty$
f'	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

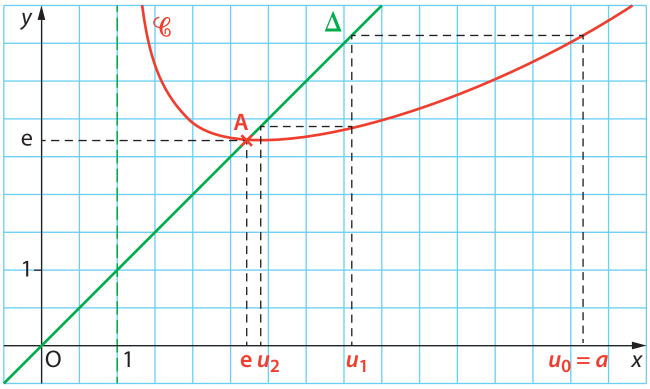
b) Donc A a pour coordonnées $(\mathrm{e}\,;\,\mathrm{e})$.

c) D'après le tableau de variation, si $x > \mathrm{e}$ alors $f(x) > \mathrm{e}$.

2. $u_0 = a > \mathrm{e}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Il semble que la suite (u_n) soit décroissante et converge vers e.

b) $u_0 = a > \mathrm{e}$ si $u_n > \mathrm{e}$, $f(u_n) > \mathrm{e}$ donc $u_{n+1} > \mathrm{e}$.
Ainsi pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > \mathrm{e}$.



c) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{\ln u_n} - u_n = \dfrac{u_n}{\ln u_n}(1 - \ln u_n).$

$u_n > \mathrm{e}$, $\ln u_n > 1$ et $1 - \ln u_n < 0$.
Donc $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite est décroissante.

d) La suite u_n minorée par e et décroissante est donc convergente vers ℓ avec $\ell = f(\ell)$ soit $\ell = \dfrac{\ell}{\ln \ell}$ donc $\ell(\ln \ell - 1) = 0$.
Or $\ell \geqslant 1$ et donc $\ln \ell = 1$ et $\ell = \mathrm{e}$.

79 $u_2 + u_3 + \ldots + u_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(1 - \dfrac{1}{3}\right) + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$

soit
$$u_2 + \ldots + u_n = \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \ln\frac{3}{4} + \ldots + \ln\frac{n-1}{n}$$
$$= \ln\frac{1\times 2\times 3\times\ldots\times n-1}{2\times 3\times\ldots\times n}$$
$$= \ln\frac{1}{n} = -\ln n.$$

80 *Corrigé sur le site élève.*

81 **1.** Trouver un élément parmi n a pour probabilité $p = \dfrac{1}{n}$ soit $n = \dfrac{1}{p}$.

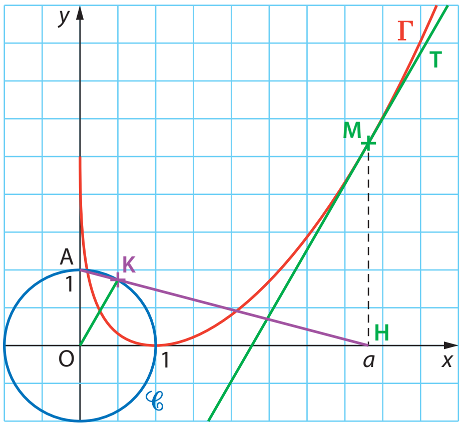
Donc $\mathrm{I} = \dfrac{\ln(n)}{\ln(2)} = \dfrac{\ln\left(\frac{1}{p}\right)}{\ln(2)} = -\dfrac{\ln(p)}{\ln(2)}.$

2. $\mathrm{I} = \dfrac{\ln 32}{\ln 2} = \dfrac{\ln 2}{\ln 2^5} = 5.$

3. $\mathrm{I} = \dfrac{\ln 2}{\ln 2} = 1.$

AVEC LES TICE

82 **1.**



2. Il semble que les droites (OK) et (T) restent parallèles.

3. a) $f'(x) = \frac{1}{4}\left[2x - \frac{2}{x}\right]$.

Donc la tangente en M d'abscisse a a pour vecteur directeur $\vec{u}\left(1 ; \frac{1}{2}\left(\frac{a^2-1}{a}\right)\right)$.

La droite (AH) d'équation $\frac{x}{a} + y - 1 = 0$ coupe le cercle $\mathscr{C}$: $x^2 + y^2 = 1$ en A et K dont les abscisses sont solutions de l'équation

$$x^2 + \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 = 1, \text{ soit } x^2 + 1 - \frac{2x}{a} + \frac{x^2}{a^2} = 1$$

$$x\left[x\left(1 + \frac{1}{a^2}\right) - \frac{2}{a}\right] = 0 \text{ soit } x = 0 \text{ ou } x = \frac{2a}{a^2+1}.$$

Donc A a pour coordonnées (0 ; 1) et $K\left(\frac{2a}{a^2+1} ; \frac{a^2-1}{a^2+1}\right)$.

Donc $\overrightarrow{OK}$ est colinéaire au vecteur $(2a ; a^2 - 1)$ ou à $\left(1 ; \frac{a^2-1}{2a}\right)$, c'est-à-dire à $\vec{u}$.

Ainsi (T) et (OK) sont deux droites parallèles.

b) M étant donné on connaît H donc (AH) qui coupe $\mathscr{C}$ en K. Il suffit de tracer par M la parallèle à (OK).

83 **2. c)** On peut conjecturer que :

- la courbe $\mathscr{C}_m$ semble présenter un maximum en $x = 1$;
- la tangente en O à $\mathscr{C}_m$ a pour coefficient directeur m ;
- deux courbes distinctes ont en commun le point O et O seulement si $m < p$; alors $\mathscr{C}_m$ est en-dessous de $\mathscr{C}_p$.

3. a) $f'_m(x) = \frac{e^x + m}{e^x + mx} - 1 = \frac{m(1-x)}{e^x + mx}$.

x	0		1		$+\infty$
f'		+	0	–	
f	0	↗	$\ln(e+m) - 1$	↘	0

b) $f_m(x) = \ln\left[e^x\left(1 + \frac{mx}{e^x}\right)\right] - x$

$$= \ln e^x + \ln\left(1 + \frac{mx}{e^x}\right) - x = \ln\left(1 + \frac{mx}{e^x}\right).$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x) = 0$.

c) Le maximum de f est $f(1) = \ln\left(1 + \frac{m}{e}\right)$.

Or $\ln(1 + x) \leqslant x$ (Il suffit d'étudier les variations de la fonction φ définie sur [0 ; + ∞] par $\varphi(x) = \ln(1 + x) - x$.

Donc si $x = \frac{m}{e}$ alors $\ln\left(1 + \frac{m}{e}\right) \leqslant \frac{m}{e}$,

donc pour tout x de $[0 ; +\infty[$ $f_m(x) \leqslant \frac{m}{e}$.

d) $f'_m(0) = m$ donc la tangente en $x = 0$ a pour équation $y = mx$.

e) On a $p < m$. $f_p(x) = \ln\left(1 + \frac{px}{e^x}\right)$ et $f_m(x) = \ln\left(1 + \frac{mx}{e^x}\right)$.

$$f_m(x) > f_p(x) \Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{mx}{e^x}\right) > \ln\left(1 + \frac{px}{e^x}\right)$$

soit $\frac{mx}{e^x} > \frac{px}{e^x}$ ou encore $(m - p)\,x > 0$.

Si $x > 0$ $(m - p)\,x > 0$, alors $\mathscr{C}_m$ est au-dessus de $\mathscr{C}_p$ et le point O est le seul point commun.

Prendre toutes les initiatives

84 A a pour coordonnées $(a ; \ln a)$ et $B(b ; \ln b)$.

Donc I a pour coordonnées $\left(\frac{a+b}{2} ; \frac{\ln ab}{2}\right)$

et J a pour coordonnées $\left(\frac{a+b}{2} ; \ln\frac{a+b}{2}\right)$.

$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \frac{\ln ab}{2} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$,

soit $\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geqslant 0$, ce qui est toujours vrai si A est distinct de B. Donc I est toujours en dessous de J.

85 **1.** $v_{n+1} = e^{u_{n+1}\ln 2} = e^{u_n \ln 2 - 2\ln 2}$
$= e^{-\ln 4}\, v_n$.

(v_n) est donc une suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $e^{-\ln 4}$.

2. La raison $q = e^{-\ln 4}$ est strictement inférieure à 1,

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Il en résulte que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} v_n = \frac{v_0}{1-q} = \frac{1}{1 - e^{\ln\frac{1}{4}}}$

soit $\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$.

86 $e^a - e^{-a} - 2b = 0$ multiplié par e^a donne :

$(e^a)^2 - 1 - 2be^a = 0$. En posant $e^a = X$ avec $X > 0$, on obtient :

$$X^2 - 2b \times - 1 = 0.$$

Soit $X = b + \sqrt{1 + b^2}$ ou $X = b - \sqrt{1 + b^2}$.

Or $b - \sqrt{1 + b^2} < 0$ donc $e^a = b + \sqrt{1 + b^2}$,

soit $a = \ln\left(b + \sqrt{1 + b^2}\right)$.

Réciproquement, si $a = \ln(b + \sqrt{1 + b^2})$ alors $e^a = b + \sqrt{1 + b^2}$

et $-a = -\ln(b + \sqrt{1 + b^2}) = \ln\frac{1}{b + \sqrt{1 + b^2}}$.

D'où $-a = \ln\frac{\sqrt{1 + b^2} - b}{1 + b^2 - b^2} = \ln[\sqrt{1 + b^2} - b]$,

donc $e^{-a} = \sqrt{1 + b^2} - b$,

soit $e^a - e^{-a} = 2b$.

Il y a donc équivalence entre les deux propositions.

EXERCICES Le jour du BAC (page 161)

87 *Corrigé sur le site élève.*

88 **A.** $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ pour tout x de I.

x	0	$\frac{1}{2}$	α	1	$+\infty$
f'			+		
f	$-\infty$	$\frac{1}{2} - \ln 2$	0	1	$+\infty$

f est strictement croissante sur I dont l'image est $\mathbb{R}$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires $f(x) = 0$ a une unique solution α.

De plus $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln 2 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$.

Donc $\alpha \in \left]\frac{1}{2} ; 1\right[$.

B. 1. a) $g(x) = x \Leftrightarrow 4x - \ln x = 5x$, soit $f(x) = 0$.

b) $g'(x) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5x} = \frac{1}{5}\left(\frac{4x-1}{x}\right)$.

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
g'	$-$	0	+		
g		$\frac{1+\ln 4}{5}$	$\frac{2+\ln 2}{5}$	$\frac{4}{5}$	

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2+\ln 2}{5} \approx 0{,}53$; $f(1) = \frac{4}{5} = 0{,}8$.

Donc l'image de l'intervalle J est incluse dans J.

2. a) $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = \frac{2+\ln 2}{5}$ appartiennent à J et $u_0 < u_1$.

De plus si $u_n \in$ J, $f(u_n) = u_{n+1} \in$ J.

Donc pour tout entier u, $u_n \in$ J. f est croissante sur l'intervalle J.

Donc si $u_{n+1} < u_n$ alors $f(u_{n-1}) < f(u_n)$, soit $u_n < u_{n+1}$.

Donc pour tout n de $\mathbb{N}$ $\frac{1}{2} < u_n < u_{n+1} < 1$.

b) La suite (u_n) croissante et majorée converge vers ℓ telle que $g(\ell) = \ell$.

Or α est la seule solution de l'équation $g(x) = x$, donc $\ell = \alpha$.

3. a) $u_{10} \approx 0{,}567\,145$.

b) $0{,}567 < a < 0{,}568$.

89 Si (u_n) est une suite croissante non majorée, par négation de la définition d'une suite majorée, quel que soit le nombre A, il existe un indice N tel que $u_N >$ A. La suite étant croissante, il en résulte que tous les termes de la suite d'indice supérieur à N sont supérieurs à A. Ainsi, quel que soit le nombre A, l'intervalle]A ; + ∞[contient tous les termes de la suite à partir de l'indice N. La suite (u_n) a pour limite + ∞.

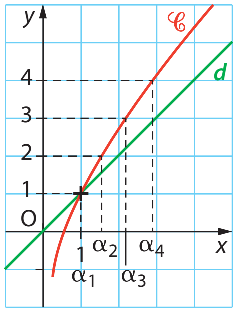
B. 1. a) $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ pour tout x de $]0 ; +\infty[$.

x	0	1	α_n	$+\infty$
f'		+		
f	$-\infty$	1	n	$+\infty$

b) Voir l'exercice 88. La démonstration est identique.

On a donc $\alpha_n + \ln(\alpha_n) = n$.

2. a)



b) $\alpha_1 = 1$.

La fonction f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ d'où le résultat.

3. a) $f(1) = 1$. $f'(1) = 2$.

Donc la droite Δ a pour équation

$$y = 2(x-1) + 1 = 2x - 1.$$

b) $\varphi(x) = f(x) - (2x-1) = x + \ln x - 2x + 1$.

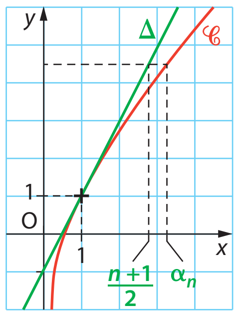
Donc $\varphi(x) = \ln x - x + 1$.

$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 1$ pour $x \in\ ]0 ; +\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
φ'	+	0	$-$
φ		0	

Donc pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $\varphi(x) \leqslant 0$: la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de Δ.

4. a) Il résulte de la question précédente que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\frac{n+1}{2} \leqslant \alpha_n$.



b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n+1}{2} = +\infty$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = +\infty$.

90 **1.** La tangente T_a au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

T_a passe par O $\Leftrightarrow -af'(a) + f(a) = 0$.

2. a) Pour tout x de $]1 ; +\infty[$

$$g(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x} - x\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x(\ln x)^2}\right]$$

soit $g(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x} - 1 - \frac{1}{(\ln x)^2}$. Donc

$$g(x) = \frac{(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - (\ln x) - 1}{(\ln x)^2}.$$

Il en résulte que les équations $g(x) = 0$ et $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - (\ln x) - 1 = 0$ sont équivalentes sur $]1 ; +\infty[$.

b) $u'(t) = 3t^2 - 2t - 1 = (t - 1)(3t + 1)$.

t	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		α		$+\infty$
u'		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
u	$-\infty$	↗	$-\frac{22}{27}$	↘	-2	↗	0	↗	$+\infty$

Pour tout $x \in\ ]-\infty ; 1]$, $u(t) < 0$ et, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une seule valeur α de $]1 ; +\infty[$ telle que $u(\alpha) = 0$.

c) Dans ce cas il existe une unique tangente à $\mathscr{C}$ issue de O.

91 **A. 1.** $f'(x) = 1 - \dfrac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$

$$= \frac{(x+1)^2 - 1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2}.$$

2. a) $N'(x) = 2(1 + x) + \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{2(1+x)^2 + 1}{1+x}$.

N(x) est strictement croissante sur $]-1 : +\infty[$ car $N'(x) > 0$.

b)

x	-1		0		4		$+\infty$
N'		$+$		$+$			
N	$-\infty$	$-$ ↗	0	$+$ ↗		↗	$+\infty$
f	$+\infty$	↘	0	↗	$4 - \frac{\ln 5}{5}$	↗	$+\infty$

3. $x = x - \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} \Leftrightarrow \ln(x+1) = 0$

soit $x = 0$. Le point d'intersection est O(0 ; 0).

B. 1. $f(4) = 4 - \dfrac{\ln 5}{5} < 4$ donc l'image de l'intervalle $[0 ; 4]$ est $\left[0 ; 4 - \dfrac{\ln 5}{5}\right] \subset [0,4]$, d'où le résultat.

2. a) Il semble que la suite (u_n) est décroissante et converge vers zéro.

b) $u_0 = 4 \in [0 ; 4]$. Si $u_n \in [0 ; 4]$ alors $f(u_n) \in [0 ; 4]$ soit $u_{n+1} \in [0 ; 4]$.

Donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \in [0 ; 4]$.

c) $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{\ln(u_n + 1)}{u_n + 1} < 0$.

Donc la suite est décroissante.

d) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers ℓ tel que $f(\ell) = \ell$ soit

$$-\frac{\ln(\ell + 1)}{\ell + 1} = 0 \text{ et } \ell = 0.$$

92 Pour tout $x \in\ ]1 ; +\infty[$, $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}\right)$.

a) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ donc l'affirmation est fausse.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc l'affirmation est fausse.

c) $f'(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + x + 1} - \dfrac{2}{x + 1} = \dfrac{x - 1}{(x+1)(x^2 + x + 1)}$.

x	-1		0		1		$+\infty$
f'				$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	0	↘	$\ln 3 - 2\ln 2 = \ln\frac{3}{4}$	↗	0

L'affirmation est fausse.

d) La proposition est vraie. En effet, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-1 ; 1[$.

Or $f(0) = 0$ donc $\alpha = 0$.

e) $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans $]-1 ; +\infty[$ telle que $\alpha \approx -0{,}47$. La proposition est vraie.

93 **1. a)** $g'(x) = 2x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2 - 1}{x}$.

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g		↘	$\frac{3}{2} + \ln\sqrt{2}$	↗	

$g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{1}{2} + 1 + \ln\sqrt{2} > 0$.

Donc pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $g(x) > 0$.

b) $f'(x) = 1 + \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

x	0		$+\infty$
f'		$+$	
f	$-\infty$	↗	$+\infty$

2. a) $f(x) - x = \dfrac{\ln x}{x}$.

Si $x \in\ ]0 ; 1[$, $\mathscr{C}$ est en-dessous de Δ.

Si $x > 1$, $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0$. Or MN $= f(x) - x$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{MN} = 0$.

c) La tangente en A d'abscisse a est parallèle à Δ si et seulement si $f'(a) = 1$, soit :

$$\frac{1 - \ln a}{a^2} = 0 \text{ donc } a = \mathrm{e}.$$

Le point A a pour coordonnées $\left(\mathrm{e} ; \mathrm{e} + \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

94 **1.** $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 1 > 0$ équivaut à $\begin{cases} \mathrm{e}^x = \mathrm{X} \\ \mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 1 > 0. \end{cases}$

Or $\boldsymbol{\Delta} = 1 - 4 = -3 < 0$ donc $\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 1 > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$, donc $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + 1 > 0$, pour tout x de $\mathbb{R}$, et f est donc définie sur $\mathbb{R}$.

2. a) $f'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + 1} = \dfrac{\mathrm{e}^x(2\mathrm{e}^x - 1)}{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + 1}$.

b)

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	0	↘	$\ln\frac{3}{4}$	↗	$+\infty$

Le point A a pour coordonnées $\left(-\ln 2 ; \ln\dfrac{3}{4}\right)$.

3. $\mathscr{C}$ est au-dessus de d si et seulement si $f(x) > 2x$, soit $\ln(e^{2x} - e^{x} + 1) > \ln e^{2x}$. Or cela équivaut à $e^{2x} - e^{x} + 1 > e^{2x}$, donc $e^{x} < 1$.

Donc $\mathscr{C}$ est au-dessous de d si et seulement si $x \in \,]-\infty\,;0[$.
Pour $x \in \,]0\,;+\infty[$, $\mathscr{C}$ est au-dessus de d.

EXCERCICES Pour aller plus loin (page 164)

95 **a)** $f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2(x^2-1)}{x}$.

x	0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	3	$\nearrow$	

Donc pour tout $x > 0$ on a $f(x) \geqslant 3$. La proposition est vraie.

b) $g'(x) = \dfrac{x\left[-2x - \dfrac{2}{x}\right] + x^2 + 2\ln x}{x^2}$

$= \dfrac{-2x^2 - 2 + x^2 + 2\ln x}{x^2} = \dfrac{-x^2 - 2 + 2\ln x}{x^2}$.

$g'(x) = \dfrac{-f(x)}{x^2}$ donc la proposition est vraie.

c) $g(x) + x = \dfrac{-x^2 - 2\ln x}{x} + x = \dfrac{-2\ln x}{x}$.

Si $x > 1$, alors $-2\ln x < 0$ donc $g(x) < -x$.
Donc $\mathscr{C}$ est strictement en-dessous de la droite d. La proposition est vraie.

d)

x	0		α		1		$+\infty$
g'			$-$				
g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

Donc la proposition est vraie. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution dans l'intervalle $]0\,;1[$. On a $0 < \alpha < 1$.

96 f est dérivable sur]– i ; + ∞[et

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} > 0.$$

x	-1		$+\infty$
f'		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Pour $n > 0$,

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}.$$

En posant $x = \dfrac{1}{n}$,

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x}$$
$$= f'(0) = 1.$$

Or $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e.$

Le raisonnement est exact.
Il n'est pas utile de poser $t = n\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

97 **1. a)** $f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{x^2+1} = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

x	0		1
f'		$+$	0
f	0	$\nearrow$	$1 - \ln 2$

b) L'image de l'intervalle $[0\,;1]$ est $[0\,;1-\ln 2] \subset [0\,;1]$, d'où le résultat.
c) $f(x) = x \Leftrightarrow \ln(x^2+1) = 0$, soit $x = 0$.
2. a) $u_0 = 1 \in [0\,;1]$.
Si $u_n \in [0\,;1]$, d'après la question **1.b)**, on a $f(u_n) \in [0\,;1]$.
Donc $u_{n+1} \in [0\,;1]$. Ainsi pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$0 \leqslant u_n \leqslant 1.$$

b) $u_{n+1} - u_n = -\ln(u_n^2 + 1) < 0$.
c) La suite est donc décroissante et minorée par 0. Elle converge donc vers ℓ tel que $f(\ell) = \ell$, soit $\ln(\ell^2 + 1) = 0$, et $\ell = 0$.

98 **A. 1.** $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} - 1 = \dfrac{-x}{x+1}$, $g'(x) = \dfrac{1}{x+1} - 1 + x$,

soit $g'(x) = \dfrac{1}{x+1} - (1-x) = \dfrac{x^2}{(x+1)}$.

x	0		$+\infty$
f'	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$

x	0		$+\infty$
g'	0	$+$	
g	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. Il résulte de **1.** que, pour tout $x > 0$, $f(x) \leqslant 0$ et $g(x) \geqslant 0$ donc

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) < x. \quad (1)$$

B. 1. a) $u_1 > 0$ et si $u_n > 0$, $u_n\left(1 + \dfrac{1}{2^{n+1}}\right) > 0$, donc $u_{n+1} > 0$.
Il en résulte que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.

b) $\ln(u_1) = \ln\dfrac{3}{2} = \ln\left(1 + \dfrac{1}{2}\right)$ donc la proposition est vraie.

Si $\ln u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{2}\right) + \ldots + \ln\left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right)$,

alors $\ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$.

Donc pour tout n de N* :

$$\ln(u_n) = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right).$$

2. a) $$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}\right) \leqslant \ln\left(1+\dfrac{1}{2}\right) \leqslant \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4^2}\right) \leqslant \ln\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right) \leqslant \dfrac{1}{2^2} \\ \dfrac{1}{2^n}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4^n}\right) \leqslant \ln\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right) \leqslant \dfrac{1}{2^n} \end{array}\right\} +$$

$$\mathrm{S}_n - \frac{1}{2}\mathrm{T}_n \leqslant \ln u_n \leqslant \mathrm{S}_n$$

b) $\mathrm{S}_n = \dfrac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{+\frac{1}{2}} = 1 - \dfrac{1}{2^n}.$

$\mathrm{T}_n = \dfrac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right).$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{T}_n = \dfrac{1}{3}.$

3. a) $\ln(u_{n+1}) - \ln u_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right) > 0.$

Donc $\ln(u_{n+1}) > \ln u_n$ et $u_{n+1} > u_n$.
Par conséquent, la suite (u_n) est strictement croissante.
b) La suite (u_n) est strictement croissante et majorée par 1, donc elle converge vers ℓ.

4. $\dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{6\times 4^n} \leqslant \ln u_n \leqslant 1 - \dfrac{1}{2^n}$, donc $\dfrac{5}{6} \leqslant \ell \leqslant 1.$

99 **1.** Voir le corrigé de l'exercice **98.1.**

2. $(\mathrm{P}_n) : 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

$(\mathrm{P}_1) : 1^2 = \dfrac{1\times 2\times 3}{6} = 1$. Donc (P_1) est vraie.

Si (P_n) est vraie, alors :

$\mathrm{P}_{n+1} : 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

soit : $\left(\dfrac{n+1}{6}\right)(2n^2 + n + 6n + 6) = \dfrac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}.$

Or $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$,
donc (P_{n+1}) est telle que

$1^2 + \ldots + (n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+1)}{6}.$

Donc (P_{n+1}) est vraie. Ainsi pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. $\ln(u_n) = \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) + \ldots + \ln\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n^4}\right) \leqslant \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) \leqslant \dfrac{1}{n^2} \\ \vdots \\ \dfrac{n}{n^2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n^2}{n^4}\right) \leqslant \ln\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right) \leqslant \dfrac{n}{n^2} \end{array}\right\} +$$

$$\frac{1+2+\ldots+n}{n^2} - \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{2n^4} \leqslant \ln u_n \leqslant \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$$

$$\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4} \leqslant \ln u_n \leqslant \frac{n(n+1)}{2n^2}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n(n+1)}{2n^2} = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{n^4} = 0,$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{\mathrm{e}}.$

100 **1. a)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(a\,\mathrm{e}^x + b) = \ln b = 0$, donc $b = 1$;

$f'(x) = \dfrac{a\,\mathrm{e}^x}{a\,\mathrm{e}^x + b}$, donc $f'(0) = \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{1}{2}$, soit $a = 1$.

Ainsi $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x + 1)$. La proposition est vraie.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\mathrm{e}^x + 1) - \ln \mathrm{e}^x$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1 + \mathrm{e}^{-x}) = 0.$

La proposition est vraie.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln \mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-x})}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[1 + \dfrac{\ln(1+\mathrm{e}^{-x})}{x}\right] = 1.$

La proposition est vraie.

d) $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$. La proposition est fausse.

101 **1.** $f_1'(x) = 2 + \dfrac{2x}{x^2+1} > 0$

x	0		$+\infty$
f_1'		$+$	
f_1	-2	$\nearrow$	$+\infty$

2. a) $f_n'(x) = 2 + \dfrac{2x}{n(x^2+1)} > 0$ donc f_n est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

x	0	α	1	$+\infty$
f_n'		$+$		
f_n	-2	0	$\dfrac{\ln 2}{n}$	$+\infty$

b) c) f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$ et $f(0)f(1) < 0$ donc il existe dans cet intervalle α unique tel que $f_n(\alpha) = 0$.
De plus, $f_n(x) > 0$ pour $x \geqslant 1$, donc α est la seule solution sur $[0 ; +\infty[$.

3. $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$ donc $2\alpha_{n+1} - 2 = \dfrac{\ln(\alpha_{n+1}^2 + 1)}{n+1}$,

soit $f_n(\alpha_{n+1}) = 2\alpha_{n+1} - 2 + \dfrac{\ln(\alpha_{n+1}^2 + 1)}{n}$
$= \dfrac{\ln(\alpha_{n+1}^2 + 1)}{n} - \dfrac{\ln(\alpha_{n+1}^2 + 1)}{n+1}$

donc $f_n(\alpha_{n+1}) = -\dfrac{\ln(\alpha_{n+1}^2 + 1)}{n(n+1)} > 0.$

4. a) $f_n(\alpha_n) = 0$, $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$ et f est strictement croissante donc $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ et la suite (α_n) est croissante.
b) La suite (α_n) est croissante et majorée par 1, donc convergente.

$f_n(\alpha_n) = 0$ donc $\alpha_n = 1 - \dfrac{\ln(\alpha_n^2 + 1)}{2n}.$

$\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{\ln(\alpha_n^2 + 1)}{2n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1.$

102 **1. a)** $f'(x) = \dfrac{\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2} - 1 = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}}}{x} - 1$

car $x > 0$

$f'(x) = \dfrac{2 - \ln(x)}{2x\sqrt{x}} - 1 = \dfrac{2 - \ln(x) - 2x\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}.$

$2x\sqrt{x} > 0$ pour tout $x > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $2 - \ln(x) - 2x\sqrt{x} = -\left[2(x\sqrt{x} - 1) + \ln(x)\right].$

b) $N(1) = 0$.

Si $0 < x < 1$, $x\sqrt{x} - 1 < 0$ et $\ln(x) < 0$ donc $N(x) > 0$.

Si $x > 1$, $x\sqrt{x} - 1 > 0$ et $\ln(x) > 0$ donc $N(x) < 0$.

c)

x	0		1		$+\infty$
f'		+	0	−	
f		↗	0	↘	

2. a) D'après la question **1.**, pour tout x, $f(x) \leqslant 0$, soit $\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} + 1 - x \leqslant 0$, d'où $\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \leqslant x - 1 \leqslant 1$ car $x \leqslant 2$.

De plus, pour tout x de $[1 ; 2]$, $\ln(x) \geqslant 0$, donc $0 \leqslant \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$.

b) *Initialisation*. Pour $n = 0$, la proposition est vraie.

Hérédité. Si u_n appartient à l'intervalle $[1 ; 2]$ alors d'après la question **a)**, $\dfrac{\ln(u_n)}{\sqrt{u_n}} \in [0 ; 1]$ donc u_{n+1} appartient à l'intervalle $[1 ; 2]$.

Conclusion. Pour tout n, u_n appartient à $[1 ; 2]$.

3. a) $u_{n+1} - u_n = f(u_n)$. Or $f(x) < 0$ pour x appartenant à l'intervalle $[1 ; 2]$ donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

b) La suite (u_n) est strictement décroissante et minorée par 1 donc elle est convergente.

La fonction f étant continue sur I, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell)$ et la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $f(\ell) = 0$ donc $\ell = 1$.

103 **1.** $\dfrac{P_s}{P_e} = \dfrac{I_s^2}{I_e^2} = \dfrac{U_s^2}{U_e^2}$

donc $G_P = 10 \log \dfrac{P_s}{P_e} = 20 \log \dfrac{I_s}{I_e} = 20 \log \dfrac{U_s}{U_e}$,

donc $G_P = G_I = G_U$.

2. Pas de gain de tension.

3. $G_I < 0$ signifie que $I_s < I_e$.

4. $G_P = 6$ équivaut à $\log \dfrac{P_s}{P_e} = \dfrac{3}{5}$, soit $\dfrac{P_s}{P_e} = 10^{3/5}$.

CHAPITRE 6

Fonctions trigonométriques

ACTIVITÉS (page 168)

Activité 1

Voir le manuel. On remarque que la courbe représentant la fonction cosinus peut s'obtenir à partir de la courbe représentant la fonction sinus par la translation de vecteur $-\frac{\pi}{2}\vec{i}$.

Activité 2

1 **a)** M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
b) M' a pour coordonnées (cos(t) ; – sin(t)).

2 **a)** A et A' sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
b) B et B' sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

3 **a)** M_1 a pour coordonnées (cos(t) ; sin(t)).
b) M et M_1 sont confondus.

4 **a)** A_1 s'obtient à partir de A par la translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.
b) B_1 s'obtient à partir de B par la translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.

5 **a)** La courbe que décrit le point A est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. La courbe que décrit le point B est symétrique par rapport à l'origine du repère.
b) Par la translation de vecteur $4k\pi\vec{i}$, k appartient à $\mathbb{R}$.

PROBLÈME OUVERT

Notons r le rayon du quart de cercle et x la mesure en radians de l'angle $\widehat{IOM}$ telle que x appartient à l'intervalle $I = \left[0 \,;\, \frac{\pi}{2}\right[$.

IN = r tan(x) et arc(IM) = $\frac{2\pi r x}{2\pi} = rx$.

Donc les trajets proposés ont la même longueur si et seulement si tan(x) = 1 + x **(1)**.

Il s'agit désormais de savoir si cette équation a une solution dans I.

Avant le cours

Avec GéoGébra, on trace la droite d'équation $y = 1 + x$ et la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \tan(x)$ avec x appartenant à I. Il semble que ces courbes ont un seul point commun A de coordonnées (1,13 ; 2,13). Graphiquement, il semble qu'il existe une seule valeur a de x pour laquelle les deux trajets ont la même longueur.

Après le cours

Pour tout x de I, l'équation **(1)** équivaut à :

$$(1 + x)\cos(x) - \sin(x) = 0.$$

Notons f la fonction définie pour tout x de I par :

$$f(x) = (1 + x)\cos(x) - \sin(x).$$

f est dérivable sur I et pour tout x de I,

$f'(x) = \cos(x) - x\sin(x) - \cos(x) = -x\sin(x)$.

$f'(x) = 0$ pour $x = 0$ et pour tout x de I, $f'(x) < 0$.

Il en résulte que f est continue, strictement décroissante sur I et que $f(x)$ appartient à l'intervalle]–1 ; 1].

Ainsi 0 a un antécédent unique a sur I (théorème des valeurs intermédiaires).

À la calculatrice, on démontre que 1,13 est une valeur approchée de a à 10^{-2} près.

EXERCICES Application (page 172)

1 **1.** $f(-x) = \sin(-2x) = -\sin(2x) = -f(x)$.

2. $f'(x) = 2\cos(2x)$.

$f'(x)$ est positif sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$ et négatif sur $\left[\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

3.

x	$-\dfrac{\pi}{2}$		$-\dfrac{\pi}{4}$		0		$\dfrac{\pi}{4}$		$\dfrac{\pi}{2}$
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2 **1.** Pour tout nombre x et tout entier relatif k,

$$g\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(4x + \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = \cos\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) = g(x).$$

2. $g'(x) = -4\sin\left(4x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Si $x \in \left[-\dfrac{\pi}{16}\,;\dfrac{3\pi}{16}\right]$ alors $4x + \dfrac{\pi}{4} \in [0\,;\pi]$ et $\sin\left(4x + \dfrac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$.

g est décroissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{16}\,;\dfrac{3\pi}{16}\right]$.

– Si $x \in \left[-\dfrac{\pi}{8}\,;-\dfrac{\pi}{16}\right]$ alors $4x + \dfrac{\pi}{4} \in \left[-\dfrac{\pi}{4}\,;0\right]$ et $g'(x) \geqslant 0$.

– Si $x \in \left[\dfrac{3\pi}{16}\,;\dfrac{3\pi}{8}\right]$ alors $4x + \dfrac{\pi}{4} \in \left[\pi\,;\dfrac{13\pi}{4}\right]$ et $g'(x) \geqslant 0$.

Ainsi g est croissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{8}\,;-\dfrac{\pi}{16}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{16}\,;\dfrac{3\pi}{8}\right]$.

3 **a)** $S = \left[\dfrac{5\pi}{8}\,;\dfrac{7\pi}{8}\right] \cup \left[\dfrac{13\pi}{8}\,;\dfrac{15\pi}{8}\right]$.

b. $S = \left]-\pi\,;-\dfrac{3\pi}{4}\right[\cup \left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right] \cup \{\pi\}$.

c) $S = \left]\dfrac{\pi}{3}\,;\dfrac{4\pi}{9}\right[\cup \left]\pi\,;\dfrac{10\pi}{9}\right[\cup \left]\dfrac{5\pi}{3}\,;\dfrac{16\pi}{9}\right[$.

d) $S = \left]-\pi\,;-\dfrac{17\pi}{24}\right[\cup \left]-\dfrac{5\pi}{8}\,;-\dfrac{5\pi}{24}\right[\cup \left]\dfrac{3\pi}{8}\,;\dfrac{19\pi}{24}\right[\cup \left]\dfrac{7\pi}{8}\,;\pi\right]$.

e) $S = \left[0;\dfrac{\pi}{12}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{4};\dfrac{7\pi}{12}\right[\cup \left]\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{13\pi}{12}\right[\cup \left]\dfrac{5\pi}{4};\dfrac{19\pi}{12}\right[\cup \left]\dfrac{7\pi}{4};2\pi\right[$.

4 **1.** $f'(x) = 2\cos(2x) - \sqrt{2}$.

Sur I, $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{8}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{8}\,;\dfrac{9\pi}{8}\right] \cup \left[\dfrac{15\pi}{8}\,;2\pi\right[$.

2.

x	0		$\dfrac{\pi}{8}$		$\dfrac{7\pi}{8}$		$\dfrac{9\pi}{8}$		$\dfrac{15\pi}{8}$		2π
f	0	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\pi\sqrt{2}}{8}$	$\searrow$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{7\pi\sqrt{2}}{8}$	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{9\pi\sqrt{2}}{8}$	$\searrow$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{15\pi\sqrt{2}}{8}$	$\nearrow$	$-2\sqrt{2}\pi$

5 $g'(x) = -2\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) - 1$.

Sur I,

$g'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) \leqslant -\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x \in \left[-\pi\,;-\dfrac{11\pi}{12}\right] \cup \left[-\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{\pi}{12}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{4}\,;\pi\right]$.

g est croissante sur les intervalles précédents et décroissante sur les autres intervalles de I.

6 **a)** L'équation équivaut à

$$\begin{cases} X = \sin(x) \\ 2X^2 - X - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x) = -\dfrac{1}{2} \\ \text{ou} \\ \sin(x) = 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \left\{ x \in -\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi\,;-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\,;\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \right\}$, où $k \in \mathbb{Z}$.

b) L'équation équivaut à :

$$\begin{cases} X = \cos(x) \\ 2X^2 - X - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x) = -\dfrac{1}{2} \\ \text{ou} \\ \cos(x) = 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \left\{ x \in -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\,;2k\pi\,;\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\}$, où $k \in \mathbb{Z}$.

7 **1.** L'équation équivaut à :

$$\begin{cases} X = \sin(x) \\ 12X^2 + X - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x) = -\dfrac{1}{3} \\ \text{ou} \\ \sin(x) = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Une représentation sur un cercle trigonométrique permet d'affirmer l'existence de 4 solutions sur $[0\,;2\pi]$.

2. $x \approx -2{,}802$ ou $x \approx -0{,}340$ ou $x \approx 0{,}253$ ou $x \approx 2{,}889$.

8 **1.** $P(1) = 0$.

2. $P(x) = (x-1)(2x^2 + 3x - 2)$.

3. a) On peut écrire $P(x) = 2(x-1)(x+2)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		$\dfrac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x - \dfrac{1}{2}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

b) L'inéquation équivaut à

$$2(\cos(x) - 1)(\cos(x) + 2)\left(\cos(x) - \frac{1}{2}\right) \leqslant 0.$$

• Sur $]-\pi\,;\pi]$, $\cos(x) - 1 \leqslant 0$ et $\cos(x) + 2 \geqslant 0$.

• $\cos(x) - \dfrac{1}{2}$ est positif sur $\left[-\dfrac{\pi}{3}\,;\dfrac{\pi}{3}\right]$ et négatif sur $\left]-\pi\,;-\dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{3}\,;\pi\right]$. D'où le tableau de signes :

x	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{3}$				$\dfrac{\pi}{3}$		π
$\cos(x) - 1$		$-$		$-$	0	$-$		$-$	
$\cos(x) + 2$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$\cos(x) - \dfrac{1}{2}$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$(\cos(x) - 1)$ $\cos(x) + 2)$ $\left(\cos(x) - \dfrac{1}{2}\right)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S} = \left[-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}\right].$$

9 **1.** $P(X) = -6(X + 1)(2X - 1)$.

2. a) $f'(x) = -12 \sin(x) \cos^2(x) - 6 \sin(x) \cos(x) + 6 \sin(x)$
$= \sin(x)(-12 \cos^2(x) - 6 \cos(x) + 6)$.

b) $f'(x) = -12 \sin(x)(\cos(x) + 1)\left(\cos(x) - \frac{1}{2}\right)$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$-12 \sin(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\cos(x) + 1$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$\cos(x) - \frac{1}{2}$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
f'	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	4	↘	$\frac{3}{4}$	↗	6	↘	$\frac{3}{4}$	↗	4

EXERCICES Activités de recherche (page 176)

14 **Étude d'une fonction**

• ***Les outils***

– Dérivées des fonctions trigonométriques.

– Dérivée d'une fonction intermédiaire.

• ***Les objectifs***

– Savoir exploiter une fonction intermédiaire pour étudier le signe d'une dérivée et en déduire les variations d'une fonction.

1. Pour tout x de I, $f'(x) = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$.

2. a) n est la somme de deux fonctions dérivables sur I et est donc dérivable sur I. $n'(x) = -x \sin(x)$.

b) Pour tout nombre x de $]0 ; \pi]$, $\sin(x) > 0$ et $n'(x) < 0$. La fonction n est décroissante sur $]0 ; \pi]$:

x	0		π
n	0	↘	$-\pi$

c) $f'(x)$ et $n(x)$ ont le même signe. De **2. b)** on déduit que $n(x) < 0$ pour tout nombre x de I.

La fonction f est donc décroissante sur I.

15 **Étude d'une fonction (suite)**

• ***Les outils***

– Continuité et dérivée d'une fonction en un point.

– Dérivée seconde.

• ***Les objectifs***

– Savoir démontrer qu'une fonction est continue et dérivable en un point.

– Savoir encadrer un taux d'accroissement.

1. a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

b) Sur $]0 ; \pi]$, g est quotient de deux fonctions continues. Le dénominateur ne s'annule pas sur $]0 ; \pi]$, donc g est continue sur $]0 ; \pi]$.

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = g(0) = 1$. Donc g est continue en 0.

2. a) Dire que g est dérivable en 0 équivaut à dire que $\frac{g(h) - g(0)}{h}$ a une limite finie en 0.

Or $\frac{g(h) - g(0)}{h} = \frac{\sin(h) - h}{h^2}$.

b) Pour tout h de $]0 ; \pi]$, $\Phi'(x) = \cos(h) - 1 < 0$, d'où le tableau de variation :

h	0		π
Φ	0	↘	$-\pi$

On en déduit que $\Phi(h) < 0$ sur $]0 ; \pi]$.

c) $\Psi'(h) = 3h^2 - 1 + \cos(h)$. L'étude du signe de $\Psi'(h)$ est impossible à ce stade.

d) $\Psi''(h) = 6h - \sin(h)$ et $\Psi'''(h) = 6 - \cos(h)$.

e) $\Psi'''(h) > 0$ pour tout nombre h de $]0 ; \pi]$.

$\Psi''(h)$ est donc croissante sur $]0 ; \pi]$.

f) $\Psi''(0) = 0$. D'après **2. c)**, $\Psi''(h) > 0$ sur $]0 ; \pi]$.

Ψ' est donc croissante sur $]0 ; \pi]$. $\Psi'(0) = 0$.

Donc $\Psi'(h)$ est positif pour tout h de $]0 ; \pi]$.

g) Ainsi Ψ est croissante sur $]0 ; \pi]$. $\Psi(0) = 0$.

Sur $]0 ; \pi]$, $\Psi(h) > 0$, ce qui équivaut à

$$\frac{\sin(h) - h}{h^2} > -h.$$

On a $-h < \frac{\sin(h) - h}{h^2} < 0$ pour tout nombre h de $]0 ; \pi]$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin(h) - h}{h^2} = 0$.

g est donc dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

16 **Narration de recherche**

f et g sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

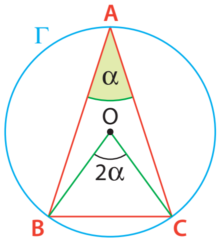
• $f'(x) = \frac{1}{2} + \cos(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

f' s'annule et change de signe pour tous les nombres de la forme $\pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. f admet donc une infinité d'extremums locaux.

• $g'(x) = 2x - 3 \cos(x)$, et $g''(x) = 2 + 2 \sin(x) \geqslant 0$ pour tout nombre x. Ainsi g' est croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} g'(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g'(x) = +\infty$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, g' s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$. g possède donc un extremum local.

17 Narration de recherche



O est le centre du cercle.

H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC. L'angle $\widehat{BOC}$ est égal à 2α.

$BH = \sin(\alpha)$; $OH = \cos(\alpha)$;

$AH = 1 + \cos(\alpha)$.

Pour $\alpha \in [0\,;\,\pi]$, l'aire du triangle ABC est

$$\mathcal{A}(\alpha) = \sin(\alpha)(1 + \cos(\alpha))\ ;$$

et $\mathcal{A}'(\alpha) = \cos(\alpha)(1 + \cos(\alpha)) - \sin^2(\alpha)$

$= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) + \cos(\alpha)$

$= 2\cos^2(\alpha) + \cos(\alpha) - 1.$

La forme factorisée du polynôme $2X^2 + X - 1$ est $2(X + 1)\left(X - \frac{1}{2}\right)$. On en déduit :

$$\mathcal{A}'(x) = 2(\cos(\alpha) + 1)\left(\cos(\alpha) - \frac{1}{2}\right).$$

Pour $\alpha \in [0\,;\,\pi]$, $\mathcal{A}'(x)$ est du signe de $\cos(\alpha) - \frac{1}{2}$, c'est-à-dire positif sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{3}\right]$ et négatif sur $\left[\frac{\pi}{3}\,;\,\pi\right]$.

L'aire de ABC est donc maximale pour $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

18 TD – Quand la musique fait vibrer

A. 1. $T = \frac{1}{F}$.

2. a) On note k ce rapport. $k^{12} = 2 \Leftrightarrow k\ \sqrt[12]{2} = e^{\frac{1}{12}}\ln 2$.

b) Il y a 9 demi-tons entre le DO_3 et le LA_3.

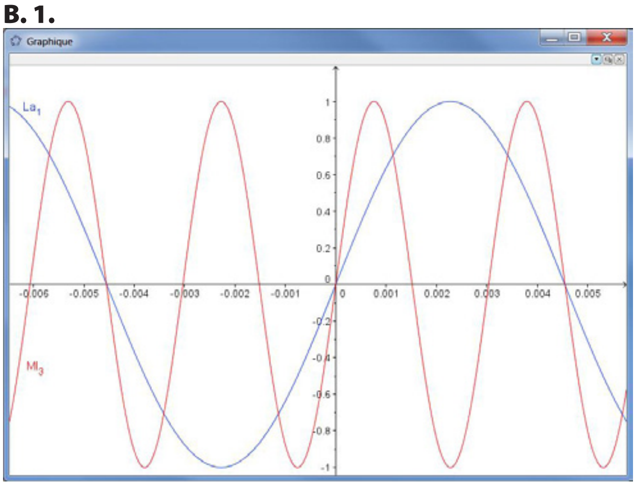
Le rapport $\dfrac{\text{fréquence du } LA_3}{\text{fréquence}}$ du DO_3 vaut $\left(e^{\frac{3}{4}\ln 2}\right) = e^{\frac{3}{4}}\ln 2$.

c) Cette fréquence vaut $\dfrac{440}{e^{\frac{3}{4}\ln 2}} \approx 261{,}63$ Hz.

d)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Note\octave	0	1	2	3	4	5	6	7
2	Do	32,70Hz	65,41Hz	130,81Hz	261,63Hz	523,25Hz	1046,50Hz	2093,00Hz	4186,01Hz
3	Do#	34,65Hz	69,30Hz	138,59Hz	277,18Hz	554,37Hz	1108,73Hz	2217,46Hz	4434,92Hz
4	Ré	36,71Hz	73,42Hz	146,83Hz	293,66Hz	587,33Hz	1174,66Hz	2349,32Hz	4698,64Hz
5	Ré#-Mib	38,89Hz	77,78Hz	155,56Hz	311,13Hz	622,25Hz	1244,51Hz	2489,02Hz	4978,03Hz
6	MI	41,20Hz	82,41Hz	164,81Hz	329,63Hz	659,26Hz	1318,51Hz	2637,02Hz	5274,04Hz
7	Fa	43,65Hz	87,31Hz	174,61Hz	349,23Hz	698,46Hz	1396,91Hz	2793,83Hz	5587,65Hz
8	Fa#	46,25Hz	92,50Hz	185,00Hz	369,99Hz	739,99Hz	1479,98Hz	2959,96Hz	5919,91Hz
9	Sol	49,00Hz	98,00Hz	196,00Hz	392,00Hz	783,99Hz	1567,98Hz	3135,96Hz	6271,93Hz
10	Sol#	51,91Hz	103,83Hz	207,65Hz	415,30Hz	830,61Hz	1661,22Hz	3322,44Hz	6644,88Hz
11	La	55,00Hz	110,00Hz	220,00Hz	440,00Hz	880,00Hz	1760,00Hz	3520,00Hz	7040,00Hz
12	La#-Sib	58,27Hz	116,54Hz	233,08Hz	466,16Hz	932,33Hz	1864,66Hz	3729,31Hz	7458,62Hz
13	SI	61,74Hz	123,47Hz	246,94Hz	493,88Hz	987,77Hz	1975,53Hz	3951,07Hz	7902,13Hz

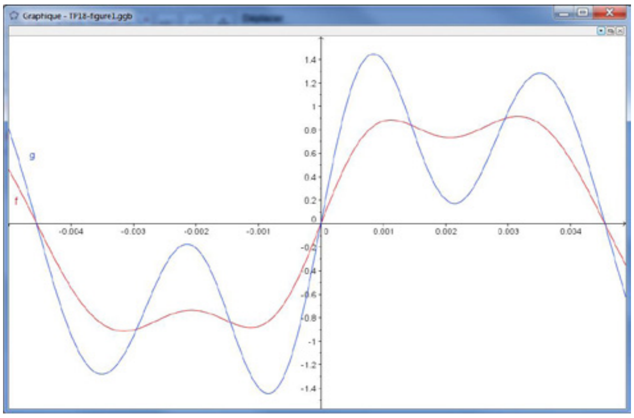
B. 1.



2. Le LA_1 a une fréquence de $\dfrac{440}{2^2} = 110$ Hz.

Ses harmoniques sont, à 3 Hz près, les notes LA_2, MI_3, LA_3, MI_{14}, LA_4, SI_4, MI_5, LA_5, DO_6, MI_6, LA_6, SOL_7, LA_7.

3.



C. 1. et **2.** Le programme suivant est réalisé sous XCas. L'utilisation de la calculatrice limitera généralement le programme à la génération de a_1, a_2, …, a_n.

```
Prog   Edit   Ajouter
aleaphone():={
local n,h,j;
n:=alea(1,3,10);
h:=sin(2*110*pi*x);
for(j:=0;j<=n[0];j++){
h:=h+alea(0,1)*sin(2*110(j+1)*pi*x);
};
plotfunc(h,x=-0.01..0.01,xstep=0.0001);
}
```

19 TD – La fonction tangente

A. 1. a) Pour tout nombre t de l'intervalle I, (OM) et T ne sont pas parallèles.

b. $\overrightarrow{OM}(\cos(t)\,;\,\sin(t))$.

c. L'application du théorème de Thalès dans le triangle OAN donne $\tan(t) = \dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}$ pour tout $t \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$. Par symétrie, on généralise ce résultat à $t \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

2. a) La fonction tangente est le quotient de deux fonctions dérivables sur I. Le dénominateur ne s'annule pas sur I. La fonction tangente est donc dérivable sur I et $\tan'(t) = \dfrac{1}{\cos^2(t)}$.

b) Pour tout t de I,

$$\tan(-t) = \frac{\sin(-t)}{\cos(-t)} = \frac{-\sin(t)}{\cos(t)} = -\tan(t).$$

La représentation graphique de la fonction tangente est donc symétrique par rapport à l'origine du repère.

c) La dérivée de la fonction tangente étant positive sur I, la fonction tangente est croissante sur cet intervalle :

t	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
tan	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3. a) $\tan(0) = \dfrac{\sin(0)}{\cos(0)} = 0$, donc $\mathscr{C}_{\tan}$ passe par O.

d a pour équation réduite $y = t$.

b) $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} - 1 = \dfrac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} > 0$ sur I.

f est croissante sur I et $f(0) = 0$.

Ainsi $f(x) \leqslant 0$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,0\right]$ et $f(x) \geqslant 0$ sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

On en déduit que d est au-dessus de $\mathscr{C}_{\tan}$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,0\right]$ et en-dessous de $\mathscr{C}_{\tan}$ sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

B. 1. La fonction tangente n'est pas définie pour les valeurs $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

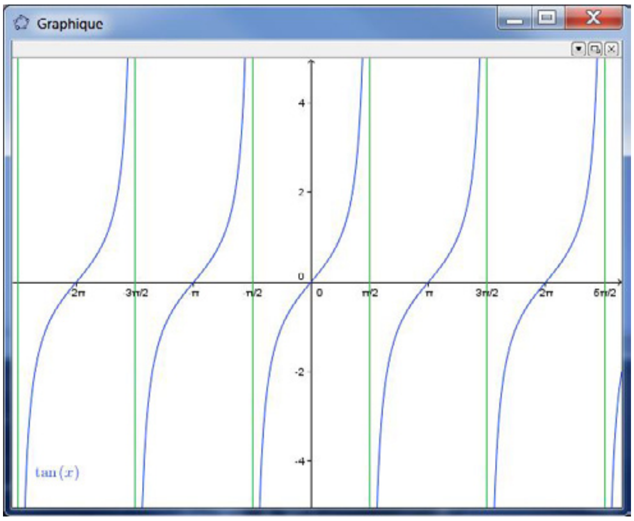
2. $\tan(t+\pi) = \dfrac{\sin(t+\pi)}{\cos(t+\pi)} = \dfrac{-\sin(t)}{-\cos(t)} = \tan(t)$ pour tout $t \in \mathscr{D}$.

$\mathscr{C}_{\tan}$ est invariante par la translation de vecteur $\pi\vec{u}$.

3. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}+k\pi} \cos(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}+k\pi} \sin(x) = \pm 1$,

d'où $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}+k\pi} \tan(x) = \pm\infty$ et la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ est asymptote à $\mathscr{C}_{\tan}$.

4.



20 **TD – Le mystérieux algorithme des calculatrices**

2. On constate que les résultats sont très proches.

3. a) $\tan^2(t) = \dfrac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)} = \dfrac{1-\cos^2(t)}{\cos^2(t)} = \dfrac{1}{\cos^2(t)} - 1$

$$\Leftrightarrow \cos^2(t) = \frac{1}{1+\tan^2(t)}.$$

b) Sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\cos(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2(t)}}$ et $\sin(t) = \dfrac{\tan(t)}{\sqrt{1+\tan^2(t)}}$.

4.

```
VARIABLES
  alpha EST_DU_TYPE NOMBRE
  tab EST_DU_TYPE LISTE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  resultat EST_DU_TYPE NOMBRE
  y EST_DU_TYPE NOMBRE
  temp EST_DU_TYPE NOMBRE
  cosinus EST_DU_TYPE NOMBRE
  sinus EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  k PREND_LA_VALEUR 0
  x PREND_LA_VALEUR 1
  y PREND_LA_VALEUR 0
  //Peuplement de la table de valeurs servant aux calculs
  tab[0] PREND_LA_VALEUR atan(1)
  tab[1] PREND_LA_VALEUR atan(0.1)
  tab[2] PREND_LA_VALEUR atan(0.01)
  tab[3] PREND_LA_VALEUR atan(0.001)
  tab[4] PREND_LA_VALEUR atan(0.0001)
  LIRE alpha
  //la ligne suivante marque le début de
  //l'algorithme de CORDIC
  TANT_QUE (alpha>0.0001) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    TANT_QUE (alpha<tab[k]) FAIRE
      DEBUT_TANT_QUE
      k PREND_LA_VALEUR k+1
      FIN_TANT_QUE
    alpha PREND_LA_VALEUR alpha-tab[k]
    temp PREND_LA_VALEUR x
    x PREND_LA_VALEUR x-y*pow(0.1,k)
    y PREND_LA_VALEUR y+temp*pow(0.1,k)
    FIN_TANT_QUE
  // Le résultat est calculé et affiché
  resultat PREND_LA_VALEUR y/x
  cosinus PREND_LA_VALEUR 1/(sqrt(1+pow(resultat,2)))
  sinus PREND_LA_VALEUR resultat/(sqrt(1+pow(resultat,2)))
  AFFICHER resultat
  AFFICHER cosinus
  AFFICHER sinus
FIN_ALGORITHME
```

EXERCICES Entraînement (page 182)

DE TÊTE

21 $f'(x) = 3\cos(x) + 2\sin(x)$.

22 $f'(x) = 2\cos(2x) + 3\sin(x)$.

23 $\lim\limits_{x \to +\infty} x + \sin(x) = +\infty$.

24 $\mathscr{S} = \left\{\dfrac{\pi}{6}\,;\,\dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

25 Oui car la fonction cosinus est strictement décroissante de l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ dans $[-1\,;\,1]$.

26 $f'(x) = 1 + \cos(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$. Oui.

CALCUL DE DÉRIVÉES – TANGENTES

27 **a)** $f'(x) = 3\cos(x) + 2\sin(x)$ sur $\mathscr{D}$.

b) $f'(x) = -\sin^2(x) + \cos^2(x)$
$= \cos(2x)$ sur $\mathscr{D}$.

28 **a)** $f'(x) = \dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$ sur $\mathscr{D}$.

b) $f'(x) = \dfrac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ sur $\mathscr{D}$.

29 **a)** $f'(x) = \dfrac{1}{1-\cos(x)}$ sur $\mathscr{D}$.

b) $f'(x) = \dfrac{1 + 2(\cos(x) + \sin(x))}{(2+\cos(x))^2}$ sur $\mathscr{D}$.

30 **a)** $f'(x) = -2\sin(2x)$ sur $\mathcal{D}$.

b) $f'(x) = -2\cos\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right)$ sur $\mathcal{D}$.

31 **a)** $f'(x) = -2\sin(2x-1)\sin(2x+3) + 2\cos(2x-1)\cos(2x+3) = 2\cos(4x+2)$ sur $\mathcal{D}$.

b) $f'(x) = \dfrac{-2-(1+2x)\sin(2x)-(1-2x)\cos(2x)}{(\sin(2x)+x)^2}$.

32 **a)** $f'(x) = -2\sin(x)\cos(x)$ sur $\mathcal{D}$.

b) $f'(x) = \dfrac{\sin(x)(\cos^2(x)+1)}{\cos^2(x)}$ sur $\mathcal{D}$.

33 **a)** $f'(x) = \dfrac{-\sin(x)}{2\sqrt{\cos(x)}}$ sur $\mathcal{D}$.

b) $f'(x) = \cos(x)\,e^{\sin(x)}$ sur $\mathcal{D}$.

c) $f'(t) = -e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\sin(t)$ sur $\mathcal{D}$.

34 Pour tout nombre x,

$$f'(x) + 2f(x) = \cos(x)\,e^{-2x} + (1+\sin(x))(-2e^{-2x}) + 2(1+\sin(x))e^{-2x} = e^{-2x}\cos(x).$$

35 **a)** Pour tout nombre x,
$f'(x) = -2\sin(2x) + 2\cos(2x)$,
$f''(x) = -4\cos(2x) - 4\sin(2x)$,
$f'''(x) = 8\sin(2x) - 8\cos(2x)$.

b) Pour tout nombre x différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$f'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)},$$

$$f''(x) = \frac{\cos^3(x) + 2\sin^2(x)\cos(x)}{\cos^4(x)},$$

$$f'''(x) = \frac{-3\sin(x)\cos^2(x) + 4\cos^2(x)\sin(x) - 2\sin^3(x))\cos^4(x)}{\cos^8(x)} + \frac{4(\cos^3(x) + 2\sin^2(x)\cos(x))\sin(x)\cos^3(x)}{\cos^8(x)} = \frac{\sin(x)(5+\sin^2(x))}{\cos^4(x)}.$$

36 Pour tout nombre x, $f'(x) = \cos(x)$ et $g'(x) = -\sin(x)$.

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $g'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$: les tangentes ne sont pas parallèles.

37 **1.** $f'(t+2\pi) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(t+2\pi+h) - f(t+2\pi)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(t+h)-f(t)}{h} = f'(t)$.

L'implication est donc vraie.

2. $f'(t) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-t+h) - f(-t)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(t-h)-f(t)}{h}$.

En posant, pour tout nombre h, $H = -h$, on obtient :

$$f'(-t) = -\lim_{H\to 0} \frac{f(t+H)-f(t)}{H} = -f'(t).$$

L'implication est donc vraie.

LIMITES

38 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{x} = 2\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{2x} = 2$.

39 *Corrigé sur le site élève.*

40 **a)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)-\sin(4x)}{3x} = \dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x} - \dfrac{4}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(4x)}{4x} = -1$.

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sin(x+1)}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x-1} \times \dfrac{\sin(x+1)}{x+1}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

41 **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\sin(X)}{X} = 1$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim\limits_{X\to 0}\left(\dfrac{1}{X}\times\dfrac{\sin X}{X}\right) = +\infty$.

42 **a)** Pour tout nombre x, $2x - 3 \leqslant 2x - 3\cos(x)$.
$\lim\limits_{x\to+\infty}(2x - 3\cos(x)) = +\infty$.

b) Pour tout nombre x, $\dfrac{-x}{x^3+1} \leqslant \dfrac{x\cos(x)}{x^2+1} \leqslant \dfrac{x}{x^2+1}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cos(x)}{x^2+1} = 0.$$

c) Pour tout nombre $x > 0$:

$$\frac{x-1}{2x-1} \leqslant \frac{x+\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{2x-1} \leqslant \frac{x+1}{2x-1}\ ;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{2x-1} = \frac{1}{2}.$$

43 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{x} = 3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{3x} = 3$.

Pour $a = 3$, f est continue sur $\mathbb{R}$.

44 Pour tout nombre $x \geqslant -1$,

$$\sqrt{x+1} - 3 \leqslant f(x) < \sqrt{x+1} + 3.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

45 **1.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

2. a) Pour tout nombre $x > 0$, $-\dfrac{1}{x} < f(x) < \dfrac{1}{x}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

46 *Corrigé sur le site élève.*

47 **1.** Pour tout nombre x, $1 \leqslant 3 - 2\cos(x) \leqslant 5$, d'où

$$\frac{1}{5} \leqslant \frac{1}{3-2\cos(x)} \leqslant 1.$$

2. Le théorème des gendarmes permet de conclure que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{3-2\cos(x)} = +\infty.$$

48 **a)** (u_n) n'admet pas de limite.

b) Pour tout entier n, $\dfrac{-n}{n^2+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n}{n^2+1}$. (u_n) converge vers 0.

c) Pour tout entier n, $u_n \geqslant n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

49 **a)** Pour tout entier n, $-\dfrac{1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. (u_n) converge vers 0.

b) Pour tout entier n, $\dfrac{-(n+1)}{1-3n^2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n+1}{1-3n^2}$. (u_n) converge vers 0.

RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS ET D'INÉQUATIONS

50 *Corrigé sur le site élève.*

51 **a)** $\mathcal{S} = \left[-\dfrac{7\pi}{12} + 2k\pi \,;\, \dfrac{\pi}{12} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\right]$.

b) $\sin(x) = \cos(x) \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2-x}\right)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} - x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{2} + x + 2k\pi \text{ (pas de solution)} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) L'équation équivaut à : $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Donc l'ensemble solution est :

$$\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{5\pi}{24} + k\pi \,;\, \dfrac{13\pi}{24} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\right\}.$$

52 *Corrigé sur le site élève.*

53 **a)** $\mathcal{S} = \left[\dfrac{\pi}{3} \,;\, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

b) $\mathcal{S} = \left[-\dfrac{2\pi}{3} \,;\, -\dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{3} \,;\, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

c) L'ensemble des solutions est constitué de la réunion de tous les intervalles $\left[\dfrac{\pi}{3} + k\pi \,;\, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right]$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

54 **a)** L'inéquation est équivalente à :

$$4\left(\sin(x) - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sin(x) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \leqslant 0.$$

On dresse un tableau de signes sur $]-\pi \,;\, \pi]$:

x	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\sin(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	0	$-$	
$\sin(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$4\sin^2(x) - 3$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble solution est donc :

$$\mathcal{S} = \left]-\pi \,;\, -\dfrac{2\pi}{3}\right] \cup \left[-\dfrac{\pi}{3} \,;\, \dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{2\pi}{3} \,;\, \pi\right].$$

b) L'inéquation est équivalente à :

$$2\left(\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \geqslant 0.$$

On dresse un tableau de signes sur $]-\pi \,;\, \pi]$:

x	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{2\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{6}$		0
$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}$		$-$	|	$-$	0	$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	0
$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$2\cos^2\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	0	$-$	|
$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	0
$2\cos^2\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0

D'où l'ensemble solution :

$$\mathcal{S} = \left]-\pi \,;\, -\dfrac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\dfrac{2\pi}{3} \,;\, -\dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[-\dfrac{\pi}{3} \,;\, -\dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[0 \,;\, \dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{3} \,;\, \dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{2\pi}{3} \,;\, \dfrac{5\pi}{6}\right].$$

55 **a)** L'équation équivaut à :

$$\begin{cases} X = \cos(x) \\ 2X^2 - 3X - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x) = -\dfrac{1}{2} \\ \text{ou} \\ \cos(x) = 2 \text{ (pas de solution)} \end{cases}.$$

L'ensemble solution est donc $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{2\pi}{3} \,;\, \dfrac{4\pi}{3}\right\}$.

b) L'inéquation équivaut à : $2(\cos(x) - 2)\left(\cos(x) + \dfrac{1}{2}\right) \leqslant 0$.

Comme $\cos(x) - 2 < 0$ pour tout nombre x, cela revient à résoudre $\cos(x) + \dfrac{1}{2} \geqslant 0$, d'où :

$$\mathcal{S} = \left[0 \,;\, \dfrac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{4\pi}{3} \,;\, 2\pi\right[.$$

56 **a)** L'équation équivaut à :

$$\begin{cases} X = \sin(x) \\ 4X^2 + 2(1 - \sqrt{3})X - \sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x) = -\dfrac{1}{2} \\ \text{ou} \\ \sin(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

D'où :

$$\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{5\pi}{6} \,;\, -\dfrac{\pi}{6} \,;\, \dfrac{\pi}{3} \,;\, \dfrac{2\pi}{3}\right\}.$$

b) L'inéquation équivaut à : $4\left(\sin(x) + \dfrac{1}{2}\right)\left(\sin(x) - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \geqslant 0$.

On dresse un tableau de signes sur $]-\pi \,;\, \pi]$:

x	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\sin(x) + \frac{1}{2}$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$\sin(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	0	$-$	
$\left(4\sin(x) + \frac{1}{2}\right)\left(\sin(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

D'où :

$$\mathcal{S} = \left[-\frac{5\pi}{6} ; -\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3}\right].$$

57 *Corrigé sur le site élève.*

ÉTUDES DE FONCTIONS

58 **1.** Pour tout x de $\mathbb{R}$, $2 + \cos(x) \geqslant 1$ et $f(x)$ existe.

2. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(-x) = \dfrac{2}{2+\cos(-x)} = \dfrac{2}{2+\cos(x)} = f(x)$ et f est paire.

3. $f'(x) = \dfrac{2\sin(x)}{(2+\cos(x))^2} \geqslant 0$ et f est croissante sur $[0 ; \pi]$.

4. Tableau de variation :

x	$-\pi$		0		π
f	2	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	2

59 **A.** $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(h) - \sin(0)}{h} = 1$,

d'où $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

B. 1. a) $g'(x) = -x\sin(x)$ pour tout $x \in [0 ; 2\pi]$.
Sur $[0 ; 2\pi]$, $g'(x)$ est du signe de $-\sin(x)$, c'est-à-dire négatif sur $[0 ; \pi]$ et positif sur $[\pi ; 2\pi]$, d'où le tableau de variation :

x	0		π		2π
g	0	$\searrow$	$-\pi$	$\nearrow$	2π

b) g est continue et strictement croissante sur $[\pi ; 2\pi]$; $g(\pi) < 0$ et $g(2\pi) > 0$.
Il existe donc (théorème des valeurs intermédiaires) un nombre unique $\alpha \in [\pi ; 2\pi]$ tel que $g(\alpha) = 0$.

$$4{,}4 < \alpha < 4{,}5.$$

2. a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = f(0)$, donc f est continue en 0.

b. $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ est du signe de $g(x)$ sur $]0 ; 2\pi]$.

On obtient le tableau de variation :

x	0		α		2π
f	1	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	0

c) On en déduit l'existence d'un minimum pour f en α :

$$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = \cos(\alpha).$$

$$f(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = \cos(\alpha).$$

3. a) $\varphi'(x) = \cos(x) - 1 + \dfrac{x^2}{2}$; $\varphi''(x) = -\sin(x) + x$
et $\varphi'''(x) = -\cos(x) + 1$ pour tout $x \geqslant 0$.
Pour tout $x \geqslant 0$:
$\varphi'''(x) \geqslant 0$ donc φ'' est croissante.
$\varphi''(0) = 0$ donc $\varphi''(x) \geqslant 0$ et φ' est croissante.
$\varphi'(0) = 0$ donc $\varphi'(x) \geqslant 0$ et φ est croissante.
$\varphi(0) = 0$ donc $\varphi(x) \geqslant 0$, ce qui équivaut à

$$x - \sin(x) \leqslant \frac{x^3}{6}.$$

De plus, $\varphi''(x) \geqslant 0$ équivaut à $x - \sin(x) \geqslant 0$.

b) Pour tout $h > 0$, $\dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{\sin(h) - h}{h^2}$.

D'après **3. a)**, pour tout $h > 0$, $\dfrac{-h}{6} \leqslant \dfrac{\sin(h) - h}{h^2} \leqslant 0$.

On en déduit :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0 = f'(0).$$

60 *Corrigé sur le site élève.*

61 **1.** Vrai. Si $x \in \left[-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}\right]$ alors $2x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\cos(2x) \geqslant 0$.

2. Vrai. Pour tout x de I :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\cos(x)\sin(x)\cos(2x) - 2\sin(2x)\sin^2(x) \\ &= \sin(2x)\cos(2x) - 2\sin(2x)\sin^2(x) \\ &= \sin(2x)\,(\cos(2x) - 2\sin^2(x)) \\ &= \sin(2x)(1 - 4\sin^2(x)). \end{aligned}$$

Remarque. Pour tout x de I,

$$f'(x) = 4\sin(2x)\left(\frac{1}{2} - \sin(x)\right)\left(\frac{1}{2} + \sin(x)\right).$$

On en déduit :

x	$-\frac{\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{6}$		0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$
$\sin(2x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{1}{2} - \sin(x)$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{1}{2} + \sin(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{8}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{8}$	$\searrow$	0

3. Vrai.
4. Faux.
5. Vrai.

62 **1.** L'application du théorème de Pythagore donne $AM^2 = (x-1)^2 + \sin^2(x)$ pour tout $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

2. a) $f'(x) = 2(x-1) + 2\sin(x)\cos(x)$ et
$f''(x) = 2 + 2(\cos^2(x) - \sin^2(x)) = 2(1 + \cos(2x))$ pour tout $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

b. $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$. D'où :

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
f'	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\pi - 2$

c) f' est continue sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$. D'après les éléments précédents et le théorème des valeurs intermédiaires, on déduit qu'il existe une unique valeur $\alpha \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ telle que $f(\alpha) = 0$:

$$0{,}5 < \alpha < 0{,}6.$$

3. a)

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
f'		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$1+\left(\frac{\pi}{2}-1\right)^2$

b. La distance AM est minimale pour $x = \alpha$.

4. On a $M_0(\alpha\ ;\ \sin\alpha)$ et $\overrightarrow{AM_0}(\alpha - 1\ ;\ \sin\alpha)$.
$g'(\alpha) = \cos\alpha$. La tangente en M_0 à la courbe $\mathscr{C}$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(1\ ;\ \cos\alpha)$ et

$$\vec{u}.\overrightarrow{AM_0} = \alpha - 1 + \cos(\alpha)\sin(\alpha) = \frac{1}{2}f'(\alpha) = 0.$$

Les deux droites sont donc perpendiculaires.

63 *Corrigé sur le site élève.*

AVEC LES TICE

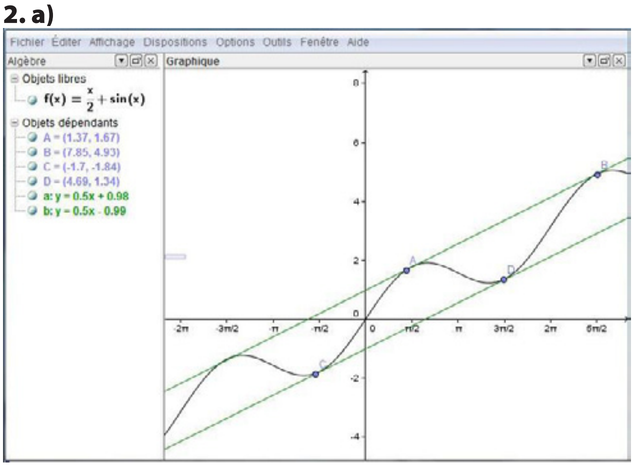
64 **1.** Pour tout nombre x, $f'(x) = \frac{1}{2} + \cos(x)$, $f'(0) = \frac{3}{2}$ et $f(0) = 0$.

L'équation réduite de T est $y = \frac{3}{2}x$.

Pour tout nombre x, on pose $\Delta(x) = f(x) - \frac{3}{2}x = \sin(x) - x$.

$\Delta'(x) = \cos(x) - 1 \leqslant 0$; g est décroissante ; $g(0) = 0$.
$\mathscr{C}$ est au-dessus de T pour tout $x \leqslant 0$ et en-dessous pour tout $x \geqslant 0$.

2. a)



On conjecture que le coefficient directeur de ces deux droites est $\frac{1}{2}$.

b) $f'(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Pour k entier relatif quelconque, la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ est :

$$y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2} - 2k\pi\right) + \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$
$$= \frac{1}{2}x + 1.$$

Pour $k \in \mathbb{Z}$, la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ est : $y = \frac{1}{2}x - 1$.

65 **1. a)**

	A	B
1	cos(x) + sin(x)	$\cos^2(x)$
2	cos(x) − sin(x)	−2 cos(x) sin(x)
3	−cos(x) − sin(x)	$-2\cos^2(x) + 2\sin^2(x)$
4	−cos(x) + sin(x)	8 cos(x) sin(x)
5	cos(x) + sin(x)	$8\cos^2(x) - 8\sin^2(x)$
6	cos(x) − sin(x)	−32 cos(x) sin(x)
7	−cos(x) − sin(x)	$-32\cos^2(x) + 32\sin^2(x)$
8	−cos(x) + sin(x)	128 cos(x) sin(x)
9	cos(x) + sin(x)	$128\cos^2(x) - 128\sin^2(x)$
10	cos(x) − sin(x)	−512 cos(x) sin(x)
11	−cos(x) − sin(x)	$-512\cos^2(x) + 512\sin^2(x)$

On conjecture, pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$f^{(4p)}(x) = \cos(x) + \sin(x)$;
$f^{(4p+1)}(x) = \cos(x) - \sin(x)$;
$f^{(4p+2)}(x) = -\cos(x) - \sin(x)$ et
$f^{(4p+3)}(x) = -\cos(x) + \sin(x)$.

b) On conjecture, pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$f^{(2p+1)}(x) = (-1)^{p+1}\,2^{2p+1}\cos(x)\sin(x)$ et
$f^{(2p+2)}(x) = (-1)^{p+1}\,2^{2p+1}(\cos^2(x) - \sin^2(x))$.

2. a) Un logiciel de calcul formel permet de vérifier la propriété au rang $p = 0$.
Hérédité : on suppose la conjecture vraie pour un certain rang $q \geqslant 0$.
$f^{(4(q+1))}(x) = f^{(4q+3+1)}(x) = \sin(x) + \cos(x)$
$f^{(4(q+1)+1)}(x) = \cos(x) - \sin(x)$
$f^{(4(q+1)+2)}(x) = -\sin(x) - \cos(x)$
$f^{(4(q+1)+3)}(x) = -\cos(x) + \sin(x)$.
Ce qui permet de conclure.

b) L'outil de calcul formel permet de vérifier la conjecture au rang $p = 0$.
Hérédité : on suppose la conjecture vraie pour un certain rang $q \geqslant 0$.

$$f^{(2(q+1)+1)}(x) = f^{((2q+2)+1)}(x)$$
$$= (-1)^{q+1}\,2^{2q+1}(-2\sin(x)\cos(x) - 2\sin(x)\cos(x))$$
$$= (-1)^{(q+1)+1}\,2^{2(q+1)+1}$$

D'où :
$f^{(2(q+1)+2)}(x) = (-1)^{(q+1)+1}\,2^{2(q+1)+1}(\cos^2(x) - \sin^2(x))$,
ce qui permet de conclure.

Prendre toutes les initiatives

66 L'utilisation d'un outil de calcul formel (GeoGebra, par exemple) permet d'émettre la conjecture suivante :
Pour tout entier p,
$f^{(2p+1)}(x) = (-1)^p(2p+1)\cos(x) + (-1)^{p+1}x\sin(x)$
et $f^{(2p+2)}(x) = (-1)^{p+1}x\cos(x) + (-1)^{p+1}(2p+2)\sin(x)$.
On prouve ensuite cette conjecture par récurrence.

Tableur	
	A
1	x cos(x)
2	cos(x) − sin(x) x
3	−cos(x) x − 2 sin(x)
4	−3 cos(x) + sin(x) x
5	cos(x) x + 4 sin(x)
6	5 cos(x) − sin(x) x
7	−cos(x) x − 6 sin(x)
8	−7 cos(x) + sin(x) x
9	cos(x) x + 8 sin(x)
10	9 cos(x) − sin(x) x
11	−cos(x) x − 10 sin(x)
12	−11 cos(x) + sin(x) x

67 Le polynôme $P(X) = 4X^2 + 2(\sqrt{2} - 1)X - \sqrt{2}$ se factorise :

$$4\left(X + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(X - \frac{1}{2}\right).$$

L'inéquation est ainsi équivalente à :

$$4\left(\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos(x) - \frac{1}{2}\right) \geqslant 0.$$

Le tableau de signes suivant permet de conclure :

x	$-\pi$		$-\frac{3\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}$		−	0	+		+		+	0	−	
$\cos(x) - \frac{1}{2}$		−		−	0	+	0	−		−	
$4\left(\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos(x) - \frac{1}{2}\right)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

Ainsi on en déduit l'ensemble des solutions :

$$\mathcal{S} = \left]-\pi ; -\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4} ; \pi\right].$$

68 Pour tout x de $I = [0 ; \pi]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2\sin(x)\cos(x)\sin(2x) + 2\cos^2(x)\cos(2x) \\ &= -4\sin^2(x)\cos^2(x) + 2\cos^2(x)(1 - 2\sin^2(x)) \\ &= 8\cos^2(x)\left(\frac{1}{4} - \sin^2(x)\right) \\ &= 8\cos^2(x)\left(\frac{1}{2} - \sin(x)\right)\left(\frac{1}{2} + \sin(x)\right). \end{aligned}$$

L'étude du signe de $f'(x)$ puis des variations de f sur I permet de conclure à l'existence d'un maximum pour f atteint lorsque $x = \frac{\pi}{6}$. Ce maximum vaut $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

69 **1.** $f'(x) = 4\cos(x)\left(\frac{1}{2} + \sin(x)\right)$ pour tout x de I. D'où le tableau :

x	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos(x)$		−		−	0	+	0	+	0	−	
$\frac{1}{2} + \sin(x)$		+	0	−		−	0	+	0	+	
f'		−	0	+	0	−	0	+	0	−	
f	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	4	↘	0

2. • Si $m < -\frac{1}{2}$ ou $m > 4$, l'équation n'a pas de solution ;

• si $m = -\frac{1}{2}$ ou $m \in \,]0 ; 4[$, l'équation a deux solutions ;

• si $m \in \left]-\frac{1}{2} ; 0\right]$, l'équation a quatre solutions ;

• si $m = 4$, l'équation a une solution.

EXERCICES Le jour du BAC (page 186)

70 *Corrigé sur le site élève.*

71 **1. a)** Pour tout nombre x et tout entier relatif k :

$$f(-x) = e^{-\cos(-x)} = e^{-\cos(x)} = f(x) ;$$
$$f(x + 2k\pi) = e^{-\cos(x + 2k\pi)} = e^{-\cos(x)} = f(x).$$

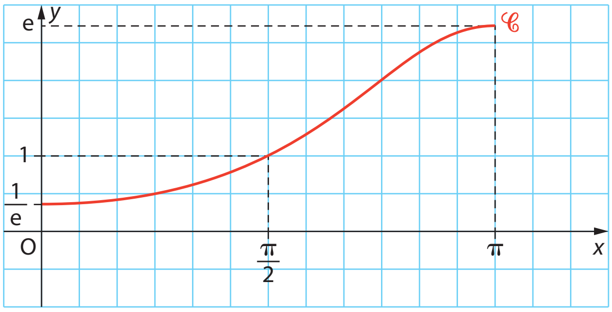
Donc f est paire et 2π-périodique.

b) Pour tout nombre x, $f'(x) = \sin(x)\,e^{-\cos(x)}$ est du signe de $\sin(x)$.

D'où le tableau :

x	0		π
f'		+	
f	$\frac{1}{e}$	↗	e

c)



2. La tangente en A à $\mathscr{C}$ a pour équation réduite :

$$y = \sin(a)\, e^{-\cos(a)}\, x + e^{-\cos(a)}\,(1 - a\sin(a)).$$

Cette tangente passe par 0 si et seulement si $1 - a\sin(a) = 0$.

3. a) Pour tout $x \in\ ]0\,;\pi[$:

• $\Psi'(x) = \cos(x) + \dfrac{1}{x^2}$ et $\Psi''(x) = -\sin(x) - \dfrac{2}{x^3}$.

• $\Psi''(x) < 0$ donc Ψ' est décroissante.

$$\lim_{x\to 0} \Psi'(x) = +\infty \quad\text{et}\quad \lim_{x\to\pi} \Psi'(x) = -1 + \frac{1}{\pi^2}.$$

Ψ' est continue sur $]0\,;\pi[$. Il existe donc une valeur $x_0 \in\ ]0\,;\pi[$ telle que $\Psi'(x_0) = 0$.

De plus, si $x \in\ ]0\,;x_0[$, alors $\Psi'(x) \geqslant 0$ et si $x \in [x_0\,;\pi[$ alors $\Psi'(x) \leqslant 0$.

• Ψ est croissante sur $]0\,;x_0]$ et décroissante sur $[x_0\,;\pi[$.

b) On déduit de **3. a)** l'existence de ce maximum M pour x_0.

c) • $\Psi'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{4}{\pi^2}$ et $\Psi\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 - \dfrac{2}{\pi}$.

• $\Psi'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) > \Psi'(x_0)$ et Ψ' est décroissante, donc $x_0 > \dfrac{\pi}{2}$.

• Ψ est croissante sur $]0\,;x_0]$ et $\dfrac{\pi}{2} \in\ ]0\,;x_0]$, donc $\Psi(x_0) > \Psi\left(\dfrac{\pi}{2}\right) > 0$.

d) Ψ est continue sur $]0\,;\pi[$. La mise en œuvre du théorème des valeurs intermédiaires sur les intervalles $]0\,;x_0]$ et $[x_0\,;\pi[$ permet de prouver l'existence de p et q :

$$p \approx 1{,}1 \quad\text{et}\quad q \approx 2{,}8.$$

4. $a\sin(a) = 1 \Leftrightarrow \sin(a) - \dfrac{1}{a} = 0$.

Il existe donc deux tangentes à $\mathscr{C}$ passant par O.

72 **1.** *Initialisation :* $u_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \in \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;1\right]$.

Hérédité : si pour un certain entier $p > 0$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqslant u_p \leqslant 1$,

alors $1 < \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 1 \leqslant u_p + 1 \leqslant 2 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 + u_p} \leqslant 1$,

ce qui permet de conclure.

2. Pour tout $x \in [0\,;\pi]$:

$$\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}} = \sqrt{\frac{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2}} = \cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

3. *Initialisation :* $u_0 = 0 = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Hérédité : si pour un certain rang p, $u_p = \cos\left(\dfrac{\pi}{2^{p+1}}\right)$,

alors $u_{p+1} = \sqrt{\dfrac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2^{p+1}}\right)}{2}} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2^{p+2}}\right)$,

ce qui permet de conclure.

4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi}{2^{p+1}} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$.

On en déduit : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} u_n = 1$.

73 **1.** On conjecture l'existence d'un centre de symétrie : Ω de coordonnées $\left(\dfrac{\pi}{2}\,;1\right)$.

2. On prouve que pour tout $x \in \mathbb{R}$, Ω est le milieu du segment $[M_1M_2]$ où $M_1\left(\dfrac{\pi}{2} + x\,;f\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)\right)$ et $M_2\left(\dfrac{\pi}{2} - x\,;f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\right)$:

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+x\right) + f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \sin(\pi + 2x) + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right.$$
$$\left. + 1 + \sin(\pi - 2x) + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right)$$
$$= 1.$$

3. Pour tout x de I :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\cos(2x) - 2\sin(x)\\ &= 2(1 - 2\sin^2(x)) - 2\sin(x)\\ &= -4\sin^2(x) - 2\sin(x) + 2, \end{aligned}$$

et $-2(\sin(x) + 1)(2\sin(x) - 1) = -4\sin^2(x) - 2\sin(x) + 2$.

4. Pour tout x de I, $f'(x)$ est du signe de $\dfrac{1}{2} - \sin(x)$.

f est croissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{6}\right]$ et sur $\left[\dfrac{5\pi}{6}\,;\dfrac{3\pi}{2}\right]$, et décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{6}\,;\dfrac{5\pi}{6}\right]$.

5. f étant continue, la mise en œuvre du théorème des valeurs intermédiaires sur $\left[\dfrac{\pi}{6}\,;\dfrac{5\pi}{6}\right]$ puis $\left[\dfrac{5\pi}{6}\,;\dfrac{3\pi}{2}\right]$ permet de conclure :

$$1{,}8 < \alpha < 1{,}9 \quad\text{et}\quad 3{,}5 < \beta < 3{,}6.$$

6. Pour tout x de I, $g'(x) = 2f(x)$.

On déduit de ce qui précède le signe de $g'(x)$ sur I :

g est croissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\alpha\right]$ et sur $\left[\beta\,;\dfrac{3\pi}{2}\right]$; elle est décroissante sur $[\alpha\,;\beta]$.

74 **1.** Pour tout nombre x :

$f'(x) = 2 - \cos(x) > 0$ et f est croissante.

2. Pour tout nombre x, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, d'où l'encadrement proposé.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad\text{et}\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

3. a) • $f(x) = 2x - 1 \Leftrightarrow \sin(x) = 1$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Les points communs à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}_1$ sont les points $M_1\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\,;\pi - 1 + 4k\pi\right)$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

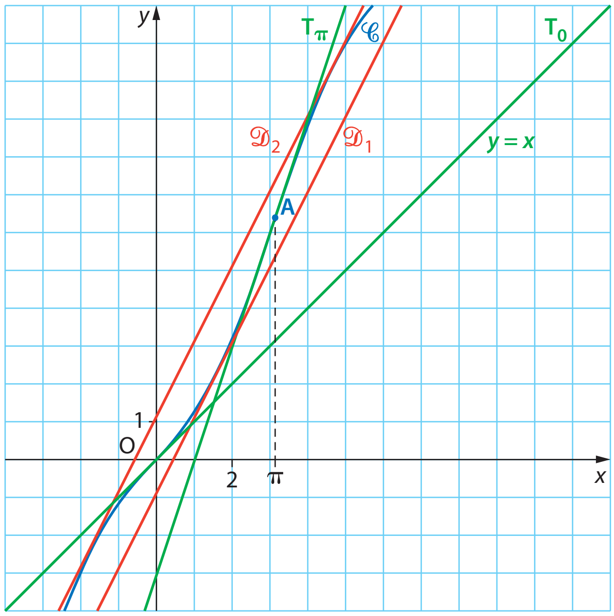
• $f(x) = 2x + 1 \Leftrightarrow \sin(x) = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Les points communs à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}_2$ sont les points $M_2\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\,;1 - \pi + 4k\pi\right)$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

b) • $f'\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = f'\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 2$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

• Quel que soit $k \in \mathbb{Z}$, la tangente à $\mathscr{C}$ en M_1 a pour équation réduite $y = 2x - 1$ (équation de $\mathscr{D}_1$) et la tangente à $\mathscr{C}$ en M_2 a pour équation réduite $y = 2x + 1$ (équation de $\mathscr{D}_2$).

4. L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}$ en O est $y = x$ et celle de la tangente à $\mathscr{C}$ en A est $y = 3x - \pi$.



75 **1.** Pour tout nombre x, $2 + \cos(x) > 0$ et $e^{1-x} > 0$.
Ainsi $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

2. a) Pour tout nombre x :

$$\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$= \cos(x) + \sin(x).$$

b) L'inégalité est équivalente à :

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > -\sqrt{2}.\ \text{Or}\ -\sqrt{2} < -1,$$

ce qui permet de conclure.

c) $f'(x) = -e^{1-x}(2 + \cos(x) + \sin(x))$
et $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. Pour tout nombre x, $e^{1-x} \leqslant f(x) \leqslant 3\,e^{1-x}$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 3\,e^{1-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

4. $f(0) = 3e > 3$ et $f(\pi) = e^{1-\pi} < 3$.
f est continue et décroissante sur $[0\,;\pi]$, donc l'équation $f(x) = 3$ possède une unique solution α dans $[0\,;\pi]$:

$$0{,}87 < \alpha < 0{,}88.$$

EXERCICES Pour aller plus loin (page 188)

76 **1.** $f'(x) = \dfrac{2\cos^3(x) - 3\cos^2(x) + 1}{\cos^2(x)}$ est du signe de $2\cos^3(x) - 3\cos^2(x) + 1$ sur I.

2. $P(1) = 0$. On en déduit une factorisation de P :

$$P(X) = (X - 1)(2X^2 - X - 1) = (X - 1)^2\left(X + \frac{1}{2}\right).$$

$P(X)$ est positif sur $]0\,;1]$.

3. Pour tout x de I, $\cos(x) \in\ ]0\,;1]$.
D'après **1.** et **2.**, $f'(x) > 0$ sur I et f est croissante sur I.

4. $f(0) = 0$. Pour tout x de I, $f(x) \geqslant 0$, ce qui équivaut à

$$2\sin(x) + \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \geqslant 3x.$$

77 **1.** Cette cuve a un volume de 99π m³.

2. a) L'aire du secteur angulaire $\widehat{E\Omega F}$ contenant A vaut $\dfrac{9\alpha}{2}$ m² et celle du triangle $E\Omega F$ vaut

$$9\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{9}{2}\sin(\alpha)\ \text{m}^2.$$

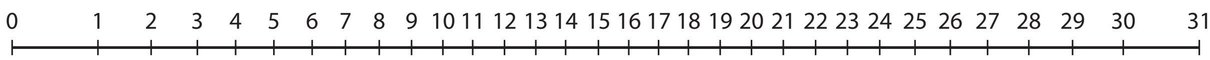
$$V(\alpha) = 11\left(\frac{9\alpha}{2} - \frac{9}{2}\sin(\alpha)\right) = \frac{99}{2}(\alpha - \cos(\alpha)).$$

$$\Omega A = \Omega H + HA \Leftrightarrow 3 = 3\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + h \Leftrightarrow h = 3\left(1 - \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right).$$

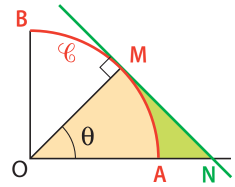
b)

```
VARIABLES
  A EST_DU_TYPE NOMBRE
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
  Vol EST_DU_TYPE NOMBRE
  V EST_DU_TYPE NOMBRE
  Hmax EST_DU_TYPE NOMBRE
  Hmin EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  V PREND_LA_VALEUR 0
  Hmax PREND_LA_VALEUR 0
  A PREND_LA_VALEUR 0
  LIRE p
  AFFICHER "Vol. cible | Angle | Vol. calculé | Haut. Min   | Haut. max"
  POUR i ALLANT_DE 1 A 31
    DEBUT_POUR
    // i : dizaines de milliers de litres
    Vol PREND_LA_VALEUR 10*i
    // Tant que le volume V calculé en fonction de A est inférieur au volume "cible" Vol :
    // - on incrémente A ;
    // - on calcule V ;
    TANT_QUE (V<Vol) FAIRE
      DEBUT_TANT_QUE
      A PREND_LA_VALEUR A+p
      V PREND_LA_VALEUR 99/2*(A-sin(A))
      FIN_TANT_QUE
    // On détermine un encadrement de la hauteur de liquide
    Hmin PREND_LA_VALEUR 3-3*cos((A-p)/2)
    Hmax PREND_LA_VALEUR 3-3*cos(A/2)
    // On affiche les différents résultats
    AFFICHER "   "
    AFFICHER Vol
    AFFICHER "      | "
    AFFICHER A
    AFFICHER "  | "
    AFFICHER V
    AFFICHER "    | "
    AFFICHER Hmin
    AFFICHER "  | "
    AFFICHER Hmax
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

3. Voir figure en bas de page.



78 **1.**



On conjecture l'existence d'une valeur θ à partir de laquelle l'aire du domaine vert devient supérieure à celle du domaine orange. On peut aussi conjecturer que cette valeur est proche de 1,17 rad.

2. a) Pour $\theta \in \left[0 \,;\, \frac{\pi}{2}\right[$:

$f(\theta) = \frac{\theta}{2}$; $ON = \frac{1}{\cos(\theta)}$ et $MN = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$;

$g(\theta) = \frac{1}{2} \times \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} - \frac{\theta}{2}$; $h(\theta) = \frac{1}{2}\left(2\theta - \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right)$.

b) Pour tout $\theta \in \left[0 \,;\, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$h'(\theta) = 1 - \frac{1}{2\cos^2(\theta)} = \frac{2\cos^2(\theta) - 1}{2\cos^2(\theta)} = \frac{\cos(2\theta)}{2\cos^2(\theta)}.$$

c) $h'(\theta)$ est du signe de $\cos(2\theta)$.

Sur $\left[0 \,;\, \frac{\pi}{4}\right]$, $h'(\theta) \geqslant 0$ et h est croissante.

Sur $\left[\frac{\pi}{4} \,;\, \frac{\pi}{2}\right[$, $h'(\theta) \leqslant 0$ et h est décroissante.

d) h est continue sur $\left[0 \,;\, \frac{\pi}{2}\right[$.

Pour tout $\theta \in \left]0 \,;\, \frac{\pi}{4}\right[$, $h(\theta) > h(0)$ et $h(0) = 0$.

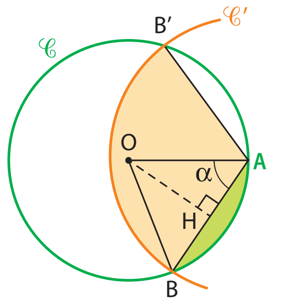
$h\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$ et $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} h(\theta) = -\infty$. h est monotone sur $\left[\frac{\pi}{4} \,;\, \frac{\pi}{2}\right[$. Il existe donc une valeur α de cet intervalle telle que $h(\alpha) = 0$:

$$1{,}1 < \alpha < 1{,}2.$$

c) Si $\theta \in [0 \,;\, \alpha]$ alors $f(\theta) \geqslant g(\theta)$.

Si $\theta \in \left[\alpha \,;\, \frac{\pi}{2}\right[$ alors $f(\theta) \leqslant g(\theta)$.

79 **A. 1.** On note H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAB.



$$AB = 2\ AH = 2R\cos(\alpha).$$

2. a) $\widehat{AOB} = \pi - 2\alpha$.

b) Cette aire vaut $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) R^2$ u.a.

3. a) L'aire du triangle AOB vaut

$$R^2 \cos(\alpha)\sin(\alpha) = \frac{1}{2} R^2 \sin(2\alpha) \text{ u.a.}$$

b) L'aire du domaine vert vaut $R^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\right)$ u.a.

4. L'aire du domaine orange vaut $4\alpha R^2 \cos^2(\alpha)$ u.a.

5. a) $\mathscr{A} = 4\alpha R^2\cos^2(\alpha) + 2R^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\right)$ u.a.

$= R^2(2\alpha(2\cos^2(\alpha) - 1) + \pi - \sin(2\alpha))$ u.a.

$= R^2(2\alpha\cos(2\alpha) + \pi - \sin(2\alpha))$ u.a.

b) $\mathscr{A} = \frac{1}{2}\pi R^2 \Leftrightarrow 2\alpha\cos(2\alpha) - \sin(2\alpha) + \frac{\pi}{2} = 0$.

B. 1. Pour tout x de I :

$g'(x) = -2x\sin(2x)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{\pi}{2}$.

2.

x	0		$\frac{\pi}{2}$
g'	0	$-$	0
g	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$

3. a) g est continue sur $\left[0 \,;\, \frac{\pi}{2}\right]$. Le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure.

b) $0{,}95 < \alpha_0 < 0{,}96$.

4. $\mathscr{C}'$ partage $\mathscr{D}$ en deux parties de même aire pour $\alpha = \alpha_0$.

80 **1. a)** Pour $x > 0$:

On pose $f(x) = \sin(x) - x$.

$f'(x) = \cos(x) - 1 \leqslant 0$, donc f est décroissante.

$f(0) = 0$, donc $f(x)$ est négatif. Ainsi, $\sin(x) \leqslant x$.

b) On pose $g(x) = \cos(x) + \frac{x^2}{2} - 1$.

$g'(x) = x - \sin(x)$ et $g''(x) = 1 - \cos(x) \geqslant 0$.

g' est croissante et $g'(0) = 0$, donc $g'(x) \geqslant 0$.

g est croissante et $g(0) = 0$, donc $g(x) \geqslant 0$.

Ainsi, $1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos(x)$.

c) On pose $h(x) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$.

$h'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$

$= g(x)$.

$h'(x) \geqslant 0$ donc h est croissante.

$h(0) = 0$; $h(x) \geqslant 0$. Ainsi, $x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x)$.

d) On pose $\varphi(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cos(x)$.

$\varphi'(x) = h(x) \geqslant 0$.

φ est croissante et $\varphi(0) = 0$, donc $\varphi(x) \geqslant 0$.

Ainsi, $\cos(x) \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

2. Pour tout $x > 0$:

$x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$;

$1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos(x) \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

3. De **2.**, on déduit, pour $x > 0$,

$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{\cos(x) - 1}{x^2} \leqslant -\frac{1}{2} + \frac{x^2}{24}$;

$-\frac{x}{6} \leqslant \frac{\sin(x) - x}{x^2} \leqslant 0$.

Le théorème des gendarmes permet de conclure :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2},\ \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)-x}{x^2} = 0.$$

81 **1. a)** Pour tout $x \geqslant 0$, $-e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}$.
Le théorème des gendarmes permet de conclure.
b) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \cos(4x) = 1$

$$\Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}, \text{ avec } k \in \mathbb{N}.$$

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{-(n+1)\frac{\pi}{2}} \cos(-2(n+1)\pi)}{e^{-n\frac{\pi}{2}} \cos(-2n\pi)} = e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

(u_n) est une suite géométrique de raison $e^{-\frac{\pi}{2}}$.

b) $-1 < e^{-\frac{\pi}{2}} < 1$ et $u_0 = f(0) = 1 > 0$.
La suite (u_n) est décroissante et converge vers 0.
3. a) $f'(x) = -e^{-x}\cos(4x) - 4e^{-x}\sin(4x)$
$= e^{-x}(\cos(4x) + 4\sin(4x))$ pour tout $x \geqslant 0$.
b) $g'(x) = e^{-x}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f'\left(k\frac{\pi}{2}\right) = g'\left(k\frac{\pi}{2}\right) = e^{-k\frac{\pi}{2}}$.

4. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx -0{,}2$.

82 **1.** Pour $x \in\ ]-\pi\,;0[$,

$$h'(x) = -\sin(x)\, g'(\cos(x)) = \frac{-\sin(x)}{\sqrt{1-\cos^2(x)}} = \frac{-\sin(x)}{|\sin(x)|} = 1.$$

2. $h\left(-\frac{\pi}{2}\right) = g(0) = 0$.

$h'(x) = 1$ donc $h(x) = x + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

$h\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + C = 0 \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{2}$.

Donc $h(x) = x + \frac{\pi}{2}$.

83 Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$f''(x) + a f'(x) + b f(x) = 0$
$\Leftrightarrow (4a + 3b - 12)\sin(2x) + (6a - 2b + 8)\cos(2x) = 0$.
Cela revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} 4a + 3b - 12 = 0 \\ 6a - 2b + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 4 \end{cases}.$$

a et b existent donc bien.

CHAPITRE 7

Intégration et primitives

ACTIVITÉS (page 192)

Activité 1

1 **a)** Les rectangles inférieurs ont tous pour largeur $\frac{1}{n}$ et pour hauteurs respectivement $f\left(\frac{0}{n}\right), f\left(\frac{1}{n}\right), ..., f\left(\frac{n-1}{n}\right)$

donc $u_n = \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{0}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) + ... + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$.

b) De même, pour la somme des aires des rectangles supérieurs :

$$v_n = \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + ... + f\left(\frac{n}{n}\right)\right].$$

2 **a)** Tableau de résultats :

n	5	10	100	1000
u_n	0,24	0,285	0,32835	0,3328335
v_n	0,44	0,385	0,33835	0,3338335

b) On conjecture que les suites (u_n) et (v_n) ont une limite commune $\ell = \frac{1}{3}$.

3. a) $v_n = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + ... + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right]$ soit

$$v_n = \frac{1^2 + 2^2 + ... + n^2}{n^3}.$$

Ainsi $v_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$.

b) Pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$v_n = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{6n^2} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{3}$.

c) Pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$v_n - u_n = \frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right) - \frac{1}{n}f\left(\frac{0}{n}\right) = \frac{1}{n}f(1) - \frac{1}{n}f(0).$$

Or $f(1) = 1$ et $f(0) = 0$ donc $v_n - u_n = \frac{1}{n}$ d'où on déduit que $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{3}$.

Ainsi les suites (u_n) et (v_n) convergent toutes les deux vers $\ell = \frac{1}{3}$.

Activité 2

1 **a)** Sur l'intervalle $[x_0 ; x_0 + h]$, l'aire du domaine en violet, $\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)$, est comprise entre celle du rectangle inférieur et celle du rectangle supérieur de même largeur h et de hauteur respectivement $f(x_0 + h)$ et $f(x_0)$, d'où :

$$h \cdot f(x_0 + h) \leqslant \mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0) \leqslant h \cdot f(x_0).$$

Par division par $h > 0$:

$$f(x_0 + h) \leqslant \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \leqslant f(x_0),$$

$$\frac{1}{x_0 + h} \leqslant \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \leqslant \frac{1}{x_0} \quad \textbf{[1]}.$$

b) De même en remarquant que la largeur des rectangles est ici $-h$ (vu que $h < 0$) on obtient :

$$-h \cdot f(x_0) \leqslant \mathcal{A}(x_0) - \mathcal{A}(x_0 + h) \leqslant -h \cdot f(x_0 + h).$$

Par division par $-h$ (strictement positif):

$$f(x_0) \leqslant \frac{\mathcal{A}(x_0) - \mathcal{A}(x_0 + h)}{-h} \leqslant f(x_0 + h)$$

$$\frac{1}{x_0} \leqslant \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \leqslant \frac{1}{x_0 + h} \quad \textbf{[2]}.$$

c) Dans l'encadrement **[1]**, $\lim\limits_{h\to0+}\frac{1}{x_0 + h} = \frac{1}{x_0}$ donc d'après le théorème « des gendarmes »,

$$\lim_{h\to0+}\frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} = \frac{1}{x_0}.$$

De même, à partir de l'encadrement **[2]**,

$$\lim_{h\to0-}\frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} = \frac{1}{x_0}.$$

Ainsi le taux d'accroissement de la fonction $\mathcal{A}$ entre x_0 et $x_0 + h$ admet une limite finie $\frac{1}{x_0}$ lorsque h tend vers 0, donc la fonction $\mathcal{A}$ est dérivable en x_0 et $\mathcal{A}'(x_0) = \frac{1}{x_0}$.

d) Ceci étant vrai pour tout x_0 de I, la fonction $\mathcal{A}$ est donc dérivable sur I et $\mathcal{A}' = f$.

2 **a)** $\forall x \in \mathrm{I}$, $d(x) = \mathcal{A}(x) - \ln(x)$.
La fonction d est la différence de deux fonctions dérivables sur I donc d est dérivable sur I :

$$d' = \mathcal{A}' - f = f - f = 0\,.$$

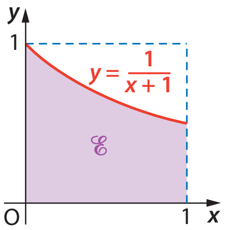
b) La dérivée de d est la fonction nulle sur l'intervalle I, donc d est constante sur I.
Il existe un nombre k tel que : $\forall x \in \mathrm{I}$, $d(x) = k$.
c) Or $d(1) = \mathcal{A}(1) - \ln(1) = 0$ donc $k = 0$.
On en déduit que $\forall x \in \mathrm{I}$, $\mathcal{A}(x) = \ln(x)$.

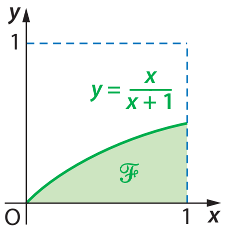
PROBLÈME OUVERT

Une première approche consiste à calculer une valeur approchée de l'aire de $\mathcal{D}$:

$$\text{aire}(\mathcal{D}) = \text{aire}(\mathcal{E}) - \text{aire}(\mathcal{F}).$$

On approche l'aire de $\mathcal{E}$ par la somme S des aires des rectangles supérieurs et celle de $\mathcal{F}$ par la somme T des aires des rectangles inférieurs (voir activité 1).
On obtient ainsi une valeur par excès de aire($\mathcal{D}$).
Un processus algorithmique est alors nécessaire.





• Approximation de aire($\mathcal{E}$)
Avec une Casio

```
======TSC7PB01======
"N=":?→N↵
0→S↵
For 0→I To N-1↵
S+(1÷N)(1÷(I÷N+1))→S↵
Next↵
"S=":S
```

Avec une Texas Instruments

```
PROGRAM:TSC7PB01
:Prompt N
:0→S
:For(I,0,N-1)
:S+(1/N)(1/(I/N+
1))→S
:End
:Disp "S=":S
```

Pour $\mathrm{N} = 1000$, S est une valeur par excès de aire($\mathcal{E}$) à $0{,}001$ près.
Affichage : S = 0.6933972431.
Ainsi aire($\mathcal{E}$) $\approx 0{,}694$ (à 0,002 m² près par excès).
• Approximation de aire($\mathcal{F}$)
Avec une Casio

```
======TSC7PB02======
"N=":?→N↵
0→T↵
For 0→I To N-1↵
T+(1÷N)((I÷N)÷(I÷N+1)
)→T↵
Next↵
"T=":T
```

Avec une Texas Instruments

```
PROGRAM:TSC7PB02
:Prompt N
:0→T
:For(I,0,N-1)
:T+(1/N)((I/N)/(
I/N+1))→T
:End
:Disp "T=":T
```

Pour $\mathrm{N} = 1000$, T est une valeur par défaut de aire($\mathcal{F}$) à $0{,}001$ près.
Affichage: $\mathrm{T} = 0.3066027569$.
Ainsi aire($\mathcal{F}$) $\approx 0{,}306$ (à 0,002 m² près par défaut).

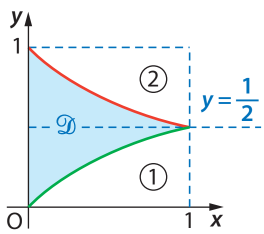
• Approximation de aire($\mathcal{D}$)
aire($\mathcal{D}$) = aire($\mathcal{E}$) − aire($\mathcal{F}$)
aire($\mathcal{D}$) $\approx$ 0,388 (à 0,004 m² près par excès).
On peut donc conclure que l'aire du motif ne dépasse pas 0,40 m².

À la fin du chapitre : le calcul effectif de aire($\mathcal{D}$) est possible et facilite la réponse.

$\forall x \in [0\,;1]$, $f(x) + g(x) = 1$ d'où :

$$\frac{f(x) + g(x)}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

Ainsi les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.
Les domaines notés ① et ② sont symétriques donc ont la même aire.
Ainsi aire($\mathcal{D}$) = 1 − 2 · aire (①).



$$\text{Or aire(①)} = \int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$= \big[x - \ln(x+1)\big]_0^1 = 1 - \ln(2)\ m^2$$

donc aire($\mathcal{D}$) $= 1 - 2(1 - \ln(2)) = 2\ln(2) - 1\ m^2$.
Comme $2\ln(2) - 1 < 0{,}40$ on conclut que l'aire du motif de l'oriflamme ne dépasse pas 0,40 m².

EXERCICES Application (page 200)

1 F est dérivable sur I comme différence de fonctions dérivables sur I.

$\forall x \in \mathrm{I},\ \mathrm{F}'(x) = \ln(x) + x \cdot \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x) = f(x).$

2 F est dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables sur I.
$\forall x \in \mathrm{I},\ \mathrm{F}'(x) = 1 \cdot \mathrm{e}^{-x} + (x+1) \cdot \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) = -x\mathrm{e}^{-x} = f(x).$

3 F est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$. $\forall x \in]0\,;+\infty[$:

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{4}{5}x\sqrt{x} + \frac{2}{5}x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{4}{5}x\sqrt{x} + \frac{1}{5}x\sqrt{x} = x\sqrt{x} = f(x).$$

On étudie la dérivabilité en 0.

$$\forall h > 0,\ \frac{\mathrm{F}(0+h)-\mathrm{F}(0)}{h} = \frac{\frac{2}{5}h^2\sqrt{h}}{h} = \frac{2}{5}h\sqrt{h}$$

donc $\displaystyle\lim_{h\to 0+} \frac{\mathrm{F}(0+h)-\mathrm{F}(0)}{h} = 0.$

Ainsi F est dérivable en 0 et $\mathrm{F}'(0) = 0 = f(0)$.
Finalement, F est dérivable sur I et $\mathrm{F}' = f$ donc F est une primitive de f sur I.

4 $\forall x \in \mathrm{I},\ \mathrm{G}(x) - \mathrm{F}(x) = \dfrac{4x-4}{x-1} = 4.$

F est une fonction rationnelle dérivable sur I.
On pose $\mathrm{F}' = f$. Ainsi F est une primitive de f sur I.
Or $\mathrm{G} = \mathrm{F} + 4$ donc G est aussi une primitive de f.

5 $\forall x \in \mathrm{I},\ \mathrm{F}(x) - \mathrm{G}(x) = \cos(2x) + 2\sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) + 2\sin^2(x) = 1.$

F est dérivable sur I [type : $x \mapsto \cos(ax+b)$].
On pose $\mathrm{F}' = f$. Ainsi F est une primitive de f sur I.
Or $\mathrm{G} = \mathrm{F} - 1$ donc G est aussi une primitive de f.

6 **a)** $\mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{12}(3x+2)^4$. **b)** $\mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{9}(3x-1)^6$.

7 **a)** $\mathrm{F}(x) = -\dfrac{1}{2}\cos(2x-\pi) = \dfrac{1}{2}\cos(2x)$.
b) $\mathrm{F}(x) = 2\sin(2x+1)$.

8 **a)** $\mathrm{F}(x) = -\mathrm{e}^{-x+1}$. **b)** $\mathrm{F}(x) = \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{3x-2}$.

9 **a)** $\mathrm{F}(x) = 4\sqrt{2x+1}$. **b)** $\mathrm{F}(x) = 2\sqrt{x^2+1}$.

10 **a)** $\mathrm{F}(x) = 2\ln(x-4)$ **b)** $\mathrm{F}(x) = -\dfrac{4}{(x-4)^2}$.

11 **a)** $\mathrm{F}(x) = -\dfrac{1}{3}\cos^3(x)$. **b)** $\mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{3}\sin^3(x) + \sin(x)$.

12 **a)** $\mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{5}x^5 - x^4 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{53}{5}$.
b) $\mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{9}x^3 - \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{3}x + \dfrac{7}{9}$.

13 **a)** $\mathrm{F}(x) = x - \cos(x) - 1$.
b) $\mathrm{F}(x) = x - \sin(2x) + 1 - \pi$.

14 **a)** $\mathrm{F}(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{2}x^2 - 2$.
b) $\mathrm{F}(x) = x + \mathrm{e}^{-x} - 3 - \mathrm{e}^{-2}$.

15 $\forall x \in \mathrm{I},\ \mathrm{F}(x) = \ln(x) - \sqrt{x} + k$ et $\mathrm{F}(\mathrm{e}) = 1$.
Donc $\mathrm{F}(x) = \ln(x) - \sqrt{x} + \sqrt{\mathrm{e}}$.

16 $\forall x \in \mathrm{I},\ \mathrm{F}(x) = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + k$ et $\mathrm{F}(-2) = 2$.

Donc $\mathrm{F}(x) = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{5}{4}$.

17 $\forall x \in \mathrm{I},\ \mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + k$ et $\mathrm{F}(\ln(2)) = 0$.

Donc $\mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + 2$.

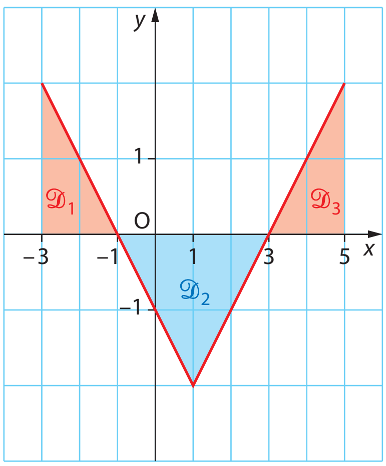
18 **1.** On pose $\mathrm{I} = \left[1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right]$.

$$\begin{aligned} M(x;y) \in \mathscr{C}_f &\Leftrightarrow y = \sqrt{3-(x-1)^2},\ x \in \mathrm{I} \\ &\Leftrightarrow y^2 = 3-(x-1)^2,\ y \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 3,\ y \geqslant 0. \end{aligned}$$

$\mathscr{C}_f$ est le demi-cercle de centre $\Omega(1\,;0)$ et de rayon $r = \sqrt{3}$.

2. $\mathrm{J} = \mathrm{aire}(\mathscr{D}) = \dfrac{1}{2}\pi r^2 = \dfrac{3\pi}{2}$.

19 **1.** $f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{si } x \in [-3\,;1[\\ x-3 & \text{si } x \in [1\,;5] \end{cases}$



2. $\displaystyle\int_{-3}^{5} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{aire}(\mathscr{D}_1) - \mathrm{aire}(\mathscr{D}_2) + \mathrm{aire}(\mathscr{D}_3) = 2 - 4 + 2 = 0.$

20 **a)** $\mathrm{I} = -4$. **b)** $\mathrm{J} = \dfrac{25}{3}$.

21 **a)** $\mathrm{I} = \dfrac{7}{3} - \ln(2)$. **b)** $\mathrm{J} = 1 - 2\ln(2)$.

22 **a)** $\mathrm{I} = \dfrac{1}{2}$. **b)** $\mathrm{J} = 0$.

23 **a)** $I = 4$. **b)** $J = 2$.

24 **a)** $I = \frac{1}{3}(e^7 - e)$. **b)** $J = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$.

25 **a)** $I = \frac{15}{8}$. **b)** $J = 2 - \frac{\pi^2}{2}$.

26 **1.** $f : x \mapsto x\ln(x)$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$:

$$f'(x) = \ln(x) + 1.$$

2. $K = \left[x\ln(x)\right]_1^e = e$.

27 **1.** $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ donc

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}.$$

2. $I = \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}\right)dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$.

28 **1.** Pour tout nombre $x \neq 1$,

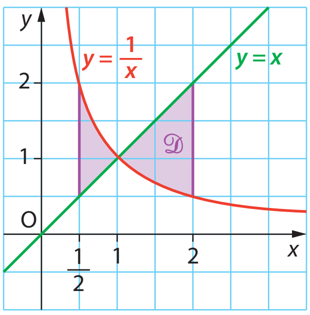
$$f(x) = \frac{2x-1}{x-1} = \frac{2(x-1)+1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}.$$

D'où la décomposition avec $a = 2$ et $b = 1$.

2. $J = \int_2^4\left(2 + \frac{1}{x-1}\right)dx = \left[2x + \ln(x-1)\right]_2^4$

$= 4 + \ln(3)$.

29 **1.** Représentation du domaine $\mathscr{D}$:

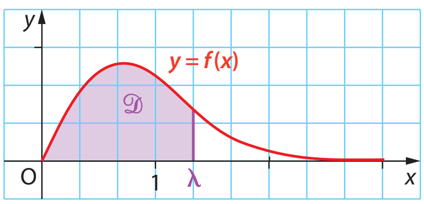


2. $\text{aire}(\mathscr{D}) = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{x} - x\right)dx - \int_1^2\left(\frac{1}{x} - x\right)dx$

$= \left[\ln(x) - \frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} - \left[\ln(x) - \frac{x^2}{2}\right]_1^2$

$= \frac{9}{8}$ u.a.

30 **1.** Représentation de la courbe $\mathscr{C}$: $y = 2xe^{-x^2}$:



2. a) $\mathscr{A}(\lambda) = \int_0^{\lambda} 2xe^{-x^2}dx = \left[-e^{-x^2}\right]_0^{\lambda} = -e^{-\lambda^2} + 1$ u.a.

b) $\lim_{\lambda \to +\infty} e^{-\lambda^2} = 0$ donc $\lim_{\lambda \to +\infty} \mathscr{A}(\lambda) = 1$.

Ainsi l'aire sous la courbe $\mathscr{C}$ sur $[0 ; +\infty[$ vaut 1 u.a.

31 $\forall t \in [1;2]$, $2 \leqslant 1 + t^3 \leqslant 9$. D'où :

$$\sqrt{2} \leqslant \sqrt{1+t^3} \leqslant 3.$$

D'après l'inégalité de la moyenne, avec $a = 1$, $b = 2$, $m = \sqrt{2}$ et $M = 3$:

$$\sqrt{2} \leqslant \int_1^2 \sqrt{1+t^3}\,dt \leqslant 3.$$

32 La fonction f définie sur [2 ; 5] par $x \mapsto x^2e^{-x}$ est dérivable sur [2 ; 5].

$\forall x \in [2 ; 5]$, $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$ donc $f'(x) \leqslant 0$. Ainsi f est décroissante sur [2 ; 5].

$\forall x \in [2;5]$, $f(5) \leqslant f(x) \leqslant f(2)$ soit :

$$25e^{-5} \leqslant x^2e^{-x} \leqslant 4e^{-2}.$$

D'après l'inégalité de la moyenne, avec $a = 2$, $b = 5$, $m = 25e^{-5}$ et $M = 4e^{-2}$:

$$75e^{-5} \leqslant \int_2^5 x^2e^{-x}dx \leqslant 12e^{-2}.$$

33 **1.** Pour tout entier naturel n, la fonction $t \mapsto (1+t^n)e^t$ est positive sur [0 ; 1] donc d'après la propriété de positivité de l'intégrale, $u_n \geqslant 0$.

$\forall t \in [0;1]$, $1 + t^{n+1} \leqslant 1 + t^n$ et $e^t > 0$ donc

$$(1+t^{n+1})e^t \leqslant (1+t^n)e^t.$$

Par intégration de cette inégalité sur [0 ; 1],

$$\int_0^1 (1+t^{n+1})e^t dt \leqslant \int_0^1 (1+t^n)e^t dt \text{ soit } u_{n+1} \leqslant u_n.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

2. On en déduit que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.

34 **1.** Pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$v_{n+1} - v_n = \int_1^{n+1}\frac{x}{x+1}dx - \int_1^n \frac{x}{x+1}dx = \int_n^{n+1}\frac{x}{x+1}dx.$$

Or sur l'intervalle $[n ; n+1]$, la fonction $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ est positive donc $\int_n^{n+1}\frac{x}{x+1}dx \geqslant 0$.

Ainsi $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$ donc la suite (v_n) est croissante.

2. $\forall x \in [1 ; +\infty[$, $\frac{x}{x+1} \geqslant \frac{1}{x+1}$.

Par intégration de cette inégalité sur $[1 ; n]$ $(n \geqslant 1)$:

$$\int_1^n \frac{x}{x+1}dx \geqslant \int_1^n \frac{1}{x+1}dx.$$

Or $\int_1^n \frac{1}{x+1}dx = \left[\ln(x+1)\right]_1^n = \ln(n+1) - \ln(2)$

donc $v_n \geqslant \ln(n+1) - \ln(2) \geqslant \ln(n+1)$.

Puisque $\lim_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty$, par comparaison, $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$. Ainsi la suite (v_n) ne converge pas.

35 $\forall x \in [\pi ; 2\pi]$, $x \leqslant x^2$ et $\sin(x) \leqslant 0$ donc

$$x\sin(x) \geqslant x^2\sin(x).$$

Par intégration de cette inégalité sur $[\pi ; 2\pi]$,

$$\int_{\pi}^{2\pi} x\sin(x)dx \geqslant \int_{\pi}^{2\pi} x^2\sin(x)dx \text{ soit } J \geqslant I.$$

Activités de recherche (page 208)

40 **Sur la piste d'une primitive**

• ***Les outils***

– Formules de dérivation.
– Primitives de fonctions usuelles.
– Primitives d'une combinaison linéaire de fonctions.

• ***Les objectifs :***

– Établir une relation entre des dérivées successives d'une fonction.
– Calculer une primitive d'une fonction.

1. a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x \sin(x) + e^x \cos(x)$ **[1]** ;
$f''(x) = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) + e^x \cos(x) - e^x \sin(x)$
$f''(x) = 2e^x \cos(x)$ **[2]**.

b) L'égalité **[1]** s'écrit $f'(x) = f(x) + e^x \cos(x)$ d'où
$$e^x \cos(x) = f'(x) - f(x).$$
Ainsi l'égalité **[2]** s'écrit $f''(x) = 2(f'(x) - f(x))$, d'où on déduit : $f(x) = f'(x) - \frac{1}{2}f''(x)$.

f est une combinaison de ses dérivées successives du type $f = af' + bf''$ avec $a = 1$ et $b = -\frac{1}{2}$.

2. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est $F = f - \frac{1}{2}f'$ d'où :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin(x) - \cos(x))$.

41 **Primitive de $x \to Q(x)e^{-x}$ où Q est une fonction polynôme.**

• ***Les outils***

– Formules de dérivation.
– Identification des coefficients de deux polynômes égaux.
– Résolution d'un système.

• ***Les objectifs***

– Trouver une primitive d'une fonction.
– Dégager la forme des primitives d'un type de fonction.

1. a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = P'(x)e^{-x} - P(x)e^{-x}$
$$= (P'(x) - P(x))e^{-x}.$$
$F'(x) = f(x)$ donc $\left(P'(x) - P(x)\right)e^{-x} = (x^2 + x - 2)e^{-x}$, d'où $P'(x) - P(x) = x^2 + x - 2$ **[1]**.

b) P est une fonction polynôme de degré 2.

2. a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = ax^2 + bx + c$ et $P'(x) = 2ax + b$.
Ainsi l'égalité **[1]** s'écrit :
$$-ax^2 + (2a - b)x + b - c = x^2 + x - 2.$$
Par identification des coefficients : $\begin{cases} -a = 1 \\ 2a - b = 1. \\ b - c = -2 \end{cases}$

b) D'où $a = -1$, $b = -3$ et $c = -1$.
Ainsi $P(x) = -x^2 - 3x - 1$.

3. Réciproquement, la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (-x^2 - 3x - 1)e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = (-2x - 3)e^{-x} - (-x^2 - 3x - 1)e^{-x}$
$$= (x^2 + x - 2)e^{-x} = f(x).$$
Ainsi la fonction polynôme P est telle que
F : $x \mapsto P(x)e^{-x}$ est bien une primitive de f.

42 **Convergence d'une suite d'intégrales**

• ***Les outils***

– Comparaison de deux intégrales.
– Sens de variation d'une suite.
– Théorème d'encadrement.

• ***Les objectifs***

– Étudier la convergence d'une suite d'intégrales.
– Calculer sa limite.

1. a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0 ; 1]$, $x^{n+1} \leqslant x^n$ d'où
$\frac{x^{n+1}}{1+x} \leqslant \frac{x^n}{1+x}$ et par intégration sur l'intervalle [0 ; 1] ;
$\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$ soit $u_{n+1} \leqslant u_n$.
Donc la suite (u_n) est décroissante.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^1 f_n(x)dt$ et la fonction f_n est positive sur [0 ; 1] donc $u_n \geqslant 0$.
La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.

2. a) $\forall x \in [0 ; 1]$, $0 \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant 1$.
Par multiplication par x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$, $0 \leqslant \frac{x^n}{1+x} \leqslant x^n$
soit $0 \leqslant f_n(x) \leqslant x^n$.

b) Par intégration de ces inégalités sur [0 ; 1] :
$$0 \leqslant \int_0^1 f_n(x)dx \leqslant \int_0^1 x^n dx \text{ soit } 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc, d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

43 **Narration de recherche**

La courbe $\mathscr{C}$ représente une fonction f définie sur [– 1 ; 1] par une expression du type $ax^4 + bx^2 + c$.
Ainsi $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$.
L'aire du motif mesure un tiers de l'aire du panneau donc en raison de la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, cette condition se traduit par :
$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}.$$
Or $\int_0^1 f(x)dx = \left[a\frac{x^5}{5} + b\frac{x^3}{3} + cx\right]_0^1 = \frac{a}{5} + \frac{b}{3} + c$

donc $\frac{a}{5} + \frac{b}{3} + c = \frac{1}{3}$, d'où $3a + 5b + 15c = 5$.

La tangente au point d'abscisse 1 est l'axe (Ox). Cette condition se traduit par $f(1) = 0$ et $f'(1) = 0$, soit $a + b + c = 0$ et $4a + 2b = 0$.
Les coefficients sont définis par le système
$\begin{cases} 4a + 2b = 0 \\ a + b + c = 0 \\ 3a + 5b + 15c = 5 \end{cases}$ d'où $a = \frac{5}{8}$, $b = -\frac{5}{4}$ et $c = \frac{5}{8}$.

Ainsi $\mathscr{C}$ a pour équation : $y = \frac{5}{8}x^4 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{5}{8}$.

Remarque. Cette équation peut s'écrire sous la forme

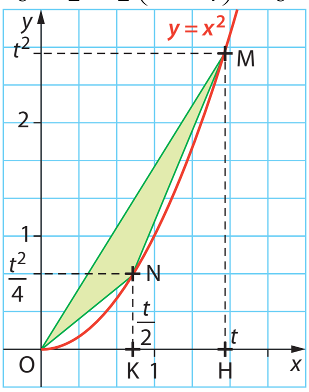
$$y = \frac{5}{8}(x^2 - 1)^2.$$

44 Narration de recherche

Aire du triangle OMN :

$$\mathfrak{c} = \text{aire(OHM)} - \text{aire(OKN)} - \text{aire(KNMH)}$$

$$= \frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{2}\cdot\frac{t^3}{8} - \frac{1}{2}\cdot\frac{t}{2}\left(t^2 + \frac{t^2}{4}\right) = \frac{t^3}{8}.$$



La droite (OM) a pour équation $y = tx$.

(OM) est situé au-dessus de l'arc de parabole sur l'intervalle $[0 ; t]$.

Aire du domaine curviligne [OMN] :

$$\mathfrak{a} = \int_0^t (tx - x^2)\mathrm{d}x = \left[\frac{tx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^t = \frac{t^3}{6}.$$

Ainsi $\dfrac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}} = \dfrac{t^3}{8} \Big/ \dfrac{t^3}{6} = \dfrac{3}{4}$ (rapport indépendant de t).

45 TD – Trouver une valeur approchée d'une aire

1. a) $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $\varphi(x) = \ln(x)(1 - \ln(x))$.

Le signe de $\varphi(x)$ dépend de celui de chacun des facteurs :

- $\ln(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$;
- $1 - \ln(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \leqslant \ln(e) \Leftrightarrow x \leqslant e$.

Tableau du signe de $\varphi(x)$:

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln(x)$	‖	–	0	+	|	+	
$1 - \ln(x)$	‖	+	|	+	0	–	
$\varphi(x)$	‖	–	0	+	0	–	

Sur $[1 ; e]$, $\varphi(x) \geq 0$ donc $\mathscr{C}_{\ln}$ est au-dessus de $\mathscr{C}_{\ln^2}$.

Sur $]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$, $\varphi(x) < 0$ donc $\mathscr{C}_{\ln}$ est au-dessous de $\mathscr{C}_{\ln^2}$.

b) Les fonctions ln et ln² sont continues sur [1 ; e] et $\mathscr{C}_{\ln}$ est au-dessus de $\mathscr{C}_{\ln^2}$ donc

$$\text{aire}(\mathscr{D}) = \int_1^e (\ln(x) - \ln^2(x))\mathrm{d}x = \int_1^e \varphi(x)\mathrm{d}x \text{ (u.a.).}$$

46 TD – Calculer le volume d'un solide

A. 1. a) Les cylindres intérieurs ont tous la même hauteur $h = \dfrac{1}{n}$ et pour rayon respectivement $r_1 = \sqrt{\dfrac{1}{n}}$, $r_2 = \sqrt{\dfrac{2}{n}}$, … , $r_{n-1} = \sqrt{\dfrac{n-1}{n}}$, donc la somme de leurs volumes est

$$\pi h\left[r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_{n-1}^2\right].$$

$$u_n = \frac{\pi}{n}\left[\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}\right] = \frac{\pi}{n^2}\left[1 + 2 + \ldots + (n-1)\right].$$

b) La somme des $n - 1$ premiers entiers non nuls s'exprime par $1 + 2 + \ldots + (n-1) = \dfrac{(n-1)n}{2}$ donc

$$u_n = \frac{\pi}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n}{2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{n-1}{n}.$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi}{2}$.

Ainsi la suite (u_n) converge vers $\ell = \dfrac{\pi}{2}$.

2. a) La somme des volumes des cylindres extérieurs ne diffère de la précédente que du volume du dernier cylindre $\left[r_n = \sqrt{\dfrac{n}{n}} = 1,\ h = \dfrac{1}{n}\right]$, dont le volume est $\dfrac{\pi}{n}$.

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = u_n + \dfrac{\pi}{n}$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

La suite (v_n) converge donc aussi vers $\dfrac{\pi}{2}$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant \mathscr{V} \leqslant v_n$ avec $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{\pi}{2}$

donc $\mathscr{V} = \dfrac{\pi}{2}$ dm³.

Or $\dfrac{\pi}{2} > 1$ donc la contenance du bol dépasse 1 L.

B. 1. a) La section du bol par le plan d'équation $z = t$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ est un disque centré sur (Oz) de rayon $r(t) = \sqrt{t}$.

Ainsi $\text{S}(t) = \pi r^2(t)$ soit $\text{S}(t) = \pi t$.

b) Or $\mathscr{V} = \displaystyle\int_0^1 \text{S}(t)\mathrm{d}t$ donc $\mathscr{V} = \pi\displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ dm³.

2. a) La section de la demi-boule par le plan d'équation $z = t$ $(0 \leqslant t \leqslant \text{R})$ est un disque centré sur (Oz) de rayon $r(t)$ tel que $t^2 + r^2(t) = \text{R}^2$.

Ainsi $r^2(t) = \text{R}^2 - t^2$ et $\text{S}(t) = \pi(\text{R}^2 - t^2)$.

Or $\mathscr{V} = \displaystyle\int_0^{\text{R}} \text{S}(t)\mathrm{d}t$ donc $\mathscr{V} = \displaystyle\int_0^{\text{R}} \pi(\text{R}^2 - t^2)\mathrm{d}t$.

b) Volume de la demi-boule :

$$\mathscr{V} = \left[\pi\left(\text{R}^2 t - \frac{t^3}{3}\right)\right]_0^{\text{R}} = \frac{2\pi\text{R}^3}{3}.$$

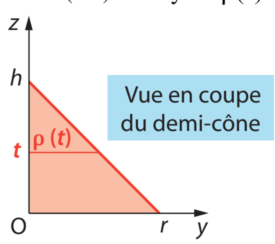
On en déduit le volume d'une boule de rayon R :

$$\text{V}_{\text{Boule}} = \frac{4\pi\text{R}^3}{3}.$$

3. a) La section du cône par le plan d'équation :

$$z = t\ (0 \leqslant t \leqslant h)$$

est un disque centré sur (Oz) de rayon $\rho(t)$.



Par application du théorème de Thalès,

$\dfrac{\rho(t)}{r} = \dfrac{h-t}{h}$ d'où $\rho(t) = \dfrac{r}{h}(h - t)$.

Or $\text{S}(t) = \pi\rho^2(t)$ donc $\text{S}(t) = \pi\dfrac{r^2}{h^2}(h-t)^2$.

b) $\mathscr{V} = \int_0^h S(t)\mathrm{d}t$ donc $\mathscr{V} = \dfrac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h (h-t)^2\,\mathrm{d}t$

$$\mathscr{V} = \frac{\pi r^2}{h^2}\left[-\frac{1}{3}(h-t)^3\right]_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

On retrouve : $V_{cône} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

47 TD – Tabuler une primitive

A. 1. a) $\forall t \in \mathbb{R},\ f(-t) = \mathrm{e}^{-\frac{(-t)^2}{2}} = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} = f(t)$.

Donc f est une fonction paire.

Ainsi $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

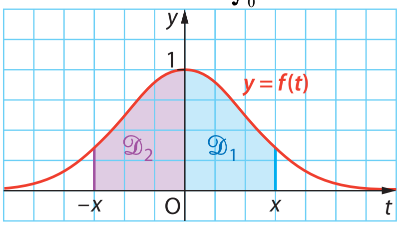
b) f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$: $f'(t) = -t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

$\forall t \in [0\,;+\infty[,\ f'(t) \leqslant 0$.

Tableau de variation de f sur $[0\,;+\infty[$:

t	0		$+\infty$
f'	0	$-$	
f	1	$\searrow$	0

2. a) Pour tout $x \geqslant 0$, $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \text{aire}(\mathscr{D}_1)$.



$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-x}^0 f(t)\,\mathrm{d}t = -\,\text{aire}(\mathscr{D}_2)$$

$= -\,\text{aire}(\mathscr{D}_1)$ (en raison de la symétrie)

$= -\,F(x)$.

b) Ainsi la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ est impaire donc sa courbe $\mathscr{C}_F$ est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

3. a) F est une primitive de f sur $[0\,;+\infty[$:

$\forall x \geqslant 0,\ F'(x) = f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

Pour tout nombre $x \geq 0$, $F'(x) > 0$ donc F est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

$\mathscr{D}$ désigne l'aire (en u.a.) du domaine sous $\mathscr{C}_f$ sur $[0\,;+\infty[$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \text{aire}(\mathscr{D}) = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

b) En utilisant la symétrie de $\mathscr{C}_F$ par rapport à O, on en déduit le tableau de variation de F sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
F′		$+$	1	$+$	
F	$-\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}$

B. 1. a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n - v_n = \dfrac{a}{n}f(0) - \dfrac{a}{n}f(a)$

$$= \frac{a}{n}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}}\right).$$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

2. a) $u_n - v_n < 10^{-3} \Leftrightarrow \dfrac{a}{n}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}}\right) < \dfrac{1}{1000}$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{n} < \frac{1}{1000\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}}\right)}$$

$$\Leftrightarrow n > 1000a\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}}\right)$$

b) On pose $A = 1000a\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}}\right)$.

Puisque $E(A) \leqslant A < E(A) + 1$, le plus petit entier naturel n solution de l'inéquation $n > A$ est $N = E(A) + 1$.

Ainsi pour tout entier $n \geqslant N$, $u_n - v_n < 10^{-3}$.

C. 1. a) L'entier N (nombre de subdivisions nécessaires) apparaît en L9 :

$$\text{floor}\big(1000 * a * (1 - F_1(a)\big) + 1.$$

b) L14 : pour chaque valeur de k, on ajoute l'aire du rectangle supérieur dans u .

L15 : pour chaque valeur de k, on ajoute l'aire du rectangle inférieur dans v.

2. Table des valeurs de $F(a)$:

a	0,2	0,4	0,6	0,8	1
F	0,199	0,390	0,566	0,722	0,856

1,2	1,4	1,6	1,8	2
0,965	1,051	1,116	1,163	1,196

2,2	2,4	2,6	2,8	3
1,218	1,233	1,242	1,247	1,250

3. La condition est modifiée de la manière suivante :

$$u_n - v_n < p \Leftrightarrow \frac{a}{n}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}}\right) < p \Leftrightarrow n > \frac{a}{p}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}}\right).$$

On pose : $N = E\left(\dfrac{a}{p}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}}\right)\right) + 1$.

Ainsi dès que $n \geqslant N$, on aura $u_n - v_n < p$.

D'où l'algorithme :

```
1     VARIABLES
2       a EST_DU_TYPE NOMBRE
3       n EST_DU_TYPE NOMBRE
4       u EST_DU_TYPE NOMBRE
5       v EST_DU_TYPE NOMBRE
6       k EST_DU_TYPE NOMBRE
7       p EST_DU_TYPE NOMBRE
8     DEBUT_ALGORITHME
9       LIRE a
10      LIRE p
11      n PREND_LA_VALEUR floor(a*(1-F1(a))/p)+1
12      u PREND_LA_VALEUR 0
13      v PREND_LA_VALEUR 0
14      POUR k ALLANT_DE 1 A n
15        DEBUT_POUR
16        u PREND_LA_VALEUR u+(a/n)*F1((k-1)*a/n)
17        v PREND_LA_VALEUR v+(a/n)*F1(k*a/n)
18        FIN_POUR
19      AFFICHER "encadrement de F(a):"
20      AFFICHER v
21      AFFICHER "< F(a) <"
22      AFFICHER u
23    FIN_ALGORITHME
24
25    Fonction numérique utilisée :
26    F1(x)=exp(-pow(x,2)/2)
```

48 TD – Mouvement uniformément accéléré

1. Pour tout entier $k \geqslant 1$, on pose:

$$S_k = 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1).$$

S_k est la somme des k premiers termes de la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $r = 2$.

$$S_k = u_1 + (u_1 + r) + (u_1 + 2r) + ... + (u_1 + (k-1)r)$$
$$= ku_1 + r(1 + 2 + ... + (k-1)).$$

Or $1 + 2 + ... + (k-1) = \dfrac{(k-1)k}{2}$ donc

$$S_k = k + 2 \cdot \frac{(k-1)k}{2} = k^2.$$

Remarque. On peut aussi utiliser directement la formule $S_k = k\dfrac{u_1 + u_k}{2}$ mais cette formule n'est pas exigible (*cf.* programme de première S).

2. a) Pour l'entier i de 1 à k, on note d_i la distance parcourue durant l'intervalle de temps $[(i-1)\theta\,;i\theta]$.

Ainsi $d(t) = d_1 + d_2 + d_3 + ... + d_k$

$$d(t) = v\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\theta + v\left(\frac{3\theta}{2}\right)\cdot\theta + v\left(\frac{5\theta}{2}\right)\cdot\theta + ...$$
$$.... + v\left(\frac{(k-1)\theta + k\theta}{2}\right)\cdot\theta$$
$$= \theta\left[\frac{a\theta}{2} + \frac{3a\theta}{2} + \frac{5a\theta}{2} + ... + \frac{(2k-1)a\theta}{2}\right]$$
$$= \frac{a\theta^2}{2}\left[1 + 3 + 5 + ... + (2k-1)\right].$$

b) Ainsi $d(t) = \dfrac{a\theta^2}{2}\cdot k^2 = \dfrac{a}{2}\cdot(k\theta)^2 = \dfrac{a}{2}t^2$.

La distance parcourue est proportionnelle au carré du temps.

3. a) La représentation graphique de la vitesse est une demi-droite, donc v est une fonction affine du temps :

$$v(t) = at + v_0.$$

Le coefficient a est le taux d'accroissement (constant) de la vitesse. Il représente l'accélération.

b) La fonction $t \mapsto x(t)$ est telle que $x' = v$, donc x est une primitive de v sur $[0\,;+\infty[$.

La distance parcourue entre les instants t_1 et t_2 $(t_1 < t_2)$ s'exprime par :

$$d_{[t_1;t_2]} = x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} x'(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt.$$

c) $\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1}(at + v_0)\,dt = \left[a\frac{t^2}{2} + v_0 t\right]_{t_0}^{t_1}$

$$= a\frac{t_1^2 - t_0^2}{2} + v_0(t_1 - t_0)$$
$$= (t_1 - t_0)\left[a\left(\frac{t_1 + t_0}{2}\right) + v_0\right].$$

Or V_m est la vitesse à l'instant moyen associé à I, donc

$$V_m = a\left(\frac{t_1 + t_0}{2}\right) + v_0.$$

Ainsi $\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt = (t_1 - t_0)V_m$.

On en déduit que $V_m = \dfrac{1}{t_1 - t_0}\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt$ est la valeur moyenne de la fonction vitesse sur $[t_0\,;t_1]$.

d) La fonction $t \mapsto x(t)$ est la primitive de $t \mapsto v(t)$ qui prend la valeur x_0 à l'instant $t = 0$.

Donc, pour tout $t \geqslant 0$, $x(t) = \dfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$.

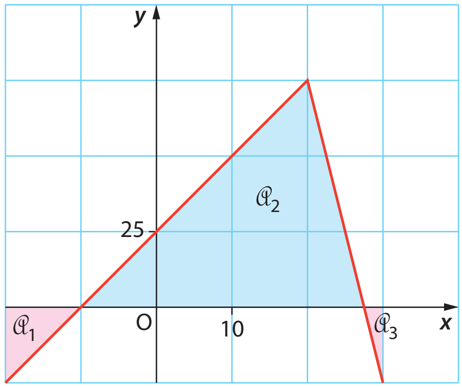
49 TD – Valeur moyenne, valeur efficace

1. a) ① $T = 5 \cdot 25 = 125$ ms ;

② $T = 5 \cdot 25 = 125$ ms.

b) Vue ①. L'aire algébrique du domaine colorié est :

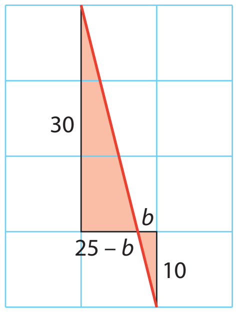
$$\mathcal{A} = -a_1 + a_2 - a_3.$$



$a_1 = \dfrac{1}{2}\cdot 25 \cdot 10 = 125$; $a_3 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{25}{4}\cdot 10 = 31{,}25$;

$a_2 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{375}{4}\cdot 30 = 1406{,}25$.

Remarque. Pour calculer la base b du triangle d'aire a_3 on peut utiliser le théorème de Thalès :



$$\frac{b}{25 - b} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow b = \frac{25}{4}.$$

Ainsi $\mathcal{A} = 1250$.

Or $\overline{U} = \dfrac{\mathcal{A}}{T}$, donc $\overline{U} = \dfrac{1250}{125} = 10$V.

• **Vue** ②. Le domaine compris entre la courbe et l'axe des temps sur la période centrée en 0, est symétrique par rapport à l'origine, donc son aire algébrique est nulle.

Ainsi $\mathcal{A} = 0$ donc $\overline{U} = \dfrac{\mathcal{A}}{T} = 0$.

c) L'aire algébrique du domaine défini sur un intervalle $[t_0;t_0 + T]$, de longueur T, ne dépend pas de la valeur t_0.

Ainsi $\mathcal{A} = \displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} u(t)dt$ est indépendant de t_0.

Démonstration. Pour tout nombre a, on pose :

$$\Phi(a) = \int_a^{a+T} u(t)\,dt.$$

U désigne une primitive de u sur $\mathbb{R}$.

Alors $\Phi(a) = U(a + T) - U(a)$.

La fonction $\Phi : a \mapsto \Phi(a)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$\Phi'(a) = [U(a + T)]' - U'(a) = u(a + T) - u(a).$$

Or la fonction u est périodique de période T donc

$$u(a+\mathrm{T}) = u(a).$$

Ainsi pour tout a de $\mathbb{R}$, $\Phi'(a) = 0$ donc Φ est une fonction constante de valeur $\Phi(0) = \int_0^{\mathrm{T}} u(t)\,\mathrm{d}t$.

En particulier $\mathscr{A} = \Phi(t_0)$ ne dépend pas de t_0.

Alors $\overline{\mathrm{U}} = \dfrac{\mathscr{A}}{\mathrm{T}} = \dfrac{1}{\mathrm{T}}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+\mathrm{T}} u(t)\mathrm{d}t$ représente la valeur moyenne de la fonction u sur tout intervalle du type $[t_0 ; t_0 + \mathrm{T}]$.

2. a) ① $\mathrm{U}_{max} = 15$ V ; $\mathrm{U}_{eff} \approx 9$ V.

② $\mathrm{U}_{max} = 20$ V ; $\mathrm{U}_{eff} \approx 14$ V.

b) Par définition, $\dfrac{{\mathrm{U}_{eff}}^2}{\mathrm{R}} \cdot \mathrm{T} = \dfrac{1}{\mathrm{R}}\displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} u^2(t)\mathrm{d}t$ donc

${\mathrm{U}_{eff}}^2 = \dfrac{1}{\mathrm{T}}\displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} u^2(t)\,\mathrm{d}t$. Ainsi ${\mathrm{U}_{eff}}^2$ est la valeur moyenne de la fonction u^2 sur l'intervalle $[0 ; \mathrm{T}]$.

Remarque. De façon générale, on peut prendre tout intervalle de longueur T du type $[t_0 ; t_0 + \mathrm{T}]$.

c) Dans le cas d'un signal alternatif sinusoïdal :

$${\mathrm{U}_{eff}}^2 = \frac{{\mathrm{U}_{max}}^2}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} \sin^2(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{{\mathrm{U}_{max}}^2}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} \frac{1-\cos(2\omega t)}{2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{{\mathrm{U}_{max}}^2}{2\mathrm{T}}\left[t - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega}\right]_0^{\mathrm{T}} = \frac{{\mathrm{U}_{max}}^2}{2\mathrm{T}}\left(\mathrm{T} - \frac{\sin(2\omega \mathrm{T})}{2\omega}\right).$$

Or $\omega\mathrm{T} = 2\pi$ donc $\sin(2\omega\mathrm{T}) = 0$.

Ainsi ${\mathrm{U}_{eff}}^2 = \dfrac{{\mathrm{U}_{max}}^2}{2}$, d'où $\sqrt{2}\mathrm{U}_{eff} = \mathrm{U}_{max}$.

Remarque. Dans le cas d'un signal triangulaire alternatif, on démontre que $\sqrt{3}\mathrm{U}_{eff} = \mathrm{U}_{max}$.

Ainsi : ① $\mathrm{U}_{eff} = \dfrac{\mathrm{U}_{max}}{\sqrt{3}} = \dfrac{15}{\sqrt{3}} \approx 8{,}7$ V ;

② $\mathrm{U}_{eff} = \dfrac{\mathrm{U}_{max}}{\sqrt{2}} = \dfrac{20}{\sqrt{2}} \approx 14{,}1$ V.

EXERCICES Entraînement (page 216)

DE TÊTE

50 **1.** $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(t)\mathrm{d}t = 4{,}25$. **2.** $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(t)\mathrm{d}t = 2{,}5$.

51 $\mathrm{F}'(x) = \sin(x)$, $x \in [0;\pi]$ donc $\mathrm{F}'(x) \geqslant 0$.
F est croissante sur $[0 ; \pi]$.

52 **a)** $\mathrm{F}(x) = -\dfrac{1}{x}$. **b)** $\mathrm{F}(x) = \ln(x-1)$.

c) $\mathrm{F}(x) = -\mathrm{e}^{-x}$. **d)** $\mathrm{F}(x) = -\dfrac{1}{2}\cos(2x)$.

53 **a)** $\mathrm{F}'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $\mathrm{F}(\mathrm{e}) = 0$. Réponse : vrai.

b) $\mathrm{F}'(x) = \ln(2)\mathrm{e}^{x\ln(2)}$. Réponse : faux.

54 **a)** $\mathrm{K} = [x^3 - x^2]_0^1 = 0$. **b)** $\mathrm{K} = [-\cos(x)]_0^{\pi} = 2$.

c) $\mathrm{K} = [\ln(t)]_1^{\mathrm{e}} = 1$. **d)** $\mathrm{K} = [-\mathrm{e}^{-t}]_0^{-1} = -\mathrm{e} + 1$.

55 $\mathrm{aire}(\mathscr{D}) = \displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$ u.a.

56 $\forall x \in [2 ; 3]$, $5 \leqslant 1 + x^2 \leqslant 10$

donc $0{,}1 \leqslant \dfrac{1}{1+x^2} \leqslant 0{,}2$.

D'après l'inégalité de la moyenne : $0{,}1 \leqslant \mathrm{K} \leqslant 0{,}2$.
Leila a raison !

DES AIRES AUX INTÉGRALES

57 **1.** $\displaystyle\int_{-1}^{5} f(t)\mathrm{d}t = 1 - 4 = -3$; $\displaystyle\int_{-1}^{5} g(t)\mathrm{d}t = 3 + 2 = 5$.

2. $\displaystyle\int_{-1}^{5} (f + 4g)(t)\mathrm{d}t = -3 + 20 = 17$;

$\displaystyle\int_{-1}^{5} (5f - 2g)(t)\mathrm{d}t = -15 - 10 = -25$.

58 **1.** $\mathrm{M}(x ; y) \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2$ et $y \leqslant 0$.
$\mathscr{C}_f$ est le demi-cercle de centre O, de rayon $\sqrt{2}$ contenu dans le demi-plan d'équation $y \leqslant 0$.
$\mathrm{M}(x ; y) \in \mathscr{C}_g \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 3$, $x \geqslant 2$ et $y \geqslant 0$.
$\mathscr{C}_g$ est le quart de cercle de centre I(2 ; 0), de rayon $\sqrt{3}$ contenu dans le quart de plan défini par

$$[x \geqslant 2 \text{ et } y \geqslant 0].$$

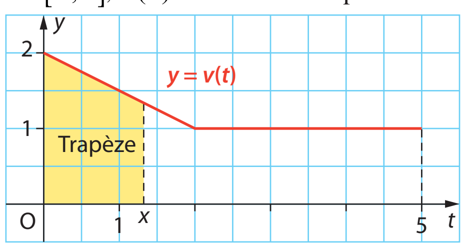
2. $\mathrm{J} = -\dfrac{1}{2}\pi \cdot 2 = -\pi$; $\mathrm{K} = \dfrac{1}{4}\pi \cdot 3 = \dfrac{3\pi}{4}$.

59 *Corrigé sur le site élève.*

60 **1.** La fonction v est définie sur [0;5] par

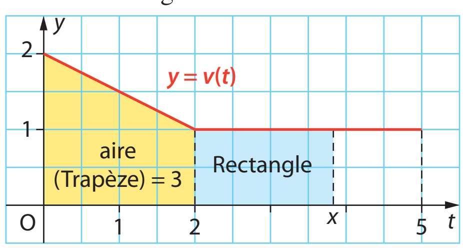
$$v(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}t + 2 & \text{si } t \in [0 ; 2] \\ 1 & \text{si } t \in]2 ; 5] \end{cases}.$$

2. • Si $x \in [0 ; 2]$, $\mathrm{V}(x)$ est l'aire du trapèze colorié :



$$\mathrm{V}(x) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}x + 2\right)x = -\frac{1}{4}x^2 + 2x.$$

• Si $x \in]2 ; 5]$, $\mathrm{V}(x)$ est la somme de l'aire d'un trapèze et de celle d'un rectangle.



$$\mathrm{V}(x) = 3 + (x-2) = x + 1.$$

Ainsi la fonction V est définie sur [0 ; 5] par :

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x^2 + 2x \text{ si } x \in [0\,;2] \\ x+1 \quad\quad\ \text{ si } x \in]2\,;5] \end{cases}.$$

3. a) La fonction v est continue et positive sur [0 ; 5] donc la fonction $V : x \mapsto V(x) = \int_0^x v(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur [0 ; 5] et $V' = v$.

b) Or $v > 0$ sur [0 ; 5] donc la fonction V est strictement croissante sur [0 ; 5].

x	0		5
$V' = v$		+	
V	0	↗	6

PRIMITIVES

61 Pour tout x de $[0\,;+\infty[$,

a) $F'(x) = \ln(x) + (x-1)\cdot\frac{1}{x} = \ln(x) - \frac{1}{x} + 1 = f(x)$.

b) $F'(x) = \frac{5x^4}{25}(5\ln(x) - 1) + \frac{x^5}{25}\left(\frac{5}{x}\right) = x^4\ln(x) = f(x)$.

62 Pour tout x de $\mathbb{R}$,

a) $F'(x) = -e^{1-x} + xe^{1-x} = (x-1)e^{1-x} = f(x)$.

b) $F'(x) = -(2x+2)e^{-x} + (x^2+2x+2)e^{-x} = x^2e^{-x} = f(x)$.

63 *Corrigé sur le site élève.*

64 **a)** $\forall x \in \mathrm{I}$, $F(x) - G(x) = \frac{6x-3}{4x-2} = \frac{3}{2}$.

Réponse : oui.

b) $\forall x \in \mathrm{I}$, $F(x) - G(x) = \frac{-3x^2-3}{2(1+x^2)} = -\frac{3}{2}$.

Réponse : oui.

65 **a)** $\forall x \in \mathrm{I}$,

$$F(x) - G(x) = \sin(x) - \cos(x) - 1 - \sqrt{2}\left(\sin(x)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos(x)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$F(x) - G(x) = -1 - 2\cos(x)$.

La fonction F – G n'est pas constante. Réponse : non.

b) $\forall x \in \mathrm{I}$,

$$F(x) - G(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin(x)\cos(x)}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sin(x)\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Réponse : oui.

66 **a)** $\forall x \in \mathrm{I}$,

$$F(x) - G(x) = e^x\left[\cos(x) + \sin(x) - \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right] = e^x\left[\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cos(x) + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin(x)\right].$$

La fonction F – G n'est pas constante. Réponse : non.

b) $\forall x \in \mathrm{I}$,

$$F(x) - G(x) = e^{\ln(2)}\cdot e^{\frac{1}{2}x} - 2\sqrt{e^x} = 2e^{\frac{1}{2}x} - 2(e^x)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Réponse : oui.

67 **1.** f courbe verte ; F courbe rouge.

2. f courbe rouge ; F courbe verte.

68 **1.** $\forall x \in [0\,;\pi]$, $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

2. $\Phi(\pi) = \frac{\pi}{2}$.

Le domaine colorié est symétrique par rapport à Δ, donc

$$\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\Phi(\pi) = \frac{\pi}{4}.$$

3. $\forall x \in [0\,;\pi]$, $F'(x) = f(x)$ donc $\Phi'(x) \geqslant 0$.

x	0		5
$\Phi' = f$		+	
Φ	0	↗ $\frac{\pi}{4}$ ↗	$\frac{\pi}{2}$

69 **a)** $F(x) = 2x^4 - 2x^3 + x$.

b) $F(x) = 3x^3 - 2x^2 - +5x$.

c) $F(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{10}x$.

d) $F(x) = \frac{1}{12}(2x^5 - 2x^4 + x^3)$.

70 **a)** $F(x) = -\frac{1}{x^2}$. **b)** $F(x) = \frac{3}{x}$.

c) $F(x) = \frac{1}{2}\ln(x)$. **d)** $F(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{4}{x} - \ln(x)$.

71 **a)** $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -\sin(x) + \cos(x) = f(x)$.

Réponse : vrai.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $(-f)'(x) = \sin(x) + \cos(x) = g(x)$ et

$$(-f)\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Réponse : vrai.

72 **a)** $F(x) = \frac{1}{4026}(2x+1)^{2013}$.

b) $F(x) = -\frac{1}{12}(1-x^2)^6$.

c) $F(x) = \frac{1}{2}\sin^2(x)$.

d) $F(x) = -\frac{1}{3}(1-e^x)^3$.

73 **a)** $F(x) = -\frac{1}{4022}\cdot\frac{1}{(2x-1)^{2011}}$.

b) $F(x) = -\frac{1}{\ln(x)}$ **c)** $F(x) = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1+e^x)^3}$.

74 **a)** $F(x) = 2\sqrt{x-1}$. **b)** $F(x) = \sqrt{x^2-1}$.

c) $F(x) = \sqrt{e^x+1}$.

75 **a)** $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x+1}$. **b)** $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2+1}$.

c) $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2+2x-3}$. **d)** $F(x) = e^{\sin(x)}$.

76 **a)** $F(x) = 2\ln(x-1)$.

b) $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(-x^2+4x-3\right)$. **c)** $F(x) = \ln(1+e^x)$.

77 **a)** $F(x) = -\dfrac{1}{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

b) $F(x) = -4\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$

78 **1. a)** On pose : $u(x) = x$, $v(x) = \sin(x)$

$u'(x) = 1$, $v'(x) = \cos(x)$.

On reconnaît $f = u'v + uv' = (uv)'$, donc $F = uv$.

$F(x) = x\sin(x)$.

b) On pose : $u(x) = \sin(x)$, $v(x) = x$

$u'(x) = \cos(x)$, $v'(x) = 1$.

On reconnaît $f = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} = \left(\dfrac{u}{v}\right)'$, donc $F = \dfrac{u}{v}$.

$$F(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

c) On pose : $u(x) = \ln(x)$, $v(x) = x$

$u'(x) = \dfrac{1}{x}$, $v'(x) = 1$.

On reconnaît $f = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} = \left(\dfrac{u}{v}\right)'$ donc $F = \dfrac{u}{v}$.

$$F(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

2. Il suffit de vérifier que $F' = f$ sur I.

a) $F'(x) = 1 \cdot \sin(x) + x\cos(x) = f(x)$.

b) $F'(x) = \dfrac{\cos(x)\cdot x - \sin(x)\cdot 1}{x^2} = f(x)$.

c) $F'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)\cdot 1}{x^2} = f(x)$.

CALCULS D'INTÉGRALES

79 **a)** $I = \left[\dfrac{(2x-3)^3}{6}\right]_{-1}^{4} = \dfrac{125}{3}$.

b) $J = \left[\dfrac{(x-4)^4}{4}\right]_{-2}^{1} = -\dfrac{1215}{4}$.

c) $K = \left[\dfrac{(x^2+x)^2}{2}\right]_{0}^{1} = 2$.

d) $L = \left[\dfrac{(x^2+1)^4}{4}\right]_{1}^{2} = \dfrac{609}{4}$.

80 **a)** $I = \left[-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{t^2+1}\right]_0^2 = \dfrac{6}{5}$.

b) $J = \left[\dfrac{1}{4}\ln(t^4+1)\right]_1^2 = \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{17}{2}\right)$.

c) $K = \left[-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2t+1}\right]_0^3 = \dfrac{3}{7}$.

d) $L = \left[\dfrac{1}{3}\ln(3t+2)\right]_1^2 = \dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{8}{5}\right)$.

81 **a)** $I = \left[2\sqrt{1+x}\right]_0^3 = 2$.

b) $J = \left[-\dfrac{4}{3}\sqrt{1-3x}\right]_0^{-1} = -\dfrac{4}{3}$.

c) $K = \left[3\sqrt{x^2+1}\right]_{-1}^{\sqrt{3}} = 6 - 3\sqrt{2}$.

d) $L = \left[\sqrt{x^2-1}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \sqrt{2} - 1$.

82 **a)** $I = \left[4e^t\right]_{\ln(2)}^{\ln(3)} = 4$

b) $J = \left[\dfrac{1}{2}e^{t^2-1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{2}(1-e^{-1})$.

c) $K = \left[-\dfrac{1}{2}e^{1-2t}\right]_{\frac{1}{3}}^{1} = -\dfrac{1}{2}\left(e^{-1} - e^{\frac{1}{3}}\right)$.

d) $L = \left[-e^{\cos(t)}\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{0} = -e + e^{\frac{1}{2}}$.

83 *Corrigé sur le site élève.*

84 **a)** $I = \left[-\dfrac{\sin(t)}{t}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} = \dfrac{3}{\pi}$.

b) $J = \left[\dfrac{1}{2}\sin\left(2t-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

c) $K = \left[t\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \dfrac{\pi}{6}$.

d) $L = \left[-\dfrac{1}{\pi}\cos\left(\pi t+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]_1^2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}$.

85 **a)** $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 4x\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x}\,dx = \left[2x^2\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\ln(x)\right]_{\frac{1}{2}}^{2}$

$= \dfrac{1}{2} + 2\ln(2)$.

b) $J = \displaystyle\int_3^2\left(-\frac{1}{4}x+1\right)dx + \int_2^1\frac{1}{x}\,dx$

$= \left[-\dfrac{1}{8}x^2+x\right]_3^2 + \left[\ln(x)\right]_2^1 = -\dfrac{3}{8} - \ln(2)$.

c) $K = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 4x\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x}\,dx + \int_2^4\left(-\frac{1}{4}x+1\right)dx$

$= \left[2x^2\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\ln(x)\right]_{\frac{1}{2}}^{2} + \left[-\dfrac{1}{8}x^2+x\right]_2^4$

$= 1 + 2\ln(2)$.

d) $L = \displaystyle\int_3^2\left(-\frac{1}{4}x+1\right)dx + \int_2^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} 4x\,dx$

$= \left[-\dfrac{1}{8}x^2+x\right]_3^2 + \left[\ln(x)\right]_2^{\frac{1}{2}} + \left[2x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}}$.

$= -\dfrac{3}{4} - 2\ln(2)$.

86 **a)** D'après la propriété de linéarité de l'intégration,

$$I = \int_1^e\left(\ln(t) + t - \ln(t)\right)dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^e = \frac{1}{2}(e^2-1).$$

b) $I = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)\,dt + \int_1^e \ln(1+t^2)\,dt - \int_0^e \ln(1+t^2)\,dt$

d'où, en utilisant la relation de Chasles,

$$I = \int_0^e \ln(1+t^2)\,dt - \int_0^e \ln(1+t^2)\,dt = 0.$$

c) $I = \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\pi} \cos(2t)\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{\frac{\pi}{6}} \cos(2t)\mathrm{d}t$, d'où, en utilisant la relation de Chasles,

$$I = \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos(2t)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_{\pi+\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 0.$$

87 **1.** $\forall x \in \mathbb{R} - \{-3\,;3\}$,

$$\frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+3} = \frac{6}{x^2-9} \Leftrightarrow \frac{a(x+3)+b(x-3)}{x^2-9} = \frac{6}{x^2-9}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)x + 3(a-b) = 6.$$

Par identification des coefficients,

$\begin{cases} a+b=0 \\ 3(a-b)=6 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$.

Ainsi, $\dfrac{6}{x^2-9} = \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x+3}$.

2. $I = \int_4^{11} \frac{1}{6}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x$.

Remarque. Pour obtenir une primitive, utiliser la forme $f = \dfrac{u'}{u}$ avec u dérivable et $u > 0$ sur $[4;11]$.

$$I = \frac{1}{6}\big[\ln(x-3) - \ln(x+3)\big]_4^{11} = \frac{1}{3}\ln(2).$$

88 **1.** $\forall x \in \mathbb{R} - \{-2\}$,

$$ax + b + \frac{c}{x+2} = \frac{x^2-5}{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(ax+b)(x+2)+c}{x+2} = \frac{x^2-5}{x+2}$$

$$\Leftrightarrow ax^2 + (2a+b)x + 2b + c = x^2 - 5.$$

Par identification des coefficients,

$\begin{cases} a=1 \\ 2a+b=0 \\ 2b+c=-5 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=-1 \end{cases}$.

Ainsi, $\dfrac{x^2-5}{x+2} = x - 2 - \dfrac{1}{x+2}$.

Remarque. Cette décomposition peut être obtenue par une écriture astucieuse du numérateur.

$$\frac{x^2-5}{x+2} = \frac{x^2-4-1}{x+2} = \frac{(x+2)(x-2)-1}{x+2}$$

$$= x - 2 - \frac{1}{x+2}.$$

2. $J = \int_{-1}^{6}\left(x - 2 - \frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - 2x - \ln(x+2)\right]_{-1}^{6} = \frac{7}{2} - 3\ln(2).$$

89 *Corrigé sur le site élève.*

90 **1.** $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x\sin(x)$,

$f'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$,

$f''(x) = \cos(x) + \cos(x) - x\sin(x) = 2\cos(x) - f(x)$.

D'où : $f''(x) + f(x) = 2\cos(x)$.

2. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(2\cos(x) - f''(x)\big)\mathrm{d}x$

$= \big[2\sin(x) - f'(x)\big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \big[\sin(x) - x\cos(x)\big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= 1.$

91 **1.** $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (1-x)\mathrm{e}^x$,

$f'(x) = -\mathrm{e}^x + (1-x)\mathrm{e}^x = -x\mathrm{e}^x$,

$f''(x) = -\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x = -(x+1)\mathrm{e}^x$. D'où :

$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = (-x-1+2x+1-x)\mathrm{e}^x = 0$.

2. $I = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1\big(2f'(t) - f''(t)\big)\mathrm{d}t$

$= \big[2f(t) - f'(t)\big]_0^1 = \big[2(1-t)\mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^t\big]_0^1$

$= \big[(2-t)\mathrm{e}^t\big]_0^1 = \mathrm{e} - 2.$

92 **1.** $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{1+2\sin(t)}\mathrm{d}t$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln\big(1+2\sin(t)\big)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\ln(3).$$

Remarque. Pour obtenir une primitive, utiliser la forme $f = \alpha\dfrac{u'}{u}$ avec u dérivable et $u > 0$ sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

2. a) $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2t)+\cos(t)}{1+2\sin(t)}\mathrm{d}t$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin(t)\cos(t)+\cos(t)}{1+2\sin(t)}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\big(2\sin(t)+1\big)\cos(t)}{1+2\sin(t)}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\mathrm{d}t = 1.$$

b) Ainsi $I = 1 - J$ donc $I = 1 - \dfrac{1}{2}\ln(3)$.

COMPARAISON – VALEUR MOYENNE ENCADREMENT

93 **a)** $\forall x \in [1\,;2],\ x\mathrm{e}^x \leqslant x^2\mathrm{e}^x$.

Par intégration sur l'intervalle $[1\,;2]$,

$$\int_1^2\big(x\mathrm{e}^x\big)\mathrm{d}x \leqslant \int_1^2\big(x^2\mathrm{e}^x\big)\mathrm{d}x \quad \text{soit } I \leqslant J.$$

b) $\forall t \in [0\,;1],\ \dfrac{t}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$.

Par intégration sur l'intervalle $[0\,;1]$,

$$\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \quad \text{soit } J \leqslant I.$$

94 *Corrigé sur le site élève.*

95 **a)** $\forall x \in [1\,;3],\ 2 \leqslant 1 + x^2 \leqslant 10$ donc

$$\frac{1}{10} \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

D'après l'inégalité de la moyenne,

$$\frac{1}{5} \leqslant \int_1^3 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant 1.$$

b) $\forall x \in \left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$,

$$1 \leqslant \sqrt{1+x^2} \leqslant \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ donc } \frac{2}{\sqrt{5}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant 1.$$

D'après l'inégalité de la moyenne,

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}.$$

c) $\forall x \in \left[-\sqrt{\ln(2)}\,;0\right],\ 0 \leqslant x^2 \leqslant \ln(2)$ donc

$$\mathrm{e}^{-\ln(2)} \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \mathrm{e}^0 \text{ soit } \frac{1}{2} \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 1.$$

D'après l'inégalité de la moyenne,
$$\frac{\sqrt{\ln(2)}}{2} \leqslant \int_{-\sqrt{\ln(2)}}^{0} e^{-x^2}dx \leqslant \sqrt{\ln(2)}.$$

96 **a)** $\propto = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} 5\sin(2x)dx = -\dfrac{5}{2\pi}\left[\cos(2x)\right]_0^{\pi} = 0$.

b) $\propto = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 5\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)dx = \dfrac{5}{\pi}\left[\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$
$= -\dfrac{5\sqrt{3}}{\pi}$.

c) $\propto = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)e^{\sin(x)}dx = \dfrac{1}{\pi}\left[e^{\sin(x)}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{e - e^{-1}}{\pi}$.

97 **a)** f est continue et positive sur $[-\pi\,;\pi]$ donc $\propto = \dfrac{1}{2\pi}\text{aire}(\mathcal{D})$ où $\mathcal{D}$ est le domaine sous la courbe sur $[-\pi\,;\pi]$.

Ainsi $\propto = \dfrac{1}{2\pi}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\pi\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

b) De même, $\propto = \dfrac{1}{2}\text{aire}(\mathcal{D}) = \dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\pi\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

98 **a)** $\forall x \in [0\,;1]$, $1 \leqslant 1+x^2 \leqslant 2$

donc $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{1+x^2} \leqslant 1$.

D'après l'inégalité de la moyenne :

$\dfrac{1}{2} \leqslant \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}dx \leqslant 1$. Ainsi $\dfrac{1}{2} \leqslant \propto \leqslant 1$.

b) $\forall x \in [1\,;e]$, $0 \leqslant \ln(x) \leqslant 1$.

D'après l'inégalité de la moyenne :
$$0 \leqslant \int_1^e \ln(x)dx \leqslant e-1.$$
Ainsi $0 \leqslant \dfrac{1}{e-1}\displaystyle\int_1^e \ln(x)dx \leqslant 1$ soit $0 \leqslant \propto \leqslant 1$.

c) $\forall x \in \left[1\,;\sqrt{2}\right]$, $e \leqslant e^{x^2} \leqslant e^2$.

D'après l'inégalité de la moyenne :
$$e(\sqrt{2}-1) \leqslant \int_1^{\sqrt{2}} e^{x^2}dx \leqslant e^2(\sqrt{2}-1).$$
Ainsi $e \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} e^{x^2}dx \leqslant e^2$, soit $e \leqslant \propto \leqslant e^2$.

99 **1.** $\forall x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$0 \leqslant x^n \leqslant \left(\dfrac{\pi}{4}\right)^n$ et $0 \leqslant \sin(2x) \leqslant 1$.

Tous les membres étant positifs, on obtient par multiplication membre à membre : $0 \leqslant x^n\sin(2x) \leqslant \left(\dfrac{\pi}{4}\right)^n$.

Par intégration sur l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$,

$0 \leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n\sin(2x)dx \leqslant \left(\dfrac{\pi}{4}\right)^n\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx$ soit
$$0 \leqslant I_n \leqslant \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}.$$

2. Or $0 < \dfrac{\pi}{4} < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^{n+1} = 0$.

D'après le théorème d'encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

100 *Corrigé sur le site élève.*

101 **1.** $\forall x \in [0\,;1]$,
$$f'(x) = \frac{-e^{-x}(2-x)+e^{-x}}{(2-x)^2} = \frac{e^{-x}(x-1)}{(2-x)^2}.$$
$f'(x) \leqslant 0$ donc f est décroissante sur $[0\,;1]$.

Ainsi : $\forall x \in [0\,;1]$, $f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(0)$.

Donc $\dfrac{1}{e} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$ **[1]**.

2. a) $J = \displaystyle\int_0^1 (2+x)e^{-x}dx$

Pour tout x de $[0\,;1]$, on pose : $g(x) = (2+x)e^{-x}$.

Alors : $g'(x) = e^{-x} - (2+x)e^{-x} = -(1+x)e^{-x}$,

$g''(x) = -e^{-x} + (1+x)e^{-x} = xe^{-x}$.

Ainsi $g(x) = g''(x) + 2e^{-x}$.

D'où : $J = \displaystyle\int_0^1 \left(g''(x)+2e^{-x}\right)dx = \left[g'(x) - 2e^{-x}\right]_0^1$
$= \left[-(3+x)e^{-x}\right]_0^1 = 3 - 4e^{-1}$.

Remarque. On peut aussi déterminer une primitive de g sur $[0\,;1]$ sous la forme $x \mapsto (ax+b)e^{-x}$ (*cf.* exercice 41 du manuel).

b) $\forall x \in [0\,;1]$, on déduit de **[1]** l'encadrement

$\dfrac{x^2}{e} \leqslant x^2 f(x) \leqslant \dfrac{x^2}{2}$, d'où par intégration sur $[0\,;1]$:

$\dfrac{1}{e}\displaystyle\int_0^1 x^2dx \leqslant \int_0^1 x^2 f(x)dx \leqslant \dfrac{1}{2}\int_0^1 x^2dx$ soit
$$\frac{1}{3}e^{-1} \leqslant K \leqslant \frac{1}{6}\ \textbf{[2]}.$$

c) $J + K = \displaystyle\int_0^1 \left((2+x)e^{-x} + x^2 f(x)\right)dx$
$= \displaystyle\int_0^1 \left((2+x)(2-x)\dfrac{e^{-x}}{2-x} + x^2 f(x)\right)dx$
$= \displaystyle\int_0^1 \left((4-x^2)f(x) + x^2 f(x)\right)dx = \int_0^1 4f(x)dx$
$= 4L$.

d) Ainsi $L = \dfrac{J+K}{4}$.

Or $3 - 4e^{-1} + \dfrac{1}{3}e^{-1} \leqslant J+K \leqslant 3 - 4e^{-1} + \dfrac{1}{6}$ donc

$3 - \dfrac{11}{3}e^{-1} \leqslant J+K \leqslant \dfrac{19}{6} - 4e^{-1}$. On en déduit que
$$\frac{1}{4}\left(3 - \frac{11}{3}e^{-1}\right) \leqslant \frac{J+K}{4} \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{19}{6} - 4e^{-1}\right)$$
soit $\dfrac{3}{4} - \dfrac{11}{12}e^{-1} \leqslant L \leqslant \dfrac{19}{24} - e^{-1}$.

D'où l'encadrement plus large : $0{,}41 \leq L \leq 0{,}43$.

Ainsi $L \approx 0{,}42$ à 10^{-2} près.

102 **1.** $\forall x \in [0\,;+\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

$f'(x) = \dfrac{-\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = -\dfrac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ d'où $f'(x) \leqslant 0$.

Ainsi f est positive et décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

2. a) Par la méthode des rectangles, l'amplitude de l'encadrement de J est :
$$A = \frac{3}{n}\left(f(0) - f(3)\right) = \frac{3}{n}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

Or $3\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right) < 2{,}1$ donc $A < \dfrac{21}{10n}$.

b) Ainsi pour que l'amplitude de l'encadrement de J soit inférieure à 10^{-2}, il suffit de prendre n tel que

$\dfrac{21}{10n} \leqslant \dfrac{1}{100}$, soit $n \geqslant 210$. On prendra $n_0 = 210$.

Remarque. Cette condition est suffisante. (La précision peut être obtenue pour une valeur de n plus petite que 210.)

3. a) Algorithme :

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  I EST_DU_TYPE NOMBRE
  S EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  I PREND_LA_VALEUR 0
  S PREND_LA_VALEUR 0
  POUR k ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    I PREND_LA_VALEUR I+3/n*F1(k*3/n)
    S PREND_LA_VALEUR S+3/n*F1((k-1)*3/n)
    FIN_POUR
  AFFICHER "Encadrement de l'intégrale J"
  AFFICHER I
  AFFICHER "<J<"
  AFFICHER S
FIN_ALGORITHME

Fonction numérique utilisée :
F1(x)=1/sqrt(pow(x,2)+1)
```

b) Pour lancer le programme, la valeur de n à saisir est 210 (voir 2b).

c) Test de l'algorithme :

```
***Algorithme lancé***
Encadrement de l'intégrale J
1.8135608<J<1.8233289
***Algorithme terminé***
```

En particulier $J \in [1{,}8135\ ;\ 1{,}8234]$; l'amplitude de l'encadrement n'excède pas 0,01.

À la calculatrice on obtient $J \approx 1{,}8184$ (arrondi à 10^{-4} près) d'où l'accord entre les résultats.

4. $L = \int_0^2 \sqrt{x^2+1}\,dx$.

$\forall x \in [0\ ;+\infty[,\ g(x) = \sqrt{x^2+1}$.

$g'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ d'où $g'(x) \geqslant 0$.

Ainsi g est positive et croissante sur $[0;+\infty[$.

L' amplitude de l'encadrement de L est

$$A = \frac{2}{n}\big(f(2)-f(0)\big) = \frac{2}{n}\big(\sqrt{5}-1\big).$$

Or $2(\sqrt{5}-1) < 2{,}5$ donc $A < \dfrac{2{,}5}{n}$.

Pour la précision demandée, il suffit que n vérifie

$\dfrac{2{,}5}{n} \leqslant \dfrac{1}{100}$ soit $n \geq 250$. On prendra $n_0 = 250$.

D'où l'algorithme précédent adapté à la fonction g.

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  I EST_DU_TYPE NOMBRE
  S EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  I PREND_LA_VALEUR 0
  S PREND_LA_VALEUR 0
  POUR k ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    I PREND_LA_VALEUR I+(2/n)*F1((k-1)*2/n)
    S PREND_LA_VALEUR S+(2/n)*F1(k*2/n)
    FIN_POUR
  AFFICHER "Encadrement de l'intégrale L"
  AFFICHER I
  AFFICHER "< L <"
  AFFICHER S
FIN_ALGORITHME

Fonction numérique utilisée :
F1(x)=sqrt(pow(x,2)+1)
```

Remarque. On peut obtenir une solution purement algorithmique du problème en évitant le calcul d'une valeur n_0 suffisante pour obtenir l'amplitude demandée. Il suffit d'utiliser une boucle Tant que.

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  I EST_DU_TYPE NOMBRE
  S EST_DU_TYPE NOMBRE
  A EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  n PREND_LA_VALEUR 1
  A PREND_LA_VALEUR sqrt(5)
  TANT_QUE (A>=0.01) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    I PREND_LA_VALEUR 0
    S PREND_LA_VALEUR 0
    POUR k ALLANT_DE 1 A n
      DEBUT_POUR
      I PREND_LA_VALEUR I+2/n*F1((k-1)*2/n)
      S PREND_LA_VALEUR S+2/n*F1(k*2/n)
      FIN_POUR
    A PREND_LA_VALEUR S-I
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER I
  AFFICHER "< L <"
  AFFICHER S
  AFFICHER "Amplitude="
  AFFICHER A
FIN_ALGORITHME

Fonction numérique utilisée :
F1(x)=sqrt(1+pow(x,2))
```

Remarque. On peut vérifier avec cet algorithme que la valeur 250 suffisante pour obtenir l'amplitude désirée n'est pas la plus petite valeur solution.

La première valeur de n solution est 248. Il suffit de faire afficher le contenu de la mémoire n.

CALCULS D'AIRES

103 $\text{aire}(\mathcal{D}_1) = \int_0^1 x^5\,dx = \dfrac{1}{6}$ u.a.

$\text{aire}(\mathcal{D}_3) = \int_0^1 (1-\sqrt{x})\,dx = \left[x - \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^1 = \dfrac{1}{3}$ u.a.

Remarque. Une primitive de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0\,;+\infty[$ a été vue à l'exercice résolu A, page 200 du manuel.

$\text{aire}(\mathcal{D}_2) = 1 - \left(\text{aire}(\mathcal{D}_1) + \text{aire}(\mathcal{D}_3)\right)$,

donc $\text{aire}(\mathcal{D}_2) = 1 - \left(\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ u.a.

104 $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}n^2\right)\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3} - n^2 x\right]_n^{n+1}$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{(n+1)^3}{3} - n^2(n+1) - \frac{n^3}{3} + n^3\right)$$
$$= \frac{1}{4}n + \frac{1}{12}.$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{4}(n+1) + \dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{4}n - \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{4}$.

Donc la suite (u_n) est arithmétique de raison $r = \dfrac{1}{4}$ et de premier terme $u_0 = \dfrac{1}{12}$.

105 **1. a)** $\forall x \in [0\,;1]$,

$$f(x) - x = \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x\mathrm{e}^x + x^2}{\mathrm{e}^x - x}$$
$$= \frac{(1-x)\mathrm{e}^x - (1-x^2)}{\mathrm{e}^x - x}$$
$$= \frac{(1-x)\mathrm{e}^x - (1-x)(1+x)}{\mathrm{e}^x - x}$$
$$= \frac{(1-x)(\mathrm{e}^x - x - 1)}{\mathrm{e}^x - x}.$$

b) On étudie le signe de $f(x) - x$ sur $[0\,;1]$.

$\mathcal{C}_{\exp}$ est au-dessus de sa tangente T_0 : $y = x + 1$ donc pour tout nombre x, $\mathrm{e}^x - x - 1 \geqslant 0$.

On en déduit que $\mathrm{e}^x - x \geqslant 1 > 0$.

Enfin, pour tout x de $[0\,;1]$, $1 - x \geqslant 0$.

Finalement : $\forall x \in [0\,;1]$, $f(x) - x \geqslant 0$.

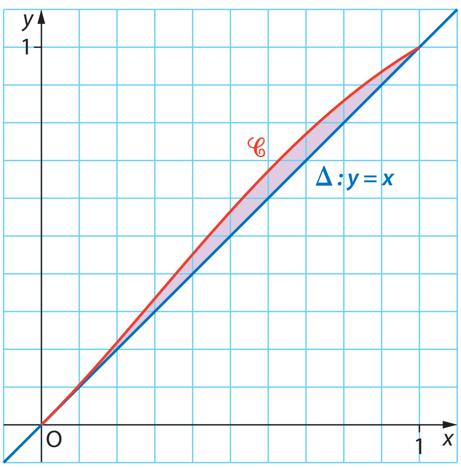
Ainsi $\mathcal{C}$ est au-dessus de Δ sur $[0\,;1]$.

2. L'aire du domaine $\mathcal{D}$ entre Δ et $\mathcal{C}$ sur $[0\,;1]$ s'exprime en u.a par :

$$\text{aire}(\mathcal{D}) = \int_0^1 \left(f(x) - x\right)\mathrm{d}x = \int_0^1\left(\frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x} - x\right)\mathrm{d}x$$
$$= \left[\ln(\mathrm{e}^x - x) - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \ln(\mathrm{e}-1) - \frac{1}{2}.$$

Or 1 u.a. = 100 cm² donc :

$$\text{aire}(\mathcal{D}) = 100\ln(\mathrm{e}-1) - 50 \approx 4{,}13\ \text{cm}^2.$$



106 **1.** Pour tout nombre $x > 0$,

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2} = \frac{x}{\mathrm{e}^{x^2}} = \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}.$$

On pose $\mathrm{U} = x^2$. Ainsi $\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}} = \dfrac{\mathrm{U}}{\mathrm{e}^{\mathrm{U}}}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{U} = 0$ et $\lim\limits_{\mathrm{U}\to+\infty}\dfrac{\mathrm{U}}{\mathrm{e}^{\mathrm{U}}} = \lim\limits_{\mathrm{U}\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{U}}}{\mathrm{U}}} = 0$ donc

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}} = 0.$$

Finalement, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}} = 0$, donc par multiplication, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Ainsi l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

2. a) 1 u. a. = 5 cm² donc

$$\mathcal{A}(\lambda) = 5 \times \int_0^\lambda x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = 5\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^\lambda$$
$$= \frac{5}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda^2}\right)\ \text{cm}^2.$$

b) Or $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda^2} = 0$ donc $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathcal{A}(\lambda) = \dfrac{5}{2}$.

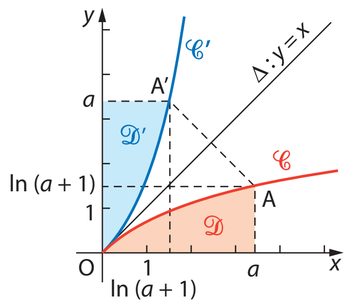
Ainsi le domaine limité par la courbe et l'axe des abscisses sur $[0\,;+\infty[$ a pour aire 2,5 cm².

107 **1.** $\forall a > 0$, $\mathrm{I}(a) = \text{aire}(\mathcal{D})$.

Or en raison de la symétrie par rapport à Δ,

$$\text{aire}(\mathcal{D}) = \text{aire}(\mathcal{D}').$$

L'aire de $\mathcal{D}'$ est celle du rectangle de largeur $\ln(a+1)$ et de hauteur a, privée de l'aire du domaine sous la courbe $\mathcal{C}'$ sur l'intervalle $[0\,;\ln(a+1)]$.



Donc : $\mathrm{I}(a) = \text{aire}(\mathcal{D}') = a\ln(a+1) - \displaystyle\int_0^{\ln(a+1)}(\mathrm{e}^x - 1)\mathrm{d}x$.

2. $\displaystyle\int_0^{\ln(a+1)}(\mathrm{e}^x - 1)\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^x - x\right]_0^{\ln(a+1)} = a - \ln(a+1)$

donc $\mathrm{I}(a) = a\ln(a+1) - a + \ln(a+1)$ soit

$$\mathrm{I}(a) = (a+1)\ln(a+1) - a.$$

PROLONGEMENT DU TD 46

108 **1. a)** La section de Σ par un plan perpendiculaire à $(\mathrm{O}y)$ passant par $\mathrm{H}(0\,;t)$ est un disque centré en H.

b) Son rayon $r(t)$ est tel que $r^2(t) = x_{\mathrm{M}}{}^2$ où M est le point de $\mathcal{P}$ d'abscisse positive et d'ordonnée t.

Ainsi $4 - x_{\mathrm{M}}{}^2 = t$ donc $x_{\mathrm{M}}{}^2 = 4 - t$.

D'où l'aire de la section : $\mathrm{S}(t) = \pi r^2(t) = \pi(4-t)$.

2. $\mathrm{V} = \displaystyle\int_0^4 \mathrm{S}(t)\mathrm{d}t = \pi\int_0^4(4-t)\mathrm{d}t = \pi\left[4t - \frac{t^2}{2}\right]_0^4$

$$\mathrm{V} = 8\pi\ \text{u.v.}$$

109 *Corrigé sur le site élève.*

110 **1.** $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{1}{e^{-x}+1}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{1+e^x} = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^{-x}+1} = 1$.

Ainsi $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes horizontales :
- l'axe des abscisses, (Ox) : $y = 0$, en $-\infty$;
- la droite Δ : $y = 1$, en $+\infty$.

2. a) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{e^{2x}}{(e^x+1)^2} = \frac{ae^x}{e^x+1} + \frac{be^x}{(e^x+1)^2}$$
$$\Leftrightarrow e^{2x} = ae^x(e^x+1) + be^x$$
$$\Leftrightarrow e^{2x} = ae^{2x} + (a+b)e^x$$
$$\Leftrightarrow (a-1)e^{2x} + (a+b)e^x = 0.$$

Pour que cette égalité soit vérifiée, il suffit que :
$\begin{cases} a-1=0 \\ a+b=0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$.

Ainsi, $\dfrac{e^{2x}}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^x}{e^x+1} - \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$.

Remarque. Une écriture astucieuse du numérateur permet d'obtenir cette décomposition.

$$\frac{e^{2x}}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x}+e^x-e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x(e^x+1)-e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{(e^x+1)^2}.$$

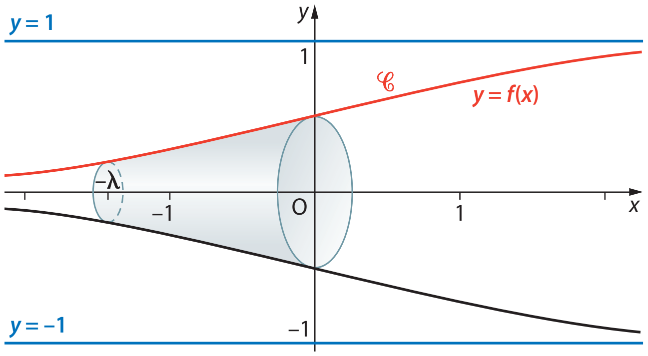
b) $V(\lambda) = \displaystyle\int_{-\lambda}^{0} \pi[f(x)]^2\,dx = \pi\int_{-\lambda}^{0} \frac{e^{2x}}{(e^x+1)^2}dx$

$$= \pi\int_{-\lambda}^{0}\left(\frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\right)dx$$
$$= \pi\left[\ln(e^x+1) + \frac{1}{e^x+1}\right]_{-\lambda}^{0}$$
$$= \pi\left(\ln(2) + \frac{1}{2} - \ln(e^{-\lambda}+1) - \frac{1}{e^{-\lambda}+1}\right).$$

c) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} e^{-\lambda} = 0$, d'où $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \ln(1+e^{-\lambda}) = \ln(1) = 0$ et $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \dfrac{1}{e^{-\lambda}+1} = 1$. On en déduit que :

$$\lim_{\lambda\to+\infty} V(\lambda) = \pi\left(\ln(2) + \frac{1}{2} - 1\right) = \frac{\pi}{2}(2\ln(2) - 1).$$

Le volume engendré par la rotation de l'arc de $\mathscr{C}$ autour de l'axe des abscisses sur $]-\infty\,;0]$ est fini de valeur $\dfrac{\pi}{2}(2\ln(2)-1)$ u.v.



DANS LES AUTRES SCIENCES

111 **1.** Par définition, $RI_e^2T = R\displaystyle\int_0^T i^2(t)dt$,

donc $I_e^2 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T i^2(t)dt$.

Ainsi I_e^2 est la valeur moyenne de la fonction i^2 sur l'intervalle $[0\,;T]$.

2. $I_e^2 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t)dt = \dfrac{I_m^2}{T}\int_0^T \dfrac{1-\cos(2\omega t)}{2}dt$

$I_e^2 = \dfrac{I_m^2}{2T}\left[t - \dfrac{1}{2}\sin(2\omega t)\right]_0^T = \dfrac{I_m^2}{2T}\left(T - \dfrac{1}{2}\sin(2\omega T)\right)$

Or $\omega T = 2\pi$ donc $\sin(2\omega T) = 0$.

Ainsi $I_e^2 = \dfrac{I_m^2}{2T}\cdot T = \dfrac{I_m^2}{2}$ donc $I_e = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}$.

112 **1.** $\forall t \in [0\,;+\infty[$, $v'(t) = 30\cdot\dfrac{1}{10}e^{-\frac{t}{10}} = 3e^{-\frac{t}{10}}$.

Ainsi, $10v'(t) + v(t) = 30e^{-\frac{t}{10}} + 30\left(1 - e^{-\frac{t}{10}}\right) = 30$ avec $v(0) = 0$.

La fonction v vérifie les conditions du modèle.

2. $\forall t \in [0\,;+\infty[$, $v'(t) > 0$ donc v est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

$\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{t}{10}} = 0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} 30\left(1 - e^{-\frac{t}{10}}\right) = 30$.

3. La vitesse du cycliste est stabilisée si et seulement si $v'(t) < 0{,}1$.

$v'(t) < 0{,}1 \Leftrightarrow 3e^{-\frac{t}{10}} < \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{10}} < \dfrac{1}{30}$

$$\Leftrightarrow -\frac{t}{10} < -\ln(30) \Leftrightarrow t > 10\ln(30).$$

Or $10\ln(30) \approx 34{,}012$ donc la vitesse est stabilisée au bout de 35 secondes (à 1 s près par excès).

4. a) La fonction distance $t \mapsto d(t)$ est la primitive sur $[0\,;+\infty[$ de la fonction vitesse v, sous la condition initiale $d(0) = 0$, donc $d(t) = \displaystyle\int_0^t v(u)du$.

b) $d(35) = \displaystyle\int_0^{35} v(u)du$.

Or pour tout $u \geqslant 0$, $10v'(u) + v(u) = 30$ donc $v(u) = 30 - 10v'(u)$. D'où :

$$d(35) = [30u - 10v(u)]_0^{35} = \left[30u - 300\left(1 - e^{-\frac{t}{10}}\right)\right]_0^{35}$$
$$= 750 + 300e^{-3{,}5} \approx 759 \text{ m}.$$

EXERCICES DE SYNTHÈSE

113 **A. 1. a)** $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$.

Ainsi $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Remarque. $\lim\limits_{x\to0+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $f(1) = 0$.

Tableau de variation :

x	0	1	$+\infty$
f'		$+$	
f	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

b) Tableau du signe de $f(x)$:

x	0		1		$+\infty$
f	‖	$-$	0	$+$	

2. a) F est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$F'(x) = \ln(x) + (x-1)\cdot\frac{1}{x} = \ln(x) + 1 - \frac{1}{x} = f(x).$$

Ainsi F est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

b) Pour tout x de $[1\,;+\infty[$, $F'(x) \geqslant 0$ (avec égalité pour la seule valeur 1), donc F est strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.

Remarque. Pour tout $x \geqslant \mathrm{e}$, $\ln(x) \geqslant 1$ donc $(x-1)\ln(x) \geqslant x-1$ soit $F(x) \geqslant x-1$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$ donc par comparaison,

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty.$$

c) F est continue et strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.

L'image de l'intervalle $[1\,;+\infty[$ est l'intervalle $\left[F(1)\,;\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)\right[= [0\,;+\infty[$.

Le nombre $1-\mathrm{e}^{-1}$ appartient à l'intervalle image, donc l'équation $F(x) = 1-\mathrm{e}^{-1}$ admet une solution unique α dans $[1\,;+\infty[$.

À la calculatrice : $1{,}94 \leqslant \alpha \leqslant 1{,}95$.

B. 1. $h(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-1}$.

Ainsi $A(\mathrm{e}^{-1};0)$.

2. $h(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln(x) + 1 = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \ln(x) + 1 - \dfrac{1}{x} = 0$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Ainsi $\mathscr{C}_h$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent en $P(1;1)$.

3. a) Les fonctions g et h sont continues sur $[\mathrm{e}^{-1};1]$.

Sur cet intervalle, $f = h - g$ est négative donc $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\mathscr{C}_h$. D'où :

$$\mathscr{A} = \int_{\mathrm{e}^{-1}}^{1}\big(g(x) - h(x)\big)\mathrm{d}x = -\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{1} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

b) $\mathscr{A} = -\big[F(x)\big]_{\mathrm{e}^{-1}}^{1} = (\mathrm{e}^{-1}-1)\ln(\mathrm{e}^{-1}) = 1 - \mathrm{e}^{-1}$ u.a.

4. a) Sur $[1\,;t]$, g et h sont continues mais, $\mathscr{C}_h$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ donc :

$$\mathscr{A}_t = \int_1^t (h(x) - g(x))\mathrm{d}x = \int_1^t f(x)\mathrm{d}x = F(t) - F(1)$$
$$= F(t) = (t-1)\ln(t).$$

b) $\mathscr{A}_t = \mathscr{A} \Leftrightarrow F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-1}$.

Or d'après **A. 2. c)** cette équation admet une solution unique $t = \alpha$ dans $[1\,;+\infty[$.

Donc il existe une unique valeur de t dans $[1\,;+\infty[$, à savoir α, telle que $\mathscr{A}_t = \mathscr{A}$.

114 **1.** $\forall x \in [0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1 - \ln(x+3)}{(x+3)^2}$.

Pour tout $x \geqslant 0$, $x + 3 \geqslant 3 > \mathrm{e}$ donc $\ln(x+3) > \ln(\mathrm{e})$ d'où on déduit que $1 - \ln(x+3) < 0$.

Ainsi sur $[0\,;+\infty[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante.

Pour le calcul de la limite en $+\infty$, on pose $X = x + 3$ d'où $f(x) = \dfrac{\ln(X)}{X}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\ln(X)}{X} = 0$, donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

2. a) Pour tout entier naturel n, f est strictement décroissante sur $[n\,;n+1]$. Donc :

$$\forall x \in [n\,;n+1],\quad f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n).$$

b) D'après l'inégalité de la moyenne sur $[n\,;n+1]$:

$$(n+1-n)f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant (n+1-n)f(n)\,;$$
$$f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)\,.$$

c) Or $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(n+1) = 0$ donc, d'après le théorème d'encadrement la suite (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3. a) $I_n = \displaystyle\int_0^n \frac{\ln(x+3)}{x+3}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln^2(x+3)\right]_0^n$

$$= \frac{1}{2}\big(\ln^2(n+3) - \ln^2(3)\big).$$

Remarque. Pour obtenir une primitive de f sur $[0\,;+\infty[$, reconnaître la forme $f = u'u$ d'où $F = \dfrac{1}{2}u^2$.

b) $S_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x + \dots + \int_{n-1}^n f(x)\mathrm{d}x$.

D'après la relation de Chasles, $S_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\mathrm{d}x$. Donc

$$S_n = I_n = \frac{1}{2}\big(\ln^2(n+3) - \ln^2(3)\big).$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n+3) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Ainsi la suite (S_n) n'est pas convergente.

115 **A. 1.** f est continue (car dérivable) et positive sur $\mathbb{R}$, donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$.

(F est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 2.)

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) \geqslant 0$ (avec égalité en 0) donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. D'après le tableau de variation de f, pour tout t de $[2\,;3]$, $0 \leqslant f(t) \leqslant 4\mathrm{e}^{-2}$.

D'après l'inégalité de la moyenne :

$$(3-2)\cdot 0 \leqslant \int_2^3 f(t)\mathrm{d}t \leqslant (3-2)\cdot 4\mathrm{e}^{-2},$$

soit $0 \leqslant F(3) \leqslant 4\mathrm{e}^{-2}$.

B. 1. a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x} = x(2-x)\mathrm{e}^{-x}$.

Le signe de $f'(x)$ est celui du polynôme du second degré $x(2-x)$ dont les racines sont 0 et 2.

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$4\mathrm{e}^{-2}$	↘	0

Remarque. Calcul des limites en $-\infty$ et $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ donc par multiplication $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

$$f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x} = 4\left(-\frac{x}{2}\right)^2\left(\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)^2.$$

On pose $X = -\dfrac{x}{2}$. Alors, $f(x) = 4\big(X\mathrm{e}^{X}\big)^2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} X = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} X\mathrm{e}^{X} = 0$, d'où :

$$\lim_{X\to-\infty} 4(X\mathrm{e}^{X})^2 = 0 \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

On retrouve le tableau de variation de la partie **A.**.

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - g(x) = (x^2 - 1)e^{-x}$.
Le signe de $f(x) - g(x)$ est celui du polynôme du second degré $x^2 - 1$ dont les racines sont -1 et 1.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f-g$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi $\mathscr{C}$ est au-dessous de Γ sur $]-1\,;1[$, au-dessus de Γ sur $]-\infty;-1]\cup[1\,;+\infty[$.

2. a) $\forall x \in \mathbb{R},\ H'(x) = (2ax+b)e^{-x} - (ax^2+bx+x)e^{-x}$
$= \left(-ax^2 + (2a-b)x + b - c\right)e^{-x}$.

Alors :
$H'(x) = h(x) \Leftrightarrow -ax^2 + (2a-b)x + b - c = x^2 - 1$.
Par identification des coefficients,
$$\begin{cases} -a = 1 \\ 2a - b = 0 \\ b - c = -1 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = -1 \end{cases}.$$
Ainsi $H(x) = \left(-x^2 - 2x - 1\right)e^{-x} = -(x+1)^2e^{-x}$.

b) Sur l'intervalle $[1\,;\alpha]$ les fonctions f et g sont continues et $\mathscr{C}$ est au-dessus de Γ, donc
$$\mathscr{A}(\alpha) = \int_1^\alpha \left(f(x) - g(x)\right)dx = \int_1^\alpha h(x)dx$$
$$\mathscr{A}(\alpha) = \left[-(x+1)^2e^{-x}\right]_1^\alpha = 4e^{-1} - (\alpha+1)^2e^{-\alpha} \text{ u.a.}$$

c) Pour tout nombre $\alpha \geqslant 1$,
$(\alpha+1)^2e^{-\alpha} = \alpha^2e^{-\alpha} + 2\alpha e^{-\alpha} + e^{-\alpha}$.

Or $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} e^{-\alpha} = 0$, $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \alpha e^{-\alpha} = \lim\limits_{\alpha\to+\infty} \dfrac{\alpha}{e^\alpha} = 0$ et

$\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \alpha^2e^{-\alpha} = \lim\limits_{\alpha\to+\infty} f(\alpha) = 0$ (voir **B. 1. a)**), donc :
$$\lim_{\alpha\to+\infty} (\alpha+1)^2e^{-\alpha} = 0.$$
Ainsi $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \mathscr{A}(\alpha) = 4e^{-1}$.

116 Le raisonnement est exact.
n désigne un entier naturel non nul.
Sur l'intervalle $[1\,;n]$: $t^2 \geqslant t \Rightarrow 0 \leqslant e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$.
On utilise la décroissance de la fonction $x \mapsto e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ et la positivité de cette fonction.
Par intégration des inégalités précédentes sur cet intervalle :
$$0 \leqslant e^{-t^2} \leqslant e^{-t} \Rightarrow 0 \leqslant \int_1^n e^{-t^2}dt \leqslant \int_1^n e^{-t}dt$$
$$\Rightarrow 0 \leqslant u_n \leqslant \left[-e^{-t}\right]_1^n$$
$$\Rightarrow 0 \leqslant u_n \leqslant -e^{-n} + e^{-1}$$
On majore le dernier membre :
$-e^{-n} + e^{-1} \leqslant 0 + 1 \leqslant 1$. Ainsi $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
La suite u est donc bornée par 0 et 1.
On étudie le sens de variation de la suite u par une interprétation géométrique à l'aide des aires.
La solution proposée est correcte. Cependant, on peut lui préférer un raisonnement basé sur l'étude du signe de $u_{n+1} - u_n$.
$$u_{n+1} - u_n = \int_1^{n+1} e^{-t^2}dt - \int_1^n e^{-t^2}dt = \int_n^1 e^{-t^2}dt + \int_1^{n+1} e^{-t^2}dt$$
$$= \int_n^{n+1} e^{-t^2}dt \text{ (relation de Chasles).}$$
Or la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue et positive sur $[n\,;n+1]$ donc, d'après la propriété de positivité de l'intégrale, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. Ainsi la suite u est croissante.
En conclusion, on utilise le théorème sur la convergence des suites strictement monotones.

AVEC LES TICE

117 **1.** f est continue sur $I =]0\,;+\infty[$ donc elle admet des primitives sur I.
Pour tout $x > 0$, on pose $u(x) = \ln(x)$ d'où $u'(x) = \dfrac{1}{x}$.
On reconnaît $f = u'u$, donc $F = \dfrac{1}{2}u^2 + k$.
$$\forall x \in I,\ F(x) = \frac{1}{2}\ln^2(x) + k.$$
Or $F(1) = 0$, donc $\dfrac{1}{2}\ln^2(1) + k = 0$ d'où $k = 0$.
Finalement : $\forall x \in I$, $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln^2(x)$.

2. Par l'instruction Dérivée[<Fonction>] appliquée à la fonction F on obtient $F'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x} = f(x)$.
De plus, on peut vérifier que $F(1) = 0$ en testant l'appartenance du point A(1 ; 0) à $\mathscr{C}_F$.

3. $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$.
$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow x \leqslant e$.
D'où le tableau de variation de f :

x	0		e		$+\infty$
f'	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	e^{-1}	↘	0

Remarque. $\lim\limits_{x\to0+} f(x) = \lim\limits_{x\to0+} \dfrac{1}{x}\ln(x) = -\infty$ et
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$
f admet sur I un maximum, e^{-1}, obtenu pour $x = e$.
Le point de coordonnées $(e\,;e^{-1})$ est-il sur $\mathscr{C}_F$?
$F(e) = \dfrac{1}{2}\ln^2(e) = \dfrac{1}{2}$ donc la réponse est négative. La conjecture est fausse.

118 **1.** f est continue sur $I =]1\,;+\infty[$ donc elle admet des primitives sur I.
Pour tout $x > 1$, on pose $u(x) = \ln(x)$, d'où $u'(x) = \dfrac{1}{x}$.
Ainsi $f = \dfrac{u'}{u}$ avec $u > 0$ sur I, donc $F = \ln(u) + k$.
$$\forall x \in I,\ F(x) = \ln\left(\ln(x)\right) + k.$$
La condition initiale s'écrit $F(e) = f(e) = \dfrac{1}{e} = e^{-1}$, donc $\ln\left(\ln(e)\right) + k = e^{-1}$, d'où $k = e^{-1}$.
Finalement : $\forall x \in I$, $F(x) = \ln\left(\ln(x)\right) + e^{-1}$.

2. Par l'instruction Dérivée[<Fonction>] appliquée à la fonction F on obtient $F'(x) = \dfrac{1}{\ln(x)x} = f(x)$.
De plus, on peut tester l'appartenance du point $A(e\,;e^{-1})$ de $\mathscr{C}_f$ à la courbe $\mathscr{C}_F$.

3. $F(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(\ln(x)) + e^{-1} = 0 \Leftrightarrow \ln(\ln(x)) = -e^{-1}$
$\Leftrightarrow \ln(x) = e^{-e^{-1}} \Leftrightarrow x = e^{e^{-e^{-1}}}$.
Ainsi la courbe $\mathscr{C}_F$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $e^{e^{-e^{-1}}} \approx 1{,}998$ (à 10^{-3} près) : la conjecture est fausse.

119 **1.** f est continue sur $I = [0\,;+\infty[$ donc elle admet des primitives sur I.

Pour tout $x \geqslant 0$, on pose $u(x) = e^x + e^{-x}$, d'où

$$u'(x) = e^x - e^{-x}.$$

Ainsi $f = \dfrac{u'}{u}$ avec $u > 0$ sur I, donc $F = \ln(u) + k$.

$$\forall x \in I,\ F(x) = \ln\left(e^x + e^{-x}\right) + k.$$

Or $F(0) = 0$, donc $\ln(2) + k = 0$ d'où $k = -\ln(2)$.

Finalement :

$$\forall x \in I,\ F(x) = \ln\left(e^x + e^{-x}\right) - \ln(2) = \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right).$$

2. Par l'instruction Dérivée[<Fonction>] appliquée à la fonction F on obtient $F'(x) = \dfrac{(e^x)^2 - 1}{(e^x)^2 + 1}$.

Mais l'instruction Simplifier[<Fonction>] appliquée à la fonction f donne la même expression que $F'(x)$. Ainsi $F' = f$ sur I.

De plus, on peut vérifier que $F(0) = 0$ en testant l'appartenance du point O(0 ; 0) à $\mathscr{C}_F$.

3. On conjecture que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. On pose $X = e^x$.

$$\text{Ainsi } f(x) = \frac{X - \dfrac{1}{X}}{X + \dfrac{1}{X}} = \frac{X^2 - 1}{X^2 + 1}.$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X^2 - 1}{X^2 + 1} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X^2}{X^2} = 1$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

On conjecture que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

On pose $U = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Ainsi $F(x) = \ln(U)$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} U = +\infty$ et $\lim\limits_{U\to+\infty} \ln(U) = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

Prendre toutes les initiatives

120 $J = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx$.

On conjecture que dans un repère orthonormé, la courbe représentative de $f : x \mapsto \sqrt{x(1-x)}$ est un demi-cercle.

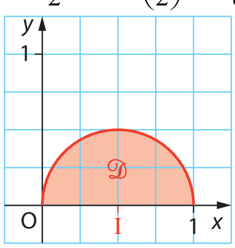
$$M(x;y) \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow y = \sqrt{x - x^2},\ x \in [0\,;1]$$
$$\Leftrightarrow y^2 = x - x^2,\ y \geqslant 0$$

D'où en utilisant la forme canonique d'un polynôme du second degré : $x - x^2 = -(x^2 - x) = -\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4}$.

$$M(x;y) \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}\,;\ y \geqslant 0.$$

Ainsi $\mathscr{C}_f$ est le demi-cercle de centre $I\left(\dfrac{1}{2}\,;0\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$ situé dans le demi-plan d'équation $y \geqslant 0$.

$$\text{Ainsi } J = \text{aire}(\mathscr{D}) = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}.$$



121 $\forall x \in [0\,;+\infty[$,

$$f'(x) = 1 + e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)e^{-x} + 1.$$

Pour déterminer s'il existe un point de $\mathscr{C}$, d'abscisse a, où la tangente admet pour coefficient directeur 1, on résout l'équation $f'(a) = 1$.

$$f'(a) = 1 \Leftrightarrow (1 - a)e^{-a} + 1 = 1 \Leftrightarrow (1 - a)e^{-a} = 0$$
$$\Leftrightarrow a = 1.$$

Il existe une seule tangente solution T associée au point $A(1\,;1 + e^{-1})$.

$T : y = f'(a)(x - a) + f(a)$ soit $T : y = x + e^{-1}$.

On étudie la position de T et de $\mathscr{C}$.

On pose : $\varphi(x) = x + e^{-1} - f(x)$, $x \in [0\,;+\infty[$

$$= e^{-1} - xe^{-x}.$$

Alors : $\varphi'(x) = -e^{-x} + xe^{-x} = (x - 1)e^{-x}$.

Le signe de $\varphi'(x)$ est celui de $x - 1$, d'où le tableau de variation de φ :

x	0		1		$+\infty$
φ'		$-$	0	$+$	
φ	e^{-1}	$\searrow$	0	$\nearrow$	e^{-1}

Ainsi : $\forall x \in [0\,;+\infty[$, $\varphi(x) \geqslant 0$.

Donc T est au-dessus de $\mathscr{C}$.

Le domaine $\mathscr{D}$ limité par T, $\mathscr{C}$ et l'axe des ordonnées est tel que :

$$\mathscr{A}(\mathscr{D}) = \int_0^1 \varphi(x)\,dx = \int_0^1 \left(e^{-1} - xe^{-x}\right)dx.$$

Remarque. h est la fonction $x \mapsto -xe^{-x}$, $x \in [0\,;+\infty[$.

$$\forall x \in [0\,;+\infty[,\ h'(x) = -e^{-x} + xe^{-x} = -e^{-x} - h(x).$$

Ainsi $h(x) = -h'(x) - e^{-x}$, d'où l'expression d'une primitive de h sur $[0\,;+\infty[$:

$$H(x) = -h(x) + e^{-x} = xe^{-x} + e^{-x} = (x + 1)e^{-x}.$$

• Finalement, $\mathscr{A}(\mathscr{D}) = \left[e^{-1}x + (x + 1)e^{-x}\right]_0^1 = 3e^{-1} - 1$ u.a.

Or $3e^{-1} - 1 \approx 0{,}104$ (à 10^{-3} près) donc $\mathscr{A}(\mathscr{D}) > 0{,}1$.

122 On prouve que les arcs de courbe $\mathscr{C}_1 : y = \dfrac{1}{x} - 1$ $\left(\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1\right)$ et $\mathscr{C}_2 : y = \dfrac{1}{x + 1}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ sont symétriques par rapport à la droite $\Delta : y = x$.

$$M(a\,;b) \in \mathscr{C}_1 \Leftrightarrow b = \frac{1}{a} - 1,\ a \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{b + 1},\ b \in [0\,;1]$$
$$\Leftrightarrow M'(b;a) \in \mathscr{C}_2.$$

Donc $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont symétriques par rapport à Δ.

Le point d'intersection de $\mathscr{C}_1$ et Δ est défini par :

$$\begin{cases} y = x \\ y = \dfrac{1}{x} - 1 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} y = x \\ x = \dfrac{1}{x} - 1 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} y = x \\ x^2 + x - 1 = 0 \end{cases}.$$

L'équation du second degré a pour solutions dans $\mathbb{R}$:

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } \beta = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Seule la valeur α convient $(0{,}5 \leqslant \alpha \leqslant 1)$.

Ainsi $\mathscr{C}_1$ et Δ se coupent en $A(\alpha\,;\alpha)$.

Le domaine $\mathcal{D}$ colorié est symétrique par rapport à Δ, avec $\mathcal{C}_2$ au-dessus de $\mathcal{C}_1$ sur $[\alpha ; 1]$ donc :

$$\text{aire}(\mathcal{D}) = 2\int_\alpha^1\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + 1\right)\mathrm{d}x .$$

$$\text{aire}(\mathcal{D}) = 2\left[\ln(x+1) - \ln(x) + x\right]_\alpha^1$$

$$= 2\left[\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x\right]_\alpha^1$$

$$= 2\left(\ln(2) + 1 - \ln\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right) - \alpha\right)$$

$\text{aire}(\mathcal{D}) \approx 0{,}225$ u.a.

123 Le point M intersection de la courbe et de la droite est défini par

$$\begin{cases} y = \mathrm{e}^{-x} \\ y = m \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} = m \\ y = m \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x = -\ln(m) \\ y = m \end{cases}.$$

Ainsi M a pour coordonnées $(-\ln(m) ; m)$.

L'aire du domaine $\mathcal{A}$ colorié est en u.a.,

$$\text{aire}(\mathcal{A}) = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$$

Or $\int_0^a \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^a = -\mathrm{e}^{-a} + 1$ donc

$$\text{aire}(\mathcal{A}) = \lim_{a\to+\infty}\left(-\mathrm{e}^{-a} + 1\right) = 1.$$

L'aire du domaine $\mathcal{D}$ limité par la droite, la courbe et l'axe des ordonnées s'exprime en u.a. par :

$$\text{aire}(\mathcal{D}) = \int_0^{-\ln(m)}\left(\mathrm{e}^{-x} - m\right)\mathrm{d}x.$$

$$= \left[-\mathrm{e}^{-x} - mx\right]_0^{-\ln(m)} = -m + m\ln(m) + 1.$$

Il s'agit de déterminer m dans $]0 ; 1[$ tel que $2\text{aire}(\mathcal{D}) = \text{aire}(\mathcal{A})$, d'où l'équation :

$2(m\ln(m) - m + 1) = 1$ soit

$$2m\ln(m) - 2m + 1 = 0 .$$

On considère la fonction définie sur $]0 ; 1]$ par :

$$f(x) = 2x\ln(x) - 2x + 1 .$$

$\forall x \in]0 ; 1]$, $f'(x) = 2\ln(x) + 2x \cdot \dfrac{1}{x} - 2 = 2\ln(x)$.

Ainsi, pour tout x de $]0 ; 1]$, $f'(x) \leqslant 0$.

Remarque. $\lim\limits_{x\to0+} x\ln(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to0+} f(x) = 1$.

D'où le tableau de variation :

x	0		1
f'	‖	$-$	0
f	‖ 1	↘ 0	-1

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]0 ; 1[$. L'image de l'intervalle $]0 ; 1[$ est l'intervalle $]-1 ; 1[$ qui contient le nombre 0, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0 ; 1[$.

Encadrement de α : $0{,}186 < \alpha < 0{,}187$.

Ainsi ce problème de partage admet une unique solution obtenue pour $m = \alpha$.

124 Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2n}.$$

S_n est la somme des aires des rectangles inférieurs sur $[n ; 2n]$ pour une subdivision de pas 1. On note T_n la somme des aires des rectangles supérieurs et $\mathcal{D}$ le domaine sous la courbe sur $[n ; 2n]$.

Par comparaison d'aires :

$$S_n \leqslant \text{aire}(\mathcal{D}) \leqslant T_n. \ \mathbf{(1)}$$

Or $T_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \ldots\ldots + \dfrac{1}{2n-1}$ donc

$$T_n - S_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \text{ d'où } T_n = S_n + \frac{1}{2n}.$$

D'autre part, $\text{aire}(\mathcal{D}) = \int_n^{2n}\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \left[\ln(x)\right]_n^{2n}$

soit $\text{aire}(\mathcal{D}) = \ln(2n) - \ln(n) = \ln(2)$.

L'encadrement **(1)** s'écrit alors :

$$S_n \leqslant \ln(2) \leqslant S_n + \frac{1}{2n}.$$

On en déduit l'encadrement :

$$\ln(2) - \frac{1}{2n} \leqslant S_n \leqslant \ln(2).$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\ln(2) - \dfrac{1}{2n}\right) = \ln(2)$ donc d'après le théorème d'encadrement, (S_n) converge vers $\ln(2)$.

EXERCICES Le jour du BAC (page 225)

125 *Corrigé sur le site élève.*

126 Pour tout t de $[a ; b]$, on pose :

$$\varphi(t) = g(t) - f(t).$$

φ est la différence de deux fonctions continues sur $[a ; b]$, donc φ est continue sur $[a ; b]$.

Par hypothèse : $\forall t \in [a ; b]$, $f(t) \leqslant g(t)$.

Donc $g(t) - f(t) \geqslant 0$ soit $\varphi(t) \geqslant 0$.

D'après la propriété de positivité, $\int_a^b \varphi(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$ soit :

$$\int_a^b \left(g(t) - f(t)\right)\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

En utilisant la propriété de linéarité énoncée dans le prérequis, avec $\alpha = 1$ et $\beta = -1$,

$\int_a^b g(t)\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$ donc

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

127 **a)** $\forall t \in \mathbb{R}$, $\cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos(2t)$.

Réponse : faux.

b) $\text{I} + \text{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos^2(t)\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin^2(t)\mathrm{d}t$;

$$\text{I} + \text{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\left(\cos^2(t) + \sin^2(t)\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi^2}{8}.$$

Réponse : faux.

c) $I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\left(\cos^2(t) - \sin^2(t)\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos(2t)dt$.

Pour tout t de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, on pose $f(t) = t\cos(2t)$.

Alors: $f'(t) = \cos(2t) - 2t\sin(2t)$

$f''(t) = -2\sin(2t) - 2\sin(2t) - 4t\cos(2t)$

$\quad = -4\sin(2t) - 4f(t)$.

On en déduit que $f(t) = -\sin(2t) - \frac{1}{4}f''(t)$.

D'où une primitive sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$:

$$F(t) = \frac{1}{2}\cos(2t) - \frac{1}{4}f'(t) = \frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{2}t\sin(2t).$$

Ainsi $I - J = \left[\frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{2}t\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}$.

Réponse : vrai.

d) $I + J = \frac{\pi^2}{8}$ et $I - J = -\frac{1}{2}$.

• Par addition : $2I = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}$ soit $I = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}$.

• Par soustraction : $2J = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2}$ soit $J = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}$.

Réponse : vrai.

128 **1. a)** $I_0 = \int_0^1 e^{1-x}dx = \left[-e^{1-x}\right]_0^1 = -1 + e$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$(n+1)I_n - I_{n+1} = (n+1)\int_0^1 x^n e^{1-x}dx - \int_0^1 x^{n+1}e^{1-x}dx$

$\quad = \int_0^1 \left((n+1)x^n e^{1-x} - x^{n+1}e^{1-x}\right)dx$

On pose : $u(x) = x^{n+1}$ et $v(x) = e^{1-x}$.

Ainsi $u'(x) = (n+1)x^n$ et $v'(x) = -e^{1-x}$.

On reconnaît dans la fonction à intégrer la forme $u'v + uv'$ dont une primitive sur $[0\,;1]$ est uv.

$(n+1)I_n - I_{n+1} = \left[x^{n+1}e^{1-x}\right]_0^1$

c) Ainsi $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$.

Pour $n = 0$: $I_1 = I_0 - 1 = e - 2$.

Pour $n = 1$: $I_2 = 2I_1 - 1 = 2e - 5$.

2. a) Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose : $\varphi(x) = g(x) - f(x)$

$\quad = x(x-1)e^{1-x}$.

Le signe de $\varphi(x)$ est celui du polynôme du second degré $x(x-1)$ dont les racines sont 0 et 1.

• Sur $]-\infty; 0[\cup]1\,;+\infty[$, $\varphi(x) > 0$ donc $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\mathscr{C}_f$.

• Sur $[0\,;1]$, $\varphi(x) \leqslant 0$ donc $\mathscr{C}_g$ est au-dessous de $\mathscr{C}_f$.

b) $\mathscr{A} = \text{aire}(\mathscr{D}_f) - \text{aire}(\mathscr{D}_g)$ où $\mathscr{D}_f$ est le domaine sous $\mathscr{C}_f$ sur $[0\,;1]$ et $\mathscr{D}_g$ celui sous $\mathscr{C}_g$.

$\mathscr{A} = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 g(x)dx = I_1 - I_2 = 3 - e$.

3. a) $\mathscr{S}(a) = \mathscr{A} \Leftrightarrow 3 - e^{1-a}(a^2 + a + 1) = 3 - e$

$\Leftrightarrow e^{1-a}(a^2 + a + 1) = e$

$\Leftrightarrow a^2 + a + 1 = \frac{e}{e^{1-a}}$

$\Leftrightarrow a^2 + a + 1 = e^a$.

b) On considère la fonction h définie sur $[1\,;+\infty[$ par $h(x) = e^x - (x^2 + x + 1)$ et on étudie l'existence d'une solution à l'équation $h(x) = 0$ dans $]1\,;+\infty[$.

$\forall x \in [1\,;+\infty[$, $h'(x) = e^x - 2x - 1$, $h''(x) = e^x - 2$.

Or $x \geqslant 1$, donc $e^x - 2 \geqslant e - 2 > 0$. Ainsi $h''(x) > 0$ et h' est strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.

x	1	γ	$+\infty$
h'	$e - 3 < 0$	0	$+\infty$

Remarque. $h'(x) = e^x - 2x - 1 = e^x\left(1 - 2\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - 2\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = 1$,

d'où on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} h'(x) = +\infty$.

Ainsi h' est continue et strictement croissante sur $]1\,;+\infty[$. L'intervalle image de $]1\,;+\infty[$ est $]e-3\,;+\infty[$ qui contient 0, donc l'équation $h'(x) = 0$ admet une seule solution γ dans $]1\,;+\infty[$. γ est tel que :

$$1{,}25 < \gamma < 1{,}26.$$

On en déduit le tableau de variation de h :

x	1	γ	α	$+\infty$
$h'(x)$	−	0	+	
$h(x)$	$e - 3 < 0$	$h(\gamma)$	0	$+\infty$

Remarque. γ est tel que $h'(\gamma) = 0$ donc $e^\gamma = 2\gamma + 1$.

$h(\gamma) = e^\gamma - (\gamma^2 + \gamma + 1) = 2\gamma + 1 - (\gamma^2 + \gamma + 1)$

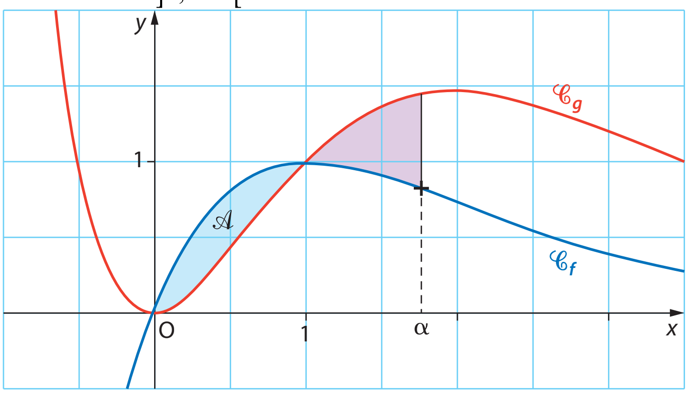
$\quad = \gamma - \gamma^2 = \gamma(1 - \gamma)$.

Alors l'équation $h(x) = 0$ est telle que :

• sur $[1\,;\gamma]$ il n'existe pas de solution ;

• sur $]\gamma\,;+\infty[$, en appliquant le même théorème que précédemment, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha\,(1{,}793 < \alpha < 1{,}794)$.

En conclusion l'équation $\mathscr{S}(a) = \mathscr{A}$ admet une unique solution dans $]1\,;+\infty[$ à savoir $a = \alpha$.



129 **1.** • Sens de variation

$$\forall x \in]0\,;+\infty[,\ g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = \frac{x+2}{x^2}.$$

Ainsi $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

• Calculs des limites

$\lim\limits_{x\to0+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to0+} \frac{2}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0+} g(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

• Antécédent de 0

g est continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$. L'intervalle image de $]0\,;+\infty[$ est $]-\infty;+\infty[$ qui contient 0, donc l'équation $h(x)=0$ a une solution unique x_0 dans $]0\,;+\infty[$.

$g(2{,}3)<0$ et $g(2{,}4)>0$ donc $2{,}3<x_0<2{,}4$.

2. a) x_0 vérifie $\ln(x_0)-\dfrac{2}{x_0}=0$ donc $\ln(x_0)=\dfrac{2}{x_0}$.

D'où $f(x_0)=\dfrac{5\ln(x_0)}{x_0}=\dfrac{10}{x_0^2}$.

b) $\displaystyle\int_1^a f(t)\mathrm{d}t=\int_1^a\frac{5\ln(t)}{t}\mathrm{d}t=\left[\frac{5}{2}\ln^2(t)\right]_1^5=\frac{5}{2}\ln^2(a)$.

Remarque. Pour la recherche d'une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$, utiliser la forme $f=\alpha u'u$.

3. $\mathrm{P}_0(x_0;0)$, $\mathrm{M}_0\left(x_0\,;\dfrac{10}{x_0^2}\right)$ et $\mathrm{H}_0\left(0\,;\dfrac{10}{x_0^2}\right)$.

aire$(\mathcal{D}_2)=1\cdot y_{\mathrm{H}_0}=\dfrac{10}{x_0^2}$ u.a.

aire$(\mathcal{D}_1)=\displaystyle\int_1^{x_0}f(t)\mathrm{d}t=\frac{5}{2}\ln^2(x_0)$ d'après **2.**

Or $\ln(x_0)=\dfrac{2}{x_0}$ donc aire$(\mathcal{D}_1)=\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{4}{x_0^2}=\dfrac{10}{x_0^2}$ u.a.

Ainsi aire$(\mathcal{D}_1)=$ aire$(\mathcal{D}_2)$.

Encadrement de l'aire :

$$2{,}3<x_0<2{,}4\Rightarrow 2{,}3^2<x_0^2<2{,}4^2$$
$$\Rightarrow\frac{10}{2{,}4^2}<\frac{10}{x_0^2}<\frac{10}{2{,}3^2}$$
$$\Rightarrow 1{,}7<\text{aire}(\mathcal{D}_1)<1{,}9.$$

130 **1.** $\mathrm{I}_1=\displaystyle\int_0^1 f_1(x)\mathrm{d}x$. $\forall x\in[0;1]$, $f_1(x)=x\mathrm{e}^{-x}$.

$f_1'(x)=\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}-f_1(x)$ donc

$$f_1(x)=\mathrm{e}^{-x}-f_1'(x).$$

Alors : $\mathrm{I}_1=\displaystyle\int_0^1\left(\mathrm{e}^{-x}-f_1'(x)\right)\mathrm{d}x=\left[-\mathrm{e}^{-x}-f_1(x)\right]_0^1$

$=\left[-(1+x)\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1=1-2\mathrm{e}^{-1}$.

2. a) Conjecture : la suite (I_n) qui représente la suite des aires sous les courbes $\mathcal{C}_n$ sur [0 ; 1] est décroissante.

b) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in[0\,;1]$, $x^{n+1}\leqslant x^n$ donc $x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\leqslant x^n\mathrm{e}^{-x}$ soit $f_{n+1}(x)\leqslant f_n(x)$.

Par intégration sur l'intervalle [0 ; 1] :

$$\int_0^1 f_{n+1}(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x \text{ soit } \mathrm{I}_{n+1}\leqslant\mathrm{I}_n.$$

Ainsi la suite (I_n) est décroissante.

c) Pour tout entier $n\geq 1$, f_n est positive sur [0 ; 1], donc d'après la propriété de positivité, $\mathrm{I}_n\geq 0$.

La suite (I_n) est décroissante, minorée par 0 donc elle converge.

d) $\forall x\in[0\,;1]$, $\mathrm{e}^{-x}\leqslant 1$. Pour tout entier $n\geqslant 1$, $x^n\mathrm{e}^{-x}\leqslant x^n$ donc par intégration sur [0 ; 1], $\displaystyle\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x^n\mathrm{d}x$ soit

$$\mathrm{I}_n\leqslant\frac{1}{n+1}.$$

Ainsi $0\leqslant\mathrm{I}_n\leqslant\dfrac{1}{n+1}$ avec $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$, donc, d'après le théorème d'encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{I}_n=0$.

131 **1.** $\forall x\in[0\,;1]$, $f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x(1+x)-\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}=\dfrac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}$.

Ainsi $f'(x)\geqslant 0$ donc f est croissante sur [0 ; 1].

x	0	1
f	1 ↗	$\dfrac{\mathrm{e}}{2}$

2. a) Sur l'intervalle $\left[\dfrac{k}{5};\dfrac{k+1}{5}\right]$ contenu dans [0 ; 1], on a :

$$f\left(\frac{k}{5}\right)\leqslant f(x)\leqslant f\left(\frac{k+1}{5}\right).$$

D'après l'inégalité de la moyenne,

$$\left(\frac{k+1}{5}-\frac{k}{5}\right)f\left(\frac{k}{5}\right)\leqslant\int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\left(\frac{k+1}{5}-\frac{k}{5}\right)f\left(\frac{k}{5}\right)$$

$$\frac{1}{5}f\left(\frac{k}{5}\right)\leq\int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}}\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\mathrm{d}x\leq\frac{1}{5}f\left(\frac{k+1}{5}\right)\quad\textbf{[1]}.$$

b) Par addition membre à membre des inégalités **[1]** pour k de 0 à 4, il vient :

$$\frac{1}{5}\left[f\left(\frac{0}{5}\right)+f\left(\frac{1}{5}\right)+\ldots\ldots+f\left(\frac{4}{5}\right)\right]\leqslant$$
$$\int_0^{\frac{1}{5}}f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{2}{5}}f(x)\mathrm{d}x+\ldots\ldots+\int_{\frac{4}{5}}^{1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\frac{1}{5}\left[f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+\ldots\ldots+f\left(\frac{5}{5}\right)\right].$$

En simplifiant la somme des intégrales grâce à la relation de Chasles, on obtient :

$$\frac{1}{5}\mathrm{S}_4\leqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{5}\left(\mathrm{S}_5-f\left(\frac{0}{5}\right)\right)\text{ soit}$$
$$\frac{1}{5}\mathrm{S}_4\leqslant\int_0^1\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{5}\left(\mathrm{S}_5-1\right).\quad\textbf{[2]}$$

c) $\mathrm{S}_4\approx 5{,}4586$ à 10^{-4} près par défaut.

$\mathrm{S}_5\approx 6{,}8179$ à 10^{-4} près par excès.

D'où d'après **[2]** : $1{,}091\leqslant\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\mathrm{d}x\leqslant 1{,}164$.

3. a) $\forall x\in[0\,;1]$, $1-x+\dfrac{x^2}{1+x}=\dfrac{1-x^2+x^2}{1+x}=\dfrac{x^2}{1+x}$.

b) $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(1-x+\frac{x^2}{1+x}\right)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

$\displaystyle=\int_0^1(1-x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{x^2\mathrm{e}^x}{1+x}\mathrm{d}x$

$\displaystyle=\int_0^1(1-x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\mathrm{J}.$ **[3]**

c) On pose pour tout x de [0 ; 1], $g(x)=(1-x)\mathrm{e}^x$.

$g'(x)=-\mathrm{e}^x+(1-x)\mathrm{e}^x=-\mathrm{e}^x+g(x)$ donc

$g(x)=\mathrm{e}^x+g'(x)$.

Alors : $\mathrm{K}=\displaystyle\int_0^1(1-x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\mathrm{e}^x+g'(x)\right)\mathrm{d}x$

$=\left[\mathrm{e}^x+g(x)\right]_0^1=\left[(2-x)\mathrm{e}^x\right]_0^1$

$=\mathrm{e}-2$.

d) D'après **[3]**, $\mathrm{J}=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\mathrm{d}x-\int_0^1(1-x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

$1{,}091\leqslant\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\mathrm{d}x\leqslant 1{,}164$ et $\displaystyle\int_0^1(1-x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}-2$

donc $1{,}091-\mathrm{e}+2\leqslant\mathrm{J}\leqslant 1{,}164-\mathrm{e}+2$. D'où l'encadrement $0{,}37\leqslant\mathrm{J}\leqslant 0{,}45$ dont l'amplitude 0,08 est inférieure à 0,1.

132 **1. a)** $\forall t\in\mathbb{R}$,

$f(-t)=1-\dfrac{4\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^{-2t}+1}=1-\dfrac{4\mathrm{e}^{-t}\cdot\mathrm{e}^{2t}}{(\mathrm{e}^{-2t}+1)\cdot\mathrm{e}^{2t}}$

$f(-t)=1-\dfrac{4\mathrm{e}^{t}}{\mathrm{e}^{2t}+1}=f(t)$.

f est une fonction paire donc $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

b) L'abscisse a est la solution positive de l'équation $f(t) = 0$.

$$f(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{4e^t}{e^{2t}+1} = 1 \Leftrightarrow e^{2t} - 4e^t + 1 = 0.$$

Ainsi a vérifie $e^{2a} - 4e^a + 1 = 0$ et le nombre $c = e^a$ est tel que $c^2 - 4c + 1 = 0$, donc c est une solution de l'équation $X^2 - 4X + 1 = 0$.

Cette équation admet dans $\mathbb{R}$ deux solutions : $2 - \sqrt{3}$ et $2 + \sqrt{3}$.

On en déduit que $e^a = 2 - \sqrt{3}$ ou $e^a = 2 + \sqrt{3}$,

donc $a = \ln\left(2 - \sqrt{3}\right)$ ou $a = \ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$.

Puisque $a > 0$, on conclut que $a = \ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$.

c) Tableau du signe de $f(t)$:

t	$-\infty$		$-a$		a		$+\infty$
f		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. a) Φ désigne une primitive de la fonction continue f sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_0^x f(t)dt = \Phi(x) - \Phi(0).$$

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F' = \Phi' = f$.

(F est aussi une primitive de f sur $\mathbb{R}$, à savoir celle qui s'annule en 0.)

Tableau de variation de F :

x	$-\infty$		$-a$		a		$+\infty$
$F' = f$		$+$	0	$-$	0	$+$	
F		$\nearrow$	$F(-a)$	$\searrow$	$F(a)$	$\nearrow$	

b) Sur $[0\ ;\ a]$, f est continue et négative donc $F(a) = \int_0^a f(t)dt = -\text{aire}(\mathscr{D})$ où $\mathscr{D}$ est le domaine limité par $\mathscr{C}$ et les deux axes.

Or $\mathscr{D}$ est contenu dans le rectangle de dimensions a et 1 donc $\text{aire}(\mathscr{D}) \leqslant a$. Ainsi $-a \leqslant F(a) \leqslant 0$.

c) $\forall t \in [0\ ;+\infty[,\ f(t) = 1 - \dfrac{4e^t \cdot e^{-2t}}{(e^{2t}+1)\cdot e^{-2t}} = 1 - \dfrac{4e^{-t}}{1+e^{-2t}}$.

Or $\dfrac{4e^{-t}}{1+e^{-2t}} \leqslant 4e^{-t}$ donc $1 - \dfrac{4e^{-t}}{1+e^{-2t}} \geqslant 1 - 4e^{-t}$,

soit $f(t) \geqslant 1 - 4e^{-t}$.

Pour tout nombre positif x, on intègre cette inégalité sur l'intervalle $[0\ ;\ x]$:

$$\int_0^x f(t)dt \geqslant \int_0^x \left(1 - 4e^{-t}\right)dt.$$

Ainsi $F(x) \geqslant \left[t + 4e^{-t}\right]_0^x$, soit $F(x) \geqslant x + 4e^{-x} - 4$.

Or $x + 4e^{-x} - 4 \geqslant x - 4$, donc $F(x) \geqslant x - 4$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-4) = +\infty$, par comparaison,

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty.$$

d) On peut conjecturer que la fonction F est impaire et qu'en raison de la symétrie de $\mathscr{C}_F$ par rapport à l'origine, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$.

Pour tout nombre réel x, on pose $\Psi(x) = F(x) + F(-x)$.

Ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Psi'(x) = F'(x) + [F(-x)]' = f(x) - f(-x).$$

Or f est paire, donc $\Psi'(x) = 0$.

La fonction Ψ est constante sur $\mathbb{R}$ de valeur $\Psi(0) = F(0) + F(0) = 0$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) + F(-x) = 0 \text{ soit } F(-x) = -F(x).$$

La fonction F est impaire.

Alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-F(-x)\right)$.

On pose $X = -x$. Ainsi $-F(-x) = -F(X)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\left(-F(X)\right) = -\infty$, donc

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-F(-x)\right) = -\infty \text{ soit } \lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty.$$

EXERCICES Pour aller plus loin (page 228)

133 **1. a)** uv est dérivable sur I comme produit de deux fonctions dérivables sur I : $(uv)' = u'v + uv'$.

Les fonctions u, u', v, v' sont continues sur I donc $(uv)'$ est continue sur I.

b) $\int_a^b (uv)'(t)dt = \int_a^b \left(u'v + uv'\right)(t)dt$

En utilisant la linéarité de l'intégration :

$$\int_a^b (uv)'(t)dt = \int_a^b (u'v)(t)dt + \int_a^b (uv')(t)dt.$$

c) $\left[u(t)v(t)\right]_a^b = \int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt$,

d'où $\int_a^b u(t)v'(t)dt = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$.

2. a) $J = \int_0^1 (1-t)e^{-t}dt$

On pose : $u(t) = 1 - t$, $v'(t) = e^{-t}$

$u'(t) = -1$, $v(t) = -e^{-t}$.

Par intégration par parties :

$$J = \left[-(1-t)e^{-t}\right]_0^1 - \int_0^1 (-1)(-e^{-t})dt$$

$$= 1 - \int_0^1 e^{-t}dt = 1 - \left[-e^{-t}\right]_0^1$$

$$= e^{-1}.$$

b) $K = \int_1^e \ln(t)dt$

On pose : $u(t) = \ln(t)$, $v'(t) = 1$

$u'(t) = \dfrac{1}{t}$, $v(t) = t$.

Par intégration par parties :

$$K = \left[t\ln(t)\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{t}\cdot t\,dt = e - \int_1^e dt = e - [t]_1^e$$

$$= 1.$$

134 **1. a)** $\forall x \in [0\,;1]$,

$$f'(x) = \frac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

b) $\mathrm{I} = \int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0)$, donc
$$\mathrm{I} = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right).$$

2. a) $\mathrm{I} + \mathrm{J} = \int_0^1 \frac{1 + x^2}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \mathrm{K}.$

b) $\mathrm{K} = \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$

On pose : $u(x) = \sqrt{x^2+1}$, $v'(x) = 1$,

$u'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $v(x) = x$.

Par intégration par parties :

$$\mathrm{K} = \left[x\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$$
$$= \sqrt{2} - \mathrm{J}.$$

c) Les intégrales J et K sont telles que :

$$\begin{cases} \mathrm{I} + \mathrm{J} = \mathrm{K} \\ \mathrm{K} = \sqrt{2} - \mathrm{J} \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} \mathrm{J} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2} - \mathrm{I}\right) \\ \mathrm{K} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \mathrm{I}\right) \end{cases}.$$

$$\mathrm{J} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right) \text{ et } \mathrm{K} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right).$$

135 **1.** $\mathrm{I} = \int_0^\pi \mathrm{e}^x \cos(2x)\mathrm{d}x.$

On pose : $u(x) = \cos(2x)$, $v'(x) = \mathrm{e}^x$

$u'(x) = -2\sin(2x)$, $v(x) = \mathrm{e}^x$.

Par intégration par parties :

$$\mathrm{I} = \left[\mathrm{e}^x \cos(2x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi -2\mathrm{e}^x \sin(2x)\mathrm{d}x$$
$$= \mathrm{e}^\pi - 1 + 2\int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin(2x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^\pi - 1 + 2\mathrm{L},$$

avec $\mathrm{L} = \int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin(2x)\mathrm{d}x$.

On pose : $p(x) = \sin(2x)$, $q'(x) = \mathrm{e}^x$

$p'(x) = 2\cos(2x)$, $q(x) = \mathrm{e}^x$.

Par intégration par parties :

$$\mathrm{L} = \left[\mathrm{e}^x \sin(2x)\right]_0^\pi - 2\int_0^\pi \mathrm{e}^x \cos(2x)\mathrm{d}x = -2\mathrm{I}.$$

Alors $\mathrm{I} = \mathrm{e}^\pi - 1 + 2\mathrm{L}$ et $\mathrm{L} = -2\mathrm{I}$ donc $\mathrm{I} = \dfrac{\mathrm{e}^\pi - 1}{5}$.

2. $\mathrm{J} + \mathrm{K} = \int_0^\pi \mathrm{e}^x(\cos^2(x) + \sin^2(x))\mathrm{d}x = \int_0^\pi \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

donc $\mathrm{J} + \mathrm{K} = \mathrm{e}^\pi - 1$.

$$\mathrm{J} - \mathrm{K} = \int_0^\pi \mathrm{e}^x\left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right)\mathrm{d}x = \int_0^\pi \mathrm{e}^x \cos(2x)\mathrm{d}x$$
$$= \mathrm{I} = \frac{\mathrm{e}^\pi - 1}{5}.$$

Finalement, les intégrales J et K vérifient :

$$\begin{cases} \mathrm{J} + \mathrm{K} = \mathrm{e}^\pi - 1 \\ \mathrm{J} - \mathrm{K} = \dfrac{\mathrm{e}^\pi - 1}{5} \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} \mathrm{J} = \dfrac{3(\mathrm{e}^\pi - 1)}{5} \\ \mathrm{K} = \dfrac{2(\mathrm{e}^\pi - 1)}{5} \end{cases}.$$

136 **1.** $\mathrm{F}(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{2t}\cos(t)\mathrm{d}t$.

On pose : $u(t) = \mathrm{e}^{2t}$, $v'(t) = \cos(t)$

$u'(t) = 2\mathrm{e}^{2t}$, $v(t) = \sin(t)$.

Par intégration par parties :

$$\mathrm{F}(x) = \left[\mathrm{e}^{2t}\sin(t)\right]_0^x - 2\int_0^x \mathrm{e}^{2t}\sin(t)\mathrm{d}t$$

$\mathrm{F}(x) = \mathrm{e}^{2x}\sin(x) - 2\mathrm{G}(x)$. **[1]**

$\mathrm{G}(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{2t}\sin(t)\mathrm{d}t.$

On pose : $u(t) = \mathrm{e}^{2t}$, $w'(t) = \sin(t)$

$u'(t) = 2\mathrm{e}^{2t}$, $w(t) = -\cos(t)$.

Par intégration par parties :

$$\mathrm{G}(x) = \left[-\mathrm{e}^{2t}\cos(t)\right]_0^x + 2\int_0^x \mathrm{e}^{2t}\cos(t)\mathrm{d}t$$
$$= -\mathrm{e}^{2x}\cos(x) + 1 + 2\mathrm{F}(x).$$ **[2]**

2. F et G sont telles que, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \mathrm{F}(x) + 2\mathrm{G}(x) = \mathrm{e}^{2x}\sin(x) & [\mathrm{L}_1] \\ 2\mathrm{F}(x) - \mathrm{G}(x) = \mathrm{e}^{2x}\cos(x) - 1 & [\mathrm{L}_2] \end{cases}$$

Par combinaison des lignes, on déduit :

- $\mathrm{L}_1 + 2\mathrm{L}_2$
$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{5}\left(\mathrm{e}^{2x}\sin(x) + 2\mathrm{e}^{2x}\cos(x) - 2\right).$$
- $2\mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2$
$$\mathrm{G}(x) = \frac{1}{5}\left(2\mathrm{e}^{2x}\sin(x) - \mathrm{e}^{2x}\cos(x) + 1\right).$$

137 La fonction f représentée est continue sur $[\mathrm{e}^{-1} - 1\,;\mathrm{e} - 1]$, négative sur $[\mathrm{e}^{-1} - 1\,;0]$ et positive sur $[0\,;\mathrm{e} - 1]$ donc :

$$\text{aire}(\mathcal{D}) = -\int_{\mathrm{e}^{-1}-1}^0 \ln(x+1)\mathrm{d}x + \int_0^{\mathrm{e}-1} \ln(x+1)\mathrm{d}x.$$

On pose : $u(x) = \ln(x+1)$, $v'(x) = 1$

$u'(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $v(x) = x + 1$.

Remarque. Une primitive est définie à une constante près. Ici, il est judicieux de prendre pour primitive de $x \mapsto 1$ la fonction $x \mapsto x + 1$.

$$\int_{\mathrm{e}^{-1}-1}^0 f(x)\mathrm{d}x = \left[(x+1)\ln(x+1)\right]_{\mathrm{e}^{-1}-1}^0 - \int_{\mathrm{e}^{-1}-1}^0 \frac{x+1}{x+1}\mathrm{d}x$$
$$= \mathrm{e}^{-1} - \int_{\mathrm{e}^{-1}-1}^0 \mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^{-1} - 1.$$

$$\int_0^{\mathrm{e}-1} f(x)\mathrm{d}x = \left[(x+1)\ln(x+1)\right]_0^{\mathrm{e}-1} - \int_0^{\mathrm{e}-1} \mathrm{d}x = 1.$$

Ainsi $\text{aire}(\mathcal{D}) = -(2\mathrm{e}^{-1} - 1) + 1 = 2 - 2\mathrm{e}^{-1}$ u.a.

138 **1.** $\mathrm{e}^{1-x} = t \Leftrightarrow 1 - x = \ln(t) \Leftrightarrow x = 1 - \ln(t)$.

2. a) La section du solide par un plan perpendiculaire à l'axe $(\mathrm{O}y)$ au point $\mathrm{H}(0\,;t)$ avec $1 \leqslant t \leqslant \mathrm{e}$, est un disque centré en H de rayon $r(t) = 1 - \ln(t)$.

Ainsi l'aire de cette section est :

$$\mathrm{S}(t) = \pi r^2(t) = \pi(1 - \ln(t))^2.$$

D'où : $\mathcal{V} = \int_1^\mathrm{e} \mathrm{S}(t)\mathrm{d}t = \pi\int_1^\mathrm{e}(1 - \ln(t))^2\,\mathrm{d}t$.

b) On calcule $\mathrm{I} = \int_1^\mathrm{e}(1 - \ln(t))^2\,\mathrm{d}t$.

On pose : $u(t) = (1 - \ln(t))^2$, $v'(t) = 1$

$u'(t) = -\dfrac{2}{t}(1 - \ln(t))$, $v(t) = t$.

Par intégration par parties :

$$I = \left[t(1-\ln(t))^2\right]_1^{e} + 2\int_1^{e}(1-\ln(t))\mathrm{d}t$$

$$= -1 + 2J \text{ avec } J = \int_1^{e}(1-\ln(t))\mathrm{d}t\,.$$

On pose : $w(t) = 1 - \ln(t)$, $v'(t) = 1$

$w'(t) = -\dfrac{1}{t}$, $v(t) = t$.

Donc $J = \left[t(1-\ln(t))\right]_1^{e} + \int_1^{e} 1\mathrm{d}t = e - 2$.

D'où : $I = -1 + 2J = -1 + 2(e-2) = 2e - 5$.

Finalement, $\mathcal{V} = \pi \cdot I$ donc $\mathcal{V} = (2e-5)\pi$ u.v.

139 **1.** $J = \int_0^1 xe^{-x}\mathrm{d}x$.

On pose : $u(x) = x$, $v'(x) = e^{-x}$

$u'(x) = 1$, $v(x) = -e^{-x}$.

Par intégration par parties :

$$I = \left[-xe^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x = -e^{-1} + \left[-e^{-x}\right]_0^1 = 1 - 2e^{-1}.$$

2. a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n}e^{-\frac{k}{n}}$

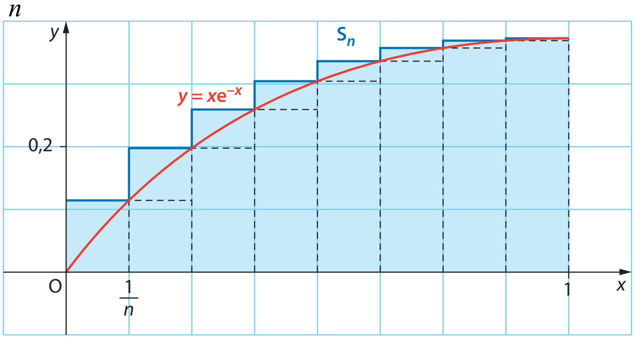
On reconnaît : $S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

D'où l'idée d'utiliser la méthode des rectangles.

b) $\forall x \in [0\,;1]$, $f'(x) = (1-x)e^{-x}$, donc $f'(x) \geqslant 0$.

Ainsi f est strictement croissante sur [0 ; 1].

S_n est la somme des aires des rectangles supérieurs associés à la subdivision de [0 ; 1] en n sous-intervalles de longueur $\dfrac{1}{n}$.



On note I_n la somme des aires des rectangles inférieurs associés à la même subdivision.

Alors $I_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k-1}{n}\right) = S_n - \dfrac{1}{n}f(1) + \dfrac{1}{n}f(0)$,

soit $I_n = S_n - \dfrac{e^{-1}}{n}$.

Par comparaison d'aires, $I_n \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant S_n$

soit $S_n - \dfrac{e^{-1}}{n} \leqslant J \leqslant S_n$.

D'où l'on déduit l'encadrement de S_n :

$$J \leqslant S_n \leqslant J + \frac{e^{-1}}{n}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(J + \dfrac{e^{-1}}{n}\right) = J$, donc d'après le théorème d'encadrement, (S_n) converge vers $J = 1 - 2e^{-1}$.

140 **1.** $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0\,;1]$,

$$x + n \geqslant n \Rightarrow \frac{1}{x+n} \leqslant \frac{1}{n}.$$

On compare alors $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{x^2}$ et $\dfrac{1}{x+n}$.

$$\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} - \frac{1}{x+n} = \frac{n(x+n) - x(x+n) - n^2}{n^2(x+n)}$$

$$= \frac{-x^2}{n^2(x+n)}, \text{ qui est négatif.}$$

Donc $\dfrac{1}{n} - \dfrac{x}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{x+n}$.

Finalement, $\dfrac{1}{n} - \dfrac{x}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{x+n} \leqslant \dfrac{1}{n}$ **[1]**.

2. a) $\int_0^1 \dfrac{1}{x+n}\mathrm{d}x = \left[\ln(x+n)\right]_0^1 = \ln(n+1) - \ln(n)$

donc $\int_0^1 \dfrac{1}{x+n}\mathrm{d}x = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

b) Par intégration des inégalités **[1]** sur [0 ; 1] :

$$\int_0^1\left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2}\right)\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{1}{x+n}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{1}{n}\mathrm{d}x.$$

Or $\int_0^1\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{x}{n^2}\right)\mathrm{d}x = \left[\dfrac{x}{n} - \dfrac{x^2}{2n^2}\right]_0^1 = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2}$ et

$\int_0^1 \dfrac{1}{n}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n}$, donc $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} \leqslant \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n}$ **[2]**.

3. Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

Or d'après **[2]**, $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \geqslant \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2}$ donc

$$\frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}$$

$$\frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqslant \frac{2n^2 - 2n(n+1) + n + 1}{2n^2(n+1)} \leqslant \frac{1-n}{2n^2(n+1)} \leqslant 0.$$

Ainsi $U_{n+1} - U_n \leqslant 0$, donc la suite U est décroissante.

4. Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right).$$

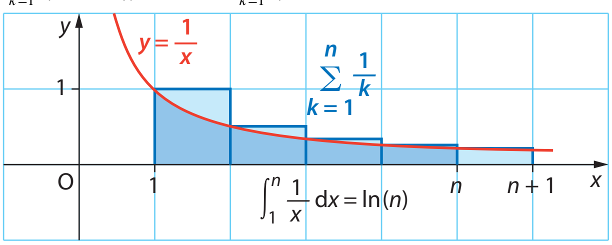
D'après l'encadrement **[2]** appliqué au rang $n+1$,

$\ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ d'où $\dfrac{1}{n+1} - \ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) \geqslant 0$.

Ainsi $V_{n+1} - V_n \geqslant 0$ donc la suite V est croissante.

5. a) $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$ est la somme des aires des rectangles supérieurs sur l'intervalle [1 ; $n+1$] subdivisé avec un pas de 1. Par comparaison d'aire, il vient :

$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} \geqslant \int_1^n \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$ d'où $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} - \ln(n) \geqslant 0$ soit $U_n \geqslant 0$.



Ainsi U est une suite décroissante minorée par 0, donc elle converge vers un nombre noté γ.

b) $U_n - V_n = -\ln(n) + \ln(n+1) = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

$$= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to1}\ln(x) = 0$, donc

$\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 0$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(U_n - V_n\right) = 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ V_n = U_n - \left(U_n - V_n\right)$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \gamma$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(U_n - V_n\right) = 0$ donc par soustraction, $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \gamma$: la suite V converge aussi vers γ.

c) V est croissante de limite γ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ V_n \leqslant \gamma.$$

U est décroissante de limite γ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \gamma \leqslant U_n.$$

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 1$, $V_n \leqslant \gamma \leqslant U_n$.

L'algorithme suivant (AlgoBox) donne un encadrement de γ d'amplitude n'excédant pas 0,01.

Ainsi $\gamma \approx 0{,}58$.

```
VARIABLES
  d EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  S EST_DU_TYPE NOMBRE
  U EST_DU_TYPE NOMBRE
  V EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  d PREND_LA_VALEUR 1
  n PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (d>=0.01) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    S PREND_LA_VALEUR 0
    POUR k ALLANT_DE 1 A n
      DEBUT_POUR
      S PREND_LA_VALEUR S+1/k
      FIN_POUR
    U PREND_LA_VALEUR S-log(n)
    V PREND_LA_VALEUR S-log(n+1)
    d PREND_LA_VALEUR U-V
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER V
  AFFICHER "< Constante d'Euler <"
  AFFICHER U
FIN_ALGORITHME
```

141 **1.** $f : x \mapsto \ln(1+e^{-2x})$ est continue et positive sur $[0\,;+\infty[$.

F est la primitive sur $[0\,;+\infty[$ de f, nulle en 0. $F' = f$ et F est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

2. a) $\forall t \in [1\,;1+a]$, $1 \leqslant t \leqslant 1+a \Rightarrow \dfrac{1}{1+a} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant 1$.

b) D'après l'inégalité de la moyenne sur $[1\,;1+a]$:

$$(1+a-1)\cdot\frac{1}{1+a} \leqslant \int_1^{1+a}\frac{1}{t}\,dt \leqslant (1+a-1)\cdot 1 \text{ soit}$$

$$\frac{a}{1+a} \leqslant \ln(1+a) \leqslant a.$$

3. a) On pose $a = e^{-2t}$.

Alors : $\dfrac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}} \leqslant \ln(1+e^{-2t}) \leqslant e^{-2t}$.

Par intégration sur l'intervalle $[0\,;x]$:

$\displaystyle\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}dt \leqslant \int_0^x \ln(1+e^{-2t})dt \leqslant \int_0^x e^{-2t}dt$ soit :

$$\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}dt \leqslant F(x) \leqslant \int_0^x e^{-2t}dt.$$

b) Or $\displaystyle\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}dt = \left[-\frac{1}{2}\ln(1+e^{-2t})\right]_0^x$

$$= \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(1+e^{-2x})$$

et $\displaystyle\int_0^x e^{-2t}dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$, donc

$$\frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(1+e^{-2x}) \leqslant F(x) \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}.$$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$ et $\lim\limits_{u\to0}\ln(1+u) = 0$ donc

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-2x}) = 0.$$

On en déduit alors par passage à la limite:

$$\frac{1}{2}\ln(2) \leqslant \ell \leqslant \frac{1}{2}.$$

5. a) La fonction $f : x \mapsto \ln(1+e^{-2x})$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$. Ainsi $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

Pour tout nombre t de $[n\,;n+1]$ ($n \in \mathbb{N}$),

$$0 \leqslant f(n+1) \leqslant f(t) \leqslant f(n).$$

Ainsi, $0 \leqslant f(t) \leqslant \ln(1+e^{-2n})$.

D'après l'inégalité de la moyenne sur $[n\,;n+1]$:

$\displaystyle 0 \leqslant \int_n^{n+1} f(t)dt \leqslant (n+1-n)\ln(1+e^{-2n})$ soit

$$0 \leqslant u_n \leqslant \ln(1+e^{-2n}).$$

b) Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(1+e^{-2n}) = 0$ donc, d'après le théorème d'encadrement, la suite (u_n) converge vers 0.

6. a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n$

$$S_n = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^2 f(t)dt + \ldots\ldots + \int_n^{n+1} f(t)dt.$$

Donc d'après la relation de Chasles,

$$S_n = \int_0^{n+1} f(t)dt = F(n+1).$$

b) Or la fonction F admet pour limite ℓ en $+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n+1) = \ell$.

Ainsi la suite (S_n) converge vers ℓ.

142 **1. a)** La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est continue et positive sur $[0\,;1]$. La fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ est alors dérivable sur $[0\,;1]$ et $F' = f$.

$$\forall x \in [0\,;1],\ F'(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

b) La fonction sin est dérivable sur $I = \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et prend ses valeurs dans $[0\,;1]$, intervalle sur lequel F est dérivable, donc la fonction composée $G : x \mapsto F(\sin(x))$ est dérivable sur I.

$$\forall x \in I,\ G'(x) = \sin'(x)\cdot F'(\sin(x)).$$

$$G'(x) = \cos(x)\cdot\sqrt{1-\sin^2(x)} = \cos(x)\sqrt{\cos^2(x)}.$$

Or sur I, $\cos(x) \geqslant 0$, donc $G'(x) = \cos^2(x)$.

c) G est la primitive de G' sur I, telle que

$$G(0) = F(\sin(0)) = F(0) = 0.$$

Ainsi, pour tout x de J, $G(x) = \displaystyle\int_0^x \cos^2(t)dt$.

Or pour tout nombre t, $\cos^2(t) = \dfrac{1 + \cos(2t)}{2}$, donc :

$$G(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^x$$
$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x).$$

d) $K = F(0{,}5) = F\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right) = G\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ avec $\dfrac{\pi}{6} \in I$.

Donc $K = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{1}{4}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ soit $K = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

2. K est l'aire en u.a. du domaine $\mathcal{D}$ colorié.

$\mathcal{D}$ est constitué d'un secteur circulaire d'angle au centre $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6}$ et d'un triangle rectangle de base $\dfrac{1}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ et de hauteur $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

$$\text{aire(secteur)} = \frac{1}{12}\text{aire(disque)} = \frac{\pi}{12}\ ;$$
$$\text{aire(triangle)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

On retrouve $K = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

143 **1. a)** $\forall t \in [0\ ;2]$, $\varphi'(t) = \dfrac{1}{(t+2)^2}$.

t	0		2
φ'		+	0
φ	$\frac{3}{2}$	↗	$\frac{7}{4}$

b) $\forall t \in [0\ ;2]$, $\dfrac{3}{2} \leqslant \varphi(t) \leqslant \dfrac{7}{4} \Rightarrow \dfrac{3}{2}e^{\frac{t}{n}} \leqslant \varphi(t)e^{\frac{t}{n}} \leqslant \dfrac{7}{4}e^{\frac{t}{n}}$.

Par intégration sur [0 ; 2] :

$$\frac{3}{2}\int_0^2 e^{\frac{t}{n}}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^2 \varphi(t)e^{\frac{t}{n}}\mathrm{d}t \leqslant \frac{7}{4}\int_0^2 e^{\frac{t}{n}}\mathrm{d}t.$$

Or $\displaystyle\int_0^2 e^{\frac{t}{n}}\mathrm{d}t = \left[ne^{\frac{t}{n}}\right]_0^2 = n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right)$ donc :

$$\frac{3}{2}n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right) \leqslant u_n \leqslant \frac{7}{4}n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right).$$

c) On pose $h = \dfrac{2}{n}$, d'où $n = \dfrac{2}{h}$.

Alors l'encadrement s'écrit :

$$3 \cdot \frac{e^h - 1}{h} \leqslant u_n \leqslant \frac{7}{2} \cdot \frac{e^h - 1}{h}.\ \textbf{[1]}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} h = 0$ et $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h - 1}{h} = 1$, donc par passage à la limite dans **[1]**, $3 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{7}{2}$.

2. a) $\forall t \in [0\ ;2]$,

$$\varphi(t) = \frac{2t + 3}{t + 2} = \frac{2(t+2) - 1}{t + 2} = 2 - \frac{1}{t+2}.$$

Par conséquent :

$$J = \int_0^2 \varphi(t)\mathrm{d}t = \int_0^2 \left(2 - \frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t = \left[2t - \ln(t+2)\right]_0^2$$
$$= 4 - \ln(2).$$

b) La fonction $t \mapsto e^{\frac{t}{n}}$ est strictement croissante sur [0 ; 2] et la fonction φ est positive.

$\forall t \in [0\ ;2]$, $1 \leqslant e^{\frac{t}{n}} \leqslant e^{\frac{2}{n}} \Rightarrow \varphi(t) \leqslant \varphi(t)e^{\frac{t}{n}} \leqslant \varphi(t)e^{\frac{2}{n}}$.

Par intégration sur [0 ; 2] :

$\displaystyle\int_0^2 \varphi(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^2 \varphi(t)e^{\frac{t}{n}}\mathrm{d}t \leqslant e^{\frac{2}{n}}\int_0^2 \varphi(t)\mathrm{d}t$, donc

$$J \leqslant u_n \leqslant e^{\frac{2}{n}}J.$$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{2}{n}} = 1$.

D'après le théorème d'encadrement, la suite (u_n) converge vers I. Ainsi $\ell = 4 - \ln(2)$.

CHAPITRE

8 Nombres complexes

ACTIVITÉS

(page 232)

Activité 1

1 **a)** En appliquant la formule de Cardan avec $p = -36$ et $q = -91$, on trouve $\alpha = 7$.

b) $(X-7)(X^2+bX+c) = X^3+(b-7)X^2+(c-7b)X-7c$.
Pour avoir l'égalité demandée, on prend $b-7=0$ et $c-7b=-36$. On trouve $b=7$ et $c=13$.

c) L'équation $X^3-36X-91=0$ s'écrit :

$$(X-7)(X^2+7X+13)=0,$$

ce qui équivaut à $X=7$ ou $X^2+7X+13=0$. Le discriminant de la deuxième équation étant négatif, cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Il en résulte que l'équation $X^3-36X-91=0$ admet une seule solution dans $\mathbb{R}$:

$$S=\{7\}.$$

2 **a)** On trouve $4p^3+27q^2 = -13\,068$. Ce nombre étant strictement négatif, la racine carrée de $\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}$ n'existe pas, donc on ne peut pas appliquer la formule de Cardan à l'équation

$$X^3-15X-4=0.$$

b) Selon le graphique obtenu, on peut conjecturer que l'équation $X^3-15X-4=0$ admet trois solutions réelles dont une semble égale à 4.

c) $-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}} = 2+11i$ et

$-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}} = 2-11i$.

Si on trouve deux nombres « imaginaires » dont les cubes s'écrivent $2+11i$ et $2-11i$, il suffit de remplacer les racines cubiques dans la formule de Cardan par ces deux nombres pour trouver une solution de l'équation **(E)**.

$$(2+i)^3 = 2^3+3\cdot 2^2 i+3\cdot 2i^2+i^3 = 2+11i$$
$$= 2^3-3\cdot 2^2 i+3\cdot 2i^2-i^3 = 2-11i.$$

La valeur donnée par la formule de Cardan s'écrit

$$X=(2+i)+(2-i)=4.$$

$4^3-15\cdot 4-4=0$, donc 4 est bien solution de l'équation **(E)**.

d) $(X-4)(X^2+bX+c) = X^3+(b-4)X^2+(c-4b)X-4c$.
Pour avoir l'égalité demandée, on prend $b-4=0$ et $c-4b=-15$. On trouve $b=4$ et $c=1$.

e) L'équation **(E)** équivaut à $X=4$ ou $X^2+4X+1=0$.
On obtient :

$$S=\{-2-\sqrt{3}\,;-2+\sqrt{3}\,;4\}.$$

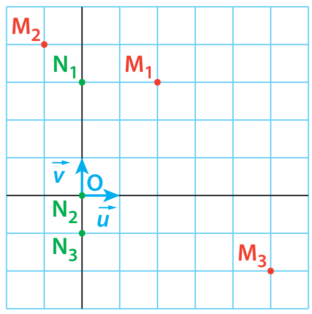
Activité 2

a) $N_1(0;3)$, $N_2(0;0)$, $N_3(0;-1)$.

b) $N_4(0;5)$ représente le nombre $5i$.
$N_5(0;-2)$ représente le nombre $-2i$.

c) $M_1(2;3)$, $M_2(-1;4)$, $M_3(5;-2)$.

d) $z_4 = 1+2i$,
$z_5 = -\sqrt{2}+\frac{3}{5}i$.



PROBLÈME OUVERT

En prenant comme unité la longueur du carré, on a :

$\cos(\alpha) = \dfrac{8}{\sqrt{65}} = \dfrac{8}{\sqrt{13}\sqrt{5}}$. $\sin(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{65}} = \dfrac{1}{\sqrt{13}\sqrt{5}}$.

$\cos(\beta) = \dfrac{5}{\sqrt{26}} = \dfrac{5}{\sqrt{13}\sqrt{2}}$. $\sin(\beta) = \dfrac{1}{\sqrt{26}} = \dfrac{1}{\sqrt{13}\sqrt{2}}$.

On déduit que :

$\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{40}{13\sqrt{10}} - \dfrac{1}{13\sqrt{10}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

$\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{8}{13\sqrt{10}} + \dfrac{5}{13\sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

D'autre part, $\cos(\gamma) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin(\gamma) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$; on en déduit que :

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{3}{\sqrt{10}}\times\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{10}}\times\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{3}{\sqrt{10}}\times\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{10}}\times\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Il en résulte que $\alpha+\beta+\gamma = \dfrac{\pi}{4}$.

EXERCICES Application (page 241)

1 **a)** $z_1 + z_2 = -1 + 2i + 3 + 4i = 2 + 6i$.
b) $z_1 - z_2 = -1 + 2i - (3 + 4i) = -4 - 2i$.
c) $z_1 - 3z_2 = -1 + 2i - 3(3 + 4i) = -10 - 10i$.
d) $z_1 z_2 = (-1 + 2i)(3 + 4i) = -11 + 2i$.

2 **a)** $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$.
b) $(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$.
c) $(3-i)^2 = 9 - 6i + i^2 = 8 - 6i$.

3 **1.** $j^2 = \left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= \dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i + \dfrac{3}{4}i^2$

$= -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

2. $1 + j + j^2 = 1 - \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = 0$.

4 $(1+i)^2 = 2i$, $(1+i)^4 = (2i)^2 = -4$, donc pour tout entier naturel k, $(1+i)^{4k} = (-4)^k$ est réel.
$(1+i)^{4k+1} = (-4)^k(1+i)$,
$(1+i)^{4k+2} = (-4)^k(1+i)^2 = (-4)^k(2i)$,
$(1+i)^{4k+3} = (-4)^k(2i)(1+i) = (-4)^k(-2+2i)$.
Comme tout entier naturel n s'écrit sous la forme $4k$, $4k+1$, $4k+2$ ou $4k+3$, on déduit que $(1+i)^n$ est réel si, et seulement si, n est multiple de 4.

5 **a)** $(2+i)^2(1-3i) = (3+4i)(1-3i) = 15 - 5i$.
b) $(5-2i)(1+4i)(2-i) = (13+18i)(2-i) = 44 + 23i$.

6 $(x+1+iy)(x-1-iy) = x^2 - (1+iy)^2$
$= x^2 - (1 + 2iy - y^2)$
$= (x^2 + y^2 - 1) - 2yi$.

7 **a)** $\mathrm{Re}(z_1 + z_2 + z_3) = 1 + 4 + 5 = 10$.
b) $iz_1 = i(1-3i) = 3 + i$ donc $\mathrm{Im}(iz_1) = 1$.
c) $z_1 z_2 = (1-3i)(4+2i) = 10 - 10i$, donc
$\mathrm{Im}(z_1 z_2) = -10$.
d) $\mathrm{Re}(2z_1 - 3z_2 + z_3) = 2\,\mathrm{Re}(z_1) - 3\,\mathrm{Re}(z_2) + \mathrm{Re}(z_3)$
$= 2 - 12 + 5$
$= -5$.

8 **a)** $i(1-i) = i - i^2 = 1 + i$.
b) $(2-3i)(4+i) = 11 - 10i$.
c) $\dfrac{3+2i}{4-i} = \dfrac{(3+2i)(4+i)}{17} = \dfrac{10}{17} + \dfrac{11}{17}i$.

9 **a)** $\dfrac{1}{2+3i} = \dfrac{2-3i}{4+9} = \dfrac{2}{13} - \dfrac{3}{13}i$.
b) $\dfrac{2}{1+i} - \dfrac{3}{1-i} = \dfrac{2(1-i) - 3(1+i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{-1-5i}{2} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{2}i$.
c) $\dfrac{2+3i}{5-2i} = \dfrac{(2+3i)(5+2i)}{29} = \dfrac{4}{29} + \dfrac{19}{29}i$.

10 **a)** $Z = z + \bar{z} - 3i = 2\,\mathrm{Re}(z) - 3i$, donc Z n'est ni réel ni imaginaire pur.
b) $Z = z - \bar{z} + 5i = 2\,\mathrm{Im}(z)i + 5i = (2\,\mathrm{Im}(z) + 5)i$, donc Z est imaginaire pur.
c) On pose $z = a + bi$ avec a et b réels.
$Z = z\bar{z} - z + \bar{z} = a^2 + b^2 - 2bi$ donc Z n'est ni réel ni imaginaire pur.
d) $Z = \bar{z}(z+i) + i(5i - z) = \bar{z}z - i(z - \bar{z}) - 5$
soit $Z = z\bar{z} - i(2\,\mathrm{Im}(z)i) - 5 = z\bar{z} + 2\,\mathrm{Im}(z) - 5$
$z\bar{z}$ étant réel, Z l'est aussi.

11 **a)** $\bar{Z} = -2 - i\bar{z}$.
b) $\bar{Z} = (-i + \bar{z})(2 + i\bar{z})$.
c) $Z = (-2i\bar{z} + 3)^2$.
d) $\bar{Z} = \dfrac{1 - i\bar{z}}{2\bar{z} + i}$.

12
$Z = \dfrac{z-1}{z+1} = \dfrac{(x-1)+iy}{(x+1)+iy} = \dfrac{[(x-1)+iy][(x+1)-iy]}{(x+1)^2 + y^2}$.
Le numérateur s'écrit :
$(x-1)(x+1) + iy(x+1) - iy(x-1) = x^2 - 1 + 2iy + y^2$
donc $Z = \dfrac{x^2 + y^2 - 1}{(x+1)^2 + y^2} + \dfrac{2y}{(x+1)^2 + y^2}i$.

13 $z_2 = \bar{z_1}$, donc $z_1 + z_2 = z_1 + \bar{z_1} = 2\,\mathrm{Re}(z_1)$.
Il en résulte que $z_1 + z_2$ est réel.

14 **a)** $(3-2i)z = i-2$ équivaut à $z = \dfrac{i-2}{3-2i}$,
soit $z = \dfrac{(i-2)(3+2i)}{13} = -\dfrac{8}{13} - \dfrac{1}{13}i$.

b) $(2+i)\overline{z} = 3i$ équivaut à $\overline{z} = \dfrac{3i}{2+i}$,
soit $\overline{z} = \dfrac{3i(2-i)}{5} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{6}{5}i$; cela signifie que $z = \dfrac{3}{5} - \dfrac{6}{5}i$.

15 **a)** L'équation $3iz - 2 + 4i = (1-2i)z + 6$ s'écrit $z(1-5i) + 8 - 4i = 0$ ce qui équivaut à $z = \dfrac{-8+4i}{1-5i}$,
soit $z = -\dfrac{14}{13} - \dfrac{18}{13}i$.

b) On pose $z = x + yi$. L'équation $(3+2i)z = 2i\overline{z} - 5i$ s'écrit $3x - 4y + (3y+5)i = 0$, ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ 3y + 5 = 0 \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} x = -\dfrac{20}{9} \\ y = -\dfrac{5}{3} \end{cases}.$$

L'équation a pour solution $z = -\dfrac{20}{9} - \dfrac{5}{3}i$.

16 **a)** L'équation $z^2 - (2+3i)^2 = 0$ s'écrit :

$$(z - 2 - 3i)(z + 2 + 3i) = 0,$$

ce qui équivaut à :

$$z - 2 - 3i = 0 \text{ ou } z + 2 + 3i = 0.$$

On obtient deux solutions, $z_1 = -2 - 3i$ et $z_2 = 2 + 3i$.

b) L'équation $iz^2 + (3-4i)z = 0$ s'écrit :

$$z(iz + 3 - 4i) = 0,$$

ce qui équivaut à $z = 0$ ou $iz + 3 - 4i = 0$, soit :

$$z = 0 \text{ ou } z = \frac{-3+4i}{i} = 4 + 3i.$$

c) L'équation $z^2 + 4 = 0$ s'écrit $z^2 - (2i)^2 = 0$, ce qui équivaut à $(z+2i)(z-2i) = 0$.
Cela signifie que $z + 2i = 0$ ou $z - 2i = 0$.
On obtient deux solutions, $z_1 = -2i$ et $z_2 = 2i$.

d) Pour $z \neq 1$, l'équation $\dfrac{z+1}{z-1} = i$ équivaut à :

$$z + 1 = i(z-1), \text{ ou encore } z(1-i) = -1 - i,$$

soit $z = \dfrac{-1-i}{1-i} = -i$. La solution est $-i$.

17 **a)** Le discriminant de l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$ est $\Delta = -12$. $\Delta < 0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{2 - i\sqrt{12}}{2} = 1 - i\sqrt{3} \text{ et } z_2 = 1 + i\sqrt{3}.$$

b) Le discriminant de l'équation $z^2 - 8z + 25 = 0$ est $\Delta = -36$. $\Delta < 0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{8 - i\sqrt{36}}{2} = 4 - 3i \text{ et } z_2 = 4 + 3i.$$

c) L'équation $z^2 + 2\sqrt{3}z + 3 = 0$ s'écrit $(z + \sqrt{3})^2 = 0$, ce qui équivaut à $z = -\sqrt{3}$.

18 **1.** Le nombre $3 - i$ est solution de l'équation $z^2 - 6z + a = 0$ si, et seulement si, $(3-i)^2 - 6(3-i) + a = 0$, soit $-10 + a = 0$ ou encore $a = 10$.

2. Lorsque $a = 10$, $3 - i$ étant une solution, l'autre solution est $3 + i$.

19 **1.** $8^3 - 12 \cdot 8^2 + 48 \cdot 8 - 128 = 0$, donc 8 est solution de l'équation **(E)**.

2. a)
$(z-8)(az^2 + bz + c) = az^3 + (b - 8a)z^2 + (c - 8b)z - 8c$.
Pour avoir l'égalité demandée, on prend $a = 1$, $b - 2a = -12$ et $c - 8b = 48$. On obtient $a = 1$, $b = -4$ et $c = 16$.
On vérifie que $-8c = -128$. En effet $-8 \cdot 16 = -128$.

b) L'équation **(E)** s'écrit : $(z-8)(z^2 - 4z + 16) = 0$, ce qui équivaut à $z - 8 = 0$ ou $z^2 - 4z + 16 = 0$.
Le discriminant de la deuxième équation est $\Delta = -48$. $\Delta < 0$, donc la deuxième équation a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{4 - 4i\sqrt{3}}{2} = 2 - 2i\sqrt{3} \text{ et } z_2 = 2 + 2i\sqrt{3}.$$

On déduit que l'équation **(E)** admet trois solutions :

$$z_0 = 8,\ z_1 = 2 - 2i\sqrt{3} \text{ et } z_2 = 2 + 2i\sqrt{3}.$$

20 **a)** $z_1 = \sqrt{3} - i\sqrt{3}$, donc $|z_1| = \sqrt{3+3} = \sqrt{6}$. D'où :

$$z_1 = \sqrt{6}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{6}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

b) $z_2 = 2i = 2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.

c) $z_3 = \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{2} = \dfrac{1}{2}(1-i)$. Comme $|1-i| = \sqrt{2}$, alors :

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

On en déduit que :

$$z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

21 **a)**
$z_1 = -2(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = 2(\cos(\theta + \pi) + i\sin(\theta + \pi))$.

b) $z_2 = 3(\sin(\theta) + i\cos(\theta)) = 3\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)\right)$.

22 **a)** $OM = 2\sqrt{2}$, donc

$$z_M = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

De même $ON = 3\sqrt{2}$, donc

$$z_N = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

b) $OM = 2$ et $\mathrm{Re}(z_M) = 1$, donc $\cos(\theta) = \dfrac{1}{2}$.

Comme $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, alors $\sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, d'où :

$$z_M = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

$ON = 2$ et $\mathrm{Im}(z_N) = -1$ donc $\sin(\theta) = -\dfrac{1}{2}$. Comme $\pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$, alors $\cos(\theta) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. D'où $\theta = \pi + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{7\pi}{6}$.

On en déduit que $z_N = 2\left(\cos\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)\right)$.

$OP = 2$ et $\arg(z_P) = \dfrac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}$, donc

$$z_P = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

23 **a)** $\left|z_1\right| = \left|2\sqrt{3} - 2i\right| = \sqrt{12 + 4} = 4$, donc

$$z_1 = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

b) $2 - 2i = 2(1 - i) = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$\left|3 + i\sqrt{3}\right| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$,

$$3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

On en déduit que : $z_2 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = 4\sqrt{6}e^{-i\frac{\pi}{12}}$.

c) $\left|\sqrt{3} - 3i\right| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$,

donc $\sqrt{3} - 3i = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}$

et $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, donc :

$$\frac{\sqrt{3} - 3i}{1 - i} = \frac{2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{6}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{6}e^{-i\frac{\pi}{12}}.$$

d) $z_4 = -2i\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\frac{\pi}{5}} = 2e^{-i\frac{3\pi}{10}}$.

24 **a)** $\left|\sqrt{2}e^{i2\theta}\right| = \sqrt{2}$ et un argument de $\sqrt{2}e^{i2\theta}$ est le nombre 2θ.

b) $-e^{-i\theta} = e^{i\pi}e^{-i\theta} = e^{i(\pi-\theta)}$, donc un argument de $-e^{-i\theta}$ est $\pi - \theta$ et son module est 1.

c) $-2ie^{i\theta} = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{i\theta} = 2e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$, donc un argument de $-2ie^{i\theta}$ est $\theta - \dfrac{\pi}{2}$ et son module est 2.

25 **1.** $z_1 = -3e^{-i\frac{\pi}{3}} = -3\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}.$

$$z_1z_2 = \left(-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)(2 - 2i) = (3\sqrt{3} - 3) + (3\sqrt{3} + 3)i.$$

2. $z_1 = -3e^{-i\frac{\pi}{3}} = 3e^{i\pi}e^{-i\frac{\pi}{3}} = 3e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)} = 3e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

$z_2 = 2(1 - i) = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

$z_1z_2 = 3e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 6\sqrt{2}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = 6\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

Une forme trigonométrique de z_1z_2 est

$$6\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right).$$

3. L'égalité entre la forme algébrique et la forme trigonométrique entraîne :

$$6\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 3\sqrt{3} - 3 \text{ et } 6\sqrt{2}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 3\sqrt{3} + 3.$$

D'où :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

26 **1.** Figure ci-après.

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est

$$z_B - z_A = (3 - 2i) - (-4 - 3i) = 7 + i.$$

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{DC}$ est

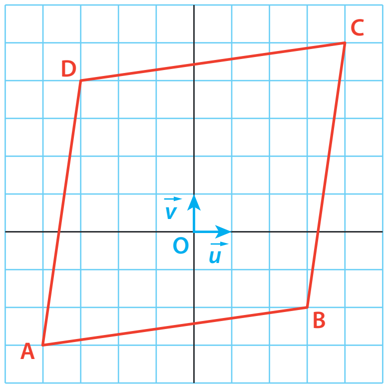
$$z_C - z_D = (4 + 5i) - (-3 + 4i) = 7 + i.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ayant les mêmes affixes, ils sont égaux. On déduit que ABCD est un parallélogramme.

2. $BC = \left|z_C - z_B\right| = \left|4 + 5i - (3 - 2i)\right| = \left|1 + 7i\right| = \sqrt{50}$

et $AB = \left|z_B - z_A\right| = \left|7 + i\right| = \sqrt{50}$, donc $AB = BC$.

Le parallélogramme ABCD ayant deux côtés consécutifs de même longueur, c'est un losange.



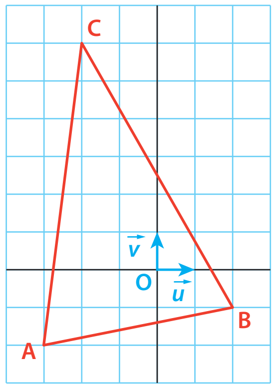
27 $AC = \left|z_C - z_A\right| = \left|-2 + 6i - (-3 - 2i)\right|$

$= \left|1 + 8i\right| = \sqrt{65}.$

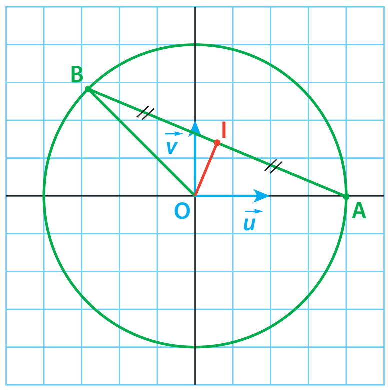
$BC = \left|z_C - z_B\right| = \left|-2 + 6i - (2 - i)\right|$

$= \left|-4 + 7i\right| = \sqrt{65}.$

Donc $AC = BC$ et le triangle ABC est isocèle en C.



28 **1.**



2. a) $\left|a\right| = \left|b\right| = 2$, donc $OA = OB = 2$. D'où OAB est isocèle en O. Comme I est le milieu de [AB], on a :

$$(\vec{u}, \overrightarrow{OI}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}(\vec{u}, \overrightarrow{OB}).$$

Puisque $\dfrac{3\pi}{4}$ est un argument de b, alors $(\vec{u}, \overrightarrow{OI}) = \dfrac{3\pi}{8}$.

b) $b = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

$$z_I = \frac{a + b}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

c) $OI = \left|z_I\right| = \dfrac{1}{2}\sqrt{(2 - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{8 - 4\sqrt{2}}$

$= \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$

3. a) $z_1 = \sqrt{2-\sqrt{2}}\,e^{i\frac{3\pi}{8}}$.

b) En écrivant l'égalité entre la forme algébrique et la forme trigonométrique de z_1, on déduit que :

$$\sqrt{2-\sqrt{2}}\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{2}\ ;$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2}}\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

D'où $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$;

$$\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Comme $\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8}$, alors :

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

EXERCICES Activités de recherche (page 208)

33 Recherche d'ensemble

• ***Les outils***

– Forme algébrique d'un nombre complexe.
– Propriétés du conjugué d'un nombre complexe.
– Calcul algébrique sur les nombres complexes.
– Interprétation géométrique du module d'un nombre complexe.
– Condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre complexe soit un imaginaire pur.

• ***Les objectifs***

– Détermination d'ensembles de points.
– Choix d'une méthode adaptée.

1. a) En appliquant les propriétés du conjugué, on obtient :

$$\overline{Z_1} = \overline{\left(\frac{u-\bar{u}z}{1-z}\right)} = \frac{\overline{(u-\bar{u}z)}}{\overline{(1-z)}} = \frac{\bar{u}-u\bar{z}}{1-\bar{z}}.$$

b) $Z_1 = \overline{Z_1}$ s'écrit $\frac{u-\bar{u}z}{1-z} = \frac{\bar{u}-u\bar{z}}{1-\bar{z}}$.

Cela signifie que $(u-\bar{u}z)(1-\bar{z}) = (\bar{u}-u\bar{z})(1-z)$, ce qui équivaut à $(u-\bar{u})\left(1-|z|^2\right) = 0$.

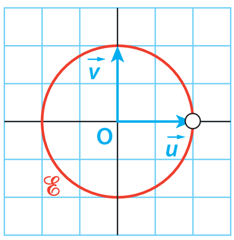
2. a) Si $u-\bar{u} = 0$, alors $u = \bar{u}$. Pour tout nombre complexe $z \neq 1$, on a :

$$Z_1 = \frac{u-uz}{1-z} = \frac{u(1-z)}{1-z} = u.$$

Comme $u = \bar{u}$, u est réel, Z_1 l'est aussi. Dans ce cas, $\mathscr{E}$ est l'ensemble des nombres complexes privé de 1.

b) Si $u-\bar{u} \neq 0$, la condition nécessaire et suffisante pour que $Z_1 = \overline{Z_1}$ trouvée dans la question **1. b)** s'écrit $|z| = 1$. Dans ce cas, $\mathscr{E}$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1 privé de 1.

c) Lorsque $u-\bar{u} \neq 0$, $\mathscr{E}$ est représenté par le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point d'affixe 1.



3. a) $Z_2 = \frac{z+i}{z-i}$ se traduit par :

$$X + Yi = \frac{x+yi+i}{x+yi-i} = \frac{x+(y+1)i}{x+(y-1)i}.$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par $x-(y-1)i$, on obtient :

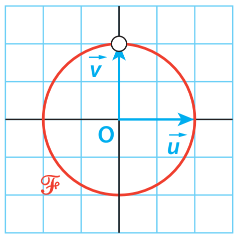
$$X + Yi = \frac{x^2+y^2-1+2xi}{x^2+(y-1)^2}$$
$$= \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2} + \frac{2x}{x^2+(y-1)^2}i,$$

ce qui entraîne :

$$X = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2} \text{ et } Y = \frac{2x}{x^2+(y-1)^2}.$$

b) Z_2 est imaginaire pur si, et seulement si, $\mathrm{Re}(Z_2) = 0$, soit $x^2+y^2-1 = 0$ et $(x\,;y) \neq (0\,;1)$.

c) $\mathscr{F}$ est représenté par le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point d'affixe i.



4. a) $\overline{Z_2} = \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i}$.

b) $Z_2 + \overline{Z_2} = \frac{z+i}{z-i} + \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i}$

$$= \frac{(z+i)(\bar{z}+i)+(z-i)(\bar{z}-i)}{(z-i)(\bar{z}+i)}$$

$$= \frac{2|z|^2-2}{(z-i)(\bar{z}+i)}.$$

c) Z_2 est imaginaire pur si, et seulement si, $Z_2 + \overline{Z_2} = 0$, ce qui se traduit par $2|z|^2 - 2 = 0$ et $z \neq i$, soit $|z| = 1$ et $z \neq i$. Donc $\mathscr{F}$ est l'ensemble des nombres complexes z, $z \neq i$, dont le module est égal à 1.

d) $\mathscr{F}$ est représenté par le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point d'affixe i.

34 Équation du troisième degré dans $\mathbb{C}$

• ***Les outils***

– Calcul algébrique avec les nombres complexes.
– Techniques de factorisation d'un polynôme.
– Discriminant d'un polynôme de second degré à coefficients réels.

• ***Les objectifs***

– Factorisation d'un polynôme dont on connaît une racine.
– Résolution d'une équation de troisième degré à coefficients complexes.

1. a) $P(4i) = (4i)^3 - (3+4i)\cdot(4i)^2 - 6(3+4i)\cdot 4i + 72i$
$= -64i + 16(3+4i) - 24i(3-2i) + 72i$
$= 0$.

Donc $z_0 = 4i$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.

b)
$(z-4i)(az^2+bz+c) = az^3 + (b-4ia)z^2 + (c-4ib)z - 4ic$.

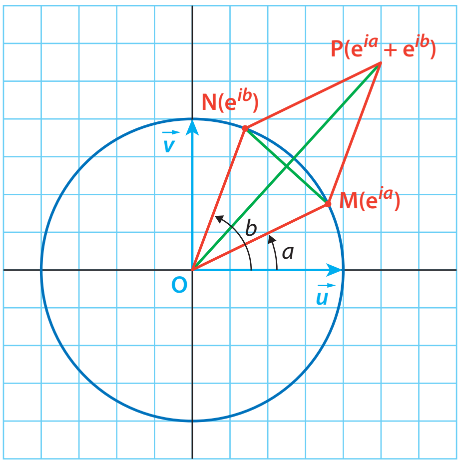
2. a) Pour avoir l'égalité $P(z) = (z-4i)(az^2+bz+c)$ pour tout nombre complexe z, il suffit de prendre $a = 1$, $b - 4ia = -3 - 4i$, $c - 4ib = -18 + 12i$ et $-4ic = 72i$, soit $a = 1$, $b = -3$ et $c = -18$.

On a alors, pour tout nombre complexe z :
$$P(z) = (z-4i)(z^2-3z-18).$$

b) $P(z) = 0$ équivaut à $z = 4i$ ou $z^2 - 3z - 18 = 0$. Le discriminant de la deuxième équation est $\Delta = 81$. $\Delta > 0$, donc cette équation admet deux solutions réelles : $z_1 = -3$ et $z_2 = 6$. On en déduit que l'équation $P(z) = 0$ admet trois solutions :
$$z_0 = 4i,\ z_1 = -3 \text{ et } z_2 = 6.$$

3. On pose :
$$Q(z) = 3z^3 + (1+6i)z^2 + (16+2i)z + 32i.$$
On cherche une solution z_0 de type αi avec α réel. On trouve $z_0 = -2i$. On cherche ensuite a, b et c pour avoir $Q(z) = (z+2i)(az^2+bz+c)$ pour tout nombre complexe z. On trouve $a = 3$, $b = 1$ et $c = 16$. Il en résulte que pour tout nombre complexe z,
$$Q(z) = (z+2i)(3z^2+z+16).$$
Donc l'équation $Q(z) = 0$ équivaut à $z = -2i$ ou $3z^2 + z + 16 = 0$. Cette deuxième équation a deux solutions complexes conjuguées :
$$z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{191}}{6} \text{ et } z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{191}}{6}.$$
On en déduit que l'équation $Q(z) = 0$ a trois solutions :
$$z_0 = -2i,\ z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{191}}{6} \text{ et } z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{191}}{6}.$$

35 Narration de recherche



On suppose que $b > a$.

Soit I le milieu de [OP]. OMPN est un losange, donc les diagonales sont perpendiculaires et se rencontrent en leur milieu. On en déduit que $\frac{a+b}{2}$ est une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OP})$ et que $OP = 2OI = 2\cos\left(\frac{b-a}{2}\right)$.

Cela veut dire que $\frac{a+b}{2}$ est un argument de $e^{ia} + e^{ib}$ et que $2\cos\left(\frac{b-a}{2}\right)$ est son module.

Par le calcul

$$e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{i\frac{b-a}{2}}\right)$$
$$= 2\,\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{b-a}{2}}\right)e^{i\frac{a+b}{2}}$$
$$= 2\cos\left(\frac{b-a}{2}\right)e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}.$$

Comme $2\cos\left(\frac{b-a}{2}\right) > 0$, alors $\left|e^{ia} + e^{ib}\right| = 2\cos\left(\frac{b-a}{2}\right)$ et $\arg\left(e^{ia} + e^{ib}\right) = \frac{a+b}{2} \pmod{2\pi}$.

36 Narration de recherche

1. $z = -\sin(2\theta) + 2i\cos^2(\theta)$, $\theta \in \left]-\pi\,;\pi\right[$.

$|z|^2 = \sin^2(2\theta) + 4\cos^4(\theta)$
$= 4\sin^2(\theta)\cos^2(\theta) + 4\cos^4(\theta) = 4\cos^2(\theta)$.

• Si $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, alors $|z| = 2\cos(\theta)$.

Dans ce cas, $z = 2\cos(\theta)e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$, donc $\theta + \frac{\pi}{2}$ est un argument de z.

• Si $\theta \in \left]-\pi; -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right[$, alors $|z| = -2\cos(\theta)$. Dans ce cas, $z = -2\cos(\theta)e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$, donc $\theta - \frac{\pi}{2}$ est un argument de z.

2. Soit A le point d'affixe 1.
$|z| = |1-z|$ équivaut à $OM = AM$. Cela signifie que M appartient à la médiatrice du segment [OA], ce équivaut à $-\sin(2\theta) = \frac{1}{2}$, soit $2\theta = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $2\theta = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ avec k entier relatif. Il en résulte que $\theta = -\frac{\pi}{12} + k\pi$ ou $\theta = -\frac{5\pi}{12} + k\pi$. Comme $\theta \in \left]-\pi\,;\pi\right[$, on obtient quatre valeurs de θ pour lesquelles z et $1-z$ ont le même module : $-\frac{5\pi}{12}$, $-\frac{\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{12}$ et $\frac{11\pi}{12}$.

37 TD – Ensemble de points

A. 2. Conjecture : lorsque θ décrit l'intervalle $[0;2\pi[$, l'ensemble $\mathscr{C}$ décrit par le point M semble être le cercle de centre O et de rayon 1.

3. $OM = |z| = |e^{i\theta}| = 1$, donc M appartient au cercle de centre O et de rayon 1.

Réciproquement, tout point M du cercle de centre O et de rayon 1 a pour coordonnées $(\cos(\theta)\ ;\ \sin(\theta))$ où θ est une mesure de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$ dans l'intervalle $[0;2\pi[$. Donc l'affixe de M est $z = e^{i\theta}$.

Il en résulte que l'ensemble des points M d'affixe $z = e^{i\theta}$ où θ décrit l'intervalle $[0;2\pi[$ est le cercle de centre O et de rayon 1.

B. 1. b) Conjecture : lorsque θ décrit l'intervalle $[0;2\pi[$, l'ensemble $\mathscr{C}'$ décrit par le point P semble être le cercle de centre A et de rayon 1.

c) AP $= |1 + z - 1| = |z| = |e^{i\theta}| = 1$, donc P appartient au cercle de centre A et de rayon 1.

Réciproquement, considérons un point P de ce cercle d'affixe z_P. Soit $z = z_P - 1$.

On a $|z| = |z_P - 1| = \text{AP} = 1$, d'où $z = e^{i\theta}$

où θ est une mesure de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AP}\right)$ dans l'intervalle $[0;2\pi[$. On conclut que $z_P = 1 + e^{i\theta}$.

Il en résulte que l'ensemble des points P d'affixe $1 + e^{i\theta}$ où θ décrit l'intervalle $[0;2\pi[$, est le cercle de centre A et de rayon 1.

2. b) Lorsque r est fixe et que θ décrit l'intervalle $[0;2\pi[$, M et M' décrivent respectivement deux cercles de même centre O et de rayons 1 et r. En effet, $\text{OM}' = |re^{i\theta}| = r$.

Réciproquement, si M′ est un point du cercle de centre O et de rayon r, alors son affixe a pour module r et s'écrit $re^{i\theta}$, où θ est une mesure de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right)$ dans l'intervalle $[0;2\pi[$.

Lorsque θ est fixe et que r varie, le point M′ décrit une demi-droite ouverte d'origine O et passant par M. En effet, r étant strictement positif

$$\arg(re^{i\theta}) = \arg(e^{i\theta}) = \theta \pmod{2\pi},$$

ce qui équivaut à

$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right).$$

3. b) On conjecture que les points O, M et S sont alignés.

c) $$\frac{1 + z + z^2}{z} = \frac{1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta}}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} + 1 + e^{i\theta} = 1 + 2\,\text{Re}(e^{i\theta}).$$

Donc $\dfrac{1 + z + z^2}{z}$ est un réel k.

d) D'où $1 + z + z^2 = kz$; or cela signifie que $\overrightarrow{OS} = k\,\overrightarrow{OM}$, donc les points O, M et S sont alignés.

38 TD – Utiliser l'affixe d'un vecteur

A. 1. a) $$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) = (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AB}).$$

b) On en déduit que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right).$$

c) Il découle du résultat de **1. b)** que :

• les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si, et seulement si,

$$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = 0 \pmod{\pi} ;$$

• les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si, et seulement si,

$$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.$$

2. D'après **1. b)**, on a :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \arg\left(\frac{b - z}{a - z}\right) = \arg\left(\frac{z - b}{z - a}\right).$$

D'autre part, $\left|\dfrac{z - b}{z - a}\right| = \dfrac{|z - b|}{|z - a|} = \dfrac{\text{MB}}{\text{MA}}$.

3. a) « ABC est rectangle en A » signifie que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires, ce qui équivaut, d'après **1. c)**, à $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, ce qui se traduit par « $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur ».

b) « ABC est un triangle équilatéral direct » si, et seulement si, $\dfrac{\text{AC}}{\text{AB}} = 1$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{3}$, ce qui équivaut à $\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{3}$. Cela se traduit par « $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ».

B. 1. a) $\dfrac{z_B - z_I}{z_A - z_I} = \dfrac{-4 + 2i}{2 + 4i} = \dfrac{i(2 + 4i)}{2 + 4i} = i$.

b) On déduit de **A. 3. a)** que le triangle IAB est rectangle en I. D'autre part, d'après **A. 2.**, $\dfrac{\text{IB}}{\text{IA}} = |i| = 1$, donc IAB est isocèle en A.

En définitive, IAB est rectangle isocèle en A.

2. a) $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{-\sqrt{3} + 3i}{\sqrt{3} + 3i} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

b) $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$; on en déduit d'après **A. 3. b)** que le triangle ABC est équilatéral direct.

39 TD – Analyse fréquentielle des signaux

A. 1. e^{-ix} est le conjugué de e^{ix}, donc :

$$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{2\,\text{Re}(e^{ix})}{2} = \frac{2\cos(x)}{2} = \cos(x) ;$$

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{2i\,\text{Im}(e^{ix})}{2i} = \frac{2i\sin(x)}{2i} = \sin(x).$$

2. a) On applique ce qui précède à $x = \omega nt$:

$$\cos(\omega nt) = \frac{e^{i\omega nt} + e^{-i\omega nt}}{2} \text{ et } \sin(\omega nt) = \frac{e^{i\omega nt} - e^{-i\omega nt}}{2i}.$$

b) $$\begin{aligned} a_n\cos(\omega nt) + b_n\sin(\omega nt) &= a_n\frac{e^{i\omega nt} + e^{-i\omega nt}}{2} + b_n\frac{e^{i\omega nt} - e^{-i\omega nt}}{2i} \\ &= a_n\frac{e^{i\omega nt} + e^{-i\omega nt}}{2} - ib_n\frac{e^{i\omega nt} - e^{-i\omega nt}}{2} \\ &= \frac{a_n - ib_n}{2}e^{i\omega nt} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-i\omega nt}. \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} u_N(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n\cos(\omega nt) + b_n\sin(\omega nt) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n - ib_n}{2}e^{i\omega nt} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-i\omega nt} \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n e^{i\omega nt} + c_{-n}e^{-i\omega nt} \\ &= \sum_{n=-N}^{n=N} c_n e^{i\omega nt}. \end{aligned}$$

B. a) $$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} u(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 0\,dt\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\cdot\pi = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $c_n = \dfrac{1}{n\pi}\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ est réel.

Comme $c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2}$, on déduit que $b_n = 0$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

b) Si $n = 2p$, alors $c_n = \frac{1}{2p\pi}\sin(p\pi) = 0$.
Comme $b_n = 0$, $a_n = 2c_n = 0$.
Si $n = 2p+1$, alors :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{(2p+1)\pi}\sin\left(\frac{(2p+1)\pi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{(2p+1)\pi}\sin\left(p\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{(-1)^p}{\pi(2p+1)}. \end{aligned}$$

D'où $a_n = 2c_n = \frac{2(-1)^p}{\pi(2p+1)}$.

c) Dans la formule

$$u_5(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{5} a_n\cos(\omega nt) + b_n\sin(\omega nt),$$

on remplace a_0 par $\frac{1}{2}$, b_n par 0 et a_n par 0 si n est pair ($n \geqslant 1$), par $\frac{2(-1)^p}{\pi(2p+1)}$ si $n = 2p+1$ (n impair).
On obtient :

$$u_5(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{2}{3\pi}\cos(3t) + \frac{2}{5\pi}\cos(5t).$$

d) On constate que l'allure de u_{11} se rapproche davantage de celle du signal $u(t)$.

C. a) $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi^2 = \pi$.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $c_n = \frac{1}{n}i$ est imaginaire pur.

Comme $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, on déduit que $a_n = 0$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = -\frac{ib_n}{2}$, donc

$$b_n = -\frac{2}{i}c_n = -\frac{2}{i}\cdot\frac{1}{n}i = -\frac{2}{n}.$$

c) Dans la formule

$$u_4(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{4} a_n\cos(\omega nt) + b_n\sin(\omega nt),$$

on remplace a_0 par π, a_n par 0 et b_n par $-\frac{2}{n}$, et on obtient :

$$u_4(t) = \pi - 2\left[\sin(t) + \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{4}\sin(4t)\right].$$

d) On constate que l'allure de u_7 se rapproche davantage de celle du signal $u(t)$.

EXERCICES Entraînement (page 253)

DE TÊTE

40 $z_1 + z_2 = 5 + 2i$; $z_1 - z_2 = -1 + 6i$; $3z_1 = 6 + 12i$.

41 **a)** $(2i)^2 = -4$; $(-i\sqrt{3})^2 = -3$; $(1+i)^2 = 2i$.
b) $2i(3+5i) = -10 + 6i$; $2(3-i) + 4(i+2) = 14 + 2i$.

42 La partie réelle de $(2+3i)(5+4i)$ est -2.

43 Le conjugué de $i - \sqrt{2}$ est $-i - \sqrt{2}$.

44 **a)** $|1+i| = \sqrt{2}$; **b)** $|2i| = 2$;
c) $|-2+i| = \sqrt{5}$; **d)** $|2+3i| = \sqrt{13}$.

45 **a)** $\arg(-3) = \pi$; **b)** $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$;
c) $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$; **d)** $\arg\left[(-i\sqrt{2})^4\right] = 0$.

46 **a)** $\arg(3z) = \frac{\pi}{5}$; **b)** $\arg(-z) = \frac{6\pi}{5}$
c) $\arg(\overline{z}) = -\frac{\pi}{5}$; **d)** $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{\pi}{5}$.

47 **a)** $2e^{i\pi} = -2$; **b)** $3e^{i\frac{\pi}{2}} = 3i$.
c) $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

48 $2i$ et $-2i$ sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -4$.

49 La notation exponentielle de $-2e^{i\frac{\pi}{5}}$ est $2e^{i\frac{6\pi}{5}}$.

L'ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES

50 $z_1 = 14 - 2i$; $z_2 = 8 - 6i$; $z_3 = 7$.

51 $z_1 = 8 - 6i$; $z_2 = 36 + 2i$.

52 *Corrigé sur le site élève.*

53 $z_1 = -\frac{4}{13} - \frac{19}{13}i$; $z_2 = 3i$; $z_3 = \frac{12}{25} + \frac{9}{25}i$.

54 $z_1 = \frac{8}{5} + \frac{1}{5}i$; $z_2 = -\frac{6}{5} + \frac{7}{5}i$.

55
$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 - z \\ &= (x+yi)^2 - (x+yi) \\ &= x^2 + 2xyi + y^2i^2 - x - yi \\ &= (x^2 - y^2 - x) + y(2x-1)i. \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Re}(f(z)) = x^2 - y^2 - x$ et $\mathrm{Im}(f(z)) = y(2x-1)$.

56 *Corrigé sur le site élève.*

57 **a)**
$$\begin{cases} 3z + z' = 2 - 5i & (\mathbf{L_1}) \\ z - z' = -2 + i & (\mathbf{L_2}) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4z = -4i & (\mathbf{L_1}) + (\mathbf{L_2}) \\ z' = z + 2 - i & (\mathbf{L_2}) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -i \\ z' = 2 - 2i. \end{cases}$$

Le système admet une seule solution, c'est le couple $(z ; z') = (-i ; 2-2i)$.

b) $\begin{cases} 3z + z' = 5 + 2i & (\mathbf{L_1}) \\ -z + z' = 1 - 2i & (\mathbf{L_2}) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4z = 4 + 4i & (\mathbf{L_1}) - (\mathbf{L_2}) \\ z' = z + 1 - 2i & (\mathbf{L_2}) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 + i \\ z' = 2 - i. \end{cases}$

Le système admet une seule solution, c'est le couple $(z;z') = (1 + i;2 - i)$.

CONJUGUÉ D'UN COMPLEXE

58 **a)** $\bar{z} = 2 - 5i$; **b)** $\bar{z} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$;

c) $\bar{z} = i$; **d)** $\bar{z} = 5 - i$; **e)** $\bar{z} = \frac{8}{5} + \frac{1}{5}i$.

59 **1.** z_2 est le conjugué de z_1, donc $z_1 + z_2$ est réel et $z_1 - z_2$ est imaginaire pur.

2. $z_1 + z_2 = \frac{2i+1}{i+2} + \frac{1-2i}{2-i}$
$= \frac{(2i+1)(2-i) + (2+i)(1-2i)}{(2+i)(2-i)}$
$= \frac{8}{5}$.

$z_1 - z_2 = \frac{2i+1}{i+2} - \frac{1-2i}{2-i} = \frac{6}{5}i$.

60 **a)** $\overline{Z} = 2i + 3\bar{z}$; **b)** $\overline{Z} = 3 - i + 2i\bar{z}$;
c) $\overline{Z} = (2 + i\,\bar{z})(2\,\bar{z} - 4 - 3i)$;
d) $\overline{Z} = \frac{-2i + 1 + i\,\bar{z}}{-5i + 2\,\bar{z}}$.

61 **a)** L'équation $4\bar{z} + 2i - 4 = 0$ s'écrit $4z - 2i - 4 = 0$,
ce qui équivaut à $z = \frac{2i+4}{4} = 1 + \frac{1}{2}i$.

b) L'équation $(iz - 2 + i)(2i\bar{z} + i - 2) = 0$ équivaut à $iz - 2 + i = 0$ ou $2i\bar{z} + i - 2 = 0$,
soit $z = \frac{2-i}{i} = -1 - 2i$ ou $\bar{z} = \frac{2-i}{2i} = \frac{1}{2} + i$.
On obtient donc deux solutions :

$$z_1 = -1 - 2i \text{ et } z_2 = \frac{1}{2} - i.$$

c) On pose $z = x + yi$ avec x et y réels.
L'équation $2z + i\bar{z} = 4$ s'écrit $2(x + yi) + i(x - yi) = 4$, ce qui équivaut à $2x + y = 4$ et $x + 2y = 0$, soit $x = \frac{8}{3}$ et $y = -\frac{4}{3}$.
L'équation a donc une seule solution : $z = \frac{8}{3} - \frac{4}{3}i$.

d) En multipliant l'équation de la question **c)** par i, on obtient l'équation de la question **d)**. Celle-ci admet donc la même solution, $z = \frac{8}{3} - \frac{4}{3}i$.

62 *Corrigé sur le site élève.*

ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ À COEFFICIENTS RÉELS

63 **a)** Le discriminant de l'équation $2z^2 - 6z + 5 = 0$ est $\Delta = -4$. L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i \text{ et } z_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i.$$

b) Le discriminant de l'équation $z^2 - 5z + 9 = 0$ est $\Delta = -11$. L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}i \text{ et } z_2 = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}i.$$

c) Le discriminant de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ est $\Delta = -3$. L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ et } z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

d) Le discriminant de l'équation $z^2 - 2z + 3 = 0$ est $\Delta = -8$. L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{2 - 2i\sqrt{3}}{2} = 1 - i\sqrt{3} \text{ et } z_2 = 1 + i\sqrt{3}.$$

e) L'équation $z^2 = z + 1$ s'écrit $z^2 - z - 1 = 0$, son discriminant est $\Delta = 5 > 0$, elle admet deux solutions réelles :

$$z_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

f) L'équation $z^2 + 3 = 0$ admet deux solutions complexes :

$$z_1 = i\sqrt{3} \text{ et } z_2 = -i\sqrt{3}.$$

g) $\Delta = (1 + \sqrt{3})^2 - 4\sqrt{3} = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$.
$\Delta > 0$, donc l'équation admet deux solutions réelles :

$x_1 = \frac{1 + \sqrt{3} - (\sqrt{3} - 1)}{2} = 1$;

$x_2 = \frac{1 + \sqrt{3} + (\sqrt{3} - 1)}{2} = \sqrt{3}$.

h) $\Delta = (2\sqrt{2})^2 - 16 = -8 < 0$, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$z_1 = \frac{-2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ et $z_2 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

i) L'équation $(z^2 + 2)(z^2 - 4z + 4) = 0$ s'écrit $(z^2 + 2)(z - 2)^2 = 0$, ce qui est équivalent à $z^2 + 2 = 0$ ou $z - 2 = 0$, soit $z = -i\sqrt{2}$ ou $z = i\sqrt{2}$ ou $z = 2$.

j) Pour $z \neq 2$, l'équation $\frac{z-3}{z-2} = z$ équivaut à $z - 3 = z(z - 2)$, soit $z^2 - 3z + 3 = 0$. $\Delta = -3 < 0$, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{3 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ et } z_2 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

k) $\Delta = 4(1 + \sqrt{2})^2 - 8(\sqrt{2} + 2) = -4$, l'équation admet donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{2(1 + \sqrt{2}) - 2i}{2} = 1 + \sqrt{2} - i \text{ et } z_2 = 1 + \sqrt{2} + i.$$

64 *Corrigé sur le site élève.*

65 **a)** Le discriminant de l'équation

$$z^2 - 2(1 + 2\cos\theta)z + 5 + 4\cos\theta = 0$$

est $\Delta = -16\sin^2(\theta)$.

L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = 1 + 2e^{i\theta} \text{ et } z_2 = 1 + 2e^{-i\theta}.$$

b) Le discriminant de l'équation

$$z^2 - 2(1 + \cos\theta)z + 2(1 + \cos\theta) = 0$$

est $\Delta = -4\sin^2(\theta)$.

L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = 1 + e^{i\theta} \text{ et } z_2 = 1 + e^{-i\theta}.$$

AFFIXE D'UN POINT, AFFIXE D'UN VECTEUR

66 **1.** $z_A = -4 + i$; $z_B = -1 - i$; $z_C = -1 + 3i$; $z_D = 5 - i$.

L'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $3 - 2i$ et celle de $\overrightarrow{CD}$ est $6 - 4i$.

2. affixe$(\overrightarrow{CD}) = 2$ affixe $(\overrightarrow{AB})$ signifie que $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$, donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

67 **2.** ABCD est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, ce qui équivaut à $z_D - a = c - b$, soit :

$$z_D = a + c - b = 1 + 2i + 3 - 2i + 3 + i = 7 + i.$$

68 **1.** $(1 + i)^2 = 2i$; $(1 + i)^4 = (2i)^2 = -4$; $(1 + i)^8 = 16$.

2. Un entier naturel n s'écrit sous la forme $4k$ ou $4k + 1$ ou $4k + 2$ ou $4k + 3$, k entier naturel.

$(1 + i)^{4k} = (-4)^k \in \mathbb{R}$,

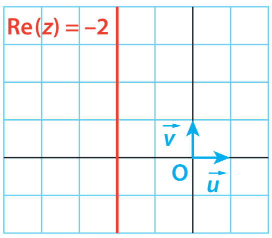
$(1 + i)^{4k+1} = (-4)^k(1 + i)$,

$(1 + i)^{4k+2} = (-4)^k(1 + i)^2 = (-4)^k \cdot 2i$,

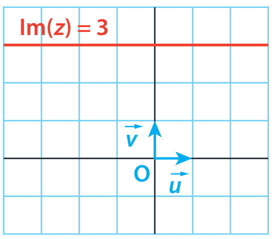
$(1 + i)^{4k+3} = (-4)^k(1 + i)^3 = (-4)^k(-2 + 2i)$.

On déduit que le point M_n d'affixe $(1 + i)^n$ appartient à l'axe des abscisses si, et seulement si, n est multiple de 4.

69 **a)** L'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $\mathrm{Re}(z) = -2$ est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.



b) L'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $\mathrm{Im}(z) = 3$ est une droite parallèle à l'axe des abscisses.



FORME TRIGONOMÉTRIQUE ET NOTATION EXPONENTIELLE

70 **1.** $|a| = |3 - 2i| = \sqrt{13}$;

$|b| = |-3 + 2i| = \sqrt{13}$; $|c| = |2 + 3i| = \sqrt{13}$.

2. On déduit que $OA = OB = OC = \sqrt{13}$. Il en résulte que les points A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{13}$.

71 $|z_1| = |-3 + 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5$,

$|z_2| = |\sqrt{6} - i\sqrt{2}| = \sqrt{6 + 2} = 2\sqrt{2}$,

$|z_3| = |(z_2)^2| = |z_2|^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$,

$|z_4| = |z_1 z_2| = |z_1||z_2| = 5 \cdot 2\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$,

$|z_5| = \left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| = \dfrac{|z_2|}{|z_1|} = \dfrac{2\sqrt{2}}{5}$.

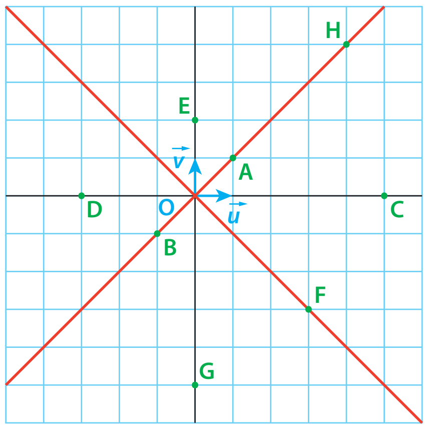
72 $z_A = 1 + i$; $\arg(z_A) = \dfrac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$,

$z_B = -1 + i$; $\arg(z_B) = \dfrac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}$,

$z_C = -1 - i$; $\arg(z_C) = \dfrac{5\pi}{4} \pmod{2\pi}$,

$z_D = 1 - i$; $\arg(z_D) = -\dfrac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$,

73 **1.**



2. A et H appartiennent à la droite d'équation $y = x$ et leurs coordonnées sont positives, donc $\arg(z_A) = \arg(z_H) = \dfrac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$. B est le symétrique de A par rapport à O, donc $\arg(z_B) = \dfrac{5\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

z_C et z_D sont des réels non nuls respectivement positif et négatif, donc $\arg(z_C) = 0 \pmod{2\pi}$ et $\arg(z_D) = \pi \pmod{2\pi}$.

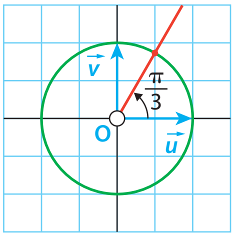
z_E et z_G sont des imaginaires purs dont les parties imaginaires sont respectivement positive et négative, donc $\arg(z_E) = \dfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ et $\arg(z_G) = -\dfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

F appartient à la droite d'équation $y = -x$ et son abscisse est strictement positive donc $\arg(z_F) = -\dfrac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

74 *Corrigé sur le site élève.*

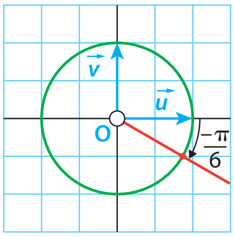
75 **a)**

$\arg(z) = \dfrac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$.



b)

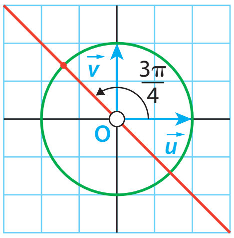
$\arg(z) = -\dfrac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$.



c) $\arg(iz) = \dfrac{5\pi}{4} \pmod{\pi}$ équivaut à :

$$\arg(i) + \arg(z) = \frac{5\pi}{4} \pmod{\pi},$$

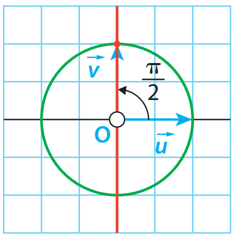
soit $\arg(z) = \dfrac{5\pi}{4} - \arg(i) = \dfrac{5\pi}{4} - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{4} \pmod{\pi}$.



d) $\arg\left(\dfrac{z}{1+i}\right) = \dfrac{\pi}{4} \pmod{\pi}$ équivaut à :

$$\arg(z) - \arg(1+i) = \frac{\pi}{4} \pmod{\pi},$$

soit $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4} + \arg(1+i) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.



76 **a)** $\arg(z) = \arg[(2-2i)(1+i)]$

$$= \arg 2(1-i) + \arg(1+i) = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0.$$

b) $\left|\sqrt{2} + i\sqrt{6}\right| = 2\sqrt{2}$, donc :

$$\sqrt{2} + i\sqrt{6} = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{2}(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)).$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}\arg(z) &= \arg(2i(\sqrt{2} + i\sqrt{6}))\\ &= \arg(2i) + \arg(\sqrt{2} + i\sqrt{6})\\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\\ &= \frac{5\pi}{6}.\end{aligned}$$

c) $\arg(z) = \arg(-3i(1+i))$

$$\begin{aligned}&= \arg(-3i) + \arg(1+i)\\ &= -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

$$\sqrt{3} + i = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = 2(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)), \text{ donc :}$$

$$\arg(z) = \arg\left[\left(\sqrt{3} + i\right)^3\right] = 3\arg(\sqrt{3} + i) = 3 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.$$

77 **a)** $3 + 3i\sqrt{3} = 6\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$.

b) $2 - 2i\sqrt{3} = 4\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 4\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$.

c) $-\sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

d) $2 - 2i = 2(1-i) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

e) $-3i = 3\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.

f) $-5 = 5(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$.

g) $-\dfrac{2}{5} + \dfrac{2i\sqrt{3}}{5} = \dfrac{2}{5}(-1 + i\sqrt{3})$

$$\begin{aligned}&= \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= \frac{4}{5}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right).\end{aligned}$$

h) $\left|\dfrac{3}{1-i}\right| = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$; $\arg\left(\dfrac{3}{1-i}\right) = -\arg(1-i) = \dfrac{\pi}{4}$,

donc $\dfrac{3}{1-i} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

i) $1 - i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$,

$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$,

donc

$$\begin{aligned}(1 - i\sqrt{3})(1+i) &= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right)\\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right).\end{aligned}$$

j) $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$,

$2 - 2i = 2(1-i) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$,

donc

$$\left|\frac{1 + i\sqrt{3}}{2 - 2i}\right| = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

et $\arg\left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2 - 2i}\right) = \dfrac{\pi}{3} - \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{7\pi}{12} \pmod{2\pi}$,

D'où $\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2 - 2i} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)\right)$.

78 **a)** $z_1 = \cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$,

b) $z_2 = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$,

c) $z_3 = \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)$,

d) $z_4 = 7\left(\cos\left(\frac{9\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{7}\right)\right)$,

e) $z_5 = \cos\left(\frac{7\pi}{18}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{18}\right)$.

79 **a)** $z_1 = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{10} = e^{i\frac{10\pi}{4}} = e^{i\frac{5\pi}{2}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}}$, donc

$$z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

b) $\sqrt{2} - i\sqrt{2} = \sqrt{2}(1-i) = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$-\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{6\pi}{7}\right) = e^{i\frac{6\pi}{7}}$

donc $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{6\pi}{7}} = 2e^{i\left(\frac{6\pi}{7}-\frac{\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{17\pi}{28}}$.

D'où $z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{17\pi}{28}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{28}\right)\right)$.

c) $z_3 = (1+i)^{2012}(1-i)^{2013}$

$= \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2012}\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{2013}$

$= 2^{2012}\sqrt{2}e^{i\frac{2012\pi}{4}}e^{-i\frac{2013\pi}{4}}$

$= 2^{2012}\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$= 2^{2012}\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

80 *Corrigé sur le site élève.*

81 **1.** $z^2 = 4\sqrt{3} + 4i$.

2. $|z^2| = 8$. Soit θ un argument de z^2.

On a $\cos(\theta) = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$,

donc $\theta = \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$.

3. $|z|^2 = 8$ donc $|z| = 2\sqrt{2}$.

$\arg(z^2) = 2\arg(z) \pmod{2\pi}$ et $\frac{\pi}{6}$ est un argument de z^2,

donc $\frac{\pi}{12}$ est un argument de z.

4. Une forme trigonométrique de z est :

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right).$$

En utilisant la forme algébrique de z, on obtient :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

82 **1.** « Si $|z| = 1$ alors $\bar{z} = \frac{1}{z}$ ». Cette proposition est vraie.

En effet, $|z|^2 = z\bar{z}$, donc si $|z| = 1$ alors $z\bar{z} = 1$.

D'où $z \neq 0$ et $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

Implication réciproque : « Si $\bar{z} = \frac{1}{z}$ alors $|z| = 1$ » Elle est également vraie.

En effet, si $\bar{z} = \frac{1}{z}$, alors $z\bar{z} = 1$, d'où $|z|^2 = 1$.

Comme $|z| \geqslant 0$, alors $|z| = 1$.

2. « Si $z = z'$ ou $z = -z'$, alors $|z| = |z'|$ ». Cette proposition est vraie. En effet, si $z = z'$ alors $|z| = |z'|$, et si $z = -z'$ alors $|z| = |-z'| = |-1||z'| = |z'|$.

Implication réciproque : « Si $|z| = |z'|$ alors $z = z'$ ou $z = -z'$ ». Elle est fausse.

Contre-exemple :

$$|iz| = |z| \text{ et } (z \neq iz \text{ et } z \neq -iz).$$

3. La proposition « Si $\frac{z}{\bar{z}}$ est réel, alors z est réel ou z est imaginaire pur » est vraie. En effet, si $\frac{z}{\bar{z}}$ est réel alors $\frac{z}{\bar{z}} = \overline{\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)}$; cela implique $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{z}$. D'où $z^2 - (\bar{z})^2 = 0$.

Cette égalité s'écrit $(z - \bar{z})(z + \bar{z}) = 0$. On en déduit que $z = \bar{z}$ ou $z = -\bar{z}$, c'est-à-dire que z est réel ou imaginaire pur.

Implication réciproque : « Si z est réel ou z est imaginaire pur alors $\frac{z}{\bar{z}}$ est réel » Vraie. En effet, Si z est réel, alors $\frac{z}{\bar{z}} = 1$, et si z est imaginaire pur alors $\frac{z}{\bar{z}} = -1$. Dans les deux cas $\frac{z}{\bar{z}}$ est réel.

83 $z_1 = -2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$;

$z_2 = (1-i)e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$;

$z_3 = -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{5}} = \sqrt{2}e^{i\frac{6\pi}{5}}$; $z_4 = \frac{3}{e^{i\frac{\pi}{7}}} = 3e^{-i\frac{\pi}{7}}$;

$z_5 = \frac{-2}{3e^{i\frac{\pi}{5}}} = -\frac{2}{3}e^{-i\frac{\pi}{5}} = \frac{2}{3}e^{i\frac{4\pi}{5}}$;

$z_6 = \frac{3i}{e^{i\frac{2\pi}{5}}} = 3e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\frac{2\pi}{5}} = 3e^{i\frac{\pi}{10}}$.

84 $z_1z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot 3e^{-i\frac{\pi}{4}} = 3e^{i\frac{\pi}{12}}$.

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{3e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{3}e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

$z_1^{\,3} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = e^{i\pi}$.

$z_1z_2z_3 = e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot 3e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot \sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}} = 3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

$z_3^{\,4} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^4 = 4e^{i\frac{8\pi}{3}}$.

$\frac{z_2}{z_3} = \frac{3e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{11\pi}{12}}$.

85 **1.** Forme algébrique :

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2-2i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{(-2-2i)(1-i\sqrt{3})}{4} = \frac{-\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$.

Forme exponentielle :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1-i}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}.$$

2. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{2}$; $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{11\pi}{12} \pmod{2\pi}$.

On conclut que :

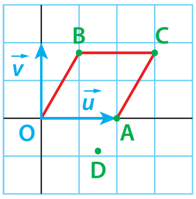
$$\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

86 **1.** $c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$;

$d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$.

2.



$c - b = \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1.$

Donc $a = c - b$; cela signifie que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$. Il en résulte que OACB est un parallélogramme.

D'autre part, $OB = |b| = \left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| =$, donc OA = OB. OACB étant un parallélogramme avec deux côtés consécutifs de même longueur, c'est un losange.

87 *Corrigé sur le site élève.*

88 L'égalité $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$ s'écrit

$\cos(a+b) + i\sin(a+b) = (\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b)$.

En écrivant les égalités entre les parties réelles et les parties imaginaires des deux membres, on obtient :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b).$$

L'égalité $e^{i(a-b)} = e^{ia}e^{-ib}$ s'écrit

$\cos(a-b) + i\sin(a-b) = (\cos a + i\sin a)(\cos(-b) + i\sin(-b))$, soit :

$\cos(a-b) + i\sin(a-b) = (\cos a + i\sin a)(\cos b - i\sin b)$.

En écrivant les égalités entre les parties réelles et les parties imaginaires des deux membres, on obtient :

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b).$$

L'égalité $e^{i2a} = \left(e^{ia}\right)^2$ équivaut à

$$\cos(2a) + i\sin(2a) = (\cos(a) + i\sin(a))^2$$
$$= (\cos^2(a) - \sin^2(a)) + 2i\cos(a)\sin(a).$$

On déduit que :

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$$
$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a).$$

NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE

89 **2.** $z_B - z_A = 1 + 2i + \frac{1}{3} + 2i = \frac{4}{3} + 4i$.

$z_C - z_A = \frac{7}{3} + 6i + \frac{1}{3} + 2i = \frac{8}{3} + 8i$.

On a $z_C - z_A = 2(z_B - z_A)$; cela signifie que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$.

On en déduit que les points A, B et C sont alignés.

90 **a)** $\mathscr{E}$ est l'ensemble des points M d'affixe z non nul tel que :

$$\arg(z) = \frac{5\pi}{4} \quad (\text{mod } 2\pi).$$

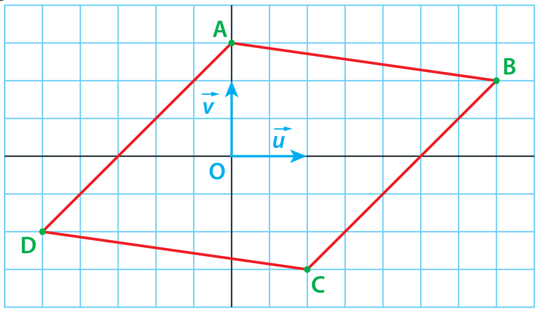
b) $\mathscr{E}$ est l'ensemble des points M d'affixe z non nul tel que :

$$\arg(z) = \frac{3\pi}{4} \quad (\text{mod } \pi).$$

c) $\mathscr{E}$ est l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z| = 2$.

d) $\mathscr{E}$ est l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z| \leqslant 2$.

91 **1.**



2. $z_B - z_A = 3{,}5 + i - 1{,}5i = 3{,}5 - 0{,}5i$.

$z_C - z_D = 1 - 1{,}5i - (-2{,}5 - i) = 3{,}5 - 0{,}5i$.

On a $z_B - z_A = z_C - z_D$, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Il en résulte que ABCD est un parallélogramme. D'autre part,

$AB = |z_B - z_A| = |3{,}5 - 0{,}5i| = \sqrt{12{,}5}$,

$AD = |z_D - z_A| = |-2{,}5 - 2{,}5i| = \sqrt{12{,}5}$.

Donc ABCD est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur. Il en résulte que ABCD est un losange.

92 *Corrigé sur le site élève.*

93 **1. a)** M appartient à Γ si, et seulement si, $|z - (2 - i)| = \sqrt{2}$, ce qui équivaut à $|z - z_A| = \sqrt{2}$. Cela signifie que $AM = \sqrt{2}$.

b) Γ est le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

2. $|z - (2 - i)| = \sqrt{2}$ s'écrit $|z - (2 - i)|^2 = 2$,

ce qui équivaut à $|(x - 2) + (y + 1)i|^2 = 2$,

soit $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2$.

C'est l'équation du cercle de centre A(2 ; – 1) et de rayon $\sqrt{2}$.

94 **1.** Δ est la médiatrice de [AB].

$M(z) \in \Delta$ si, et seulement si, $AM = BM$.

Cela est équivalent à $|z - z_A| = |z - z_B|$, soit

$$|z - (-i)| = |z - 2 - i|.$$

2. Δ' est la médiatrice de [BC].

$M(z) \in \Delta'$ si, et seulement si, $BM = CM$.

Cela est équivalent à $|z - z_B| = |z - z_C|$, soit

$$|z - 2 - i| = |z + 1 - 3i|.$$

3. L'ensemble des points M(z) tels que :

$$|z + i| = |z - 2 - i| = |z + 1 - 3i|$$

est l'intersection des deux médiatrices Δ et Δ'.

95 **1. a)** $M(z) \in \Delta$ si, et seulement si,

$$|z - 1 - 2i| = |z + 2 - i|.$$

Cette égalité s'écrit $|z - z_A| = |z - z_B|$,
ce qui équivaut à $AM = BM$.

b) On conclut que Δ est la médiatrice du segment [AB].

2. L'égalité $|z - 1 - 2i| = |z + 2 - i|$ est équivalente à :

$$|z - 1 - 2i|^2 = |z + 2 - i|^2.$$

En utilisant la forme algébrique de z, elle se traduit par :

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = (x + 2)^2 + (y - 1)^2.$$

Après simplification, on obtient : $3x + y = 0$. Δ est donc une droite dont l'équation réduite est $y = -3x$.

Vérifions que cette droite est la médiatrice de [AB].

Le milieu $I\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ appartient à cette droite.

$\vec{w}(-1 ; 3)$ est un vecteur directeur de Δ. Il est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}(-3;-1)$ car leur produit scalaire est nul.

96 *Corrigé sur le site élève.*

97 **1.** $M(z) \in \Gamma_B$ si, et seulement si, $BM \leqslant OB$, ce qui équivaut à :

$$|z - z_B| \leqslant |z_B|, \text{ soit } |z - 2 - i| \leqslant \sqrt{5}.$$

2. $M(z) \in \Gamma_C$ si, et seulement si, $CM \leqslant OC$, ce qui équivaut à :

$$|z - z_C| \leqslant |z_C|, \text{ soit } |z + 2 - 2i| \leqslant 2\sqrt{2}.$$

3. L'ensemble $\mathscr{E}$ des points $M(z)$ tels que $|z - 2 - i| \leqslant \sqrt{5}$ et $|z + 2 - 2i| \leqslant 2\sqrt{2}$ est l'intersection des deux disques Γ_B et Γ_C. Si A désigne le deuxième point d'intersection des cercles frontières de Γ_B et Γ_C, alors $\mathscr{E}$ est la partie du plan délimitée par les deux arcs d'extrémités O et A.

98 **1.** $z_A = 4i$.

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{3}$ donc $\arg\left(\frac{z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{3}$

(*cf.* exercice 38 page 251 du manuel).

D'autre part, $\left|\frac{z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{OA}{AB} = \frac{4}{4} = 1$. On en déduit que $\frac{z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$, ou encore $\frac{z_B - z_A}{z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$. D'où :

$$z_B = e^{-i\frac{\pi}{3}} z_A + z_A = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)4i + 4i = 2\sqrt{3} + 6i.$$

$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2}$ donc $\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \frac{\pi}{2}$.

D'autre part, $\left|\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right| = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

On déduit que $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}i$.

$$\text{Donc } z_C = \frac{1}{2}i(z_A - z_B) + z_B$$
$$= \frac{1}{2}i(4i - 2\sqrt{3} - 6i) + 2\sqrt{3} + 6i$$
$$= (1 + 2\sqrt{3}) + (6 - \sqrt{3})i.$$

2. a) $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OA}) = \theta$ donc $\arg\left(\frac{z_A}{z_B - z_A}\right) = \theta$.

D'autre part, $\left|\frac{z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{OA}{AB} = \frac{4}{4} = 1$.

On en déduit que $\frac{z_A}{z_B - z_A} = e^{i\theta}$, ou encore $\frac{z_B - z_A}{z_A} = e^{-i\theta}$.

D'où $z_B = e^{-i\theta} z_A + z_A = 4ie^{-i\theta} + 4i$.

D'après la question **1.** : $z_C = \frac{1}{2}i(z_A - z_B) + z_B$. D'où :

$$z_C = \frac{1}{2}i(4i - 4ie^{-i\theta} - 4i) + 4ie^{-i\theta} + 4i$$
$$= 2e^{-i\theta} + 4i + 4ie^{-i\theta}$$
$$= (2 + 4i)(\cos(\theta) - i\sin(\theta)) + 4i.$$

Donc finalement :

$$z_C = (4\sin(\theta) + 2\cos(\theta)) + (4 - 2\sin(\theta) + 4\cos(\theta))i.$$

b) Le bras du robot atteint le point d'affixe $3\sqrt{2} + i(4 + \sqrt{2})$ si et seulement si :

$$\begin{cases} 4\sin(\theta) + 2\cos(\theta) = 3\sqrt{2} \\ 4 - 2\sin(\theta) + 4\cos(\theta) = 4 + \sqrt{2} \end{cases},$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases},$$

c'est-à-dire $\theta = \frac{\pi}{4}$.

EXERCICES DE SYNTHÈSE

99 **1. a)** $\arg(z) = \arg\left(\frac{z}{z'} \cdot z'\right) = \arg\left(\frac{z}{z'}\right) + \arg(z')$,

donc $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \pmod{2\pi}$.

b) D'après **a)**, $\arg\left(\frac{1}{z^2}\right) = \arg(1) - \arg(z^2)$.

Comme $\arg(1) = 0$, alors

$$\arg\left(\frac{1}{z^2}\right) = -\arg(z^2) \pmod{2\pi}.$$

D'autre part, d'après le prérequis,

$$\arg(z^2) = \arg(zz) = \arg(z) + \arg(z) = 2\arg(z),$$

Donc $\arg\left(\frac{1}{z^2}\right) = -2\arg(z) \pmod{2\pi}$.

2. a) On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des points $M'(z')$ d'affixe $z' = \frac{1}{z^2}$ lorsque $M(z)$ décrit la demi-droite d privée de O.

$M' \in \mathscr{E}$ si, et seulement si, $\arg(z) = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$, ce qui équivaut à :

$$\arg(z') = -2\arg(z) = -\frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

Cela signifie que M' appartient à la demi-droite d'origine O et de vecteur $-\vec{w}$ privée de O.

L'ensemble $\mathscr{E}$ est donc la demi-droite d' symétrique de la demi-droite d par rapport à O, privée de O.

b) M' appartient à la demi-droite d signifie que :

$$\arg(z') = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi},$$

ce qui équivaut à $-2\arg(z) = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$,

soit $\arg(z) = -\frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$.

L'ensemble des points M décrit donc la demi-droite d'origine O et de vecteur directeur $\vec{r}$ tel que $(\vec{u}, \vec{r}) = -\dfrac{\pi}{6}$ $(\text{mod } 2\pi)$, privée du point O.

100 On pose $z = x + yi$, avec x et y réels.

$$Z = z^2 - 2(1+i)z = (x+yi)^2 - 2(1+i)(x+yi).$$

On obtient :

$$Z = x^2 - y^2 - 2(x-y) + 2(xy - x - y)i.$$

Donc si M appartient à $\mathscr{C}$, alors $y = \dfrac{x}{x-1}$, d'où :

$$\text{Im}(Z) = 2(xy - x - y) = 2\left(\frac{x^2}{x-1} - x - \frac{x}{x-1}\right) = 0.$$

On en déduit que le point M' d'affixe Z appartient à l'axe des abscisses.

101 **1.** $|z'| = \left|\dfrac{-2}{z}\right| = \dfrac{2}{|z|}$ donc $|z||z'| = 2$.

$$\arg(z') = \arg\left(\frac{-2}{z}\right) = \arg(-2) - \arg(z) = \pi - \arg(z),$$

donc $\arg(z) + \arg(z') = \pi \quad (\text{mod } 2\pi)$.

2. a) M appartient à l'ensemble $\mathscr{D}$ formé du disque de centre O et de rayon 2 privé de O si, et seulement si, $0 < |z| \leqslant 2$ ce qui équivaut à $\dfrac{2}{|z|} \geqslant$, soit $|z'| \geqslant$.

Cela signifie que le point M' n'appartient pas au disque ouvert de centre O et de rayon 1. On en déduit que, lorsque le point M décrit $\mathscr{D}$, l'ensemble des points M' est l'extérieur du disque ouvert de centre O et de rayon 1.

b) $M \in [OA] - \{O\}$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} 0 < |z| \leqslant 2 \\ \arg(z) = \dfrac{\pi}{4} (\text{mod } 2\pi) \end{cases},$$

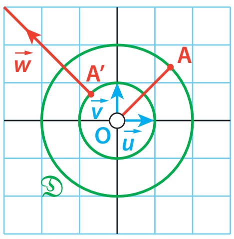
ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} \dfrac{2}{|z|} \geqslant 1 \\ \pi - \arg(z) = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} (\text{mod } 2\pi) \end{cases},$$

soit

$$\begin{cases} |z'| \geqslant 1 \\ \arg(z') = \dfrac{3\pi}{4} (\text{mod } 2\pi) \end{cases}.$$

Cela signifie que le point M' appartient à la demi-droite d'origine le point A' d'affixe $e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et de vecteur directeur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{w}) = \dfrac{3\pi}{4}$.



102 **1. a)** $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$ sont deux nombres complexes avec a, b, a' et b' réels.

$z \cdot z' = (aa' - bb') + (ab' + ba')i$, donc :

$$\overline{(z \cdot z')} = (aa' - bb') - (ab' + ba')i.$$

D'autre part :

$$\bar{z} \cdot \bar{z'} = (a - bi)(a' - b'i) = (aa' - bb') - (ab' + ba')i.$$

On déduit que $\overline{(z \cdot z')} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$.

b) Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n non nul et tout nombre complexe z, $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$.

• *Initialisation :* $\overline{z^1} = (\bar{z})^1$.

• *Hérédité :* supposons que $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$, n étant entier naturel non nul (hypothèse de récurrence HR). On a :

$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \cdot z}$ (définition de la puissance)

$= \overline{z^n} \cdot \bar{z}$ (d'après **1.a)**)

$= (\bar{z})^n \cdot \bar{z}$ (d'après l'hypothèse HR)

$= (\bar{z})^{n+1}$ (définition de la puissance)

• *Conclusion :* la propriété étant vraie pour $n = 1$ et héréditaire, elle est vraie pour tout entier naturel n non nul.

2. a) $(-z)^4 = z^4$, donc si z est solution de l'équation $z^4 = -4$, alors $-z$ l'est aussi.

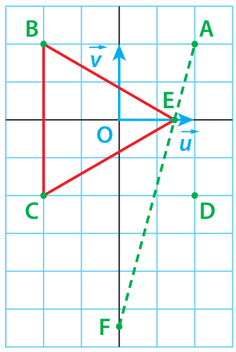
$z^4 = -4$ équivaut à $\overline{(z^4)} = -4$, soit $(\bar{z})^4 = -4$. Donc si z est solution de l'équation $z^4 = -4$, alors $\bar{z}$ l'est aussi.

b) $z_0 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

$z_0{}^4 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = 4e^{i\pi} = -4$, donc z_0 est solution de **(E)**.

c) D'après **a)**, $-z_0 = -1 - i$, $\overline{z_0} = 1 - i$ et $-\overline{z_0} = -1 - i$ sont aussi solutions de l'équation **(E)**.

3. a)



b) $\dfrac{z_B - z_C}{z_E - z_C} = \dfrac{2i}{\sqrt{3} + i} = \dfrac{2i(\sqrt{3} - i)}{4} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Donc

$$\frac{\pi}{3} = \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_E - z_C}\right) = (\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CB})$$

et $\dfrac{CB}{CE} = \dfrac{|z_B - z_C|}{|z_E - z_C|} = \left|\dfrac{z_B - z_C}{z_E - z_C}\right| = \left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 1$.

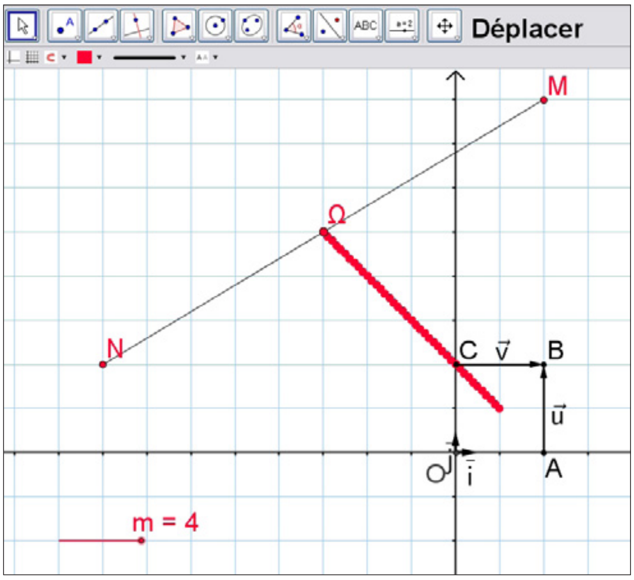
On en déduit que le triangle BCE est équilatéral.

c) $\dfrac{z_A - z_E}{z_A - z_F} = \dfrac{2 - \sqrt{3} + i}{1 + (2 + \sqrt{3})i} = 2 - \sqrt{3}$.

Donc $\dfrac{z_A - z_E}{z_A - z_F}$ est un réel k. Donc $z_A - z_E = k(z_A - z_F)$, ce qui équivaut à $\overrightarrow{EA} = k\,\overrightarrow{FA}$. On déduit que les points A, E et F sont alignés.

AVEC LES TICE

103 **1. a)** à **e)**



f) Le point Ω semble décrire un segment d'extrémité I, milieu de [OB], et passant par C.

2. L'égalité $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AB}$ se traduit par :

$$z_M - z_A = m(z_B - z_A).$$

On obtient $z_M = 4 + 4mi$.

L'égalité $\overrightarrow{CN} = -m\overrightarrow{CB}$ se traduit par :

$$z_N - z_C = -m(z_B - z_C).$$

On obtient $z_N = -4m + 4i$.

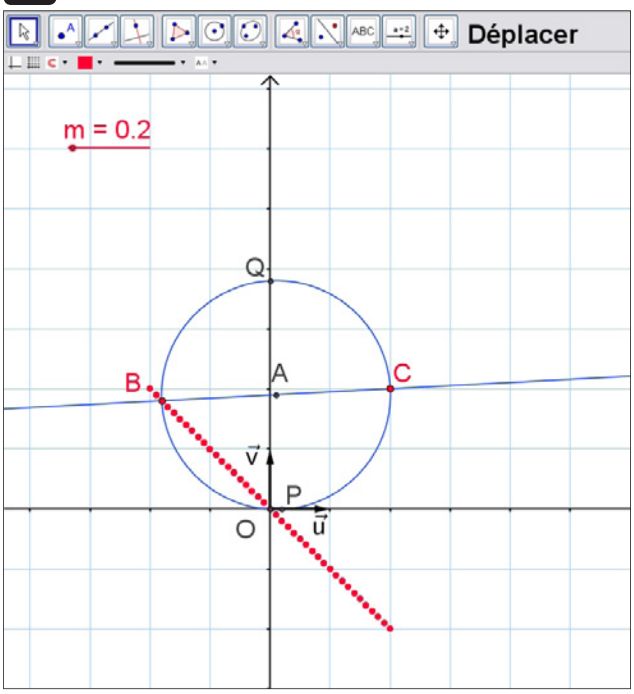
Ω est le milieu de [MN], donc

$$z_\Omega = \frac{z_M + z_N}{2} = (2 - 2m) + (2 + 2m)i.$$

$z_\Omega - z_I = m(-2 + 2i)$ et $z_C - z_I = -2 + 2i$.

Donc $z_\Omega - z_I = m(z_C - z_I)$, cela signifie que $\overrightarrow{I\Omega} = m\,\overrightarrow{IC}$, donc lorsque m parcourt l'intervalle [0 ; 4], le point Ω décrit le segment [IJ] où J est le point défini par $\overrightarrow{IJ} = 4\,\overrightarrow{IC}$.

104 **1.**



2. Lorsque m parcourt l'intervalle [0 ; 4], le point C semble rester fixe et le point B semble décrire un segment passant par O.

3. 1. a)

$$(\vec{u}, \overrightarrow{AC}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AP}) = (\overrightarrow{AP}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

b) Comme

$$(\vec{u}, \overrightarrow{AC}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AP}) = \arg(z_C - z_A) - \arg(z_P - z_A),$$

on obtient :

$$\arg(z_C - z_A) - \arg(z_P - z_A) = \frac{\pi}{2}$$

d'où $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_P - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Comme $AC = AP$, alors $\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_P - z_A}\right| = 1$. Il en résulte que :

$$\frac{z_C - z_A}{z_P - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$$

c) On déduit de ce qui précède que

$$z_C = i(z_P - z_A) + z_A = i\left(m - \frac{m + (4 - m)i}{2}\right) + \frac{m + (4 - m)i}{2}.$$

On trouve $z_C = 2 + 2i$.

Donc l'affixe de z_C ne dépend pas de m. z_C est donc fixe.

2. a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}$ donc $z_B - z_A = z_A - z_C$. D'où $z_B = 2z_A - z_C = m + (4 - m)i - 2 - 2i = (m - 2)(1 - i)$.

b) $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, donc $z_B = (m - 2)\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

• Si $2 < m \leqslant 4$, $|z_B| = (m - 2)\sqrt{2}$ et $\arg(z_B) = -\dfrac{\pi}{4}$.

Dans ce cas le point B décrit le segment [OE] privé de O, et où $z_E = 2 - 2i$.

• Si $0 \leqslant m \leqslant 2$,

$$z_B = -(2 - m)\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = (2 - m)\sqrt{2}e^{i\pi}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

On obtient $z_B = (2 - m)\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Dans ce cas, lorsque $m \neq 2$, $|z_B| = (2 - m)\sqrt{2}$ et $\arg(z_B) = \dfrac{3\pi}{4}$. Le point B décrit donc le segment [OF] privé de O, où $z_F = -2 + 2i$.

• Si $m = 2$, $z_B = 0$. Donc B = O.

En conclusion, lorsque m parcourt l'intervalle $[0\,;4]$, le point B décrit le segment [EF] avec $z_E = 2 - 2i$ et $z_F = -2 + 2i$.

Prendre toutes les initiatives

105 Il faut d'abord que $z \neq z^2$, $z \neq z^3$ et $z^2 \neq z^3$, soit $z \neq 0$, $z \neq -1$ et $z \neq 1$.

MNP est rectangle en P si, et seulement si, $\dfrac{z - z^3}{z^2 - z^3}$ est imaginaire pur (*cf.* exercice **A. 3. a)** du TD 38 page 251 du manuel). Comme $z \neq 0$ et $z \neq 1$, la condition ci-dessus est équivalente à « $\dfrac{1 + z}{z}$ est imaginaire pur ».

Cela signifie que $\dfrac{1+z}{z} = -\dfrac{1+\bar{z}}{\bar{z}}$, soit $z\bar{z} + \mathrm{Re}(z) = 0$.
En posant $z = x + yi$, cette égalité s'écrit :

$$x^2 + y^2 + x = 0\text{, soit } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$

C'est l'équation du cercle de centre A d'affixe $-\dfrac{1}{2}$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

En conclusion, MNP est rectangle en P si, et seulement si, M appartient au cercle de centre A d'affixe $-\dfrac{1}{2}$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$ privé des points d'affixes –1 et 0.

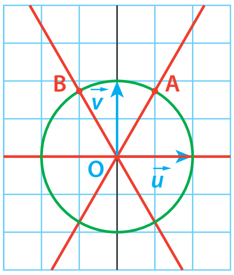
106 Remarquons d'abord que si $z = 0$, z^3 est réel, donc l'origine O du repère appartient à l'ensemble recherché.
Pour $z \neq 0$, z^3 est réel si, et seulement si, $\arg(z^3) = k\pi$ avec k entier relatif, ce qui équivaut à $\arg(z) = \dfrac{k\pi}{3}$. On obtient trois possibilités :

• $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{3}$ ou $\dfrac{\pi}{3}$: il s'agit de la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{OA}$ avec $z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$, privée de O ;

• $\arg(z) = 0$ ou π : il s'agit de l'axe des abscisses, privé de O ;

• $\arg(z) = -\dfrac{2\pi}{3}$ ou $\dfrac{2\pi}{3}$: il s'agit de la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{OB}$ avec $z_B = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, privée de O.

En conclusion, l'ensemble recherché est la réunion des trois droites de la figure ci-après.



107 z_1 et z_2 sont de module 1 et d'arguments respectifs α et β, donc ils s'écrivent respectivement $e^{i\alpha}$ et $e^{i\beta}$.

$$\begin{aligned}\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2} &= \frac{(e^{i\alpha}+e^{i\beta})^2}{e^{i\alpha}e^{i\beta}}\\ &= \frac{e^{i2\alpha}+2e^{i(\alpha+\beta)}+e^{i2\beta}}{e^{i(\alpha+\beta)}}\\ &= e^{i(\alpha-\beta)} + 2 + e^{i(\beta-\alpha)}\\ &= e^{i(\alpha-\beta)} + \overline{\left(e^{i(\alpha-\beta)}\right)} + 2\\ &= 2\cos(\alpha-\beta) + 2\\ &= 2(\cos(\alpha-\beta)+1).\end{aligned}$$

Comme $-1 \leqslant \cos(\alpha-\beta) \leqslant 1$, on déduit de ce qui précède que $\dfrac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2}$ est un réel positif ou nul.

EXERCICES Le jour du BAC (page 259)

108 *Corrigé sur le site élève.*

109 **1.** AD = AE donc $\left|\dfrac{z_E - z_A}{z_D - z_A}\right| = 1$.

$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) = \dfrac{\pi}{3}$ donc $\arg\left(\dfrac{z_E - z_A}{z_D - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{3}$. On en déduit que $\dfrac{z_E - z_A}{z_D - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$, d'où

$$z_E = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_D - z_A) + z_A = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1-i) + i.$$

On trouve finalement $z_E = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)$.

2. $z_{D'} = \dfrac{2-i}{i+1} = \dfrac{(2-i)(1-i)}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}i$.

$$\begin{aligned}(z'+2i)(z-i) &= \left(\frac{2z-i}{iz+1} + 2i\right)(z-i)\\ &= \left(\frac{2z-i+2i(iz+1)}{iz+1}\right)(z-i)\\ &= \frac{i}{iz+1}(z-i) = 1.\end{aligned}$$

Donc, $|(z'+2i)(z-i)| = 1$

et $\arg[(z'+2i)(z-i)] = 0 \pmod{2\pi}$,

soit $|z' - z_B||z - z_A| = 1$

et $\arg(z' - z_B) + \arg(z - z_A) = k \cdot 2\pi$,

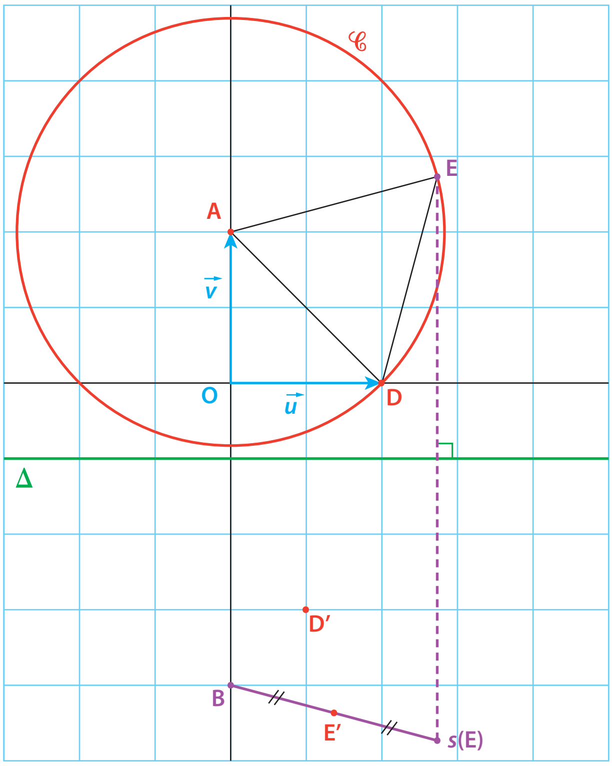
où k est entier relatif. Donc BM'$\cdot$ AM = 1

et $(\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) + k \cdot 2\pi$.

3. a) $AD = |z_D - z_A| = |1 - i| = \sqrt{2}$ et, comme ADE est équilatéral, on a $AE = AD = \sqrt{2}$. On en déduit que les points D et E appartiennent au cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

b) D'après **2. b)**, $BE' = \dfrac{1}{AE} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{AE}{2}$

et $(\vec{u}, \overrightarrow{BE'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AE}) + k \cdot 2\pi$. On utilise la symétrie axiale d'axe Δ, médiatrice de [AB].



4. $BD' = \dfrac{1}{AD}$ et $BE' = \dfrac{1}{AE}$. Comme $AD = AE$, alors $BD' = BE'$. D'autre part,

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{BD'},\overrightarrow{BE'}) &= (\vec{u},\overrightarrow{BE'}) - (\vec{u},\overrightarrow{BD'})\\ &= -(\vec{u},\overrightarrow{AE}) + (\vec{u},\overrightarrow{AD})\\ &= (\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})\\ &= -\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

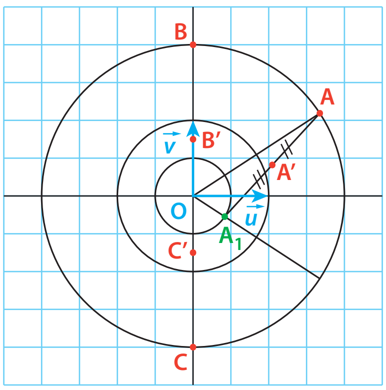
Il s'ensuit que BD'E' est équilatéral.

110 **1.a)** $OM_1 = \left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|} = \dfrac{1}{OM}$, donc $OM \cdot OM_1 = 1$.

D'autre part,

$$\begin{aligned}(\vec{u},\overrightarrow{OM_1}) &= \arg\left(\frac{1}{z}\right) && (\text{mod } 2\pi)\\ &= -\arg(z) && (\text{mod } 2\pi)\\ &= -(\vec{u},\overrightarrow{OM}) && (\text{mod } 2\pi).\end{aligned}$$

b)



2. a) L'affixe de M_1 est $z_1 = \dfrac{1}{z}$.

M' est le milieu de $[MM_1]$, donc

$$z' = \frac{z + z_1}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

b) $z_{B'} = \dfrac{1}{2}\left(2i + \dfrac{1}{2i}\right) = \dfrac{3}{4}i$,

$z_{C'} = \dfrac{1}{2}\left(-2i - \dfrac{1}{2i}\right) = -\dfrac{3}{4}i$.

3. Le point M' est confondu avec le point M si, et seulement si, $z' = z$, ce qui équivaut à $z = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$, soit $z = -1$ ou $z = 1$. Il en découle que l'ensemble des points M tels que $M' = M$ est constitué des deux points d'affixes – 1 et 1.

4. Si M appartient au cercle de centre O et de rayon 1, alors son affixe s'écrit $e^{i\theta}$ avec θ réel. Dans ce cas,

$$z' = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}}\right) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}).$$

Comme $e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$,

$$z' = \frac{1}{2} \cdot 2\,\mathrm{Re}(e^{i\theta}) = \cos(\theta).$$

$\cos(\theta)$ est un réel de l'intervalle $[-1\,;1]$, donc le point M' appartient au segment [KL] où K et L sont les points d'affixes respectives – 1 et 1.

111 **A.1.** $z_A = -\dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$,

$z_B = \overline{z_A} = \sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

3. $BA = |z_A - z_B| = |z_A - \overline{z_A}| = |2i\,\mathrm{Im}(z_A)| = \sqrt{3}$.

$CA = |z_A - z_C| = \left|\dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{3}$.

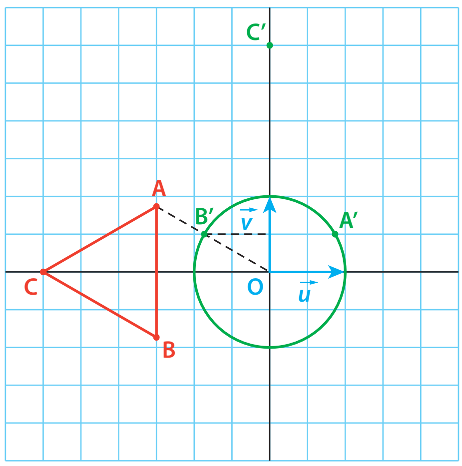
C est un point de l'axe des abscisses, et B et A sont symétriques par rapport à cet axe, donc $CB = CA = \sqrt{3}$. Il en résulte que les trois côtés du triangle ABC ont la même longueur. On en déduit que ABC est équilatéral.

B. 1. a) $z_{A'} = \dfrac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^2 = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{13\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{6}}$,

$z_{B'} = \dfrac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right)^2 = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{3}\right)} = e^{-i\frac{7\pi}{6}} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$,

$z_{C'} = \dfrac{1}{3}i(-3)^2 = 3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$.

b)



c) $z_A = \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}} = \sqrt{3}\,z_{B'}$, donc $\overrightarrow{OA} = \sqrt{3}\,\overrightarrow{OB'}$, ce qui entraîne que les points O, A et B' sont alignés.

$$z_B = \sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}} = \sqrt{3}e^{i\left(-\pi+\frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{3}e^{-i\pi}e^{i\frac{\pi}{6}} = -\sqrt{3}\,z_{A'}.$$

Cela signifie que $\overrightarrow{OB} = -\sqrt{3}\,\overrightarrow{OA'}$, donc les points O, B et A' sont alignés.

2. L'équation de la droite (AB) est $x = -\dfrac{3}{2}$.

Si M(z) appartient à (AB) alors $z = -\dfrac{3}{2} + yi$.

L'image M' par f a pour affixe

$$z' = \frac{1}{3}iz^2 = \frac{1}{3}i\left(-\frac{3}{2} + yi\right)^2 = y + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}y^2\right).$$

Si on désigne par X et Y respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de z', alors $X = y$ et $Y = -\dfrac{1}{3}y^2 + \dfrac{3}{4}$.

D'où $Y = -\dfrac{1}{3}X^2 + \dfrac{3}{4}$. Cela veut dire que si M est un point de la droite (AB), alors le point M' appartient à la parabole d'équation

$$Y = -\frac{1}{3}X^2 + \frac{3}{4}.$$

112 **1.** Si $z = 1 - 2i + e^{i\theta}$, alors $|z - (1 - 2i)| = |e^{i\theta}| = 1$, donc M appartient au cercle de centre A d'affixe $1 - 2i$ et de rayon 1.

Réciproquement, si M est un point de ce cercle, alors $|z - z_A| = 1$ et $\arg(z - z_A) = \theta$ avec $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) \pmod{2\pi}$. Donc $z - z_A = e^{i\theta}$. D'où $z = 1 - 2i + e^{i\theta}$.

Réponse exacte : **c)**.

2. $-i(-1 - 2i) - 2i = -2 - i \neq i$, donc la proposition **a)** est fausse.

$-i(-1 - i) - 2i = -1 - i$, donc la proposition **b)** est exacte.

$z' = -i(z + 2)$, donc $|z'| = |-i(z + 2)| = |-i||z + 2| = |z + 2|$, d'où si $|z'| = 1$, alors $|z + 2| = 1$. On en déduit que M appartient au cercle de centre d'affixe -2 et de rayon 1. La proposition **c)** est donc exacte.

$z' = -i(z + 2)$ équivaut à $z = i(z' + 2i)$. On a :

$$\arg(z) = \arg(i) + \arg(z' + 2i) = \frac{\pi}{2} + \arg(z' - (-2i)).$$

On en déduit que $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2}$ si, et seulement si, $\arg(z' - (-2i)) = 0$, soit $(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) = 0 \pmod{2\pi}$ avec $z_A = -2i$.

M' décrit donc la demi-droite d'équation $\begin{cases} y = -2 \\ x > 0 \end{cases}$.

La proposition **d)** est donc exacte.

3. • Avec $z = x + i$, l'équation $z + |z|^2 = 7 + i$ s'écrit $x + i + x^2 + 1 = 7 + i$, soit $x^2 + x - 6 = 0$.

$\Delta = 25 > 0$, donc cette équation admet deux solutions réelles -3 et 2.

Il en résulte que lorsque $z = x + i$, l'équation :

$$z + |z|^2 = 7 + i$$

admet deux solutions distinctes $-3 + i$ et $2 + i$.

La proposition **a)** est donc exacte.

• Avec $z = x + 2i$, l'équation $z + |z|^2 = 7 + i$ s'écrit $x + 2i + x^2 + 4 = 7 + i$, soit $(x^2 + x - 3) + i = 0$.

Cette équation n'a pas de solution x réelle. Il en résulte que lorsque $z = x + 2i$, l'équation $z + |z|^2 = 7 + i$ n'a pas de solution.

La proposition **b)** est donc fausse.

• L'équation $z + |z|^2 = 7 + i$ s'écrit $z = (7 - |z|^2) + i$, donc si z est solution alors $\text{Im}(z) = 1$. On a montré dans le premier point du **3.** que dans ce cas l'équation admet deux solutions, $z_1 = -3 + i$ et $z_2 = 2 + i$. D'où

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-3 + i}{2 + i} = -1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

La proposition **c)** est donc exacte.

113 **1. a)** $z_{A'} = (1 - i)^2 - 4(1 - i) = -4 + 2i$.

$z_{B'} = (3 + i)^2 - 4(3 + i) = -4 + 2i$.

b) Si les points $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ ont la même image par f, alors $z_1^2 - 4z_1 = z_2^2 - 4z_2$, ce qui équivaut à $(z_1 - z_2)(z_1 + z_2 - 4) = 0$. Cela signifie que $z_1 = z_2$ ou $z_1 + z_2 = 4$. Cette dernière égalité s'écrit $\dfrac{z_1 + z_2}{2} = 2$.

Ce nombre est l'affixe du milieu de $[M_1M_2]$. On en déduit que, si deux points ont la même image par f, alors ils sont confondus ou l'un est l'image de l'autre par la symétrie centrale de centre d'affixe 2.

2. a) OMIM' est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{MI}$, ce qui équivaut à $z' = -3 - z$, ou encore $z^2 - 4z = -3 - z$, soit $z^2 - 3z + 3 = 0$.

b) $\Delta = -3 < 0$, donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{3 - i\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2}.$$

3. a) $z' + 4 = z^2 - 4z + 4 = (z - 2)^2$.

On en déduit que $|z' + 4| = |z - 2|^2$

et $\arg(z' + 4) = \arg\left[(z - 2)^2\right] = 2\arg(z - 2) \pmod{2\pi}$.

b) L'égalité $|z' + 4| = |z - 2|^2$ signifie que $KM' = JM^2$, donc si M appartient au cercle de centre J et de rayon 2, alors $KM' = JM^2 = 2^2 = 4$; cela signifie que M' appartient au cercle de centre K et de rayon 4.

c) $z_E + 4 = -3i = 3\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$,

donc $|z_E + 4| = 3$ et $\arg(z_E + 4) = -\dfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

D'après **3. a)**, z_E est l'image de M(z) par f si, et seulement si, $|z - 2|^2 = 3$ et $2\arg(z - 2) = -\dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, avec k entier relatif.

Cela signifie que $|z - 2| = \sqrt{3}$ et $\arg(z - 2) = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

On obtient deux solutions,

$$z = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{4}} + 2 = 2 + \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$$

ou $z = \sqrt{3}e^{i\frac{3\pi}{4}} + 2 = 2 - \dfrac{\sqrt{6}}{2} + \dfrac{\sqrt{6}}{2}i$.

114 **a)** $z' = \left(\dfrac{z}{|z|}\right)^2 = \dfrac{(x + iy)^2}{x^2 + y^2} = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}i$.

La proposition **a)** est vraie.

b) z' est réel si, et seulement si, $2xy = 0$ et $(x; y) \neq (0;0)$, soit ($x = 0$ ou $y = 0$) et $(x; y) \neq (0;0)$. Cela équivaut à « M appartient à l'union de l'axe des ordonnées avec l'axe des abscisses privé de O ».

La proposition **b)** est donc fausse.

c) $(1+i)^2 = 2i$, $(1+i)^4 = -4$, $(1+i)^8 = 16$, donc l'image M de $(1+i)^8$ appartient à l'axe des abscisses. On déduit, d'après **b)**, que $f\left[(1+i)^8\right]$ est réel.

La proposition **c)** est donc vraie.

d) On pose $z = re^{i\theta}$ avec $r = |z|$. M et M' sont confondus si, et seulement si, $\left(\frac{re^{i\theta}}{r}\right)^2 = re^{i\theta}$, ce qui équivaut à $e^{2i\theta} = re^{i\theta}$, soit $e^{i\theta} = r$. Cela signifie que $r = 1$ et $\theta = 0 \pmod{2\pi}$. Autrement dit, $z = 1$.

La proposition **d)** est donc vraie.

115 **1.** $2(3+i) + (3-i) = 9 + i$.

Réponse exacte : **c)**.

2. $|i\bar{z} + 1| = |i(\bar{z} - i)| = |\bar{z} - i| = |\overline{z - i}| = |z + i|$.

Réponse exacte : **c)**.

3. $-1 - i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

$$\arg\left(-\frac{1+i\sqrt{3}}{\bar{z}}\right) = \arg(-1-i\sqrt{3}) - \arg(\bar{z}) = -\frac{2\pi}{3} + \arg(z).$$

Réponse exacte : **b)**.

4. $\sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$, donc

$$\arg\left[\left(\sqrt{3}+i\right)^{6k+3}\right] = (6k+3)\frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Cela signifie que $\left(\sqrt{3}+i\right)^{6k+3}$ est imaginaire pur.

Réponse exacte : **b)**.

5. $|z - i| = |z + 1|$ signifie que $AM = BM$, ce qui équivaut à M est un point de la médiatrice du segment [AB].

Réponse exacte : **c)**.

6. $|z - 1 + i| = |3 - 4i|$, équivaut à $|z - z_\Omega| = 5$. Il s'agit donc du cercle de centre Ω et de rayon 5.

Réponse exacte : **c)**.

EXERCICES Pour aller plus loin (page 262)

116 **1. a)** $r_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n r_0$.

b) $\theta_n = \theta_0 + \left(\frac{2\pi}{3}\right)n$.

c) $|z_0z_1z_2| = r_0r_1r_2 = r_0\left(\frac{2}{3}r_0\right)\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 r_0\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 r_0^3$,

donc $\frac{8}{27}r_0^3 = 8$; on en déduit que $r_0 = 3$, $r_1 = 2$ et $r_2 = \frac{4}{3}$.

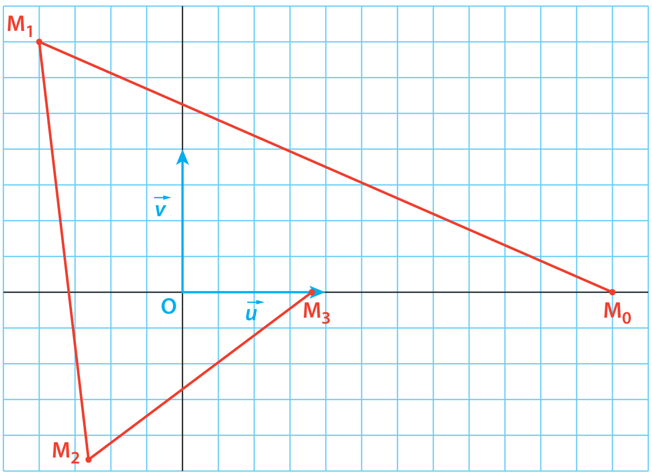
$\arg(z_0z_1z_2) = \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 3\theta_0 + 3\cdot\frac{2\pi}{3} = 3\theta_0 + 2\pi \pmod{2\pi}$, donc $z_0z_1z_2 = 8$ implique $3\theta_0 = k\cdot 2\pi$ avec k entier relatif, soit $\theta_0 = \frac{k\cdot 2\pi}{3}$.

Comme θ_0 appartient à $\left[0\,;\frac{\pi}{3}\right[$, on a $\theta_0 = 0$.

D'où $\theta_1 = \frac{2\pi}{3}$ et $\theta_2 = \frac{4\pi}{3}$. Il en résulte que

$$z_0 = 3,\ z_1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ et } z_2 = \frac{4}{3}e^{i\frac{4\pi}{3}}.$$

2. a) N.B. : L'échelle demandée a été ici réduite de moitié.



b) $z_{n+1} - z_n = r_{n+1}e^{i\theta_{n+1}} - r_ne^{i\theta_n}$

$$= \frac{2}{3}r_ne^{i\left(\theta_n + \frac{2\pi}{3}\right)} - r_ne^{i\theta_n}$$

$$= r_ne^{i\theta_n}\left(\frac{2}{3}e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1\right)$$

$$= r_ne^{i\theta_n}\left(-\frac{4}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right),$$

donc $M_nM_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = \frac{\sqrt{19}}{3}r_n = \frac{\sqrt{19}}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n r_0$.

On obtient $M_nM_{n+1} = \sqrt{19}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

$$I_n = \sum_{k=0}^{n} M_kM_{k+1}$$

$$= \sqrt{19}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Donc $I_n = \sqrt{19}\,\dfrac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 3\sqrt{19}\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(I_n) = 3\sqrt{19}$.

117 **A. 1.** $z_1 = az_0 = 3 + 3i\sqrt{3}$

$a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$.

2. $|z_1| = |3 + 3i\sqrt{3}| = 3|1 + i\sqrt{3}| = 6$, donc

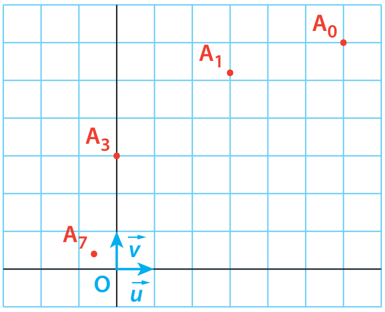
$$z_1 = 6\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 6e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

$$a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

3. a) $z_3 = a^2 z_1 = \left(\dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(6e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = 3e^{i\frac{\pi}{2}} = 3i$.

$z_7 = a^6 z_1 = \left(a^2\right)^3 z_1 = \left(\dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3\left(6e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \dfrac{3}{4}e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

b) N.B. : L'échelle demandée est ici exacte.



B. 1. a) $\left|a^2\right| = \dfrac{1}{2}$, donc $|a| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\left|z_1\right| = |a|\left|z_0\right|$, donc $\left|z_0\right| = \dfrac{\left|z_1\right|}{|a|} = \dfrac{6}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{12}{\sqrt{2}}$.

$r_n = \left|z_n\right| = \left|a^n z_0\right| = |a|^n\left|z_0\right| = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \cdot \dfrac{12}{\sqrt{2}} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot 12$.

On obtient $r_n = 12\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$.

b) On en déduit que (r_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $6\sqrt{2}$.

2. La raison de la suite géométrique (r_n) étant comprise strictement entre – 1 et 1, la suite converge vers 0.
Cela signifie que la distance $OM_n = r_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers plus l'infini.

3. $OA_p \leqslant 10^{-}$ si, et seulement si,

$$r_p = 12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{p+1} \leqslant 10^{-3},$$

ce qui équivaut à $\ln(12) + (p+1)\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \leqslant \ln(10^{-3})$,

soit $p \geqslant \dfrac{\ln(12) + 3\ln(10)}{\ln(\sqrt{2})} - 1 \approx 26{,}1$.

Donc le plus petit entier naturel p tel que $OA_p \leqslant 10^{-3}$ est $p = 27$.

$\arg(z_{27}) = \arg(a^{26}z_1) = 13\arg(a^2) + \arg(z_1)$.

Comme $\arg(a^2) = \dfrac{\pi}{6}$ et $\arg(z_1) = \dfrac{\pi}{3}$, alors

$$\arg(z_{27}) = \frac{13\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\text{, soit } \arg(z_{27}) = \frac{\pi}{2}\,(\text{mod } 2\pi).$$

On en déduit que

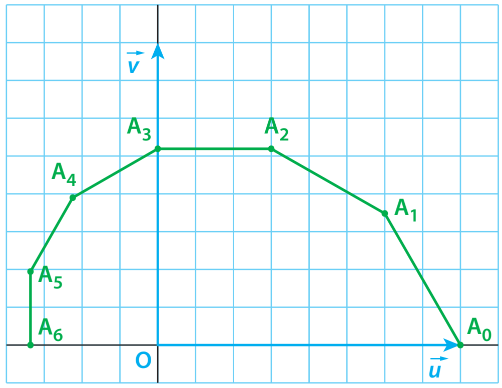
$$(\vec{u}, \overrightarrow{OA_{27}}) = \frac{\pi}{2} \quad (\text{mod } 2\pi).$$

118 **1. a)** $z_1 = \dfrac{3}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}}{4}$; $z_2 = \dfrac{3}{8} + \dfrac{3\sqrt{3}}{8}i$;

$z_3 = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}i$; $z_4 = -\dfrac{9}{32} + \dfrac{9\sqrt{3}}{32}i$;

$z_5 = \dfrac{-27}{64} + \dfrac{9\sqrt{3}}{64}i$; $z_6 = -\dfrac{27}{64}$.

b) N.B. : L'échelle demandée a été ici réduite de moitié.



2. a) Pour tout entier naturel n non nul,

$$z_{n+1} - z_n = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z_n - \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z_{n-1}$$
$$= \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(z_n - z_{n-1}).$$

b) On en déduit que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$d_n = \left|z_{n+1} - z_n\right| = \left|\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right|\left|z_n - z_{n-1}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}d_{n-1}.$$

En raisonnant par récurrence, on peut dire que pour tout entier $n \geqslant 1$, $d_n = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n d_0$.

c) $d_n = \left|z_{n+1} - z_n\right| = A_nA_{n+1}$.

d) La suite (d_n) est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et de premier terme $d_0 = \left|z_1 - z_0\right| = \left|\dfrac{3}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}}{4} - 1\right| = \dfrac{1}{2}$, donc

$$L_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_K A_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} d_k = \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}d_0 = \frac{2\left[1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right]}{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}.$$

On obtient $L_n = \left(1 - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)(2 + \sqrt{3})$.

$\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$, donc la suite (L_n) converge vers $2 + \sqrt{3}$.

3. a) $\dfrac{3}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

$$a_n = \arg(z_n) = \arg\left[\left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z_{n-1}\right]$$
$$= \arg\left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \arg(z_{n-1})$$
$$= \frac{\pi}{6} + a_{n-1} \quad (\text{mod } 2\pi).$$

(a_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{\pi}{6}$ et de premier terme $a_0 = \arg(z_0) = 0$, donc $a_n = \dfrac{n\pi}{6}$ $(\text{mod } 2\pi)$.

b) O, A_0 et A_n sont alignés si et seulement si le point A_n appartient à l'axe des abscisses, ce qui équivaut à $\dfrac{n\pi}{6} = k\pi$ avec k entier relatif, soit $n = 6k$. Les points O, A_0 et A_n sont alignés si, et seulement si, n est un multiple de 6.

119 **1. a)** En utilisant les propriétés du conjugué, on a

$$P(\overline{\alpha}) = (\overline{\alpha})^4 - 6(\overline{\alpha})^3 + 23(\overline{\alpha})^2 - 34\overline{\alpha} + 26$$
$$= \overline{(\alpha^4 - 6\alpha^3 + 23\alpha^2 - 34\alpha + 26)}$$
$$= \overline{P(\alpha)}.$$

b) Il en résulte que, si $P(\alpha) = 0$, alors $P(\overline{\alpha}) = 0$.

2. a) On trouve $P(1+i) = 0$.

b) On en déduit que $P(1-i) = 0$. D'où $1-i$ et $1+i$ sont solutions de l'équation $P(z) = 0$.

3. a) $Q(z) = [z-(1+i)][z-(1-i)] = z^2 - 2z + 2$.
Posons $Q_1(z) = az^2 + bz + c$. On a :

$$Q(z)Q_1(z) = az^4 + (-2a+b)z^3 + (2a - 2b + c)z^2 + (2b - 2c)z + 2c.$$

Pour avoir, pour tout nombre complexe z, $P(z) = Q(z)Q_1(z)$, on prend a, b et c tels que $a = 1$, $-2a + b = -6$, $2a - 2b + c = 23$, $2b - 2c = -34$ et $2c = 26$, soit

$$a = 1,\ b = -4 \text{ et } c = 13.$$

Il en résulte que

$$P(z) = Q(z)(z^2 - 4z + 13).$$

b) L'équation $P(z) = 0$ équivaut à $Q(z) = 0$, ou $z^2 - 4z + 13 = 0$. Les solutions de $Q(z) = 0$ sont $1-i$ et $1+i$. Le discriminant de la deuxième équation est $\Delta = -36$, elle admet donc deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{4 - i\sqrt{36}}{2} = 2 - 3i \text{ et } z_2 = 2 + 3i.$$

En conclusion, l'équation $P(z) = 0$ admet trois solutions :

$$1-i,\ 1+i,\ 2-3i \text{ et } 2+3i.$$

120 **1.** Pour $z \neq 1$, on a :

$$Z + \overline{Z} = \frac{5z-2}{z-1} + \frac{5\overline{z}-2}{\overline{z}-1}$$
$$= \frac{(5z-2)(\overline{z}-1) + (z-1)(5\overline{z}-2)}{(z-1)(\overline{z}-1)}$$
$$= \frac{10z\overline{z} - 7z - 7\overline{z} + 4}{z\overline{z} - z - \overline{z} + 1}$$
$$= \frac{10|z|^2 - 7(z+\overline{z}) + 4}{|z|^2 - (z+\overline{z}) + 1}.$$

2. Le point M' appartient à l'axe des ordonnées si, et seulement si, $Z + \overline{Z} = 0$, ce qui équivaut à $10|z|^2 - 7(z+\overline{z}) + 4 = 0$ et $z \neq 1$. En utilisant $z = x + iy$ avec x et y réels, cette condition s'écrit :

$$10(x^2+y^2) - 7(2x) + 4 = 0 \text{ et } (x;y) \neq (1;0),$$

ce qui équivaut à $x^2 + y^2 - \frac{7}{5}x + \frac{2}{5} = 0$ et $(x;y) \neq (1;0)$, soit

$$\left(x - \frac{7}{10}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{100} \text{ et } (x;y) \neq (1;0).$$

Comme les coordonnées $(1;0)$ vérifient cette équation, il s'agit donc de l'équation du cercle de centre $A(\frac{7}{10};0)$ et de rayon $\frac{3}{10}$ privé du point de coordonnées $(1;0)$.

121 **1.** Pour $z \neq -1$, on a

$$\overline{Z} = \frac{-2i\overline{z} + i}{\overline{z}+1}.$$

2. a) $Z\overline{Z} = |Z|^2$, donc $Z\overline{Z} = 1$ équivaut à $|Z|^2 = 1$. Comme $|Z| \geqslant 0$, cette dernière condition est équivalente à $|Z| = 1$. En définitive, $Z\overline{Z} = 1$ équivaut à $|Z| = 1$.

b) $|Z| = 1$ équivaut à $Z\overline{Z} = 1$. En utilisant la définition de Z, cette égalité s'écrit

$$\left(\frac{2iz - i}{z+1}\right)\left(\frac{-2i\overline{z} + i}{\overline{z}+1}\right) = 1, \text{ soit } z\overline{z} - z - \overline{z} = 0.$$

En utilisant la forme algébrique de z, cette égalité s'écrit $x^2 + y^2 - 2x = 0$, soit $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Comme le couple $(-1;0)$ ne vérifie pas cette équation, on conclut que l'ensemble $\mathscr{E}_1$ des points M d'affixe z tels que $|Z| = 1$ est le cercle de centre $A(1;0)$ et de rayon 1.

3. a) $Z + \overline{Z} = 0$ si, et seulement si, $2\,\mathrm{Re}(Z) = 0$, ce qui équivaut à $\mathrm{Re}(Z) = 0$. Ainsi, Z est imaginaire pur.

b) Pour $z \neq -1$, l'égalité $Z = -\overline{Z}$ s'écrit

$$\frac{2iz - i}{z+1} = -\frac{-2i\overline{z} + i}{\overline{z}+1},$$

ce qui équivaut à $(2iz - i)(\overline{z}+1) = (z+1)(2i\overline{z} - i)$, soit $z = \overline{z}$.

Il en résulte que l'ensemble $\mathscr{E}_2$ des points M d'affixe z tels que Z est imaginaire pur est l'axe des abscisses.

PROLONGEMENT DU TD 38

122 **1. a)**

$$\alpha^2 - 4\alpha = (1 + i\sqrt{3})^2 - 4(1 + i\sqrt{3}) = -6 - 2i\sqrt{3}.$$

D'autre part,

$$2\overline{\alpha} - 8 = 2(1 - i\sqrt{3}) - 8 = -6 - 2i\sqrt{3}.$$

On en déduit que $\alpha^2 - 4\alpha = 2\overline{\alpha} - 8$.

b) $OB = |z_B| = |\alpha| = |1 + i\sqrt{3}| = 2 = OA$.
$OC = |z_C| = |\overline{\alpha}| = |\alpha| = OA$, donc les points B et C appartiennent au cercle de centre O et passant par A.

2. $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}) = \frac{\pi}{3}$ équivaut à $\arg\left(\frac{z_E}{z_D}\right) = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$.

Comme $OD = OE$, alors $\left|\frac{z_E}{z_D}\right| = 1$.

On déduit que $\frac{z_E}{z_D} = e^{i\frac{\pi}{3}}$, soit

$$z_E = z_D e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\theta}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = e^{i\theta}(1 + i\sqrt{3}) = \alpha z_D.$$

3. a) F étant le milieu de [BD],

$$z_F = \frac{z_B + z_D}{2} = \frac{\alpha + 2e^{i\theta}}{2} = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}.$$

G étant le milieu de [CE], $z_G = \frac{z_C + z_E}{2} = \frac{\overline{\alpha} + \alpha e^{i\theta}}{2}$.

b)
$$\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\frac{\alpha e^{i\theta} + \overline{\alpha}}{2} - 2}{\frac{\alpha}{2} + e^{i\theta} - 2}$$
$$= \frac{\alpha e^{i\theta} + \overline{\alpha} - 4}{\alpha + 2e^{i\theta} - 2} = \frac{2\alpha e^{i\theta} + 2\overline{\alpha} - 8}{2\alpha + 4e^{i\theta} - 8}$$
$$= \frac{2\alpha e^{i\theta} + \alpha^2 - 4\alpha}{2(2e^{i\theta} + \alpha - 4)} = \frac{\alpha(2e^{i\theta} + \alpha - 4)}{2(2e^{i\theta} + \alpha - 4)} = \frac{\alpha}{2}.$$

$$\frac{z_G - z_A}{z_F - z_A} = \frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}},$$

donc AFG est équilatéral (*cf.* exercice 38 **A. 3. b)** page 251 du manuel).

4. a) $$\begin{aligned} AF^2 &= \left|z_F - 2\right|^2 \\ &= \left|\frac{\alpha}{2} + e^{i\theta} - 2\right|^2 \\ &= \left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos(\theta) + i\sin(\theta) - 2\right|^2 \\ &= \left(-\frac{3}{2} + \cos(\theta)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin(\theta)\right)^2 \\ &= 4 - 3\cos(\theta) + \sqrt{3}\sin(\theta). \end{aligned}$$

b) f est dérivable sur $\left]-\pi;\pi\right]$ et pour tout réel x de cet intervalle,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\sin(x) + \sqrt{3}\cos(x) \\ &= 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)\right) \\ &= 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(x)\right) \\ &= 2\sqrt{3}\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ si, et seulement si, $x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$ ou $x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, soit $x = -\frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$.

$f'(x) > 0$ si, et seulement si, $-\frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$, soit

$$-\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}.$$

On en déduit le tableau de variation de f :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
f	7	↘	$4 - 2\sqrt{3}$	↗	$4 + 2\sqrt{3}$	↘	7

c) La longueur AF est minimale lorsque $\theta = -\frac{\pi}{6}$, donc lorsque $z_D = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

123 **A.** $$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) &= \left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{AC}\right) \pmod{2\pi} \\ &= \left(\vec{u}, \overrightarrow{AC}\right) - \left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) \pmod{2\pi} \\ &= \arg(c - a) - \arg(b - a) \pmod{2\pi} \\ &= \arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right) \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

B. 1. a) $z_{B'} = \frac{i - 1 - i}{i} = i$.

b) $z' = 1 - \frac{1 + i}{z}$ donc $z' \neq 1$.

2. a) $|z'| = 1$ équivaut à $|z - z_A| = |z|$, soit $AM = OM$. L'ensemble $\mathscr{E}$ des points M pour lesquels $|z'| = 1$ est la médiatrice du segment [OA].

b) Remarquons que si $z = 1 + i$, alors $z' = 0$ est réel. Le point A appartient donc à l'ensemble recherché.

Si $z \neq 1 + i$ et $z \neq 0$, alors z' est un réel différent de 1 si, et seulement si, $\arg\left(\frac{z - z_A}{z}\right) = 0 \pmod{\pi}$, ce qui est équivalent à $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AM}\right) = 0 \pmod{\pi}$. Cela veut dire que M appartient à la droite (OA) privée de O et de A. Comme on a remarqué que A fait partie de l'ensemble recherché, en définitive, cet ensemble est la droite (OA) privée de O.

CHAPITRE 9

Droites et plans de l'espace

ACTIVITÉS

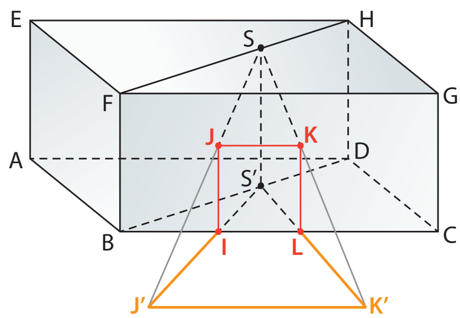
(page 266)

Activité 1

1 **1. a)** La trace de N est un quadrilatère qui semble être un trapèze.

b) La trace n'est pas la même mais sa nature ne change pas. Cependant, pour une certaine position de S, le trapèze semble isocèle.

2. a) La droite (SM) n'est pas parallèle au plan (ABC) et n'est pas incluse dans ce plan, donc N existe toujours.



b) M est un point du plan (SKL), donc la droite (SM) est dans ce plan et il en est de même de N.

c) Si M parcourt le segment [IJ], alors N décrit le segment [IJ'].

d) Lorsque M parcourt le segment [JK], N est un point du plan (SJK) et du plan (ABC). Or (IL), contenue dans (ABC), est parallèle à (JK) contenue dans le plan (SJK). Donc, d'après le théorème du toit, la droite intersection est parallèle à (IL) et (JK). Le point N parcourt le segment [J'K'].

e) Si M parcourt le segment [IL], alors M = N et N parcourt le même segment.

f) Le contour de la tache de lumière est donc un trapèze, de bases [IL] et [J'K'].

3 **a)** On projette S en S' sur le plan (ABC) parallèlement à (FB). Le point S' est donc situé sur [BD].

b) Le point P est donc en K' intersection de (S'L) et (SK). De même Q est en J'.

Activité 2

1 (EH) et Δ_1 sont orthogonales ainsi que (HG) et Δ_2, etc.

2 **a)** IAJ est un triangle isocèle car $AI = AJ = \sqrt{2}$.

b) Le triangle IBJ est un triangle isocèle, la bissectrice [BH] est donc également hauteur et médiatrice et les triangles BHI et BHJ sont rectangles.

c) D'après le théorème de Pythagore, $BH^2 = IB^2 - IH^2 = 1 - IH^2$ et de même le triangle AHI est rectangle en H car H est le milieu de [IJ], donc :

$$AH^2 = AI^2 - IH^2 = 2 - IH^2.$$

d) $AH^2 - BH^2 = 2 - IH^2 - (1 - IH^2) = 1 - AB^2$,

soit $AH^2 = BA^2 + BH^2$.

Il en résulte que le triangle ABH est rectangle en B, donc d et d_3 sont perpendiculaires.

PROBLÈME OUVERT

I et J sont les milieux de [AH] et [AC], donc $IJ = \frac{1}{2}HC$.

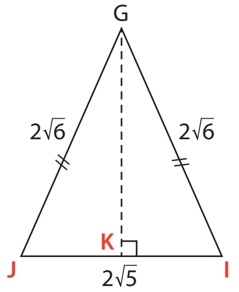
Or $HC = 4\sqrt{2}$, donc $IJ = 2\sqrt{2}$.
Dans le triangle rectangle ICG on a $IG^2 = IC^2 + CG^2$.

Or $IC = \frac{1}{2}AC = 2\sqrt{2}$, donc $IG^2 = 8 + 16 = 24$.

De même, $GJ^2 = 24$ dans le triangle rectangle JKG.
$GK^2 = GJ^2 - KJ^2 = 24 - 2 = 22$
$GK = \sqrt{22}$ donc

$$\text{aire (IGJ)} = \frac{1}{2}GK \times IJ = \frac{1}{2}\sqrt{22} \times 2\sqrt{2},$$

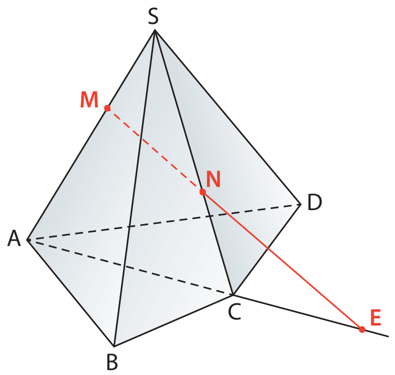
soit aire (IGJ) $= \sqrt{44}\ \text{cm}^2 = 2\sqrt{11}\ \text{cm}^2 < 7\ \text{cm}^2$.
Conclusion : l'aire du triangle ne dépasse pas 7 cm².



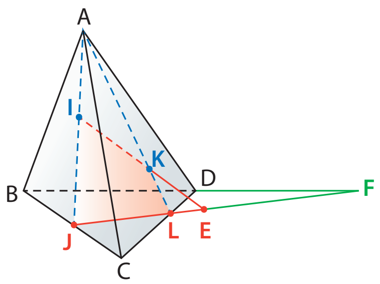
EXERCICES

Application (page 270)

1 M et N sont deux points du plan (ASC).
Le plan (ASC) coupe le plan (ABC) suivant la droite (AC), donc la droite (MN) coupe le plan (ABC) en E situé sur la droite (AC).

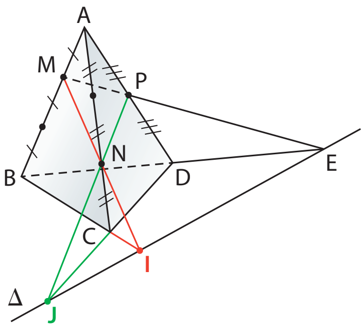


2 La droite (AI) contenue dans le plan (ABC) coupe (BC) en J. De même, la droite (AK) du plan (CAD) coupe (CD) en L. Les droites (JL) et (IK) sont coplanaires et sécantes en E.
Le plan (AIK) coupe le plan (BCD) suivant la droite (JL), donc l'intersection F du plan (AIJ) et de la droite (BD) est l'intersection des droites (BD) et (JL).

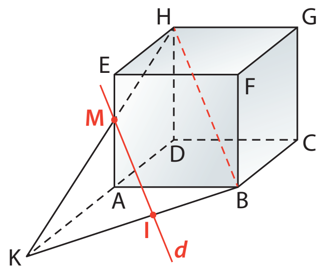


3 La droite (MN) est dans le plan (ABC) et n'est pas parallèle à (BC). Elle coupe donc (BC) en I. De même, (NP) contenue dans (ACD) n'est pas parallèle à (CD) donc coupe (CD) en J et de même (MP) coupe (BD) en K.

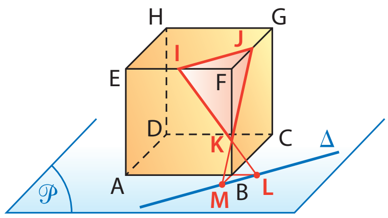
Les points I, J, K sont alignés car ils appartiennent à la droite Δ intersection des plans (BCD) et (MNP).



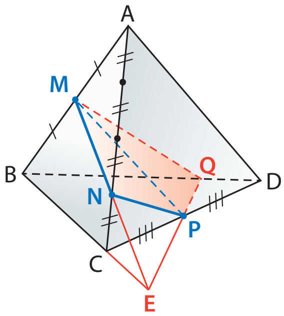
4 **1.** M est un point du plan (HDA), donc (MN) coupe (AD) en K qui est l'intersection de la droite (HM) et du plan (ABC).
2. M est un point du plan (KBH), donc la parallèle à (HB) passant par M coupe (KB) en I. Ce point est donc l'intersection de la droite *d* et du plan (ABC).



5 I et K sont des points du plan (ABF), donc (IK) coupe (AB) en L. De même, J et K sont deux points du plan (CBF), donc (JK) coupe (BC) en M.
Les points L et M appartiennent à la fois aux plans (IJK) et (ABC). La droite (LM) est donc la droite Δ cherchée.

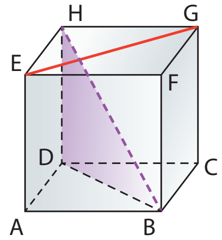


6 (MN) est une droite du plan (ABC). Elle coupe donc (BC) en E. (EP) est une droite du plan (BCD). Elle coupe donc [BD] en Q. La section du tétraèdre ABCD par le plan (MNP) est donc le quadrilatère MNPQ.



7 **1.** Le plan (BDH) est aussi le plan (BFH). (EG) est perpendiculaire à (HF) comme diagonales du carré EFGH. De plus, (FB) est perpendiculaire au plan (EFG) donc à toutes les droites de ce plan et en particulier à (EG). Il en résulte que (EG) est perpendiculaire aux droites (HF) et (FB), donc au plan (HDB).

2. (EG), étant perpendiculaire au plan (HDB), est perpendiculaire à toutes les droites de ce plan, donc à (HB).



8 Le plan (EHB) est aussi le plan (EHC). On raisonne comme pour l'exercice 7. (HC) est perpendiculaire à (DG) et (EH), étant perpendiculaire au plan (DCG), est orthogonale à (DG). Donc (DG), étant perpendiculaire aux deux droites concourantes (HF) et (HE), est perpendiculaire au plan (EBH).

EXERCICES Activités de recherche (page 274)

13 Section plane d'un cube

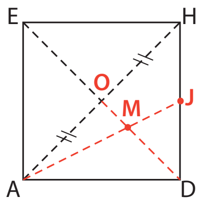
• *Les outils*

– Logiciel de géométrie pour conjecturer.
– Le parallélisme dans l'espace.
– Le théorème de Pythagore.

• *Les objectifs*

– Savoir conjecturer un résultat.
– Savoir reconnaître la nature d'une section.

1. a) Le point M est le centre de gravité du triangle ADH. En effet, les diagonales du carré se coupent en O et l'on a :

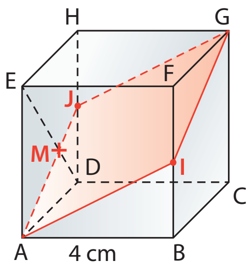


DE = 2DO donc 3DM = 2DO, d'où DM $= \frac{2}{3}$DO. Par ailleurs, O est le milieu de [AH].

Le centre de gravité du triangle ADH aux $\frac{2}{3}$ de la médiane à partir de D est donc le point M.

b) M étant le centre de gravité du triangle ADH, le point J est le milieu de [DH].

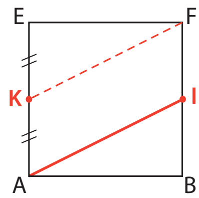
J et G sont deux points du plan (AHG) et de la face DCGH, donc le segment [JG] est l'intersection cherchée.



2. a) Le plan (AMG) coupe la face ABFE suivant un segment [AI] parallèle à [JG].

En conclusion, la section est le parallélogramme AIGJ.

b) G se projette orthogonalement en F sur le plan (ABFE), et J en K milieu de [AE]. Donc (FK) // (AI) et I est le milieu de [FB].



c) I étant le milieu de [FB], on retrouve sur les faces ABFE et BCGF les mêmes configurations.

$AI^2 = AB^2 + IB^2 = 16 + 4 = 20$ et de même $IG^2 = 20$.

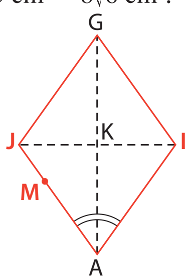
Donc le parallélogramme, ayant deux côtés consécutifs de même longueur, est un losange.

3. a) et **b)** La diagonale $IJ = DB = 4\sqrt{2}$ cm.

De plus, $AG^2 = AC^2 + CG^2 = AB^2 + BC^2 + CG^2$,

soit $AG = 4\sqrt{3}$ cm. On a :

$$\text{aire (AIGJ)} = \frac{1}{2}\,IJ \times AG = \frac{1}{2}\,4\sqrt{2} \times 4\sqrt{3}\ \text{cm}^2 = 8\sqrt{6}\ \text{cm}^2.$$



$$\text{aire (IAJ)} = \frac{1}{2}\,AI \times AJ \times \sin \widehat{IAM},$$

$$\text{soit } 4\sqrt{6} = \frac{1}{2}\,(2\sqrt{5})^2 \sin \widehat{IAM}.$$

D'où $4\sqrt{6} = 10 \sin \widehat{IAM}$.

Or sur $\widehat{IAM} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, soit $\widehat{IAM} \approx 78°$.

14 Un calcul de distance

• *Les outils*

– Orthogonalité de droites et de plans.
– Le théorème de Pythagore.
– Le théorème de Thalès.

• *L'objectif*

– Savoir calculer des distances dans l'espace.

1. a) Les droites (SA) et (MP) sont parallèles, donc P est un point du plan (ASC) et également un point de la diagonale [AC] du carré ABCD.

b) (MP) est perpendiculaire au plan (ABC), donc à (AB). De plus, (AB) est perpendiculaire à (PH). Donc (AB), étant perpendiculaire à deux droites concourantes du plan (MPH), est perpendiculaire à ce plan et en particulier à la droite (MH).

2. a) $SC^2 = SA^2 + AC^2 = 36 + 32 = 68$, donc $SC = 2\sqrt{17}$ cm.

Dans le triangle ACS on a :

$$\frac{MP}{AS} = \frac{CM}{CS} = \frac{1}{3} \text{ donc } MP = \frac{AS}{3} = 2 \text{ cm.}$$

b) Dans le triangle ABC :

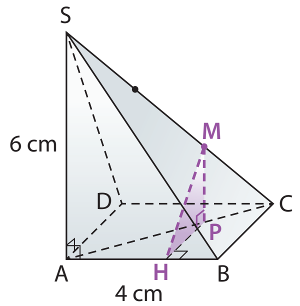
$$\frac{PH}{BC} = \frac{AP}{AC} = \frac{AC - CP}{AC} = 1 - \frac{CP}{CA} = 1 - \frac{CM}{CS} = \frac{2}{3},$$

donc $PH = \frac{2}{3}BC = \frac{2}{3} \times 4$, soit $PH = \frac{8}{3}$ cm.

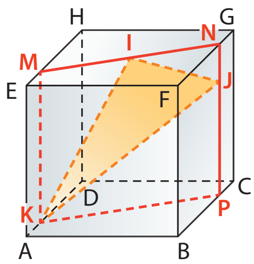
c) Il en résulte que :

$$MH^2 = PH^2 + PM^2 = \frac{64}{9} + 4 = \frac{64 + 36}{9} = \frac{100}{9},$$

soit $MH = \frac{10}{3}$ cm.



15 Narration de recherche

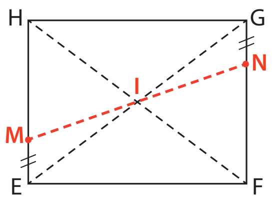


Il semble que la section soit un rectangle MNPK.

En effet, si on trace par J et K les parallèles à (DH), elles coupent respectivement [FG] en N et [EH] en M tels que

$4\,EM = EH$ et $4\,GN = GF$.

D'où la figure ci-après.



Dans le plan, $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{NG}$, donc EMGN est un parallélogramme. Comme I est le milieu de [EG] il est aussi le milieu de [MN]. Ainsi, les points I, J, M, N, K sont coplanaires.

Il en est de même des points I, J, K, P.

Ainsi, la section est bien un rectangle.

16 Narration de recherche

On reprend les résultats de l'exercice 14 avec cette fois $CM = t\,CS$, avec $0 \leqslant t \leqslant 1$.

$\frac{MP}{AS} = t$, donc $MP = 6t$.

De même, $\frac{PH}{4} = \frac{AP}{AC} = 1 - \frac{CP}{CA} = 1 - t$,

donc $PH = 4(1 - t)$.

Il en résulte que

$$MH^2 = 16(1 - t)^2 + 36t^2 = 4\,[13t^2 - 8t + 4].$$

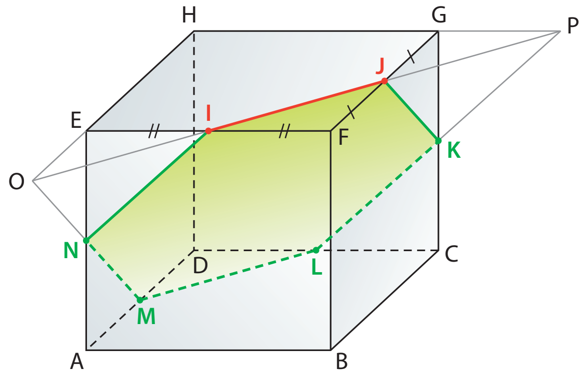
On note f la fonction définie sur [0 ; 1] par

$$f(t) = 4\,(13t^2 - 8t + 4).$$

On a $f'(t) = 4\,(26t - 8)$, donc MH est minimale pour $t = \frac{4}{13}$,

soit $CM = \frac{4}{13}CS$.

17 TD – Sections planes d'un cube



A. 2. La section va du triangle à l'hexagone.

B. 1. a) Les plans (ADH) et (BCG) sont parallèles, donc ils sont coupés par le plan (NIJ) suivant deux droites parallèles (MN) et (JK).

b) Il en va de même pour les droites (IJ) et (ML), ainsi que (NI) et (LK).

2. a) Les droites (HE), (IJ) et (MN) sont concourantes en O. En effet, les droites (EH) et (IJ) du plan (EFG) se coupent en O. Ce point O appartient aux plans (AED) et (NIJ). Il appartient donc à l'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire à la droite (MN).

b) Il en va de même pour les droites (IJ), (HG) et (LK).

18 TD – Les alvéoles des ruches

A. 1. Figure 2. OABC est un losange. Par conséquent, les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu. D'où le résultat. AP est la hauteur du triangle équilatéral OAB de côté a, donc $AP = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

2. Figure 3. $\sin \widehat{BB_1P} = \sin \widehat{OSP}$, soit $\frac{BP}{B_1P} = \frac{OP}{SP}$.

Or BP = OP, donc $B_1P = SP$ et P est le milieu de $[B_1S]$.

3. Figure 1. P est le milieu de [AC] et $[B_1S]$, donc le quadrilatère AB_1CS est un parallélogramme. Or (AP) est perpendiculaire à [BO] et (OS), donc au plan (BOS) et en particulier à (B_1S). Il en résulte que AB_1CS est un losange.

B. 1. $\mathcal{S}$ = aire(AB_1CS) + 2aire(ABGH) – 2aire(ABB_1), or aire(ABGH) est constante donc $\mathcal{S}$ et $\mathcal{D}$ sont minimales ensembles.

2. a) $B_1P^2 = BP^2 + BB_1^2 = \frac{a^2}{4} + x^2$, soit $B_1P = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + a^2}$.

b) aire $(AB_1CS) = AP \times B_1S = \frac{a\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{4x^2 + a^2}$;

aire$(ABB_1) = \frac{ax}{2}$.

Donc
$$\mathcal{D} = \frac{a\sqrt{3}}{2}\sqrt{4x^2 + a^2} - ax.$$

3. a) $f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{8x}{2\sqrt{4x^2 + a^2}} - 1 = \frac{2\sqrt{3}x}{\sqrt{4x^2 + a^2}} - 1$

$= \frac{2\sqrt{3}x - \sqrt{4x4a^2}}{\sqrt{4x^2 + a^2}}$.

D'où le tableau :

x	0		$\frac{a\sqrt{2}}{4}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)$	$\nearrow$	

b) Donc $x_0 = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

4. a) Dans ce cas, $B_1P = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ et $AB_1 = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

b) Donc $\cos\frac{\theta}{2} = \cos(\widehat{AB_1P}) = \frac{B_1P}{AB_1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

et $\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$.

Soit $\theta \approx 109°\ 47$.

EXERCICES Entraînement (page 278)

DE TÊTE

19 **a)** $d \,//\, \mathcal{P}_2$. **b)** $d \perp \mathcal{P}_2$. **c)** $d \,//\, \mathcal{P}_2$.

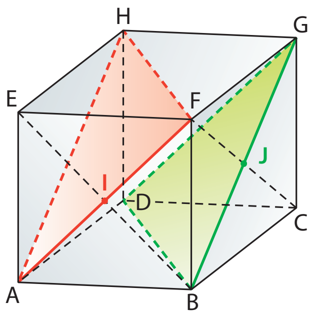
20 **1.** BEG est équilatéral.
2. Le plan EGA contient le rectangle AEGC et I n'appartient pas à ce plan. Donc les droites ne sont pas sécantes.

21 Le plan (IJC) coupe le plan (EFG) suivant une droite passant par I et parallèle à (JC). C'est la droite (IE). Donc E appartient au plan (ICJ).

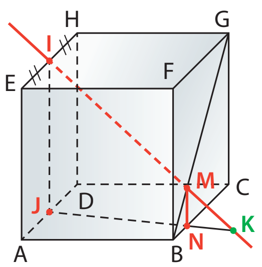
INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

22 *Corrigé sur le site élève.*

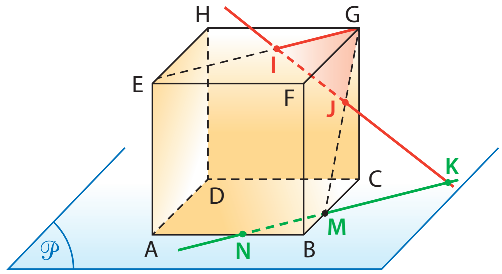
23 **1. a)** $\mathcal{P}_1$ et la face ADHE ont en commun les points A et H, donc l'intersection est la droite (AH).
b) $\mathcal{P}_2$ coupe la face BCGF suivant la droite (BG).
2. Ces droites (AH) et (BG) sont parallèles, ainsi que les droites (DB) et (HF). Donc les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles.



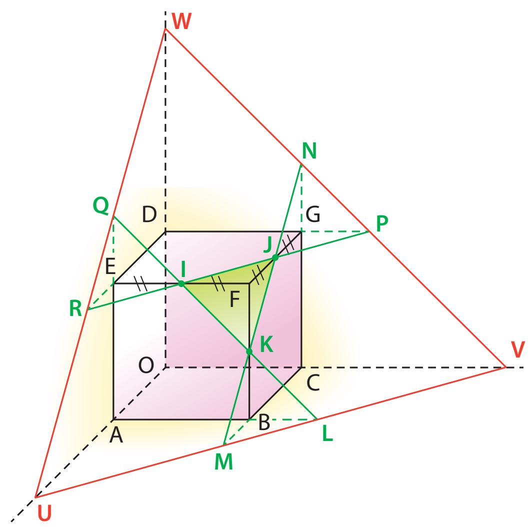
24 I se projette orthogonalement sur le plan (ABC) en J milieu de [AD] et M en N tel que 4BN = BC.
Donc (IM) coupe le plan (ABC) en K, intersection de (IM) et (JN).



25 Le plan (IGJ) coupe le plan (ABC) suivant la droite (MN) parallèle à (GI). Ainsi, (MN) et (IJ) sont coplanaires et leur intersection est le point K cherché.



26 La figure ci-après a été réalisée avec K milieu de [FB].
1. Voir la figure.
2. a) Les points U, Q et R appartiennent aux plans (IJK) et (AOD), donc à l'intersection de ces plans. Ils sont donc alignés.
b) Il en est de même de V, N, P qui appartiennent à la fois aux plans (IJK) et (DOC).
c) La droite (OD) est l'intersection des plans (AOD) et (DOC). Donc le point commun W aux droites (RQ) et (PN) appartient à cette droite.



3. Si a est le côté du carré, K étant le milieu de [FB], alors IF = BL et FJ = BM, donc $BM = BL = \frac{a}{2}$.

Donc, dans le triangle ALU, $\frac{BM}{AU} = \frac{BL}{AL} = \frac{1}{3}$.

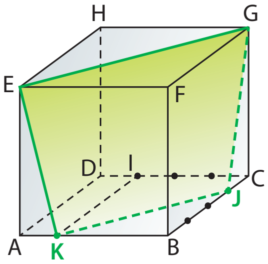
De même $\frac{BL}{CV} = \frac{1}{3}$, donc $AU = CV = \frac{3a}{2}$, soit

$$OV = OU = \frac{5a}{2} \text{ et } UV = \frac{5a\sqrt{2}}{2}.$$

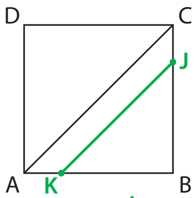
On démontre de même que $UW = WV = \frac{5a\sqrt{2}}{2}$.
D'où le résultat.

INTERSECTION DE DEUX PLANS

27 **1.** Le plan (EGJ) coupe le plan (ABC) suivant une droite passant par J et parallèle à (EG) ou (AC).
Donc (JK) est parallèle à (AC) et le point K de [AB] est tel que 4AK = AB.

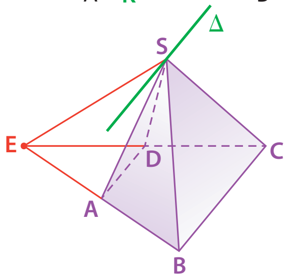


2. Les droites (EK) et (HI) sont parallèles, donc (HI) est parallèle au plan (EGJ).



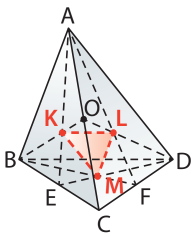
28 *Corrigé sur le site élève.*

29 **a)** Les droites (AD) et (BC) sont parallèles, donc les plans (SAD) et (SBC) se coupent suivant une droite Δ passant par S et parallèle à (BC) (théorème du toit).
b) (AB) et (DC) se coupent en E, donc la droite (SE) et l'intersection des plans (SAB) et (SDC).



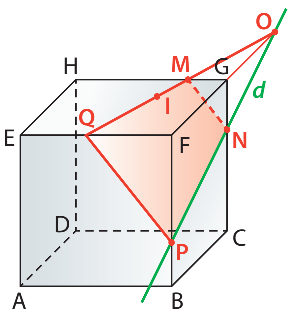
30 $OK = \frac{1}{3}$ OB et $OL = \frac{1}{3}$ OD.

Donc, d'après le théorème de Thalès dans le triangle BDO, les droites (KL) et (BD) sont parallèles. On démontre de même dans le triangle AED que KM est parallèle à (AD). Il en résulte que le plan (KLM) est parallèle au plan ABD.



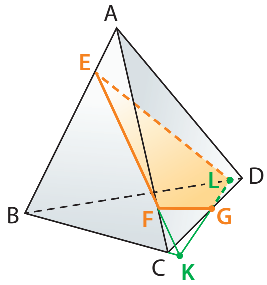
SECTION D'UN POLYÈDRE PAR UN PLAN

31 **1.**



2. La droite d coupe (FG) en O, (OI) coupe (HG) en M et (EF) en Q.
L'intersection est donc le trapèze MNPQ, car les plans (HGC) et (EFB) sont parallèles, donc (MN) est parallèle à (PQ).

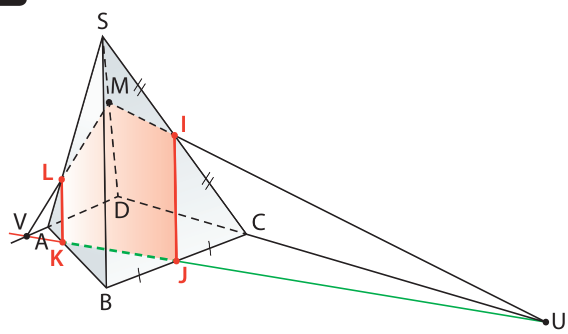
32



1. (EF) coupe (BC) en K et (KG) coupe (BD) en L.
La section est le quadrilatère EFGL.
2. a) On prend par exemple (EF) parallèle à (BC) pour avoir un trapèze.
b) Si (EF) est parallèle à (BC) et (FG) parallèle à (AD), on obtient un parallélogramme (théorème du toit).

33 *Corrigé sur le site élève.*

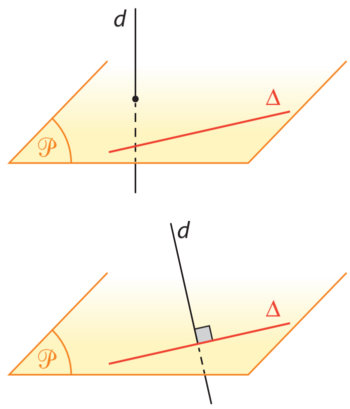
34



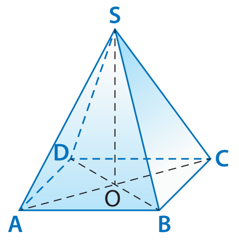
La droite (KJ) coupe (DC) en U et (AD) en V.
En traçant (IU) on obtient M sur (SD) et (VM) coupe (AS) en L. La section est le polygone IJKLM. On remarquera que (LK) et (IJ) sont parallèles (théorème du toit).

DROITES ET PLANS ORTHOGONAUX

35 Notons (P) la proposition « d orthogonale à $\mathscr{P}$ » et (Q) « d orthogonale à Δ ».
(P) ⇒ (Q) est vraie. En effet, si d est orthogonale à $\mathscr{P}$ elle est orthogonale à toute droite de $\mathscr{P}$, donc à Δ.
(Q) ⇒ (P) est fausse, car si d est orthogonale à Δ elle n'est pas nécessairement perpendiculaire à $\mathscr{P}$.



36 (DB) ⊥ (AS) car ABCD est un carré. (SO) est perpendiculaire au plan (ABC) donc à (DB). Il en résulte que (DB) est perpendiculaire au plan (AOS), donc à toute droite de ce plan et en particulier à (AS).



37 *Corrigé sur le site élève.*

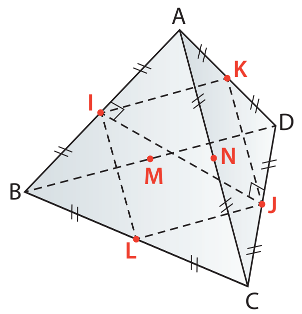
38 (CD) est perpendiculaire à (AH) et (AB), donc au plan (ABH). De plus, (BK) étant perpendiculaire au plan (ACD) est perpendiculaire à (CD). Donc K est un point du plan ABH et A, K, H sont alignés.

39 (AS) étant perpendiculaire au plan (ABC), les triangles SAB et SAD sont des triangles rectangles en A. De plus, (AB) est perpendiculaire à (AD) et (AS), donc au plan (SAD) et en particulier à (SD). Donc, comme (DC) est parallèle à (AB), le triangle SDC est rectangle en D et l'on a $SD^2 = 2a^2$, $SC^2 = 3a^2$, $SB^2 = 5a^2$ et $CB^2 = 2a^2$, donc $SB^2 = SC^2 + CB^2$ et le triangle SCB est rectangle en C.

40 **1. a)** D'après le théorème des « milieux » :

$$IK = LJ = \frac{BD}{2}$$

et $$IL = KJ = \frac{AC}{2}.$$



Or BD = AC, donc IJKL est un losange.

b) Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires, donc (IJ) ⊥ (KL).

De même, (IJ) ⊥ (MN) et (MN) ⊥ (LK).

2. a) (IJ), étant perpendiculaire à (KL) et (MN), est perpendiculaire au plan formé par ces deux droites sécantes, donc en particulier à (LN) et (NK).

b) D'après le théorème des « milieux » (LN) // (AB) et (NK) // (CD), donc (IJ) est orthogonale à (AB) et (CD).

3. Le milieu G de [IJ] est tel que (GI) est la médiatrice de [AB] et [CD], donc :

$$GA = GB \text{ et } GC = GD.$$

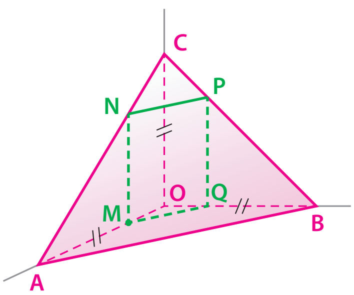
De la même manière, on démontre que GA = GD.

Donc G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre.

41 *Corrigé sur le site élève.*

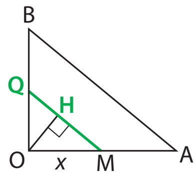
EXERCICES DE SYNTHÈSE

42 **1.**



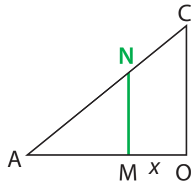
Les droites (OC) et (AB) sont perpendiculaires, donc (MN) et (MQ) sont perpendiculaires. Ainsi, le parallélogramme MNPQ, ayant un angle droit, est un rectangle.

2. a) OM = x. Les triangles OMQ et OAB sont rectangles isocèles, donc MQ = $x\sqrt{2}$.



De plus, le triangle AOC est rectangle isocèle, donc MN = AM = $a - x$. Ainsi, aire (MNPQ) = $x\sqrt{2}(a - x)$.

$OH = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$, H étant le projeté orthogonal de O sur le plan (MPQ), donc sur (MQ).



Il en résulte que le volume de la pyramide est $\dfrac{1}{3} \times OH \times$ aire(MNPQ),

soit

$$\frac{1}{3} \times \frac{x\sqrt{2}}{2} \times x\sqrt{2}(a - x) = \frac{1}{3}(ax^2 - x^3).$$

b) Soit f la fonction définie sur [0 ; a] par

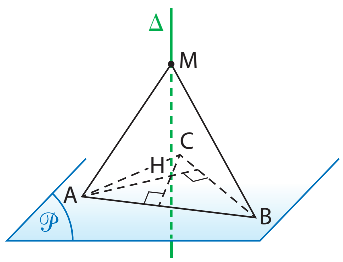
$f(x) = \dfrac{1}{3}(ax^2 - x^3)$; on a $f'(x) = \dfrac{1}{3}(2ax - 3x^2) = \dfrac{1}{3}x(2a - 3x)$.

x	0		$\frac{2}{3}a$		α
f'		+	0	−	
f		↗		↘	

Le volume est donc maximal pour $x = \dfrac{2}{3}a$.

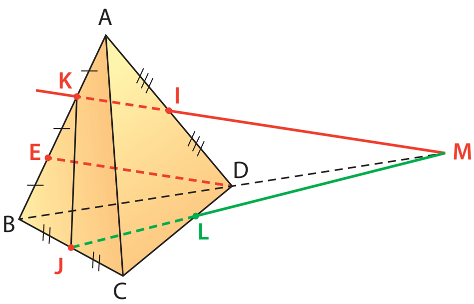
43 *Corrigé sur le site élève.*

44



On a (BC) ⊥ (AH) et (MH), étant perpendiculaire au plan (ABC), est perpendiculaire à (BC). Donc (BC), étant perpendiculaire à (AH) et (MH), est perpendiculaire au plan (AMH) donc à (AM). On démontre de même que (AC) ⊥ MB et (AB) ⊥ (MC).

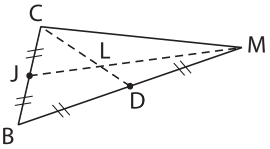
45 **1. a)**



b) E milieu de [BK] est tel que BE = EK = KA donc, dans le triangle EAD, (KI) est la droite des milieux. Il en résulte que (KI) et (ED) sont parallèles. Donc, dans le triangle

(BKM), on a tracé par le milieu E de [BK] la parallèle à (KM), elle coupe donc [BM] en son milieu D.

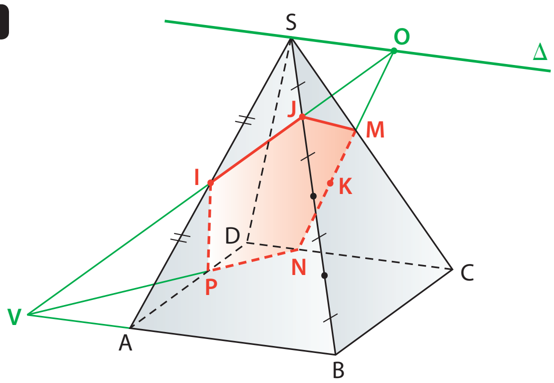
2. a) M et J sont deux points des plans (KIJ) et (BCD), donc l'intersection L de (JM) et (CD) est l'intersection de (CD) et du plan (IJK).



b) L est le centre de gravité du triangle BCM, donc

$$CL = \frac{2}{3}CD.$$

46



1. a) Les plans (SAB) et (SDC) sont tels que (AB) // (DC) donc, d'après le théorème du toit, leur intersection est la parallèle à (AB) passant par S.

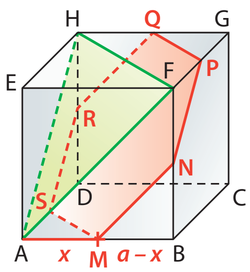
b) O est à la fois dans le plan (IJK) et le plan (SDC). Il en est de même du point K. Donc (OK) est l'intersection des deux plans, et ainsi les points O, M, K, N sont alignés.

2. Les droites (IJ) et (AB) du plan (ABC) se coupent en V. V et N sont communs aux plans (ABC) et (IJK), donc (VN) est l'intersection de ces deux plans et coupe (AD) en P.

3. On trace par S la droite Δ puis O intersection de (IJ) et Δ. La droite (OK) coupe (SC) en M et (DC) en N.
La droite (IJ) coupe (AB) en V et (VN) coupe (AD) en P.
D'où le pentagone IJMNP.

AVEC LES TICE

47 **1.** On a : MN // RQ // AF, NP // SR // AH, SM // PQ // HF.
Ainsi, les triangles MBN, NFP, GPQ, QHR, et RSD sont tous des triangles rectangles isocèles.



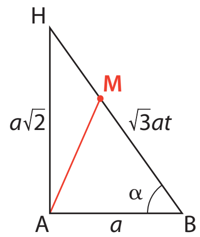
On a donc :
MB = BN = PG = GQ = RD
$= DS = a - x$,
$AM = AS = HR = HQ = FP = FN = x$.
Donc $MN = PQ = SR = (a - x)\sqrt{2}$ et
$PN = SM = RQ = x\sqrt{2}$.

2. On en déduit que le périmètre du polygone est $3a\sqrt{2}$. Il est donc indépendant de la position de M sur le segment [AB].

Prendre toutes les initiatives

48 On pose $BM = t\,BH$ avec $t \in [0\,;1]$.
Or $BH^2 = HD^2 + DB^2 = HD^2 + DA^2 + AB^2 = 3a^2$, donc $BM = \sqrt{3}at$.
Si on considère le triangle rectangle HAB, on a :

$$AM^2 = BM^2 + BA^2 - 2BM \times BA\cos(\alpha).$$

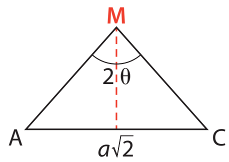


Or $\cos\alpha = \dfrac{AB}{BH} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, donc :

$$AM^2 = 3a^2t^2 + a^2 - 2a \times \sqrt{3}at \times \frac{1}{\sqrt{3}},$$

soit $AM^2 = 3a^2t^2 - 2a^2t + a = a^2(3t^3 - 2t + 1)$.
Dans le triangle isocèle AMC (AM = MC), on a :

$$AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2AM \times MC\cos(2\theta).$$



D'où $\cos 2\theta = \dfrac{2MA^2 - AC^2}{2AM^2}$,

soit $\cos 2\theta = \dfrac{2a^2(3t^3 - 2t + 1) - 2a^2}{2a^2(3t^2 - 2t + 1)} = \dfrac{3t^2 - 2t}{3t^2 - 2t + 1}$.

On note f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $f(t) = \dfrac{3t^2 - 2t}{3t^2 - 2t + 1}$;

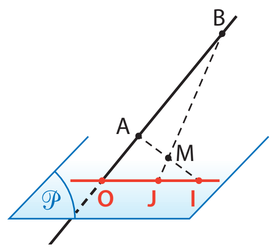
alors $f'(t) = \dfrac{2(3t - 1)}{(3t^2 - 2t + 1)^2}$.

D'où le tableau :

t	0		$\frac{1}{3}$		1
f'		$-$	0	$+$	
f	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$

donc $\widehat{AMC} = \dfrac{2\pi}{3}$ et $BM = \dfrac{1}{3}\sqrt{3}a = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$.

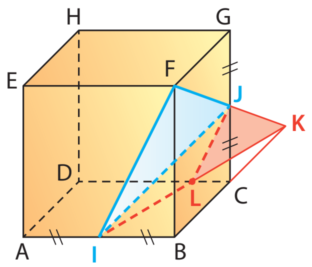
49 Le plan (AMB) coupe $\mathcal{P}$ suivant la droite (IJ). Or O est aussi un point de cette intersection, donc lorsque M varie la droite (IJ) passe par le point fixe O.



EXERCICES Le jour du BAC (page 282)

50 *Corrigé sur le site élève.*

51 **1.** $IF^2 = \frac{5}{4} = FJ^2$



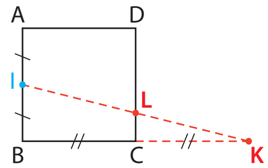
et $IJ^2 = IC^2 + CJ^2$

$= \frac{5}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2}.$

Le triangle est donc isocèle.

2. Les plans (ABF) et (DCG) sont parallèles, donc le plan (IFJ) coupe la face DCGH suivant [JL] parallèle à (IF). Ainsi la section est un trapèze.

3. Les droites (FG) et (BC) sont parallèles, C est le symétrique de G par rapport à J, donc K est le symétrique de F par rapport à J.

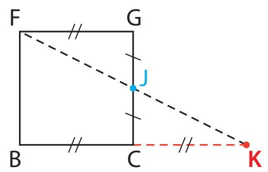


Il en résulte que C est le milieu de [BK].

4. $\frac{CL}{IB} = \frac{1}{2}$,

donc $CL = \frac{1}{2} IB = \frac{1}{4} CD$,

soit $DL = \frac{3}{4} DC$.



52 **1.** En calculant IF, FJ, JD et DI on trouve chaque fois $IF = \frac{\sqrt{5}}{2}$, donc le quadrilatère IFJD est un losange.

On a $DF = \sqrt{3}$ et $IJ = \sqrt{2}$, donc

$$\text{aire (IFJD)} = \frac{1}{2}\sqrt{6}.$$

2. (IJ) // (GB). Or (GB) est perpendiculaire à (FC), donc (IJ) est orthogonale à (FC).

3. (EF) est perpendiculaire au plan (BCG) donc à (BG), et également à (IJ). Par conséquent, (IJ) est orthogonale à (EF) et (FC), donc au plan (ECF). De plus (EK) est contenue dans ce plan, donc (IJ) est perpendiculaire à (EK).

53 **1. a)** $EJ = EI = \sqrt{1 + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}.$

$FJ = FI = \sqrt{1 + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}.$

Les deux triangles sont donc isocèles.

b) K étant le milieu de [IJ], on a (EK) ⊥ (IJ) et (FK) ⊥ (IJ), donc (IJ) est perpendiculaire au plan (EKF).

2. (IJ), étant perpendiculaire au plan (EKF), est perpendiculaire à (EF). De plus, (FP) étant perpendiculaire au plan (EIJ), est perpendiculaire à (IJ). En conclusion, (IJ) est perpendiculaire au plan (EPF).

3. a) (IJ) est perpendiculaire aux plans (EPF) et (EKF). Or ces plans ont en commun F et il existe un unique plan passant par F et perpendiculaire à (IJ), donc E, P, F, K sont coplanaires.

b) Il en résulte l'alignement de E, K, P, car (EP) et (EK) sont deux droites du plan (EIJ) perpendiculaires à (IJ).

54 Voir la correction de l'exercice 40 (énoncé page 280 du manuel).

EXERCICES Pour aller plus loin (page 284)

55 **A. 1. a)** Le rapport k est le rapport des hauteurs des deux pyramides, soit $\frac{x}{x+h}$.

b) $\mathcal{B}' = \frac{x^2}{(x+h)^2}\mathcal{B}$ soit $\frac{x}{x+h} = \frac{\sqrt{\mathcal{B}'}}{\sqrt{\mathcal{B}}}$.

D'où $\sqrt{\mathcal{B}}x = \sqrt{\mathcal{B}'}x + h\sqrt{\mathcal{B}'}$.

$x(\sqrt{\mathcal{B}} - \sqrt{\mathcal{B}'}) = h\sqrt{\mathcal{B}'}$ soit $x = \frac{h\sqrt{\mathcal{B}'}}{\sqrt{\mathcal{B}} - \sqrt{\mathcal{B}'}}$.

Donc $x = \frac{h(\sqrt{\mathcal{B}\mathcal{B}'} + \mathcal{B}')}{\mathcal{B} - \mathcal{B}'}$.

2. a) $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B}(x+h) - \frac{1}{3}\mathcal{B}'x$

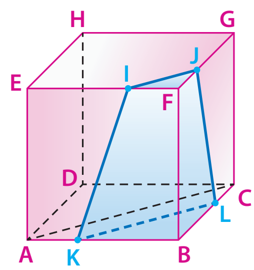
$= \frac{1}{3}x(\mathcal{B} - \mathcal{B}') + \frac{1}{3}h\mathcal{B}.$

On en déduit que :

b) $\mathcal{V} = \frac{1}{3}[h(\sqrt{\mathcal{B}\mathcal{B}'} + \mathcal{B}') + \mathcal{B}h]$

$= \frac{1}{3}h(\mathcal{B} + \mathcal{B}' + \sqrt{\mathcal{B}\mathcal{B}'}).$

B. 1. Les plans (EFG) et (ABC) sont parallèles donc (KL) // IJ avec $CL = \frac{1}{4}CB$.



Il en résulte que IK = JL et la section est un trapèze isocèle avec $\mathcal{B}$ = aire (KBL), $\mathcal{B}'$ = aire (IFJ) et h = FB.

2. $\mathcal{B} = \frac{1}{2}BK^2 = \frac{1}{2} \times 36 = 18.$

$\mathcal{B}' = \frac{1}{2}IF^2 = \frac{9}{2}.$

$h = 9$ donc :

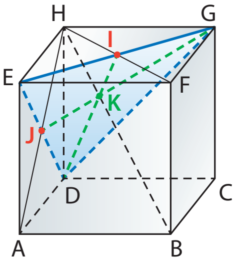
$P = \frac{1}{3} \times 9\left[18 + \frac{9}{2} + \sqrt{81}\right]$

soit $P = \frac{189}{2}$ cm³.

56 **1.** (EG) est perpendiculaire à (FH) et (FB), donc au plan (HFB) soit à (HB).

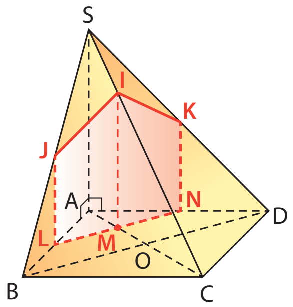
De même, (ED) est perpendiculaire au plan (AHB), donc à (HB). Il en résulte que (HB) est perpendiculaire au plan (EDG).

2. Les plans (EDG) et (BEH) ont en commun les points D et I centre de la face EFGH, donc K est un point de (DI). De même, les plans (EDG) et (AHG) ont en commun les points G et J centre de la face ADHE, donc K est un point de (GJ). Ainsi K est le centre de gravité du triangle EDG.

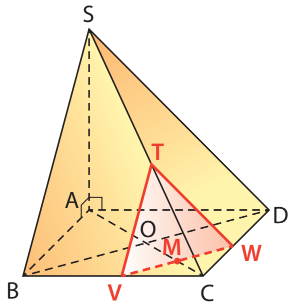


57

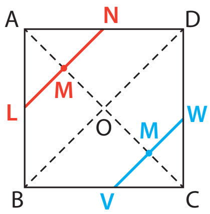
1. a)



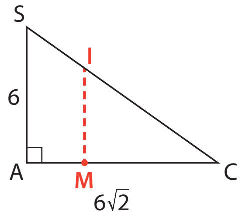
b)



2. Si M ∈ [AO], JLMI est un trapèze rectangle.



ML = AM = x,
AL = $x\sqrt{2}$ et BL = $6 - x\sqrt{2}$.



Avec le théorème de Thalès :

$$\text{IM} = \frac{12 - \sqrt{2}x}{2}.$$

De plus, dans le triangle BAS, il vient LJ = LB = $6 - x\sqrt{2}$.

Donc

$$\text{aire}\,(\text{LNKIJ}) = 2\,\text{aire}\,(\text{LMIJ}) = x\left[12 - 3\,\frac{x}{2}\sqrt{2}\right],$$

soit $12x - \dfrac{3x^2\sqrt{2}}{2}$.

Si M ∈ [OC], VTW est un triangle rectangle isocèle et

$$\text{TV} = \frac{12 - \sqrt{2}x}{2} \text{ et MV} = \text{MC} = 6\sqrt{2} - x.$$

Donc aire (VTW) = 2 aire (VTM)

$$= 2\left[\frac{1}{2}\,(6\sqrt{2} - x)\left(\frac{12 - \sqrt{2}x}{2}\right)\right].$$

$$\text{aire}\,(\text{VTW}) = \frac{1}{2}\,(6\sqrt{2} - x)(12 - \sqrt{2}x).$$

3. f est définie sur I par :

$$f(x) = 12x - \frac{3x^2\sqrt{2}}{2} \text{ si } x \in [0\,;\,3\sqrt{2}],$$

et $\quad f(x) = \dfrac{1}{2}(6\sqrt{2} - x)(12 - \sqrt{2}x)$ si $x \in [3\sqrt{2}\,;\,6\sqrt{2}]$.

a) $f(3\sqrt{2}) = \dfrac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 6 = 9\sqrt{2}$

et $\displaystyle\lim_{x \to 3\sqrt{2}} f(x) = \lim_{x \to 3\sqrt{2}} 12x - \frac{3x^2\sqrt{2}}{2} = 36\sqrt{2} - 27\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$,

donc f est contenue sur I.

b) f est dérivable sur $[0\,;\,3\sqrt{2}[\, \cup\,]3\sqrt{2}\,;\,6\sqrt{2}]$.

Il reste à voir si f est dérivable sur $3\sqrt{2}$.

• Sur $[0\,;\,3\sqrt{2}[$, $f'(x) = 12 - 3x\sqrt{2}$.

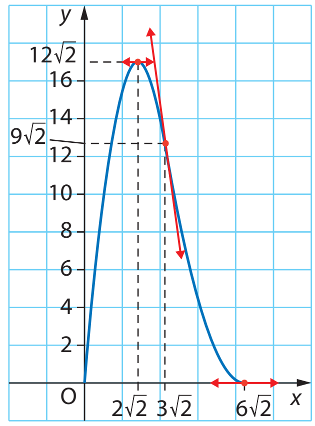
• Sur $[3\sqrt{2}\,;\,6\sqrt{2}]$, $f'(x) = \sqrt{2}x - 12$.

La dérivée à droite est $f'(3\sqrt{2}) = -6$.

La dérivée à gauche est $\displaystyle\lim_{h \to 0^-} \frac{f(3\sqrt{2} + h) - f(3\sqrt{2})}{h}$,

soit $\displaystyle\lim_{h \to 0^-} \frac{-6h + \frac{3}{2}\sqrt{2}h^2}{h} = \lim_{h \to 0^-} \left(-6 + \frac{3}{2}\sqrt{2}h\right) = -6$.

Donc f est dérivable sur I.



58 **1.** $x^2 + 9 = y^2$; $x^2 + z^2 = 2$; $t^2 = z^2 + 9$,

donc $z^2 = 2 - x^2$; $t^2 = 11 - x^2$ et $y^2 = x^2 + 9$.

2. S = $\text{BC}^6 + \text{BD}^6 - \text{AC}^6 - \text{AD}^6 = (t^2)^3 + (y^2)^3 - (z^2)^3 - (x^2)^3$,

donc

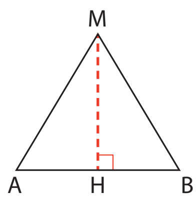
$$\text{S} = (11 - x^2)^3 + (9 + x^2)^3 - (2 - x^2)^3 - (x^2)^3$$
$$= 54(x^4 - 2x^2 + 38).$$

Le minimum est donc atteint pour $x = 1$ et

S = 1 998.

59 **1.** $\text{aire}\,(\text{AMS}) = \dfrac{1}{2}\,\text{SM} \times \text{AO} = \dfrac{1}{2} \times 2(3 - x) = 3 - x$.

Le triangle (AMB) est isocèle.



$\text{AM} = \sqrt{\text{AO}^2 + \text{OM}^2} = \sqrt{x^2 + 4}$ et

$\text{AB} = 2\sqrt{2}$.

Enfin $\text{MH} = \sqrt{\text{AM}^2 - \text{AH}^2}$,

soit $\text{MH} = \sqrt{x^2 + 4 - 2}$.

Donc

$$\text{aire}\,(\text{AMB}) = \frac{1}{2}\,\text{AB} \times \text{MH}$$
$$= \sqrt{2}\,\sqrt{x^2 + 2} = \sqrt{2x^2 + 4},$$

soit $f(x) = 3 - x + \sqrt{2x^2 + 4}$.

2. $f'(x) = -1 + \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2 + 4}}$

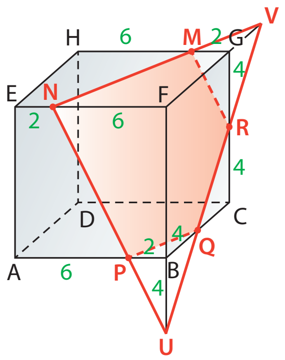
$$= \frac{2x - \sqrt{2x^2 + 4}}{\sqrt{2x^2 + 4}}.$$

$f'(x)$ s'annule sur $[0\ ;\ 3]$ pour $x = \sqrt{2}$.

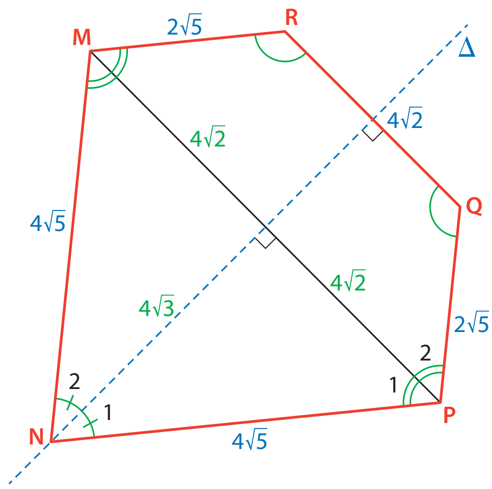
x	0		$\sqrt{2}$		3
f'		$-$	0	$+$	
f	5	$\searrow$	$3+\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\sqrt{22}$

Donc pour $x = \sqrt{2}$ la somme des aires est minimale.

60 **1. a)**



b)



2. a) Avec le théorème de Thalès on démontre que Q est le milieu de [BC] et R est le milieu de [CG]. Donc
$PQ = RM = 2\sqrt{5}$, $QR = 4\sqrt{2}$, $MP = AH = 8\sqrt{2}$ et
$NP = NM = 4\sqrt{5}$.

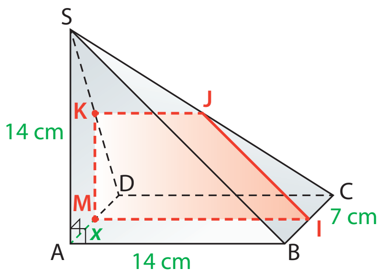
b) La droite Δ est axe de symétrie pour la figure.

$\cos(\widehat{N}_1) = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \sin(\widehat{P}_1)$

donc $\cos(\widehat{N}) = 2\cos^2(\widehat{N}_1) - 1 = \dfrac{6}{5} - 1 = \dfrac{1}{5}$.

$\cos\ \widehat{P} = -\dfrac{1}{5}$. Il en résulte que $\widehat{N} \approx 78°\ 5$; $\widehat{P} \approx 101°\ 5$ et
$\widehat{Q} \approx 129°\ 25$.

61



MIJK est un trapèze rectangle en M et K. La pyramide AMIJK a pour hauteur $AM = x$.

On cherche donc l'aire du trapèze MIJK. Dans le triangle ADS, on a $\dfrac{MK}{14} = \dfrac{DM}{DA} = \dfrac{7-x}{7}$, d'où :

$MK = 14 - 2x$, $MI = 14$ cm.

De plus, $\dfrac{KJ}{DC} = \dfrac{SK}{SD} = \dfrac{SD - DK}{SD} = 1 - \dfrac{DK}{SD} = 1 - \dfrac{DM}{DA} = \dfrac{AM}{DA}$,

soit $KJ = 14 \times \dfrac{x}{7} = 2x$.

Donc $\text{aire}(MIJK) = \dfrac{1}{2} \times (14 - 2x)(14 + 2x) = 2(49 - x^2)$.

Par conséquent, le volume de la pyramide est :

$$P(x) = \frac{1}{3}\, 2x(49 - x^2).$$

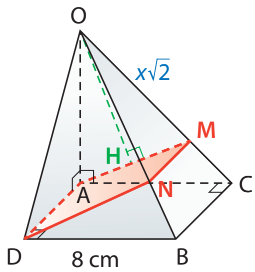
Notons f la fonction définie sur $[0\ ;\ 7]$ par $f(x) = \dfrac{2}{3}x(49 - x^2)$.

On a $f'(x) = \dfrac{2}{3}(49 - 3x^2)$, d'où le tableau de variation :

x	0		$\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$		7
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Il faut donc choisir M sur [AD] tel que $x = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$ pour que le volume soit maximal.

62 **1. a)** OAD et OAC sont des triangles rectangles en A. (DB) est perpendiculaire à (AD) et (AO), donc au plan (OAD) et en particulier à OD. Donc le triangle ODB est rectangle en D. De même, (BC) est perpendiculaire à (AC) et (OA) donc au plan (AOC) et en particulier à (OC). Donc le triangle OCB est rectangle en C.

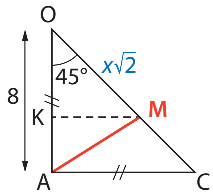


b) Les plans (AMN) et (OCB) sont tels que (AD) // (BC), donc l'intersection de ces plans, c'est-à-dire la droite (MN), est parallèle à (BC) (théorème du toit).
On a (MN) // BC, d'où (MN) est perpendiculaire au plan (AOC) donc à (AM). Il en résulte que le quadrilatère AMND est un trapèze rectangle en A et M.

2. a) D'après le théorème de Thalès, dans le triangle (OBC), on a

$\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{OM}{OC}$ soit $\dfrac{MN}{8} = \dfrac{x\sqrt{2}}{8\sqrt{2}}$,

soit $MN = x$.



$AM^2 = OA^2 + OM^2 - 2OA.OM\cos 45°$

$= 64 + 2x^2 - 16\sqrt{2}x\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc

$AM = \sqrt{2x^2 - 16x + 64} = \sqrt{(8-x)^2 + x^2}$.

b) Donc l'aire du trapèze est égale à $\dfrac{1}{2}(x + 8)\sqrt{(8-x)^2 + x^2}$.

3. a) $f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{(8-x)^2 + x^2} + \frac{(x+8)(2x-8)}{\sqrt{(8-x)^2+x^2}}$

$= \frac{1}{2}\,\frac{4x^2 - 8x}{\sqrt{(8-x)^2+x^2}} = \frac{2x(x-2)}{\sqrt{(8-x)^2+x^2}}$.

x	0		2		8
f'		–	0	+	
f	32	$\searrow$	$10\sqrt{10}$	$\nearrow$	64

b) Donc pour $x = 2$ l'aire est minimale.

4. Les plans (AMN) et (AOC) sont perpendiculaires, donc le projeté H de O sur le plan (AMN) est un point de (AM).

On a aire(OAM) $= \frac{1}{2}$ OH × AM $= \frac{1}{2}$ OA × MK, où K est le projeté de M sur (OA). Le triangle OKM est rectangle isocèle, donc MK = x. Il en résulte que OH $= \frac{8x}{\text{AM}}$, donc le volume de la pyramide de OAMN est égal à :

$\frac{1}{3} \times \frac{8x}{\sqrt{(8-x)^2+x^2}} \times \frac{1}{2}(x+8)\sqrt{(8-x)^2+x^2} = \frac{4x}{3}(x+8)$.

On obtient bien un trinôme du second degré.

CHAPITRE 10

Géométrie vectorielle

ACTIVITÉS (page 288)

Activité 1

1 **a)** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$.
$\overrightarrow{AE}$ appartient à la face ADHE.
$\overrightarrow{AF} = \vec{u} + \vec{v}$.
b) $\overrightarrow{AH} = \vec{v} + \vec{w}$.

	ABFE	AEHD	ABCD	BCGF	CDHG	EFGH
$\vec{u}$	Oui	Non	Oui	Non	Oui	Oui
$\vec{v}$	Oui	Oui	Non	Oui	Oui	Non
$\vec{w}$	Non	Oui	Oui	Oui	Non	Oui

Non.

2 **a)** I ∈ (HF) ⊂ (AFH).
b) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AH})$.
c) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{v} + \vec{w}) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AI} = \vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w}$.

3 **a)** La droite (AB) est orthogonale au plan BCGF, donc orthogonale à toute droite contenue dans ce plan.
ABJ est donc rectangle en B.
b) $BJ = \frac{1}{2} BG = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
$AJ = \sqrt{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.
c) $\overrightarrow{AJ} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$;
$\sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = AJ$.

Activité 2

1 **a)** et **b)** L'équation réduite de (AB) est $y = mx + p$, avec $m = \frac{1-(-1)}{2-(-2)} = \frac{1}{2}$ et $p = \frac{1-1}{2 \times 2} = 0$.
L'équation $-x + 2y = 0$ est donc une équation cartésienne de d.

2 **a)** $\overrightarrow{AB}(4 ; 2)$.
b) « Dire qu'un point M appartient à la droite d signifie qu'il existe un nombre réel λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$. »
c) « Dire qu'un point M appartient à la droite d signifie qu'il existe un nombre réel λ tel que $\begin{cases} x = -2 + 4\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \end{cases}$. »
Le paramètre est le réel λ.

3 **a)** D passe par le point C(2 ; 1) et est dirigée par le vecteur $\vec{u}(3 ; 1)$.
b) D : $\begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

PROBLÈME OUVERT

Méthode 1. On note Ω le centre du cube.
Ω est le milieu de [AG] et Ω ∈ (BH).
(BΩ) est la médiane issue de B dans le triangle ABG.
O est le milieu de [BG] ; (AO) est la médiane issue de A dans le triangle ABG.
On note I le centre de gravité du triangle ABG.
I ∈ (AO) ; I ∈ (BΩ) donc I ∈ (BH).
Méthode 2. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on a :
A(0 ; 0 ; 0), B(1 ; 0 ; 0), G(1 ; 1 ; 1), H(0 ; 1 ; 1), $O\left(1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.
$\overrightarrow{AO}\left(1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{BH}(-1 ; 1 \;\; 1)$.
Le centre de gravité de ABG est $I\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$.
$\overrightarrow{AI}\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$. $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AO}$, donc I ∈ (AO).
$\overrightarrow{BI}\left(-\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$. $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$, donc I ∈ (BH).

1 **1. a)** I est le milieu de [EG] donc, pour tout point de l'espace, et en particulier M : $2\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{ME}$.
b) $2\overrightarrow{MI}=-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{ME}\Rightarrow\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{ME}=\vec{0}$ (**1**).
2. De (**1**), on déduit
$$\begin{aligned}3\overrightarrow{DM}&=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DG}\\&=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CG}\\&=2\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BF}\\&=2\overrightarrow{DF}.\end{aligned}$$

2 **1. a)**
$$\begin{aligned}3\overrightarrow{JL}&=3\overrightarrow{JE}+3\overrightarrow{EL}\\&=2\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EJ}+2\overrightarrow{EI}\\&=2\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EJ}+2\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}\\&=\overrightarrow{EJ}+\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$
b) $3\overrightarrow{JL}=\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{JB}$.
B, J et L sont donc alignés.
2. a) $\overrightarrow{HK}=\overrightarrow{JB}$, donc $3\overrightarrow{JL}=\overrightarrow{HK}$.
b) $k=3$.

3 $$\begin{aligned}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}&\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}\\&\Leftrightarrow\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}.\end{aligned}$$

4 Les propriétés de la configuration permettent d'écrire :
$\overrightarrow{EK}=\overrightarrow{EH}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{EJ}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EH}$
et $\overrightarrow{EI}=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$.
« I, J, K, E coplanaires » équivaut à
« Il existe deux nombres s et t tels que $\overrightarrow{EJ}=s\overrightarrow{EK}+t\overrightarrow{EI}$ »,
ce qui équivaut à :
$$\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EH}=s\overrightarrow{EH}+\frac{s}{2}\overrightarrow{EF}+t\overrightarrow{EA}+\frac{t}{2}\overrightarrow{EF}.$$
Soit encore :
$$\begin{cases}t=1\\s=\dfrac{1}{2}\\\dfrac{s}{2}+\dfrac{t}{2}=1\end{cases}.$$
Or ce système n'a pas de solution. I, J, K, E ne sont donc pas coplanaires.

5 **1.** $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FJ}$ et $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FJ}$,
d'où $2\overrightarrow{IJ}=\underbrace{\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IE}}_{\vec{0}}+\overrightarrow{EF}+\underbrace{\overrightarrow{BF}+2\overrightarrow{FJ}}_{\overrightarrow{BG}}$.
2. $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$ et les trois vecteurs sont coplanaires.

6 $\overrightarrow{AE}(0\,;1\,;1)$, $\overrightarrow{IJ}\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;-1\right)$, $\overrightarrow{BH}(-1\,;-1\,;1)$,

$\overrightarrow{IJ}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BH}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$, ce qui permet de conclure.

7 $\overrightarrow{EI}\left(\frac{1}{2}\,;0\,;-1\right)$, $\overrightarrow{EJ}\left(1\,;\frac{1}{2}\,;-1\right)$, $\overrightarrow{EK}\left(\frac{1}{2}\,;1\,;0\right)$.
E, I, J, K sont coplanaires si et seulement si il existe deux nombres s et t tels que $\overrightarrow{EJ}=s\overrightarrow{EK}+t\overrightarrow{EI}$. s et t doivent donc vérifier le système :
$$\begin{cases}1=\dfrac{s}{2}+\dfrac{t}{2}\\\dfrac{1}{2}=s\\-1=-t\end{cases}$$
qui n'a pas de solution.

8 **1. a)** Cela revient à résoudre le système :
$$\begin{cases}4=-2a+b\\-2=3a-b\\-18=-a-2b\end{cases}$$
qui a pour solution $a=2$, $b=8$.
b) Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont donc coplanaires.
2. A(1 ; 1 ; 4) ; $\overrightarrow{AM}=\vec{w}$; $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont coplanaires, ce qui permet de conclure.

9 **1.** $\overrightarrow{JI}\left(-1\,;\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{KL}(0\,;1\,;0)$ et $\overrightarrow{KD}\left(1\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$.
$$\overrightarrow{JI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{KL}-\overrightarrow{KD}\quad(\mathbf{1}).$$
2. $(\overrightarrow{KL},\overrightarrow{KD})$ dirige le plan (DKL). I $\notin$ (DKL).
De (**1**), on déduit que (IJ) appartient à un plan strictement parallèle à (DKL). (IJ) est donc parallèle à (DKL).

10 $\vec{u}(-3\,;-1\,;2)$, $\vec{v}(1\,;0\,;2)$ et $\overrightarrow{DE}(3\,;-2\,;0)$ sont coplanaires si et seulement s'il existe deux nombres s et t vérifiant le système :
$$\begin{cases}3=-3s+t\\-2=-s\\0=2s+2t\end{cases}.$$
Or ce système n'a pas de solution.

11 $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ est un repère de l'espace si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.
Cela revient à prouver que le système :
$$\begin{cases}-2=-t\\-1=-s-t\\3=s-t\end{cases}$$
n'a pas de solution.
Or $s=-1$ et $t=2$ est solution de ce système.

12 « H appartient à (ABC)» équivaut à « $\overrightarrow{AH}(1\,;7\,;1)$, $\overrightarrow{AB}(3\,;4\,;-2)$, $\overrightarrow{AC}(-2\,;3\,;3)$ sont coplanaires » ce qui revient à résoudre le système :
$$\begin{cases}1=3s-2t\\7=4s+3t\\1=-2s+3t\end{cases}.$$
(1 ; 1) est solution de ce système. Réponse : oui.

13 **1.** $\overrightarrow{AK}\left(-\frac{1}{2}\,;1\,;1\right)$, $\overrightarrow{HI}\left(\frac{1}{2}\,;0\,;-1\right)$, $\overrightarrow{HJ}\left(\frac{1}{2}\,;1\,;-1\right)$.
2. a) Oui. $\overrightarrow{AK}=-2\overrightarrow{HI}+\overrightarrow{HJ}$.
b) A $\notin$ (HIJ). La droite (AK) est donc parallèle au plan (HIJ).

14 « A, B, C, M sont coplanaires » équivaut à : « $\overrightarrow{AB}(-2;0;-1)$; $\overrightarrow{AC}(0;-1;-3)$, $\overrightarrow{AM}(10;-1;2)$ sont coplanaires », ce qui revient à résoudre le système :

$$(S)\begin{cases}-2=10t\\0=-s-t\\-1=-3s+2t\end{cases}.$$

$\left(\frac{1}{5};-\frac{1}{5}\right)$ est solution de (S). Réponse : oui.

15 **1re méthode**

1. a) $2\overrightarrow{IJ}=2\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AJ}$
$=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$
$=-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

b) $3\overrightarrow{DG}=2\overrightarrow{DI}=2\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BI}$
$=-2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$
$=-2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

2. $-6(\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{DG})=3\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AD}+4\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$
$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$
$=\vec{u}$.

2e méthode

1. a) $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$, $J\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$, $G\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

b. $\vec{u}(1;1;1)$, $\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{DG}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$.

2. On retrouve $\vec{u}=-6\overrightarrow{IJ}-6\overrightarrow{DG}$.

16 **1.** $\begin{cases}x=-1\\y=2-t,\quad t\in\mathbb{R}.\\z=t\end{cases}$

2. $(O;\vec{i},\vec{j})$ est l'ensemble des points de cote nulle.
D'où $z=0=t$. On en déduit $x=-1$ et $y=2$, donc
$$d\cap(O;\vec{i},\vec{j})=I(-1;2;0).$$
$(O;\vec{i},\vec{k})$ est l'ensemble des points d'ordonnée nulle.
D'où $y=0=2-t\Leftrightarrow t=2$. On en déduit $x=-1$ et $z=2$, donc
$$d\cap(O;\vec{i},\vec{k})=J(-1;0;2).$$
$(O;\vec{j},\vec{k})$ est l'ensemble des points d'abscisse nulle.
D'où $x=0\neq-1$. On en déduit $d\cap(O;\vec{j},\vec{k})=\varnothing$.

17 $\overrightarrow{AB}(-4;2;2)$. Une représentation paramétrique de (AB) est :
$$\begin{cases}x=2-2t\\y=-1+t,\quad t\in\mathbb{R}.\\z=1+t\end{cases}$$
$z=0=1+t\Leftrightarrow t=-1$. D'où $x=4$ et $y=-2$ et
$$(AB)\cap(O;\vec{i},\vec{j})=I(4;-2;0).$$
$y=0=-1+t\Leftrightarrow t=1$. D'où $x=0$ et $z=2$ et
$$(AB)\cap(O;\vec{i},\vec{k})=J(0;0;2)=(AB)\cap(O;\vec{j},\vec{k}).$$

18 Il s'agit de la droite passant par $A(1;0;-2)$ et dirigée par $\vec{u}(2;3;-1)$.

19 **1.** $\overrightarrow{IG}\left(1;1;\frac{1}{2}\right)$. Une représentation paramétrique de (IG) est :
$$\begin{cases}x=t\\y=t,\qquad t\in\mathbb{R}.\\z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\end{cases}$$

2. (ABC) est l'ensemble des points de cote nulle.
$z=0=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\Leftrightarrow t=-1$. D'où $x=y=-1$ et
$$K(-1;-1;0).$$

20 d et Δ sont sécantes si et seulement si il existe un couple de nombres (s,t) tel que :
$$\begin{cases}3t+2=s+1\\-t-1=2s-3.\\t+1=-s+2\end{cases}$$
Le couple (1 ; 0) est l'unique solution de ce système.
d et Δ sont donc sécantes.

21 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc d et D ne sont pas parallèles.
$$d:\begin{cases}x=2+t\\y=-3+2t,\ t\in\mathbb{R}\\z=5+t\end{cases}\quad\text{et}\quad\Delta:\begin{cases}x=7+3s\\y=2+s,\ s\in\mathbb{R}.\\z=4-s\end{cases}$$
d et Δ sont sécantes si et seulement s'il existe un couple de nombres $(s;t)$ tel que :
$$\begin{cases}2+t=7+3s\\-3+2t=2+s.\\5+t=4-s\end{cases}$$
Ce système n'admet pas de solution ; Δ et d sont donc non coplanaires.

22 $\overrightarrow{AB}(-2;4;2)$. Le vecteur $\vec{u}(-1;-2;-1)$ dirige Δ et n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{AB}$. (AB) et Δ ne sont donc pas parallèles.
$$(AB):\begin{cases}x=1-2s\\y=-1+4s,\quad s\in\mathbb{R}.\\z=2+2s\end{cases}$$
Le système $\begin{cases}1-2s=-t\\-1+4s=5-2t\\2+2s=5-t\end{cases}$
a pour unique solution le couple (1 ; 1). Donc Δ et (AB) sont sécantes.

23 On démontre que (AB) et (CD) sont parallèles ou sécantes.
$\overrightarrow{AB}(-1;-2;-5)$ et $\overrightarrow{CD}(7;5;-7)$ ne sont pas colinéaires.
$$(AB):\begin{cases}x=-t\\y=5-2t,\ t\in\mathbb{R}\\z=5-5t\end{cases};\quad(CD):\begin{cases}x=-3+7s\\y=2+5s\\z=4-7s\end{cases}.$$
Le système $\begin{cases}-t=-3+7s\\5-2t=2+5s\\5-5t=4-7s\end{cases}$
a pour unique solution le couple $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$. (AB) et (CD) sont donc sécantes.

24 $\vec{u}(-3;1;2)$ dirige d et $\vec{v}(6;-2;-4)$ dirige d' ; $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. d passe par $A(1;1;-3)$ et d' par $B(0;1;3)$. $AB(-1;0;6)$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}$.
d et d' sont donc parallèles.

25 $\vec{u}(-1;3;1)$ dirige d et $\vec{v}(2;-6;-2)$ dirige Δ.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. d passe par $A(1;2;0)$ et Δ par $B(0;5;1)$.
$$\overrightarrow{AB}(-1;3;1)=\vec{u}.$$
d et Δ sont donc confondues.

Activités de recherche (page 302)

30 **Démontrer que deux droites sont sécantes**

• ***Les outils***

– Position relative de deux droites dans l'espace.

– Vecteurs coplanaires.

• ***Les objectifs***

– Savoir démontrer que deux droites sont sécantes.

– Savoir démontrer que trois vecteurs sont coplanaires.

1. a) Les coordonnées de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ ne sont pas proportionnelles.

b) d et d' ne sont donc pas parallèles. Elles sont sécantes ou coplanaires.

2. a) $\begin{cases} 0 = a + 2b \\ -2 = b \\ -2 = -2a - 3b \end{cases}$.

b) $\begin{cases} 0 = a + 2b \\ -2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -2 \end{cases}$.

$-2 \times 4 - 3 \times (-2) = -2$, donc AB, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires.

3. a) « $\mathrm{I} \in d$ » équivaut à « Il existe $k \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{\mathrm{AI}} = k\vec{u}$. »

« $\mathrm{I} \in d'$ » équivaut à « Il existe $k' \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{\mathrm{BI}} = k'\vec{v}$. »

b) $\begin{cases} 3 + k = 3 + 2k' \\ -1 = -3 + k' \\ 1 - 2k = -1 - 3k' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 4 \\ k' = 2 \end{cases}$, donc I(7 ; – 1 ; – 7).

31 **Déterminer un ensemble de points**

• ***Les outils***

– Exploiter un logiciel pour conjecturer un ensemble de points.

– Calculer des coordonnées dans un repère donné.

• ***Les objectifs***

– Savoir calculer des coordonnées en fonction de deux paramètres.

– Savoir exploiter le calcul vectoriel pour démontrer qu'un point appartient à un ensemble.

1. a) A et B sont deux points M particuliers.

C et D sont deux points M' particuliers.

E, F, H et G sont bien les milieux de segments [MM'] particuliers.

b) $\overrightarrow{\mathrm{GH}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{EF}}$, donc EFHG est un parallélogramme.

2. a) M(t ; 0 ; 0) dans le repère $(\mathrm{A}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}})$.

$\overrightarrow{\mathrm{AM'}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} + s\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} + s\overrightarrow{\mathrm{CA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$= (1 - s)\,\overrightarrow{\mathrm{AC}} + s\overrightarrow{\mathrm{AD}}$.

Donc M'(0 ; $1 - s$; s) et $\mathrm{I}\left(\dfrac{t}{2} ; \dfrac{1-s}{2} ; \dfrac{s}{2}\right)$.

b) $\mathrm{E}\left(0 ; \dfrac{1}{2} ; 0\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{EI}}\left(\dfrac{t}{2} ; \dfrac{-s}{2} ; \dfrac{s}{2}\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{EF}}\left(\dfrac{1}{2} ; 0 ; 0\right)$ et

$\overrightarrow{\mathrm{EG}}(0 ; -1 ; 1)$.

$\overrightarrow{\mathrm{EI}} = t\overrightarrow{\mathrm{EF}} + s\overrightarrow{\mathrm{EG}}$ donc I ∈ (EFG).

3. a) $\overrightarrow{\mathrm{EI}} + \overrightarrow{\mathrm{EI}} = \overrightarrow{\mathrm{EM}} + \overrightarrow{\mathrm{MI}} + \overrightarrow{\mathrm{EM'}} + \overrightarrow{\mathrm{M'I}} = \overrightarrow{\mathrm{EM}} + \overrightarrow{\mathrm{EM'}}$.

$= \overrightarrow{\mathrm{EA}} + \overrightarrow{\mathrm{AM}} + \overrightarrow{\mathrm{EC}} + \overrightarrow{\mathrm{CM'}} = \overrightarrow{\mathrm{AM}} + \overrightarrow{\mathrm{CM'}}$.

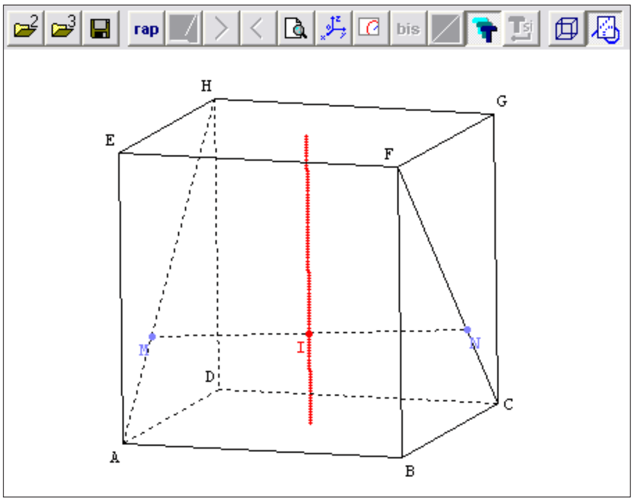
b) $\overrightarrow{\mathrm{EI}} = \dfrac{t}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{s}{2}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

$= t\overrightarrow{\mathrm{EF}} + s\overrightarrow{\mathrm{EG}}$.

$t \in [0 ; 1]$ et $s \in [0 ; 1]$ (On retrouve le résultat de la question **2. b)**). Le point I décrit donc l'intérieur du parallélogramme EFHG.

32 **Narration de recherche**

1.



On conjecture que I décrit le segment [JK], où J et K désignent les centres respectifs des faces ABCD et EFGH.

2. On note $t = \dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AH}}$; $t \in [0 ; 1]$.

$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = t\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CN}} = t\overrightarrow{\mathrm{CF}}$.

$\overrightarrow{\mathrm{JI}} = \overrightarrow{\mathrm{JA}} + \overrightarrow{\mathrm{AM}} + \overrightarrow{\mathrm{MI}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{JI}} = \overrightarrow{\mathrm{JC}} + \overrightarrow{\mathrm{CN}} + \overrightarrow{\mathrm{NI}}$.

D'où $2\overrightarrow{\mathrm{JI}} = \overrightarrow{\mathrm{AM}} + \overrightarrow{\mathrm{CN}}$

$= t\overrightarrow{\mathrm{AH}} + t\overrightarrow{\mathrm{CF}}$.

De plus, $2\overrightarrow{\mathrm{JK}} = \overrightarrow{\mathrm{JA}} + \overrightarrow{\mathrm{AH}} + \overrightarrow{\mathrm{HK}} + \overrightarrow{\mathrm{JC}} + \overrightarrow{\mathrm{CF}} + \overrightarrow{\mathrm{FK}}$

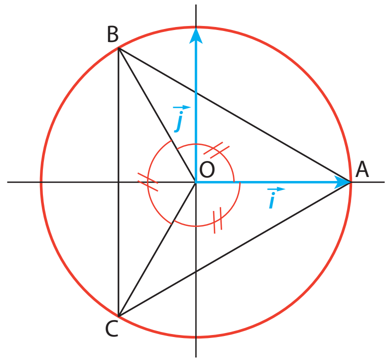
$= \overrightarrow{\mathrm{AH}} + \overrightarrow{\mathrm{CF}}$.

Donc $\overrightarrow{\mathrm{JI}} = t\overrightarrow{\mathrm{JK}}$ et I décrit bien le segment [JK].

33 **Narration de recherche**

1. Les angles $\widehat{\mathrm{AOB}}$, $\widehat{\mathrm{BOC}}$ et $\widehat{\mathrm{COA}}$ doivent être égaux à $\dfrac{2\pi}{3}$.

On a $\mathrm{B}\left(-\dfrac{1}{2} ; \dfrac{\sqrt{3}}{2} ; 0\right)$ et $\mathrm{C}\left(-\dfrac{1}{2} ; -\dfrac{\sqrt{3}}{2} : 0\right)$, ou inversement.



2. $\mathrm{AB} = \sqrt{\dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{4}} = \sqrt{3}$.

L'utilisation d'un logiciel de géométrie permet de conjecturer que D appartient à l'axe $(\mathrm{O}\,;\vec{k})$.

On pose D(O ; O ; z).

$\mathrm{AD}^2 = 3 \Leftrightarrow 1 + z^2 = 3 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{2}$.

On vérifie enfin que $\mathrm{CD} = \mathrm{BD} = \sqrt{3}$.

34 **TD – Étudier la position relative de deux plans**

1. c) Les plans semblent parallèles. $\overrightarrow{BL}$ et $\overrightarrow{CI}$ semblent colinéaires.

d) Notons M le milieu de [AE].

$M \in (BLK)$. $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KM}$ semblent égaux et donc colinéaires.

2. a) • $\overrightarrow{BL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$. $\overrightarrow{BL}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont donc colinéaires.

• B, M et K appartiennent à (BLK). $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{KM}$ ne sont pas colinéaires et constituent ainsi un couple de vecteurs directeurs de (BLK).

• $\overrightarrow{KM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{IJ}$;

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{CI}$.

b) (BLK) est dirigé par le couple de vecteurs $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{CI})$ qui dirige également le plan (JIC). (BLK et JIC) sont ainsi parallèles.

35 **TD – Centre de gravité d'un tétraèdre**

1. a) De (**1**) on déduit : $3\overrightarrow{GD'} + \overrightarrow{D'A} + \overrightarrow{D'B} + \overrightarrow{D'C} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

En tenant compte de (**2**), on obtient : $3\overrightarrow{GD'} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$, ce qui équivaut à $4\overrightarrow{GD'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{D'G} = \frac{1}{4}\overrightarrow{D'D}$.

b) $\overrightarrow{D'G}$ et $\overrightarrow{DD'}$ sont colinéaires, donc D', D et G sont alignés.

2. Il y a autant de plans médians que d'arêtes : 6.

3. a) Il y a autant de bi-médianes que de couples d'arêtes opposées : 3.

b) $I \in [AB]$ et J est le milieu de l'arête opposée à [AB] donc (IJ) appartient au plan médian issu de l'arête [AB].

$J \in [CD]$ et I est le milieu de l'arête opposée à [CD] ; donc (IJ) appartient au plan médian issu de l'arête [CD].

c) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GJ} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GI} = \overrightarrow{JG}$

$\Leftrightarrow$ G est milieu de [IJ].

Donc $G \in (IJ)$.

Un raisonnement similaire pour chaque couple d'arêtes opposées permet de prouver l'appartenance de G à chaque bi-médiane.

d) G est le point de concours des bi-médianes du tétraèdre.

4. a) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

b) En notant $G(x_G ; y_G ; z_G)$, $A(x_A ; y_A ; z_A)$, … on peut écrire :

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4} ;$$
$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4} ;$$
$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}.$$

36 **TD – Vecteur moment d'une force**

1. « $F_y = 0$ » équivaut à « La clé ne peut tourner. »

2. M(0,3 ; 0 ; 0,07).

3. $\mathcal{M}_{(A)}(\overrightarrow{F_1})$ a pour coordonnées (14 ; – 4,2 ; – 60).

4. $\mathcal{M}_z = F_x \times 0 - F_y \times 0{,}3 = 0{,}3F_y$.

5. Pour $\overrightarrow{F_1}$, $|\mathcal{M}_z| = 60 < 65$. Cette force ne permet pas de desserrer la vis.

6. Pour $\overrightarrow{F_2}$, $|\mathcal{M}_z| = 75 > 65$. Cette force permet le desserrage.

EXERCICES Entraînement (page 307)

DE TÊTE

37 **1.** M = F.

2. N = G.

38 $\left(\frac{1}{2} ; \frac{3}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

$\overrightarrow{AB}(-5 ; 3 ; 3)$.

39 $\overrightarrow{AB}(1 ; -1 ; 1)$. $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ donc $B \in d$.

40 $b = -3$.

41 $\|\vec{u}\| = \sqrt{17}$.

42 Le point A est le point de d de paramètre – 1.

VECTEURS DE L'ESPACE

43 **a)** $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF}$.

b) $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{HE}$.

44 **a)** et **b)** $\overrightarrow{AJ}$.

45 $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

La réponse est oui.

46 **a)** $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB}$

$= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CG}$

$= \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{GA}$.

47 **a)** $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CE}$.

b) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{CG}$.

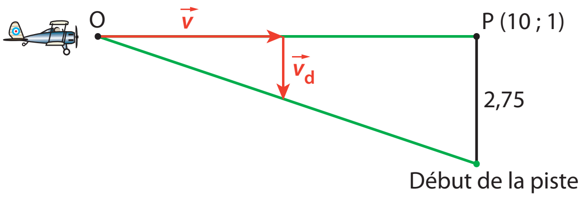
48 *Corrigé sur le site élève.*

49 $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{AC}$.

50 *Corrigé sur le site élève.*

51 **1.** $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BI}$
$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.
$\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DJ}$
$= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.
2. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}) = \vec{0}$.

52 **1.** Dans le repère $(O ; \overrightarrow{OE} ; \overrightarrow{ON})$, on a :
$\vec{v}_p(60 \sin(65°) ; 60 \cos(65°))$.
2. a) $\vec{v}_a(10\sqrt{3} ; -10)$.
$\vec{v} = \vec{v}_a + \vec{v}_p$,
donc $v(10\sqrt{3} + 60 \sin(65°) ; -10 + 60 \cos(65°))$.
$\overrightarrow{OP}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc cette route ne permet pas d'arriver en P.
b) On note α ce cap.
À l'aide d'un logiciel de géométrie, on trouve $\alpha \approx 73°$ à 1° près.
3. a) $OP = \sqrt{101}$ km. On note v_d la vitesse de descente.



$$\frac{v_d}{2{,}75} = \frac{v}{OP} \Leftrightarrow v_d = \frac{2{,}75 \times 60}{\sqrt{101}} \approx 16{,}42 \text{ m.s}^{-1}.$$

b) Il suffit d'ajouter une composante « verticale » au vecteur « vitesse propre ».

VECTEURS COLINÉAIRES

53 *Corrigé sur le site élève.*

54 $\overrightarrow{AB}(-1 ; 6 ; 1)$; $\overrightarrow{AC}(3 ; -18 ; -3)$; $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$.
La réponse est oui.

55 $\overrightarrow{AB}(-4 ; 2 ; 4)$; $\overrightarrow{AC}(a - 1 ; b ; 8)$.
Si $a = -7$ et $b = 4$, alors $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$. La réponse est oui.

56 $\overrightarrow{AB}(-4 ; -6 ; 2)$; $\overrightarrow{CD}(2 ; 3 ; 1)$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires. La réponse est non.

57 Si $a = 3$ et $b = 10$, alors $\vec{v} = -2\vec{u}$.

58 $\vec{u} = -2\vec{v}$. La définition 1 et le théorème 1 permettent d'affirmer que ces droites sont parallèles.

59 $\overrightarrow{AB}(2 ; 1 ; 0)$; $\overrightarrow{DC}(2 ; 1 ; 0)$. La réponse est oui.

60 **1.** $\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GI} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$.

2. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GI} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AI} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
Ainsi, A, G et I sont alignés et G est le centre de gravité du triangle ABC.

61 **1. a)** $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{KG} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$ **(1)**
b) $\overrightarrow{KD}$ et $\overrightarrow{KG}$ sont colinéaires donc K, D et G sont alignés.
2. **(1)** $\Leftrightarrow 4\overrightarrow{KD} + 3\overrightarrow{DG} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{DK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DG}$.

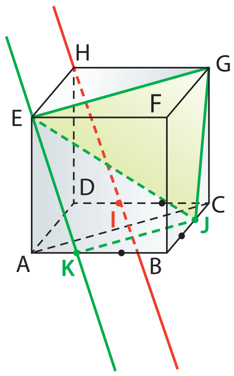
VECTEURS COPLANAIRES

62 **1. a)** $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ **(1)**.
b) De **(1)**, on déduit que $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.
Donc $M \in (ABC)$.
2. $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{DN} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AN} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.
$N \in (ABD)$.

63 **1.** $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EJ}$
$= \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
$= \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.
2. $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{HB}$.
3. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{HB} + 2\overrightarrow{IJ}$. Le théorème 4 permet de conclure.

64 $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG}$
$= \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AK} + \frac{1}{2}\overrightarrow{KL}$.
$\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{KL}$ sont coplanaires. $I \notin (AKL)$.
(IJ) appartient à un plan parallèle à (AKL), donc (IJ) est parallèle à (AKL).

65 **1.** K est à l'intersection de la droite (AB) et de la droite parallèle à (AC) passant par J.



2. a) La mise en œuvre du théorème de Thalès dans le triangle ABC conduit à :

$$\frac{AK}{AB} = \frac{CJ}{CB} \text{ d'où } \overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

$k = \frac{1}{3}$.

b) $\overrightarrow{IH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{KE}$.

(IH) et (KE) sont parallèles et (KE) ⊂ (EGJ), donc (IH) est parallèle à (EGJ).

66 **1.** $3\vec{u} - \vec{v} - \vec{w} = \vec{0}$.
2. $\vec{w} = 3\vec{u} - \vec{v}$. D'après le théorème 4, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

67 *Corrigé sur le site élève.*

68 **1.** $\overrightarrow{AB}(-2 ; 0 ; -1)$ et $\overrightarrow{AC}(0 ; -1 ; -3)$ ne sont pas colinéaires, donc A, B et C ne sont pas alignés.
2. M ∈ (ABC) s'il existe deux nombres s et t tels que :

$$\overrightarrow{AM}(m-3 ; -1 ; 2) = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}.$$

Cela revient à résoudre le système $\begin{cases} m-3 = -2s \\ -1 = -t \\ 2 = -s \end{cases}$.

Ce système a pour solution $(m = 13 ; s = -5 ; t = 1)$.

69 « A, B, C, D sont coplanaires » équivaut à « Il existe deux nombres s et t tels que :

$\overrightarrow{AD}(x-3 ; y-2 ; z-1) = s\overrightarrow{AB}(-2 ; 0 ; -1) + t\overrightarrow{AC}(0 ; -1 ; -2)$. »

Cela équivaut à :
« Il existe deux nombres s et t tels que :

$$\begin{cases} x-3 = -2s \\ y-2 = -t \\ z-1 = -s-3t \end{cases}. »$$

70 **1.** $\overrightarrow{AB}(-3 ; -1 ; 2)$ et $\overrightarrow{AC}(-1 ; 0 ; -2)$ ne sont pas colinéaires, donc A, B et C ne sont pas alignés.
2. (DE) est parallèle à (ABC) si et seulement si $\overrightarrow{DE}(3 ; -2 ; 0)$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Cela revient à prouver l'existence d'une solution au système :

$$\begin{cases} 3 = -3s - t \\ -2 = -s \\ 0 = 2s - 2t \end{cases}.$$

Ce système n'a pas de solution. La réponse est donc non.

71 $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de vecteurs si et seulement si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires. Cela revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} -1 = -2t \\ -1 = -s-t \\ -1 = s+3t \end{cases}.$$

Ce système n'a pas de solution. La réponse est donc oui.

72 On cherche m pour que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne soient pas coplanaires. Cela revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} 1 = s+2t \\ m = s+7t \\ 2 = s-3t \end{cases}.$$

Ce système a pour solution $\left(m = 0 ; s = \frac{7}{5} ; t = -\frac{1}{5}\right)$.

Il faut donc choisir m différent de 0.

73 **1.** O ∉ (ABC), donc $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ ne sont pas coplanaires.
2. I est milieu de [AB], donc $I\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 0\right)$.

J est symétrique de I par rapport à O, donc $J\left(-\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2} ; 0\right)$.

« J est le milieu de [CD] » conduit à D(– 1 ; – 1 ; – 1).

CALCULER DANS UN REPÈRE

74 **1.** $\overrightarrow{AB}(-1 ; 3 ; -3)$, $\overrightarrow{AC}(-4 ; 2 ; -1)$, $\overrightarrow{AD}(-3 ; -1 ; 2)$.
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$, donc $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires et A, B, C, D le sont également.
2. $\overrightarrow{BC}(-3 ; -1 ; 2) = \overrightarrow{AD}$, donc ABCD est un parallélogramme.

75 $\|\vec{u}\| = \sqrt{13}$; $\|\vec{v}\| = \sqrt{26}$; $\|\vec{w}\| = \sqrt{6}$.

76 **a)** $\|\vec{u}\| = 5 \Leftrightarrow a^2 + 18 = 5^2 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{7}$.
b) $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \Leftrightarrow a^2 + 18 = 30 \Leftrightarrow a = \pm 2\sqrt{3}$.
c) $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{30} \Leftrightarrow a^2 + 10a + 24 = 0 \Leftrightarrow a = -4$ ou $a = -6$.

77 AB = AC = BC = 2, donc ABC est équilatéral.

78 $C(-1 ; -1 ; -\sqrt{2})$.
$AB^2 = BC^2 = 8$ et $AC^2 = 16 = AB^2 + BC^2$, ce qui permet de conclure.

79 AB = AC = AD = BC = BD = $4\sqrt{2}$. ABCD est donc régulier.

80 AB = AC = AD = 5, donc B, C et D sont équidistants de A, ce qui permet de conclure.

81 C(x ; 0 ; 0) est équidistant de A et B si et seulement si

$$(x-2)^2 + 10 = x^2 + 26 \Leftrightarrow x = -3.$$

82 $AC = BC = \sqrt{59}$; $AD = BD = \sqrt{21}$; $AE = 2\sqrt{2}$ et $BE = 2$.
C et D appartiennent au plan médiateur de [AB].

83 *Corrigé sur le site élève.*

REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES

84 **a)** $d : \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 - t, \\ y = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

b) $d : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - t, \\ y = -1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

85 $\mathscr{E}_1$ est la droite passant par A(– 1 ; 2 ; – 2) et dirigée par $\vec{u}(3 ; 1 ; 1)$.
$\mathscr{E}_2$ est la droite passant par B(1 ; 0 ; 1) et dirigée par $\vec{v}(2 ; 3 ; 1)$.

86 **1. a)** I(1 ; – 2 ; – 1).
b) $\vec{u}(-3 ; 2 ; -1)$.

c) $x = -5 \Leftrightarrow -5 = 1 - 3t \Leftrightarrow t = 2$.
Il s'agit du point $B(-5\,;2\,;-3)$.

2. $x = -10 \Leftrightarrow 1 - 3t = -10 \Leftrightarrow t = \frac{11}{3}$.

Pour $t = \frac{11}{3}$ on a : $-2 + 2t = \frac{16}{3}$ et $-1 - t = -\frac{14}{3}$.
Donc $A \in \Delta$.

87 **a)** $\Delta : \begin{cases} x = -4 \\ y = 5, \\ y = -2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

b) $\overrightarrow{AB}(-2\,;0\,;4)$; $\Delta : \begin{cases} x = -4 - 2t \\ y = 5, \\ y = -2 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

c) $\vec{u}(0\,;-2\,;-5)$ dirige d.

$\Delta : \begin{cases} x = -4 \\ y = 5 - 2t \\ y = -2 - 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

88 d et d' sont sécantes si et seulement si le système :
$$\begin{cases} 6 - 3s = -3 + t \\ -7 + 2s = -3. \\ -1 + s = -5 + 2t \end{cases}$$
admet une solution unique. La résolution donne $(s = 2\,;t = 3)$.
Donc $I(0\,;-3\,;1)$.

89 **a)** $\overrightarrow{IJ_m}(2\,;-m\,;m)$ et $\vec{w}(1\,;1\,;-1)$ dirige Δ.
$\overrightarrow{IJ_m}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires si et seulement si $m = -2$.
L'affirmation est donc **vraie**.

b) Une représentation paramétrique de D_m est :
$$\begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = 1 - ms, \quad s \in \mathbb{R}. \\ z = ms \end{cases}$$
Δ et D_m sont sécantes si et seulement si il existe au moins une solution au système :
$$\begin{cases} 1 + 2s = t & \textbf{(1)} \\ 1 - ms = 1 + t & \textbf{(2)}. \\ ms = 2 - t & \textbf{(3)} \end{cases}$$
(2) + **(3)** $\Leftrightarrow 1 = 3$, ce qui est absurde. L'affirmation est donc **fausse**.
c) Vrai. Voir le **b)**.
d) « $\overrightarrow{IJ_m}$, $\vec{u}(0\,;1\,;-1)$ et $\vec{v}(1\,;-1\,;-1)$ sont coplanaires » équivaut à « Le système, d'inconnues m, s, t, $\begin{cases} 2 = t \\ -m = s - t \\ m = -s - t \end{cases}$ admet au moins une solution. »
Ce système n'a pas de solutions, donc $\overrightarrow{IJ_m}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont jamais coplanaires et D_m coupe toujours le plan $\mathcal{P}$.
L'affirmation est donc **vraie**.

90 $\overrightarrow{BC}(2\,;-2\,;3)$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires, donc d et d' ne sont pas parallèles.
On utilise les représentations paramétriques. d et d' sont sécantes si et seulement si le système :
$$\begin{cases} t = 2 + 2s \\ 2 + t = -2s \\ 3 + t = -1 + 3s \end{cases}$$
admet une solution.
Ce système n'admet pas de solution, donc d et d' sont non coplanaires.

91 *Corrigé sur le site élève.*

92 **1. a)** et **b)** $\overrightarrow{AJ}\left(-\frac{1}{2}\,;0\,;-1\right)$ et $\overrightarrow{CI}\left(0\,;-\frac{1}{2}\,;-1\right)$.
Étudier l'intersection de (AJ) et (CI) revient à résoudre le système :
$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{2}t = 0 \\ 0 = 1 - \frac{1}{2}s \\ 1 - t = 1 - s \end{cases}$$
qui a pour solution ($s = 2$; $t = 2$). (AJ) et (AI) sont donc sécantes en $P(0\,;0\,;-1)$.

2. $\overrightarrow{CJ}\left(\frac{1}{2}\,;-1\,;-1\right)$ et $\overrightarrow{FK}\left(0\,;-\frac{1}{2}\,;1\right)$ ne sont pas colinéaires, donc (CJ) et (FK) ne sont pas parallèles.
Étudier l'intersection de ces deux droites revient à résoudre le système :
$$\begin{cases} \frac{1}{2}t = 1 \\ 1 - t = 1 - \frac{1}{2}s \\ 1 - t = s \end{cases}$$
qui n'a pas de solution. Les droites (CJ) et (FK) ne sont donc pas colinéaires.

93 **1.** $\overrightarrow{AB}(-2\,;0\,;1)$ et $\overrightarrow{AC}(-2\,;2\,;2)$ ne sont pas colinéaires.
2. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ n'ont pas leurs coordonnées proportionnelles à $(0\,;0\,;1)$.

3. $(O\,;\vec{k}) : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \quad p \in \mathbb{R}\,; \\ z = p \end{cases}$

$(ABC) : \begin{cases} x = 2 - 2s - t \\ y = 1 + t \\ z = s + t \end{cases}, s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$.

Étudier l'intersection de $(O\,;\vec{k})$ et (ABC) revient à résoudre le système :
$$\begin{cases} 2 - 2s - t = 0 \\ 1 + t = 0 \\ s + t = p \end{cases}$$
qui a pour solution $\left(s = \frac{3}{2}\,;t = -1\,;p = \frac{1}{2}\right)$, d'où $I\left(0\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$.

94 **1.** Ces vecteurs peuvent diriger un plan car ils ne sont pas colinéaires.

2. $\begin{cases} x = 3 + s - t \\ y = -1 + 3s + 2t, \quad s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}. \\ z = 4 - s + 2t \end{cases}$

95 **1.** $\overrightarrow{AB}(-1\,;3\,;-4)$ et $\overrightarrow{AC}(-5\,;4\,;-1)$ ne sont pas colinéaires, donc A, B et C définissent un plan.
$$(ABC) : \begin{cases} x = 4 - s - 5t \\ y = -1 + 3s + 4t, \; s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 - 4s - t \end{cases}$$
2. D appartient à (ABC) si et seulement si le système :
$$\begin{cases} -3 = 4 - s - 5t \\ -2 = -1 + 3s + 4t \\ 13 = 3 - 4s - t \end{cases}$$
admet une solution. La résolution donne $s = -3$ et $t = 2$, donc $D \in (ABC)$.
La même méthode donne $E \notin (ABC)$.

96 **1.** $\overrightarrow{AB}(2\,;-2\,;-7)$ et $\overrightarrow{AC}(1\,;0\,;-8)$ ne sont pas colinéaires, donc A, B et C définissent un plan.

2. $\begin{cases} x = 1 + 2s + t \\ y = -2s \\ z = -2 - 7s - 8t \end{cases}, s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}.$

3. a) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\vec{i}$ ne sont pas coplanaires, donc ces deux plans ne peuvent être parallèles.

b) $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est l'ensemble des points de cote nulle.

D'où $-2 - 7s - 8t = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{7}{8}s$.

$$\Delta : \begin{cases} x = \dfrac{3}{4} + \dfrac{9}{8}s \\ y = s \\ y = 0 \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$$

97 **1.** $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est l'ensemble des points de cote nulle.
Cela conduit à $1 + 3t - s = 0 \Leftrightarrow s = 1 + 3t$.
$\mathcal{P}$ et $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ s'interceptent suivant la droite d dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 2 + 5t \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2. $\Pi : \begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 3 - t + 2s \\ z = 3t - s \end{cases}, s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}.$

3. $A \in (O\,;\vec{i},\vec{j})$. Δ et d sont parallèles et

$$d : \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 3 + 5t \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

POSITION RELATIVE DE DROITES ET DE PLANS

98 On choisit le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

$I\left(\dfrac{1}{3}\,;0\,;0\right)$, $J\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\,;0\right)$, $G\left(\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{IG}\left(0\,;\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{1}{3}\right)$.

$\overrightarrow{AC}(0\,;1\,;0)$, $\overrightarrow{AD}(0\,;0\,;1)$.

$\overrightarrow{IG} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, donc $\overrightarrow{IG}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

$I \notin (ACD)$, ce qui permet de conclure.

99 *Corrigé sur le site élève.*

100 $\vec{u}$, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont coplanaires. $A \notin (O\,;\vec{i},\vec{j})$.
$(A\,;\vec{u})$ est parallèle à $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

101 **1.** Voir la démonstration du théorème 4.

2. On choisit le repère $(C\,;\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{CA})$.

On a $E(2\,;0\,;0)$, $K\left(0\,;\dfrac{1}{2}\,;0\right)$, $G\left(0\,;\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{1}{3}\right)$, $I\left(\dfrac{1}{2}\,;0\,;\dfrac{1}{2}\right)$,
$J\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\,;0\right)$.

$\overrightarrow{IJ}\left(0\,;\dfrac{1}{2}\,;-\dfrac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{IG}\left(-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{3}\,;-\dfrac{1}{6}\right)$, $\overrightarrow{IE}\left(\dfrac{3}{2}\,;0\,;-\dfrac{1}{2}\right)$. Donc

$$\overrightarrow{IE} = 2\overrightarrow{IJ} - 3\overrightarrow{IG}.$$

102 **1.** $E(0\,;0\,;1)$, $H(0\,;2\,;1)$, $G(1\,;2\,;1)$.

2. a) L'aire de la base GFH vaut 1 et la hauteur GC vaut 1.
Donc $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}$.

b) $F(1\,;0\,;1)$, $I(0\,;1\,;0)$.
$FI^2 = 3\,;\ IH^2 = 2\,;\ FH^2 = 5$. La relation de Pythagore permet de conclure.

c) L'aire du triangle FIH est $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

$\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sqrt{6}}{2} \times d$, où d désigne la distance de G à (FIH).

On en déduit que $d = \mathcal{V}\sqrt{6} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

3. a) $\overrightarrow{FI}(-1\,;1\,;-1)$, $\overrightarrow{FH}(-1\,;2\,;0)$, $\overrightarrow{AG}(1\,;2\,;1)$.

$$(FIH) : \begin{cases} x = 1 - s - t \\ y = s + 2t \\ z = 1 - s \end{cases}, s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}.$$

$$(AG) : \begin{cases} x = p \\ y = 2p \\ z = p \end{cases}, p \in \mathbb{R}.$$

b) Étudier l'intersection de (AG) et (FIH) revient à résoudre le système : $\begin{cases} p = 1 - s - t \\ 2p = s + 2t \\ p = 1 - s \end{cases}$

dont la solution est $\left(p = \dfrac{1}{3}, s = \dfrac{2}{3}, t = 0\right)$. D'où $K\left(\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{2}{3}\,;\dfrac{1}{3}\right)$.

4. $GK = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ donc $GK > d$ et (FIH) coupe Σ suivant un cercle de rayon $\sqrt{\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \sqrt{2}$.

AVEC LES TICE

103 **A.** On a $\overrightarrow{AB}(1\,;1\,;1)$ et $\overrightarrow{CD}(-1\,;-1\,;1)$.

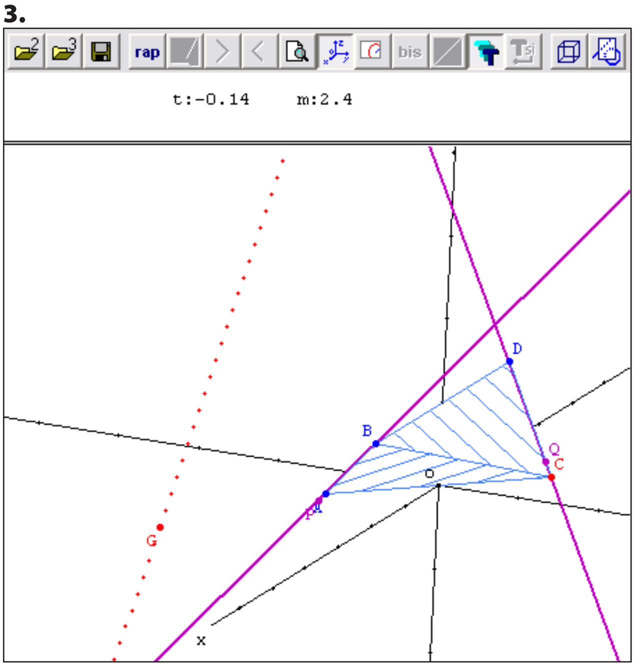
1. a) On a $P(1 + t\,;-1 + t\,;t)$ et $Q(-1 + t\,;1 + t\,;-t)$.

b) La relation vectorielle définissant $G(x\,;y\,;z)$ se traduit par :

$$\begin{cases} (1 + m)(1 + t - x) + (1 - m)(-1 + t - x) = 0 \\ (1 + m)(-1 + t - y) + (1 - m)(1 + t - y) = 0. \\ (1 + m)(t - z) + (1 - m)(-t - z) = 0 \end{cases}$$

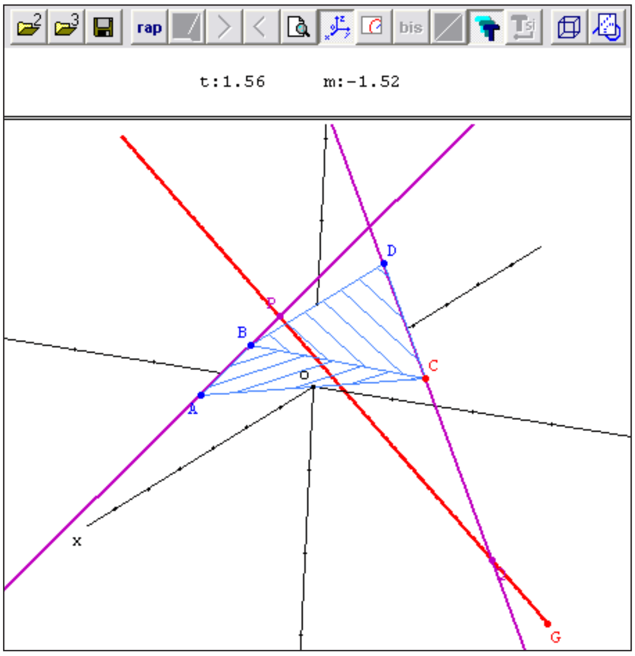
D'où $G(m + t\,;-m + t\,;mt)$.

3.



Conjecture : pour une valeur m fixée, G décrit une droite.

4.



Conjecture : pour une valeur t fixée, G décrit la droite (QP).

B. 1. t est fixé. L'ensemble des points G est caractérisé par :

$$\begin{cases} x = t + m \\ y = t - m, \quad m \in \mathbb{R}, \\ z = tm \end{cases}$$

qui est une représentation paramétrique de la droite passant par $M_t(t\,;\,t\,;\,0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}_t(1\,;\,-1\,;\,t)$ (P et Q sont les points de cette droite de paramètres respectifs 1 et – 1).

2. m est fixé. L'ensemble des points G est caractérisé par le système :

$$\begin{cases} x = m + t \\ y = -m + t, \quad t \in \mathbb{R}, \\ z = mt \end{cases}$$

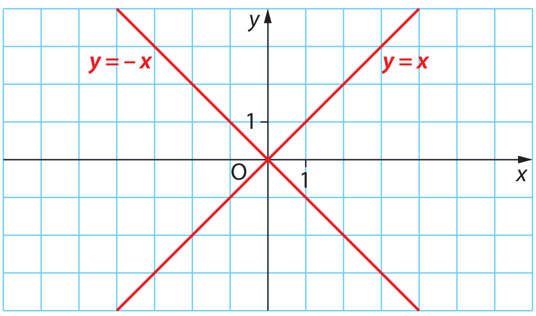
qui est une représentation paramétrique de la droite passant par $N_m(m\,;\,-m\,;\,0)$ et dirigée par $v_t(1\,;\,1\,;\,m)$.

3. a) Γ est l'ensemble des points dont les coordonnées sont :

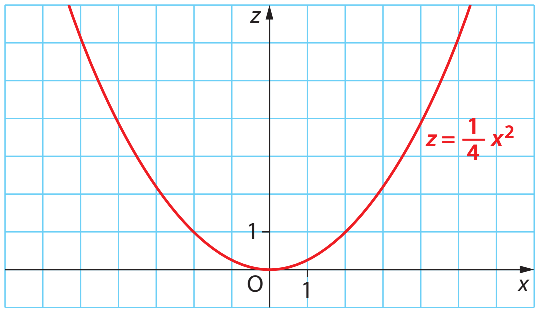
$$\begin{cases} x = t + m & \textbf{(1)} \\ y = t - m & \textbf{(2)}, \quad m \text{ et } t \in \mathbb{R}. \\ z = mt & \textbf{(3)} \end{cases}$$

De **(1)** et **(2)** on déduit $2t = x + y$ et $2m = x - y$.
De **(3)** on déduit $4z = x^2 - y^2$ **(E)**.

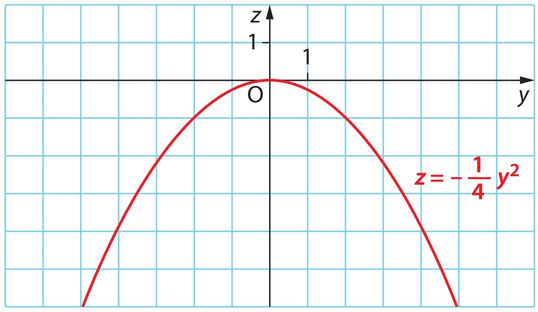
b) $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j})$ est l'ensemble des points de cote nulle : $z = 0$.
(E) devient $x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm x$.



Pour $y = 0$, **(E)** devient $z = \dfrac{1}{4}x^2$.



Pour $x = 0$, **(E)** devient $z = -\dfrac{1}{4}y^2$.



Prendre toutes les initiatives

104 On choisit pour unité de mesure la distance AB, et le repère orthonormal $(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF})$. On a :

$$N(0\,;\,s\,;\,s),\ M(1\,;\,t\,;\,0),\ K\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{s+t}{2}\,;\,\frac{s}{2}\right).$$

$$AK = \frac{1}{2}\sqrt{1 + (s+t)^2 + s^2} = BK.$$

105 $K(4\,;\,-5\,;\,-5)$, $L\left(\dfrac{1}{3}\,;\,1\,;\,-\dfrac{8}{3}\right)$, $M\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{5}{3}\,;\,-7\right)$.

Rechercher l'intersection I de (CK) et (AL) revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} 4t = -2 + \dfrac{7}{3}s \\ 2 - 7t = 3 - 2s \\ -4 - t = 5 - \dfrac{23}{3}s \end{cases}$$

qui a pour solution $\left(s = \dfrac{6}{5}\,;\,t = \dfrac{1}{5}\right)$.

D'où $I\left(\dfrac{4}{5}\,;\,\dfrac{3}{5}\,;\,-\dfrac{21}{5}\right)$.

$\overrightarrow{BI}\left(-\dfrac{1}{5}\,;\,\dfrac{8}{5}\,;\,-\dfrac{21}{5}\right)$ et $\overrightarrow{BM}\left(-\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{8}{3}\,;\,-7\right)$ sont colinéaires, donc $I \in (BM)$.

EXERCICES Le jour du BAC (page 313)

106 *Corrigé sur le site élève.*

107 **A. 1. a)** $I(1\,;1\,;-1)$, $J\left(\frac{5}{2}\,;\frac{1}{2}\,;-\frac{5}{2}\right)$; $K(3\,;-3\,;3)$.

b) $\overrightarrow{IJ}\left(\frac{3}{2}\,;-\frac{1}{2}\,;-\frac{3}{2}\right)$ et $\overrightarrow{IK}(2\,;-4\,;4)$ ne sont pas colinéaires.

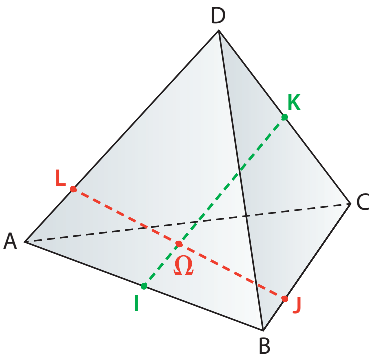
2. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\vec{v}$ et $IK = 2\vec{u}$, donc J et K appartiennent à $\mathcal{P}$.

3. a)
$$(AD) : \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -t \\ z = 2 + t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

b) Étudier l'intersection de $\mathcal{P}$ et (AD) revient à résoudre le système :
$$\begin{cases} 1 + p + 3s = -1 + 3t \\ 1 - 2p - s = -t \\ -1 + 2p - 3s = 2 + t \end{cases}$$
qui a pour solution $\left(p = 1\,;\, s = -\frac{1}{2}\,;\, t = \frac{1}{2}\right)$. Cela conduit au point L.

c) $\overrightarrow{AL}\left(\frac{3}{2}\,;-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{AD}(6\,;-2\,;2)$. On a bien $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

B.



On choisit le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. On a :
$$I\left(\frac{1}{2}\,;0\,;0\right), K\left(0\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right), J\left(\frac{3}{4}\,;\frac{1}{4}\,;0\right), L\left(0\,;0\,;\frac{1}{4}\right).$$
Étudier l'intersection de (IK) et (JL) revient à résoudre le système :
$$\begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}s \\ \frac{1}{2}t = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}s \\ \frac{1}{2}t = \frac{1}{4}s \end{cases}$$
qui a pour solution $\left(s = \frac{1}{2}\,;\, t = \frac{1}{4}\right)$. $\Omega\left(\frac{3}{8}\,;\frac{1}{8}\,;\frac{1}{8}\right)$ est le point d'intersection de (IK) et (JL) et I, J, K et L sont coplanaires.

108 **1. Vrai**. $\vec{w}(1\,;-2\,;3)$ dirige la droite.
$\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$ donc $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.
2. Vrai. Le système :
$$\begin{cases} 2 - 3t = 7 + 2u \\ 1 + t = 2 + 2u \\ -3 + 2t = -6 - u \end{cases}$$
admet une solution : $(t = -1\,;\, u = -1)$.

3. Vrai. M appartient à (ABC) si et seulement si il existe s et $t \in$ R tels que :
$$\begin{cases} x = -1 + t + s \\ y = -2t - s \\ z = 2 - t - s \end{cases}$$
$x + y = 0 \Leftrightarrow -1 - t = 0 \Leftrightarrow t = -1$ et, pour tout $z \in \mathbb{R}$,
$$s = 3 - z.$$

109 **1.** $\overrightarrow{AB}(2\,;-3\,;-1)$. d passe par A et est dirigée par $\overrightarrow{AB}$.
2. d' passe par $E(2\,;1\,;0)$ et est dirigée par $\vec{w}(-1\,;2\,;1)$.
$\overrightarrow{AB}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires.
Étudier l'intersection de d et d' revient à résoudre le système :
$$\begin{cases} 1 + 2t = 2 - t' \\ -2 - 3t = 1 + 2t' \\ -1 - t = t' \end{cases}$$
qui n'a pas de solution. d et d' ne sont donc ni parallèles, ni sécantes.
3. a) Une représentation paramétrique de $\mathcal{P}$ est :
$$\begin{cases} x = p \\ y = -3 - 4p - 5q, \quad p \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}. \\ z = q \end{cases}$$
A est le point de $\mathcal{P}$ de paramètres $p = 1$ et $q = -1$ et B est celui de paramètres $p = 3$ et $q = -2$.
b) Étudier l'intersection de $\mathcal{P}$ et d' revient à résoudre le système :
$$\begin{cases} p = 2 - t' \\ -3 - 4p - 5q = 1 + 2t' \\ q = t' \end{cases}$$
qui a pour solution $(p = 6\,;\, q = -4\,;\, t' = -4)$. Cela conduit à $D(6\,;-7\,;-4)$.

110 **1.** $GB = GI = \sqrt{3}\,GH$. **Réponse : c)**.
2. $\overrightarrow{OM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OJ}$.
Réponse : c).
3. Seul le système du **c)** correspond à une droite dirigée par un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{KE}(1\,;-1\,;1)$. **Réponse : c)**.
4. Aire de DAC = 1. EH = 1 est hauteur du tétraèdre. **Réponse : c)**.
5. L'aire ADH est $\frac{\sqrt{2}}{2}$. La distance d de C à (ADH) est aussi la hauteur relative à ADH dans le tétraèdre DACH. De **4.** on déduit que $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}d\frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $d = \sqrt{2}$. **Réponse : c)**.

111 **A. 1.** $BD = BE = DE = \sqrt{2}$.
2. $I\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{AI}\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{AG}(1\,;1\,;1)$.
$\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AI}$, donc $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires.
B. 1. a) $M_{\frac{1}{3}} = I$; $\mathcal{P}_{\frac{1}{3}} = (BDE)$; $N_{\frac{1}{3}} = B$.
b) $M_{\frac{1}{3}}N_{\frac{1}{3}} = BI = \frac{\sqrt{6}}{3}$.
2. a) $M_k(k\,;k\,;k)$.

b) $\overrightarrow{EB}(1~;0~;-1)$ et $\overrightarrow{ED}(0~;1~;-1)$ dirigent $\mathscr{P}_k$.

$$\mathscr{P}_k : \begin{cases} x = k + s \\ y = k + t \\ z = k - s - t \end{cases}, s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}.$$

c) Étudier l'intersection de $\mathscr{P}$ et (BC) revient à résoudre le système d'inconnues p, s, t :

$$(\mathrm{S}) : \begin{cases} k + s = 1 \\ k + t = p \\ k - s - t = 0 \end{cases}.$$

On trouve $(p = 3k - 1~;s = -k + 1~;t = 2k - 1)$, ce qui permet de conclure.

3. On cherche le minimum de $M_kN_k^2$, c'est-à-dire de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(k) = (1 - k)^2 + (2k - 1)^2 + k^2 = 6k^2 - 6k + 2.$$

Ce minimum est atteint pour $k = \frac{1}{2}$ et vaut $\frac{1}{2}$. La distance minimale vaut donc $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

112 **1. a)** Voir la démonstration du théorème 7.

b) Voir le paragraphe 4.2 page 294 du manuel.

2. a) • $\mathrm{E}\left(0~;0~;\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{EF}\left(1~;1~;\frac{1}{2}\right)$.

$$(\mathrm{EF}) : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

• $\mathrm{B}(1~;0~;0)$, $\overrightarrow{BC}(0~;1~;0)$; $\overrightarrow{BD}(-1~;0~;1)$.

$$(\mathrm{BCD}) : \begin{cases} x = 1 - s \\ y = p \\ z = s \end{cases}, p \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}.$$

b) Étudier l'intersection de (EF) et (BCD) revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} t = 1 - s \\ t = p \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t = s \end{cases}.$$

qui a pour solution $\left(p = \frac{1}{3}~;s = \frac{2}{3}~;t = \frac{1}{3}\right)$. Cela conduit à $\mathrm{K}\left(\frac{1}{3}~;\frac{1}{3}~;\frac{1}{3}\right)$.

113 **1.** $\mathrm{C}~(1~;1~;0)$, $\mathrm{E}(0~;0~;1)$, $\mathrm{I}\left(1~;\frac{1}{2}~;0\right)$, $\mathrm{I}\left(\frac{1}{2}~;1~;0\right)$.

2. « $\mathrm{M} \in [\mathrm{EC}]$ » équivaut à : « Il existe un réel $t \in [0~;1]$ tel que $\overrightarrow{CM} = t\overrightarrow{CE}$. » Cela se traduit, à l'aide des coordonnées de C et E, par : « Il existe $t \in [0~;1]$ tel que $\mathrm{M}(1 - t~;1 - t~;t)$. »

3. a) $\mathrm{CI} = \mathrm{CJ} = \frac{1}{2}$ et $\mathrm{EI} = \mathrm{EJ} = \frac{3}{2}$.

b) (CE) appartient au plan médiateur de (IJ) et $\mathrm{M} \in (\mathrm{CE})$, donc MI = MJ.

c) $\mathrm{IM}^2 = 3t^2 - t + \frac{1}{4}$.

4. a) $\alpha \in [0~;\pi] \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} \in \left[0~;\frac{\pi}{2}\right]$.

Sur $\left[0~;\frac{\pi}{2}\right]$, $\alpha \mapsto \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ est croissante, ce qui permet de conclure.

b) $\mathrm{IM} \times \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{IJ} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, d'où $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\mathrm{IM}}$. IM et $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ sont inversement proportionnels, ce qui permet de conclure.

c) f est décroissante sur $\left[0~;\frac{1}{6}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{6}~;1\right]$.

d) α est maximal pour $\mathrm{IM} = \frac{1}{\sqrt{6}}$. M_0 est le point de paramètre $t = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

De **4. b)** on déduit $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, d'où $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

EXERCICES Pour aller plus loin (page 316)

114 **1. a)** $\mathrm{M}(1 - k~;0~;k)$, $\mathrm{N}(k~;k~;0)$, $\overrightarrow{MN}(2k - 1~;k~;-k)$.

b) « MN est minimal » équivaut à « $(2k - 1)^2 + k^2 + (-k)^2$ est minimal. » ; $k = \frac{2}{3}$.

2. a) $2\overrightarrow{IO} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DN} = k\,\overrightarrow{AE} + k\,\overrightarrow{DB}$ et $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DB}$, d'où :

$$\overrightarrow{IO} = k\,\overrightarrow{IJ}.$$

b) $\mathrm{O} \in [\mathrm{IJ}]$.

115 **1. a)** $\mathrm{AM}^2 = x^2 + y^2 + z^2$;

$\mathrm{GM}^2 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2$;

$\mathrm{HM}^2 = x^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2$.

b) $\mathrm{AM}^2 = \mathrm{HM}^2 \Leftrightarrow y + z = 1$.

$$\mathrm{AM}^2 = \mathrm{GM}^2 \Leftrightarrow x + y + z = \frac{3}{2}.$$

2. On choisit comme paramètre $t = z$. $\mathscr{E}$ est alors l'ensemble des points de coordonnées vérifiant :

$$\begin{cases} z = t \\ y + t = 1 \\ x + y + t = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 - t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$

3. Le milieu de [EF] est $\mathrm{I}\left(\frac{1}{2}~;0~;1\right)$ et le milieu de [DC] est $\mathrm{J}\left(\frac{1}{2}~;1~;0\right)$.

I est le point de Δ de paramètre $t = 1$ et J est celui de paramètre 0.

116 **1. a)** On choisit le repère $(\mathrm{O}~;\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$.

$\mathrm{A'}\left(\frac{2}{3};0~;0\right)$, $\mathrm{B'}\left(0~;\frac{1}{2}~;0\right)$, $\mathrm{C'}\left(0~;0~;\frac{1}{3}\right)$.

$\overrightarrow{AC}(-1\,;0\,;1)$ et $\overrightarrow{A'C'}\left(-\frac{2}{3}\,;0\,;\frac{1}{3}\right)$ ne sont pas colinéaires, pas plus que $\overrightarrow{AB}(-1\,;1\,;0)$ et $\overrightarrow{A'B'}\left(-\frac{2}{3}\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$ ainsi que $\overrightarrow{BC}(0\,;-1\;\;1)$ et $\overrightarrow{B'C'}\left(0\,;-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{3}\right)$.

b) Étudier l'intersection de (A'C') et (AC) revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} 1-t=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}t' \\ t=\frac{1}{3}t' \end{cases}$$

qui a pour solution $\left(t=-\frac{1}{3}\,;t'=-1\right)$. Cela conduit au point d'intersection $R\left(\frac{4}{3}\,;0\,;-\frac{1}{3}\right)$. Une méthode similaire permet de trouver S(2 ; – 1 ; 0) et T(0 ; 2 ; – 1).

$\overrightarrow{TS}(2\,;-3\,;1)$ et $\overrightarrow{TR}\left(\frac{4}{3}\,;-2\,;\frac{2}{3}\right)$ sont colinéaires.

2. a) Afin que (A'B'), par exemple, existe, il est nécessaire que α et γ ne soient pas simultanément nuls. Afin que (AB) et (A'B') ne soient pas parallèles ou confondues, il est nécessaire que α et γ soient différents. Donc :

• au plus une des valeurs α, β et γ peut être nulle ;

• $\alpha \neq \beta$; $\alpha \neq \gamma$ et $\beta \neq \gamma$.

b) A'(γ ; 0 ; 0), B'(0 ; α ; 0), C'(0 ; 0 ; β).

La méthode du **1. b)** permet de conclure.

117 **1.** $\overrightarrow{AB}(2\,;-2\,;0)$. La droite définie par la représentation paramétrique du **b)** passe par D(– 1 ; – 1 ; 4) et est dirigée par $\overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{AD}(1\,;-1\,;0)$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Réponse : b).

2. I(– 1 ; – 1 ; – 4) est le milieu de [AB]. On a :

$$AI^2 = 2\,;\ OA^2 = 20\,;\ OI^2 = 18.$$

Le triangle AIO est rectangle en I, donc $O \in \mathcal{P}$.

Réponse : a).

3. $AB = 2AI = 2\sqrt{2}$. **Réponse : a)**.

4. $AC^2 = 20 + a^2$; $BC^2 = a^2 + 4a + 20$; $AB^2 = 8$.

ABC est rectangle en A si et seulement si :

$$28 + a^2 = a^2 + 4a + 20 \Leftrightarrow 4a = 8 \Leftrightarrow a = 2.$$

Réponse : b).

5. $AI < \sqrt{3}$, donc l'intersection est un cercle. De plus, $(\sqrt{3})^2 - AI^2 = 1$. Le rayon de ce cercle est donc 1.

Réponse : c).

118 **1.** $\overrightarrow{A'B'}(-2\,;2\,;0)$, $\overrightarrow{A'C'}(-2\,;0\,;3)$.

$\vec{u}(-1\,;1\,;0)$ est colinéaire à $\overrightarrow{A'B'}$. (A'B'C') passe par A' et est dirigée par $\vec{u}$ et $\overrightarrow{A'C'}$, ce qui permet de conclure.

2.

$$(AC) : \begin{cases} x = 1-p \\ y = 0 \\ z = p \end{cases},\quad p \in \mathbb{R}.$$

$$(BC) : \begin{cases} x = 0 \\ y = 1-q, \\ z = q \end{cases}\quad q \in \mathbb{R}.$$

3. La solution du système :

$$\begin{cases} 2-t-2s = 1-p \\ t = 0 \\ 3s = p \end{cases}$$

est ($p = -3$; $s = -1$; $t = 0$), d'où K(4 ; 0 ; – 3).

La solution du système :

$$\begin{cases} 2-t-2s = 0 \\ t = 1-q \\ 3s = q \end{cases}$$

est ($q = -3$; $s = -1$; $t = 4$), d'où L(0 ; 4 ; – 3).

4. a) $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{AB}(-1\,;1\,;0)$ et $\overrightarrow{KL}(-4\,;4\,;0)$ sont colinéaires.

b) (ABC) ∩ (A'B'C') = (KL).

SEGMENTS ET DEMI-DROITES

119 **1.** M ∈ [AB] si et seulement s'il existe un réel $t \in [0\,;1]$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$, ce qui se traduit par le système (S).

2. M ∈ [AB) si et seulement s'il existe un réel $t > 0$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$.

120 $\mathscr{E}_1$ = [AB] avec A(1 ; 0 ; 1) et B(3 ; 3 ; 2).

$\mathscr{E}_2$ = [CD] avec C(1 ; 2 ; – 1) et D(0 ; 1 ; – 3).

$\mathscr{E}_3$ = [EF] avec E(– 1 ; 2 ; – 2) et F(2 ; 3 ; – 1).

121 **a)**

$$(AB) : \begin{cases} x = 2+4t \\ y = 1+2t \\ z = t \end{cases},\quad t \in \mathbb{R}.$$

b) et **c)** On remplace dans **a)** « $t \in \mathbb{R}$ » par respectivement « $t \in [0\,;1]$ » puis « $t \in [0\,;+\infty[$ ».

d)

$$(BA) : \begin{cases} x = -2+4t \\ y = 3+2t \\ z = 1+t \end{cases},\quad t \in [0\,;+\infty[.$$

122 **a)** Pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t) \in [-1\,;1]$ et f est continue. Toutes les valeurs de [– 1 ; 1] sont donc atteintes.

$\mathscr{E}$ = [AB] où A(0 ; – 3 ; – 2) et B(2 ; – 1 ; 0).

b) Le tableau de variation de f est :

t	$-\infty$		5		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

$\mathscr{E}$ = [BA).

c) Le tableau de variation de f est :

t	$-\infty$		0		$+\infty$
f	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

$f(t)$ prend toutes les valeurs de $\mathbb{R}-\{1\}$. $\mathscr{E}$ est donc la droite (AB) privée du point B.

123 **a) Vrai.** $\overrightarrow{AB}(-2\,;2\,;0)$ et $\overrightarrow{AC}(-3\,;-1\,;0)$ ne sont pas colinéaires.

b) Faux. $J\left(-\frac{3}{2}\,;\frac{5}{2}\,;3\right)$, F(– 3 ; 5 ; 6).

$\overrightarrow{AJ}\left(-\frac{5}{2}\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$ et $\overrightarrow{AF}(-3\,;5\,;6)$ ne sont pas colinéaires, donc F n'appartient pas à au moins une médiane.

c) Vrai. $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DK} \Leftrightarrow$ K(12 ; 7 ; – 9).

d) Faux. $\overrightarrow{JK}\left(\frac{27}{2}\,;\frac{9}{2}\,;-12\right)$ et $\overrightarrow{JE}\left(\frac{3}{2}\,;\frac{1}{2}\,;-\frac{17}{3}\right)$ ne sont pas colinéaires, donc E ∉ (KJ).

CHAPITRE 11

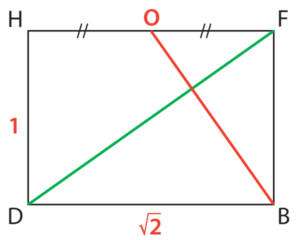
Produit scalaire dans l'espace

ACTIVITÉS

(page 320)

Activité 1

1 a) D, F, O et B sont des points du rectangle BDHF. Ils sont donc coplanaires.



b) • $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BO}\cdot\left(\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HF}\right) = \overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{HF}$.

Le vecteur $\overrightarrow{BO}$ se projette orthogonalement sur (DH) suivant $\overrightarrow{DH}$. Donc $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{DH} = \text{DH}^2$.

• De même, avec la projection orthogonale :

$$\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{FO}\cdot\overrightarrow{HF},$$

on obtient : $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{DF} = \text{DH}^2 - \overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{HF} = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2} = 0$.

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

2 a) Soient les coordonnées F(1 ; 1 ; 1), B(1 ; 1 ; 0) et H(0 ; 0 ; 1).

O est le milieu de [HF] ; donc O a pour coordonnées :

$$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right).$$

b) $\overrightarrow{DF}(1\,;1\,;1)$ et $\overrightarrow{BO}\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2};1\right)$.

$xx' + yy' + zz' = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} + 1 = 0$.

$xx' + yy' + zz'$ est la forme analytique du produit scalaire $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BO}$.

c) • (AC) est perpendiculaire à (DB) et (BF) donc au plan (DBF). Il en résulte que (AC) est perpendiculaire à toute droite du plan (DBF) donc en particulier à (BH).

• A a pour coordonnées (1 ; 0 ; 0), C(0 ; 1 ; 0). Donc $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (– 1 ; 1 ; 0) et $\overrightarrow{BH}(-1\,;-1\,;1)$; donc :

$$xx' + yy' + zz' = 0.$$

Les droites (BH) et (AC) sont perpendiculaires.

Activité 2

1 a) $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BG}$; donc l'angle géométrique de $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BG}$ est celui de $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AH}$.

b) Le triangle AFH est équilatéral ; donc, l'angle géométrique vaut $\dfrac{\pi}{3}$.

2 a) A(1 ; 0 ; 0), F(1 ; 1 ; 1), B(1 ; 1 ; 0) et G(0 ; 1 ; 1).

Les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BG}$ ont pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AF}(0\,;1\,;1)\,;\ \overrightarrow{BG}(-1\,;0\,;1).$$

b) • $xx' + yy' + zz' = 1$; AF $= \sqrt{2}$; BG $= \sqrt{2}$.

$$\frac{xx' + yy' + zz'}{\text{AF}\times\text{BG}} = \frac{1}{2}.$$

• On fait le lien avec le produit scalaire dans le plan ; soit :

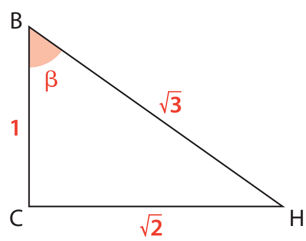
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \text{AB}\times\text{AC}\times\cos\theta.$$

3 a) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$; donc l'angle géométrique associé aux vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{AD}$ est l'angle $\widehat{\text{CBH}}$.

b) Le triangle CBH est tel que :

$$\text{BH} = \sqrt{3}\,;\ \text{BC} = 1 \text{ et CH} = \sqrt{2}.$$

De plus, le triangle BCH est rectangle en C.



• $\cos\widehat{\text{CBH}} = \cos(\beta) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, donc $\widehat{\text{B}} \approx 54°7$.

• $\overrightarrow{BH}$ a pour coordonnées (–1 ; –1 ; 1) et $\overrightarrow{AD}(-1\,;0\,;0)$.

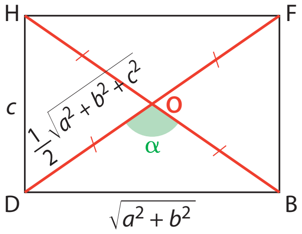
On a BH $= \sqrt{3}$ et AD $= 1$, donc :

$$\frac{xx' + yy' + zz'}{\text{BH}\times\text{AD}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \cos(\beta).$$

PROBLÈME OUVERT

1 **a)** DBFH est un rectangle.

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OB}}{OD^2}.$$



$$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}\|^2 - \|OD\|^2 - \|OB\|^2\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\|HD\|^2 - \|OD\|^2 - \|OB\|^2\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[c^2 - \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\right] = \frac{c^2-a^2-b^2}{4};$$

On a $OD^2 = \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)$; donc :

$$\cos(\alpha) = \frac{c^2-a^2-b^2}{c^2+a^2+b^2}.$$

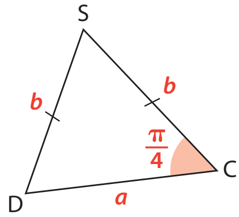
b) Si $a = b = c$, $\cos\alpha = \frac{-a^2}{3a^2} = -\frac{1}{3}$; donc $\alpha \approx 109°$.

2 L'angle géométrique associé aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{SC}$ est l'angle $\widehat{DCS}$.

$b^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos\frac{\pi}{4}$;

soit $0 = a^2 - ab\sqrt{2}$;

donc $a = b\sqrt{2}$.



EXERCICES

Application (page 325)

1 **1.** Soient $\overrightarrow{AB}(-1\,;1\,;-4)$ et $\overrightarrow{AC}(-2\,;0\,;-1)$.

$$\cos(\theta) = \frac{2+4}{\sqrt{18}\sqrt{5}} = \frac{6}{3\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5};$$

2. D'où $\theta \approx 50°8$.

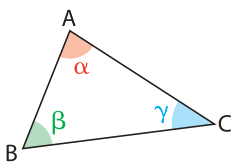
2 **1.** Soient $\overrightarrow{AB}(1\,;0\,;-2)$, $\overrightarrow{AC}(3\,;-1\,;0)$ et $\overrightarrow{BC}(2\,;-1\,;2)$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3$;

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 2$;

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = 7$.

2. $$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \frac{3}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}} = \frac{3}{5\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{10}$$



$$\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{BA\times BC} = \frac{2}{\sqrt{5}\times 3} = \frac{2\sqrt{5}}{15}.$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}}{CB\times CA} = \frac{7}{3\sqrt{10}} = \frac{7\sqrt{10}}{30}.$$

D'où $\alpha \approx 65°$; $\beta \approx 73°$; $\gamma \approx 42°$.

3 **1.** $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{AJ} = \left(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FI}\right)\cdot\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{FI}\cdot\overrightarrow{AJ}$;

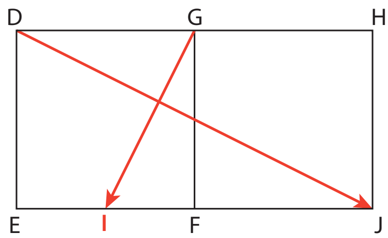
$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AJ} = BF^2$ et $\overrightarrow{FI}\cdot\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{FI}\cdot\overrightarrow{EJ}$.

Si a est la mesure du côté d'un des carrés, $BF^2 = a^2$ et $\overrightarrow{FI}\cdot\overrightarrow{EJ} = -\frac{a}{2}\times 2a = -a^2$ donc $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{AJ} = 0$.

2. a) D se projette orthogonalement en A sur le plan (ABF) ; donc :

$$\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{AJ} = 0.$$

$\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{HJ}$ car D se projette orthogonalement en H sur le plan (EHM).



$\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{HJ} = (\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FI})\cdot\overrightarrow{HJ}$

$= \overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{HJ} + \overrightarrow{FI}\cdot\overrightarrow{HJ} = GF^2 + \overrightarrow{FI}\cdot\overrightarrow{EJ}$

$= GF^2 - FI\times EJ = GF^2 - EF^2 = 0.$

b) $\overrightarrow{DJ}$ est orthogonale à $\overrightarrow{GI}$ et $\overrightarrow{BI}$; donc (DJ) est perpendiculaire au plan (BIG).

4 **1.** Il n'existe pas de réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$; donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

2. $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(1\,;-1\,;1)$. De plus :

$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u} = 2 - 2 = 0$ et $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{v} = -1 + 2 - 1 = 0$.

Donc $\overrightarrow{AM}$ est normal au plan $\mathcal{P}(A\,;\vec{u},\vec{v})$.

5 **1.** $\overrightarrow{AB}(-1\,;-1\,;1)$ et $\overrightarrow{AC}(1\,;5\,;1)$.

Il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$; donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = -3 + 1 + 2 = 0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 3 - 5 + 2 = 0$.

Donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

6 $\overrightarrow{OA}$ a pour coordonnées $(2\,;0\,;1)$; donc $\mathcal{P}$ a une équation de la forme $2x + z + d = 0$.

Or $A \in \mathcal{P}$. Donc $4 + 1 + d = 0$, soit $d = -5$.

Donc $\mathcal{P}$ a pour équation $2x + z - 5 = 0$.

7 $\overrightarrow{AB}(1\,;-3\,;3)$. Ainsi $\mathcal{P}$ a une équation de la forme $x - 3y + 3z + d = 0$. Or $A \in \mathcal{P}$; donc $1 - 3 - 3 + d = 0$, soit $d = 5$. Donc $\mathcal{P}$ a pour équation $x - 3y + 3z + 5 = 0$.

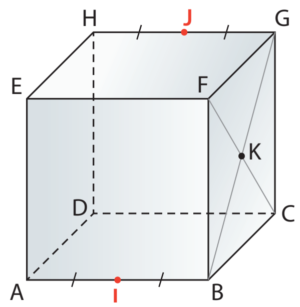
8 $\overrightarrow{AB}(3\,;3\,;3)$ est colinéaire à $\vec{n}(1\,;1\,;1)$.
$A \in \mathcal{P}$ car $3-2+2-3=0$ et $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$; donc $\overrightarrow{AB}$ est normal à $\mathcal{P}$.

9 **1.** Soient $\overrightarrow{DF}(1\,;1\,;1)$, $\overrightarrow{EG}(-1\,;1\,;0)$ et $\overrightarrow{BG}(-1\,;0\,;1)$.
D'où $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{EG}=0$ et $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BG}=0$.
2. a) $\overrightarrow{DF}$ est orthogonal à $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{BG}$ donc au plan (EBG).
b) $\mathcal{P}$ a une équation de la forme $x+y+z+d=0$.
Or $B(1\,;1\,;0) \in \mathcal{P}$; donc $2+d=0$, soit $d=-2$.
$\mathcal{P}$ a donc pour équation cartésienne $x+y+z-2=0$.

10 Le point $A(1\,;0\,;1) \in \mathcal{P}$ et les vecteurs $\vec{u}(1\,;1\,;1)$ et $\vec{v}(0\,;3\,;1)$ définissent le plan $\mathcal{P}$.

11 **1.** $\overrightarrow{AB}(2\,;4\,;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(4\,;-4\,;-4)$.
$\overrightarrow{AC} \neq k\overrightarrow{AB}$; donc les points ne sont pas alignés et définissent un plan $\mathcal{P}$.
2. a) $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$; donc $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
b) $\mathcal{P}$ a une équation de la forme $x+z+d=0$.
Or $A \in \mathcal{P}$; donc $-1+2+d=0$, soit $d=-1$.
Donc $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $x+z-1=0$.

12 E a pour coordonnées $(1\,;0\,;1)$ et K a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;1\,;\frac{1}{2}\right)$.



Donc :
$\overrightarrow{EK}\left(-\frac{1}{2}\,;1\,;-\frac{1}{2}\right)$;
$\overrightarrow{DI}\left(1\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$;
$\overrightarrow{DJ}\left(0\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$.
Donc $\overrightarrow{EK}\cdot\overrightarrow{DI}=0$ et $\overrightarrow{EK}\cdot\overrightarrow{DJ}=0$.
$\overrightarrow{EK}$ est normal au plan (DIJ) et a une équation de la forme :
$$-\frac{1}{2}x+y-\frac{1}{2}z+d=0.$$
Or $D(0\,;0\,;0)$ est un point du plan (DIJ) ; donc (DIJ) a pour équation cartésienne $x-2y+z=0$.

13 **1.** $\overrightarrow{AB}(0\,;1\,;1)$ et $\overrightarrow{AC}(2\,;-2\,;2)$. Comme ces vecteurs ne sont pas colinéaires alors les points A, B, C définissent un plan $\mathcal{P}(x\,;y\,;z)$.
2. a) Si $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$ alors $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.
Soit $y+z=0$ et $2x-2y+2z=0$ ou $x-y+z=0$.
b) $y=-z$ et $x=-2z$ donc le vecteur $\vec{n}(2\,;1\,;-1)$ est normal au plan $\mathcal{P}$ qui a une équation de la forme $2x+y-z+d=0$.
Or $A \in \mathcal{P}$; donc $2+1+d=0$, soit $d=-3$. Donc $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $2x+y-z-3=0$.

14 $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-2\,;3\,;-3)$. Donc $\mathcal{P}$ a pour équation $2x-3y+3z=0$ car $O(0\,;0\,;0)$ est un point de $\mathcal{P}$.

15 Soit $\overrightarrow{AB}(-2\,;2\,;-1)$. Donc la droite (AB) a pour représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x=1-2t \\ y=1+2t. \\ z=-1-t \end{cases}$$
Cette droite (AB) coupe $\mathcal{P}$ s'il existe un réel t tel que :
$$2-4t-1-2t-1-t-8=0 \quad \text{soit} \quad -7t=7.$$
Donc $t=1$ et I a pour coordonnées $(-1\,;3\,;-2)$.

16 Avec l'axe $(O\,;\vec{i})$, le point A a pour coordonnées $(2\,;0\,;0)$.
Avec l'axe $(O\,;\vec{j})$, le point B a pour coordonnées $(0\,;3\,;0)$.
Avec l'axe $(O\,;\vec{k})$, le point C a pour coordonnées $(0\,;0\,;-6)$.

17 $2(-8+2t)+21-3t-6-t+4=0$
$-16+4t+21-3t-6-t+4=0$
$0t+3=0.$
Donc, cette équation n'a pas de solution et la droite d est parallèle à $\mathcal{P}$.

18 **1.** $\overrightarrow{AB}(-5\,;-2\,;4)$ et $\overrightarrow{AC}(1\,;1\,;1)$.
Ces vecteurs ne sont pas colinéaires. Donc les points A, B, C définissent un plan $\mathcal{P}$.
2. a) Le vecteur $\vec{u}(2\,;-3\,;1)$ est un vecteur directeur de d.
Or $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=0$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{u}=0$. Donc la droite d est orthogonale à $\mathcal{P}$.
b) $\mathcal{P}$ a une équation de la forme $2x-3y+z+d=0$.
Or $A \in \mathcal{P}$; donc $4-3+3+d=0$, soit $d=-4$.
$\mathcal{P}$ a pour équation $2x-3y+z-4=0$; donc on obtient :
$-14+4t+9t+4+t-4=0$, soit $14t=14$ d'où $t=1$.
Donc M a pour coordonnées $(-5\,;-3\,;5)$.

19 $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(4\,;2\,;3)$.
La droite d a pour représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x=-1+4t \\ y=2t \\ z=1+3t \end{cases}.$$
Si $\vec{n}(x\,;y\,;z)$ est normal à $\mathcal{P}$ alors :
$$\vec{u}\cdot\vec{n}=2y+z=0 \quad \text{et} \quad \vec{v}\cdot\vec{n}=x+y-z=0.$$
Soit $z=-2y$ et $x=-3y$ donc $\vec{n}(3\,;-1\,;2)$ est normal à $\mathcal{P}$.
De plus, $A \in \mathcal{P}$ donc $\mathcal{P}$ a pour équation :
$$3x-y+2z-3=0.$$
$-3+12t-2t+2+6t-3=0$
$16t-1=0$
d'où $t=\frac{1}{4}$.
La droite d coupe $\mathcal{P}$ en $H\left(0\,;\frac{1}{2}\,;\frac{7}{4}\right)$.

20 $\begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ 2x+3y-z+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ x+y+1=0 \end{cases}$
soit $\begin{cases} y=z \\ x=-z-1 \end{cases}$.
En posant $z=t$, l'intersection des deux plans est la droite de représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x=-t-1 \\ y=t \\ z=t \end{cases}.$$

21 $\begin{cases} x-y-z=0 \\ 2x-y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-z=0 \\ x+3z=0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x=-3z \\ y=-4z \end{cases}$.
En posant $z=-t$, l'intersection des deux plans est la droite de représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x=3t \\ y=4t. \\ z=-t \end{cases}$$

22 $\begin{cases} x+2y-z-1=0 \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y-5=0 \\ z=x+2y-1 \end{cases}$

soit $\begin{cases} y=-3x+5 \\ z=-5x+9 \end{cases}$.

En posant $x = s$, la droite d a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=-s \\ y=5+3s. \\ z=9+5s \end{cases}$$

$\vec{u}(-1\,;3\,;5)$ est un vecteur directeur de d. Si $s = -1$, A$(1\,;2\,;4)$ est un point de d ; donc la proposition est vraie.

23 **1.** Les coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ de d vérifient les équations de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

De plus, les vecteurs normaux $\vec{n_1}(1\,;\,1\,;-3)$ et $\vec{n_2}(1\,;-2\,;\,6)$ ne sont pas colinéaires ; donc $d = \mathscr{P}_1 \wedge \mathscr{P}_2$.

2. $2(-2)-(-1+3t)+2t+2=0$

$-4+1-3t+2t+2=0$

soit $t=-1$.

Donc le point d'intersection a pour coordonnées :

$$(-2\,;-4\,;-1).$$

EXERCICES Activités de recherche (page 332)

28 Valeur maximale d'un angle

• ***Les outils***

– Produit scalaire dans l'espace.

– Dérivation.

– Variation d'une fonction.

• ***Les objectifs***

– Savoir calculer la mesure et un angle de l'espace en fonction d'un paramètre.

– Savoir trouver une mesure minimale.

1. a) Si M = C, $\widehat{ACB} = \dfrac{\pi}{2}$.

Si M = D, $\widehat{ADB} = \dfrac{\pi}{3}$.

b) Soient A$(1\,;0\,;0)$; B$(0\,;1\,;0)$; D$(0\,;0\,;1)$; C$(1\,;1\,;0)$; $\overrightarrow{DC}(1\,;1\,;-1)$; M$(x\,;y\,;z)$ et $\overrightarrow{DM}(x\,;y\,;z-1)$.

Donc $\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DC}$ équivaut à :

$$x=t\,;\ y=t\,;\ z=1-t.$$

Donc M a pour coordonnées $(1\,;\,t\,;\,1-t)$.

2. a) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \text{MA}\times\text{MB}\times\cos\alpha$.

Or le triangle AMB est isocèle car le plan (DOC) est le plan médiateur de [AB].

Donc MA = MB et $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{\text{MA}^2}$.

b) $\overrightarrow{MA}(1-t\,;-t\,;\,t-1)$; $\overrightarrow{MB}(-t\,;\,1-t\,;\,t-1)$.

On a $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = -t+t^2-t+t^2+t^2-2t+1$

$= 3t^2-4t+1.$

$\text{MA}^2 = (1-t)^2+t^2+(t-1)^2$ d'où $\text{MA}^2 = 3t^2-4t+2$.

c) On déduit de la question précédente que :

$$\cos(\alpha) = \frac{3t^2-4t+1}{3t^2-4t+2} = 1-\frac{1}{3t^2-4t+2}.$$

3. a) $f'(t) = \dfrac{6t-4}{(3t^2-4t+2)^2}$.

t	0		$\frac{2}{3}$		1
f'		$-$	0	$+$	
f	$\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0

b), c), d) Le cosinus est minimal lorsque $t = \dfrac{2}{3}$.

Donc, dans ce cas, α est maximale avec $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$.

29 Plans perpendiculaires

• ***Les outils***

– Équation d'un plan vecteur normal.

– Produit scalaire dans l'espace.

• ***L'objectif***

– Savoir trouver une équation d'un plan passant par deux points et perpendiculaire à un point donné.

1. a) $\vec{u}(1\,;-1\,;\,3)$, $\overrightarrow{AB}(1\,;\,1\,;\,2)$.

b) Ces vecteurs ne sont pas colinéaires car il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\vec{u}$.

c) $\vec{n}\cdot\vec{u} = a-b+3c = 0$ et $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB} = a+b+2c = 0$.

2. a) $\begin{cases} a-b+3c=0 \\ a+b+2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+5c=0 \\ 2b-c=0 \end{cases}$, soit :

$$a = -\frac{5}{2}c \text{ et } b = \frac{1}{2}c.$$

b) On prend $c = 2$; donc $\vec{n}$ a pour coordonnées $(-5\,;\,1\,;\,2)$.

c) Q a une équation de la forme $-5x+y+2z+d=0$.

Or A $\in$ Q ; donc $-5-1+4+d=0$, soit $d=2$. Donc Q a pour équation : $\quad -5x+y+2z+2=0$.

30 Narration de recherche

$\mathscr{P}_1$ est défini par :

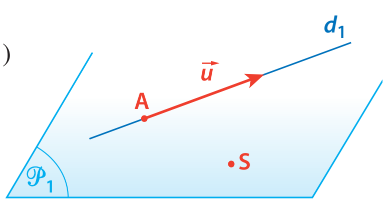
A$(0\,;\,0\,;\,2)$; S$(3\,;\,4\,;\,0{,}1)$

et $\vec{u}(1\,;\,3\,;\,0)$.

Donc $\overrightarrow{AS}(3\,;\,4\,;-1{,}9)$.

Soit $\mathscr{P}_1$ défini par 4 :

$(\text{A}\,;\,\vec{u}\,;\,\overrightarrow{AS})$.

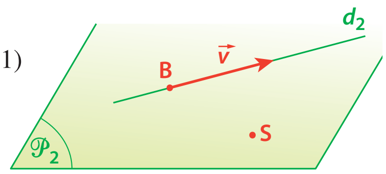


$\mathscr{P}_2$ est défini par :

B$\left(\dfrac{1}{2}\,;\,4\,;\,4\right)$; S$(3\,;\,4\,;\,0{,}1)$

et $\vec{v}(2\,;\,1\,;-1)$.

Donc $\overrightarrow{SB}\left(-\dfrac{5}{2}\,;\,0\,;\,3{,}9\right)$.



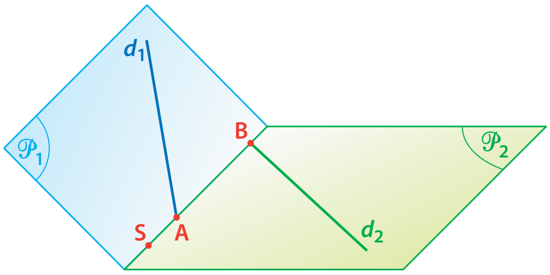
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et le système :

$$\begin{cases} 3+t=\dfrac{1}{2}+2s \\ 9+3t=4+s \\ 2=4-s \end{cases} \text{ équivalent à } \begin{cases} 3+t=\dfrac{9}{2} \\ 3+t=2 \\ s=2 \end{cases}$$

n'a pas de solution.

Les droites d_1 et d_2 n'ont pas de points communs et sont non coplanaires.

Le plan $\mathcal{P}_1$ a pour équation $57x - 19y + 50z - 100 = 0$.
Le plan $\mathcal{P}_2$ a pour équation $78x - 106y + 50z + 185 = 0$.



La droite d_1 coupe $\mathcal{P}_2$.

• L'équation $78(3 + t) - 106(9 + 3t) + 100 + 185 = 0$ a pour unique solution $t = -\dfrac{29}{16}$.

Donc A a pour coordonnées $\left(\dfrac{19}{16}; \dfrac{57}{16}; 2\right)$.

• L'équation $57\left(\dfrac{1}{2} + 2s\right) - 19(4 + s) + 50(4 - s) - 100 = a$ a pour unique solution $s = -\dfrac{7}{6}$.

Donc B a pour coordonnées $\left(-\dfrac{11}{6}; \dfrac{17}{6}; \dfrac{31}{6}\right)$.

Les droites d_1 et d_2 coupent respectivement $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_1$ en A et B.

$\overrightarrow{BS}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{29}{6}; \dfrac{7}{6}; -\dfrac{30{,}4}{6}\right)$.

Donc, la droite Δ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3 + 29\alpha \\ y = 4 + 7\alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R}. \\ z = 0{,}1 - 30{,}4\alpha \end{cases}$$

31 TD – Comparer trois démonstrations

A. Manière 1 : avec un repère orthonormé

1. a) $F(1; 0; 0)$; $C(0; 0; 1)$; $D(0; 1; 1)$; $J\left(0; \dfrac{1}{2}; 1\right)$.

b) $\overrightarrow{GM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{GJ}$; donc M a pour coordonnées $\left(0; \dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$.

De même, le milieu I de [FC] a pour coordonnées :

$$\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right).$$

On a $\overrightarrow{GN} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{GB}$; donc N a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{3}; 0; \dfrac{1}{3}\right)$.

2. $\overrightarrow{GB}$ a pour coordonnées $(1; 0; 1)$ et $\overrightarrow{CH}$ a pour coordonnées $(0; 1; -1)$.

De même, $\overrightarrow{MN}\left(\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{3}\right)$. Il en résulte que :

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{GB} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \text{ et } \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CH} = 0.$$

Donc (MN) est perpendiculaire aux droites (BG) et (CH).

B. Manière 2 : avec une étude géométrique

1. Dans le triangle OGJ, on a :

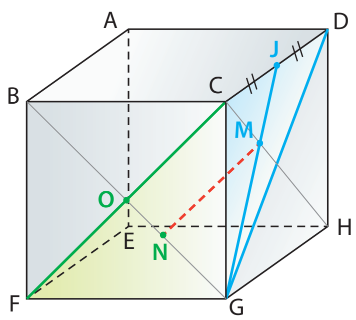
$\overrightarrow{GN} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{GO}$

et $\overrightarrow{GM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{GJ}$.

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{GN} - \overrightarrow{GM}$

$= \dfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{GO} - \overrightarrow{GJ}\right)$

$= \dfrac{2}{3}\overrightarrow{JO}$.



Donc (MN) est parallèle à (OJ).

Dans le triangle FCD, la droite (OJ) est la droite des « milieux ». Donc (FD) est parallèle à (OJ).

2. a) (GB) ⊥ (FC) comme diagonales d'un carré et (GB) ⊥ (CD) ; donc (GB) est perpendiculaire au plan (FCD).

De la même manière, on démontre que (CH) est perpendiculaire au plan (FGD).

b) Il en résulte que (GB) étant perpendiculaire au plan (FCD), (GB) est perpendiculaire à toutes les droites du plan. Donc (GB) est perpendiculaire à (FD). On démontre de la même manière que (FD) est perpendiculaire à (CH).

En conclusion, (FD) étant parallèle à (MN), il en résulte que (MN) est perpendiculaire à (GB) et (CH).

C. Manière 3 : avec l'outil vectoriel

1. a) $\overrightarrow{GM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{FI} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}\right)$

$= \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GH}\right) = \dfrac{1}{3}\left(2\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GH}\right)$.

Donc $3\overrightarrow{GM} = 2\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GH}$ et de même $3\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GF}$.

b) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{GN} - \overrightarrow{GM}$

$= \dfrac{1}{3}\left[\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GF} - 2\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GH}\right]$

$= \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{GF} - \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GH}\right)$.

2. $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{GB} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{GF} - \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GH}\right) \cdot \overrightarrow{GB}$

$= \dfrac{1}{3}\left[\overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{GB}\right]$

$= \dfrac{1}{3}\left[GF^2 - GC^2\right] = 0$.

De même $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CH} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{GF} - \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GH}\right) \cdot \overrightarrow{CH}$

$= \dfrac{1}{3}\left[\overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{CH} - \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{CH} - \overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{CH}\right]$

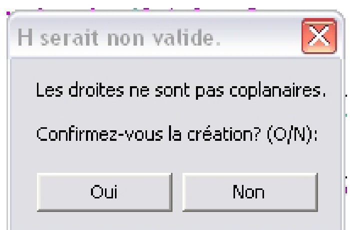
$= \dfrac{1}{3}\left[GC^2 - GH^2\right] = 0$.

3. Il en résulte de la question précédente que la droite (MN) est perpendiculaire aux droites (BG) et (CH).

32 TD – Caractérisation d'un tétraèdre orthocentrique

A. Explorer la situation avec Geospace

1. b)

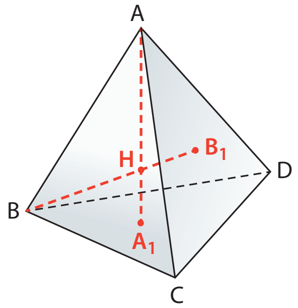


c) Dans ce cas, le point H existe. Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

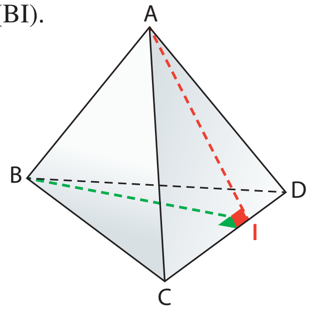
2. La droite (AA_1) est perpendiculaire au plan (BCD) donc à (CD).

De même (BB_1) qui est perpendiculaire au plan (ACD) est perpendiculaire à (CD).

Or les points A, B, A_1 et B_1 sont coplanaires ; donc (CD) est perpendiculaire au plan (ABA_1) donc (CD) est perpendiculaire à (AB).



3. a) (AB) ⊥ (CD) et (AI) ⊥ (CD) donc (CD) est perpendiculaire au plan (ABI) donc à (BI).



b) Il en résulte que A_1 est un point de (BI) et B_1 un point de (AI) ; donc H est l'orthocentre du triangle ABI.

4. Les hauteurs issues de A et B sont concourantes si, et seulement si, (AB) et (CD) sont des droites orthogonales.

B. Trouver la caractérisation

1. En prenant les hauteurs deux à deux et en tenant compte de la partie A alors les couples d'arêtes opposées sont orthogonaux.

2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$ et $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$ donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} &= \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}\\ &= \overrightarrow{AB}\left[\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\right] = \overrightarrow{AB}\left[\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}\right]\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0.\end{aligned}$$

3. a) $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AH}\right)\cdot\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BD}$.

Or (CA) et (BD) sont orthogonales (*cf.* 2). Il en est de même pour (AH) et (BD) donc $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$.

b) $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$. La démonstration est identique.

Donc (CH) est perpendiculaire à (AD) et (BD) est perpendiculaire au plan (ABD).

4. Un tétraèdre ABCD est orthocentrique si, et seulement si, ses arêtes opposées sont orthogonales deux à deux.

33 TD – Intersection de trois plans

B. Application

1. $\begin{cases} x+y-2z-1=0 \\ 3x+y-z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+z=0 \\ y=2z+1-x \end{cases}$ soit $\begin{cases} z=-2x \\ y=-5x+1 \end{cases}$.

En posant $x = -t$, la droite Δ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=-t \\ y=1+5t, \\ z=2t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}.$$

2. a) Un point de Δ appartient à $\mathcal{P}_3$ si, et seulement si :

$$-t-1-5t+6t+1=0 \Leftrightarrow 0t=0\,;$$

donc $t\in\mathbb{R}$ et Δ est incluse dans $\mathcal{P}_3$.

b) $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants selon la droite Δ. Posons-nous la question : la droite Δ a-t-elle un point commun avec $\mathcal{P}_3$?

$$-t-1-5t+6t-3=0 \Leftrightarrow 0t=4\,;$$

il n'y a donc pas de solution.

Donc, les trois plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ n'ont aucun point commun.

c) La droite Δ coupe $\mathcal{P}_3$ si, et seulement si, il existe t tel que :

$$-2t-1-5t+6t-1=0 \Leftrightarrow -t-2=0 \text{ soit } t=-2.$$

Donc Δ coupe $\mathcal{P}_3$ au point A de coordonnées (2 ; – 9 ; – 4) et les trois plans ont un seul point commun.

34 TD – Perpendiculaire commune à deux droites

1. d_1 et d_2 étant non coplanaires $\vec{u_1} \neq k\vec{u_2}$.

2. a) $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ étant non colinéaires, les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants suivant une droite Δ.

b) Les droites $(A, \vec{n})$ et $(B, \vec{n})$ sont parallèles ; donc, d'après le théorème du toit, Δ est parallèle à $(A, \vec{n})$.

Il en résulte que $\overrightarrow{H_1H_2}\cdot\vec{u_1} = \overrightarrow{H_1H_2}\cdot\vec{u_2} = 0$.

Donc Δ est perpendiculaire en H_1 à d_1 et en H_2 à d_2.

c) Donc Δ est la seule perpendiculaire commune à d_1 et d_2.

3. Application

a) $\vec{u_1}$ a pour coordonnées (– 1 ; 0 ; 1) et $\vec{u_2}$ a pour coordonnées (1 ; 1 ; 0).

$\vec{n}\cdot\vec{u_1} = 0$ et $\vec{n}\cdot\vec{u_2} = 0$; donc $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$.

b) Soit $\vec{w_1}(a_1\,;\,b_1\,;\,c_1)$ tel que $\vec{w_1}\cdot\vec{n} = 0$ et $\vec{w_1}\cdot\vec{u_1} = 0$.

On a $a_1 - b_1 + c_1 = 0$ et $-a + c = 0$, soit $a = c$ et $b = 2c$;

donc $\vec{w_1}(1\,;\,2\,;\,1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$ qui a une équation de la forme $x + 2y + z + d = 0$.

Or $A \in \mathcal{P}_1$, donc $d = 1$ et $\mathcal{P}_1$ a pour équation $x + 2y + z - 1 = 0$.

De la même manière, on démontre que $\mathcal{P}_2$ a pour équation $-x + y + 2z = 0$.

c) Si $y = t$, on a :

$$\begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ -x+y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y+3z-1=0 \\ x=y+2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-y+\dfrac{1}{3} \\ x=-y+\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

La droite Δ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=-t+\dfrac{2}{3} \\ y=t \\ z=\dfrac{1}{3}-t \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

EXERCICES Entraînement (page 338)

DE TÊTE

35 $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{BH} = BG^2 = 2$.

36 $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2 - 6 + 4 = 0$; donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

37 $1 = t - 1$ donc $t = 2$; $y = 8$; $z = -3$.

Donc $A \in d$.

38 $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ et a pour coordonnées (1 ; – 2 ; 0). De plus, B appartient à $\mathcal{P}$ car 2 + 2 – 4 = 0. Donc B est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.

39 $\vec{v}(2\,;-3\,;6)$ est un vecteur directeur de d. Or $\vec{v}=6\vec{u}$. Donc $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de d.

40 **a)** $\begin{cases} x=-2+t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$

b) $\mathcal{P}$ a pour équation : $x+y+z-1=0$.

LE PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

41 **1.** $\vec{u}\cdot\vec{v}=-3$.

2. $\cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}=\dfrac{-3}{2\times 2}=\dfrac{-3}{4}$.

On obtient $\theta\approx 159°$.

42 $\overrightarrow{AB}(-1\,;1\,;-4)$; $\overrightarrow{AC}(-2\,;0\,;-1)$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2+4=6$; $AB=3\sqrt{2}$ et $AC=\sqrt{5}$.

Donc $\cos\theta=\dfrac{6}{3\sqrt{10}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{10}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

On obtient $\theta\approx 51°$.

43 **a)** $2\vec{u}\cdot(\vec{v}-3\vec{u})=2\vec{u}\cdot\vec{v}-6\|\vec{u}\|^2=-8-150=-158$.

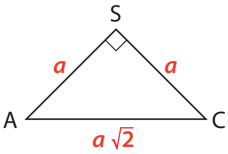
b) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-3\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-3\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}\vec{v}=25-27+8=6$.

44 **a)** $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}=SA\times SB\times\cos\left(\widehat{ASB}\right)=\dfrac{a^2}{2}$.

b) $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}=0$ car $(SA)\perp(SC)$.

c) $\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AC}=AS\times AC\cos 45°$.

$=a\times a\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=a^2$.

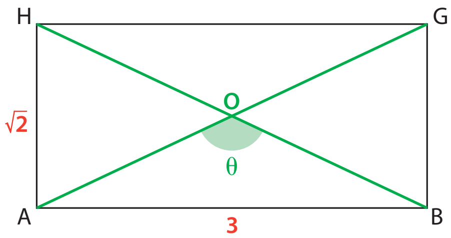


45 *Corrigé sur le site élève.*

46 **a)** $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AE}=AE^2=a^2$.

b) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{GI}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{EA}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AE}=-\dfrac{1}{2}a^2$.

47 ABGH est un rectangle tel que $BG=\sqrt{2}$.



$AG^2=9+2=11$;

donc $AG=\sqrt{11}$ et $AO=OB=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$.

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\|^2-\|OA\|^2-\|OB\|^2\right]$.

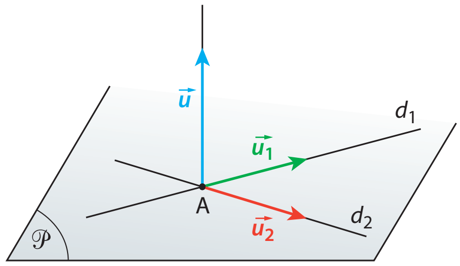
Or $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{HA}$.

Donc $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{1}{2}\left[2-\dfrac{11}{2}\right]=-\dfrac{7}{4}=OA\times OB\times\cos\theta$.

$\cos\theta=-\dfrac{7}{4}\times\dfrac{4}{11}=-\dfrac{7}{11}$ donc $\theta\approx 2{,}3$ radians.

ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

48



Si d est une droite quelconque de $\mathcal{P}$ de vecteur directeur $\vec{v}$ alors $\vec{v}=a\vec{u_1}+b\vec{u_2}$.

Donc $\vec{n}\cdot\vec{v}=\vec{n}\cdot(a\vec{u_1}+b\vec{u_2})=a\vec{u}\cdot\vec{u_1}+b\vec{u_2}\cdot\vec{u_2}$.

Or $\vec{n}\cdot\vec{u_1}=\vec{n}\cdot\vec{u_2}=0$; donc Δ est orthogonale à d.

49 $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\dfrac{1}{2}-3+\dfrac{3}{2}=-2\neq 0$; donc les vecteurs ne sont pas orthogonaux.

50 $\vec{u}\cdot\vec{v}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\alpha-\dfrac{2}{3}\alpha+1=0$ soit $\alpha\left(2-\sqrt{3}\right)=3$.

D'où $\alpha=\dfrac{3\left(2+\sqrt{3}\right)}{1}=6+3\sqrt{3}$.

51 *Corrigé sur le site élève.*

52 $\overrightarrow{AB}(-2\,;7\,;5)$ et $\vec{u}(-4\,;1\,;-3)$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=0$ donc d est orthogonale à (AB).

53 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$;

$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EC}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}\right)\cdot\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}\right)$

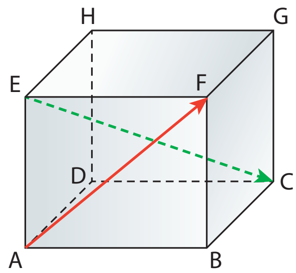
soit $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EA}-AE^2$

$+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Or $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EA}=0$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=AB^2=a^2$, $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

Donc $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EC}=a^2-a^2=0$.



Les droites (AF) et (EC) sont orthogonales.

54 **1.** $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{AJ}=\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AI}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}\right)$

$=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BJ}$.

Or $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$; $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BJ}=-1\times\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{3}$; $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{3}$.

$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BJ}=0$, donc $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{AJ}=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}=0$ et (DI) et (AJ) sont perpendiculaires.

2. Or (DI) est orthogonal à (EA) ; donc (DI) est perpendiculaire au plan (AJE).

55 **1. a)** $A(1\,;0\,;0)$; $E(1\,;0\,;1)$; $F(1\,;1\,;1)$; $I\left(0\,;0\,;\dfrac{1}{2}\right)$; $O\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\,;1\right)$; $C(0\,;1\,;0)$.

b) $\overrightarrow{AO}\left(-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\,;1\right)$; $\overrightarrow{EC}(-1\,;1\,;-1)$; $\overrightarrow{EI}\left(-1\,;0\,;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Donc $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{EC}=0$ et $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{EI}=0$.

Donc $\overrightarrow{AO}$ est orthogonale aux droites (EC) et (EI). La droite (AO) est perpendiculaire au plan (EIC).

2. a) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{EC}=\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EO}\right)\cdot\left(\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GC}\right)$

$=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{EO}\cdot\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{EO}\cdot\overrightarrow{GC}$.

Or $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EG}=0$; $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{GC}=-1$; $\overrightarrow{EO}\cdot\overrightarrow{EG}=1$; $\overrightarrow{EO}\cdot\overrightarrow{GC}=0$; donc $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{EC}=-1+1=0$.

b) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{EI} = \left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EO}\right)\cdot\left(\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HI}\right)$
$= \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{EO}\cdot\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EO}\cdot\overrightarrow{HI}.$

Or $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EH} = 0$; $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{HI} = -\frac{1}{2}$; $\overrightarrow{EO}\cdot\overrightarrow{EH} = \frac{1}{2}$; $\overrightarrow{EO}\cdot\overrightarrow{HI} = 0$.

Donc $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{EI} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 0$.

Comme la droite (AO) est orthogonale à (EC) et (EI), elle est perpendiculaire au plan (EIC).

56 *Corrigé sur le site élève.*

ÉQUATION CARTÉSIENNE D'UN PLAN

57 **a)** $\mathcal{P}$ a pour équation $x - y + 3z - 5 = 0$.
b) $\mathcal{P}$ a pour équation $2x - 3y - z - 1 - 2\sqrt{2} = 0$.

58 **a)** $\overrightarrow{AB}(-2 ; 1 ; 4)$ donc $\mathcal{P}$ a pour équation :
$$-2x + y + 4z + 8 = 0.$$
b) $\overrightarrow{AB}(-1-\sqrt{2} ; 5 ; -3)$ donc $\mathcal{P}$ a pour équation :
$$-(1+\sqrt{2})x + 5y - 3z + 27 + \sqrt{2} = 0.$$

59 $\overrightarrow{AB}\left(\frac{3}{2} ; 1 ; 0\right)$ et $\vec{n}(3 ; 2 ; 0)$ est normal à $\mathcal{P}$.

Or $\vec{n} = 2\overrightarrow{AB}$; la droite (AB) est donc orthogonale à $\mathcal{P}$.

60 $\overrightarrow{AH}(1 ; -3 ; 2)$ et $\vec{n}(1 ; -3 ; 2)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ donc $\overrightarrow{AH} = \vec{n}$.
De plus $H \in \mathcal{P}$ car $3 + 2 - 5 = 0$.
Donc H est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.

61 $\overrightarrow{AM}(x-1 ; y+1 ; z-2)$ et $\vec{u}(-1 ; 2 ; 3)$; donc :
$$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u} = -x + 1 + 2y + 2 + 3z - 6 = 5,$$
soit $-x + 2y + 3z - 8 = 0$.
L'ensemble est donc le plan de vecteur normal $\vec{u}(-1 ; 2 ; 3)$ et passant par $B(0 ; 4 ; 0)$.

62 **1.** $\mathcal{P}$ est définie par $C(1 ; 0 ; 0)$ et $\vec{n}(2 ; 1 ; -3)$.
2. $\mathcal{P}$ est définie par $B(0 ; 2 ; 0)$, $\vec{u}(1 ; 1 ; 1)$ et $\vec{v}(0 ; 3 ; 1)$.

63 *Corrigé sur le site élève.*

64 On cherche $\vec{n}(a ; b ; c)$ orthogonal à $\vec{u}(1 ; 1 ; 0)$ et à $\vec{v}(0 ; 1 ; -1)$.
Donc $\vec{n}\cdot\vec{u} = a + b = 0$ et $\vec{n}\cdot\vec{v} = b - c = 0$.
On obtient $a = -b$ et $c = b$.
En prenant $b = 1$, $\vec{n}$ a pour coordonnées $(-1 ; 1 ; 1)$.
Donc $\mathcal{P}$ a une équation de la forme $-x + y + z + d = 0$.
Or $A \in \mathcal{P}$; donc $-1 + 2 + 1 + d = 0$ soit $d = -2$.
Donc $\mathcal{P}$ a pour équation $-x + y + z - 2 = 0$.

65 **1.** $\overrightarrow{AB}(2 ; 4 ; -4)$ et $\overrightarrow{AC}(3 ; 0 ; -3)$.
Ces vecteurs ne sont pas colinéaires ; donc A, B, C ne sont pas alignés.
Comme $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$, $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
2. Le plan (ABC) a une équation de la forme :
$$2x + y + 2z + d = 0.$$
Or A appartient au plan.
Donc $6 - 2 + 2 + d = 0$ soit $d = -6$.
Le plan (ABC) a pour équation $2x + y + 2z - 6 = 0$.

66 **1.** $\mathcal{P}$ est définie par $A(1 ; 2 ; 0)$, $\vec{u}(1 ; -1 ; 2)$ et $\vec{v}(-2 ; 1 ; -1)$.
Si $\vec{n}(a ; b ; c)$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors :
$$a - b + 2c = 0 \quad \text{et} \quad -2a + b - c = 0.$$
Soit $b = a + 2c$ et $-a + c = 0$.
Donc, en prenant $c = 1$, $a = 1$ et $b = 3$, le vecteur $\vec{n}(1 ; 3 ; 1)$ est normal à $\mathcal{P}$.
2. $\mathcal{P}$ a une équation de la forme $x + 3y + z + d = 0$.
Or $A(1 ; 2 ; 0)$ est un point de $\mathcal{P}$ donc $1 + 6 + d = 0$, soit $d = -7$. $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $x + 3y + z - 7 = 0$.

67 Les coordonnées des points $A(a ; 0 ; 0)$, $B(0 ; b ; 0)$ et $C(0 ; 0 ; c)$ vérifient l'équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$.
Comme ces points ne sont pas alignés, cette équation est celle du plan (ABC).

68 *Corrigé sur le site élève.*

69 **1.** $A(1 ; 0 ; 0)$, $M\left(\frac{1}{3} ; 0 ; 0\right)$, $N\left(1 ; \frac{2}{3} ; 0\right)$, $P\left(0 ; 1 ; \frac{2}{3}\right)$ et $E(1 ; 0 ; 1)$.
Il en résulte que $\overrightarrow{AP}$ a pour coordonnées $\left(-1 ; 1 ; \frac{2}{3}\right)$.
$\overrightarrow{EM}\left(-\frac{2}{3} ; 0 ; -1\right)$ et $\overrightarrow{EN}\left(0 ; \frac{2}{3} ; -1\right)$.

Donc $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{EM} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$ et $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{EN} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$.
Donc $\overrightarrow{AP}$ est normal au plan (EMN).
2. Le plan (EMN) a une équation de la forme :
$$-x + y + \frac{2}{3}z + d = 0.$$
Or E appartient à ce plan donc $-1 + \frac{2}{3} + d = 0$ soit $d = \frac{1}{3}$.
Le plan (EMN) a pour équation :
$$-3x + 3y + 2z + 1 = 0.$$

POSITION RELATIVE D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

70 Soit $\overrightarrow{AB}(2 ; 0 ; -2)$ et $\vec{u}(1 ; 0 ; -1)$ un vecteur directeur de la droite (AB) qui a pour représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$
Si I existe, ses coordonnées vérifient :
$-1 + t + 2 - 3 + t - 1 = 0$ soit $2t - 3 = 0$; d'où $t = \frac{3}{2}$.
Donc I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2} ; 2 ; \frac{3}{2}\right)$.

71 d a pour représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 2t. \\ z = t \end{cases}$$
Si le point d'intersection du plan existe, ses coordonnées vérifient :
$3(2 + t) + 2(-1 - 2t) - t - 6 = 0$ soit $-2t - 2 = 0$; d'où $t = -1$.
Donc le point d'intersection a pour coordonnées $(1 ; 1 ; -1)$.

72 **a)** $2t - 1 - 2t + 2 - 6t - 1 = 0$ soit $-6t = 0$, donc $t = 0$.
Le point d'intersection a pour coordonnées $(-1 ; 0 ; 1)$.
b) $2 + 2s + 3 + 6s + 3 - 8s = 0$ soit $0s = 8$. Il n'existe pas de valeur de s donc $d \,//\, \mathcal{P}$.

73 **1.** $\overrightarrow{AB}(2\,;-1\,;-1)$ et $\overrightarrow{AC}(0\,;2\,;-5)$.
Ces vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B, C définissent un plan $\mathcal{P}$.
2. d a pour vecteur directeur $\vec{u}(7\,;10\,;4)$.
$$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB} = 14-10-4=0 \text{ et } \vec{u}\cdot\overrightarrow{AC}=20-20=0.$$
Donc la droite (AB) est perpendiculaire à $\mathcal{P}$.
Le plan $\mathcal{P}$ a une équation de la forme :
$$7x+10y+4z+d=0.$$
Or A $\in \mathcal{P}$, donc $7+8+d=0$ et $d=-15$.
$\mathcal{P}$ a pour équation $7x+10y+4z-15=0$.
3. Si H est commun à d et $\mathcal{P}$, alors :
$$49t+7+100t-40+16t+4-15=0$$
soit $165t-44=0$, d'où $t=\dfrac{44}{165}=\dfrac{4}{15}$.
Le point H a pour coordonnées $\left(\dfrac{43}{15}\,;-\dfrac{4}{3}\,;\dfrac{31}{15}\right)$.

74 *Corrigé sur le site élève.*

75 La droite (AB) a pour représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x=3+t \\ y=-t \\ z=t \end{cases}.$$
1. $A\in\mathcal{P}_m \Leftrightarrow m=0$ et $B\in\mathcal{P}_m\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{4}$.
Donc, pour tout m, la droite (AB) n'est pas incluse dans $\mathcal{P}_m$.
2. $\overrightarrow{AB}(1\,;-1\,;1)$ et le vecteur $\vec{n}(m\,;1\,;m)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
(AB) $\perp \mathcal{P}_m \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.
Donc si $m=-1$ la proposition est vraie.
3. Si la droite (AB) et le plan $\mathcal{P}_m$ sont sécants, il existe un réel t tel que :
$m(3+t)-t+mt+m-1=0$, $t(2m-1)=1-4m$ soit $m=\dfrac{1}{2}$.
Il n'y a pas de point d'intersection. La proposition est donc fausse.
4. D'après la question précédente cette valeur existe et est unique : $m=\dfrac{1}{2}$.

76 **1. a)** $\overrightarrow{DJ}(1\,;2\,;1)$, $\overrightarrow{BG}(-1\,;0\,;1)$ et $\overrightarrow{IG}\left(-1\,;\dfrac{1}{2}\,;0\right)$; donc :
$$\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{IG}=0 \text{ et } \overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BG}=0.$$
Ainsi le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BIG).
b) Le plan (BIG) a une équation de la forme :
$$x+2y+z+d=0.$$
Or B(1 ; 1 ; 0) appartient à ce plan donc $1+2+d=0$ et $d=-3$.
Le plan (BIG) a pour équation :
$$x+2y+z-3=0.$$
2. a) Δ est définie par F(1 ; 1 ; 1) et le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ qui est un vecteur directeur de cette droite. Donc, sa représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t, \\ z=1+t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}.$$
b) Les coordonnées de L vérifient l'équation :
$$x+2y+z-3=0.$$
D'où $1+t+2+4t+1+t-3=0$, soit $6t=-1$, $t=-\dfrac{1}{6}$.
Ainsi L a pour coordonnées $\left(\dfrac{5}{6}\,;\dfrac{2}{3}\,;\dfrac{5}{6}\right)$.
B a pour coordonnées (1 ; 1 ; 0) et $\overrightarrow{BL}\left(-\dfrac{1}{6}\,;-\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{5}{6}\right)$.
$\overrightarrow{BL}\cdot\overrightarrow{IG}=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{6}=0$ donc (BL) est perpendiculaire à (IG).
G(0 ; 1 ; 1) donc $\overrightarrow{GL}\left(\dfrac{5}{6}\,;-\dfrac{1}{3}\,;-\dfrac{1}{6}\right)$;
et $\overrightarrow{BI}\left(0\,;-\dfrac{1}{2}\,;1\right)$ donc $\overrightarrow{GL}\cdot\overrightarrow{BI}=0$.
Ainsi (GL) est perpendiculaire à (BI).
Donc L est l'orthocentre du triangle BIG.

77 **1.** $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{JF}$ donc DIFJ est un parallélogramme.
$IF=FJ=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ donc DIFJ est un losange.
$DF=\sqrt{3}$ et $IJ=\sqrt{2}$ donc l'aire de ce losange est $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.
2. a) E(0 ; 0 ; 1), $K\left(1\,;\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right)$, F(1 ; 0 ; 1), D(0 ; 1 ; 0),
$I\left(\dfrac{1}{2}\,;0\,;0\right)$ et $J\left(\dfrac{1}{2}\,;1\,;1\right)$.
Donc $\overrightarrow{EK}\left(1\,;\dfrac{1}{2}\,;-\dfrac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{DI}\left(\dfrac{1}{2}\,;-1\,;0\right)$ et $\overrightarrow{DJ}\left(\dfrac{1}{2}\,;0\,;1\right)$, soit :
$$\overrightarrow{EK}\cdot\overrightarrow{DI}=0 \text{ et } \overrightarrow{EK}\cdot\overrightarrow{DJ}=0.$$
Il en résulte que $\overrightarrow{EK}$ est normal au plan (DIJ).
b) $\overrightarrow{EK}$ est colinéaire au vecteur $\vec{n}(2\,;1\,;-1)$; donc la droite (EK) a pour représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}.$$
et le plan (DIJ) a une équation de la forme $2x+y-z+d=0$.
Or D(0 ; 1 ; 0) est un point de ce plan ; donc $d=-1$ et (DIJ) a pour équation $2x+y-z-1=0$.
Les coordonnées du point L de (EK) vérifient l'équation du plan :
$$4t+t-1+t-1=0 \text{ soit } 6t=2 \text{ d'où } t=\dfrac{1}{3}.$$
Le point L a pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\,;\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{2}{3}\right)$.
3. Volume (EIFJD) $=\dfrac{1}{3}$ EL $\times$ aire (IFJD).
$\overrightarrow{EL}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\,;\dfrac{1}{3}\,;-\dfrac{1}{3}\right)$.
Donc $EL=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ soit $\mathcal{P}=\dfrac{\sqrt{6}}{9}\times\dfrac{\sqrt{6}}{2}=\dfrac{1}{3}$.

POSITION RELATIVE DE DEUX PLANS

78 *Corrigé sur le site élève.*

79 **1.** $\begin{cases} x-y+z-3=0 \\ 2x+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-2x \\ y=-x-3 \end{cases}.$
Donc Δ a pour représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x=t \\ y=-t-3, \\ z=-2t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}.$$
2. Si ce point existe, alors $t-t-3+2t=0$ soit $t=\dfrac{3}{2}$.
Donc le point d'intersection a pour coordonnées :
$$\left(\dfrac{3}{2}\,;-\dfrac{9}{2}\,;-3\right).$$

80 $\begin{cases} 2x-y+5=0 \\ 3x+y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+5 \\ z=5x+5 \end{cases}.$

Donc Δ a pour équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 5 \\ z = 5t + 5 \end{cases}.$$

Un point de Δ appartient à Q, si et seulement si :

$$5t - 10t - 10 + 5t + 5 = 0 \Leftrightarrow 0t = 5.$$

Donc, il n'y a pas de solution.

La droite Δ est parallèle à Q.

81 **1.** $\vec{n_1}(1\,;\,2\,;\,-1)$ et $\vec{n_2}(1\,;\,-1\,;\,-1)$ sont des vecteurs normaux respectivement à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Or $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2} = 0$ donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.

2. $\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{1}{3} \\ x = z - \dfrac{1}{3} \end{cases}$

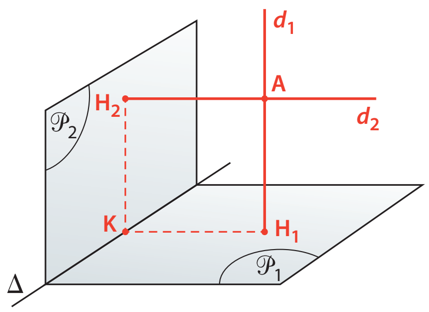
Donc Δ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t - \dfrac{1}{3} \\ y = -\dfrac{1}{3} \\ z = t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

3. a) d_1 a pour vecteur directeur $\vec{n_1}$; donc son équation paramétrique est : $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t, \\ z = 1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

b) d_2 a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = s \\ y = 1 - s \\ z = 1 - s \end{cases}.$$



c) • $t + 2 + 4t - 1 + t + 1 = 0$, soit $6t = -2$, d'où $t = -\dfrac{1}{3}$.

Donc H_1 a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{4}{3}\right)$.

• $s - 1 + s - 1 + s = 0$, soit $3s = 2$, d'où $s = \dfrac{2}{3}$.

Donc H_2 a pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$.

d) $\overrightarrow{AH_1}\left(-\dfrac{1}{3}\,;\,-\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$ donc $AH_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

$\overrightarrow{AH_2}\left(\dfrac{2}{3}\,;\,-\dfrac{2}{3}\,;\,-\dfrac{2}{3}\right)$ donc $AH_2 = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Le quadrilatère AH_1KH_2 est un rectangle, donc :

$AK^2 = AH_1^2 + AH_2^2 = \dfrac{6}{9} + \dfrac{12}{9} = \dfrac{18}{9} = 2$, d'où $AK = \sqrt{2}$.

82 **1.** Les vecteurs normaux $\vec{u_1}(1\,;\,2\,;\,-1)$ et $\vec{u_2}(2\,;\,3\,;\,-2)$ ne sont pas colinéaires ; donc les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants suivant Δ :

$$\begin{cases} x + 2y - z - 4 = 0 \\ 2x + 3y - 2z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z - 2 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Δ a donc pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t - 2 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

2. a) Le vecteur $\vec{u}(1\,;\,0\,;\,1)$ directeur de Δ est normal à $\mathcal{P}$ qui a donc une équation de la forme : $x + z + d = 0$.

Or $A(1\,;\,1\,;\,2)$ est un point de $\mathcal{P}$ donc $d = -3$.

Ainsi $\mathcal{P}$ a pour équation : $x + z - 3 = 0$.

b) $t - 2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{5}{2}$.

Donc H a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,3\,;\,\dfrac{5}{2}\right)$.

Soit $\overrightarrow{AH}\left(-\dfrac{1}{2}\,;\,2\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$; on obtient :

$$AH = \sqrt{\frac{1}{4} + 4 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

La distance du point A à la droite Δ est $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

83 **1.** $\mathcal{P}_1 : x + 2z - 1 = 0$ et $\mathcal{P}_2 : x - y + 4z - 1 = 0$.

$$\begin{cases} x + 2z - 1 = 0 \\ x - y + 4z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z + 1 \\ y = 2z \end{cases}.$$

Donc Δ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

2. $-2t + 1 + (1 - m)2t + 2mt - 1 = 0 \Leftrightarrow 0t = 0$, donc $t \in \mathbb{R}$ et $\Delta \subset \mathcal{P}_m$.

3. $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ont respectivement pour vecteurs normaux $(1\,;\,1 - m_1\,;\,2m_1)$ et $(1\,;\,1 - m_2\,;\,2m_2)$.

Ces plans sont orthogonaux si, et seulement si :

$$1 + (1 - m_1)(1 - m_2) + 4m_1m_2 = 0$$

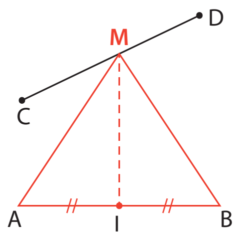
soit $5m_1m_2 - m_1 - m_2 + 2 = 0$ d'où $m_2(5m_1 - 1) = m_1 - 2$.

Or $m_1 \neq \dfrac{1}{5}$ donc $m_2 = \dfrac{m_1 - 2}{5m_1 - 1}$.

AVEC LES TICE

84 **A. 2. a)** La valeur minimale de m semble être 7,667.

b) Le point m semble être l'intersection de la droite d et de la droite (CD).



B. 1. a) $\overrightarrow{CM} = t\,\overrightarrow{CD}$, soit :

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t + 1 \\ z = t - 1 \end{cases}.$$

b) $m = MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$.

$I\left(2\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,1\right)$ et $\overrightarrow{AB}(2\,;\,1\,;\,0)$; donc :

$$m = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 2\left[6t^2 - 8t + \frac{31}{4}\right].$$

2. On note, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = 2\left[6t^2 - 8t + \frac{31}{4}\right]$$

$$f'(t) = 2[12t - 8].$$

Donc f est minimale lorsque $t = \dfrac{2}{3}$ et, dans ce cas :

$$m = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{247}{18}.$$

3. a) M_0 a pour coordonnées $\left(\dfrac{5}{3}\,;\,-\dfrac{1}{3}\,;\,-\dfrac{1}{3}\right)$.

b) $\overrightarrow{IM_0}\left(-\frac{1}{3}; -\frac{5}{6}; -\frac{4}{3}\right)$ et $\overrightarrow{CD}(1; -2; 1)$, donc :

$$\overrightarrow{IM_0}\cdot\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{3} + \frac{5}{3} - \frac{4}{3} = 0.$$

(IM_0) est donc perpendiculaire à (CD).

85 **A. 2.** La valeur maximale de n semble être 1,231 ; M semble être dans le milieu du segment [BC].

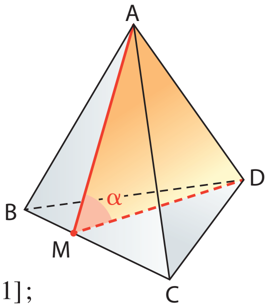
B. 1. M a pour coordonnées :

$x = 2 - 4t$; $y = -2 + 4t$; $z = -2$.

Donc $\overrightarrow{MA}(4t; 4 - 4t; 4)$

et $\overrightarrow{MD}(-4 + 4t; -4t; 4)$.

Soit $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MD} = 16(2t^2 - 2t + 1)$.



2. a) $MA = MD = 4\sqrt{2t^2 - 2t + 2}$

b) $\cos\left(\widehat{AMD}\right) = \dfrac{2t^2 - 2t + 1}{(2t^2 - 2t + 2)}$.

3. $f(t) = \dfrac{2t^2 - 2t + 1}{2t^2 - 2t + 2}$ avec $t \in [0; 1]$;

$$f'(t) = \frac{4t - 2}{(2t^2 - 2t + 2)^2}.$$

Soit f est minimale pour $t = \frac{1}{2}$ donc $\cos\left(\widehat{AMD}\right) = \frac{1}{3}$.

M est donc le milieu de [BC], et $\widehat{AMD} \approx 70°5$.

ÉQUATION D'UNE SPHÈRE

86 **1.** $\overrightarrow{AB}(-3; 1; 5)$; $\overrightarrow{AC}(-2; -3; 4)$.

Vraie : les vecteurs ne sont pas colinéaires ; donc A, B et C définissent un plan.

2. Fausse : A appartient-il à $\mathcal{P}$? $2 - 2 - 1 + 1 = 0$ donc $A \in \mathcal{P}$.

C appartient-il à $\mathcal{P}$? $0 + 4 + 3 + 4 \neq 0$ donc $C \notin \mathcal{P}$.

3. Vraie : $\overrightarrow{AC}$ est colinéaire au vecteur $(2; 3; -4)$ et C a pour coordonnées $(0; -2; 3)$. Donc la représentation proposée est celle de (AC).

4. Fausse : $\overrightarrow{CD}(1; 3; -5)$ donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = -3 + 3 - 25 \neq 0$.

5. Vraie : $E \in \mathcal{P}$ car $-\frac{4}{3} - \frac{4}{3} + \frac{5}{3} + 1 = 0$.

De plus $\overrightarrow{CE}\left(-\frac{4}{3}; \frac{8}{3}; -\frac{4}{3}\right)$ et $\vec{n}(1; -2; 1)$, vecteur normal à $\mathcal{P}$, sont colinéaires :

$$\vec{n} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{CE}.$$

Donc E est le projeté orthogonal de C sur $\mathcal{P}$.

6. Vraie : la distance de D au plan $\mathcal{P}$ est égale à :

$$\frac{|1 - 2 - 2 + 1|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Donc la sphère de centre D et de rayon $\frac{\sqrt{6}}{3}$ est tangente au plan $\mathcal{P}$.

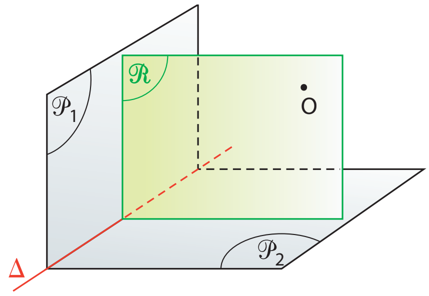
87 *Corrigé sur le site élève.*

Prendre toutes les initiatives

88 $\begin{cases} 2x + y - 3z + 1 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x + 1 \\ y = x + 2 \end{cases}$.

Donc, la droite intersection Δ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t + 2 \\ z = t + 1 \end{cases}.$$



Le vecteur $\vec{u}(1; 1; 1)$ directeur de Δ est normal à $\mathcal{R}$ et $O \in \mathcal{R}$.

Donc $\mathcal{R}$ a pour équation : $x + y + z = 0$.

89 $\overrightarrow{AB}(-1; -1; 1)$ et $\overrightarrow{AC}(-2; -5; -1)$. Le centre de gravité G du triangle ABC a pour coordonnées $(0; 0; 3)$; car :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

$\overrightarrow{DG}(-4; 2; -2)$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DG} = 0$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DG} = 0$.

Donc G est bien le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

90 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AB \cdot AC \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de sens contraire.

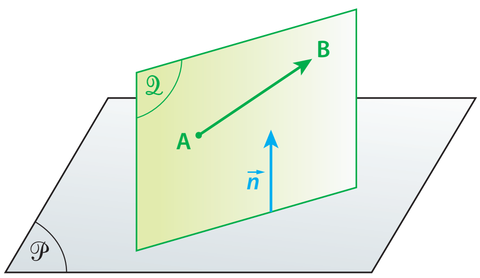
Donc, A, B et C alignés $\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right| = AB \times AC$.

Or $\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right| \neq AB \cdot AC$, donc le raisonnement est exact.

EXERCICES Le jour du BAC (page 344)

91 *Corrigé sur le site élève.*

92 **2. Application**



Le vecteur $\vec{n_1}$ normal à $\mathcal{Q}$ est tel que $\vec{n}\cdot\vec{n_1} = 0$ et $\vec{n_1}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$, $\vec{n}$ étant un vecteur normal de $\mathcal{P}$.

$\vec{n}$ a pour coordonnées $(2; 1; -1)$ et $\overrightarrow{AB}$ pour coordonnées $(-1; 1; 1)$.

Donc $\begin{cases} 2a + b - c = 0 \\ -a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 0 \\ c = 2a + b \end{cases}$

soit $a = -2b$ et $c = -3b$;

donc $\vec{n}(2; -1; 3)$ et $\mathcal{Q}$ a une équation de la forme :

$$2x - y + 3z + d = 0.$$

Or $A \in \mathcal{Q}$ donc $d = -2$.

$\mathcal{Q}$ a pour équation $2x - y + 3z - 2 = 0$.

93 Soient P(2 ; 0 ; 0), Q(0 ; 4 ; 0), R(1 ; 1 ; 2).

1. a) $\overrightarrow{PR}(-1\,;\,1\,;\,2)$, $\overrightarrow{QR}(-1\,;\,-3\,;\,2)$ et $\overrightarrow{PQ}(-2\,;\,4\,;\,0)$.

$PR = \sqrt{6}$; $QR = \sqrt{14}$; $PQ = 2\sqrt{5}$.

Le triangle PQR est donc rectangle en R car :

$$PR^2 + QR^2 = PQ^2.$$

b) P(2 ; 0 ; 0) appartient au plan (PQR) car $4 \times 2 - 8 = 0$.

Q(0 ; 4 ; 0) appartient au plan (PQR) car $2 \times 4 - 8 = 0$.

R(1 ; 1 ; 2) appartient au plan (PQR) car $4 + 2 + 2 - 8 = 0$.

Donc l'équation est celle du plan PQR.

2. a) D(0 ; 0 ; 1) et $\vec{u}(4\,;\,2\,;\,1)$ est un vecteur normal du plan (PQR) donc un vecteur directeur de (DH). Ainsi (DH) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) $16t + 4t + 1 + t - 8 = 0 \Leftrightarrow 21t = 7$ soit $t = \dfrac{1}{3}$.

Donc H a pour coordonnées $\left(\dfrac{4}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{4}{3}\right)$.

c) $\overrightarrow{PR}(-1\,;\,1\,;\,2)$ et $\overrightarrow{PH}\left(-\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{4}{3}\right)$ d'où $\overrightarrow{PH} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{PR}$.

Donc H est un point de la droite (PR).

94 **1.** $-16 + 4t + 21 - 3t - 6 - t + 4 = 0$ soit $0t = -3$; donc d et $\mathcal{P}$ n'ont pas de point commun.

Ainsi seule **b)** est vraie.

2. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ont respectivement pour vecteurs normaux $\vec{n}(2\,;\,3\,;\,-1)$ et $\vec{n}'(1\,;\,4\,;\,-3)$.

Comme $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont non colinéaires, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants.

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + 4 = 0 \\ x + 4y - 3z + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z - \dfrac{4}{5} \\ x = -z - \dfrac{4}{5} \end{cases}.$$

Donc la droite intersection a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -t - \dfrac{4}{5} \\ y = t - \dfrac{4}{5} \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Un vecteur directeur a pour coordonnées (–1 ; 1 ; 1).

Ainsi seule **c)** est vraie.

3. Soit $\overrightarrow{AB}(-4\,;\,2\,;\,5)$ et I le milieu de [AB] qui a pour coordonnées $\left(-1\,;\,3\,;\,-\dfrac{3}{2}\right)$.

Le plan médiateur a donc une équation de la forme :

$$-4x + 2y + 5z + d = 0.$$

Or I appartient à ce plan, donc :

$$4 + 6 - \frac{15}{2} + d = 0 \text{ soit } d = -\frac{5}{2}.$$

Le plan médiateur a donc pour équation :

$$-4x + 2y + 5z - \frac{5}{2} = 0.$$

Ainsi seule la proposition **a)** est vraie.

95 **1. a)** E(1 ; 0 ; 1), C(0 ; 1 ; 0) et $\overrightarrow{EC}(-1\,;\,1\,;\,-1)$.

Donc (EC) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) F(1 ; 1 ; 1), H(0 ; 0 ; 1) et A(1 ; 0 ; 0).

Soient $\overrightarrow{AF}(0\,;\,1\,;\,1)$, $\overrightarrow{AH}(-1\,;\,0\,;\,1)$ et $\vec{n}(a\,;\,b\,;\,c)$ un vecteur normal à (AFH) ; donc $b + c = 0$ et $-a + c = 0$.

$\vec{n}(1\,;\,-1\,;\,1)$ est donc normal au plan et ce plan (AFH) a une équation de la forme :

$$x - y + z + d = 0.$$

Or A appartient à ce plan donc $d = -1$.

Le plan a pour équation $x - y + z - 1 = 0$.

2. $1 - t - t + 1 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow 3t = 1$, donc $t = \dfrac{1}{3}$.

Il en résulte que I a pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$.

$\overrightarrow{EI}\left(-\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,-\dfrac{1}{3}\right)$ donc $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{AF} = 0$ et $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$.

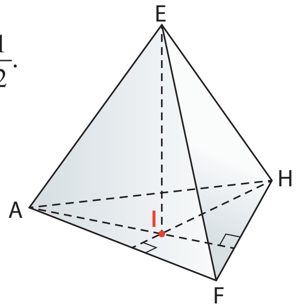
Il en résulte que (EI) est perpendiculaire au plan (AFH).

3. a) $\overrightarrow{IH}\left(-\dfrac{2}{3}\,;\,-\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$; $\overrightarrow{AF}(0\,;\,1\,;\,1)$, donc $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AF} = 0$ et $(IH) \perp (AF)$.

b) On démontre de même que $(AI) \perp (HF)$ donc que H est l'orthocentre du triangle AFH.

4. Aire (AEF) = aire (AEH)

$= \text{aire (EFH)} = \dfrac{1}{2}$.

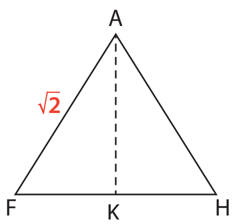


AFH est un triangle équilatéral de côté $\sqrt{2}$.

$$AK = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{donc aire (AFH)} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{6} \times \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Donc le tétraèdre n'est pas du **type 1**.



(AF) est perpendiculaire à (HI) et (EI) donc (AF) est perpendiculaire au plan (EIH) donc à (EH). Les arêtes du tétraèdre sont orthogonales. Il en est de même des couples (AE) et (FH) ainsi que (AH) et (EF).

Ainsi le tétraèdre est du **type 2**.

EXERCICES Pour aller plus loin (page 346)

96 **1. a)** (OH) $\perp$ (AB) et (OC) $\perp$ (AB) donc (AB) est perpendiculaire au plan (COH).
b) D'après **1. a)** (AB) $\perp$ (IC) et (OI).
2. a) OH × IC = OI × OC, d'où :

$$OH^2(OC^2 + OI^2) = OI^2 \times OC^2.$$

En divisant par $OH^2 \times OI^2 \times OC^2$, il vient :

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

b) En exprimant l'aire de OAB de deux manières :

$$OA \times OB = AB \times OI$$
$$OA^2 \times OB^2 = (OA^2 + OB^2) \times OI^2,$$

on obtient $\dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2}$.

c) On a $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{c^2} + \dfrac{1}{OI^2}$; or $\dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$ donc :

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \quad (1).$$

3. Volume (OABC) $= \dfrac{1}{3}$ aire(ABC) × OH

$= \dfrac{1}{3}$ aire AOB × OC ;

donc $[\text{aire(ABC)}]^2 = \dfrac{OC^2}{OH^2} \times [\text{aire(AOB)}]^2$

$= \dfrac{c^2a^2b^2}{4h^2}$ (2).

4. En tenant compte du (1) :

$$[\text{aire(ABC)}]^2 = \frac{a^2b^2c^2}{4}\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right]$$

$$[\text{aire(ABC)}]^2 = \frac{1}{4}b^2c^2 + \frac{1}{4}a^2c^2 + \frac{1}{4}a^2b^2$$

$$= [\text{aire(OBC)}]^2 + [\text{aire(OAC)}]^2 + [\text{aire(OAB)}].$$

97 **1.** (OH) est perpendiculaire à (IC). Le triangle ABC est rectangle isocèle en O donc [OI] est hauteur de ABC et (AB) est perpendiculaire à (OI). (AB) est orthogonale à (OC). Donc (AB) est orthogonale au plan (OIC) et en particulier à (OH). Ainsi (OH) est orthogonale à (AB) et à (IC), donc au plan (ABC). Or, le plan (ABC) a pour équation $x + y + z - a = 0$. Il en résulte que le vecteur $\vec{n}(1 ; 1 ; 1)$, normal au plan (ABC), est un vecteur directeur de (OH).
Ainsi (OH) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t, \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Il en résulte $3t = a$ et $t = \dfrac{a}{3}$.

Donc H a pour coordonnées $\left(\dfrac{a}{3} ; \dfrac{a}{3} ; \dfrac{a}{3}\right)$.

$\overrightarrow{AH}\left(-\dfrac{2a}{3} ; \dfrac{a}{3} ; \dfrac{a}{3}\right)$ et $\overrightarrow{CB}(0 ; a ; -a)$, donc :

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{3} = 0.$$

Donc H est l'orthocentre du triangle ABC.

2. D a pour coordonnées $\left(-\dfrac{a}{3} ; -\dfrac{a}{3} ; -\dfrac{a}{3}\right)$.

$\overrightarrow{DA}\left(\dfrac{4a}{3} ; \dfrac{a}{3} ; \dfrac{a}{3}\right)$; $\overrightarrow{DB}\left(\dfrac{a}{3} ; \dfrac{4a}{3} ; -\dfrac{a}{3}\right)$ et $\overrightarrow{DC}\left(\dfrac{a}{3} ; \dfrac{a}{3} ; \dfrac{4a}{3}\right)$.

Donc DA = DB = DC = $a\sqrt{2}$ et AB = AC = CB = $a\sqrt{2}$.
Le tétraèdre DABC est donc régulier.
3. Le triangle ABC est équilatéral donc H, orthocentre, est aussi le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Donc AH = BH = CH. De plus, OA = OB = OC.
Il en résulte que la droite (OH) est contenue dans les plans médiateurs de [AB] et [AC] et Ω est un point de (OH).
$\Omega A^2 = \Omega B^2 = \Omega C^2 + 3t^2 - 2at + a^2$

$\Omega D^2 = \dfrac{a^3}{3} + 3t^2 + 2at.$

Donc $\Omega A^2 = \Omega D^2$ équivaut à $t = \dfrac{a}{3}$ et Ω a pour coordonnées :

$$\left(\frac{a}{3} ; \frac{a}{3} ; \frac{a}{3}\right)$$

98 Δ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = p + mt \\ z = 1 + t \end{cases}$

$2 - t - p - mt + 2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t(1 - m) = p - 1.$

1. *Vraie* : car si $m \neq 1$, $t = \dfrac{p-1}{1-m}$.
Donc il existe un seul point d'intersection.
2. *Faux* : car pour $p = 1$ et $m = 1$, la droite Δ est contenue dans $\mathcal{P}$.
3. *Faux* : pour $m \neq 1$, il y a un point d'intersection.
4. *Vraie* : si $m = 1$ et $p = 1$, $\Delta \subset \mathcal{P}$.
5. *Vraie* : car pour $m = 1$, $0t = p - 1$ (avec $p \neq 1$) n'a pas de solution et Δ est parallèle à $\mathcal{P}$.

99 **1.** $\overrightarrow{AM} = a\vec{u}$, soit $x = a$, $y = 0$, $z - 3z = -a$.
Si $(x ; y ; z)$ sont les coordonnées de M, M a pour coordonnées $(a ; 0 ; 3 - a)$.
De même, M' a pour coordonnées $(2 ; b ; 4 + b)$.
Donc $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $(2 - a ; b ; 1 + b + a)$.
2. $\overrightarrow{MM'}$ est perpendiculaire à d si, et seulement si $\vec{u} \cdot \overrightarrow{MM'} = 0$.
$2 - a - 1 - b - a = 0$ donc $2a + b = 1$.
De même $\vec{v} \cdot \overrightarrow{MM'} = 0$ équivaut à $a + 2b = -1$.

3. a) $\begin{cases} 2a + b = 1 \\ a + 2b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = -1 \\ -3b = 3 \end{cases}$, soit $b = -1$ et $a = 1$.

b) H a pour coordonnées $(1 ; 0 ; 2)$ et H' a pour coordonnées $(2 ; -1 ; 3)$.
c) $\overrightarrow{HH'}(1 ; -1 ; 1)$ donc HH' $= \sqrt{3}$.
4. a)

$$\begin{aligned} MM'^2 &= (2 - a)^2 + b^2 + (b + a + 1)^2 \\ &= 4 - 4a + a^2 + b^2 + b^2 + a^2 + 1 + 2ab + 2b + 2a \\ &= 5 + 2a^2 + 2b^2 + 2ab + 2b - 2a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a + b)^2 + (a - 1)^2 + (b + 1)^2 + 3 &= a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2a + 1 + b^2 + 2b + 1 + 3 \\ &= 5 + 2a^2 + 2b^2 + 2ab + 2b - 2a. \end{aligned}$$

D'où l'égalité.
b) MM' est minimale si $a = -b$; $a = 1$ et $b = -1$.
Donc M = H et M' = H'.

100 **A. Démonstration**

1. a) $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires ; donc :

$$|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AH}| = \|\vec{n}\| \times AH.$$

Or $\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$, donc :

$$|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AH}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \times AH \quad (1).$$

2. a) $\overrightarrow{AH}(\alpha - x_0\,;\ \beta - y_0\,;\ \gamma - z_0)$.

Donc $|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AH}| = |a\alpha + b\beta + c\gamma - ax_0 - by_0 - cz_0|$.

b) $H \in \mathcal{P}$ donc $a\alpha + b\beta + c\gamma = -d$.

c) Donc $AH = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

B. Application

$A(0\,;0\,;0)$, $G(1\,;1\,;1)$ et $I\left(0\,;1\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

Les coordonnées de A, G, I vérifient l'équation :

$$x + y - 2z = 0.$$

Cette équation est donc celle du plan (AGI).

$O\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\,;0\right)$ et $E(0\,;0\,;1)$; donc :

$$\overrightarrow{OE}\left(-\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\,;1\right).$$

De plus, un vecteur $\vec{n}$ normal au plan (AGI) a pour coordonnées $(1\,;1\,;-2)$.

Donc $\vec{n} = -2\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OE}$ est aussi un vecteur normal à ce plan.

2. a) $d = \dfrac{|-2|}{\sqrt{1+1+4}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

b) • (OE) a pour représentation paramétrique :

$$x = -\frac{1}{2}t\,;\ y = -\frac{1}{2}t\,;\ z = 1 + t.$$

• $-\dfrac{1}{2}t - \dfrac{1}{2}t - 2 - 2t = 0 \Leftrightarrow -3t - 2 = 0,\ t = -\dfrac{2}{3}$.

Donc K a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{1}{3}\right)$.

• $\overrightarrow{EK}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{1}{3}\,;-\dfrac{2}{3}\right)$.

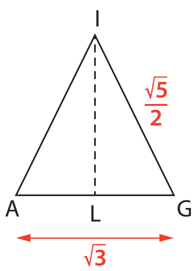
Soit $EK = \sqrt{\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{4}{9}}$, d'où $EK = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

c) $\text{Aire(AEI)} = \dfrac{1}{2}\times 1 \times 1 = \dfrac{1}{2}$.

$\text{Volume(GAIE)} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 1 = \dfrac{1}{6}$.

$AG = \sqrt{3}$, $GI = AI = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

$IL = \sqrt{\dfrac{5}{4}-\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



Donc $\text{aire(AIG)} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

$\text{Volume (GAIE)} = \dfrac{1}{3}\,EK \times \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

Donc $EK \times \dfrac{\sqrt{6}}{4} = \dfrac{1}{2}$; $EK = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

PROLONGEMENT AU TD 33

101 **1. a)** $\overrightarrow{AB}(0\,;1\,;2)$ et $\overrightarrow{AC}(-2\,;1\,;-1)$.

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires ; donc A, B, C ne sont pas alignés.

b) $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 4 - 4 = 0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = -6 + 4 + 2 = 0$; donc $\vec{n}$ est normal au plan ABC.

c) Le plan (ABC) a une équation de la forme :

$$3x + 4y - 2z + d = 0.$$

Or A appartient à ce plan, donc :

$$3 - 4 + d = 0 \text{ soit } d = 1.$$

Donc le plan (ABC) a pour équation :

$$3x + 4y - 2z + 1 = 0.$$

2. $\begin{cases} 2x + y + 2z + 1 = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z - \dfrac{2}{5} \\ y = 2z - \dfrac{1}{5} \end{cases}$.

Donc Δ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -2t - \dfrac{2}{5} \\ y = 2t - \dfrac{1}{5} \\ z = t \end{cases},\qquad t \in \mathbb{R}.$$

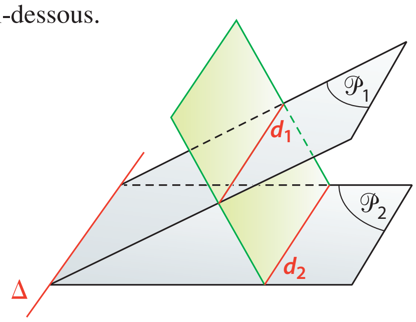
3. a) Si Δ et (ABC) ont un point commun, alors :

$$3\left(-2t - \frac{2}{5}\right) + 4\left(2t - \frac{1}{5}\right) - 2t + 1 = 0$$

équivaut à $0t = 1$.

Donc, cette équation n'a pas de solution et Δ est parallèle au plan ABC.

b) Les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et (ABC) se présentent comme sur le schéma ci-dessous.



Le plan (ABC) coupe $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ suivant d_1 et d_2 parallèles à Δ (théorème du toit).

102 $\overrightarrow{AB}(0\,;1\,;1)$ et $\overrightarrow{AC}(2\,;-2\,;2)$.

Ces vecteurs non colinéaires définissent avec A un plan.

Le vecteur $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ est normal au plan (ABC) si et seulement si :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n} = 0 \text{ et } \overrightarrow{AC}\cdot\vec{n} = 0.$$

Soit $b + c = 0$ et $a - b + c = 0$; soit $b = -c$ et $a = -2c$.

Donc $\vec{n}(2\,;1\,;-1)$ et le plan (ABC) a pour équation :

$$2x + y - z - 3 = 0.$$

$\begin{cases} x + 2y - z - 4 = 0 \\ 2x + 3y - 2z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases}$.

Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ont en commun la droite Δ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t - 2 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases},\qquad t \in \mathbb{R}.$$

Étudions la position de Δ et du plan (ABC) :

$$2(t-2) + 3 - t - 3 = 0,\ t = 4.$$

Ainsi, les plans $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$ et (ABC) ont en commun le point I de coordonnées $(2\,;3\,;4)$.

CHAPITRE 12

Probabilités conditionnelles

ACTIVITÉS

(page 350)

Activité 1

1 a) $f(\text{V}) = 0{,}6$;
$f(\overline{\text{V}}) = 0{,}4$.

b) $\text{V} \cap \text{M}$: 120 personnes ;
$\overline{\text{V}} \cap \text{M}$: 180 personnes.
Donc $f(\text{V} \cap \text{M}) = 0{,}12$ et $f\left(\overline{\text{V}} \cap \text{M}\right) = 0{,}18$.

2 a) • Tableau des fréquences :

Groupe A	Malade	Sain
Fréquence	$\dfrac{120}{600} = 0{,}2$	$\dfrac{480}{600} = 0{,}8$

$f_\text{V}(\text{M})$

• $f(\text{V} \cap \text{M}) = 0{,}12$ et $f(\text{V})$ $f_\text{V}(\text{M}) = 0{,}6$ $0{,}2 = 0{,}12$.
Donc $f(\text{V}) \times f_\text{V}(\text{M}) = f(\text{V} \cap \text{M})$.
Le résultat était prévisible. En effet, si on désigne par N le nombre total de personnes, par $n(\text{V})$ celui des personnes vaccinées et $n(\text{V} \cap \text{M})$ celui des personnes vaccinées malades alors :

$$f(\text{V}) \times f_\text{V}(\text{M}) = \frac{n(\text{V})}{\text{N}} \times \frac{n(\text{V} \cap \text{M})}{n(\text{V})} = \frac{n(\text{V} \cap \text{M})}{\text{N}}$$

soit $f(\text{V}) \times f_\text{V}(\text{M}) = f(\text{V} \cap \text{M})$.

b) • Tableau des fréquences :

Groupe B	Malade	Sain
Fréquence	$\dfrac{180}{400} = 0{,}45$	$\dfrac{220}{400} = 0{,}55$

$f_{\overline{\text{V}}}(\text{M})$

• $f\left(\overline{\text{V}} \cap \text{M}\right) = 0{,}18$ et $f\left(\overline{\text{V}}\right)$ $f_{\overline{\text{V}}}(\text{M}) = 0{,}4$ $0{,}45 = 0{,}18$.
Donc $f(\overline{\text{V}}) \times f_{\overline{\text{V}}}(\text{M}) = f(\overline{\text{V}} \cap \text{M})$.

c) Les fréquences conditionnelles vérifient :

$$f_\text{V}(\text{M}) = 0{,}2 \text{ et } f_{\overline{\text{V}}}(\text{M}) = 0{,}45.$$

La fréquence des malades parmi les personnes non vaccinées est nettement supérieure à celle des malades parmi les personnes vaccinées ; on peut donc penser que le vaccin est efficace.

Activité 2

1 a) Vue d'écran :

	A	B	C	D	E
1	n	x	y	x+y	x*y
2	1	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	=B2+C2	=B2*C2

b) Vue d'écran :

F	G	H
A	B	A et B
=SI(D2>6;1;0)	=SI(E2<18;1;0)	=F2*G2

c) Vue d'écran :

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	x	y	x+y	x*y	A	B	A et B
2	1	2	2	4	4	0	1	0
3	2	4	1	5	4	0	1	0
4	3	2	1	3	2	0	1	0
5	4	6	3	9	18	1	0	0
6	5	4	4	8	16	1	1	1
7	6	5	1	6	5	0	1	0

d) Vue d'écran :

=SOMME(H2:H10001)/SOMME(F2:F10001)

A	B	C	D	E	F	G	H	I
n	x	y	x+y	x*y	A	B	A et B	f_A(B)
1	2	2	4	4	0	1	0	0,5188
2	4	1	5	4	0	1	0	

Observation : après plusieurs simulations, on constate que la fréquence conditionnelle $f_\text{A}(\text{B})$ semble se stabiliser autour d'une valeur proche de 0,52.

2 a) La situation est représentée par les tableaux à double entrée ci-dessous :

Somme	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Événement A

Produit	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Événement B

$P(A) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$; $P(B) = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$; $P(A \cap B) = \frac{11}{36}$.

$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{11}{36} \,\Big|\, \frac{21}{36} = \frac{11}{21}$.

b) Le résultat est en accord avec la fréquence conditionnelle $f_A(B)$ observée lors des simulations :

$$\left(\frac{11}{21} \approx 0{,}5238\right).$$

PROBLÈME OUVERT

Ce célèbre problème a conduit au paradoxe suivant avec les deux types de raisonnement intuitif indiqués ci-après.

• Après l'ouverture de la porte, il reste deux portes. Chacune ayant autant de chance de cacher la voiture, le joueur a donc autant de chance de gagner qu'il change son choix ou pas.

• S'il ne change pas son choix, le joueur gagne s'il fait le bon choix dès le départ (1 chance sur 3).

Il a donc 1 chance sur 3 de gagner sans changer, et 2 chances sur 3 de gagner en changeant.

C'est la notion de probabilité conditionnelle qui va permettre de résoudre correctement ce problème.

L'utilisation d'un arbre pondéré facilite la compréhension.

L'expérience complète est la succession de l'ouverture des trois portes sous les conditions indiquées.

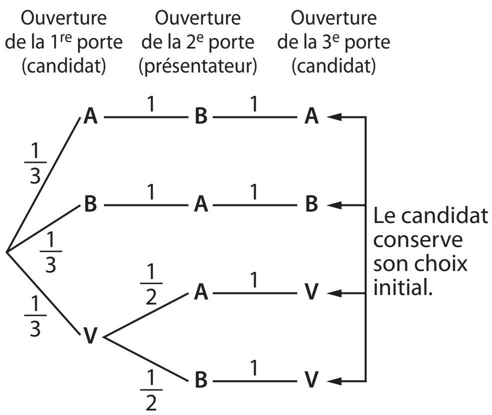
On considère les événements suivants :

A : « la porte cache la chèvre A »,

B : « la porte cache la chèvre B »,

V : « la porte cache la voiture ».

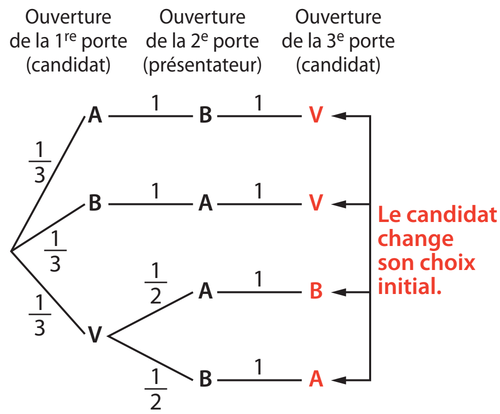
• *Protocole 1* : le candidat conserve son choix initial.



D'après la formule des probabilités totales :

$$P(V) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

• *Protocole 2* : le candidat change son choix initial.



D'après la formule des probabilités totales :

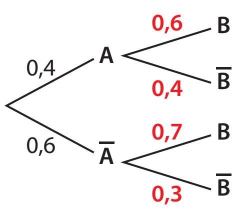
$$P(V) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Conclusion : la stratégie à conseiller au candidat est de changer son choix initial.

EXERCICES

Application (page 355)

1 **1.** Arbre pondéré :

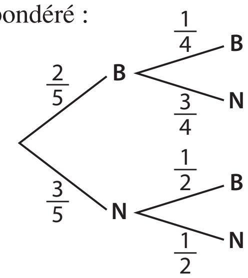


2. D'après la loi des chemins :

$P(A \cap B) = 0{,}24$; $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}16$;

$P(\overline{A} \cap B) = 0{,}42$; $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}18$.

2 **1.** Arbre pondéré :



2. a) On note A l'événement « deux boules blanches » :

$$P(A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}.$$

b) On note M l'événement « deux boules noires » :

$$P(M) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}.$$

c) On note D l'événement « une boule blanche et une boule noire » :

$$P(D) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{5}.$$

3 $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}3$.

$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0{,}6$.

$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0{,}5$.

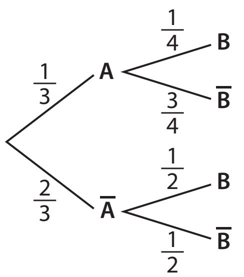
4 $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0{,}5$.

$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$ donc :

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P_B(A)} = \frac{2}{3}.$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{13}{15}.$$

5 La réalisation d'un arbre pondéré facilite les réponses.



$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$.

$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$.

D'après la formule des probabilités totales :

$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{12}$.

6 $P_A(\overline{B}) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)} = \dfrac{2}{5} \;|\; \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{5}$.

D'après la formule des probabilités totales :

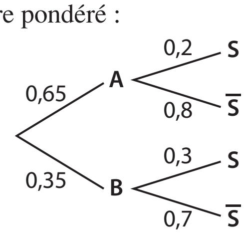
$$P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{B})$$

donc :

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) = \frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{7}{20}.$$

$$P_{\overline{A}}(\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{A})} = \frac{7}{20} \;|\; \frac{1}{2} = \frac{7}{10}.$$

7 **1. a)** Arbre pondéré :



b) Tableau de probabilités :

	A	B
S	0,13	0,105
$\overline{S}$	0,52	0,245

$P(A \cap S) = P(A) \cdot P_A(S)$
$P(A \cap S) = 0{,}65 \cdot 0{,}2 = 0{,}13$

On obtient de même les autres probabilités du tableau.

2. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(S) = P(A \cap S) + P(B \cap S) = 0{,}13 + 0{,}105 = 0{,}235.$$

Ainsi, le taux d'employés stressés ne dépasse pas 25 % ; donc l'implantation de la salle n'aura pas lieu.

Remarque. Ce résultat était prévisible. En effet, si on pondère les taux de chaque catégorie par la masse, le taux moyen d'employés stressés est :

$$t_m = 0{,}65 \cdot 20\,\% + 0{,}35 \cdot 30\,\% = 23{,}5\,\%$$

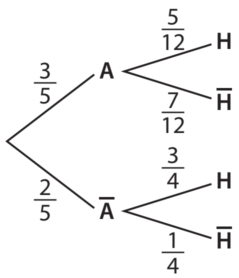
donc ce taux est inférieur à 25 %.

8 **1.**

$P(A) = \dfrac{125 + 175}{500} = \dfrac{3}{5}$; $\quad P(H) = \dfrac{125 + 150}{500} = \dfrac{11}{20}$;

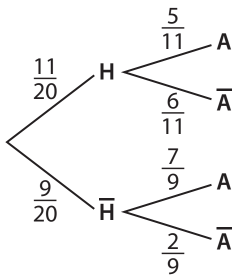
$P_A(H) = \dfrac{125}{125 + 175} = \dfrac{5}{12}$; $\quad P_H(A) = \dfrac{125}{125 + 150} = \dfrac{5}{11}$.

2. a) Arbre pondéré commençant par A et $\overline{A}$:



Note. $P_{\overline{A}}(H) = \dfrac{150}{150 + 50} = \dfrac{3}{4}$.

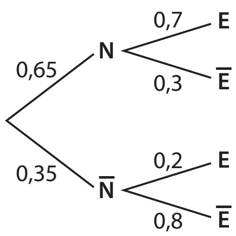
b) Arbre pondéré commençant par H et $\overline{H}$:



Note. $P_{\overline{H}}(A) = \dfrac{175}{175 + 50} = \dfrac{7}{9}$.

9 On considère les événements E « la personne est écologiste » et N « la personne est opposée à la construction du barrage ».

Arbre illustrant la situation :



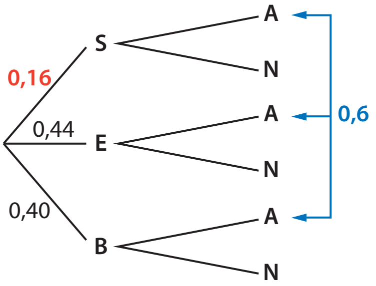
1. $P(N \cap E) = P(N) \cdot P_N(E) = 0{,}65 \cdot 0{,}7 = 0{,}455$.

2. $P\left(\overline{N} \cap E\right) = P\left(\overline{N}\right) \cdot P_{\overline{N}}(E) = 0{,}35 \cdot 0{,}2 = 0{,}07.$

3. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(E) = P(N \cap E) + P\left(\overline{N} \cap E\right) = 0{,}525\,.$$

10 **1.** Arbre pondéré :



2. a) $P(S \cap A) = P(A) \cdot P_A(S) = 0{,}6 \cdot 0{,}15 = 0{,}09.$

$P(B \cap A) = P(A) \cdot P_A(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}30.$

b) D'après la formule des probabilités totales :

$$P(S \cap A) + P(E \cap A) + P(B \cap A) = P(A)$$

donc :

$P(E \cap A) = P(A) - P(S \cap A) - P(B \cap A)$

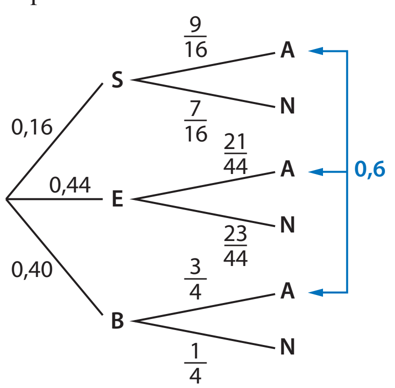
$P(E \cap A) = 0{,}6 - 0{,}09 - 0{,}30 = 0{,}21\,.$

c) $P_S(A) = \dfrac{P(S \cap A)}{P(S)} = \dfrac{0{,}09}{0{,}16} = \dfrac{9}{16}.$

$P_E(A) = \dfrac{P(E \cap A)}{P(E)} = \dfrac{0{,}21}{0{,}44} = \dfrac{21}{44}.$

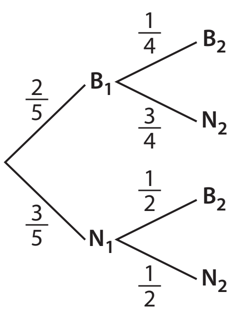
$P_B(A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(B)} = \dfrac{0{,}3}{0{,}4} = \dfrac{3}{4}.$

3. Arbre complet :



11 **1.** • Lors du tirage successif de deux boules sans remise, pour $1 \leqslant i \leqslant 2$, on note : B_i « boule blanche au tirage de rang i » et N_i « boule noire au tirage de rang i ».

Arbre pondéré associé à la couleur :



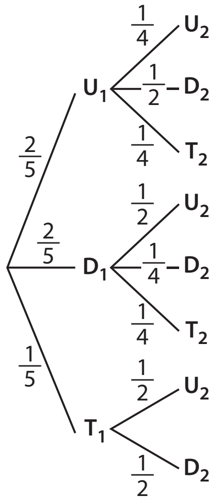
$P(A) = P\left(B_1 \cap B_2\right) + P\left(N_1 \cap N_2\right)$

$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(B_2) + P(N_1) \cdot P_{N_1}(N_2)$

$P(A) = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{5}.$

• Lors du tirage successif de deux boules sans remise, pour $1 \leqslant i \leqslant 2$, on note U_i « n° 1 au tirage de rang i », D_i « n° 2 au tirage de rang i » et T_i « n° 3 au tirage de rang i ».

Arbre pondéré associé au numéro :



$P(B) = P\left(U_1 \cap D_2\right) + P\left(D_1 \cap U_2\right)$

$P(B) = P(U_1) \cdot P_{U_1}(D_2) + P(D_1) \cdot P_{D_1}(U_2)$

$P(B) = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{5}.$

2. • $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}.$

L'événement $A \cap B$ signifie « deux boules de même couleur dont la somme des numéros est 3 ».

Les chemins qui conduisent à la réalisation de $A \cap B$ sont :

$$\xrightarrow{1/5} B_1 \cap U_1 \xrightarrow{1/4} B_2 \cap D_2$$
$$\xrightarrow{1/5} B_1 \cap D_1 \xrightarrow{1/4} B_2 \cap U_2$$
$$\xrightarrow{1/5} N_1 \cap U_1 \xrightarrow{1/4} N_2 \cap D_2$$
$$\xrightarrow{1/5} N_1 \cap D_1 \xrightarrow{1/4} N_2 \cap U_2$$

D'où $P(A \cap B) = 4 \cdot \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{5}.$

Ainsi $P_B(A) = \dfrac{1}{5} \mid \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{2}.$

• De même :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{5} \mid \frac{2}{5} = \frac{1}{2}.$$

12 **1.** Tableau des effectifs :

	B	$\overline{B}$	
A	4	8	12
$\overline{A}$	28	56	84
	32	64	96

$P(A \cap B) = \dfrac{4}{96} = \dfrac{1}{24}$ et $P(A) \cdot P(B) = \dfrac{12}{96} \cdot \dfrac{32}{96} = \dfrac{1}{24}$

donc $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Ainsi A et B sont indépendants.

2. A et B sont indépendants, donc $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

13 A et B sont indépendants si, et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)\,.$$

$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$, $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{1}{4}$

et d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}\right) = \frac{1}{12} + \frac{3}{4}p.$$

D'où l'équation :

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{12} + \frac{3}{4}p\right).$$

$\frac{1}{12} + \frac{3}{4}p = \frac{1}{3}$ donc $p = \frac{1}{3}$.

EXERCICES Activités de recherche (page 360)

18 Choisir son arbre

• ***Les outils***

– Arbre pondéré (ou tableau à double entrée).

– Loi des nœuds et loi des chemins.

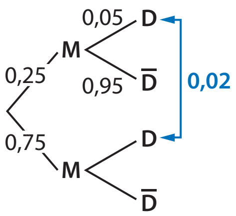
– Formule des probabilités totales.

• ***Les objectifs***

– Traduire des données statistiques en termes de probabilité.

– Calculer la probabilité conditionnelle d'un événement.

1. Arbre pondéré :



2. a) Les chemins qui mènent à D sont :

$\longrightarrow \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{D}$ (événement: $\mathrm{M} \cap \mathrm{D}$)

$\longrightarrow \overline{\mathrm{M}} \longrightarrow \mathrm{D}$ (événement: $\overline{\mathrm{M}} \cap \mathrm{D}$).

b) D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathrm{P}(\mathrm{D}) = \mathrm{P}(\mathrm{M} \cap \mathrm{D}) + \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{M}} \cap \mathrm{D}\right)$$

soit : $\mathrm{P}(\mathrm{D}) = \mathrm{P}(\mathrm{M}) \cdot \mathrm{P}_{\mathrm{M}}(\mathrm{D}) + \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{M}}\right) \cdot \mathrm{P}_{\overline{\mathrm{M}}}(\mathrm{D})$

$\mathrm{P}(\mathrm{D}) = 0{,}25 \cdot 0{,}05 + 0{,}75 \cdot \mathrm{P}_{\overline{\mathrm{M}}}(\mathrm{D})$

$\mathrm{P}(\mathrm{D}) = 0{,}0125 + 0{,}75\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{M}}}(\mathrm{D})$.

c) D'où l'équation : $0{,}0125 + 0{,}75\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{M}}}(\mathrm{D}) = 0{,}02$.

Donc $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{M}}}(\mathrm{D}) = \frac{0{,}02 - 0{,}0125}{0{,}75} = 0{,}01$.

Remarque. L'utilisation d'un tableau à double entrée facilite également le calcul de $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{M}}}(\mathrm{D})$.

$\mathrm{P}(\mathrm{M} \cap \mathrm{D}) = \mathrm{P}(\mathrm{M}) \cdot \mathrm{P}_{\mathrm{M}}(\mathrm{D}) = 0{,}25 \cdot 0{,}05 = 0{,}0125$.

D'où le tableau complet :

	D	**$\overline{\mathrm{D}}$**	
M	0,0125	0,2375	0,25
$\overline{\mathrm{M}}$	0,0075	0,7425	0,75
	0,02	0,98	1

$$\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{M}}}(\mathrm{D}) = \frac{\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{M}} \cap \mathrm{D}\right)}{\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{M}}\right)} = \frac{0{,}0075}{0{,}75} = 0{,}01.$$

19 Une suite de parties

• ***Les outils***

– Arbre pondéré.

– Formule des probabilités totales.

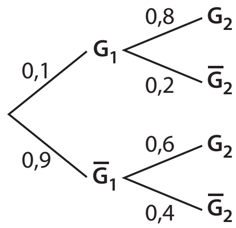
– Suite géométrique.

• ***Les objectifs***

– Définir une suite récurrente de probabilités.

– Étudier puis interpréter le signe d'une suite auxiliaire.

1. a) Arbre associé au deux premières parties :

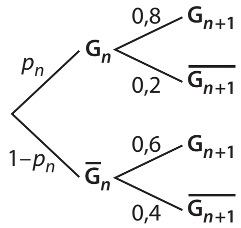


b) D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathrm{P}(\mathrm{G}_2) = \mathrm{P}(\mathrm{G}_1 \cap \mathrm{G}_2) + \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{G}_1} \cap \mathrm{G}_2\right)$$

d'où $p_2 = 0{,}1 \cdot 0{,}8 + 0{,}9 \cdot 0{,}6 = 0{,}62$.

2. a) Arbre associé aux parties de rang n et $n+1$:



b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathrm{P}(\mathrm{G}_{n+1}) = \mathrm{P}(\mathrm{G}_n \cap \mathrm{G}_{n+1}) + \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{G}_n} \cap \mathrm{G}_{n+1}\right)$$

$p_{n+1} = 0{,}8p_n + 0{,}6(1 - p_n)$

$p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}6$.

3. a) Pour tout entier $n \geqslant 1$:

$u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}75 = 0{,}2p_n + 0{,}6 - 0{,}75$

$u_{n+1} = 0{,}2p_n - 0{,}15$.

Or $p_n = u_n + 0{,}75$, donc :

$$u_{n+1} = 0{,}2(u_n + 0{,}75) - 0{,}15$$

soit $u_{n+1} = 0{,}2u_n$.

La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0{,}2$ et de premier terme $u_1 = p_1 - 0{,}75 = -0{,}65$.

b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = u_1 q^{n-1}$, soit :

$$u_n = -0{,}65 \cdot 0{,}2^n \text{ donc } u_n < 0.$$

c) Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 1$, $p_n < 0{,}75$.

Max ne peut pas espérer avoir 3 chances sur 4 de gagner une partie.

20 Narration de recherche

Cet exercice nécessite la mise en évidence de deux lois binomiales lors de 10 lancers successifs de la pièce choisie.

On note T l'événement « la pièce est truquée » et A l'événement « 8 Face en 10 lancers ».

• Si la pièce est équilibrée, la variable aléatoire X qui indique le nombre de sorties de Face au terme des dix lancers suit la loi $\mathcal{B}(10\ ;\ 0{,}5)$.

Donc $P_{\overline{T}}(A) = \binom{10}{8} 0{,}5^{10} \approx 0{,}044$.

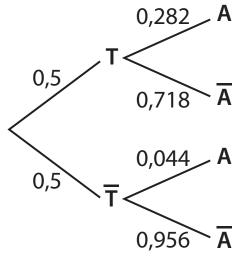
• Si la pièce est truquée lors d'un lancer, la probabilité de sortie de Face est telle que :

$$\begin{cases} P(Face) = 3 \cdot P(Pile) \\ P(Face) + P(Pile) = 1 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} P(Face) = 0{,}75 \\ P(Pile) = 0{,}25 \end{cases}.$$

La variable aléatoire Y qui indique le nombre de sorties de Face au terme des dix lancers suit la loi $\mathcal{B}(10\ ;\ 0{,}75)$.

Donc $P_T(A) = \binom{10}{8} 0{,}75^8 \cdot 0{,}25^2 \approx 0{,}282$.

Un arbre pondéré permet d'illustrer la situation :



Il s'agit de calculer $P_A(T) = \dfrac{P(T \cap A)}{P(A)}$.

Or $P(T \cap A) = P(T) \cdot P_T(A)$ et d'après la formule des probabilité totales :

$$P(A) = P(T \cap A) + P\left(\overline{T} \cap A\right),$$

donc :

$$P_A(T) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}282}{0{,}5 \cdot 0{,}282 + 0{,}5 \cdot 0{,}044} \approx 0{,}865.$$

21 Narration de recherche

Cet exercice met en évidence l'analogie dans la réalisation de deux arbres pondérés :

– l'un représente la répétition de deux épreuves indépendantes ;

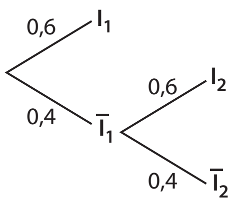
– l'autre la succession de deux expériences dont la seconde est conditionnée par la première.

On considère les événements :

• I_1 « l'information est perçue lors de l'annonce 1 » ;

• I_2 « l'information est perçue lors de l'annonce 2 » .

a) *Modèle 1 :* indépendance des réactions



La probabilité que l'information ne soit pas perçue est :

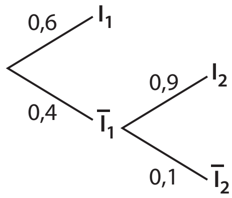
$P\left(\overline{I_1} \cap \overline{I_2}\right) = P\left(\overline{I_1}\right) \cdot P\left(\overline{I_2}\right)$ (indépendance de $\overline{I_1}$ et $\overline{I_2}$).

Donc $P\left(\overline{I_1} \cap \overline{I_2}\right) = 0{,}4^2 = 0{,}16$.

Remarque. On peut raisonner aussi à partir d'un tableau à double entrée.

	I_2	$\overline{I_2}$	
I_1	0,36	0,24	0,6
$\overline{I_1}$	0,24	0,16	0,4
	0,6	0,4	1

b) *Modèle 2 :* conditionnement des réactions



La probabilité que l'information ne soit pas perçue est :

$$P\left(\overline{I_1} \cap \overline{I_2}\right) = P\left(\overline{I_1}\right) \cdot P_{\overline{I_1}}\left(\overline{I_2}\right).$$

Donc $P\left(\overline{I_1} \cap \overline{I_2}\right) = 0{,}4 \cdot 0{,}1 = 0{,}04$.

Dans ce modèle, la perception de l'information est nettement améliorée puisque seulement 4 % de la population reste non informée.

22 TD – Duel : le premier à 5

A. 1. a) B gagne le duel en 13 parties.

b) A a gagné 4 parties.

c) Le pion est repassé par l'origine deux fois.

Cela signifie que les deux joueurs ont gagné le même nombre de parties à ce moment du duel.

2. a) La valeur minimale que peut prendre N est 5.

L'événement « N = 5 » est représenté par l'un des chemins suivants :

$$\xrightarrow{3/5} A \xrightarrow{3/5} A \xrightarrow{3/5} A \xrightarrow{3/5} A \xrightarrow{3/5} A$$

$$\xrightarrow{2/5} B \xrightarrow{2/5} B \xrightarrow{2/5} B \xrightarrow{2/5} B \xrightarrow{2/5} B\ ;$$

Donc $P(N = 5) = \left(\dfrac{3}{5}\right)^5 + \left(\dfrac{2}{5}\right)^5 = \dfrac{11}{125}$.

b) N peut prendre une infinité de valeurs, comme des valeurs du type $N = 2k + 5$, avec $k \in \mathbb{N}^*$: il suffit d'imaginer $2k$ parties ou les victoires de A et B sont alternées puis 5 victoires successives du gagnant de la 1re partie.

3. a) La variable h qui prend pour valeur un nombre entier au hasard entre 1 et 5 permet de simuler la victoire de l'un des joueurs : si $h \leqslant 3$, c'est A qui gagne, sinon c'est B.

b) Le duel s'arrête si, et seulement si, $y = 5$ ou $y = -5$.

D'où le critère de la ligne 8 : $(y - 5)(y + 5) \neq 0$.

c) Ligne 11 : $h \leqslant 3$. Ligne 17 : $y - 1$.

```
1   VARIABLES
2     h EST_DU_TYPE NOMBRE
3     y EST_DU_TYPE NOMBRE
4     N EST_DU_TYPE NOMBRE
5   DEBUT_ALGORITHME
6     N PREND_LA_VALEUR 0
7     y PREND_LA_VALEUR 0
8     TANT_QUE ((y-5)*(y+5)!=0) FAIRE
9       DEBUT_TANT_QUE
10      h PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_ALEA_ENT(1,5)
11      SI (h<=3) ALORS
12        DEBUT_SI
13        y PREND_LA_VALEUR y+1
14        FIN_SI
15        SINON
16          DEBUT_SINON
17          y PREND_LA_VALEUR y-1
18          FIN_SINON
19      N PREND_LA_VALEUR N+1
20      TRACER_POINT (N,y)
21      FIN_TANT_QUE
22    AFFICHER "Le nombre de parties est : "
23    AFFICHER N
24  FIN_ALGORITHME
```

d) Lors de plusieurs simulations, il y a toujours un vainqueur.

Note. En théorie, un duel pourrait ne jamais s'arrêter. L'expérimentation donne chaque fois un vainqueur ce qui permet de conjecturer que la probabilité que le duel ne s'arrête pas est nulle.

B. 1. a) Ligne 13 : $(y-5)(y+5) \neq 0$.
[Langage Algobox : $(y-5)*(y+5)!=0$].
Ligne 16 : $h \leqslant 3$.
Ligne 22 : y prend la valeur $y-1$.

b) Ligne 25 : on enregistre dans la liste L, au rang *k*, le vainqueur du k-*ième* duel (5 : A vainqueur ; – 5 : B vainqueur).

c) Chaque fois que A est vainqueur, on ajoute 1 à la variable S qui compte le nombre de succès de A.
Ligne 28 : S prend la valeur S + 1.

d) Ligne 31 : F prend la valeur S / 10000.
(La variable F contient la fréquence de S_A).

```
1    VARIABLES
2      L EST_DU_TYPE LISTE
3      k EST_DU_TYPE NOMBRE
4      h EST_DU_TYPE NOMBRE
5      F EST_DU_TYPE NOMBRE
6      S EST_DU_TYPE NOMBRE
7      y EST_DU_TYPE NOMBRE
8    DEBUT_ALGORITHME
9      S PREND_LA_VALEUR 0
10     POUR k ALLANT_DE 1 A 10000
11       DEBUT_POUR
12       y PREND_LA_VALEUR 0
13       TANT_QUE ((y-5)*(y+5)!=0) FAIRE
14         DEBUT_TANT_QUE
15         h PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_ALEA_ENT(1,5)
16         SI (h<=3) ALORS
17           DEBUT_SI
18           y PREND_LA_VALEUR y+1
19           FIN_SI
20           SINON
21             DEBUT_SINON
22             y PREND_LA_VALEUR y-1
23             FIN_SINON
24         FIN_TANT_QUE
25       L[k] PREND_LA_VALEUR y
26       SI (y==5) ALORS
27         DEBUT_SI
28         S PREND_LA_VALEUR S+1
29         FIN_SI
30       FIN_POUR
31     F PREND_LA_VALEUR S/10000
32     AFFICHER "La fréquence de S_A est :"
33     AFFICHER F
34   FIN_ALGORITHME
```

2. Après simulation, on peut estimer que :

$$P(S_A) \approx 0{,}88.$$

3. Modification de l'algorithme pour obtenir une estimation de $P(S_B)$:
Ligne 26 : Si (y = – 5) ALORS
Ligne 32 : AFFICHER «la fréquence de S_B est :»
D'où l'estimation :

$$P(S_B) \approx 0{,}12.$$

S_A et S_B ne sont pas des événements contraires car il existe une troisième alternative N « le duel ne s'arrête pas ».
On peut encore conjecturer que $P(N) = 0$.

C. 1. Programme :

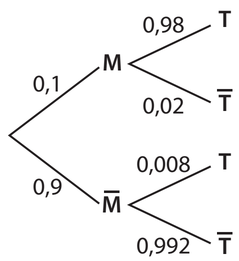
```
VARIABLES
  L EST_DU_TYPE LISTE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  h EST_DU_TYPE NOMBRE
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
  F EST_DU_TYPE NOMBRE
  y EST_DU_TYPE NOMBRE
  T EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  T PREND_LA_VALEUR 0
  POUR k ALLANT_DE 1 A 10000
    DEBUT_POUR
    y PREND_LA_VALEUR 0
    N PREND_LA_VALEUR 0
    TANT_QUE ((y-5)*(y+5)!=0) FAIRE
      DEBUT_TANT_QUE
      h PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_ALEA_ENT(1,5)
      SI (h<=3) ALORS
        DEBUT_SI
        y PREND_LA_VALEUR y+1
        FIN_SI
        SINON
          DEBUT_SINON
          y PREND_LA_VALEUR y-1
          FIN_SINON
      N PREND_LA_VALEUR N+1
      FIN_TANT_QUE
    L[k] PREND_LA_VALEUR N
    T PREND_LA_VALEUR T+L[k]
    FIN_POUR
  F PREND_LA_VALEUR T/10000
  AFFICHER "Moyenne du nombre de parties : "
  AFFICHER F
FIN_ALGORITHME
```

2. Estimation du nombre moyen de parties durant un duel :

$$E(N) \approx 19.$$

23 TD – Test de dépistage

A. 1. a) Arbre illustrant la situation:



b) Valeur diagnostique du test $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)}$.

• $P(M \cap T) = P(M) \cdot P_M(T) = 0{,}1 \cdot 0{,}98 = 0{,}098$.

• D'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T)$$

$$P(T) = 0{,}1 \cdot 0{,}98 + 0{,}9 \cdot 0{,}008 = 0{,}1052.$$

Donc $P_T(M) = \dfrac{0{,}098}{0{,}1052} \approx 0{,}9316$.

2. a) Tableau de probabilités :

	T	$\overline{T}$	
M	0,098	0,002	0,1
$\overline{M}$	0,007 2	0,892 8	0,9
	0,105 2	0,894 8	1

b) Probabilité d'un « faux positif » :

$$P(\overline{M} \cap T) = 0{,}072.$$

Probabilité d'un « faux négatif » :

$$P(M \cap \overline{T}) = 0{,}002.$$

c) On note E l'événement « erreur de test ».

$P(E) = P\left(M \cap \overline{T}\right) + P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0{,}002 + 0{,}007\ 2$

$P(E) = 0{,}009\ 2$.

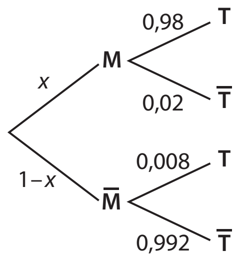
Fiabilité du test :

$$f = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap \overline{T}\right)$$

soit $f = 0{,}098 + 0{,}8928 = 0{,}9908$.

Remarque. $f = 1 - P(E)$.

B. 1. a) Arbre illustrant la situation :



• Valeur diagnostique :

$$d(x) = P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)}.$$

$$d(x) = \frac{0{,}98x}{0{,}98x + 0{,}008(1-x)} = \frac{980x}{972x + 8} = \frac{245x}{243x + 2}.$$

La fonction d est dérivable sur]0 ; 1[.

$\forall\, x \in]0\ ;\ 1[,\ d'(x) = \dfrac{490}{(243x+2)^2}$, donc $d'(x) > 0$.

Note : $\lim\limits_{x \to 0+} d(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1-} d(x) = 1$.

• Tableau de variation de *d* :

x	0		1
d'		+	
d	0	↗	1

b) Sur l'intervalle]0 ; 1[:

$$d(x) > 0{,}9 \Leftrightarrow \frac{245x}{243x+2} > \frac{9}{10}$$
$$\Leftrightarrow 2\ 450x > 2\ 187x + 18$$

$$d(x) > 0{,}9 \Leftrightarrow x > \frac{18}{263}.$$

Ainsi, la valeur diagnostique dépasse 0,9 à partir d'un pourcentage de malades dans la population d'environ 6,85 %.

2. a) Fiabilité du test :

$$f(x) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap \overline{T}\right)$$

donc $f(x) = 0{,}98x + 0{,}992(1-x) = 0{,}992 - 0{,}012x$.

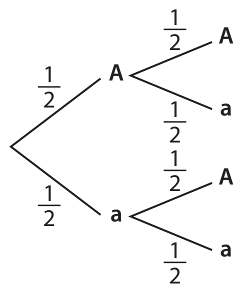
b) Sur l'intervalle]0 ; 1[:

$$f(x) > 0{,}99 \Leftrightarrow 0{,}992 - 0{,}012x > 0{,}99 \Leftrightarrow x < \frac{1}{6}.$$

Ainsi, la fiabilité du test dépasse 0,99 lorsque la proportion de malades dans la population ne dépasse pas 1/6.

24 TD – Loi d'équilibre génétique

A. 1. Arbre illustrant l'appariement au hasard d'une plante hétérozygote pour la génération 1 ci-après.



D'où : $P(AA) = \frac{1}{4}$; $P(Aa) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$; $P(aa) = \frac{1}{4}$.

2. a) $x_0 = 0$; $y_0 = 1$ et $z_0 = 0$.

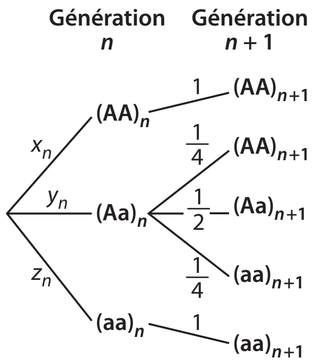
D'où : $x_1 = \frac{1}{4}$; $y_1 = \frac{1}{2}$ et $z_1 = \frac{1}{4}$.

b) Pour tout entier $n \geqslant 1$:

$P_{(AA)_n}\left[(AA)_{n+1}\right] = 1$, $P_{(Aa)_n}\left[(AA)_{n+1}\right] = \frac{1}{4}$,

$P_{(Aa)_n}\left[(Aa)_{n+1}\right] = \frac{1}{2}$.

c) Arbre illustrant la situation :



D'après la formule des probabilités totales :

$P\left[(AA)_{n+1}\right] = P\left[(AA)_n \cap (AA)_{n+1}\right] + P\left[(Aa)_n \cap (AA)_{n+1}\right]$

soit $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{4}y_n$.

De même :

$$P\left[(Aa)_{n+1}\right] = P\left[(Aa)_n \cap (Aa)_{n+1}\right]$$

d'où $y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n$.

d) Pour tout entier naturel *n* :

$$x_{n+1} + y_{n+1} + z_{n+1} = 1\ ;$$

donc $z_{n+1} = 1 - (x_{n+1} + y_{n+1}) = 1 - \left(x_n + \frac{1}{4}y_n + \frac{1}{2}y_n\right)$;

soit $z_{n+1} = 1 - x_n - \frac{3}{4}y_n$.

B. 1. a) Tableau de valeurs :

n	x_n	y_n	z_n
0	0,000 000	1,000 000	0,000 000
1	0,250 000	0,500 000	0,250 000
2	0,375 000	0,250 000	0,375 000
3	0,437 500	0,125 000	0,437 500
4	0,468 750	0,062 500	0,468 750
5	0,484 375	0,031 250	0,484 375
6	0,492 188	0,015 625	0,492 188
7	0,496 094	0,007 813	0,496 094

n	x_n	y_n	z_n
8	0,498 047	0,003 906	0,498 047
9	0,499 023	0,001 953	0,499 023
10	0,499 512	0,000 977	0,499 512

b) *Conjecture :* les suites (x_n) et (y_n) semblent converger vers 0,5 alors que la suite (z_n) semble converger vers 0.

2. a) $\forall n \in \mathbb{N},\ y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n$.

La suite (y_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $y_0 = 1$. Ainsi : $y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b) $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + \frac{1}{4}y_n$ donc $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{4}y_n$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, écrivons ces égalités pour les indices de 0 à $n-1$, puis additionnons membre à membre :

$$\cancel{x_1} - x_0 = \frac{1}{4}y_0$$

$$\cancel{x_2} - \cancel{x_1} = \frac{1}{4}y_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n - \cancel{x_{n-1}} = \frac{1}{4}y_{n-1}$$

$$x_n - x_0 = \frac{1}{4}\left(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}\right)$$

Or $x_0 = 0$ et $y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1} = \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$

(somme de n termes consécutifs de la suite géométrique (y_n)).

Donc :

$$x_n = \frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right].$$

D'autre part :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n + y_n + z_n = 1.$$

Donc $z_n = 1 - x_n - y_n = 1 - \frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] - \left(\frac{1}{2}\right)^n$;

soit $z_n = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, $z_n = x_n$.

c) Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$; donc :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{2},\ \lim_{n\to+\infty} y_n = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} z_n = \frac{1}{2}.$$

À la longue, les générations successives sont homozygotes avec équilibre dans la répartition AA et aa. Il y a disparition progressive des plantes hétérozygotes.

EXERCICES Entraînement (page 366)

DE TÊTE

25 **a)** $P(H) = \frac{1}{2}$; **b)** $P_C(H) = \frac{7}{13}$;

c) $P_H(A) = \frac{3}{5}$; **d)** $P_A(F) = \frac{7}{15}$.

26 **a)** $P(A \cap B) = 0{,}14$;

b) $P\left(\overline{A} \cap B\right) = 0{,}08$;

c) $P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = 0{,}22$.

27 **a)** $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0{,}5$.

b) $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0{,}25$.

c) $P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}05$.

28 **a)** $P_B(A) = \frac{1}{8} = P(A)$; donc A et B sont indépendants.

b) $P_C(A) = \frac{1}{8} = P(A)$; donc A et C sont indépendants.

c) $P_C(B) = \frac{1}{2}$ est différent de $P(B) = \frac{1}{4}$; donc B et C ne sont pas indépendants.

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

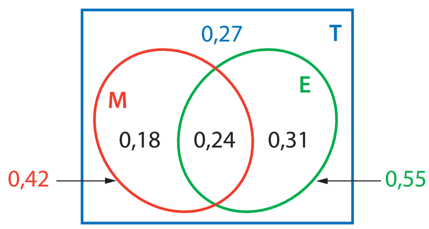
29 **1.** Tableau des effectifs :

	D	$\overline{\text{D}}$	Total
A	48	1 152	1 200
B	24	776	800
Total	72	1 928	2 000

2. a) $P(D) = \frac{9}{250}$; $P(A \cap D) = \frac{3}{125}$; $P_D(A) = \frac{2}{3}$.

b) $P\left(\overline{D}\right) = \frac{241}{250}$; $P\left(\overline{D} \cap B\right) = \frac{97}{250}$; $P_{\overline{D}}(B) = \frac{97}{241}$.

30 **1.** Diagramme :



Note. $P(M \cup E) = 1 - 0{,}27 = 0{,}73$.

$P(M \cap E) = P(M) + P(E) - P(M \cup E)$

donc $P(M \cap E) = 0{,}42 + 0{,}55 - 0{,}73 = 0{,}24$.

2. a) $P_M(E) = \dfrac{P(M \cap E)}{P(M)} = \dfrac{0,24}{0,42} = \dfrac{4}{7}$.

b) $P_E(M) = \dfrac{P(E \cap M)}{P(E)} = \dfrac{0,24}{0,55} = \dfrac{24}{55}$.

31 *Corrigé sur le site élève.*

FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

32 **1.** Tableau de probabilités :

	A	B	
F	0,57	0,36	0,93
$\overline{\text{F}}$	0,03	0,04	0,07
	0,60	0,40	1

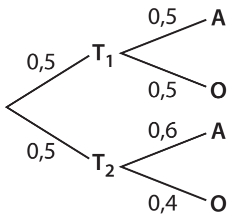
2. D'après la formule des probabilités totales :

$P(F) = P(A \cap F) + P(B \cap F)$

$P(F) = P(A) \quad P_A(F) + P(B) \quad P_B(F)$

$P(F) = 0,6 \quad 0,95 + 0,4 \quad 0,9 = 0,93$.

33 **1.** Arbre pondéré :



2. a) D'après la formule des probabilités totales :

$P(O) = P(T_1 \cap O) + P(T_2 \cap O)$

$P(O) = P(T_1) \quad P_{T_1}(O) + P(T_2) \quad P_{T_2}(O)$

$P(O) = 0,5 \quad 0,5 + 0,5 \quad 0,4 = 0,45$.

b) $P_O(T_1) = \dfrac{P(T_1 \cap O)}{P(O)} = \dfrac{0,5^2}{0,45} = \dfrac{5}{9}$.

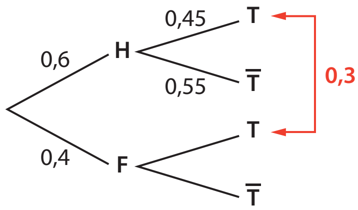
34 On note H, F et T les événements suivants :
H « la personne interrogée est un homme », F « la personne interrogée est une femme » et T « la personne interrogée pratique le tennis ».
On obtient le tableau des probabilités :

	T	$\overline{\text{T}}$	
F	0,03	0,37	0,40
H	0,27	0,33	0,60
	0,30	0,70	1

Note. $P\left(H \cap \overline{T}\right) = P(H) \times P_H\left(\overline{T}\right) = 0,6 \times 0,55 = 0,33$.

$P_F\left(\overline{T}\right) = \dfrac{P\left(F \cap \overline{T}\right)}{P(F)} = \dfrac{0,37}{0,40} = \dfrac{37}{40}$.

Remarque. On peut aussi traiter cet exercice à partir d'un arbre pondéré.



D'après la formule des probabilités totales :

$$P\left(F \cap \overline{T}\right) + P\left(H \cap \overline{T}\right) = P\left(\overline{T}\right)$$

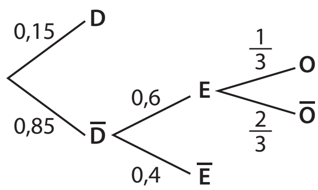
d'où $P\left(F \cap \overline{T}\right) = P\left(\overline{T}\right) - P\left(H \cap \overline{T}\right)$

$= 0,7 - 0,6 \times 0,55 = 0,37$.

Ainsi $P_F\left(\overline{T}\right) = \dfrac{P\left(F \cap \overline{T}\right)}{P(F)} = \dfrac{0,37}{0,40} = \dfrac{37}{40}$.

35 *Corrigé sur le site élève.*

36 **1.** Arbre pondéré :



2. D'après la loi des chemins :

$P(E) = 0,85 \quad 0,6 = 0,51$;

$P(O) = 0,85 \quad 0,6 \quad \dfrac{1}{3} = 0,17$.

3. Le candidat est admis :
– soit sur dossier ;
– soit après passage et réussite aux épreuves complémentaires.
Ainsi $A = D \cup O$ (réunion de deux événements incompatibles).
Donc $P(A) = P(D) + P(O) = 0,15 + 0,17 = 0,32$.

4. $P_A(D) = \dfrac{P(A \cap D)}{P(A)} = \dfrac{0,15}{0,32} = \dfrac{15}{32}$.
Ainsi, parmi les candidats admis, le pourcentage de ceux admis sur dossier est d'environ 47 %.

INDÉPENDANCE ET CONDITIONNEMENT

37 Les probabilités P(A) et P(B) sont telles que :
- $P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$;
- $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$ (indépendance).

On résout le système :

$$\begin{cases} P(A) + P(B) = 1,3 \\ P(A) \times P(B) = 0,4 \end{cases}$$

soit $\begin{cases} P(B) = 1,3 - P(A) \\ [P(A)]^2 - 1,3P(A) + 0,4 = 0 \end{cases}$.

L'équation du 2nd degré a pour solutions 0,5 et 0,8.
Or, par hypothèse, $P(A) < P(B)$ donc :

$$P(A) = 0,5 \text{ et } P(B) = 0,8.$$

38 **1. a)** On note p_i la probabilité de sortie du numéro i $(1 \leqslant i \leqslant 6)$ lors du lancer du dé truqué.
Si k désigne le coefficient de proportionnalité :

$$p_1 = k\,,\ p_2 = 2k\,,\ \ldots\ldots,\ p_6 = 6k.$$

Or $p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_6 = 1$, donc $21k = 1$, soit $k = \dfrac{1}{21}$.

Ainsi, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq 6$, $p_i = \dfrac{i}{21}$.

Alors : $\mathrm{P(A)} = p_2 + p_4 + p_6 = \dfrac{4}{7}$;

$\mathrm{P(B)} = p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = \dfrac{6}{7}$;

$\mathrm{P(C)} = p_3 + p_4 = \dfrac{1}{3}$.

b) $\mathrm{P_A(B)} = \dfrac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(A)}}$. Or $\mathrm{P(A \cap B)} = p_4 + p_6 = \dfrac{10}{21}$

donc $\mathrm{P_A(B)} = \dfrac{10}{21} \mid \dfrac{4}{7} = \dfrac{5}{6}$.

2. • $\mathrm{P_A(B)} \neq \mathrm{P(B)}$, donc A et B ne sont pas indépendants.

• $\mathrm{P(A \cap C)} = p_4 = \dfrac{4}{21}$ et $\mathrm{P(A)} \quad \mathrm{P(C)} = \dfrac{4}{7} \quad \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{21}$.

Ainsi $\mathrm{P(A \cap C)} = \mathrm{P(A)} \times \mathrm{P(C)}$ donc A et C sont indépendants.

39 *Corrigé sur le site élève.*

40 **1. a)** Tableau des probabilités :

	F	$\overline{\mathrm{F}}$	
H	0,002	0,038	0,04
$\overline{\mathrm{H}}$	0,048	0,912	0,96
	0,05	0,95	1

Note : F et H sont indépendants donc :

$$\mathrm{P(F \cap H)} = \mathrm{P(F)} \times \mathrm{P(H)}.$$

Il en est de même pour $\overline{\mathrm{F}}$ et H, F et $\overline{\mathrm{H}}$, $\overline{\mathrm{F}}$ et $\overline{\mathrm{H}}$.

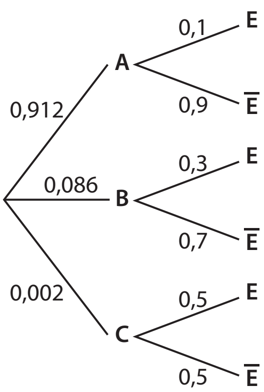
b) $\mathrm{P(A)} = \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{F}} \cap \overline{\mathrm{H}}\right) = 0{,}912$.

$\mathrm{P(B)} = \mathrm{P}\left(\mathrm{F} \cap \overline{\mathrm{H}}\right) + \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{F}} \cap \mathrm{H}\right)$

$= 0{,}048 + 0{,}038 = 0{,}086$.

$\mathrm{P(C)} = \mathrm{P(F \cap H)} = 0{,}002$.

2. a) Arbre illustrant la situation :



b) D'après la formule des probabilités totales :

$\mathrm{P(E)} = \mathrm{P(A \cap E)} + \mathrm{P(B \cap E)} + \mathrm{P(C \cap E)}$

$\mathrm{P(E)} = \mathrm{P(A)} \times \mathrm{P_A(E)} + \mathrm{P(B)} \times \mathrm{P_B(E)} + \mathrm{P(C)} \times \mathrm{P_C(E)}$

$\mathrm{P(E)} = 0{,}912 \quad 0{,}1 + 0{,}086 \quad 0{,}3 + 0{,}002 \quad 0{,}5 = 0{,}118$.

c) $\mathrm{P_E(A)} = \dfrac{\mathrm{P(A \cap E)}}{\mathrm{P(E)}} = \dfrac{0{,}912 \times 0{,}1}{0{,}118} \approx 0{,}773$.

D'après la loi des nœuds :

$$\mathrm{P_E}\left(\overline{\mathrm{A}}\right) = 1 - \mathrm{P_E(A)} \approx 0{,}227.$$

Si le premier enfant est asthmatique, la probabilité qu'aucun des parents ne le soit est 0,773.
A contrario, si le premier enfant est asthmatique, la probabilité qu'au moins un des parents le soit est $0{,}227$.

d) $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{E}}}\left(\overline{\mathrm{A}}\right) = \dfrac{\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{E}}\right)}{\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{E}}\right)}$.

• $\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{E}}\right) = 1 - \mathrm{P(E)} = 0{,}882$.

• D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{E}}\right) + \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{E}}\right) = \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{E}}\right)$$

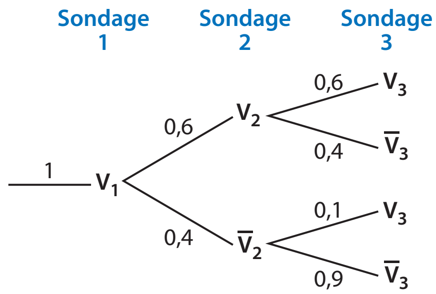
donc $\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{E}}\right) = \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{E}}\right) - \mathrm{P}\left(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{E}}\right)$

$= 0{,}882 - 0{,}912 \times 0{,}9$

soit $\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{E}}\right) = 0{,}0612$.

Ainsi $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{E}}}\left(\overline{\mathrm{A}}\right) = \dfrac{0{,}0612}{0{,}882} \approx 0{,}069$.

41 **1.** Arbre illustrant la situation :



$\mathrm{P(A)} = \mathrm{P(V_1 \cap V_2 \cap V_3)}$; donc, d'après la loi des chemins :

$$\mathrm{P(A)} = 1 \quad 0{,}6 \quad 0{,}6 = 0{,}36.$$

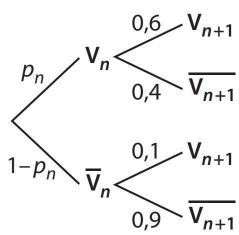
$\mathrm{P(B)} = \mathrm{P}\left(\mathrm{V_1} \cap \overline{\mathrm{V_2}} \cap \overline{\mathrm{V_3}}\right) = 1 \times 0{,}4 \times 0{,}9 = 0{,}36$.

2. D'après la formule des probabilités totales :

$\mathrm{P(V_3)} = \mathrm{P}\left((\mathrm{V_1} \cap \mathrm{V_2}) \cap \mathrm{V_3}\right) + \mathrm{P}\left((\mathrm{V_1} \cap \overline{\mathrm{V_2}}) \cap \mathrm{V_3}\right)$.

$\mathrm{P(V_3)} = (1 \quad 0{,}6) \quad 0{,}6 + (1 \quad 0{,}4) \quad 0{,}1 = 0{,}4$.

3. Arbre illustrant la succession des sondages de rang n et $n + 1$ ($n \geqslant 2$) :



4. Pour tout entier $n \geqslant 2$, d'après la formule des probabilités totales :

$\mathrm{P(V_{n+1})} = \mathrm{P(V_n \cap V_{n+1})} + \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{V}_n} \cap \mathrm{V}_{n+1}\right)$

$\mathrm{P(V_{n+1})} = \mathrm{P(V_n)} \quad \mathrm{P_{V_n}(V_{n+1})} + \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{V}_n}\right) \quad \mathrm{P}_{\overline{\mathrm{V}_n}}(\mathrm{V}_{n+1})$

$\mathrm{P(V_{n+1})} = p_n \times 0{,}6 + (1 - p_n) \times 0{,}1$

soit $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}1$.

Remarque. La formule est également vraie au rang $n = 1$ puisque $p_1 = 1$ et $p_2 = 0{,}6$.

5. a) Pour tout entier $n \geqslant 1$:

$u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}2 = 0{,}5p_n + 0{,}1 - 0{,}2 = 0{,}5(p_n - 0{,}2)$

$u_{n+1} = 0{,}5u_n$.

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $u_1 = p_1 - 0,2 = 0,8$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 q^{n-1} = 0,8 \times 0,5^{n-1}$.

Or, $p_n = u_n + 0,2$, donc :

$$p_n = 0,2 + 0,8 \times 0,5^{n-1} = 0,2 + 1,6 \times 0,5^n.$$

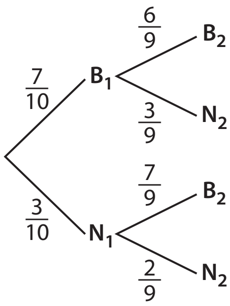
c) $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0,2$.

À la longue, il y a 1 chance sur 5 que le sondage réalisé soit positif.

42 *Corrigé sur le site élève.*

43 **1. a)** On note B_1 l'événement « jeton blanc lors du 1er tirage » et B_2 l'événement « jeton blanc lors du 2nd tirage ». De même, on définit les événements N_1 et N_2 pour les jetons noirs.

Arbre pondéré associé aux couleurs :

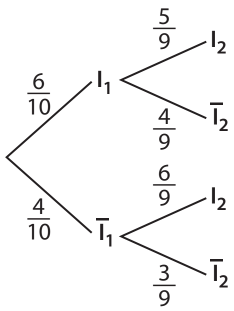


$$P(D) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2)$$

$$P(D) = \frac{7}{10}\ \frac{6}{9} = \frac{7}{15}.$$

b) On note I_1 l'événement « numéro impair lors du 1er tirage » et I_2 l'événement « numéro impair lors du 2nd tirage ».

Arbre pondéré associé aux numéros :



$$P(I) = P(I_1 \cap I_2) = P(I_1) \times P_{I_1}(I_2)$$

$$P(I) = \frac{6}{10}\ \frac{5}{9} = \frac{1}{3}.$$

c) $D \cap I$ signifie « deux jetons blancs impairs ». Ainsi $D \cap I$ est représenté par le chemin :

$$\xrightarrow{4/10} B_1 \cap I_1 \xrightarrow{3/9} B_2 \cap I_2$$

donc $P(D \cap I) = \dfrac{4}{10} \times \dfrac{3}{9} = \dfrac{2}{15}$.

Or $P(D)\quad P(I) = \dfrac{7}{45}$, donc $P(D \cap I) \neq P(D) \times P(I)$.

Ainsi D et I ne sont pas indépendants.

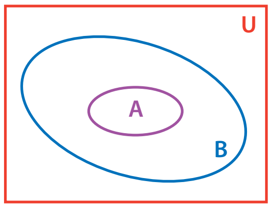
2. a) X indique le nombre de jetons blancs obtenus.

Loi de X :

k	0	1	2
$P(X = k)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$

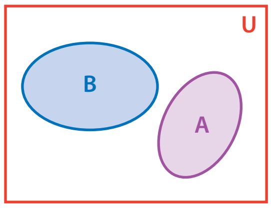
b) $E(X) = \sum\limits_{k=0}^{2} k\,P(X = k) = \dfrac{7}{5}$.

44 **a)** *Vraie*.



$$A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$$
$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A)$$
$$\Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1$$
$$\Rightarrow P_A(B) = 1.$$

b) *Vraie*.



Si A et B sont incompatibles alors $A \cap B = \varnothing$ donc $B \subset \overline{A}$.

On en déduit que $B = \overline{A} \cap B$,

d'où : $P(B) = P\left(\overline{A} \cap B\right)$

$$= P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B)$$
$$= \left(1 - P(A)\right) P_{\overline{A}}(B).$$

c) *Vraie*.

A et B indépendants $\Rightarrow \overline{A}$ et $\overline{B}$ indépendants

$$\Rightarrow P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = \underbrace{P\left(\overline{B}\right)} \times \underbrace{P\left(\overline{A}\right)}$$

$$\Rightarrow P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) \times P_{\overline{B}}\left(\overline{A}\right)$$

d) *Vraie*.

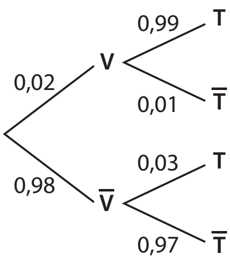
A et B indépendants $\Rightarrow \overline{A}$ et $\overline{B}$ indépendants

$$\Rightarrow P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A}\right) \times P\left(\overline{B}\right)$$

$$\Rightarrow P\left(\overline{A \cup B}\right) = \left(1 - P(A)\right)\left(1 - P(B)\right).$$

EXERCICES DE SYNTHÈSE

45 **A. 1.** Arbre pondéré illustrant la situation :



2. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(V \cap T) + P\left(\overline{V} \cap T\right)$$

$$P(T) = P(V)\quad P_V(T) + P\left(\overline{V}\right)\quad P_{\overline{V}}(T)$$

$$P(T) = 0,02\quad 0,99 + 0,98\quad 0,03 = 0,049\,2.$$

3. a) $P_T(V) = \dfrac{P(V \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,02 \times 0,99}{0,049\,2} \approx 0,402\,4.$

b) $P_{\overline{T}}\left(\overline{V}\right) = \dfrac{P\left(\overline{V} \cap \overline{T}\right)}{P\left(\overline{T}\right)} = \dfrac{0,98 \times 0,97}{1 - 0,049\,2} \approx 0,999\,8.$

B. 1. L'interrogation d'une personne est une épreuve de Bernoulli associée à l'issue V « la personne est contaminée » de probabilité $p = 0,02$. On répète 10 fois cette épreuve de façon indépendante donc on définit un schéma de Bernoulli d'ordre 10.

La variable aléatoire X qui indique le nombre de réalisations de V lors des 10 épreuves suit la loi $\mathcal{B}(10\,;\,0{,}02)$.

2. On note A l'événement « au moins deux personnes parmi les dix sont contaminées ».

$$P(\overline{A}) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$= 0{,}98^{10} + 10 \times 0{,}02 \times 0{,}98^{9} \approx 0{,}9838.$$

Donc $P(A) = 1 - P(\overline{A}) \approx 0{,}0162$.

46 *Corrigé sur le site élève.*

AVEC LES TICE

47 **1. a)** Vue d'écran :

	A	B
1	Expérience	Pièce initiale
2	1	=SI(ALEA.ENTRE.BORNES(1;2)=1;"A";"B")

b) Vues d'écran :

	A	B	C	D
1	Expérience	Pièce initiale	Lancer 1	
2	1	A	A	1

Formule =B2

Formule :
=SI(((C2="A")ET(ALEA.ENTRE.BORNES(1;5)<=2))OU((C2="B"ET(ALEA.ENTRE.BORNES(1;5)<=3));1;0)

C	D	E	F
Lancer 1		Lancer 2	
A	0	B	1

Formule :
=SI(((C2="A")ET(D2=1))OU((C2="B")ET(D2=0));"A";"B"

Formule :
=SI(((E2="A")ET(ALEA.ENTRE.BORNES(1;5)<=2))OU((E2="B"ET(ALEA.ENTRE.BORNES(1;5)<=3));1;0)

2. a) Vues d'écran :

Formule :
=NB.SI(C2/C1001;"A")/1000

	A	B	C	D
1004		Lancers	La 1	
1005	Fréquences	Pièce A_n	0,491	
1006		Face		0,494

Formule :
=NB.SI(D2:D1001;1)/1000

b) Vue d'écran :

B	C	D	E	F	G	H
Lancers	La 1		La 2		La 3	
Pièce A_n	0,491		0,413		0,409	
Face		0,494		0,526		0,517

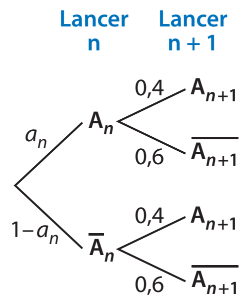
c) *Conjectures*

La suite des fréquences de :

– A_n semble prendre des valeurs proches de 0,4 ;

– F_n semble prendre des valeurs oscillant autour de 0,52.

3. a) Arbre associé au choix de la pièce ($n \geqslant 1$) :



D'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(\overline{A_n} \cap A_{n+1})$$

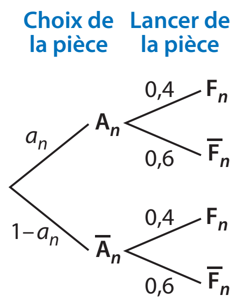
$$P(A_{n+1}) = 0{,}4a_n + 0{,}4(1 - a_n) = 0{,}4.$$

La suite (a_n) est définie par :

$$\begin{cases} a_1 = 0{,}5 \\ a_n = 0{,}4 \text{ si } n \geqslant 2 \end{cases}.$$

Elle est constante à partir du rang 2.

b) Arbre associé à la sortie de Face ($n \geqslant 1$) :



D'après la formule des probabilités totales :

$$P(F_n) = P(A_n \cap F_n) + P(\overline{A_n} \cap F_n),$$

$$u_n = 0{,}4a_n + 0{,}6(1 - a_n) = -0{,}2a_n + 0{,}6.$$

Ainsi, la suite (u_n) est définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 0{,}5 \\ u_n = 0{,}52 \text{ si } n \geqslant 2. \end{cases}$$

Elle est constante et de valeur 0,52 à partir du rang 2.

c) Ces résultats sont en accord avec les fréquences observées lors des simulations.

48 **1.** Dire que $M(x\,;\,y)$ atteint le bord du carré signifie que $x = 5$ ou $x = -5$ ou $y = 5$ ou $y = -5$,

ce qui équivaut à $(x - 5)(x + 5)(y - 5)(y + 5) = 0$.

2. Programme « Nombre de pas » :

```
VARIABLES
  h EST_DU_TYPE NOMBRE
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  y EST_DU_TYPE NOMBRE
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  x PREND_LA_VALEUR 0
  y PREND_LA_VALEUR 0
  N PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE ((x-5)*(x+5)*(y-5)*(y+5)!=0) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    h PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_ALEA_ENT(1,10)
    SI (h<=2) ALORS
      DEBUT_SI
      x PREND_LA_VALEUR x+1
      FIN_SI
    SI (h>=3 ET h<=5) ALORS
      DEBUT_SI
      x PREND_LA_VALEUR x-1
      FIN_SI
    SI (h>=6 ET h<=9) ALORS
      DEBUT_SI
      y PREND_LA_VALEUR y+1
      FIN_SI
    SI (h>9) ALORS
      DEBUT_SI
      y PREND_LA_VALEUR y-1
      FIN_SI
    N PREND_LA_VALEUR N+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER "Le nombre de pas est :"
  AFFICHER N
FIN_ALGORITHME
```

3. a) Simulation du nombre moyen de pas :

```
VARIABLES
  h EST_DU_TYPE NOMBRE
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  y EST_DU_TYPE NOMBRE
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
  L EST_DU_TYPE LISTE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  T EST_DU_TYPE NOMBRE
  Moy EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  T PREND_LA_VALEUR 0
  Moy PREND_LA_VALEUR 0
  POUR k ALLANT_DE 1 A 10000
    DEBUT_POUR
    x PREND_LA_VALEUR 0
    y PREND_LA_VALEUR 0
    N PREND_LA_VALEUR 0
    TANT_QUE ((x-5)*(x+5)*(y-5)*(y+5)!=0) FAIRE
      DEBUT_TANT_QUE
      h PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_ALEA_ENT(1,10)
      SI (h<=2) ALORS
        DEBUT_SI
        x PREND_LA_VALEUR x+1
        FIN_SI
      SI (h>=3 ET h<=5) ALORS
        DEBUT_SI
        x PREND_LA_VALEUR x-1
        FIN_SI
      SI (h>=6 ET h<=9) ALORS
        DEBUT_SI
        y PREND_LA_VALEUR y+1
        FIN_SI
      SI (h>9) ALORS
        DEBUT_SI
        y PREND_LA_VALEUR y-1
        FIN_SI
      N PREND_LA_VALEUR N+1
      FIN_TANT_QUE
    L[k] PREND_LA_VALEUR N
    T PREND_LA_VALEUR T+L[k]
    FIN_POUR
  Moy PREND_LA_VALEUR T/10000
  AFFICHER "Moyenne du nombre de pas :"
  AFFICHER Moy
FIN_ALGORITHME
```

b) Estimation du nombre moyen de pas :

$$E(N) \approx 14.$$

Prendre toutes les initiatives

49 Le traitement à l'aide d'un tableau de probabilité est le plus efficace.

On note A l'événement « l'alarme se déclenche » et C l'événement « la chaîne de production est en panne ».

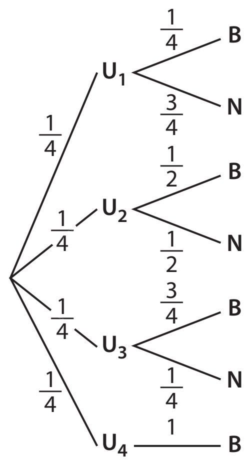
Tableau des probabilités ci-dessous :

	C	$\overline{C}$	
A	0,037	0,002	0,039
$\overline{\text{A}}$	0,003	0,958	0,961
	0,04	0,96	1

$$P_C(A) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{0,037}{0,04} = 0,925.$$

50 On note B l'événement « on obtient une boule blanche » et N l'événement « on obtient une boule noire ».

Arbre pondéré illustrant la situation :



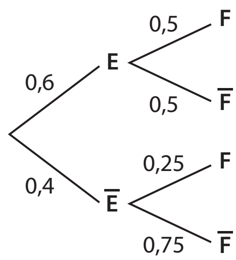
D'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(U_1 \cap B) + P(U_2 \cap B) + P(U_3 \cap B) + P(U_4 \cap B)$$

$$P(B) = \frac{1}{4}\quad\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\quad\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\quad\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\quad 1 = \frac{5}{8}.$$

51 On note E l'événement « la pièce est équilibrée » et F l'événement « on obtient Face ».

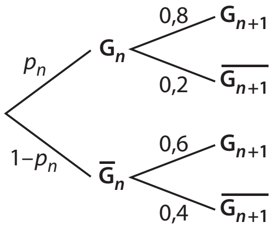
Arbre pondéré illustrant la situation :



$$P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{0,6 \times 0,5}{0,6 \times 0,5 + 0,4 \times 0,75} = 0,5.$$

52 On note G_n l'événement « le joueur gagne la n-ième partie » et on pose $p_n = P(G_n)$. Ainsi $p_1 = 0,5$.

Arbre illustrant l'enchaînement des parties :



D'après la formule des probabilités totales :

$$P(G_{n+1}) = P(G_n \cap G_{n+1}) + P\left(\overline{G}_n \cap G_{n+1}\right)$$

$p_{n+1} = 0,8p_n + 0,6(1 - p_n) = 0,2p_n + 0,6$.

• Si la suite (p_n) converge, sa limite ℓ est telle que $\ell = 0,2\ell + 0,6$, donc $\ell = 0,75$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n = p_n - 0,75$.

$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,75 = 0,2p_n + 0,6 - 0,75 = 0,2(p_n - 0,75)$

soit $u_{n+1} = 0,2u_n$.

Ainsi, la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0,2$ et de premier terme $u_1 = p_1 - 0,75 = -0,25$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = u_1q^{n-1} = -0,25 \times 0,2^{n-1}$, d'où :

$$p_n = u_n + 0,75 = 0,75 - 0,25 \times 0,2^{n-1},$$

soit $p_n = 0,75 - 1,25 \times 0,2^n$.

• Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,2^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0,75$.

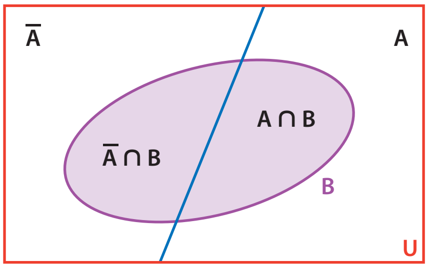
Ainsi (p_n) converge effectivement vers 0,75. À la longue, on peut donc estimer que le joueur a environ 3 chances sur 4 de gagner une partie.

EXERCICES Le jour du BAC (page 372)

53 *Corrigé sur le site élève.*

54 **1. a)** Si U désigne l'univers,

$$A \cup \overline{A} = U \text{ et } A \cap \overline{A} = \varnothing.$$



Puisque B est inclus dans U :

$B = U \cap B = \left(A \cup \overline{A}\right) \cap B = (A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$;

avec $(A \cap B) \cap \left(\overline{A} \cap B\right) = A \cap \overline{A} \cap B = \varnothing$.

Ainsi B est la réunion des événements incompatibles $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$, donc :

$$P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right) \quad [1].$$

b) Si A et B sont indépendants alors :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

D'après [1], $P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(B) - P(A \cap B)$, donc :

$$P\left(\overline{A} \cap B\right) = (1 - P(A))P(B)$$

soit $P\left(\overline{A} \cap B\right) = P\left(\overline{A}\right) \times P(B)$.

Ainsi $\overline{A}$ et B sont indépendants.

2. a) R et S sont indépendants ; donc, d'après la question **1.**, $\overline{R}$ et S sont indépendants. Ainsi :

$$P\left(\overline{R} \cap S\right) = P\left(\overline{R}\right) \times P(S) = 0,9 \times 0,05 = 0,045.$$

b) On note H l'événement « Stéphane est à l'heure ».

Or $\overline{H} = R \cup S$ donc $H = \overline{R \cup S} = \overline{R} \cap \overline{S}$.

Comme S et $\overline{R}$ sont indépendants, d'après la question **1.**, $\overline{S}$ et $\overline{R}$ le sont aussi.

Ainsi :

$$P(H) = P\left(\overline{R} \cap \overline{S}\right) = P\left(\overline{R}\right) \times P\left(\overline{S}\right) = 0,9 \times 0,95,$$

soit $P(H) = 0,855$.

c) On reconnait un schéma de Bernoulli d'ordre 5 où la probabilité de succès (« Stéphane entend son réveil sonner un jour de classe ») est $p = 0,9$.

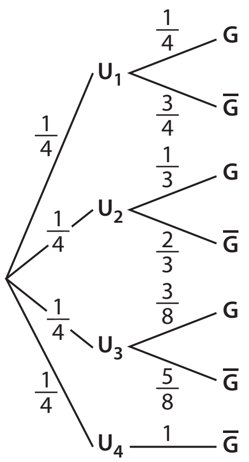
X est la variable aléatoire qui indique le nombre de succès lors des cinq jours de classe. Alors X suit la loi $\mathcal{B}(5 ; 0,9)$.

On note A l'événement « Stéphane entend son réveil sonner au moins quatre fois au cours d'une semaine » :

$$P(A) = P(X = 4) + P(X = 5)$$

donc $P(A) = 5 \times 0,9^4 \times 0,1 + 0,9^5 \approx 0,919$.

55 Arbre pondéré illustrant la situation :



a) *Vrai* : car $P_{U_1}(G) = \frac{1}{4}$ et $\frac{2}{3}P_{U_3}(G) = \frac{2}{3}\ \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$.

b) *Faux* : $\frac{9}{8} > 1$; donc la probabilité donnée est incorrecte.

Note : d'après la formule des probabilités totales :

$$P(G) = \frac{1}{4}\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\ \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\ \frac{3}{8} = \frac{23}{96}.$$

c) *Faux* : $P(U_1) = \frac{1}{4}$.

d) *Faux* : $P_{U_2}(G) = \frac{1}{3}$ et $P_G(U_2) = \frac{P(U_2 \cap G)}{P(G)}$;

soit $P_G(U_2) = \frac{1}{12}\ \big|\ \frac{23}{96} = \frac{8}{23}$

donc $P_{U_2}(G) \neq P_G(U_2)$.

56 **1.** Sur un arbre pondéré associé à l'expérience, trois chemins mènent à la réalisation de A « deux boules noires et une rouge » :

$\xrightarrow{5/8} N \xrightarrow{4/7} N \xrightarrow{3/6} R$;
$\xrightarrow{5/8} N \xrightarrow{3/7} R \xrightarrow{4/6} N$;
$\xrightarrow{3/8} R \xrightarrow{5/7} N \xrightarrow{4/6} N$.

D'où $P(A) = \frac{5}{8} \quad \frac{4}{7} \quad \frac{3}{6} + \frac{5}{8} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{4}{6} + \frac{3}{8} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{4}{6}$

soit $P(A) = 3 \quad \frac{5 \quad 4 \quad 3}{8 \quad 7 \quad 6} = \frac{15}{28}$.

Réponse exacte : **d)**.

2. On note V l'événement « l'individu est vacciné » et G l'événement « l'individu a contracté la grippe ».

$P_V(G) = \frac{P(G \cap V)}{P(V)}$ avec $P(V) = \frac{1}{3}$;

$P(G \cap V) = P(G) \times P_G(V) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{40}$;

donc $P_V(G) = \frac{1}{40} \mid \frac{1}{3} = \frac{3}{40}$.

Réponse exacte : **b)**.

3. $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B)$. Or A et B sont indépendants donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

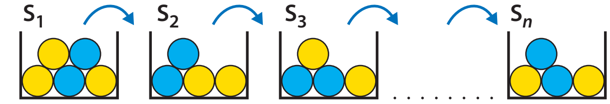
Ainsi $P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = P(A \cup B)$ soit :

$$P(A) + (1 - P(A))P(B) = P(A \cup B).$$

D'où l'équation : $\frac{2}{5} + \frac{3}{5}P(B) = \frac{4}{5}$. Donc $P(B) = \frac{2}{3}$.

Réponse exacte : **b)**.

57 **1. a)** Schéma de l'expérience :



$$P(E_1) = 0,4 \; ; \; P_{E_1}(E_2) = 0,6 \; ; \; P_{\overline{E_1}}(E_2) = 0,4.$$

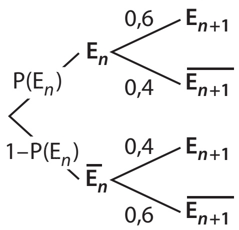
D'après la formule des probabilités totales :

$P(E_2) = P(E_1 \cap E_2) + P(\overline{E_1} \cap E_2)$

$P(E_2) = P(E_1) \quad P_{E_1}(E_2) + P(\overline{E_1}) \quad P_{\overline{E_1}}(E_2)$

$P(E_2) = 0,4 \quad 0,6 + 0,6 \quad 0,4 = 0,48$.

b) Arbre pondéré illustrant deux tirages successifs :



D'après la formule des probabilités totales :

$P(E_{n+1}) = P(E_n \cap E_{n+1}) + P(\overline{E_n} \cap E_{n+1})$

$P(E_{n+1}) = 0,6P(E_n) + 0,4(1 - P(E_n))$

$P(E_{n+1}) = 0,2P(E_n) + 0,4$.

2. a) On raisonne par récurrence. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note Q_n la proposition : $u_n \leqslant 0,5$.

• Q_1 est vraie.

• Si Q_n est vraie, $u_n \leqslant 0,5$.

Alors $0,2u_n + 0,4 \leqslant 0,2 \quad 0,5 + 0,4$, soit $u_{n+1} \leqslant 0,5$.

Donc Q_{n+1} est vraie.

• On conclut que la suite (u_n) est majorée par 0,5.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = -0,8u_n + 0,4 = 0,4(1 - 2u_n)$.

Or $u_n \leqslant 0,5$ donc $1 - 2u_n \geqslant 0$ d'où $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

La suite (u_n) est croissante.

c) La suite (u_n) est croissante, majorée par 0,5 ; donc la suite (u_n) est convergente. Par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = 0,2u_n + 0,4$, sa limite ℓ est telle que $\ell = 0,2\ell + 0,4$ donc $\ell = 0,5$.

3. a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, $P(E_n) = u_n$; donc les probabilités $P(E_n)$ tendent en croissant vers $0,5$.

b) $0,499\,99 \leqslant P(E_n) \leqslant 0,5 \Leftrightarrow 0,5 - 10^{-5} \leqslant u_n \leqslant 0,5$

$$\Leftrightarrow -10^{-5} \leqslant u_n - 0,5 \leqslant 0.$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $v_n = u_n - 0,5$.

Ainsi, $0,499\,99 \leqslant P(E_n) \leqslant 0,5 \Leftrightarrow -10^{-5} \leqslant v_n \leqslant 0$.

La suite (v_n) est telle que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 0,5 = 0,2u_n - 0,1 = 0,2(u_n - 0,5)$$

soit $v_{n+1} = 0,2\, v_n$.

Ainsi, (v_n) est géométrique de raison $q = 0,2$ et de premier terme $v_1 = u_1 - 0,5 = -0,1$. D'où :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = v_1 q^{n-1} = -0,1 \times 0,2^{n-1} = -0,5 \times 0,2^n$.

On résout alors l'inéquation : $-10^{-5} \leqslant v_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$-10^{-5} \leqslant v_n \Leftrightarrow 0,5 \times 0,2^n \leqslant 10^{-5} \Leftrightarrow 0,2^n \leqslant 2 \times 10^{-5}$

$\Leftrightarrow n\ln(0,2) \leqslant \ln(2 \times 10^{-5})$

$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(2 \times 10^{-5})}{\ln(0,2)}$.

D'où $n \geqslant 7$.

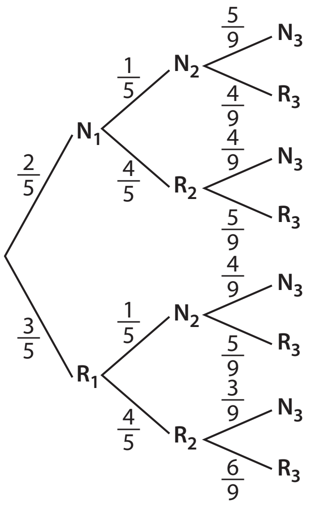
Autre solution : on peut utiliser un algorithme pour trouver le plus petit entier n_0 tel que $u_n \geqslant 0,5 - 10^{-5}$.

```
Variables
n, U
Entrées
n reçoit 1 ; U reçoit 0,4
Traitement
Tant que U < 0,5 - 10^-5
n reçoit n + 1
U reçoit 0,2U + 0,4
Fin tant
Sortie
Afficher n
```

Puisque (u_n) converge en croissant vers 0,5, les entiers solutions sont tels que $n \geqslant n_0$.

Pour aller plus loin (page 374)

58 **1.** Arbre pondéré associé à l'expérience :



2. a) $P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = P(N_1 \cap N_2) \times P_{N_1 \cap N_2}(N_3)$

$P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{5}{9} = \frac{2}{45}$.

$P(N_1 \cap R_2 \cap N_3) = P(N_1 \cap R_2) \times P_{N_1 \cap R_2}(N_3)$

$P(N_1 \cap R_2 \cap N_3) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{9} = \frac{32}{225}$.

b) D'après la formule des probabilités totales :

$P(N_1 \cap N_3) = P(N_1 \cap N_3 \cap N_2) + P(N_1 \cap N_3 \cap R_2)$

$P(N_1 \cap N_3) = \frac{2}{45} + \frac{32}{225} = \frac{14}{75}$.

c) De même :

$P(R_1 \cap N_3) = P(R_1 \cap N_3 \cap N_2) + P(R_1 \cap N_3 \cap R_2)$

$P(R_1 \cap N_3) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{9} + \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{9} = \frac{16}{75}$.

3. D'après la formule des probabilités totales :

$P(N_3) = P(N_1 \cap N_3) + P(R_1 \cap N_3)$

$P(N_3) = \frac{14}{75} + \frac{16}{75} = \frac{2}{5}$.

4. $P(N_1 \cap N_3) = \frac{14}{75}$ et $P(N_1) \quad P(N_3) = \frac{2}{5} \quad \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$;

donc $P(N_1 \cap N_3) \neq P(N_1) \times P(N_3)$.

Ainsi N_1 et N_3 ne sont pas indépendants.

Remarque. On pouvait conjecturer ce résultat puisque le tirage dans U_3 dépend de celui dans U_1.

5. $P_{N_3}(R_1) = \frac{P(R_1 \cap N_3)}{P(N_3)} = \frac{16}{75} \div \frac{2}{5} = \frac{8}{15}$.

59 **1. a)** La formule des probabilités totales s'écrit :

$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$

soit :

$P(B) = P(A_1) \quad P_{A_1}(B) + P(A_2) \quad P_{A_2}(B) + P(A_3) \quad P_{A_3}(B)$

b) Or $P_B(A_1) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)}$; donc :

$$P_B(A_1) = \frac{P(A_1) \quad P_{A_1}(B)}{P(A_1) \quad P_{A_1}(B) + P(A_2) \quad P_{A_2}(B) + P(A_3) \quad P_{A_3}(B)}.$$

2. a) $P(A_1 \cap D) = P(A_1) \times P_{A_1}(D) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{100} = \frac{1}{40}$.

$P(A_2 \cap D) = P(A_2) \times P_{A_2}(D) = \frac{1}{3} \times \frac{1{,}5}{100} = \frac{1}{200}$.

b) D'après la formule des probabilités totales :

$P(D) = P(A_1 \cap D) + P(A_2 \cap D) + P(A_3 \cap D)$;

donc $P(A_3 \cap D) = P(D) - P(A_1 \cap D) - P(A_2 \cap D)$,

soit $P(A_3 \cap D) = \frac{3{,}5}{100} - \frac{1}{40} - \frac{1}{200} = \frac{1}{200}$.

$P(A_3) = 1 - P(A_1) - P(A_2) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$; d'où :

$P_{A_3}(D) = \frac{P(A_3 \cap D)}{P(A_3)} = \frac{1}{200} \div \frac{1}{6} = \frac{3}{100}$.

Ainsi 3 % des paires de chaussettes provenant de A_3 ont un défaut.

c) D'après la formule de Bayes :

$$P_D(A_1) = \frac{P(A_1) \quad P_{A_1}(D)}{P(A_1) \quad P_{A_1}(D) + P(A_2) \quad P_{A_2}(D) + P(A_3) \quad P_{A_3}(D)}.$$

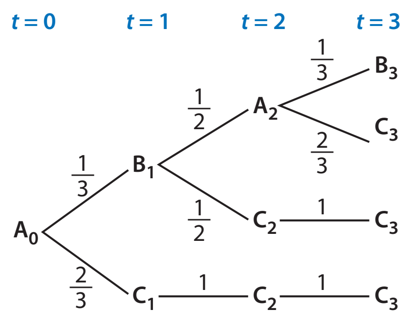
$$P_D(A_1) = \frac{\frac{1}{2} \quad \frac{5}{100}}{\frac{1}{2} \quad \frac{5}{100} + \frac{1}{3} \quad \frac{1{,}5}{100} + \frac{1}{6} \quad \frac{3}{100}} = \frac{5}{7}.$$

Remarque. Par un calcul direct, on obtient :

$P_{A_1}(D) = \frac{P(A_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{1}{40} \div \frac{3{,}5}{100} = \frac{5}{7}$.

On a ainsi vérifié la véracité de la formule de Bayes.

60 **1.** Arbre pondéré illustrant la marche jusqu'à l'instant $t = 3$:



$a_0 = 1$; $b_0 = 0$; $c_0 = 0$.

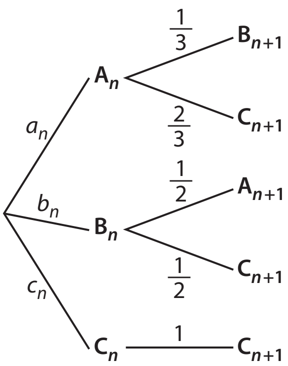
$a_1 = 0$; $b_1 = \frac{1}{3}$; $c_1 = \frac{2}{3}$.

$a_2 = \frac{1}{6}$; $b_2 = 0$; $c_2 = \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$.

$a_3 = 0$; $b_3 = \frac{1}{18}$; $c_3 = \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{17}{18}$.

2. a) À l'instant n, la puce est soit en A, en B ou en C. Ainsi $P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) = 1$; donc $a_n + b_n + c_n = 1$.

La situation aux instants $t = n$ et $t = n+1$ est illustrée par l'arbre pondéré ci-dessous :



D'où $a_{n+1} = P(A_{n+1}) = \dfrac{1}{2}b_n$ et $b_{n+1} = P(B_{n+1}) = \dfrac{1}{3}a_n$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} 2a_{n+1} = b_n \\ 3b_{n+1} = a_n \end{cases}$ et $a_n + b_n + c_n = 1$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \dfrac{1}{2}b_{n+1} = \dfrac{1}{2} \quad \dfrac{1}{3}a_n = \dfrac{1}{6}a_n$.

Donc $6a_{n+2} = a_n$.

c) Pour tout entier naturel p, on note H_p la proposition :

$$a_{2p} = \left(\frac{1}{6}\right)^p \text{ et } a_{2p+1} = 0.$$

On démontre par récurrence que pour tout entier naturel p, H_p est vraie.

• $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$ donc H_0 est vraie.

• On suppose que H_p est vraie. Alors :

$$a_{2(p+1)} = a_{2p+2} = \frac{1}{6}a_{2p} = \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{6}\right)^p = \left(\frac{1}{6}\right)^{p+1}$$

et $\quad a_{2(p+1)+1} = a_{2p+3} = \dfrac{1}{6}a_{2p+1} = 0.$

Donc H_{p+1} est vraie.

Finalement : $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} = \left(\dfrac{1}{6}\right)^p$ et $a_{2p+1} = 0$.

Or pour tout entier naturel n, $b_n = 2a_{n+1}$; donc en particulier, $b_{2p} = 2a_{2p+1} = 0$ et

$$b_{2p+1} = 2a_{2p+2} = 2a_{2(p+1)} = 2\left(\frac{1}{6}\right)^{p+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^p.$$

Ainsi, $\forall p \in \mathbb{N}$, $b_{2p} = 0$ et $b_{2p+1} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{6}\right)^p$.

3. a) $\lim\limits_{p\to+\infty} \left(\dfrac{1}{6}\right)^p = 0$; donc, par définition de la limite, tout intervalle ouvert I contenant 0 contient tous les termes du type a_{2p} à partir d'un certain rang p_0.

Mais, puisque les termes de rang impair du type a_{2p+1} sont nuls, tous les termes de la suite (a_n) appartiennent à I à partir du rang $n_0 = 2p_0$.

Cela signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

De même, on justifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = 1 - a_n - b_n$.

(a_n) et (b_n) convergent vers 0 ; donc (c_n) converge vers 1.

À la longue, cela signifie que la puce tend à se fixer en C.

61 **1.** À l'instant t, il y a deux bactéries dans le milieu ; le tableau indique, suivant l'évolution de chacune d'elles, le nombre de bactéries à l'instant $t+1$. On note :

M_1 : « la bactérie 1 meurt » ;

C_1 : « la bactérie 1 continue à vivre » ;

D_1 : « la bactérie 1 se divise en deux ».

De même, on définit M_2, C_2 et D_2.

	M_2	C_2	D_2
M_1	0	1	2
C_1	1	2	3
D_1	2	3	4

En raison de l'indépendance des évolutions :

$P(X = 0) = P(M_1 \cap M_2) = p_1^2 = 0{,}04$;

$P(X = 1) = P(M_1 \cap C_2) + P(C_1 \cap M_2) = 2p_1p_2 = 0{,}2$;

$P(X = 2) = P(M_1 \cap D_2) + P(C_1 \cap C_2) + P(D_1 \cap M_2)$
$= 2p_1p_3 + p_2^2 = 0{,}37$;

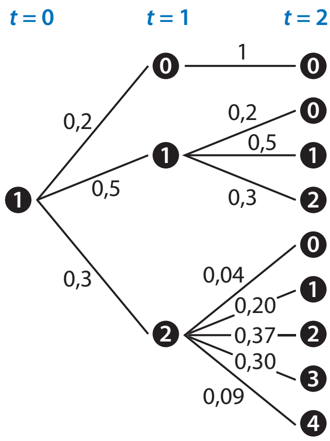
$P(X = 3) = P(C_1 \cap D_2) + P(D_1 \cap C_2) = 2p_2p_3 = 0{,}3$;

$P(X = 4) = P(D_1 \cap D_2) = p_3^2 = 0{,}09$.

D'où la loi de X :

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	0,04	0,20	0,37	0,30	0,09

2. a) Arbre illustrant la situation ci-dessous (les nombres entourés indiquent le nombre de bactéries vivantes).



Si $t = 1$, le nombre de bactéries est 0,1 ou 2 ;

si $t = 2$, le nombre de bactéries est 0,1 ; 2 ; 3 ou 4.

b) $P_{A_1}(B_1) = p_2 = 0{,}5$; $P_{A_1}(B_2) = p_3 = 0{,}3$.

$P_{A_2}(B_1) = P(X = 1) = 0{,}2$;

$P_{A_2}(B_2) = P(X = 2) = 0{,}37$.

c) D'après la formule des probabilités totales :

$P(B_1) = P(A_1 \cap B_1) + P(A_2 \cap B_1)$

$P(B_1) = P(A_1) \quad P_{A_1}(B_1) + P(A_2) \quad P_{A_2}(B_1)$

$P(B_1) = 0{,}5 \quad 0{,}5 + 0{,}3 \quad 0{,}2 = 0{,}31$.

De même :

$P(B_2) = P(A_1 \cap B_2) + P(A_2 \cap B_2)$

$P(B_2) = 0{,}5 \quad 0{,}3 + 0{,}3 \quad 0{,}37 = 0{,}261$.

3. Y indique le nombre de bactéries vivantes dans la solution à l'instant $t = 2$.

$P(Y = 0) = 0{,}2 + 0{,}5 \quad 0{,}2 + 0{,}3 \quad 0{,}04 = 0{,}312$

$P(Y = 1) = P(B_1) = 0{,}31$;

$P(Y = 2) = P(B_2) = 0{,}261$

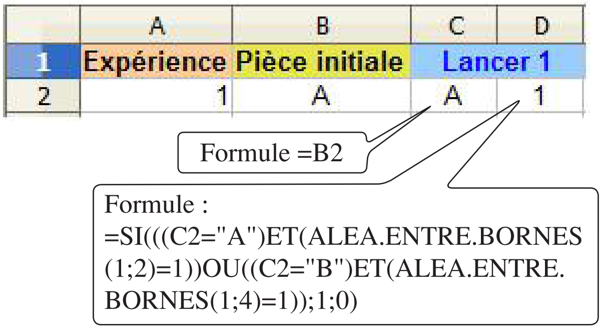
$P(Y = 3) = 0{,}3^2 = 0{,}09$;

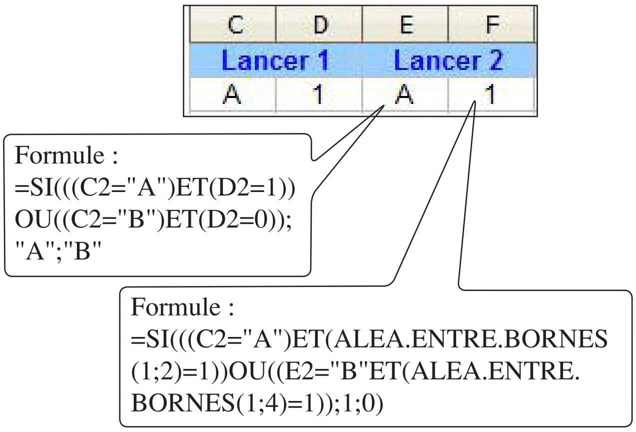
$P(Y = 4) = 0{,}3 \quad 0{,}09 = 0{,}027$

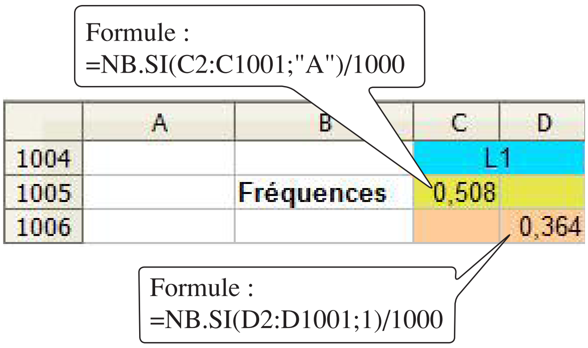
D'où la loi de Y :

k	0	1	2	3	4
P(Y = k)	0,312	0,31	0,261	0,09	0,027

62 **1. a)** Vues d'écran :

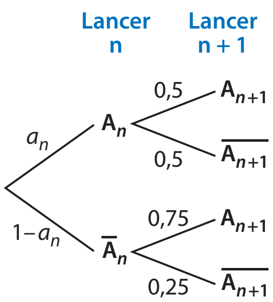






b) *Conjectures :* la suite des fréquences de A_n semble converger vers 0,4 et celle des fréquences de F_n semble converger vers 0,6.

2. a) Arbre associé au choix de la pièce ($n \geqslant 1$) :



D'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P\left(\overline{A_n} \cap A_{n+1}\right)$$

$$P(A_{n+1}) = 0,5a_n + 0,75(1 - a_n) = -0,25a_n + 0,75$$

soit $a_{n+1} = 0,25(3 - a_n)$.

b) On admet que la suite (a_n) converge vers le nombre ℓ. Alors, par passage à la limite dans l'égalité $a_{n+1} = 0,25(3 - a_n)$, le nombre ℓ vérifie $\ell = 0,25(3 - \ell)$ d'où $\ell = 0,6$.

Remarque. On peut démontrer que la suite (a_n) est convergente en étudiant la suite auxiliaire (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $v_n = a_n - 0,6$.

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = -0,25$ et de premier terme $v_1 = -0,1$.

On en déduit l'expression de v_n puis celle de a_n.

On obtient :

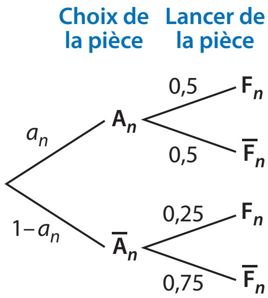
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 0,6 + 0,4 \times (-0,25)^n.$$

Puisque $-1 < -0,25 < 1$:

$$\lim_{n \to +\infty} (-0,25)^n = 0 \text{ donc } \lim_{n \to +\infty} a_n = 0,6.$$

La méthode utilisée sera étudiée en spécialité (*cf.* chapitre 5).

c) Arbre associé à la sortie de Face ($n \geqslant 1$) :



D'après la formule des probabilités totales :

$$P(F_n) = P(A_n \cap F_n) + P\left(\overline{A_n} \cap F_n\right)$$

$$u_n = 0,5a_n + 0,25(1 - a_n) = 0,25a_n + 0,25.$$

Or $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0,6$ donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0,4$

La suite (u_n) converge vers 0,4.

PROLONGEMENT DU TP 24

63 **1.** • *Parents AA et Aa*

Parents	A	a
A	AA	Aa
A	AA	Aa

$P(AA) = P(Aa) = \dfrac{1}{2}$

• *Parents Aa et Aa*

Parents	A	a
A	AA	Aa
a	Aa	aa

$P(AA) = P(aa) = \dfrac{1}{4}$

et $P(Aa) = \dfrac{1}{2}$

• *Parents aa et Aa*

Parents	A	a
a	Aa	aa
a	Aa	aa

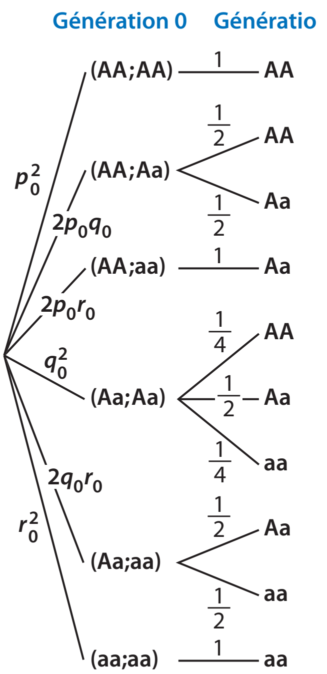
$P(Aa) = P(aa) = \dfrac{1}{2}$

• *Les autres cas sont évidents* d'où le résumé dans le tableau ci-dessous :

Parents	AA	Aa	aa
AA	AA 1	AA 1/2 Aa 1/2	Aa 1

Aa	AA 1/2 Aa 1/2	AA 1/4 Aa 1/2 aa 1/4	Aa 1/2 aa 1/2
aa	Aa 1	Aa 1/2 aa 1/2	aa 1

2. Arbre illustrant la situation :



a) D'après la formule des probabilités totales :

• $p_1 = \mathrm{P(AA)} = p_0^{\,2} + 2p_0q_0 \quad \frac{1}{2} + q_0^{\,2} \quad \frac{1}{4}$

soit $p_1 = \left(p_0 + \frac{1}{2}q_0\right)^2$.

• $r_1 = \mathrm{P}(aa) = r_0^{\,2} + 2q_0r_0 \quad \frac{1}{2} + q_0^{\,2} \quad \frac{1}{4}$

soit $r_1 = \left(r_0 + \frac{1}{2}q_0\right)^2$.

Note : le résultat était prévisible en raison de la symétrie des formules (permutation de A et a).

b) $p_1 - r_1 = \left(p_0 + \frac{1}{2}q_0\right)^2 - \left(r_0 + \frac{1}{2}q_0\right)^2$

$p_1 - r_1 = \left(p_0 + \frac{1}{2}q_0 - r_0 - \frac{1}{2}q_0\right)\left(p_0 + \frac{1}{2}q_0 + r_0 + \frac{1}{2}q_0\right)$

$p_1 - r_1 = (p_0 - r_0)(p_0 + q_0 + r_0)$.

Or $p_0 + q_0 + r_0 = 1$, donc $p_1 - r_1 = p_0 - r_0$.

c) On pose $\alpha = p_1 - r_1 = p_0 - r_0$.

• $p_0 = \alpha + r_0$ et $q_0 = 1 - p_0 - r_0 = 1 - \alpha - 2r_0$.

Ainsi $p_1 = \left(p_0 + \frac{1}{2}q_0\right)^2 = \left(\alpha + r_0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha - r_0\right)^2$

soit $p_1 = \frac{1}{4}(1+\alpha)^2$.

• $r_0 = p_0 - \alpha$ et $q_0 = 1 - p_0 - r_0 = 1 - 2p_0 + \alpha$.

Ainsi $r_1 = \left(r_0 + \frac{1}{2}q_0\right)^2 = \left(p_0 - \alpha + \frac{1}{2} - p_0 + \frac{1}{2}\alpha\right)^2$

soit $r_1 = \frac{1}{4}(1-\alpha)^2$.

• Enfin, $p_1 + q_1 + r_1 = 1$ donc $q_1 = 1 - p_1 - r_1$.

$q_1 = 1 - \frac{1}{4}(1+\alpha)^2 - \frac{1}{4}(1-\alpha)^2$

$q_1 = \frac{1}{4}\left[4 - 1 - 2\alpha - \alpha^2 - 1 + 2\alpha - \alpha^2\right]$

soit $q_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \alpha^2\right)$.

d) En procédant de même à la deuxième génération :

$$p_2 - r_2 = p_1 - r_1 = \alpha .$$

Alors $p_2 = \frac{1}{4}(1+\alpha)^2 = p_1$,

$r_2 = \frac{1}{4}(1-\alpha)^2 = r_1$

et $q_2 = \frac{1}{2}(1-\alpha^2) = q_1$.

Donc, les suites $(p_n),(q_n)$ et (r_n) sont constantes à partir du rang 1. Leurs valeurs ne dépendent que de la constante $\alpha = p_0 - r_0$.

CHAPITRE 13

Lois de probabilité à densité

ACTIVITÉS

(page 436)

Activité 1

1 a) $P(X \in A_n) = np$. Si $n > \frac{1}{p}^2$ alors $np > 1$.

b) Comme l'hypothèse $p > 0$ est absurde, nécessairement, $p = 0$.

2 a) Simulation.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		Sous-intervalles I_k									
2	Nombre au hasard	[0;0,1[	[0,1;0,2[	[0,2;0,3[	[0,3;0,4[	[0,4;0,5[	[0,5;0,6[	[0,6;0,7[	[0,7;0,8[	[0,8;0,9[	[0,9;1[
3	0,970306396484375	0,1020	0,1021	0,0998	0,1018	0,1025	0,0983	0,0975	0,0993	0,0973	0,0994
4	0,892028808593750										

b) L'histogramme indique que toutes les fréquences des événements « $X \in I_k$ » sont voisines de 0,1.

c) D'après la loi des grands nombres, il est naturel de poser, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant 10$: $P(X \in I_k) = 0{,}1$.

d) $P(X < 0{,}5) = \sum_{k=1}^{5} P(X \in I_k) = 0{,}5$.

$P(X < 0{,}2) = P(X \in I_1) + P(X \in I_2) = 0{,}2$.

$P(X \geqslant 0{,}8) = 1 - P(X < 0{,}8) = 1 - \sum_{k=1}^{8} P(X \in I_k) = 0{,}2$.

$P(0{,}3 \leqslant X < 0{,}8) = \sum_{k=4}^{8} P(X \in I_k) = 0{,}5$.

e) *Conjecture* : si $I = [\alpha ; \beta]$, $P(X \in I) = \beta - \alpha$.

3 a) $\text{aire}(S_f) = (\beta - \alpha) \times 1 = \beta - \alpha$.

b) Ainsi, la valeur de l'aire correspond à la valeur de $P(X \in I)$ conjecturée en **2. c)**.

Activité 2

1 a) L'univers U associé à cette expérience aléatoire est l'ensemble des couples $(x ; y)$ tels que : $x \in [0 ; 1]$ et $y \in [0 ; 1]$.

b) $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant -y \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow -1 \leqslant x - y \leqslant 1$.

Donc, l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire D appartient à $[-1 ; 1]$.

Réciproquement, pour tout nombre d de $[-1 ; 1]$, il existe $(x ; y)$ dans U tel que $x - y = d$:

• si $0 \leqslant d \leqslant 1$, il suffit de prendre $x = d$ et $y = 0$;

• si $-1 \leqslant d < 0$, il suffit de prendre $x = 0$ et $y = -d$.

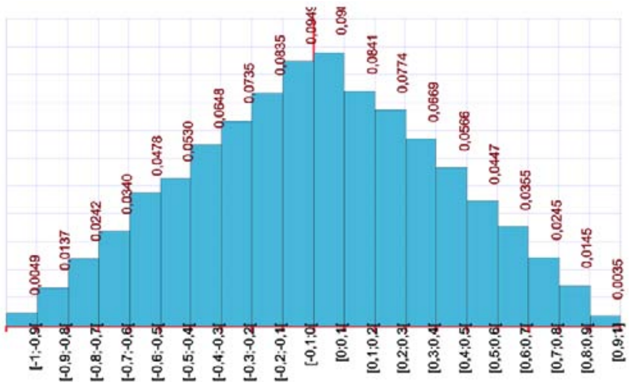
Finalement, l'ensemble des valeurs prises par D est l'intervalle $[-1 ; 1]$.

2 a) Simulation.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2	Valeurs de D	[-1;-0,9[	[-0,9;-0,8[	[-0,8;-0,7[	[-0,7;-0,6[	[-0,6;-0,5[	[-0,5;-0,4[	[-0,4;-0,3[	[-0,3;-0,2[	[-0,2;-0,1[
3	0,143280029296875	0,0049	0,0137	0,0242	0,0340	0,0478	0,0530	0,0648	0,0735	0,0835
4	-0,740447998046875									
5	0,654412841796875									

K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
Intervalles I_k										
[-0,1;0[	[0;0,1[	[0,1;0,2[	[0,2;0,3[	[0,3;0,4[	[0,4;0,5[	[0,5;0,6[	[0,6;0,7[	[0,7;0,8[	[0,8;0,9[	[0,9;1]
0,0949	0,0980	0,0841	0,0774	0,0669	0,0566	0,0447	0,0355	0,0245	0,0145	0,0035

b) Affichage de l'histogramme :



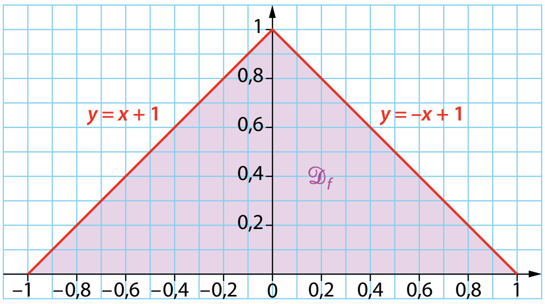
c) Comme la somme des fréquences est 1, la somme des aires des rectangles est 1 u.a.

d) Tableau des fréquences :

Evénement	$D < 0$	$D \geqslant 0{,}5$	$-0{,}2 \leqslant D \leqslant 0{,}2$
Fréquence	0,494	0,128	0,362
Evénement	$0{,}3 < D < 0{,}8$	$-0{,}75 \leqslant D \leqslant 0{,}25$	
Fréquence	0,225	0,681	

3 a) f est définie sur $[-1 ; 1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in [-1 ; 0[\\ -x+1 & \text{si } x \in [0 ; 1] \end{cases}.$$



$\mathscr{D}_f$ est un triangle de base 2 et de hauteur 1 ; donc :

aire$(\mathscr{D}_f)$ = 1 u.a.

b) $P(D \in [-1\,;0[) = \int_{-1}^{0}(x+1)\,dx = 0{,}5.$

$P(D \in [0{,}5\,;1]) = \int_{0{,}5}^{1}(-x+1)\,dx = 0{,}125.$

$P(D \in [-0{,}2\,;0{,}2]) = 2\int_{0}^{0{,}2}(-x+1)\,dx = 0{,}36.$

$P(D \in]0{,}3\,;0{,}8[) = \int_{0{,}3}^{0{,}8}(-x+1)\,dx = 0{,}225.$

$$P(D \in [-0{,}75\,;0{,}25]) = \int_{-0{,}75}^{0}(x+1)\,dx + \int_{0}^{0{,}25}(-x+1)\,dx = 0{,}6875.$$

Ces résultats sont en accord avec les fréquences observées lors de la simulation : la différence en valeur absolue ne dépasse jamais 1 centième.

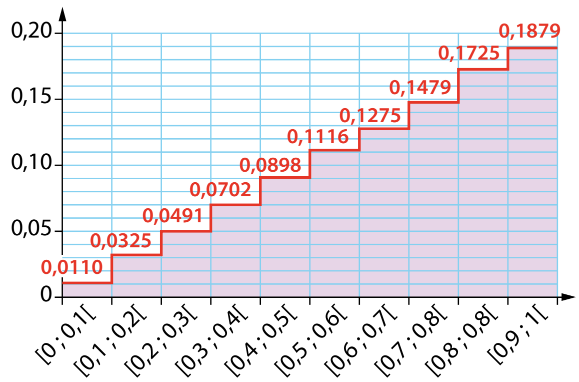
PROBLÈME OUVERT

Une première approche consiste à déterminer une valeur approchée de P(M ⩽ 0,4) et de P(I) ⩽ 0,4 à partir des fréquences observées lors de10 000 simulations.
Il suffit de reprendre dans chacun des cas, la méthodologie de l'*activité* 1 en utilisant l'instruction :

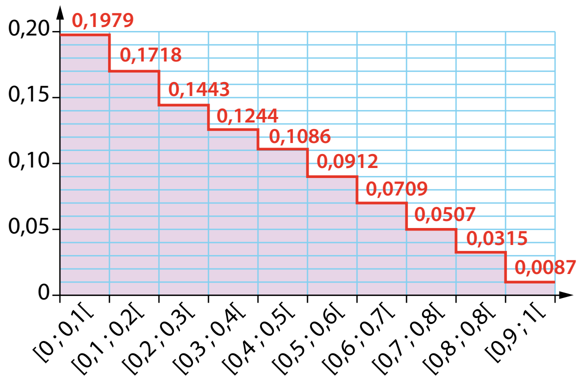
- `MAX(ALEA();ALEA())` en colonne A pour simuler les valeurs prises par M (feuille1) ;
- `MIN(ALEA();ALEA())` en colonne A pour simuler les valeurs prises par M (feuille 2).

On obtient la répartition des fréquences des événements :

- « $M \in [0{,}1(k-1)\,;0{,}1k[$ » (k entier, $1 \leqslant k \leqslant 10$) ;



- « $I \in [0{,}1(k-1)\,;0{,}1k[$ » (k entier, $1 \leqslant k \leqslant 10$).



D'où les estimations des probabilités cherchées :

P(M ⩽ 0,4) ≈ 0,16 et P(I ⩽ 0,4) ≈ 0,64.

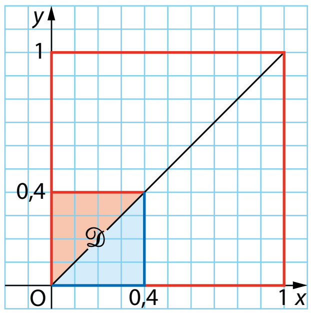
L'utilisation de la loi uniforme permet de résoudre le problème.

Méthode géométrique

Le choix de deux nombres au hasard dans [0 ; 1] revient à placer un point A(X;Y) au hasard dans le carré unité $\mathscr{D}$. L'événement « M ⩽ 0,4 » est représenté par l'aire du domaine $\mathscr{D}$ colorié.

Note.

Dans le demi-carré inférieur de $\mathscr{D}$, Y ⩽ X ; donc « M ⩽ 0,4 » signifie « X ⩽ 0,4 ».
Dans le demi-carré supérieur de $\mathscr{D}$, Y ⩾ X ; donc « M ⩽ 0,4 » signifie « Y ⩽ 0,4 ».



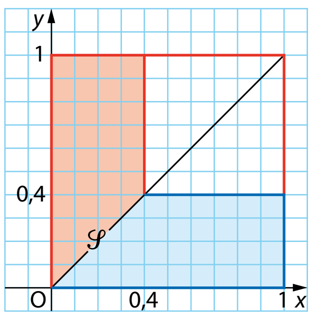
D'où :

$$P(M \leqslant 0{,}4) = \frac{\text{aire}(\mathscr{S})}{\text{aire}(\mathscr{D})} = 0{,}16.$$

De même, l'événement « I ⩽ 0,4 » est représenté par l'aire du domaine $\mathscr{S}$ colorié.

Note.

Dans le demi-carré inférieur de $\mathscr{D}$, Y ⩽ X ; donc « I ⩽ 0,4 » signifie « Y ⩽ 0,4 ».
Dans le demi-carré supérieur de $\mathscr{D}$, Y ⩾ X ; donc « I ⩽ 0,4 » signifie « X ⩽ 0,4 ».



D'où $P(I \leqslant 0,4) = \dfrac{\text{aire}(\mathcal{S})}{\text{aire}(\mathcal{D})} = 1 - 0,6^2 = 0,64.$

Méthode probabiliste

« M ⩽ 0,4 » signifie « X ⩽ 0,4 » et « Y ⩽ 0,4 » ; donc :

$$P(M \leqslant 0,4) = P((X \leqslant 0,4) \cap (Y \leqslant 0,4))$$
$$= P(X \leqslant 0,4) \times P(Y \leqslant 0,4)$$

(indépendance du choix des coordonnées).

Or, X et Y suivent la loi uniforme sur [0 ; 1] ; donc :

$$P(M \leqslant 0,4) = 0,4^2 = 0,16.$$

Pour la variable aléatoire I, il vaut mieux raisonner en utilisant l'événement contraire.

« I > 0,4 » signifie « X > 0,4 » et « Y > 0,4 » ; donc :

$$P(I > 0,4) = P((X > 0,4) \cap (Y > 0,4))$$
$$= P(X > 0,4) \times P(Y > 0,4)$$

(indépendance du choix des coordonnées).

$P(I > 0,4) = 0,6^2$.

D'où :

$$P(I \leqslant 0,4) = 1 - 0,36 = 0,64.$$

EXERCICES Application (page 384)

1 **a)** $P(X \leqslant 3) = 0,3$.
b) $P(X > 6) = 0,4$.
c) $P(3 < X < 8) = 0,5$.

2 On note R l'événement « le tube est rejeté ».
R = « D ⩽ 198,1 » ∪ « D ⩾ 201,9 » est la réunion de deux événements incompatibles ; donc :

$$P(R) = \frac{0,1}{4} + \frac{0,1}{4} = 0,05\,.$$

3 X est la variable aléatoire qui indique la durée (en min) entre midi et l'heure d'arrivée de Boris.

a) « Boris arrive avant Anne » (événement B) signifie « X < 20 ».

$$\text{Donc : } P(B) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}.$$

b) « Anne attend Boris plus de 20 minutes » (événement C) signifie « X > 40 ».

Donc : $\quad P(C) = \dfrac{60-40}{60} = \dfrac{1}{3}.$

c) « Anne attend Boris moins de 5 minutes » (événement D) signifie « 20 < X < 25 ».

Donc : $\quad P(D) = \dfrac{25-20}{60} = \dfrac{1}{12}.$

4 **1.** *Vrai.* $P(X > 10) = e^{-0,07\times 10} \approx 0,50$.
2. *Faux.* X suit une loi de durée de vie sans vieillissement ; donc $P_{X\geqslant 10}(X \geqslant 15) = P(X \geqslant 5) = e^{-0,07\times 5} \approx 0,70$.

5 **1. a)** $\lambda = f(0) = \dfrac{5}{4}$.

b) $\forall\, x \in [0\,;+\infty[\,,\ f(x) = \dfrac{5}{4}e^{-\frac{5}{4}x}$.

2. a) $\mathcal{S}_1$ désigne le domaine sous $\mathcal{D}_f$ sur [0 ; 1].

$$\text{aire}(\mathcal{S}_1) = \int_0^1 \frac{5}{4}e^{-\frac{5}{4}x}\,dx = \left[-e^{-\frac{5}{4}x}\right]_0^1 = -e^{-\frac{5}{4}} + 1 \text{ u.a.}$$

$\text{aire}(\mathcal{S}_1) = P(X \leqslant 1) = P(X < 1)$.

b) $P(X > 2) = 1 - P(X \leqslant 2) = 1 - \displaystyle\int_0^2 \frac{5}{4}e^{-\frac{5}{4}x}\,dx = e^{-\frac{5}{2}}$.

$\mathcal{S}_2$ désigne le domaine sous $\mathcal{D}_f$ sur]2 ; +∞[.

c) $P(1 \leqslant X \leqslant 2) = 1 - (P(X < 1) + P(X > 2))$

$$P(1 \leqslant X \leqslant 2) = e^{-\frac{5}{4}} - e^{-\frac{5}{2}} \approx 0,204.$$

3. a) $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{4}{5}$.

b) Or $E(X) = \displaystyle\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}\,dx$, donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{5}{4}xe^{-\frac{5}{4}x}dx = \frac{4}{5}$.

6 **1. a)** $P(T > 300) = 1 - \displaystyle\int_0^{300} 0,005e^{-0,005x}dx \approx 0,223$.

b) $P(T \leqslant 365) = \displaystyle\int_0^{365} 0,005\,e^{-0,005x}\,dx \approx 0,839$.

c) $P(365 \leqslant T \leqslant 730) = \displaystyle\int_{365}^{730} 0,005e^{-0,005x}\,dx \approx 0,135$.

2. a) La demi-vie $t_{1/2}$ est définie par : $P(T \leqslant t_{1/2}) = P(T > t_{1/2})$, c'est-à-dire :

$$P(T \leqslant t_{1/2}) = 1 - P(T \leqslant t_{1/2}) \text{ soit } P(T \leqslant t_{1/2}) = 0,5.$$

b) $P(T \leqslant t) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow e^{-\lambda t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda t = \ln(2) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(2)}{\lambda}.$$

Or $\lambda = 0,005$, donc $t_{1/2} = \dfrac{\ln(2)}{0,005} \approx 139$ (jours).

7 **1.** $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = 5$ donc $\lambda = \dfrac{1}{5}$.

$$P(X > 10) = 1 - \int_0^{10} \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x}\,dx = e^{-2}.$$

$$P(X > 5) = 1 - \int_0^{5} \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x}\,dx = e^{-1}.$$

2. X suit une loi exponentielle, c'est-à-dire une loi à densité « sans mémoire ». Pour tous nombres positifs t et h :
$P_{X\geqslant t}(X \geqslant t + h) = P(X \geqslant h)$.
$P_{X\geqslant 10}(X \geqslant 15) = P(X \geqslant 5) = e^{-1}$.

8 **1.** la condition $P(X \geqslant 1) = 0,942$ s'écrit :

$$1 - \int_0^{60} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 0,942 \text{ soit } e^{-60\lambda} = 0,942.$$

Or $e^{-60\lambda} = 0,942 \Leftrightarrow -60\lambda = \ln(0,942) \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{\ln(0,942)}{60}$

donc $\lambda \approx 0,001$.

2. $P(240 \leqslant X \leqslant 300) = \displaystyle\int_{240}^{300} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = e^{-240\lambda} - e^{-300\lambda}$

$$P(240 \leqslant X \leqslant 300) \approx e^{-0,24} - e^{-0,3} \approx 0,046.$$

9 **1.** T suit une loi « sans mémoire » ; donc :

$$P_{T\geqslant 2}(T \geqslant 5) = P(T \geqslant 3) = 0,452.$$

2. Le paramètre λ est défini par la condition :

$$P(T \geqslant 3) = 0,452$$

c'est-à-dire $e^{-3\lambda} = 0,452$, d'où : $\lambda = -\dfrac{\ln(0,452)}{3}$.

Or $P(T \leqslant 5) = \int_0^5 \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 1 - e^{-5\lambda}$; donc :

$$P(T \leqslant 5) = 1 - e^{\frac{5\ln(0{,}452)}{3}} \approx 0{,}734.$$

10 **1.** On note X la variable aléatoire qui indique la durée de vie (en heure) d'un de ces composants.

$$p = P(X \geqslant 1000) = e^{-1000\lambda} \text{ avec } \lambda = 10^{-4}$$

donc $p = e^{-0,1}$.

2. a) Si X_1 est la durée de vie de C_1, X_2 celle de C_2 et X_3 celle de C_3, alors :

$$P(S) = P((X_1 \geqslant 1000) \cap (X_2 \geqslant 1000) \cap (X_3 \geqslant 1000)).$$

Or, les durées de vie sont indépendantes et suivent la même loi ; donc $P(S) = p^3$.

b) $P(S) = e^{-0,3} \approx 0{,}741$.

EXERCICES Activités de recherche (page 388)

15 Attente à un feu tricolore

• ***Les outils***

– Représentation d'un événement sur un axe gradué. Variable aléatoire.

– Formules de calcul de probabilités.

• ***Les objectifs***

– Traduire des événements.

– Calculer des probabilités suivant une loi uniforme.

1. Schéma illustrant la succession des feux :

2. a) A, « Attente de moins de 10 s » signifie :

« $T \in [0 ; 60]$ » ou « $T \in]110 ; 180]$ » ou « $T \in]230 ; 300]$ ».

A est la réunion de trois événements deux à deux incompatibles ; donc :

$$P(A) = \frac{60}{300} + \frac{70}{300} + \frac{70}{300} = \frac{2}{3}.$$

b) B, « Attente de plus de 20 s » signifie :

« $T \in]60 ; 100[$ » ou « $T \in]180 ; 220[$ ».

B est la réunion de deux événements incompatibles ; donc :

$$P(B) = \frac{40}{300} + \frac{40}{300} = \frac{4}{15}.$$

16 Distribution uniforme dans un carré unité

• ***Les outils***

– Régionnement du plan suivant une droite.

– Somme de deux variables aléatoires.

– Calculs d'aires.

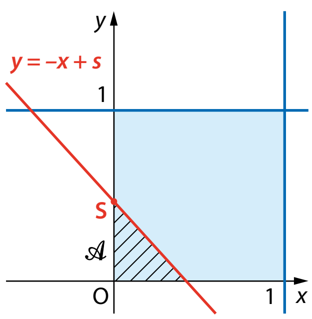
• ***Les objectifs***

– Représenter géométriquement un événement.

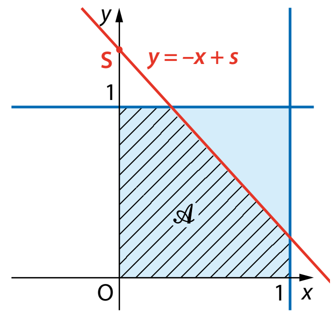
– Calculer des probabilités à l'aide d'aires.

1. a) $\forall s \in [0 ; 2]$, $S \leqslant s \Leftrightarrow X + Y \leqslant s \Leftrightarrow Y \leqslant -X + s$.

b) Cas : $0 \leqslant s \leqslant 1$



Cas : $1 < s \leqslant 2$



2. Cas : $0 \leqslant s \leqslant 1$

$\mathscr{A}$ est un demi-carré de côté s ; donc aire($\mathscr{A}$) $= \frac{1}{2}s^2$.

Cas : $1 < s \leqslant 2$

Le domaine $\mathscr{A}$ est le carré unité privé d'un demi-carré de côté $2 - s$; donc aire($\mathscr{A}$) $= 1 - \frac{1}{2}(2 - s)^2$.

$$\text{Ainsi } P(S \leqslant s) = \begin{cases} \frac{1}{2}s^2 & \text{si } 0 \leqslant s \leqslant 1 \\ -\frac{1}{2}s^2 + 2s - 1 & \text{si } 1 < s \leqslant 2. \end{cases}$$

17 Durée de vie d'un système

• ***Les outils***

– Intersection et réunion d'événements.

– Indépendance d'événements.

– Formules de calcul de probabilités.

• ***Les objectifs***

– Traduire des événements.

– Calculer des probabilités suivant une loi exponentielle.

– Comparer des probabilités.

a) L'événement « $X > 60$ » signifie :

« $T_A > 60$ », « $T_B > 60$ » et « $T_C > 60$ ».

Or, les durées de vie des composants A, B et C sont indépendantes et suivent la même loi exponentielle. Donc :

$$P(X > 60) = P((T_A > 60) \cap (T_B > 60) \cap (T_C > 60)),$$

soit $P(X > 60) = p^3$ avec $p = P(T > 60) = e^{-60\lambda}$.

Ainsi $P(X > 60) = e^{-180\lambda}$.

b) L'événement E signifie : « $T_A > 60$ » ou « $T_{A'} > 60$ ».

$P(E) = P((T_A > 60) \cup (T_{A'} > 60))$

$\quad = P(T_A > 60) + P(T_{A'} > 60) - P((T_A > 60) \cap (T_{A'} > 60))$.

Or, les durées de vie des composants A et A' sont indépendantes et de même loi exponentielle ; donc :

$$P(E) = 2P(T > 60) - [P(T > 60)]^2 = 2p - p^2.$$

c) L'événement « $Y > 60$ » est réalisé, si et seulement si, les événements E, « $T_B > 60$ » et « $T_C > 60$ » sont tous trois réalisés.

$$\begin{aligned}P(Y > 60) &= P(E \cap (T_B > 60) \cap (T_C > 60))\\ &= P(E) \times P(T_B > 60) \times P(T_C > 60)\\ &= (2p - p^2)p^2 = 2p^3 - p^4.\end{aligned}$$

Or $p = e^{-60\lambda}$ donc $P(Y > 60) = 2e^{-180\lambda} - e^{-240\lambda}$.

d) Avec $\lambda = 0{,}002$, on obtient :

$$P(X > 60) \approx 0{,}698 \text{ et } P(Y > 60) \approx 0{,}777.$$

Ainsi, le montage 2 est préférable.

18 Narration de recherche

On note T la variable aléatoire qui indique le choix du nombre t dans $[-1 ; 1]$. T suit la loi uniforme sur $[-1 ; 1]$.

$$\text{aire}(ABM) = \frac{1}{2} \times 2 \times y_M = \frac{1-t^2}{1+t^2} ;$$

donc, la variable aléatoire S est définie sur $[-1 ; 1]$ par :

$$S = \frac{1-T^2}{1+T^2}.$$

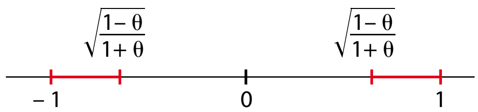
θ désigne un nombre de l'intervalle $[0 ; 1]$.

$$S \leqslant \theta \Leftrightarrow \frac{1-T^2}{1+T^2} \leqslant \theta \Leftrightarrow \theta(1+T^2) \geqslant 1 - T^2$$

$$\Leftrightarrow (1+\theta)T^2 \geqslant 1 - \theta \Leftrightarrow T^2 \geqslant \frac{1-\theta}{1+\theta}.$$

Ainsi, l'événement « $S \leqslant \theta$» signifie :

$$« T \leqslant -\sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}} » \text{ ou } « T \geqslant -\sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}} ».$$



Il est la réunion de deux événements incompatibles ; donc :

$$P(S \leqslant \theta) = P\left(T \leqslant -\sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}}\right) + P\left(T \geqslant \sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}}\right).$$

Puisque T suit la loi uniforme sur $[-1 ; 1]$, et que les intervalles représentés ont la même longueur :

$$P(S \leqslant \theta) = 2 \times \frac{1 - \sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}}}{2} = 1 - \sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}}.$$

On résout alors dans $[0 ; 1]$ l'équation d'inconnue θ :

$$P(S \leqslant \theta) = \frac{1}{2}.$$

Soit $1 - \sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4(1-\theta) = 1 + \theta$.

Donc $\theta = \frac{3}{5}$.

19 Narration de recherche

On note D l'événement « la durée de vie d'un composant dépasse 3 ans ».

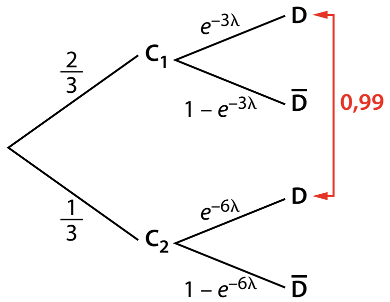
Si le composant est de type C_1, sa durée de vie suit une loi exponentielle de paramètre λ ; donc :

$$P_{C_1}(D) = 1 - \int_0^3 \lambda e^{-\lambda x}\, dx = e^{-3\lambda}.$$

Si le composant est de type C_2, sa durée de vie suit une loi exponentielle de paramètre 2λ.

Donc $P_{C_2}(D) = 1 - \int_0^3 2\lambda e^{-2\lambda x}\, dx = e^{-6\lambda}$.

L'expérience qui consiste à prendre au hasard un composant dans le sachet est représentée par l'arbre pondéré ci-après :



D'après la formule des probabilités totales, on a :

$P(D) = P(C_1 \cap D) + P(C_2 \cap D)$

$P(D) = P(C_1) \times P_{C_1}(D) + P(C_2) \times P_{C_2}(D)$

$P(D) = \frac{2}{3}e^{-3\lambda} + \frac{1}{3}e^{-6\lambda}$.

D'où l'équation : $\frac{2}{3}e^{-3\lambda} + \frac{1}{3}e^{-6\lambda} = \frac{99}{100}$.

Elle équivaut à : $100e^{-6\lambda} + 200e^{-3\lambda} - 99 = 0$. On pose $X = e^{-3\lambda}$.

Cette équation s'écrit $100X^2 + 200X - 297 = 0$ et ses solutions dans $\mathbb{R}$ sont :

$$\alpha = -1 - \frac{\sqrt{397}}{10} \text{ et } \beta = -1 + \frac{\sqrt{397}}{10}.$$

Or $X > 0$; donc seule la valeur β convient.

Ainsi, l'équation initiale équivaut à $e^{-3\lambda} = \beta$; d'où :

$$\lambda = -\frac{1}{3}\ln(\beta) \approx 0{,}002\ 5.$$

20 TD – La probable rencontre

1. a) La durée d'attente D est définie par :

$$\begin{cases} X - Y \text{ si Clément arrive avant Léa } (X \geqslant Y) \\ Y - X \text{ si Clément arrive avant Léa } (X < Y) \end{cases}.$$

Donc $D = |X - Y|$.

b) L'événement R signifie que la durée d'attente ne dépasse pas un quart d'heure donc : « $|X - Y| \leqslant \frac{1}{4}$ ».

2. a) et **b)**

	A	B	C	D
1	Léa : X	Clément : Y	Attente : |X-Y|	Fréquence de R:
2	=ALEA()	=ALEA()	=ABS(A2-B2)	=NB.SI(C2:C10001;"<=0,25")/10000

	A	B	C	D
1	Léa : X	Clément : Y	Attente : |X-Y|	Fréquence de R:
2	0,4647827148	0,0072021484	0,4575805664	0,4393
3	0,4647521973	0,6146240234	0,1498718262	
4	0,5887451172	0,7217712402	0,1330261230	
5	0,9032287598	0,0140075684	0,8892211914	

c) Après plusieurs simulations, les fréquences observées de l'événement R sont proches de 0,44. On peut donc estimer que $P(R) < 0{,}5$.

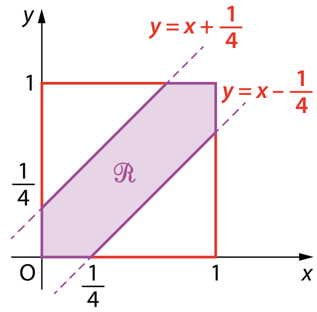
3. a) $|X - Y| \leqslant \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leqslant X - Y \leqslant \frac{1}{4}$.

$$|X - Y| \leqslant \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leqslant X - Y \text{ et } X - Y \leqslant \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow Y \leqslant X + \frac{1}{4} \text{ et } Y - X \geqslant -\frac{1}{4}$$

$$|X - Y| \leqslant \frac{1}{4} \Leftrightarrow X - \frac{1}{4} \leqslant Y \leqslant X + \frac{1}{4}$$

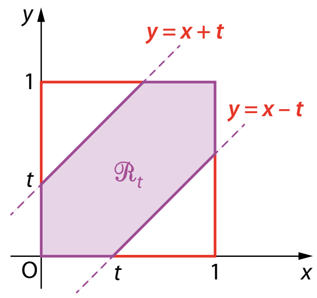
b) Représentation de l'événement R :



L'aire du domaine $\mathcal{R}$ est celle du carré unité privé de la réunion de deux demi-carrés de côté $\frac{3}{4}$; donc :

$$P(R) = \text{aire}(\mathcal{R}) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}.$$

4. a) Comme précédemment, pour tout t de $]0\,;1[$, l'événement R_t signifie « $|X - Y| \leqslant t$ », soit : « $X - t \leqslant Y \leqslant X + t$ ».



b) L'aire du domaine $\mathcal{R}_t$ est celle du carré unité privé de la réunion de deux demi-carrés de côté $1 - t$; donc :

$$P(R_t) = \text{aire}(\mathcal{R}_t) = 1 - (1 - t)^2.$$

c) $P(R_t) = 0{,}8 \Leftrightarrow 1 - (1 - t)^2 = 0{,}8 \Leftrightarrow (1 - t)^2 = 0{,}2.$

Or, pour tout t de $]0\,;1[$, $1 - t > 0$; donc :

$$1 - t = \sqrt{0{,}2} \quad \text{soit} \quad t = 1 - \sqrt{\frac{1}{5}} \quad \text{(en h)}.$$

Ainsi, la durée d'attente pour que $P(R_t) = 0{,}8$ est d'environ 33 minutes.

21 TD – Montage en série ou en parallèle

A. 1. a) L'événement « $X \leqslant t$ » signifie :

« $T_1 \leqslant t$ » et « $T_2 \leqslant t$ ». Or, les durées de vie des composants C_1 et C_2 sont indépendantes ; donc :

$$P(X \leqslant t) = P((T_1 \leqslant t) \cap (T_2 \leqslant t))$$
$$= P(T_1 \leqslant t \times P(T_2 \leqslant t).$$

b) Or, T_1 et T_2 suivent la même loi exponentielle de paramètre λ ; donc :

$$P(T_1) \leqslant t = P(T_2 \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Ainsi $P(X \leqslant t) = (1 - e^{-\lambda t})^2$ [1].

c) La densité f est continue et positive sur $[0\,;+\infty[$.

Donc, la fonction $t \mapsto P(X \leqslant t) = \int_0^t f(u)\,du$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et sa dérivée est f.

Or, pour tout nombre $t \geqslant 0$, $P(X \leqslant t) = (1 - e^{-\lambda t})^2$; donc :

$$f(t) = 2\lambda e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t}).$$

2. a) L'événement « $Y \leqslant t$ » signifie :

« $T_1 \leqslant t$ » ou « $T_2 \leqslant t$ ».

$$P(T \leqslant t) = P((T_1 \leqslant t) \cup (T_2 \leqslant t))$$
$$= P(T_1 \leqslant t) + P(T_2 \leqslant t) - P((T_1 \leqslant t) \cap (T_2 \leqslant t))$$
$$= P(T_1 \leqslant t) + P(T_2 \leqslant t) - P(T_1 \leqslant t) \times P(T_2 \leqslant t).$$

b) $P(Y \leqslant t) = 2(1 - e^{-\lambda t}) - (1 - e^{-\lambda t})^2$, soit :

$$P(Y \leqslant t) = 1 - e^{-2\lambda t} \quad [2].$$

c) La densité g est la dérivée de la fonction :

$$t \mapsto P(Y \leqslant t) = \int_0^t g(u)\,du.$$

Or, pour tout nombre $t \geqslant 0$, $P(Y \leqslant t) = 1 - e^{-2\lambda t}$; donc :

$$g(t) = 2e^{-2\lambda t}.$$

B. 1. a) $\forall\, t \in [0\,;+\infty[$:

$$d(t) = P(Y \leqslant t) - P(X \leqslant t)$$
$$d(t) = 1 - e^{-2\lambda t} - (1 - e^{-\lambda t})^2 = 2e^{-\lambda t} - 2\,e^{-2\lambda t}$$
$$d(t) = 2e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})$$

Or, $-\lambda t \leqslant 0$; donc $e^{-\lambda t} \leqslant 1$ soit $1 - e^{-\lambda t} \geqslant 0$.

Ainsi, chaque facteur étant positif, on conclut que $d(t) \geqslant 0$ sur $[0\,;+\infty[$.

b) On en déduit :

$$\forall\, t \in [0\,;+\infty[,\ P(Y \leqslant t) \geqslant P(X \leqslant t).$$

La probabilité que le système en série s'arrête à l'instant t est supérieure à la probabilité que le système en parallèle s'arrête à l'instant t.

Pour assurer la transmission du signal, le montage en parallèle est donc préférable.

2. a) Pour tout $a \geqslant 0$, on pose $I(a) = \int_0^a t g(t)\,dt$. D'où :

$$I(a) = \int_0^a 2\lambda t e^{-2\lambda t}\,dt.$$

Une primitive sur $[0\,;+\infty[$ de la fonction $h : t \mapsto 2\lambda t e^{-2\lambda t}$ est du type $H : t \mapsto (\alpha t + \beta)e^{-2\lambda t}$.

Or, pour tout $t \geqslant 0$:

$$H'(t) = \alpha e^{-2\lambda t} - 2\lambda(\alpha t + \beta)e^{-2\lambda t}$$

soit $\quad H'(t) = (-2\alpha\lambda t + \alpha - 2\beta\lambda)e^{-2\lambda t}.$

Ainsi, pour tout $t \geqslant 0$, $H'(t) = h(t)$ si, et seulement si :

$$-2\alpha\lambda t + \alpha - 2\beta\lambda = 2\lambda = 2\lambda t.$$

D'où, par identification des coefficients :

$$\begin{cases} -2\alpha\lambda = 2\lambda \\ \alpha - 2\beta\lambda = 0 \end{cases} \text{donc} \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -\dfrac{1}{2\lambda} \end{cases}.$$

Une primitive H de h sur $[0\,;+\infty[$ est définie par :

$$H(t) = \left(-t - \frac{1}{2\lambda}\right)e^{-2\lambda t}.$$

Alors, $I(a) = H(a) - H(0) = \left(-a - \dfrac{1}{2\lambda}\right)e^{-2\lambda a} + \dfrac{1}{2\lambda}.$

Or $\lim\limits_{a\to+\infty} a e^{-2\lambda a} = 0$ et $\lim\limits_{a\to+\infty} \dfrac{1}{2\lambda}e^{-2\lambda a} = 0$;

donc $\lim\limits_{a\to+\infty} I(a) = \dfrac{1}{2\lambda}$. Ainsi $E(Y) = \dfrac{1}{2\lambda}$.

Remarque. Si on veut éviter le calcul intégral pour calculer E(Y), il suffit de remarquer que la densité g est celle d'une loi exponentielle de paramètre 2λ.

Donc $E(Y) = \dfrac{1}{2\lambda}$.

b) Pour tout $a \geqslant 0$, on pose $J(a) = \int_0^a t f(t)\,dt$.

$J(a) = \int_0^a 2\lambda t e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})\,dt = 2\int_0^a \lambda t e^{-\lambda t}\,dt - \int_0^a 2\lambda t e^{-2\lambda t}\,dt$

soit $J(a) = 2\int_0^a \lambda t e^{-\lambda t}\,dt - \int_0^a t g(t)\,dt$.

Or $\lim\limits_{a \to +\infty} \int_0^a \lambda t e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda}$ (espérance d'une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ)

et $\lim\limits_{a \to +\infty} \int_0^a t g(t)\,dt = E(Y) = \frac{1}{2\lambda}$;

donc $\lim\limits_{a \to +\infty} J(a) = 2 \times \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{2\lambda}$. Ainsi $E(X) = \frac{3}{2\lambda}$.

c) La comparaison de E(Y) et de E(X) montre que la durée moyenne de transmission du signal avec le système en parallèle est trois fois plus grande qu'avec le système en série.

22 TD – Désintégration radioactive

A. 1. a) L'événement « $T \geqslant t$ » signifie « à l'instant t, le noyau ne s'est pas désintégré ».

$$P(T \geqslant t) = 1 - P(T < t) = 1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx.$$

Or $\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = -e^{-\lambda t} + 1$; donc $P(T \geqslant t) = e^{-\lambda t}$.

b) L'examen des noyaux à l'instant t est un schéma de Bernoulli d'ordre N_0 où la probabilité de succès (non désintégration lors de l'examen d'un noyau) est $p = e^{-\lambda t}$. Ainsi, Z_t suit une loi $\mathcal{B}(N_0\,;\, e^{-\lambda t})$.

c) Le nombre moyen $N(t)$ de noyaux présents à l'instant t est $N(t) = E(Z_t) = N_0 e^{-\lambda t}$.

2. a) Dans $\mathbb{R}^+$, on résout l'équation $P(T \leqslant t) = \frac{1}{2}$.

$1 - e^{-\lambda t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-\lambda t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda t = -\ln(2) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(2)}{\lambda}$

Ainsi, la demi-vie est $t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$.

$$N(t_{1/2}) = N_0 e^{-\lambda t_{1/2}} = N_0 e^{-\lambda \frac{\ln(2)}{\lambda}} = N_0 e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2} N_0.$$

Ainsi, $t_{1/2}$ est le temps nécessaire pour que la moitié des atomes se soient désintégrés.

b) $N(2t_{1/2}) = N_0 e^{-\lambda \frac{2\ln(2)}{\lambda}} = N_0 e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{4} N_0$.

Au bout de 2 demi-vies, le nombre moyen d'atomes non désintégrés est $\frac{1}{4} N_0$.

3. T suit une loi exponentielle de paramètre λ ; donc :

$$\tau = E(T) = \frac{1}{\lambda}.$$

Or $t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$ donc $\frac{1}{\lambda} = \frac{t_{1/2}}{\ln(2)}$.

Ainsi, $\tau = \frac{1}{\ln(2)} t_{1/2}$, d'où $\tau \approx 1{,}44 t_{1/2}$.

B. 1. $t_{1/2} \approx 6$ h donc $\lambda = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}} = \frac{\ln(2)}{6}\ h^{-1}$.

2. a) $P(T \leqslant 4) = \int_0^4 \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 1 - e^{-4\lambda} = 1 - e^{-\frac{4\ln(2)}{6}}$;

soit $P(T \leqslant 4) \approx 0{,}370$.

b) $P(T > 10) = e^{-10\lambda} = e^{-\frac{10\ln(2)}{6}} \approx 0{,}315$.

3. On résout l'inéquation $P(T \leqslant t) \geqslant 0{,}95$.

$$1 - e^{-\frac{\ln(2)}{6}t} \geqslant 0{,}95 \Leftrightarrow e^{-\frac{\ln(2)}{6}t} \leqslant 0{,}05 \Leftrightarrow -\frac{\ln(2)}{6}t \leqslant \ln(0{,}05)$$
$$\Leftrightarrow t \geqslant -\frac{6\ln(0{,}05)}{\ln(2)}$$

Or $-\frac{6\ln(0{,}05)}{\ln(2)} \approx 25{,}93$; donc, au bout de 26 heures, on peut estimer que la probabilité qu'un atome de ^{99m}Tc se désintègre dépasse 0,95.

23 TD – Les méthodes de Monte-Carlo

A. 1. a) X et Y suivent la loi uniforme sur [0 ; 1].

b) Ce choix correspond aux lignes 13 et 14 de l'algorithme.

2. La variable I de l'algorithme contient la fréquence des points situés dans le domaine $\mathcal{D}$.

3. La condition $y \leqslant F_1(x)$ n'est plus imposée dans la boucle ; donc, tous les points tirés au hasard sont placés dans le carré. La représentation graphique ne donne pas la répartition des points dans $\mathcal{D}$ mais dans tout le carré.

4. Par exemple, pour N = 10 000, I ≈ 0,6688.

Note. La valeur exacte de I est $\frac{2}{3}$.

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx = \left[-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

B. 1. a) Algorithme avec AlgoBox

```
1     VARIABLES
2       x EST_DU_TYPE NOMBRE
3       N EST_DU_TYPE NOMBRE
4       S EST_DU_TYPE NOMBRE
5       k EST_DU_TYPE NOMBRE
6       I EST_DU_TYPE NOMBRE
7     DEBUT_ALGORITHME
8       S PREND_LA_VALEUR 0
9       LIRE N
10      POUR k ALLANT_DE 1 A N
11        DEBUT_POUR
12        x PREND_LA_VALEUR random()
13        S PREND_LA_VALEUR S+F1(x)
14        FIN_POUR
15      I PREND_LA_VALEUR S/N
16      AFFICHER "I a pour valeur approchée :"
17      AFFICHER I
18    FIN_ALGORITHME
19
20   Fonction numérique utilisée :
21   F1(x)=sqrt(1-x)
```

b) Pour N = 10 000, I ≈ 0,665 5.

2. Pour N = 10 000, J ≈ 0,843 4.

```
1     VARIABLES
2       x EST_DU_TYPE NOMBRE
3       N EST_DU_TYPE NOMBRE
4       S EST_DU_TYPE NOMBRE
5       k EST_DU_TYPE NOMBRE
6       I EST_DU_TYPE NOMBRE
7     DEBUT_ALGORITHME
8       S PREND_LA_VALEUR 0
9       LIRE N
10      POUR k ALLANT_DE 1 A N
11        DEBUT_POUR
12        x PREND_LA_VALEUR random()
13        S PREND_LA_VALEUR S+F1(x)
14        FIN_POUR
15      I PREND_LA_VALEUR S/N
16      AFFICHER "I a pour valeur approchée :"
17      AFFICHER I
18    FIN_ALGORITHME
19
20   Fonction numérique utilisée :
21   F1(x)=sqrt(1-pow(x,3))
```

EXERCICES Entraînement (page 394)

DE TÊTE

24 **a)** $P(X \leqslant 0{,}5) = \dfrac{1}{4}$. **b)** $P(X > 0{,}75) = \dfrac{7}{16}$.

c) $P(0{,}25 \leqslant X \leqslant 0{,}75) = \dfrac{1}{2}$.

25 **1.** La fonction g est continue et positive sur $[0\ ;\ 3]$ avec :

$$\int_0^3 g(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{27}x^3\right]_0^3 = 1\ ;$$

donc g définit une densité de probabilité.

2. $P(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t g(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{27}x^3\right]_0^t = \frac{t^3}{27}$.

26 **1.** La densité f est la fonction constante définie sur $[0\ ;\ 10]$ par : $x \mapsto \dfrac{1}{10}$.

2. a) $P(U \in [1{,}7\ ;\ 9{,}2] = 0{,}75$. **b)** $P(U < 7{,}5) = 0{,}75$.
c) $P(U \geqslant 2{,}5) = 0{,}75$.

27 **1.** $\lambda = f(0) = 0{,}2$. **2.** $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = 5$.

28 T suit une loi « sans vieillissement » ; donc :

$$P_{T>5}(T > 8) = P(T > 3) = 1 - 0{,}32 = 0{,}68.$$

LOI À DENSITÉ

29 **1.** f est continue et positive sur $[0\ ;\ 1]$ avec :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[x^3\right]_0^1 = 1\ ;$$

donc f définit une densité de probabilité.

2. a) $P(X \geqslant 0{,}5) = \displaystyle\int_{0,5}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[x^3\right]_{0,5}^1 = 0{,}875$.

b) $P(X < 0{,}1) = \displaystyle\int_0^{0,1} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[x^3\right]_0^{0,1} = 0{,}001$.

c) $P(0{,}2 < X < 0{,}8) = \displaystyle\int_{0,2}^{0,8} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[x^3\right]_{0,2}^{0,8} = 0{,}504$.

30 **1.** $I(a) = \displaystyle\int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^a = -\mathrm{e}^{-a^2} + 1$.

Or $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \mathrm{e}^{-a^2} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} I(a) = 1$.

2. g est continue et positive sur $[0\ ;\ +\infty[$ avec :

$$\lim_{a\to+\infty} \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 1\ ;$$

donc g définit une densité de probabilité.

3. m désigne un nombre positif.

$P(X \leqslant m) = \displaystyle\int_0^m g(x)\,\mathrm{d}x = I(m) = -\mathrm{e}^{-m^2} + 1$.

$P(X \leqslant m) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -\mathrm{e}^{-m^2} + 1 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-m^2} = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -m^2 = -\ln(2) \Leftrightarrow m^2 = \ln(2)$

Or m est positif donc $m = \sqrt{\ln(2)}$.

31 **1.** Le nombre a est tel que $\displaystyle\int_{-1}^1 a(1 - x^2)\,\mathrm{d}x = 1$.

Or : $\displaystyle\int_{-1}^1 a(1-x^2)\,\mathrm{d}x = \left[a\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}a$;

donc $\dfrac{4}{3}a = 1$ soit $a = \dfrac{3}{4}$.

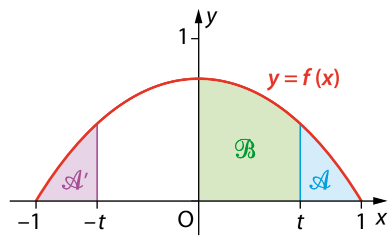
Ainsi, f est définie sur $[-1\ ;\ 1]$ par $f(x) = \dfrac{3}{4}(1 - x^2)$.

2. a) f est définie sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$ centré en 0 et, pour tout x de $[-1\ ;\ 1]$, $f(-x) = f(x)$; donc f est une fonction paire. Ainsi, $\mathscr{D}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Pour tout nombre t de $[0\ ;\ 1]$:

$P(X \geqslant t) = \text{aire}(\mathscr{A})$ et $P(X \leqslant -t) = \text{aire}(\mathscr{A}')$.

En raison de la symétrie, $\text{aire}(\mathscr{A}) = \text{aire}(\mathscr{A}')$; donc :

$$P(X \geqslant t) = P(X \leqslant -t).$$



b) $P(0 < X \leqslant t) = \text{aire}(\mathscr{B}) = 0{,}5 - \text{aire}(\mathscr{A})$; donc :

$$P(0 \leqslant X \leqslant t) = \frac{1}{2} - P(X \geqslant t).$$

32 *Corrigé sur le site élève.*

33 **1.** $\forall\, t \in [0\ ;\ 1]$, $F(t) = P(X \leqslant t) = \dfrac{\pi t^2}{\pi} = t^2$.

2. a) $F(t) = P(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) f est continue et positive sur $[0\ ;\ 1]$; donc la fonction F est dérivable sur $[0\ ;\ 1]$ et $F' = f$.
c) $\forall\, t \in [0\ ;\ 1]$, $f(t) = F'(t) = 2t$.

34 **1.** $\forall\, t \in [0\ ;\ R]$, $F(t) = P(Y \leqslant t) = \dfrac{\frac{4\pi t^3}{3}}{\frac{4\pi R^3}{3}} = \dfrac{1}{R^3}t^3$.

2. a) $\forall\, t \in [0\ ;\ R]$, $F(t) = P(Y \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$.

Or f est continue et positive sur $[0\ ;\ R]$, donc la fonction F est dérivable sur $[0\ ;\ R]$ et $F' = f$.

b) $\forall\, t \in [0\ ;\ R]$, $f(t) = F'(t) = \dfrac{3}{R^3}t^2$.

c) $E(Y) = \displaystyle\int_0^R t\,f(t)\mathrm{d}t = \int_0^R \frac{3}{R^3}t^3\,\mathrm{d}t = \left[\frac{3}{4R^3}t^4\right]_0^R$; $E(Y) = \dfrac{3}{4}R$.

LOI UNIFORME

35 **1. a)** $P(X < 0) = \dfrac{\text{longueur de } [-3\ ;0]}{\text{longueur de } [-3\ ;7]} = 0{,}3$.

b) L'événement « $|X| \leqslant 5$ » signifie :

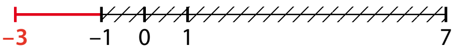
« $X \in [-3\ ;\ 7]$ » et « $-5 \leqslant X \leqslant 5$ ».

Donc $P(|X| \leqslant 5) = P(-3 \leqslant X \leqslant 5) = 0{,}8$.

c) L'événement « $X < 0$ » et « $|X| > 1$ » signifie :

« $X \in [-3 ; 0]$ » et « $X < -1$ » ou « $X > 1$ ».

c'est-à-dire « $-3 \leqslant X < -1$ ».



$$P\big((X<0)\cap(|X|>1)\big) = P(-3 \leqslant X < -1) = 0{,}2.$$

d) L'événement « $X \geqslant 0$ » ou « $X \leqslant 1$ » signifie :

« $X \in [-3 ; 7]$ » (événement certain).

Donc $P\big((X \geqslant 0)\cup(X \leqslant 1)\big) = 1$.

2. Tout intervalle I, centré en 0 et contenu dans [–3 ; 7], est inclus dans [–3 ; 3] ; donc, il vérifie :

$$P(X \in I) \leqslant P\big(X \in [-3 ; 3]\big) \text{ soit } P(X \in I) \leqslant 0{,}6.$$

Ainsi, il n'existe pas d'intervalle I centré en 0 tel que :

$$P(X \in I) = 0{,}7.$$

36 **1.** X est la variable aléatoire qui indique le nombre choisi au hasard dans $I = [-\alpha ; \alpha]$.

$P\left(X \in \left[-\sqrt{2} ; \sqrt{8}\right]\right)$ est définie si, et seulement si, $\left[-\sqrt{2} ; \sqrt{8}\right]$ est contenu dans I c'est-à-dire $\alpha \geqslant 2\sqrt{2}$.

$$P\left(X \in \left[-\sqrt{2} ;\ \sqrt{8}\right]\right) = 0{,}3 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{2}}{2\alpha} = \frac{3}{10} \Leftrightarrow \alpha = 5\sqrt{2}.$$

Ainsi $I = \left[-5\sqrt{2} ;\ 5\sqrt{2}\right]$.

2. Alors $P\left(X \in \left[\sqrt{2} ; \sqrt{18}\right]\right) = \dfrac{2\sqrt{2}}{10\sqrt{2}} = 0{,}2$.

37 **1.** On note X la variable aléatoire qui indique l'instant (en min) d'arrivée du bus après 10 h.

X suit la loi uniforme sur [0 ; 30]. L'événement A « l'attente dure dix minutes ou plus » signifie « $X \geqslant 10$ ».

$$P(A) = P(X \geqslant 10) = \frac{\text{longueur de } [10 ; 30]}{\text{longueur de } [0 ; 30]} = \frac{2}{3}.$$

2. On désigne par B l'événement « à 10 h 15 le bus n'est pas arrivé » et par C l'événement « l'attente dure au moins 25 min ».

$$P_B(C) = P_{X \geqslant 15}(X \geqslant 25) = \frac{P\big((X \geqslant 15) \text{ et } (X \geqslant 25)\big)}{P(X \geqslant 15)}$$

$$P_B(C) = \frac{P(X \geqslant 25)}{P(X \geqslant 15)} = \frac{5}{30} \div \frac{15}{30} = \frac{1}{3}.$$

38 **1.** T suit la loi uniforme sur [25 ; 45]. Sa densité f est définie sur [25 ; 45] par $x \mapsto \dfrac{1}{20}$.

2. a) $P(T = 30) = 0$.

b) $P(T < 30) = \dfrac{\text{longueur de } [25 ; 30[}{\text{longueur de } [25 ; 45]} = \dfrac{5}{20} = \dfrac{1}{4}$.

c) $P(T > 30) = \dfrac{15}{20} = \dfrac{3}{4}$.

d) $P(35 \leqslant T \leqslant 37) = \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10}$.

3. $E(T) = \dfrac{25+45}{2} = 35$ min. En moyenne, sur un grand nombre de visites, Ben arrive à 8 h 35.

39 **1.** La densité de loi de X est définie sur [8 ; 12] par :

$$f : x \mapsto \frac{1}{4}.$$

2. $P(X < 9{,}5) = \dfrac{\text{longueur de } [8 ; 9{,}5[}{\text{longueur de } [8 ; 12]} = \dfrac{1{,}5}{4} = \dfrac{3}{8}$.

3. L'événement R « l'usager doit attendre la rame suivante » signifie « $X \leqslant 10$ » :

$$P(R) = P(X \leqslant 10) = \frac{1}{2}.$$

40 *Corrigé sur le site élève.*

LOIS EXPONENTIELLES

41 **1.** T est la variable aléatoire qui indique le temps de réparation (en h).

$$P(T > 2) = 1 - P(T \leqslant 2) = 1 - \int_0^2 e^{-x}\,dx = e^{-2} \approx 0{,}135.$$

2. T suit une loi exponentielle qui est donc « sans mémoire ».

$$P_{T \geqslant 3}(T \geqslant 4) = P(T \geqslant 1) = e^{-1} \approx 0{,}368.$$

42 **1.** f est définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$; donc, sa dérivée l'est par $f'(x) = -\lambda^2 e^{-\lambda x}$.

La tangente T_A a pour équation $y = f'(0)x + f(0)$ avec $f'(0) = -\lambda^2$ et $f(0) = \lambda$.

Donc $T_A : y = -\lambda^2 x + \lambda$.

2. T_A coupe l'axe des abscisses en B. L'abscisse de B est définie par $-\lambda^2 x + \lambda = 0$ donc $x = \dfrac{1}{\lambda} = \lambda^{-1}$. Ainsi $B(\lambda^{-1} ; 0)$.

3. $\text{aire}(AOB) = \dfrac{1}{2} \times OB \times OA = \dfrac{1}{2}\lambda^{-1}\lambda = \dfrac{1}{2}$ u.a.

Or, l'aire sous la courbe $\mathcal{B}$ sur $[0 ; +\infty[$ vaut 1 u.a. ; donc [AB] partage en deux parties de même aire le domaine limité par les axes et la courbe $\mathcal{B}$.

43 **1.** T suit une loi exponentielle ; donc, cette loi de durée de vie est « sans vieillissement ».

$$P_{T \geqslant 1\,000}(T \geqslant 2\,000) = P(T \geqslant 1\,000) = 1 - P(T < 1\,000)$$
$$= 1 - 0{,}095 = 0{,}905.$$

2. • Pour déterminer la valeur du paramètre, on résout équation d'inconnue λ :

$$P(T \leqslant 1000) = 0{,}095, \text{ soit } \int_0^{1000} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 0{,}095.$$

$$1 - e^{-1000\lambda} = 0{,}095 \Leftrightarrow e^{-10000\lambda} = 0{,}905$$
$$\Leftrightarrow -1000\lambda = \ln(0{,}905)$$
$$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln(0{,}905)}{1000}.$$

• On résout alors l'équation d'inconnue t :

$$P(T \leqslant t) = 0{,}5 \text{ soit } \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 0{,}5.$$

$$1 - e^{-\lambda t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-\lambda t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda t = -\ln(2) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

D'où, la valeur de la demi-vie :

$$t_{1/2} = -\frac{1000\ln(2)}{\ln(0{,}905)} \text{ soit } t_{1/2} \approx 6\,944 \text{ h}.$$

44 **1.** On résout l'équation d'inconnue t :

$$P(X \leqslant t) = P(X > t).$$

$$P(X \leqslant t) = P(X > t) \Leftrightarrow P(X \leqslant t) = 1 - P(X \leqslant t)$$

$$\Leftrightarrow P(X \leqslant t) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\lambda t = -\ln(2)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln(2)}{\lambda}.$$

Ainsi, la demi-vie associée à X est $t_{1/2} = \dfrac{\ln(2)}{\lambda}$.

2. Si $t_{1/2} = 99$ alors $\lambda = \dfrac{\ln(2)}{t_{1/2}} = \dfrac{\ln(2)}{99}$.

$$P(100 \leqslant X \leqslant 200) = \int_{100}^{200} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = e^{-100\lambda} - e^{-200\lambda}$$

$$= e^{-\frac{100\ln(2)}{99}} - e^{-\frac{200\ln(2)}{99}} \approx 0{,}250.$$

45 **1. a)** L'expression de la demi-vie $t_{1/2} = \dfrac{\ln(2)}{\lambda}$ a été obtenue, par exemple, dans l'exercice 22, **2. a)** ou dans l'exercice 44.

Pour le carbone 14 : $\lambda = \dfrac{\ln(2)}{t_{1/2}} = \dfrac{\ln(2)}{5568}$.

$$P(X < 100) = \int_0^{1000} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = 1 - e^{-1000\lambda} \approx 0{,}117.$$

b) $P(X < x) = 0{,}2 \Leftrightarrow \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt = 0{,}2$

$$\Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda x} = 0{,}2 \Leftrightarrow e^{-\lambda x} = 0{,}8$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\ln(0{,}8)}{\lambda}.$$

D'où, une valeur approchée : $x \approx 1792$ ans.

2. a) Pour le césium $\lambda = \dfrac{\ln(2)}{t_{1/2}} = \dfrac{\ln(2)}{30}$.

$$P(X < 1\,000) = 1 - e^{-1000\lambda} \approx 1.$$

b) $x = -\dfrac{\ln(0{,}8)}{\lambda}$ donc $x \approx 10$ ans.

46 *Corrigé sur le site élève.*

47 **1.** D'après ①, l'événement « $T \geqslant t$ » signifie :

« $T_1 \geqslant t$ » ou « $T_2 \geqslant t$ » ou « $T_3 \geqslant t$ ».

$$P(T \geqslant t) = P\big((T_1 \geqslant t) \cup (T_2 \geqslant t) \cup (T_3 \geqslant t)\big)$$

$$P(T \geqslant t) = P(T_1 \geqslant t) + P(T_2 \geqslant t) + P(T_3 \geqslant t)$$
$$- P\big((T_1 \geqslant t) \cap (T_2 \geqslant t)\big) - P\big((T_1 \geqslant t) \cap (T_3 \geqslant t)\big)$$
$$- P\big((T_2 \geqslant t) \cap (T_3 \geqslant t)\big) + P\big((T_1 \geqslant t) \cap (T_2 \geqslant t) \cap (T_3 \geqslant t)\big)$$

Or :

- $P(T_1 \geqslant t) = P(T_2 \geqslant t) = P(T_3 \geqslant t) = p$

avec : $\quad p = 1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx = e^{-\lambda t}$;

- en raison de l'indépendance mutuelle du fonctionnement de ces composants :

$$P\big((T_1 \geqslant t) \cap (T_2 \geqslant t)\big) = P(T_1 \geqslant t) \times P(T_2 \geqslant t) = p^2,$$

et de même :

$$P\big((T_1 \geqslant t) \cap (T_3 \geqslant t)\big) = P\big((T_2 \geqslant t) \cap (T_3 \geqslant t)\big) = p^2 ;$$

- enfin, $P\big((T_1 \geqslant t) \cap (T_2 \geqslant t) \cap (T_3 \geqslant t)\big) = p^3$.

Donc $P(T \geqslant t) = 3p - 3p^2 + p^3$, soit :

$$P(T) = 3e^{-\lambda t} - 3e^{-2\lambda t} + e^{-3\lambda t} \quad [1].$$

2. a) La proposition ② s'énonce :

« le système ne fonctionne pas lorsqu'aucun de ses composants fonctionne ».

b) L'événement « $T < t$ » signifie :

« $T_1 < t$ » et « $T_2 < t$ » et « $T_3 < t$ ».

$$P(T < t) = P\big((T_1 < t) \cap (T_2 < t) \cap (T_3 < t)\big) ;$$

d'où, en raison de l'indépendance mutuelle du fonctionnement de ces composants :

$$P(T < t) = P(T_1 < t) \times P(T_2 < t) \times P(T_3 < t) = (1-p)^3.$$

Ainsi $P(T \geqslant t) = 1 - (1 - p)^3$, soit :

$$P(T \geqslant t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^3 \quad [2].$$

Note. En développant l'expression [2], on retrouve l'expression [1].

3. La méthode issue de la proposition ② est plus simple à mettre en œuvre.

EXERCICES DE SYNTHÈSE

48 **1. a)** $P(50 \leqslant D \leqslant 100) = \int_{50}^{100} \lambda e^{-\lambda x}\, dx$

$P(50 \leqslant D \leqslant 100) = e^{-50\lambda} + e^{-100\lambda}$ avec $\lambda = \dfrac{1}{82}$

d'où : $P(50 \leqslant D \leqslant 100) \approx 0{,}248$.

b) $P(D \geqslant 300) = 1 - P(D \leqslant 300) = 1 - \int_0^{300} \lambda e^{-\lambda x}\, dx$

$$P(D \geqslant 300) = e^{-300\lambda} \approx 0{,}026.$$

2. La loi de D est une loi exponentielle ; donc, elle est « sans mémoire » ; d'où :

$$P_{D \geqslant 300}(D \geqslant 325) = P(D \geqslant 25) = e^{-25\lambda} \approx 0{,}737.$$

3. $d_m = E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$. Ainsi $d_m = 82$ km.

4. a) Pour un autocar pris au hasard dans le parc de l'entreprise, on note S l'événement « l'autocar n'a subi aucun incident après avoir parcouru d_m km » c'est-à-dire « $D \geqslant d_m$ ».

Alors :

$$p = P(S) = 1 - \int_0^{d_m} \lambda e^{-\lambda d_m}\, dx = e^{-\lambda d_m} = e^{-\lambda \times \frac{1}{\lambda}} = e^{-1}.$$

X_{d_m} indique le nombre de réalisations de S lors de la répétition de 96 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes associées à S ; donc X_{d_m} suit la loi $\mathcal{B}(96 ; e^{-1})$.

b) Le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d_m km est : $E(X_{d_m}) = 96e^{-1} \approx 35$.

49 *Corrigé sur le site élève.*

50 **1. a)** $p = P(T \leqslant 1) = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda x}\, dx = 1 - e^{-\lambda}$; d'où :

$$p = 1 - e^{-\frac{1}{3}} \approx 0{,}2835.$$

b) $P(T > t) = 1 - P(X \leqslant t) = 1 - \int_0^t \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x}\, dx = e^{-\frac{1}{3}t}$.

2. $P(A)=P(T\geqslant 1)=e^{-\frac{1}{3}}\approx 0{,}716\ 5$.

$P(B)=P(T\geqslant 3)=e^{-\frac{1}{3}\times 3}=e^{-1}\approx 0{,}367\ 9$.

T suit une loi exponentielle. Cette loi de durée de vie étant sans vieillissement, on a :

$$P_A(B)=P_{T\geqslant 1}(T\geqslant 3)=P(T\geqslant 2)=e^{-\frac{2}{3}}=0{,}513\ 4.$$

3. a) Le taux de remboursement à prévoir correspond à la probabilité $P(T\leqslant 1)$; donc, d'après la question **1. a)**, le taux est d'environ 28,35 %.

b) On résout l'inéquation d'inconnue t :

$$P(X\leqslant t)\leqslant 0{,}08 \quad\text{soit}\quad 1-e^{-\frac{1}{3}t}\leqslant 0{,}08.$$

$$1-e^{-\frac{1}{3}t}\leqslant 0{,}08 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{3}t}\geqslant 0{,}92 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}t\geqslant \ln(0{,}92)$$

$$\Leftrightarrow t<-3\ln(0{,}92).$$

Or $-3\ln(0{,}92)\approx 0{,}25$ (par défaut). On peut donc estimer que le fabricant aurait dû proposer une durée de garantie, t_0, d'environ un quart d'année, soit 3 mois.

4. a) Pour un jouet pris au hasard dans le lot, l'événement S « le jouet sera remboursé » a pour probabilité $p=1-e^{-\frac{1}{3}}$.

X indique le nombre de réalisations de S lors de la répétition de 3 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes associées à S ; donc X suit la loi $\mathcal{B}(3\ ;p)$.

D'où, pour tout entier k tel que $0\leqslant k\leqslant 3$:

$$P(X=k)=\binom{3}{k}p^k(1-p)^{3-k}.$$

Loi de X :

k	1	2	3	4
$P(X=k)$	$(1-p)^3$ 0,367 9	$3p(1-p)^2$ 0,436 6	$3p^2(1-p)^3$ 0,172 7	p^3 0,022 8

b) $E(X)=3p$ d'où $E(X)\approx 0{,}85$.

AVEC LES TICE

51 **1. a)** f est dérivable sur $[0\ ;1[$ et, pour tout nombre x de $[0\ ;1[$:

$$f'(x)=\frac{2}{1-x} \text{ donc } f'(x)>0.$$

On pose $U=1-x$. Alors $f(x)=-2\ln(U)$.

$\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)=0^+$ et $\lim\limits_{U\to 0^+}[-2\ln(U)]=+\infty$; donc :

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=+\infty.$$

Tableau de variation :

x	0	1
f'	+	–
f	0 ↗	$+\infty$

b) f est continue et strictement croissante sur $[0\ ;1[$; donc, l'image de $[0\ ;1[$ est l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.

Ainsi, l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire Y est l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.

2. a)

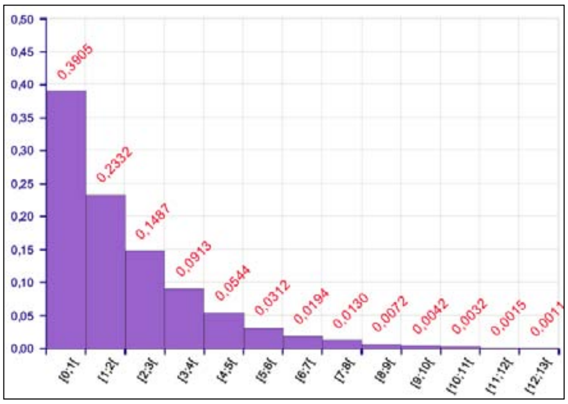
	A	B	C
1	Valeurs de X	Valeurs de Y	[0;1[
2	=ALEA()	=-2*LN(1-A2)	=NB.SI(B1:B10001;"<1")/10000

D
[1;2[
=(NB.SI(B2:B10001;"<2")-NB.SI(B2:B10001;"<1"))/10000

	A	B	C	D	E	F
1	Valeurs de X	Valeurs de Y	[0;1[	[1;2[	[2;3[	[3;4[
2	0,9134216309	4,893	0,3905	0,2332	0,1487	0,0913
3	0,7019653320	2,421				

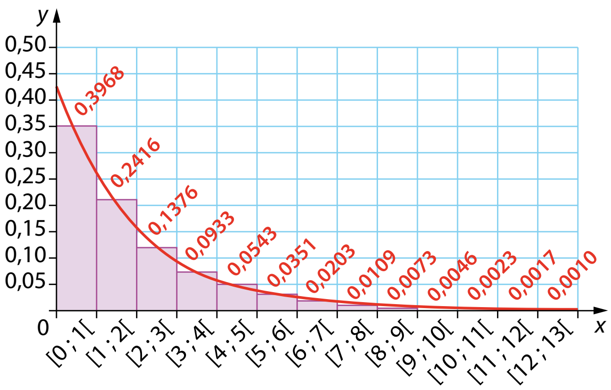
G	H	I	J	K	L	M	N	O
[4;5[	[5;6[	[6;7[	[7;8[	[8;9[	[9;10[	[10;11[	[11;12[	[12;13[
0,0544	0,0312	0,0194	0,0130	0,0072	0,0042	0,0032	0,0015	0,0011

b) Histogramme des fréquences.



c) On peut conjecturer que la variable aléatoire Y suit une loi exponentielle.

d) L'affichage d'une courbe de tendance de type exponentiel qui ajuste l'histogramme semble confirmer la conjecture.



Note. Dans cette approche, seule l'allure de la courbe d'ajustement est recherchée et non la détermination de son équation et la justification de la technique utilisée.

3. a) $\forall\, t\in[0\ ;+\infty[$:

$$Y\leqslant t\Leftrightarrow -2\ln(1-X)\leqslant t$$

$$Y\leqslant t\Leftrightarrow \ln(1-X)\geqslant -\frac{t}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1-X\geqslant e^{-\frac{t}{2}}$$

$$Y\leqslant t\Leftrightarrow X\leqslant 1-e^{-\frac{t}{2}}.$$

Or, X suit la loi uniforme sur $[0\ ;1]$; donc :

$$P(Y\leqslant t)=P\left(X\leqslant 1-e^{-\frac{t}{2}}\right)=\frac{\text{longueur de}\left[0\ ;\ 1-e^{-\frac{t}{2}}\right]}{\text{longueur de}\,[0\ ;\ 1]}$$

soit $P(Y\leqslant t)=1-e^{-\frac{t}{2}}$.

b) • $F(t) = P(Y \leqslant t) = \int_0^t f(x)\,dx$.

• f est continue et positive sur $[0\,;+\infty[$; donc, F est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $F' = f$.

Ainsi, pour tout nombre $t \geqslant 0$:

$$f(t) = F'(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}.$$

• Donc, f est la densité d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{2}$.

c) On peut comparer les fréquences observées sur chacun des intervalles I_n de l'expérimentation avec les probabilités :

$$P(Y \in I_n) = \int_n^{n+1} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\,dx \quad (n \text{ entier de } 0 \text{ à } 12).$$

Tableau des probabilités ci-dessous :

I_n	[0 ; 1[	[1 ; 2[	[2 ; 3[	[3 ; 4[	[4 ; 5[
$P(Y \in I_n)$	0,393	0,239	0,145	0,088	0,053

I_n	[5 ; 6[	[6 ; 7[	[7 ; 8[	[8 ; 9[
$P(Y \in I_n)$	0,032	0,020	0,012	0,007

I_n	[9 ; 10[	[10 ; 11[	[11 ; 12[	[12 ; 13[
$P(Y \in I_n)$	0,004	0,003	0,002	0,001

On vérifie que les résultats de l'expérimentation sont bien en accord avec la loi obtenue pour la variable aléatoire Y.

52 **1.** n désignant un entier naturel, on a :

$$P(X \leqslant n) = \int_0^n ke^{-kx}\,dx = 1 - e^{-kn}.$$

$$\begin{aligned} P(X \leqslant n) \leqslant 1 - a &\Leftrightarrow 1 - e^{-kn} \leqslant 1 - a \\ &\Leftrightarrow e^{-kn} \geqslant a \\ &\Leftrightarrow -kn \geqslant \ln(a) \\ &\Leftrightarrow n \leqslant -\frac{\ln(a)}{k}. \end{aligned}$$

Le plus grand entier solution est :

$$n_0 = E\left(-\frac{\ln(a)}{k}\right)$$

où $E(x)$ désigne la partie entière du nombre x.

2. a) L'algorithme utilise la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = P(X \leqslant x) = 1 - e^{-kx}.$$

b) Mise en œuvre de l'algorithme proposé :

```
   VARIABLES
     a EST_DU_TYPE NOMBRE
     k EST_DU_TYPE NOMBRE
     n EST_DU_TYPE NOMBRE
   DEBUT_ALGORITHME
     LIRE k
     LIRE a
     n PREND_LA_VALEUR 0
     TANT_QUE (F1(n)<=1-a) FAIRE
       DEBUT_TANT_QUE
       n PREND_LA_VALEUR n+1
       FIN_TANT_QUE
     AFFICHER n
   FIN_ALGORITHME

  Fonction numérique utilisée :
  F1(x)=1-exp(-k*x)
```

b) Test avec AlgoBox

$(k\,;a)$	Valeur affichée	Valeur exacte
(0,1 ; 0,05)	30	29
(0,01 ; 0,1)	231	230
(0,1 ln(2) ; 0,2)	24	23

c) Étude de l'algorithme proposé

Le test des couples indique un décalage de 1 entre la valeur affichée et la valeur exacte calculée.

Dans la boucle « tant que », la condition est testée avant d'exécuter la tâche ; donc, pour la dernière valeur de n, l'instruction n prend la valeur $n + 1$ est exécutée ; d'où le décalage de 1 pour la valeur affichée.

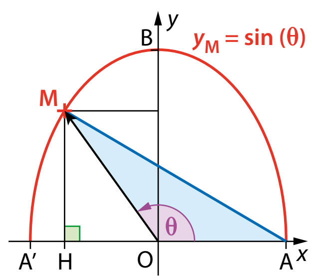
Modification possible :

```
   VARIABLES
     a EST_DU_TYPE NOMBRE
     k EST_DU_TYPE NOMBRE
     n EST_DU_TYPE NOMBRE
   DEBUT_ALGORITHME
     LIRE k
     LIRE a
     n PREND_LA_VALEUR 0
     TANT_QUE (F1(n)<=1-a) FAIRE
       DEBUT_TANT_QUE
       n PREND_LA_VALEUR n+1
       FIN_TANT_QUE
     n PREND_LA_VALEUR n-1
     AFFICHER n
   FIN_ALGORITHME

  Fonction numérique utilisée :
  F1(x)=1-exp(-k*x)
```

Prendre toutes les initiatives

53 On exprime l'aire du triangle AOM en fonction de θ.



$$\text{aire(AOM)} = \frac{1}{2}\text{OA} \times \text{MH} = \frac{1}{2} \times 1 \times y_M$$

soit $$\text{aire(AOM)} = \frac{1}{2}\sin(\theta).$$

On note Θ la variable aléatoire qui indique la valeur de θ et S la variable aléatoire qui indique la valeur de l'aire du triangle AOM.

$$\begin{aligned} S \leqslant 0{,}25 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin(\theta) \leqslant \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \sin(\theta) \leqslant \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} \leqslant \theta \leqslant \pi. \end{aligned}$$

Or, Θ suit la loi uniforme sur $[0 ; \pi]$ et les intervalles $\left[0 ; \frac{\pi}{6}\right]$ et $\left[\frac{5\pi}{6} ; \pi\right]$ sont disjoints et de même longueur ; on a donc :

$$P(S \leqslant 0{,}25) = P\left(\Theta \in \left[0 ; \frac{\pi}{6}\right]\right) + P\left(\Theta \in \left[\frac{5\pi}{6} ; \pi\right]\right)$$

soit $P(S \leqslant 0{,}25) = 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

54 $t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$ (*cf.* exercice. **22**) et $\tau = E(T) = \frac{1}{\lambda}$.

Or, $\ln(2) < 1$ donc $t_{1/2} < \tau$. Ainsi :

$$P(t_{1/2} \leqslant T \leqslant \tau) = \int_{t_{1/2}}^{\tau} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_{t_{1/2}}^{\tau}$$

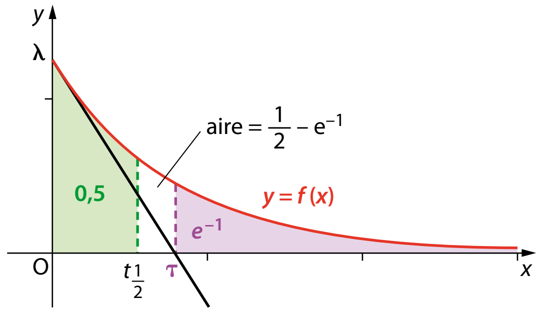
$$= -e^{-\lambda\tau} + e^{-\lambda t_{1/2}} = -e^{-\lambda \times \frac{1}{\lambda}} + e^{-\lambda \times \frac{\ln(2)}{\lambda}}$$

$$= -e^{-1} + e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2} - e^{-1}.$$

Cette probabilité est indépendante de λ.

Léa a donc raison.

Représentation graphique :



Note. τ est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à la courbe $\mathcal{B}_f$ au point d'abscisse 0 et de l'axe (Ox) (*cf.* exercice. **42**).

EXERCICES Le jour du bac (page 399)

55 *Corrigé sur le site élève.*

56 **1. a)** $\forall\, t \in [0 ; +\infty[:\ R(t) = P(X > t) = 1 - P(X \leqslant t)$

$R(t) = 1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

Or $\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = -e^{-\lambda t} + 1$; donc $R(t) = e^{-\lambda t}$.

b) $\forall\, t \in [0 ; +\infty[$, $\forall\, s \in [0 ; +\infty[$:

$$P_{X>t}(X > t+s) = \frac{P((X > t) \text{ et } (X > t+s))}{P(X > t)} = \frac{P(X > t+s)}{P(X > t)}$$

$$P_{X>t}(X > t+s) = \frac{R(t+s)}{R(t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = R(s).$$

Ainsi, cette probabilité conditionnelle ne dépend pas de t (propriété d'une loi « sans mémoire »).

2. a) $P(X > 1\,000) = R(1\,000) = e^{-0{,}26} \approx 0{,}771$.

$P(X \leqslant 1\,000) = 1 - P(X > 1\,000) \approx 0{,}229$.

b) $P_{X>1\,000}(X > 2\,000) = R(1\,000) \approx 0{,}771$.

(On applique la formule du **1. b)** avec $t = 1000$ et $s = 1000$) .

c) $$P_{X>2\,000}(X < 3\,000) = \frac{P((X > 2\,000) \text{ et } (X < 3\,000))}{P(X > 2\,000)}$$

$$P_{X>2\,000}(X < 3\,000) = \frac{P(2\,000 < X < 3\,000)}{P(X > 2\,000)}.$$

Or, $P(2\,000 < X < 3\,000) = \int_{2\,000}^{3\,000} 0{,}000\,26 e^{-0{,}000\,26x}\,dx$
$= -e^{-0{,}78} + e^{-0{,}52}$

donc :

$$P_{X>2\,000}(X < 3\,000) = \frac{e^{-0{,}52} - e^{-0{,}78}}{e^{-0{,}52}} = 1 - e^{-0{,}26} \approx 0{,}229.$$

Remarque. On pouvait prévoir ce résultat en utilisant directement la loi des nœuds.

$P_{X>2\,000}(X < 3\,000) = 1 - P_{X>2\,000}(X \geqslant 3\,000)$
$= 1 - P(X > 1\,000) \approx 0{,}229$.

57 **1. a)** La fonction φ est le produit de deux fonctions dérivables sur $[0 ; +\infty[$; donc elle est dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

$\forall\, t \in [0 ; +\infty[$, $\varphi(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$; $\varphi'(t) = \lambda e^{-\lambda t} - \lambda^2 t e^{-\lambda t} - \lambda\varphi(t)$,

d'où $\varphi(t) = e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda}\varphi'(t)$.

b) $\forall\, x \in [0 ; +\infty[$, on pose $I(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt$.

$$I(x) = \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda}\varphi(t)\right]_0^x = \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t} - te^{-\lambda t}\right]_0^x$$

soit $I(x) = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} - xe^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}$.

c) $E(T) = \lim\limits_{x \to +\infty} I(x)$.

$$I(x) = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}(-\lambda x)e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}$$

soit $I(x) = \frac{1}{\lambda}\left[-e^{-\lambda x} + (-\lambda x)e^{-\lambda x} + 1\right]$

d'où, en posant $U = -\lambda x$:

$$I(x) = \frac{1}{\lambda}\left[-e^U + Ue^U + 1\right].$$

Or , $\lim\limits_{x \to +\infty} U = -\infty$ et $\lim\limits_{U \to -\infty} e^U = \lim\limits_{U \to -\infty} Ue^U = 0$;

d'où :

$$\lim_{U \to -\infty} \frac{1}{\lambda}\left[-e^U + Ue^U + 1\right] = \frac{1}{\lambda}.$$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} I(x) = \frac{1}{\lambda}$ soit $E(T) = \frac{1}{\lambda}$.

2. a) $E(T) = 4\,000$ h ; donc $\lambda = \frac{1}{E(T)} = \frac{1}{4\,000}$ h^{-1}.

$$P(2\,000 \leqslant T \leqslant 6\,000) = \int_{2\,000}^{6\,000} \lambda e^{-\lambda t}\,dt = e^{-2\,000\lambda} - e^{-6\,000\lambda}$$

soit $P(2\,000 \leqslant T \leqslant 6\,000) = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{3}{2}} \approx 0{,}383$.

b) $P(T \geqslant \delta) = 0{,}5 \Leftrightarrow 1 - \int_0^{\delta} \lambda e^{-\lambda t} dt = \dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 1-(1-e^{-\lambda\delta}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-\frac{\delta}{E(T)}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\delta}{E(T)} = -\ln(2) \Leftrightarrow \delta = E(T)\ln(2).$$

Ainsi, $\delta = 4\,000\ln(2) \approx 2\,773$ h.

58 **1.** $P(500 \leqslant X \leqslant 1\,000) = \int_{500}^{1\,000} \lambda e^{-\lambda x}\, dx$

$P(500 \leqslant X \leqslant 1\,000) = \left[-e^{-\lambda x}\right]_{500}^{1\,000} = e^{-500\lambda} - e^{-1\,000\lambda}.$

2. Par hypothèse, $P(500 \leqslant X \leqslant 1\,000) = 0{,}25$; d'où l'équation d'inconnue λ :

$$e^{-500\lambda} - e^{-1\,000\lambda} = \frac{1}{4}.$$

On pose $X = e^{-500\lambda}$.

L'équation s'écrit :

$$X - X^2 = \frac{1}{4} \text{ soit } 4X^2 - 4X + 1 = 0.$$

Ainsi $(2X-1)^2 = 0$ donc $X = \dfrac{1}{2}$.

Par retour à l'inconnue λ :

$$e^{-500\lambda} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -500\,\lambda = -\ln(2) \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(2)}{500}.$$

D'où $\lambda \approx 0{,}001\,4$.

59 **1.** $P(T \in [t\,;+\infty[) = P(T > t) = 1 - P(T < t)$

$P\big(T \in [t\,;+\infty[\big) = 1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx$

Or $\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = -e^{-\lambda t} + 1$, donc :

$$P(T \in [t\,;+\infty[) = e^{-\lambda t}.$$

Ainsi seule **b)** est vraie.

2. $P(T \in [0\,;\,t[) = P(T \in [t\,;+\infty[) \Leftrightarrow \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx = e^{-\lambda t}$

$$\Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \Leftrightarrow e^{-\lambda t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda t = -\ln(2)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln(2)}{\lambda}.$$

Ainsi seule **a)** est vraie.

3. $P(T \leqslant 1) = 0{,}18 \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda} = \dfrac{9}{50} \Leftrightarrow e^{-\lambda} = \dfrac{41}{50}$

$$\Leftrightarrow -\lambda = \ln\left(\frac{41}{50}\right) \Leftrightarrow \lambda = -\ln\left(\frac{41}{50}\right) \Leftrightarrow \lambda = \ln\left(\frac{50}{41}\right).$$

Ainsi seule **a)** est vraie.

4. T suit une loi exponentielle, donc « sans vieillissement ».

Ainsi $P_{T\geqslant 2}(T \geqslant 3) = P(T \geqslant 1) = P(T \in [1\,;+\infty[)$.

Ainsi seule **a)** est vraie.

5. $P(T \geqslant 3) = e^{-3\lambda} = e - 0{,}6 \approx 0{,}5488$.

Ainsi seule **b)** est vraie.

6. L'examen des appareils définit un schéma de Bernoulli d'ordre $n = 10$ dont une épreuve consiste à examiner si l'appareil n'a pas eu de panne au cours des trois premières années (événement S).

$$p = P(S) = P(T \geqslant 3) = e^{-0{,}6}.$$

Ainsi, X suit une loi $\mathcal{B}(10\,;\,e^{-0{,}6})$.

$P(X=4) = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} p^4(1-p)^6 = 210e^{-2{,}4}\left(1-e^{-0{,}6}\right)^6 \approx 0{,}1607.$

Ainsi seule **c)** est vraie.

60 **A. 1. a)** L'achat des composants définit un schéma de Bernoulli d'ordre $n = 50$ dont une épreuve consiste à examiner si le composant a un défaut (événement D). La probabilité de réalisation de D est $p = 0{,}02$.

Si on note X la variable aléatoire qui indique le nombre de composants défectueux parmi les 50, alors X suit une loi $\mathcal{B}(50\,;\,0{,}02)$.

$$P(X=2) = \begin{pmatrix} 50 \\ 2 \end{pmatrix} 0{,}02^2 \times 0{,}98^{48} \approx 0{,}19.$$

b) On note A l'événement « au moins un des composants est défectueux ». $\overline{A}$ signifie « $X = 0$ ».

Ainsi :

$$P(A) = 1 - P(X=0) \text{ soit } P(A) = 1 - 0{,}98^{50} \approx 0{,}64.$$

2. Le nombre moyen de composants défectueux parmi les cinquante est :

$$E(X) = np = 50 \times 0{,}02 = 1.$$

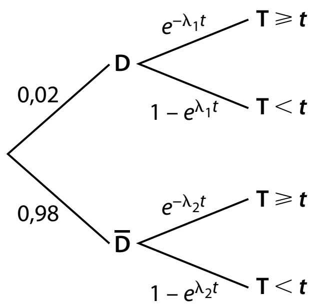
B. 1. a) Pour un composant défectueux :

$$P(T_1 \geqslant 1\,000) = 1 - \int_0^{1\,000} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\, dx = e^{-1\,000\lambda_1} = e^{-0{,}5} \approx 0{,}61.$$

b) Pour un composant sans défaut :

$$P(T_2 \geqslant 1\,000) = e^{-1\,000\lambda_2} = e^{-0{,}1} \approx 0{,}90.$$

2. Un arbre permet d'illustrer la situation.



Note.

$$P_D(T \geqslant t) = P(T_1 \geqslant t) = e^{-\lambda_1 t}$$

et $\quad P_{\overline{D}}(T \geqslant t) = P(T_2 \geqslant t) = e^{-\lambda_2 t}$.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(T \geqslant t) = P(D \cap (T_1 \geqslant t)) = P(\overline{D} \cap (T \geqslant t))$$

$$P(T \geqslant t) = 0{,}02 \times e^{-\lambda_1 t} + 0{,}98 \times e^{-\lambda_2 t}$$

soit $\quad P(T \geqslant t) = 0{,}02 \times e^{-5\times 10^{-4}t} + 0{,}98 \times e^{-10^{-4}t}$.

3. $P_{T\geqslant 1\,000}(D) = \dfrac{P\big(D \cap (T \geqslant 1\,000)\big)}{P(T \geqslant 1\,000)}$

$$P_{T\geqslant 1\,000}(D) = \frac{0{,}02 \times e^{-1\,000\lambda_1}}{0{,}02 \times e^{-1\,000\lambda_1} + 0{,}98 \times e^{-1\,000\lambda_2}}$$

$$P_{T\geqslant 1\,000}(D) = \frac{0{,}02 \times e^{-0{,}5}}{0{,}02 \times e^{-0{,}5} + 0{,}98 \times e^{-0{,}1}} \approx 0{,}01.$$

61 **1.** *Faux* : on note T_B la durée de vie (en année) d'une ampoule bleue, T_R celle d'une ampoule rouge et T_J celle d'une ampoule jaune.

$$P_{U_1}(T_R < 5) = \int_0^5 \lambda_{R1} e^{-\lambda_{R1} x} dx = 1 - e^{-5\lambda_{R1}}$$

$$= 1 - e^{-1}.$$

2. *Vraie* : d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}P(T_B<5)&=P\big(U_1\cap(T_B<5)\big)+P\big(U_2\cap(T_B<5)\big)\\&=P(U_1)\times P_{U_1}(T_B<5)+P(U_2)\times P_{U_2}(T_B<5)\\&=0,6(1-e^{-5\lambda_{B1}})+0,4(1-e^{-5\lambda_{B2}})\\&=1-0,6e^{-1,25}-0,4e^{-1}.\end{aligned}$$

3. *Vraie* : d'après la formule des probabilités totales :

$$P(5\leqslant T_J\leqslant 10)=$$
$$P\big(U_1\cap(5\leqslant T_J\leqslant 10)\big)+P\big(U_2\cap(5\leqslant T_J\leqslant 10)\big).$$

Or $P\big(U_1\cap(5\leqslant T_J\leqslant 10)\big)=P(U_1)\times P_{U_1}(5\leqslant T_J\leqslant 10)$

$$\begin{aligned}&=0,6\times\int_5^{10}\lambda_{J1}e^{-\lambda_{J1}x}\,dx\\&=0,6(e^{-5\lambda_{J1}}-e^{-10\lambda_{J1}})\\&=0,6(e^{-0,75}-e^{-1,5})\end{aligned}$$

et $P\big(U_1\cap(5\leqslant T_J\leqslant 10)\big)=0,4(e^{-5\lambda_{J2}}-e^{-10\lambda_{J2}})$

$$=0,4(e^{-0,5}-e^{-1})$$

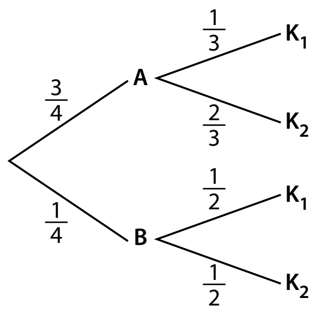
donc $P(5\leqslant T_J\leqslant 10)=0,6(e^{-0,75}-e^{-1,5})+0,4(e^{-0,5}-e^{-1})$.

4. *Faux* : la demi-vie $t_{1/2}$ d'une ampoule jaune de U_2 est définie par $P(T_{J2}<t_{1/2})=0,5$. Or :

$$\begin{aligned}P(T_{J2}\leqslant t)=0,5&\Leftrightarrow\int_0^t\lambda_{J2}e^{-\lambda_{J2}x}dx=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 1-e^{-\lambda_{J2}t}=\frac{1}{2}\\&\Leftrightarrow e^{-\lambda_{J2}t}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\lambda_{J2}t=-\ln(2)\\&\Leftrightarrow t=\frac{\ln(2)}{\lambda_{J2}}.\end{aligned}$$

Donc $t_{1/2}=\dfrac{\ln(2)}{0,1}=10\ln(2)$.

62 **A. 1.** L'arbre ci-dessous représente l'expérience :



$$P(A_1)=P(A\cap K_1)=P(A)\times P_A(K_1)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}.$$

$$P(A_2)=P(A\cap K_2)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}.$$

$$P(B_1)=P(B\cap K_1)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}.$$

$$P(B_2)=P(B\cap K_2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}.$$

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(C_1)=P(A\cap K_1)+P(B\cap K_1)=P(A_1)+P(B_1)=\frac{3}{4}.$$

$$P(C_2)=P(A\cap K_2)+P(B\cap K_2)=P(A_2)+P(B_2)=\frac{5}{8}.$$

2. Une particule entre au hasard dans K_2 avec une probabilité $p=P(C_2)=\dfrac{5}{8}$. On répète cinq fois, de manière indépendante, cette expérience qui définit un schéma de Bernoulli d'ordre 5. La variable aléatoire X, qui indique le nombre de particules dans K_2, suit une loi $\mathcal{B}\left(5\,;\,\dfrac{5}{8}\right)$.

Ainsi, $P(X=2)=\dbinom{5}{2}\left(\dfrac{5}{8}\right)^2\left(\dfrac{3}{8}\right)^3=\dfrac{3\ 375}{16\ 384}\approx 0,206.$

B. 1. La demi-vie des particules de A est telle que :

$$p(t_{1/2})=\frac{1}{2}\times 0,75=0,375.$$

$$\begin{aligned}p(t_{1/2})=\frac{1}{2}\times 0,75&\Leftrightarrow 0,75e^{-\lambda t_{1/2}}=\frac{1}{2}\times 0,75\\&\Leftrightarrow e^{-\lambda t_{1/2}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\lambda t_{1/2}=-\ln(2)\\&\Leftrightarrow\lambda=\frac{\ln(2)}{t_{1/2}}.\end{aligned}$$

D'où $\lambda=\dfrac{\ln(2)}{5\ 730}\approx 12\times 10^{-5}$.

2. Dire qu'à l'instant *t*, 10 % des particules A se sont transformées signifie que la proportion de particules A dans le gaz ne représente plus que 90 % de la proportion initiale $p(0)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}p(t)=0,9\times 0,75&\Leftrightarrow 0,75e^{-\lambda t}=0,9\times 0,75\\&\Leftrightarrow e^{-\lambda t}=0,9\Leftrightarrow-\lambda t=\ln(0,9)\\&\Leftrightarrow t=-\frac{\ln(0,9)}{\lambda}\end{aligned}$$

D'où $t=-\dfrac{5\ 730\times\ln(0,9)}{\ln(2)}\approx 871$.

Au bout d'environ 871 ans, 10 % des particules A se seront transformées en particules B.

3. On résout l'équation $p(t)=0,5$.

$$\begin{aligned}0,75e^{-\lambda t}=0,5&\Leftrightarrow e^{-\lambda t}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow-\lambda t=\ln\left(\frac{2}{3}\right)\\&\Leftrightarrow t=-\frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{\lambda}=\frac{\ln(1,5)}{\lambda}.\end{aligned}$$

D'où $t=\dfrac{5\ 730\ln(1,5)}{\ln(2)}\approx 3\ 352$.

Au bout d'environ 3 352 ans, il y aura autant de particules A que de particules B.

63 **1. a)** $\forall\, x \in [a\,;\,b],\ f(x) = \dfrac{1}{b-a}$.

b) $\mathrm{E(X)} = \dfrac{a+b}{2}$.

2. $\mathrm{V(X)} = \int_a^b (x - \mathrm{E(X)})^2 f(x)\mathrm{d}x$

$$\mathrm{V(X)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{V(X)} = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{3}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3\right]_a^b$$

$$\mathrm{V(X)} = \frac{1}{3(b-a)}\left(\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^3 - \left(a - \frac{a+b}{2}\right)^3\right)$$

$$\mathrm{V(X)} = \frac{1}{3(b-a)}\left(\frac{(b-a)^3}{8} - \frac{(a-b)^3}{8}\right) = \frac{2(b-a)^3}{24(b-a)}$$

$$\mathrm{V(X)} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

64 **1. a)** $\forall\, x \in [0\,;\,+\infty], f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

b) $\mathrm{E(X)} = \dfrac{1}{\lambda}$.

2. a) $\forall\, x \in [0\,;\,+\infty]$:

$$g(x) = \lambda\left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \mathrm{e}^{-\lambda x} = \left(\lambda x^2 - 2x + \frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda x}$$

et $\mathrm{G}(x) = (ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^{-\lambda x}$.

G est le produit de deux fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$ donc G est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$:

$$\mathrm{G}'(x) = (2ax + b)\mathrm{e}^{-\lambda x} - \lambda(ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^{-\lambda x}$$

$$\mathrm{G}'(x) = (-a\lambda x^2 + (2a - b\lambda)x + b - c\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

G est une primitive de g sur $[0\,;\,+\infty[$ si, et seulement si, pour tout $x \geqslant 0$, $\mathrm{G}'(x) = g(x)$; soit :

$$-a\lambda x^2 + (2a - b\lambda)x + b - c\lambda = \lambda x^2 - 2x + \frac{1}{\lambda}.$$

Par identification des coefficients, on obtient :

$$\begin{cases} -a\lambda = \lambda \\ 2a - b\lambda = -2 \\ b - c\lambda = \dfrac{1}{\lambda} \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = -\dfrac{1}{\lambda^2} \end{cases}.$$

Ainsi $\mathrm{G}(x) = -\left(x^2 + \dfrac{1}{\lambda^2}\right)\mathrm{e}^{-\lambda x}$.

b) Pour tout nombre $\mathrm{A} > 0$, $\mathrm{I(A)} = \int_0^{\mathrm{A}} g(x)\mathrm{d}x$.

$$\mathrm{I(A)} = [\mathrm{G}(x)]_0^{\mathrm{A}} = \left[-\left(x^2 + \frac{1}{\lambda^2}\right)\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{\mathrm{A}}$$

$$\mathrm{I(A)} = -\left(\mathrm{A}^2 + \frac{1}{\lambda^2}\right)\mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{A}} + \frac{1}{\lambda^2}.$$

c) Par définition :

$$\mathrm{V(X)} = \lim_{\mathrm{A}\to+\infty} \int_0^{\mathrm{A}} \lambda\left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \lim_{\mathrm{A}\to+\infty} \mathrm{I(A)}.$$

On pose $\mathrm{U} = -\lambda\mathrm{A}$ d'où $\mathrm{A} = -\dfrac{\mathrm{U}}{\lambda}$.

Ainsi :

$$\mathrm{I(A)} = -\left(\frac{\mathrm{U}^2}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{U}} + \frac{1}{\lambda^2}$$

soit :

$$\mathrm{I(A)} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}\left(\mathrm{U}^2\mathrm{e}^{\mathrm{U}} + \mathrm{e}^{\mathrm{U}}\right).$$

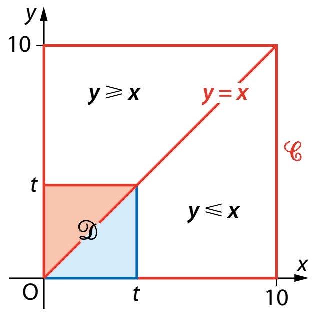
Or $\lim\limits_{\mathrm{A}\to+\infty} \mathrm{U} = -\infty$ et $\lim\limits_{\mathrm{U}\to-\infty} \mathrm{U}^2\mathrm{e}^{\mathrm{U}} = \lim\limits_{\mathrm{U}\to-\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{U}} = 0$;

d'où :

$$\lim_{\mathrm{U}\to-\infty}\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}\left(\mathrm{U}^2\mathrm{e}^{\mathrm{U}} + \mathrm{e}^{\mathrm{U}}\right)\right) = \frac{1}{\lambda^2}$$

donc $\lim\limits_{\mathrm{A}\to+\infty} \mathrm{I(A)} = \dfrac{1}{\lambda^2}$. Ainsi $\mathrm{V(X)} = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

65 **A. 1. a)** Représentation de l'événement « $\mathrm{Z} \leqslant t$ » :



Note. Dans le demi-carré inférieur de $\mathcal{D}$, $\mathrm{Y} \leqslant \mathrm{X}$; donc « $\mathrm{Z} \leqslant t$ » signifie « $\mathrm{X} \leqslant t$ ».

Dans le demi-carré supérieur de $\mathcal{D}$, $\mathrm{Y} \geqslant \mathrm{X}$; donc « $\mathrm{Z} \leqslant t$ » signifie « $\mathrm{Y} \leqslant t$ ».

D'où le domaine $\mathcal{D}$ qui représente l'événement « $\mathrm{Z} \leqslant t$ ».

b) $\mathrm{P}(\mathrm{Z} \leqslant t) = \dfrac{\text{aire}(\mathcal{C})}{\text{aire}(\mathcal{D})} = \dfrac{t^2}{100}$.

2. a) Dire que max(X ; Y) est inférieur ou égal à t signifie que X et Y sont tous deux inférieurs ou égaux à t.

Ainsi « $\mathrm{Z} \leqslant t$ » = « $\mathrm{X} \leqslant t$ » $\cap$ « $\mathrm{Y} \leqslant t$ ».

b) $\mathrm{P}(\mathrm{Z} \leqslant t) = \mathrm{P}((\mathrm{X} \leqslant t) \cap (\mathrm{Y} \leqslant t))$

$= \mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant t) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y} \leqslant t))$ (indépendance des coordonnées).

Or X et Y suivent la loi uniforme sur [0 ; 10] ; donc :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant t) = \mathrm{P}(\mathrm{Y} \leqslant t) = \frac{t}{10}.$$

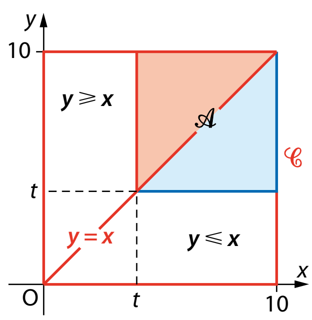
D'où $\mathrm{P}(\mathrm{Z} \leqslant t) = \dfrac{t^2}{100}$.

3. a) $\forall\, t \in [0\,;\,10],\ \mathrm{F}(t) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} \leqslant t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$.

f est continue et positive sur [0 ; 10] donc F est dérivable sur [0 ; 10] et $\mathrm{F}' = f$.

b) $\forall\, t \in [0\,;\,10],\ f(t) = \mathrm{F}'(t) = \dfrac{t}{50}$.

B. 1. a) Représentation de l'événement « $\mathrm{T} > t$ » :



Note. Dans le demi-carré inférieur de $\mathcal{D}$, $\mathrm{Y} \leqslant \mathrm{X}$; donc « $\mathrm{T} > t$ » signifie « $\mathrm{Y} > t$ ».
Dans le demi-carré supérieur de $\mathcal{D}$, $\mathrm{Y} \geqslant \mathrm{X}$; donc « $\mathrm{T} > t$ » signifie « $\mathrm{X} > t$ ».
D'où le domaine $\mathcal{A}$ qui représente l'événement « $\mathrm{T} > t$ ».

b) $\mathrm{P}(\mathrm{T} > t) = \dfrac{\text{aire}(\mathcal{A})}{\text{aire}(\mathcal{D})} = \dfrac{(10-t)^2}{100}$; d'où :

$$\mathrm{P}(\mathrm{T} \leqslant t) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{T} > t) = 1 - \frac{(10-t)^2}{100}.$$

2. a) Dire que $\min(\mathrm{X} ; \mathrm{Y})$ est strictement supérieur à t signifie que X et Y sont tous deux strictement supérieurs à t.
Ainsi « $\mathrm{T} > t$ » = « $\mathrm{X} > t$ » $\cap$ « $\mathrm{Y} > t$ ».

b) $\mathrm{P}(\mathrm{T} > t) = \mathrm{P}((\mathrm{X} > t) \cap (\mathrm{Y} > t))$
$= \mathrm{P}(\mathrm{X} > t) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y} > t)$ (indépendance des coordonnées).

Or X et Y suivent la loi uniforme sur $[0 ; 10]$; donc :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} > t) = \mathrm{P}(\mathrm{Y} > t) = \frac{10-t}{10}.$$

Ainsi $\mathrm{P}(\mathrm{T} > t) = \dfrac{(10-t)^2}{100}$; d'où :

$$\mathrm{P}(\mathrm{T} \leqslant t) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{T} > t) = 1 - \frac{(10-t)^2}{100}.$$

3. a) $\forall\, t \in [0 ; 10]$, $\mathrm{G}(t) = \mathrm{P}(\mathrm{T} \leqslant t) = \int_0^t g(x)\,\mathrm{d}x$.

g est continue et positive sur $[0 ; 10]$; donc G est dérivable sur $[0 ;10]$ et $\mathrm{G}' = g$.

b) $\forall\, t \in [0 ; 10]$, $g(t) = \mathrm{G}'(t) = \dfrac{10-t}{50}$.

66 **1.** On note $(x ; y ; z)$ le triplet des coordonnées d'un point M pris au hasard dans le cube unité. Alors :
$[0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant 1$ et $0 \leqslant z \leqslant 1] \Rightarrow 0 \leqslant x + y + z \leqslant 1$.
Donc, S prend ses valeurs dans $[0 ; 3]$.
Réciproquement, si S prend la valeur s dans $[0 ; 3]$ alors le point $\mathrm{M}\left(\dfrac{s}{3} ; \dfrac{s}{3} ; \dfrac{s}{3}\right)$ est un point du cube unité (puisque $0 \leqslant \dfrac{s}{3} \leqslant 1$) donc la somme des coordonnées vaut s.
Ainsi, l'ensemble des valeurs prises par S est $[0 ; 3]$.

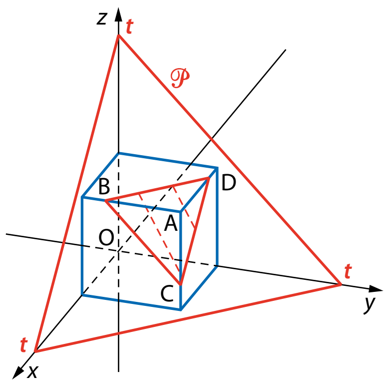
2. a) $\mathcal{S}$ est un tétraèdre trirectangle de base un demi carré de côté t et de hauteur t.

$$\mathrm{P}(\mathrm{S} \leqslant t) = v(\mathcal{S}) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}t^2\right)t = \frac{1}{6}t^3.$$

b) $\mathcal{S}$ est un tétraèdre trirectangle du type précédent tronqué aux trois coins.
On enlève, à chaque coin, un tétraèdre trirectangle de base un demi-carré de côté $t-1$ et de hauteur $t-1$.

$$\mathrm{P}(\mathrm{S} \leqslant t) = v(\mathcal{S}) = \frac{1}{6}t^3 - 3 \times \frac{1}{6}(1-t)^3 = \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}(t-1)^3.$$

c) $\mathcal{S}$ est le cube unité tronqué au sommet $\mathrm{A}(1 ; 1 ; 1)$.
On enlève le tétraèdre ABCD.



Le point B est à l'intersection du plan $\mathcal{P} : x + y + z = t$ et de la droite (AB) : $\begin{cases} x = 1 \\ z = 1 \end{cases}$.

Ses coordonnées sont définies par le système :

$$\begin{cases} x = 1 \\ z = 1 \\ x + y + z = t \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = t - 2 \\ z = 1 \end{cases}.$$

Ainsi $\mathrm{B}(1 ; t-2 ; 1)$.
De même $\mathrm{C}(1 ; 1 ; t-2)$ et $\mathrm{D}(t-2 ; 1 ; 1)$.
ABCD est un tétraèdre de base le demi-carré de côté $\mathrm{AB} = 3 - t$ et de hauteur $\mathrm{AD} = 3 - t$. D'où :

$$\mathrm{P}(\mathrm{S} \leqslant t) = v(\mathcal{S}) = 1 - \frac{1}{6}(3-t)^3.$$

3. a) $\forall\, t \in [0 ; 3]$, $\mathrm{F}(t) = \mathrm{P}(\mathrm{S} \leqslant t) = \int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t$.

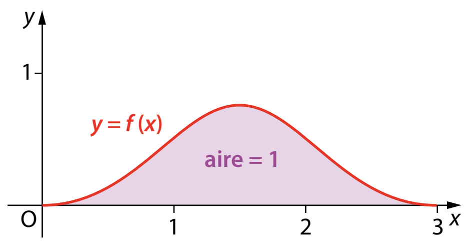
Or f est continue et positive sur $[0 ; 3]$; donc F est dérivable sur $[0 ; 3]$ et $\mathrm{F}' = f$.

b) Ainsi, la densité f est définie sur $[0 ; 3]$ par :

$$f(t) = \mathrm{F}'(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}t^2 & si\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \\[2mm] \dfrac{1}{2}t^2 - \dfrac{3}{2}(t-1)^2 & si\ 1 < t \leqslant 2 \\[2mm] \dfrac{1}{2}(3-t)^2 & si\ 2 < t \leqslant 3 \end{cases}$$

$$\text{soit } f(t) = \begin{cases} f(t) = \dfrac{1}{2}t^2 & si\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \\[2mm] -t^2 + 3t - \dfrac{3}{2} & si\ 1 < t \leqslant 2 \\[2mm] \dfrac{1}{2}t^2 - 3t + \dfrac{9}{2} & si\ 2 < t \leqslant 3 \end{cases}.$$

Représentation graphique :

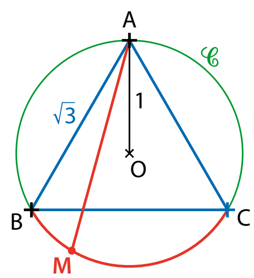


67 **1.** Dans un triangle équilatéral, on note c le côté, h la hauteur et r le rayon du cercle circonscrit.

Alors $r = \dfrac{2}{3}h$ et $h = \dfrac{c\sqrt{3}}{2}$.

On en déduit que $r = \dfrac{c\sqrt{3}}{3}$ d'où $c = r\sqrt{3}$.
Lorsque $r = 1$, on obtient $c = \sqrt{3}$.

2. a) M doit appartenir à l'arc ouvert $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$.



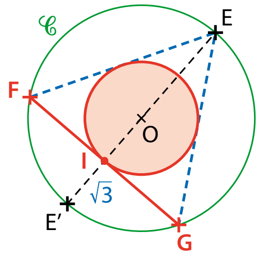
D'où $p_1 = \dfrac{\text{longueur de } \widehat{BC}}{\text{longueur du cercle}} = \dfrac{1}{3}$.

b) La corde [FG] a pour longueur $\sqrt{3}$ si, et seulement si, son milieu I est aussi le milieu du rayon [OE'] qui passe par I.

En effet, d'après le théorème de Pythagore :

$$OI^2 = OF^2 - FI^2 = 1 - FI^2 \text{ d'où } OI = \sqrt{1 - FI^2}.$$

$$FG = \sqrt{3} \Leftrightarrow FI = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow OI = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{I milieu de [OE']}.$$

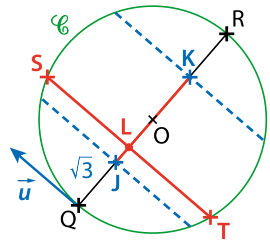


Pour que la corde [FG] ait une longueur strictement supérieure à $\sqrt{3}$, il faut, et il suffit, que I appartienne au disque ouvert de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$.

D'où $p_2 = \dfrac{\text{aire du disque de rayon } \frac{1}{2}}{\text{aire du disque de rayon 1}} = \dfrac{1}{4}$.

c) On note [QR] le diamètre tel que $\overrightarrow{QR}$ est orthognal $\vec{u}$, où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de chacune des cordes (toutes parallèles à la corde fixée).

J et K désignent les milieux des rayons [OQ] et [OR]. Alors, la corde [ST] est de longueur strictement supérieure à $\sqrt{3}$ si, et seulement si, L appartient au segment ouvert]JK[.



Ainsi $p_3 = \dfrac{\text{longueur de }]JK[}{\text{longueur de } [QR]} = \dfrac{1}{2}$.

Note. La définition des cordes change suivant le protocole mis en œuvre. On utilise, dans chaque cas, la loi uniforme mais sur des univers différents.

CHAPITRE 14 Lois normales

ACTIVITÉS

(page 406)

Activité 1

1 **a)** L'aire totale de l'histogramme est égale à 1; donc, chaque rectangle élémentaire a pour aire 0,01.
D'où les fréquences : 0,02 ; 0,04 ; 0,07 ; 0,10 ; 0,13 ; 0,14 ; 0,14 ; 0,13 ; 0,10 ; 0,07 ; 0,04 ; 0,02.
Fréquences demandées : 0,5 ; 0,94 ; 0,44.

b) $P(X < 4) = 0,5$; $P(X < 3,2) = 0,94$; $P(3,2 \leqslant X < 4) = 0,44$.
$E(X) = 3,2$; $\sigma(X) \approx 0,5$.

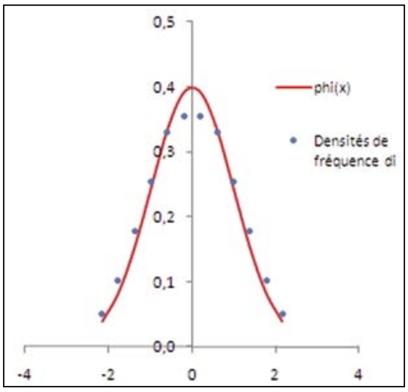
2 **a)**

Poids x_i (centre de la classe)	Fréquence f_i	Valeur centrée réduite z_i	Densités de fréquence d_i	phi(x)
2,1	0,02	-2,17	0,05	0,04
2,3	0,04	-1,77	0,10	0,08
2,5	0,07	-1,38	0,18	0,15
2,7	0,10	-0,98	0,25	0,25
2,9	0,13	-0,59	0,33	0,34
3,1	0,14	-0,20	0,36	0,39
3,3	0,14	0,20	0,36	0,39
3,5	0,13	0,59	0,33	0,34
3,7	0,10	0,98	0,25	0,25
3,9	0,07	1,38	0,18	0,15
4,1	0,04	1,77	0,10	0,08
4,3	0,02	2,17	0,05	0,04

b) $z_{i+1} - z_i = \dfrac{x_{i+1} - \mu}{\sigma} - \dfrac{x_i - \mu}{\sigma} = \dfrac{x_{i+1} - x_i}{\sigma} = \dfrac{0,2}{\sigma} = \dfrac{1}{5\sigma}$.

Or $d_i(z_{i+1} - z_i) = f_i$, donc $d_i = \dfrac{f_i}{z_{i+1} - z_i} = 5\sigma f_i$.

c)



3 **a)** $X = \sigma Z + \mu = 0,5Z + 3,2$; donc :

$$P(3,2 \leqslant X < 4) = P(3,2 \leqslant 0,5Z + 3,2 < 4) = P(0 \leqslant 0,5Z < 0,8) = P(0 \leqslant Z < 1,6).$$

b) $P(3,2 \leqslant X < 4) = P(0 \leqslant Z < 1,6)$

$$\approx P(3,2 \leqslant X < 4) = P(0 \leqslant Z < 1,6) \approx \int_0^{1,6} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

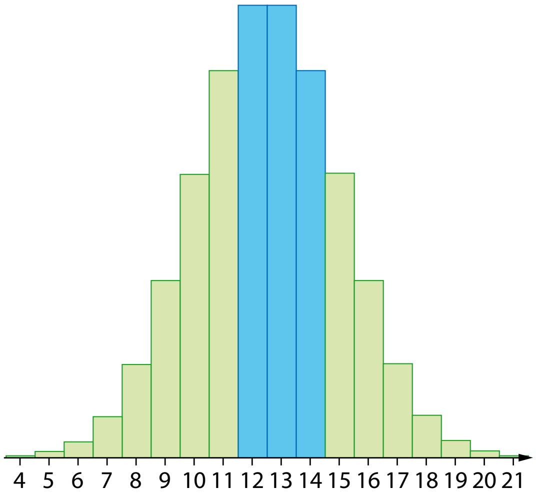
Activité 2

1 **a)** X suit la loi $\mathcal{B}\left(25, \dfrac{1}{2}\right)$.

$E(X) = 25 \times \dfrac{1}{2} = 12,5$; $\sigma(X) = \sqrt{25 \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2}} = 2,5$.

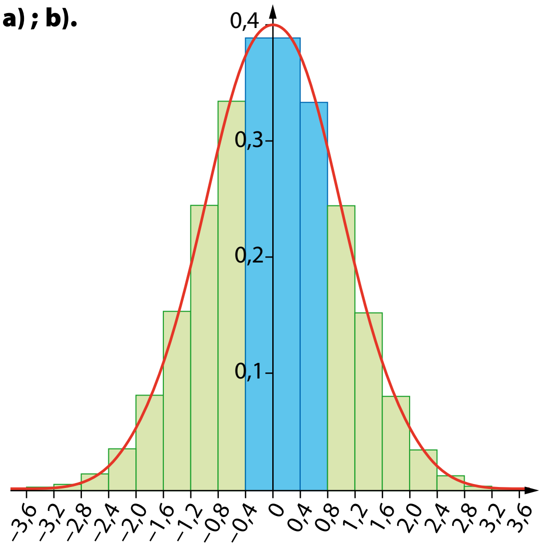
b)

k	C(25, k)	C(25, k)/2^25
0	1	0,000 000 03
1	25	0,000 000 75
2	300	0,000 008 94
3	2 300	0,000 068 55
4	12 650	0,000 377 00
5	53 130	0,001 583 40
6	177 100	0,005 277 99
7	480 700	0,014 325 98
8	1 081 575	0,032 233 45
9	2 042 975	0,060 885 40
10	3 268 760	0,097 416 64
11	4 457 400	0,132 840 87
12	5 200 300	0,154 981 02
13	5 200 300	0,154 981 02
14	4 457 400	0,132 840 87
15	3 268 760	0,097 416 64
16	2 042 975	0,060 885 40
17	1 081 575	0,032 233 45
18	480 700	0,014 325 98
19	177 100	0,005 277 99
20	53 130	0,001 583 40
21	12 650	0,000 377 00
22	2 300	0,000 068 55
23	300	0,000 008 94
24	25	0,000 000 75
25	1	0,000 000 03



c) L'aire totale est égale à 1, l'unité étant le dm^2 (rectangle de côtés 1 cm et 1 m).

2 a) ; b).



3 a) $Z = \dfrac{X - 12,5}{2,5}$ donc $X = 2,5\,Z + 12,5$.

$$\begin{aligned} P(11 < X < 15) &= P(11,5 < X < 14,5) \\ &= P(11,5 \leqslant 2,5Z + 12,5 < 14,5) \\ &= P(-1 \leqslant 2,5Z < 2) \\ &= P(-0,4 \leqslant Z < 0,8). \end{aligned}$$

b) Donc $P(11 < X < 15) = P(-0,4 \leqslant Z < 0,8) \approx \int_{-0,4}^{0,8} \varphi(x)\mathrm{d}x$.

PROBLÈME OUVERT

Chaque bille subit n fois la même épreuve de Bernoulli qui consiste à rencontrer un clou. Appelons « succès » le fait de tomber à droite et « échec » le fait de tomber à gauche.

Numérotons de 0 à n les cases d'arrivée à partir de la gauche, et appelons X la variable aléatoire indiquant la case où arrive la bille. X est aussi le nombre de succès et suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

Les proportions de billes dans chaque case sont des valeurs approchées des probabilités selon cette loi ; donc elles matérialisent grossièrement son histogramme.

Si n était supérieur à 30, cette loi serait valablement approchée par la loi normale d'espérance $\frac{n}{2}$ et d'écart-type $\frac{\sqrt{n}}{2}$. La courbe de densité de cette loi normale s'ajusterait assez bien avec cet « histogramme ». Mais lorsque $n = 8$, l'approximation est très sommaire.

EXERCICES Application (page 412)

1 **1.** $P(Z < -2,3) \approx 0,011$; $P(Z < 2,9) \approx 0,998$.

2. a) $P(Z \geqslant -2,3) \approx 0,989$;

b) $P(Z > 2,9) \approx 0,02$;

c) $P(-2,3 \leqslant Z \leqslant 2,9) \approx 0,987$;

d) $P(Z < -2,3 \text{ ou } Z > 2,9) \approx 0,013$.

2 $P(X \in [-1,5 ; 1,8]) = \Phi(1,8) - \Phi(-1,5)$
$\approx 0,964 - 0,067 \approx 0,897$,
soit $P(X \in [-1,5 ; 1,8]) \approx 0,90$.

3 a) $P(-1,2 < Z < 1,2) = \Phi(1,2) - \Phi(-1,2)$
$\approx 0,8849 - 0,1151 \approx 0,769\,8$,
soit $P(-1,2 < Z < 1,2) \approx 0,770$.

b) $P(Z < -1,2 \text{ ou } Z > 1,2) \approx 1 - 0,770$,
soit $P(Z < -1,2 \text{ ou } Z > 1,2) \approx 0,230$.

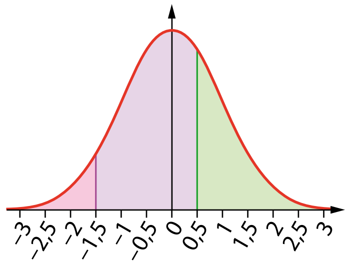
4 $P(-1,7 < Z \leqslant 2,1) = \Phi(2,1) - \Phi(-1,7)$
$\approx 0,9812 - 0,0446 \approx 0,9366$,
soit $P(-1,7 < Z \leqslant 2,1) \approx 0,937$.

5 Aire du domaine rose : $\Phi(-1,5) \approx 0,07$.

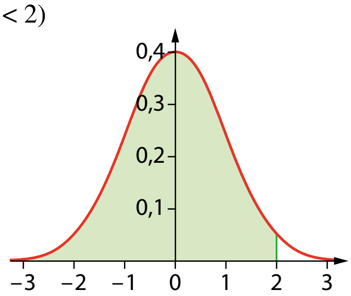
Aire du domaine mauve :

$$\Phi(0{,}05) - \Phi(-1{,}5) \approx 0{,}52 - 0{,}07 \approx 0{,}45.$$

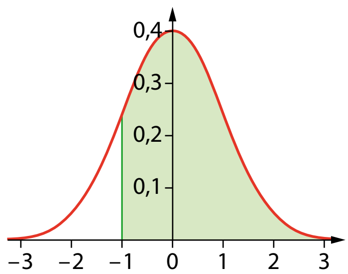
Aire du domaine vert : $1 - \Phi(0{,}05) \approx 1 - 0{,}52 \approx 0{,}48$.



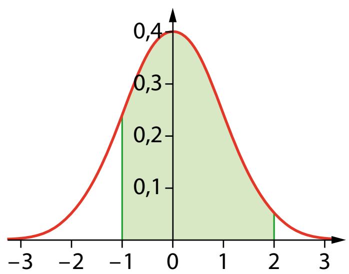
6 **a)** P(Y < 2)



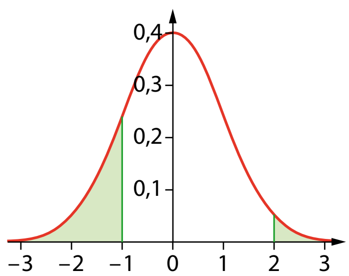
b) P(Y > –1)



c) P(–1 < Y < 2)



d) P(Y < –1 ou Y > 2)



7 $\alpha = 0{,}4$ donc $1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}8$. La condition $\Phi(x) = 0{,}8$ fournit $x \approx 0{,}84$.

8 $1 - \alpha = 0{,}7$ donc $\alpha = 0{,}3$, d'où $1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}85$.

Le rayon r de l'intervalle I est $u_{0,3}$, c'est-à-dire l'antécédent par Φ de 0,85, soit $r \approx 1{,}036$.

9 $1 - \alpha = 0{,}9$ donc $\alpha = 0{,}1$, d'où $1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}95$.

$r = u_{0,1}$: c'est l'antécédent par Φ de 0,95, soit $r \approx 1{,}65$.

10 $\alpha = \dfrac{1}{3}$, donc $1 - \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{5}{6}$.

Le rayon r de l'intervalle I est $u_{1/3}$, c'est-à-dire l'antécédent par Φ de $\dfrac{5}{6} \approx 0{,}83$, soit $r \approx 0{,}95$.

11 **a)** $P(\text{IMC} < 18{,}5) = P\left(\dfrac{\text{IMC} - 25{,}5}{4} < \dfrac{18{,}5 - 25{,}5}{4}\right)$

$= P(Z < -1{,}75) = \Phi(-1{,}75) \approx 0{,}04$

soit une proportion de 4 %.

b) $P(25 < \text{IMC} < 30)$

$= P\left(\dfrac{25 - 25{,}5}{4} < \dfrac{\text{IMC} - 25{,}5}{4} < \dfrac{30 - 25{,}5}{4}\right)$

$= P(-0{,}125 < Z < 1{,}125)$

$= \Phi(1{,}125) - \Phi(-0{,}125) \approx 0{,}87 - 0{,}45 \approx 0{,}42$

soit une proportion de 42 %.

c) $P(\text{IMC} > 30) = P\left(\dfrac{\text{IMC} - 25{,}5}{4} > \dfrac{30 - 25{,}5}{4}\right)$

$= P(Z > 1{,}125) = 1 - \Phi(1{,}125)$

$\approx 1 - 0{,}87 \approx 0{,}13$,

soit une proportion de 13 %.

12 Notons D la variable aléatoire indiquant le diamètre d'un pamplemousse pris au hasard.

a) $P(D < 11) = P\left(\dfrac{D - 12}{4} < \dfrac{11 - 12}{4}\right)$

$= P(Z < -0{,}25) = \Phi(-0{,}25) \approx 0{,}40$,

soit une proportion de 40 %.

b) $P(11 < D < 14) = P\left(\dfrac{11 - 12}{4} < \dfrac{D - 12}{4} < \dfrac{14 - 12}{4}\right)$

$= P(-0{,}25 < Z < 0{,}5) = \Phi(0{,}5) - \Phi(-0{,}25)$

$\approx 0{,}69 - 0{,}40 \approx 0{,}29$,

soit une proportion de 29 %.

c) $P(D > 14) = P\left(\dfrac{D - 12}{4} > \dfrac{14 - 12}{4}\right)$

$= P(Z > 0{,}5) = 1 - \Phi(0{,}5) \approx 1 - 0{,}69 \approx 0{,}31$,

soit une proportion de 31 %.

13 X suit la loi $\mathcal{B}\left(70, \dfrac{1}{4}\right)$.

$E(X) = 70 \times \dfrac{1}{4} = 17{,}5$; $\sigma(X) = \sqrt{70 \times \dfrac{1}{4} \times \dfrac{7}{4}} \approx 5{,}53$.

Les conditions de l'approximation sont remplies :

$n = 70 \geqslant 30$; $np = 17{,}5 \geqslant 5$; $n(1 - p) = 52{,}5 \geqslant 5$.

Donc, X suit sensiblement la loi normale d'espérance 17,5 et d'écart-type 5,53.

a) $(X < 16) = P(X < 15{,}5) \approx P\left(\dfrac{X - 17{,}5}{5{,}53} < \dfrac{15{,}5 - 17{,}54}{5{,}53}\right)$

$\approx P(Z < -0{,}36) \approx \Phi(-0{,}36)$,

soit $(X < 16) \approx 0{,}36$.

b) $(16 \leqslant X \leqslant 20) = P(15{,}5 < X < 20{,}5) \approx$

$\approx P\left(\dfrac{15{,}5 - 17{,}5}{5{,}53} < \dfrac{X - 17{,}5}{5{,}53} < \dfrac{20{,}5 - 17{,}5}{5{,}53}\right)$

$\approx P(-0{,}36 < Z < 0{,}54) \approx \Phi(0{,}54) - \Phi(-0{,}36) \approx 0{,}705 - 0{,}359$,

soit $(16 \leqslant X \leqslant 20) \approx 0{,}35$.

c) $(X > 20) = P(X > 20{,}5) \approx P\left(\dfrac{X-17{,}5}{5{,}53} < \dfrac{20{,}5-17{,}5}{5{,}53}\right)$

$\approx P(Z > 0{,}54) \approx 1 - \Phi(0{,}54) \approx 1 - 0{,}705$,

soit $(X > 20) \approx 0{,}30$.

14 X suit la loi $\mathcal{B}(100\,;0{,}1)$.

$E(X) = 100 \times 0{,}1 = 10$; $\sigma(X) = \sqrt{100 \times 0{,}1 \times 0{,}9} = 3$.

Les conditions de l'approximation sont remplies :

$n = 100 \geqslant 30$; $np = 10 \geqslant 5$; $n(1-p) = 90 \geqslant 5$.

Donc, X suit sensiblement la loi $\mathcal{N}(10, 3)$; autrement dit, $Z = \dfrac{X-10}{3}$ suit sensiblement la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

$P(8 < X \leqslant 11) = P(8{,}5 < X < 11{,}5)$

$= P\left(\dfrac{8{,}5-10}{3} < \dfrac{X-10}{3} < \dfrac{11{,}5-10}{3}\right)$

$= P(-0{,}5 < Z < 0{,}5)$

$\approx \Phi(0{,}5) - \Phi(-0{,}5) \approx 0{,}691 - 0{,}309$,

soit $P(8 < X \leqslant 11) \approx 0{,}382$.

EXERCICES Activités de recherche (page 418)

19 Taux de cholestérol

• ***Les outils***

– Loi normale générale.

– Antécédents par une fonction continue strictement croissante.

– Système linéaire de deux équations à deux inconnues.

• ***Les objectifs***

– Traduire en termes probabilistes des données statistiques.

– Déterminer les paramètres d'une loi normale.

1. $P(T < 1{,}5) = 0{,}16$; $P(1{,}5 < T < 2{,}5) = 0{,}76$; $P(T > 2{,}5) = 0{,}08$.

De deux de ces conditions, on peut déduire la troisième puisque la somme de ces trois probabilités doit être égale à 1. Gardons la première et la dernière, qui peut s'écrire :

$$P(T \leqslant 2{,}5) = 0{,}92.$$

2. a) Posons $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$. Alors :

$P(T < 1{,}5) = P\left(\dfrac{T-\mu}{\sigma} < \dfrac{1{,}5-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\dfrac{1{,}5-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}16$.

b) De même :

$P(T < 2{,}5) = P\left(\dfrac{T-\mu}{\sigma} < \dfrac{2{,}5-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\dfrac{2{,}5-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}92$.

3. a) Notons a et b, les antécédents respectifs de 0,16 et 0,92 par la fonction Φ : $a \approx -0{,}994$ et $b \approx 1{,}405$.

Les conditions précédentes s'écrivent :

$$\frac{1{,}5-\mu}{\sigma} = a \text{ et } \frac{2{,}5-\mu}{\sigma} = b,$$

soit $a\sigma + \mu = 1{,}5$ et $b\sigma + \mu = 2{,}5$.

b) On en déduit, par soustraction membre à membre :

$(b-a)\sigma = 1$, d'où $\sigma = \dfrac{1}{b-a}$, puis $\mu = \dfrac{1{,}5b - 2{,}5a}{b-a}$.

Donc $\mu \approx 1{,}91$ et $\sigma \approx 0{,}42$.

20 Gare au contrôle !

• ***Les outils***

– Schéma de Bernoulli, loi binomiale.

– Approximation normale d'une loi binomiale.

• ***Les objectifs***

– Calculer une probabilité avec la loi binomiale.

1. Contrôler un voyageur est une épreuve à deux issues : le voyageur n'a pas de titre de transport (probabilité 0,02) ou il a un titre de transport (probabilité 0,98). On effectue 1 000 fois cette épreuve dans les mêmes conditions (ce qui suppose qu'une même personne puisse être contrôlée plusieurs fois). C'est donc un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0{,}02$.

2. X suit la loi $\mathcal{B}(1\,000\,;0{,}02)$. $E(X) = 1\,000 \times 0{,}02 = 20$; $\sigma(X) = \sqrt{1000 \times 0{,}02 \times 0{,}98} \approx 4{,}43$.

3. a) $P(X > 25) = 1 - P(X \leqslant 25) \approx 1 - 0{,}89 = 0{,}11$.

b) Les conditions de l'approximation normale sont remplies :

$n = 1\,000 \geqslant 30$; $np = 20 \geqslant 5$; $n(1-p) = 980 \geqslant 5$.

$P(X \leqslant 25) = P(X \leqslant 25{,}5) \approx P\left(\dfrac{X-20}{4{,}43} \leqslant \dfrac{25{,}5-20}{4{,}43}\right)$

$\approx P(Z < 1{,}24) \approx 0{,}89$.

Donc $P(X > 25) \approx 0{,}11$.

21 Démarchage téléphonique

• ***Les outils***

– Schéma de Bernoulli, loi binomiale.

– Approximation normale d'une loi binomiale.

• ***Les objectifs***

– Calculer une probabilité avec la loi binomiale.

1. X suit la loi $\mathcal{B}(200\,;0{,}08)$.

$E(X) = 200 \times 0{,}08 = 16$; $\sigma(X) = \sqrt{200 \times 0{,}08 \times 0{,}92} \approx 3{,}84$.

2. $R = 50X$.

$P(R > 1\,000) = P(X > 20) = 1 - P(X \leqslant 20) \approx 1 - 0{,}88$, soit $P(R > 1000) \approx 0{,}12$.

3. Les conditions de l'approximation normale sont remplies :

$n = 200 \geqslant 30$; $np = 16 \geqslant 5$; $n(1-p) = 184 \geqslant 5$.

$P(X \leqslant 20) = P(X \leqslant 20{,}5) \approx P\left(\dfrac{X-16}{3{,}84} \leqslant \dfrac{20{,}5-16}{3{,}84}\right)$

$\approx P(Z < 1{,}17) \approx 0{,}88$.

Donc $P(X > 20) \approx 0{,}12$.

22 Narration de recherche

1. $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, donc $\varphi(x)$ est strictement positif pour tout x : la courbe de Gauss ne rencontre pas l'axe des abscisses.

2. En dm, la hauteur d'un pixel est $\dfrac{0{,}254}{100}$. Cherchons les x tels que $\varphi(x) < 0{,}002\,54$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} < 0{,}002\,54$$

équivaut à $e^{-\frac{x^2}{2}} < 0{,}002\ 54\sqrt{2\pi}$, soit :

$$-\frac{x^2}{2} < \ln(0{,}002\ 54\sqrt{2\pi}),$$

c'est-à-dire $x^2 > -2\ln(0{,}002\ 54\sqrt{2\pi})$.

Cela équivaut à :

$$|x| > \sqrt{-2\ln\left(0{,}002\ 54\sqrt{2\pi}\right)}.$$

Or $\sqrt{-2\ln\left(0{,}002\ 54\sqrt{2\pi}\right)} \approx 3{,}2$.

Donc I ≈ [–3,2 ; 3,2]. C'est bien ce qu'on observe sur le dessin.

23 Narration de recherche

Appelons V la variable aléatoire indiquant le volume de médicament dans le flacon.

1. V suit la loi $\mathcal{N}(101 ; 1)$.

$$P(V < 100) = P\left(\frac{V-101}{1} < \frac{100-101}{1}\right)$$
$$= P(Z < -1) = \Phi(-1),$$

soit $P(V < 100) \approx 0{,}16$.

2. V suit la loi $\mathcal{N}(\mu ; 1)$.

$$P(V < 100) = P\left(\frac{V-\mu}{1} < \frac{100-\mu}{1}\right)$$
$$= P(Z < 100-\mu) = \Phi(100-\mu)$$
$$= 0{,}05.$$

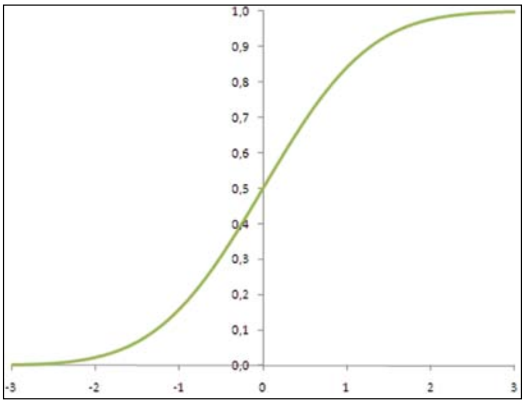
On en déduit :

$$100 - \mu \approx -1{,}645, \text{ d'où } \mu \approx 101{,}6.$$

25 TD – Afficher des probabilités selon la loi normale standard

2. Toutes les cellules de la plage D2:D62 contiennent la valeur 1 : cela confirme que $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$ pour tout x (Théorème 3, page 409).

3.



La propriété du 2 peut s'écrire :

$$\frac{\Phi(x)+\Phi(-x)}{2} = \frac{1}{2} ;$$

cela montre que la courbe a pour centre de symétrie le point $\left(0 ; \frac{1}{2}\right)$.

4. a) On lit que $\Phi(1) \approx 00{,}841\ 3$ et $\Phi(1{,}1) \approx 0{,}864\ 3$.

b) On en déduit que $1 < x < 1{,}1$, c'est-à-dire :

$$1{,}05 - 0{,}05 < x < 1{,}05 + 0{,}05 ;$$

donc 1,05 est une valeur approchée de x à 0,05 près.

c) $\Phi(1{,}05) \approx 0{,}85$ signifie que pour une variable aléatoire Z suivant la loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$:

$$P(Z \leqslant 1{,}05) \approx 0{,}85.$$

Autrement dit, sous la courbe de Gauss, le domaine situé à gauche de l'abscisse 1,05 a une aire sensiblement égale à 0,85.

27 TD – Déterminer selon $\mathcal{N}(0 ; 1)$ un intervalle centré en O, de probabilité donnée

1. b) $u_{0{,}01} \approx 2{,}576$.

Cela signifie que pour une variable aléatoire Z suivant la loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$:

$$P(-2{,}576 \leqslant Z \leqslant 2{,}576) \approx 0{,}99.$$

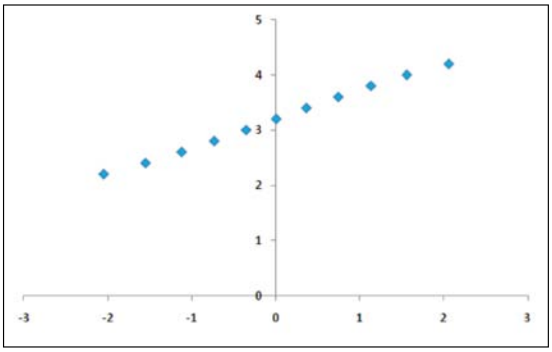
Autrement dit, sous la courbe de Gauss, le domaine situé entre l'abscisse –2,576 et l'abscisse +2,576 a une aire sensiblement égale à 0,99.

28 TD – Ajuster des données par une loi normale

1.

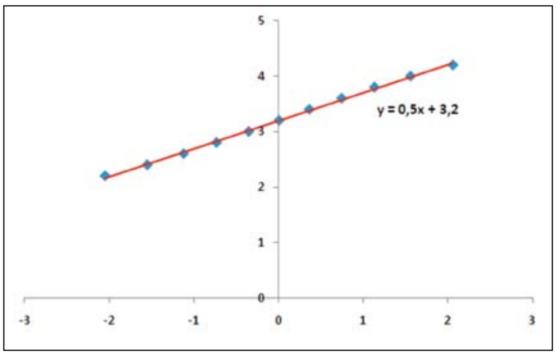
Poids x_i	Fréquence f_i	fréquence cumulée fc_i	y_i	Poids x_i
2,2	0,02	0,02	-2,05	2,2
2,4	0,04	0,06	-1,55	2,4
2,6	0,07	0,13	-1,13	2,6
2,8	0,1	0,23	-0,74	2,8
3	0,13	0,36	-0,36	3
3,2	0,14	0,50	0,00	3,2
3,4	0,14	0,64	0,36	3,4
3,6	0,13	0,77	0,74	3,6
3,8	0,1	0,87	1,13	3,8
4	0,07	0,94	1,55	4
4,2	0,04	0,98	2,05	4,2
4,4	0,02	1,00		

2. a)



b) Les points étant pratiquement alignés, une loi normale convient comme modèle de répartition des données.

3. a)



b) On lit sur l'équation l'espérance μ = 3,2 et l'écart-type σ = 0,5.

Entraînement (page 425)

DE TÊTE

29 $\Phi(-0{,}5) \approx 1 - 0{,}69 = 0{,}31$.

30 $P(-1 < Z < 1) \approx 0{,}84 - (1 - 0{,}84) = 2 \times 0{,}84 - 1 = 0{,}68$.

31 *Corrigé sur le site élève.*

32 $P(X < 15) = 0{,}5$; $E(X) = 15$; $\sigma(x) = 3$.

33 $\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)} = \dfrac{X - 80}{8}$.

34 $P(40 < X \leqslant 60) = P(40{,}5 < X \leqslant 60{,}5)$. On peut aussi répondre $P(40{,}5 < X < 60{,}5)$, ou $P(40{,}5 \leqslant X < 60{,}5)$, ou $P(40{,}5 \leqslant X \leqslant 60{,}5)$.

LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE

35 **1.** $P(Z \leqslant 1{,}2) \approx 0{,}885$.

2. a) $P(Z > 1{,}2) \approx 1 - 0{,}885 = 0{,}115$;

b) $P(Z \leqslant -1{,}2) = P(Z \geqslant 1{,}2) \approx 0{,}115$;

c) $P(-1{,}2 < Z \leqslant 1{,}2) \approx 1 - 2 \times 0{,}115 = 0{,}770$;

d) $P(Z \leqslant -1{,}2 \text{ ou } Z > 1{,}2) \approx 2 \times 0{,}115 = 0{,}230$.

36 $P(-1 < Z \leqslant 2) = \Phi(2) - \Phi(-1) \approx 0{,}977 - 0{,}159 \approx 0{,}818$.

$P(-2 \leqslant Z < 1) = \Phi(1) - \Phi(-2) \approx 0{,}841 - 0{,}023 \approx 0{,}818$.

On trouve la même valeur, car les deux domaines correspondants sous la courbe de Gauss sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

On peut aussi remarquer que :

$$\Phi(1) - \Phi(-2) = [1 - \Phi(-1)] - [1 - \Phi(2)] = \Phi(2) - \Phi(-1).$$

37 **a)** $\displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{2\pi}\int_0^1 \varphi(t)\,dt = \sqrt{2\pi}\,[\Phi(1) - \Phi(0)]$

$$\approx 2{,}506\,63 \times [0{,}841\,34 - 0{,}5],$$

soit $\displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \approx 0{,}855\,6$.

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 2\int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \approx 2 \times 0{,}855\,6$,

soit $\displaystyle\int_{-1}^1 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \approx 1{,}711\,2$.

38 $\Phi(x) - \Phi(0) = 0{,}4$, donc $\Phi(x) = 0{,}9$.
On en déduit $x \approx 1{,}28$.

39 $P(-r < X < r) = 0{,}72$ équivaut à $2\Phi(r) - 1 = 0{,}72$, c'est-à-dire $\Phi(r) = 0{,}86$. On en déduit $r \approx 1{,}08$.

40 $\Phi(u_{0,3}) = 1 - \dfrac{0{,}3}{2} = 0{,}85$. On en déduit $u_{0,3} \approx 1{,}036$.

41 Cherchons $r > 0$ tel que $P(-r < Z < r) = 0{,}84$.
$r = u_\alpha$ avec $1 - \alpha = 0{,}84$, d'où $\alpha = 0{,}16$.
Donc $\Phi(r) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}92$.
On en déduit $r \approx 1{,}405$. La largeur cherchée est $2r$, soit $2{,}81$.

42 L'intervalle I a pour rayon $u_{0,1}$, tel que :

$$\Phi(u_{0,1}) = 1 - \frac{0{,}1}{2} = 0{,}95,$$

c'est-à-dire $u_{0,1} \approx 1{,}65$.
$I \approx]-1{,}65 \,;\, 1{,}65[$.

43 *Corrigé sur le site élève.*

44 **1. a)** $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, donc :

$$\varphi'(x) = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = -x\varphi(x).$$

On en déduit :

$$\varphi''(x) = -x\varphi'(x) - \varphi(x) = x^2\varphi(x) - \varphi(x) = (x^2 - 1)\varphi(x).$$

b) $\varphi''(x)$ est du signe de $x^2 - 1$, d'où le tableau de variation de φ' ci-dessous :

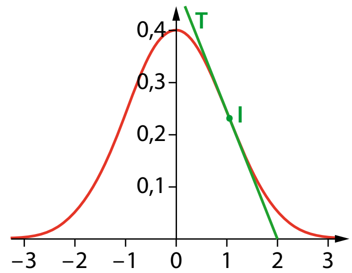
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
φ''		+		−		+	
φ'		↗	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi e}}$	↘	$\dfrac{-1}{\sqrt{2\pi e}}$	↗	

Ce tableau montre que φ' admet en -1 un maximum égal à $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi e}}$, et en 1 un minimum égal à $\dfrac{-1}{\sqrt{2\pi e}}$.

2. a) $\varphi(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi e}}$ et $\varphi'(1) = \dfrac{-1}{\sqrt{2\pi e}}$, donc T a pour équation :

$$y = \frac{-1}{\sqrt{2\pi e}}(x - 2).$$

b)



3. Il en est de même en J par symétrie autour de l'axe des ordonnées.

LOI NORMALE GÉNÉRALE

NB : ci-après, dans tous les calculs numériques concernant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, on effectue systématiquement le changement de variable $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ pour se ramener à la loi normale centrée réduite. Mais les calculatrices et les tableurs permettent de faire les calculs directement.

45 **1. a)** Z suit la loi normale standard, donc $E(Z) = 0$ et $V(Z) = 1$, d'après le théorème 4.

b) $V(Z) = E\big((Z - E(Z))^2\big) = E(Z^2)$ puisque $E(Z) = 0$.

c) $X = \sigma Z + \mu$.

2. $E(X) = E(\sigma Z + \mu) = \sigma E(Z) + \mu = \mu$.

3. $V(X) = E\big((X - E(X))^2\big) = E((\sigma Z + \mu - \mu)^2)$

$= E((\sigma Z)^2) = E(\sigma^2 Z^2) = \sigma^2 E(Z^2) = \sigma^2 V(Z) = \sigma^2$.

46 **a)** $P(X \leqslant -11) = P\left(\frac{X+4}{7} \leqslant \frac{-11+4}{7}\right)$

$= P(Z \leqslant -1) = \Phi(-1) \approx 0{,}158\,7$,

soit $P(X \leqslant -11) \approx 0{,}159$.

$P(X > 3) = P\left(\frac{X+4}{7} > \frac{3+4}{7}\right) = P(Z > 1) = P(Z < -1)$,

soit $P(X > 3) \approx 0{,}159$.

b) $P(-11 \leqslant X \leqslant 3) = P\left(\frac{X+4}{7} \leqslant \frac{-11+4}{7}\right)$

$= P(-1 \leqslant Z \leqslant 1) \approx 1 - 2 \times 0{,}1587$

$= 0{,}682\,6$,

soit $P(-11 \leqslant X \leqslant 3) \approx 0{,}683$.

c) $P(X < -11 \text{ ou } X > 3) \approx 2 \times 0{,}1587 = 0{,}317\,4$,

soit $P(X < -11 \text{ ou } X > 3) \approx 0{,}317$.

d) $P(-18 < X < 10) = P\left(\frac{-18+4}{7} \leqslant \frac{X+4}{7} \leqslant \frac{10+4}{7}\right)$

$= P(-2 \leqslant Z \leqslant 2)$,

soit $P(-18 < X < 10) \approx 0{,}954$.

e) $P(X \leqslant -18 \text{ ou } X \geqslant 10) \approx 1 - 0{,}954\,5 = 0{,}045\,5$,

soit $P(X \leqslant -18 \text{ ou } X \geqslant 10) \approx 0{,}046$;

f) $P(X \leqslant -10 \text{ ou } X \geqslant 18) = P(X \leqslant -18 \text{ ou } X \geqslant 10)$,

soit $P(X \leqslant -10 \text{ ou } X \geqslant 18) \approx 0{,}046$.

47 **1.** $P(L < 11{,}5 \text{ ou } L > 12{,}5) = P(L < 11{,}5) + P(L > 12{,}5)$

$= P\left(\frac{L-12}{0{,}2} < \frac{11{,}5-12}{0{,}2}\right) + P\left(\frac{L-12}{0{,}2} < \frac{12{,}5-12}{0{,}2}\right)$

$= P(Z < -2{,}5) + P(Z > 2{,}5) = 2P(Z < -2{,}5) = 2\Phi(-2{,}5)$

$\approx 2 \times 0{,}006\,2 \approx 0{,}012$.

Il y a 1,2 % de clous défectueux.

2. Appelons D l'événement « le clou est défectueux » ; on a :

$$P_D(L < 11{,}5) = \frac{P(L < 11{,}5 \text{ et } D)}{P(D)} = \frac{P(L < 11{,}5)}{P(D)} = 0{,}5.$$

La moitié des clous défectueux sont trop petits.

48 Notons D la variable aléatoire qui indique la durée de vie d'une ampoule prise au hasard.

a) $P(D < 2\,000) = P\left(\frac{D - 2\,200}{200} < \frac{2\,000 - 2\,200}{200}\right)$

$= P(Z < -1) = \Phi(-1)$,

soit $P(D < 2\,000) \approx 0{,}16$.

b) $P(D > 2\,400) = P\left(\frac{D - 2\,200}{200} > \frac{2\,400 - 2\,200}{200}\right)$

$= P(Z > 1) = P(Z < -1)$,

soit $P(D > 2\,400) \approx 0{,}16$.

c) $P(2000 < D < 2400) \approx 1 - 2 \times 0{,}16 = 0{,}68$.

49 Calcul des dix proportions ci-dessous.

C2 =LOI.NORMALE(B2;26,5;1,7;1)-LOI.NORMALE(A2;26,5;1,7;1)

	A	B	C
1	inf	sup	Proportion
2	23	23,7	3%
3	23,7	24,4	6%
4	24,4	25,1	10%
5	25,1	25,8	14%
6	25,8	26,5	16%
7	26,5	27,2	16%
8	27,2	27,9	14%
9	27,9	28,6	10%
10	28,6	29,3	6%
11	29,3	30	3%
12	Total		96%

Remarque. Le total ne fait pas 100 % car il y a des hommes adultes dont la longueur du pied est inférieure à 23 cm ou supérieure à 30 cm.

50 $\int_0^{1,6} \Phi(t)\,dt = \Phi(1{,}6) - \Phi(0) \approx 0{,}945 - 0{,}5 \approx 0{,}445$.

Le résultat est une valeur approchée à 0,005 près de la valeur exacte 0,44.

51 Appelons T la variable aléatoire qui indique la température d'un jour d'hiver pris au hasard.

a) $P(T < -40) = P\left(\frac{T+34}{5} < \frac{-40+34}{5}\right)$

$= P(Z < -1{,}2) = \Phi(-1{,}2)$,

soit $P(T < -40) \approx 0{,}115$.

Sur 180 jours d'hiver, cela représente environ :

$180 \times 0{,}115 \approx 21$ jours.

b) $P(T > -30) = P\left(\frac{T+34}{5} > \frac{-30+34}{5}\right)$

$= P(Z > 0{,}8) = 1 - \Phi(0{,}8) \approx 1 - 0{,}788$,

soit $P(T > -30) \approx 0{,}212$.

Sur 180 jours d'hiver, cela représente environ :

$180 \times 0{,}212 \approx 38$ jours.

52 *Corrigé sur le site élève.*

53 La variable aléatoire T indiquant la taille (en cm) d'un sous-marinier suit la loi $\mathcal{N}(170 ; 400)$.

La hauteur x cherchée doit vérifier $P(T \leqslant x) = 0{,}95$, c'est-à-dire :

$$P\left(\frac{T-170}{20} \leqslant \frac{x-170}{20}\right) = 0{,}95.$$

Cela équivaut à $\Phi\left(\frac{x-170}{20}\right) = 0{,}95$, c'est-à-dire :

$$\frac{x-170}{20} \approx 1{,}645.$$

On en déduit $x \approx 203$.

54 Appelons X la variable aléatoire indiquant la note d'un candidat pris au hasard.

X suit la loi $\mathcal{N}(9{,}25 ; 3{,}62^2)$.

1. a) $P(X < x) = 0{,}25$, donc $P\left(\frac{X - 9{,}25}{3{,}62} < \frac{x - 9{,}25}{3{,}62}\right) = 0{,}25$,

ce qui équivaut à $\Phi\left(\frac{x - 9{,}25}{3{,}62}\right) = 0{,}25$.

b) Donc $\frac{x - 9{,}25}{3{,}62} \approx -0{,}674\,5$. On en déduit $x \approx 6{,}81$.

2. $P(X < y) = 0,75$, donc $P\left(\dfrac{X-9,25}{3,62} < \dfrac{y-9,25}{3,62}\right) = 0,75$,

ce qui équivaut à $\Phi\left(\dfrac{y-9,25}{3,62}\right) = 0,75$.

Donc $\dfrac{y-9,25}{3,62} \approx 0,6745$. On en déduit $y \approx 11,69$.

55 **1.** $P(X > 76) = P\left(\dfrac{X-52}{12} > \dfrac{76-52}{12}\right) = P(Z > 2)$

$= 1 - \Phi(2) \approx 1 - 0,977$,

soit $P(X > 76) \approx 0,023$.

2. Cherchons x tel que $P(X > x) = 0,05$.

Cela équivaut à $P\left(\dfrac{X-52}{12} > \dfrac{x-52}{12}\right) = 0,05$, soit :

$$\Phi\left(\dfrac{x-52}{12}\right) = 0,95.$$

On en déduit $\dfrac{x-52}{12} \approx 1,645$, d'où $x = 72$.

56 *Corrigé sur le site élève.*

57 **a)** $P(X < -3,2) = 0,05$ équivaut à :

$$P\left(\dfrac{X-\mu}{0,4} < \dfrac{-3,2-\mu}{0,4}\right) = 0,05,$$

soit $\Phi\left(\dfrac{-3,2-\mu}{0,4}\right) = 0,05$.

On en déduit $\dfrac{-3,2-\mu}{0,4} \approx -1,645$, d'où $\mu \approx -2,54 \approx -2,5$.

b) $P(X > 5,6) = 0,05$ équivaut à $P\left(\dfrac{X-\mu}{0,4} > \dfrac{5,6-\mu}{0,4}\right) = 0,05$,

soit $\Phi\left(\dfrac{5,6-\mu}{0,4}\right) = 0,95$.

On en déduit $\dfrac{5,6-\mu}{0,4} \approx 1,645$, d'où $\mu \approx 4,94 \approx 4,9$.

58 **a)** $P(X < 100) = 0,05$ équivaut à :

$$P\left(\dfrac{X-120}{\sigma} < \dfrac{100-120}{\sigma}\right) = 0,05,$$

soit $\Phi\left(\dfrac{-20}{\sigma}\right) = 0,05$.

On en déduit $\dfrac{-20}{\sigma} \approx -1,645$, d'où $\sigma \approx 12,2$.

b) $P(X > 140) = 0,05$ équivaut à :

$$P\left(\dfrac{X-120}{\sigma} > \dfrac{140-120}{\sigma}\right) = 0,05,$$

soit $\Phi\left(\dfrac{20}{\sigma}\right) = 0,95$.

On en déduit $\dfrac{20}{\sigma} \approx 1,645$, d'où $\sigma \approx 12,2$.

APPROXIMATION NORMALE D'UNE LOI BINOMIALE

59 X suit la loi $\mathcal{B}\left(100 ; \dfrac{1}{4}\right)$.

• En utilisant la loi binomiale :

$$P(20 < X < 30) = P(X \leqslant 29) - P(X \leqslant 20).$$

Or $P(X \leqslant 29) \approx 0,8505$ et $P(X \leqslant 20) \approx 0,1488$, d'où :

$$P(20 < X < 30) \approx 0,702.$$

• L'approximation normale est possible, car :

$n = 100 \geqslant 30$; $np = 25 \geqslant 5$; $n(1-p) = 75 \geqslant 5$.

$E(X) = 100 \times \dfrac{1}{4} = 25$; $\sigma(X) = \sqrt{100 \times \dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{4}} = 2,5\sqrt{3} \approx 4,33$.

$P(20 < X < 30) = P(20,5 < X < 29,5)$

$= P\left(\dfrac{20,5-25}{2,5\sqrt{3}} < \dfrac{X-25}{2,5\sqrt{3}} < \dfrac{29,5-25}{2,5\sqrt{3}}\right)$

$= P\left(-\dfrac{1,8}{\sqrt{3}} < Z < \dfrac{1,8}{\sqrt{3}}\right) \approx \Phi(1,039) - \Phi(-1,039)$

$\approx 0,8506 - 0,1494$,

soit $P(20 < X < 30) \approx 0,701$.

60 Appelons X la variable aléatoire qui indique le nombre de gauchers dans l'échantillon.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 900$ et $p = 0,16$.

• En utilisant la loi binomiale :

a) $P(X \leqslant 140) \approx 0,379$.

b) $P(X \geqslant 150) = 1 - P(X \leqslant 149) \approx 1 - 0,694 = 0,306$.

• L'approximation normale est possible, car $n = 900 \geqslant 30$; $np = 144 \geqslant 5$; $n(1-p) = 756 \geqslant 5$.

$E(X) = 900 \times 0,16 = 144$; $\sigma(X) = \sqrt{900 \times 0,16 \times 0,84} \approx 11$.

a) $P(X \leqslant 140) = P(X \leqslant 140,5)$

$= P\left(\dfrac{X-144}{11} \leqslant \dfrac{140,5-144}{11}\right)$

$\approx P(Z \leqslant -0,318) \approx \Phi(-0,318)$,

soit $P(X \leqslant 140) \approx 0,375$.

b) $P(X \geqslant 150) = P(X \geqslant 149,5)$

$= P\left(\dfrac{X-144}{11} \geqslant \dfrac{149,5-144}{11}\right)$

$\approx P(Z \geqslant 0,5) \approx 1 - \Phi(0,5) \approx 1 - 0,6915$,

soit $P(X \geqslant 150) \approx 0,309$.

61 **1.** $\int_{-0,4}^{0,8} \varphi(t)\,dt = \Phi(0,8) - \Phi(-0,4)$

$\approx 0,788 - 0,345 \approx 0,44$.

2. Avec la loi binomiale $\mathcal{B}(25 ; 0,5)$:

$P(11 < X < 15) = P(X = 12) + P(X = 13) + P(X = 14)$

$\approx 0,155 + 0,155 + 0,133$,

soit $P(11 < X < 15) \approx 0,44$.

Bien que n soit inférieur à 30, on trouve la même valeur à 10^{-2} près.

On trouverait aussi la même valeur à 10^{-3} près : 0,443.

Pour $p = \dfrac{1}{2}$, l'approximation normale est bonne à partir de $n = 25$.

62 X suit la loi $\mathcal{B}\left(36 ; \dfrac{1}{3}\right)$.

• En utilisant la loi binomiale :

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leqslant 10) \approx 1 - 0,008 = 0,992.$$

• L'approximation normale est possible, car $n = 36 \geqslant 30$; $np = 12 \geqslant 5$; $n(1-p) = 24 \geqslant 5$.

$E(X) = 36 \times \dfrac{1}{3} = 12$; $\sigma(X) = \sqrt{36 \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3}} = 2\sqrt{2}$.

$P(X \geqslant 5) = P(X \geqslant 5{,}5)$

$$= P\left(\frac{X-12}{2\sqrt{2}} \geqslant \frac{5{,}5-12}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$\approx P(Z \geqslant -2{,}3)$$

$$\approx 1 - \Phi(-2{,}3) \approx 1 - 0{,}011,$$

soit $P(X \geqslant 5) \approx 0{,}989$.

Le candidat répondant au hasard est quasiment certain d'avoir au moins 6 réponses justes.

C'est pourquoi dans les QCM, il faut pénaliser les réponses fausses.

63 Appelons X la variable aléatoire indiquant le nombre de garçons parmi les 820000 nouveau-nés.

X suit la loi $\mathscr{B}(820000 ; 0{,}512)$.

• En utilisant la loi binomiale :

$P(X > 420000) = 1 - P(X \leqslant 420000) \approx 1 - 0{,}639 = 0{,}361$.

• L'approximation normale est possible, car :

$$n = 820000 \geqslant 30 ;\ np = 419840 \geqslant 5 ;$$
$$n(1-p) = 400160 \geqslant 5.$$

$E(X) = 820000 \times 0{,}512 = 419840$;

$\sigma(X) = \sqrt{820\ 000 \times 0{,}512 \times 0{,}488} \approx 452{,}6$.

$P(X > 420000) = P(X \geqslant 420000{,}5)$

$$= P\left(\frac{X - 419\ 840}{452{,}6} \geqslant \frac{420\ 000{,}5 - 419\ 840}{452{,}6}\right)$$

$$\approx P(Z \geqslant 0{,}355) \approx 1 - \Phi(0{,}355) \approx 1 - 0{,}639,$$

soit $P(X > 420\ 000) \approx 0{,}361$.

64 *Corrigé sur le site élève.*

65 Appelons X la variable aléatoire qui indique le nombre de patients faisant une réaction allergique.

X suit la loi $\mathscr{B}(1225 ; 0{,}02)$.

• En utilisant la loi binomiale :

$$P(X \geqslant 30) = 1 - P(X \leqslant 29) \approx 1 - 0{,}846 = 0{,}154.$$

• L'approximation normale est possible, car $n = 1225 \geqslant 30$; $np = 24{,}5 \geqslant 5$; $n(1-p) = 1200{,}5 \geqslant 5$.

$E(X) = 1225 \times 0{,}02 = 24{,}5$;

$\sigma(X) = \sqrt{1225 \times 0{,}02 \times 0{,}98} = 4{,}9$.

$P(X \geqslant 30) = P(X \geqslant 29{,}5)$

$$= P\left(\frac{X-24{,}5}{4{,}9} \geqslant \frac{29{,}5-24{,}5}{4{,}9}\right)$$

$$\approx P(Z \geqslant 1{,}02) \approx 1 - \Phi(1{,}02) \approx 1 - 0{,}846,$$

soit $P(X \geqslant 30) \approx 0{,}154$.

66 **1.** Pour chaque client ayant réservé, appelons « succès » le fait qu'il se présente à l'embarquement. La probabilité de succès est 0,9 et on répète pour chaque client la même épreuve de Bernoulli. X indiquant le nombre de succès, elle suit donc la loi binomiale de paramètres n et 0,9.

2. L'approximation normale est possible :

$$n \geqslant 300 \geqslant 30;\ np = 0{,}9n \geqslant 270 \geqslant 5;$$
$$n(1-p) = 0{,}1n \geqslant 30 \geqslant 5.$$

$E(X) = 0{,}9n$; $\sigma(X) = \sqrt{n \times 0{,}9 \times 0{,}1} = 0{,}3\sqrt{n}$.

Donc X peut être approchée par la loi normale d'espérance $\mu = 0{,}9n$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}3\sqrt{n}$.

3. Si $n = 324$, $\mu = 291{,}6$ et $\sigma = 5{,}4$.

$P(X > 300) = P(X \geqslant 300{,}5)$

$$= P\left(\frac{X - 291{,}6}{5{,}4} \geqslant \frac{300{,}5 - 291{,}6}{5{,}4}\right)$$

$$\approx P(Z \geqslant 1{,}648) \approx 1 - \Phi(1{,}648) \approx 1 - 0{,}95,$$

soit $P(X > 300) \approx 0{,}05$.

4. $P(X > 300) = P(X \geqslant 300{,}5)$

$$= P\left(\frac{X - 0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}} \geqslant \frac{300{,}5 - 0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}}\right)$$

$$\approx P\left(Z \geqslant \frac{300{,}5 - 0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}}\right)$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{300{,}5 - 0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}}\right).$$

$P(X > 300) = 0{,}01$ peut s'écrire :

$$\Phi\left(\frac{300{,}5 - 0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}}\right) \approx 0{,}99, \text{ soit } \frac{300{,}5 - 0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}} \approx 2{,}326.$$

Si on pose $x = \sqrt{n}$, l'équation $\dfrac{300{,}5 - 0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}} = 2{,}326$ s'écrit :

$$0{,}9x^2 + 0{,}697\,8x - 300{,}5 = 0.$$

Or x étant positif, on en déduit $x \approx 17{,}89$, d'où $n \approx 319{,}9$, soit $n = 320$.

Comme on a utilisé à plusieurs reprises des approximations, il est prudent de vérifier en revenant à la loi binomiale :

Si $n = 320$, $P(X > 300) = 1 - P(X \leqslant 300) \approx 0{,}007$;

si $n = 321$, $P(X > 300) = 1 - P(X \leqslant 300) \approx 0{,}012$.

Comme $P(X > 300)$ augmente avec n, on vérifie bien que $P(X > 300)$ est inférieur à 0,01 pour $n \leqslant 320$, et supérieur à 0,01 pour $n \geqslant 321$.

67 **1. a)** $P(6 < X < 9) = P(X = 7) + P(X = 8)$

$$\approx 0{,}165\,3 + 0{,}149\,8 \approx 0{,}315 ;$$

b) $P(6 \leqslant X < 9) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8)$

$$\approx 0{,}154\,3 + 0{,}165\,3 + 0{,}149\,8 \approx 0{,}469 ;$$

c) $P(6 < X \leqslant 9) = P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9)$

$$\approx 0{,}165\,3 + 0{,}149\,8 + 0{,}116\,5 \approx 0{,}432 ;$$

d) $P(6 \leqslant X \leqslant 9) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9)$

$$\approx 0{,}154\,3 + 0{,}165\,3 + 0{,}149\,8 + 0{,}116\,5$$
$$\approx 0{,}586.$$

2. a) $P(X \leqslant 6 \text{ ou } X \geqslant 9) \approx 1 - 0{,}315 = 0{,}685$;

$P(X < 6 \text{ ou } X \geqslant 9) \approx 1 - 0{,}469 = 0{,}531$;

$P(X \leqslant 6 \text{ ou } X > 9) \approx 1 - 0{,}432 = 0{,}568$;

$P(X < 6 \text{ ou } X > 9) \approx 1 - 0{,}586 = 0{,}414$.

b) L'approximation normale est possible, car $n = 36 \geqslant 30$; $np = 7{,}2 \geqslant 5$; $n(1-p) = 28{,}8 \geqslant 5$.

$E(X) = 7{,}2$; $\sigma(X) = \sqrt{36 \times 0{,}2 \times 0{,}8} = 2{,}4$.

Posons $Z = \dfrac{X - 7{,}2}{2{,}4}$.

$P(6 < X < 9) = P(6{,}5 < X < 8{,}5) \approx P(-0{,}292 < Z < 0{,}542)$

$$\approx \Phi(0{,}542) - \Phi(-0{,}292) \approx 0{,}706\,1 - 0{,}385\,1 \approx 0{,}321 ;$$

$P(6 \leqslant X < 9) = P(5{,}5 < X < 8{,}5) \approx P(-0{,}708 < Z < 0{,}542)$

$$\approx \Phi(0{,}542) - \Phi(-0{,}708) \approx 0{,}706\,1 - 0{,}239\,5 \approx 0{,}467 ;$$

$P(6 < X \leqslant 9) = P(6{,}5 < X < 9{,}5) \approx P(-0{,}292 < Z < 0{,}958)$

$$\approx \Phi(0{,}958) - \Phi(-0{,}292) \approx 0{,}831\,0 - 0{,}385\,1 \approx 0{,}446 ;$$

$P(6 \leqslant X \leqslant 9) = P(5,5 < X < 9,5) \approx P(-0,708 < Z < 0,958)$
$\approx \Phi(0,958) - \Phi(-0,708) \approx 0,831\,0 - 0,239\,5 \approx 0,592$;
$P(X \leqslant 6 \text{ ou } X \geqslant 9) \approx 1 - 0,321 = 0,679$;
$P(X < 6 \text{ ou } X \geqslant 9) \approx 1 - 0,467 = 0,533$;
$P(X \leqslant 6 \text{ ou } X > 9) \approx 1 - 0,446 = 0,554$;
$P(X < 6 \text{ ou } X > 9) \approx 1 - 0,592 = 0,408$.

68 Il s'agit de calculer l'intégrale $\int_0^{1,5} \varphi(t)\,dt$.

Pour cela, on peut utiliser la méthode des rectangles en subdivisant l'intervalle $[0 ; 1,5]$ en n parties égales.
La fonction φ est décroissante sur $[0 ; 1,5]$.

Donc $S \leqslant \int_0^{1,5} \varphi(t)\,dt \leqslant T$, où $S = \frac{1,5}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{1,5}{n}k\right)$ et :

$$T = \frac{1,5}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{1,5}{n}k\right).$$

L'amplitude de l'encadrement est :

$$T - S = \frac{1,5}{n}\big(\varphi(0) - \varphi(1,5)\big) ;$$

elle sera inférieure à 2×10^{-2} si $n > 75\big(\varphi(0) - \varphi(1,5)\big)$, soit $n > 20,25$.

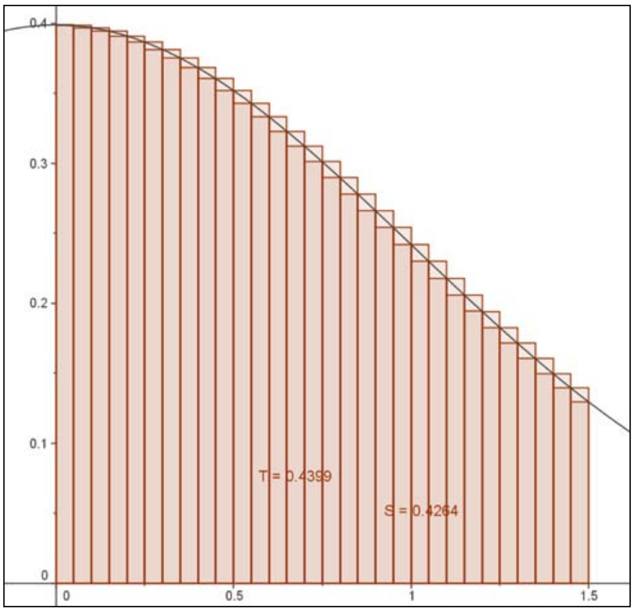
Exemple. On peut choisir $n = 30$, d'où $\frac{1,5}{n} = 0,05$.

$I = \frac{S+T}{2}$ est alors une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité cherchée.

```
DEBUT_ALGORITHME
  S PREND_LA_VALEUR 0
  POUR k ALLANT_DE 1 A 30
    DEBUT_POUR
    S PREND_LA_VALEUR S+0.05*F1(0.05*k)
    FIN_POUR
  AFFICHER "Aire des rectangles intérieurs : "
  AFFICHER S
  T PREND_LA_VALEUR S+0.05*(F1(0)-F1(1.5))
  AFFICHER "Aire des rectangles extérieurs : "
  AFFICHER T
  I PREND_LA_VALEUR (S+T)/2
  AFFICHER "Valeur approchée de l'intégrale : "
  AFFICHER I
FIN_ALGORITHME

Fonction numérique utilisée :
F1(x)=exp(-(x*x)/2)/sqrt(6.2832)

Résultats
***Algorithme lancé***
Aire des rectangles intérieurs  : 0.42641621
Aire des rectangles extérieurs  : 0.43988743
Valeur approchée de l'intégrale : 0.43315182
```



On obtient $I \approx 0,43$.

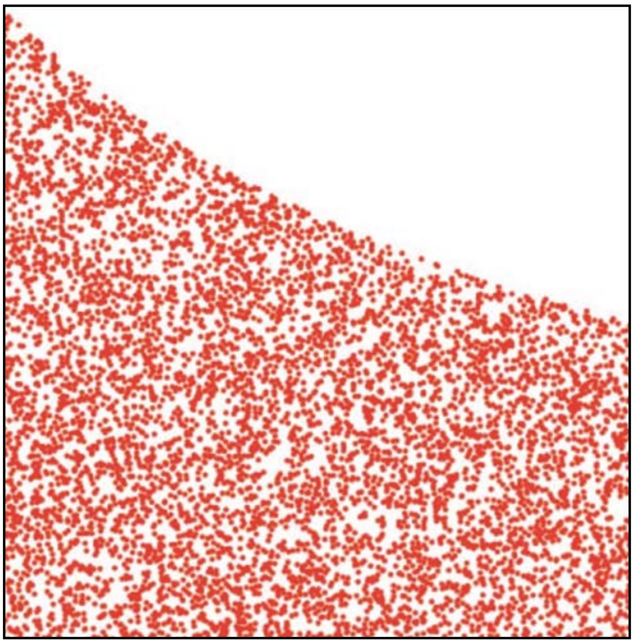
69 **1.** L'aire de $\mathscr{C}$ est égale à 1.
L'aire de $\mathscr{D}$ est égale à $\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx = \ln(2)$.
Donc, la probabilité que le point soit dans $\mathscr{D}$ est égale à $\ln(2)$, soit $\approx 0,693$.

2. X suit la loi $\mathscr{B}(10\,000 ; \ln 2)$.
$P(6\,800 < X < 7\,050) = P(X \leqslant 7\,049) - P(X \leqslant 6\,800) \approx 0,993$.
Avec l'approximation normale :
$E(X) = 10\,000 \ln(2) \approx 6\,931,5$;
$\sigma(X) = 100\sqrt{\ln(2)(1-\ln(2))} \approx 46,1$.
$P(6\,800 < X < 7\,050) =$

$$P\left(\frac{6\,800,5 - 6\,931,5}{46,1} < \frac{X - 6\,931,5}{46,1} < \frac{7\,049,5 - 6\,931,5}{46,1}\right)$$
$$\approx \Phi(2,56) - \Phi(-2,84) \approx 0,9948 - 0,0023 \approx 0,993.$$

3.

```
VARIABLES
  X EST_DU_TYPE NOMBRE
  Y EST_DU_TYPE NOMBRE
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
  NB EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  NB PREND_LA_VALEUR 0
  POUR N ALLANT_DE 1 A 10000
    DEBUT_POUR
    //Choisir un point au hasard dans le carré C
    X PREND_LA_VALEUR random()
    Y PREND_LA_VALEUR random()
    //Si le point est dans D, augmenter NB de 1
    SI (Y<1/(X+1)) ALORS
      DEBUT_SI
      NB PREND_LA_VALEUR NB+1
      FIN_SI
    FIN_POUR
  AFFICHER NB
FIN_ALGORITHME
```



4. On constate que la valeur de X obtenue est presque toujours comprise entre 6 800 et 7 050, ce qui confirme la probabilité très élevée de cet événement.
Remarque. Cette « méthode de Monte-Carlo » est une façon de calculer des valeurs approchées d'intégrales dont on ne sait pas calculer la valeur exacte.

AVEC LES TICE

70 **1. a)** $F(x) = P(X \leqslant x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$$= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

b) $f(x) = F'(x) = \frac{1}{\sigma}\Phi'\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$

2. Lorsque μ varie, l'allure de la courbe ne change pas. Son axe de symétrie se déplace sur l'axe des abscisses.
Lorsque σ varie, l'allure de la courbe change mais son axe de symétrie de change pas.
Lorsque σ diminue, l'ordonnée du sommet de la courbe augmente et sa « base se resserre ».

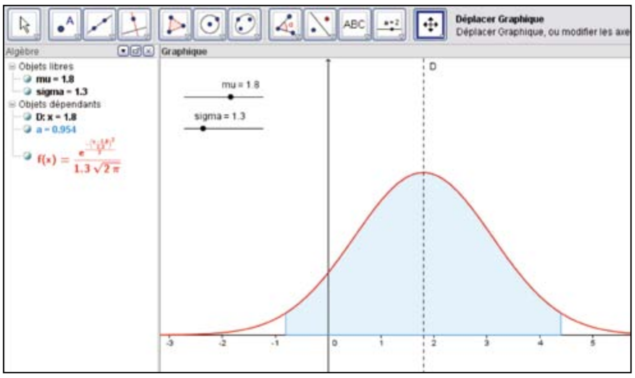
3. a) Soit M un point de la courbe, de coordonnées $(x\,;f(x))$.
Son symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$ a pour coordonnées $(2\mu - x\,;f(x))$.
Or $f(2\mu - x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{\mu - x}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = f(x)$, donc M' appartient à la courbe.

b) $f(x)$ est maximal quand $\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ est maximal, c'est-à-dire quand $\frac{x-\mu}{\sigma} = 0$, soit $x = \mu$. L'ordonnée correspondante est :

$$f(\mu) = \frac{1}{\sigma}\varphi(0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

On vérifie ce qui est indiqué dans le cours : plus σ est grand, plus le sommet est bas.

4. a)



b) Cette aire ne varie pas lorsque σ et μ varient.

c) L'aire indiquée est égale à $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$, c'est-à-dire :

$$P\left(-2 < \frac{X-\mu}{\sigma} < 2\right) = P(-2 < Z < 2) \approx 0{,}954.$$

Prendre toutes les initiatives

71 Appelons X la variable aléatoire qui indique le nombre de personnes demandant à être vaccinées.
X suit la loi binomiale de paramètres $n = 1\,500\,000$ et $p = 0{,}3$.
Le nombre N cherché doit vérifier $P(X > N) = 0{,}01$.
L'approximation normale est possible, utilisons-la :

$$P(X > N) = P\left(\frac{X - 450\ 000}{561{,}25} > \frac{N - 450\ 000}{561{,}25}\right)$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{N - 450\ 000}{561{,}25}\right).$$

$\Phi\left(\frac{N - 450\ 000}{561{,}25}\right) = 0{,}99$ fournit $\frac{N - 450\ 000}{561{,}25} \approx 2{,}326$.

On en déduit $N \approx 451\ 305$.
Comme on a utilisé à plusieurs reprises des approximations, il est prudent de vérifier en revenant à la loi binomiale :
$P(X > 451\ 305) \approx 0{,}010\ 02$; $P(X > 451\ 306) \approx 0{,}009\ 97$.
Comme $P(X > N)$ diminue quand N augmente, on vérifie que pour $N \leqslant 451\,305$, le risque de rupture de stock dépasse 1 %, alors que pour $N \geqslant 451\,306$, il est inférieur à 1 %.
Commentaire. Si l'Agence Régionale de Santé achetait plus de 451 305 doses de vaccin, elle diminuerait le risque d'en manquer, mais augmenterait le risque d'avoir un stock inutilisé.

72 Cherchons la probabilité p qu'une tige soit conforme :
$p = P(99{,}5 \leqslant L \leqslant 100{,}5)$

$$= P\left(\frac{99{,}5 - 100}{0{,}3} \leqslant \frac{X - 100}{0{,}3} \leqslant \frac{100{,}5 - 100}{0{,}3}\right)$$

$$= P\left(-\frac{5}{3} < Z < \frac{5}{3}\right) = \Phi\left(\frac{5}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{5}{3}\right)$$

$\approx 0{,}952\ 2 - 0{,}047\ 8$, donc $p \approx 0{,}904$.

Appelons X la variable aléatoire indiquant le nombre de tiges conformes dans le lot.
X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}904$.
• En utilisant la loi binomiale, la calculatrice indique $P(X \leqslant 94) \approx 0{,}93$.
Donc $P(X \geqslant 95) \approx 0{,}07$.
• L'approximation normale est possible, car $n = 100 \geqslant 30$; $np \approx 90{,}4 \geqslant 5$; $n(1 - p) \approx 9{,}6 \geqslant 5$.
$E(X) \approx 90{,}4$; $\sigma(X) \approx 2{,}95$.

$$P(X < 95) = P(X \leqslant 94{,}5) = P\left(\frac{X - 90{,}4}{2{,}95} \leqslant \frac{94{,}5 - 90{,}4}{2{,}95}\right)$$

$$\approx P(Z \leqslant 1{,}39) \approx \Phi(1{,}39) \approx 0{,}92.$$

Donc $P(X \geqslant 95) \approx 0{,}08$.

EXERCICES Le jour du BAC (page 430)

73 *Corrigé sur le site élève.*

74 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 300$ et $p = 0{,}25$.

2. Les conditions de l'approximation normale sont remplies :

$n = 300 \geqslant 30$; $np = 75 \geqslant 5$; $n(1 - p) = 225 \geqslant 5$.

$E(X) = 300 \times 0{,}25 = 75$; $\sigma(X) = \sqrt{300 \times 0{,}25 \times 0{,}75} = 7{,}5$.

Donc X suit sensiblement la loi $\mathcal{N}(75\ ;\ 56{,}25)$.

3. $P(60 < X \leqslant 90) = P(60{,}5 < X < 90{,}5)$

$$= P\left(\frac{60{,}5 - 75}{7{,}5} < \frac{X - 75}{7{,}5} < \frac{90{,}5 - 75}{7{,}5}\right)$$

$$\approx P(-1{,}93 < Z < 2{,}07)$$

$$\approx \Phi(2{,}07) - \Phi(-1{,}93) \approx 0{,}981 - 0{,}027,$$

donc $P(60 < X \leqslant 90) \approx 0{,}95$.

75 **1. b)** ; **2. c)** ; **3. b)** ; **4. b)** ; **5. b)** ; **6. c)**.

76 **1.** *Cf.* Théorème 3, page 409.

2. $P(-1{,}7 < Z \leqslant 1{,}7) = \Phi(1{,}7) - \Phi(-1{,}7)$

$$= \Phi(1{,}7) - [1 - \Phi(1{,}7)]$$

$$= 2\Phi(1{,}7) - 1 \approx 2 \times 0{,}955 - 1,$$

donc $P(-1{,}7 < Z \leqslant 1{,}7) \approx 0{,}91$.

77 **1.** $P(-r < Z < r) = \Phi(r) - \Phi(-r) = \Phi(r) - [1 - \Phi(r)]$,

donc $P(-r < Z < r) = 2\Phi(r) - 1$.

2. $P(-1{,}5 < Z \leqslant 1{,}5) = 2\Phi(1{,}5) - 1 \approx 2 \times 0{,}933 - 1$,

donc $P(-1{,}5 < Z \leqslant 1{,}5) = 0{,}87$.

78 **1.** *Cf.* Théorème 5, page 409.

2. Soit r le rayon de l'intervalle I cherché.

$1 - \alpha = 0{,}9$, donc $\alpha = 0{,}1$.

$\Phi(r) = 1 - \dfrac{0{,}1}{2} = 0{,}95$, d'où $r \approx 1{,}65$.

79 **1.** Pour chaque élève, appelons « succès » le fait qu'il utilise un ordinateur. La probabilité de succès est 0,5. Les 64 élèves ayant été choisis avec remise, il s'agit d'un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire X indique le nombre de succès ; elle suit donc la loi binomiale de paramètres 64 et 0,5.

2. Les conditions de l'approximation normale sont remplies :

$n = 64 \geqslant 30$; $np = n(1 - p) = 64 \times 0{,}5 = 32 \geqslant 5$.

$E(X) = 64 \times 0{,}5 = 32$; $\sigma(X) = \sqrt{64 \times 0{,}5 \times 0{,}5} = 4$.

Donc X suit sensiblement la loi N(32;16).

3. • Par la loi binomiale : $P(X \leqslant 36) \approx 0{,}870$.

• Par l'approximation normale :

$P(X \leqslant 36) = P(X < 36{,}5)$

$$= P\left(\frac{X - 32}{4} < \frac{36{,}5 - 32}{4}\right) = P(Z < 1{,}125),$$

donc $P(X \leqslant 36) \approx 0{,}870$.

EXERCICES Pour aller plus loin (page 432)

80 Avec comme unité le million, appelons μ l'espérance et σ l'écart-type de X.

On sait que $\mu = 4{,}5$.

$P(4 < X < 5) = 0{,}95$, donc :

$$P\left(\frac{4 - 4{,}5}{\sigma} < \frac{X - 4{,}5}{\sigma} < \frac{5 - 4{,}5}{\sigma}\right) = 0{,}95,$$

soit $P\left(\dfrac{-0{,}5}{\sigma} < Z < \dfrac{-0{,}5}{\sigma}\right) = 0{,}95$.

On en déduit $\dfrac{0{,}5}{\sigma} = u_{0{,}05}$, d'où :

$$\sigma = \frac{0{,}5}{u_{0{,}05}} \approx \frac{0{,}5}{1{,}96} \approx 0{,}255.$$

81 **1.** Appelons μ l'espérance et σ l'écart-type de S.

On sait que $\mu = 7{,}5$.

$P(6 < X < 9) = 0{,}9$, donc :

$$P\left(\frac{6 - 7{,}5}{\sigma} < \frac{X - 7{,}5}{\sigma} < \frac{9 - 7{,}5}{\sigma}\right) = 0{,}9,$$

soit $P\left(\dfrac{-1{,}5}{\sigma} < Z < \dfrac{-1{,}5}{\sigma}\right) = 0{,}9$.

On en déduit $\dfrac{1{,}5}{\sigma} = u_{0{,}1}$, d'où :

$$\sigma = \frac{1{,}5}{u_{0{,}1}} \approx \frac{1{,}5}{1{,}645} \approx 0{,}91.$$

L'écart-type est d'environ 0,91 h, soit 55 min.

2. $P(7 < X \leqslant 8) = P\left(\dfrac{7 - 7{,}5}{0{,}91} < \dfrac{X - 7{,}5}{0{,}91} < \dfrac{8 - 7{,}5}{0{,}91}\right)$

$$\approx P(-0{,}55 < Z < 0{,}55)$$

$$\approx \Phi(0{,}55) - \Phi(-0{,}55) \approx 0{,}709 - 0{,}291,$$

soit $P(7 < X \leqslant 8) \approx 0{,}42$.

Environ 42 % des adultes dorment entre 7 h et 8 h par jour.

82 **1. a)** $\varphi'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = -x\varphi(x)$.

b) $\displaystyle\int_0^b x\varphi(x)\,dx = [-\varphi'(x)]_0^b = -\varphi(b) + \varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1 - e^{-\frac{b^2}{2}}\right)$.

On en déduit $\displaystyle\lim_{b \to +\infty} \int_0^b x\varphi(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

2. $\displaystyle\int_a^0 x\varphi(x)\,dx = [-\varphi'(x)]_a^0 = -\varphi(0) + \varphi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-1 + e^{-\frac{a^2}{2}}\right)$.

On en déduit $\displaystyle\lim_{a \to -\infty} \int_a^0 x\varphi(x)\,dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

3. $E(Z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} - \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0.$

83 **1.** $V(Z) = E[(Z - E(Z))^2] = E(Z^2)$, puisque $E(Z) = 0$.

2. a) De $\varphi'(x) = -x\varphi'(x)$, on déduit :

$$\varphi''(x) = -\varphi(x) - x\varphi'(x) = -\varphi(x) + x^2\varphi(x),$$

d'où $x^2\varphi(x) = \varphi''(x) + \varphi(x)$.

b) $$\int_a^b x^2\varphi(x)\,dx = \int_a^b \varphi''(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx$$
$$= \varphi'(b) - \varphi'(a) + \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

c) • $\displaystyle\int_0^b x^2\varphi(x)\,dx = \varphi'(b) + \int_0^b \varphi(x)\,dx$, car $\varphi'(0) = 0$.

Donc $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\int_0^b x^2\varphi(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \varphi(x)\,dx = \frac{1}{2}.$

• $\displaystyle\int_a^0 x^2\varphi(x)\,dx = -\varphi'(a) + \int_a^0 \varphi(x)\,dx$, car $\varphi'(0) = 0$.

Donc $\displaystyle\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 x^2\varphi(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \varphi(x)\,dx = \frac{1}{2}.$

3. $V(Z) = E(Z^2) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1.$

84 **1.** Si $x \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^x \varphi(t)\,dt = \Phi(x) - \Phi(0)$.

Si $x < 0$, $\displaystyle\int_x^0 \varphi(t)\,dt = \Phi(0) - \Phi(x)$, donc :

$$\int_0^x \varphi(t)\,dt = \Phi(x) - \Phi(0).$$

Ainsi, dans les deux cas :

$$\Phi(x) = \Phi(0) + \int_0^x \varphi(t)\,dt = \frac{1}{2} + \int_0^x \varphi(t)\,dt.$$

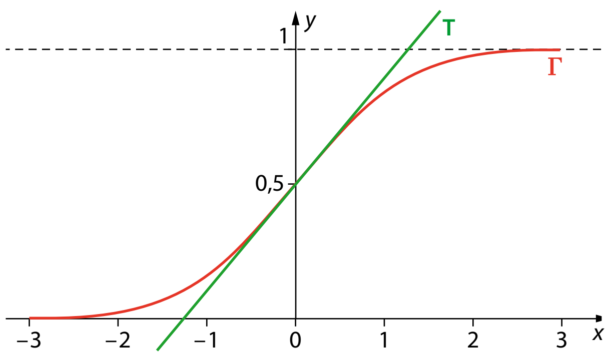
2. Il résulte de l'identité précédente que $\Phi' = \varphi$.
Or, φ est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Phi(x) = \lim_{x\to+\infty} P(X < x) = 1$ (aire totale sous la courbe de Gauss).

$$\lim_{x\to-\infty}\Phi(x) = \lim_{x\to+\infty}\Phi(-x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \Phi(x)\right) = 0.$$

b) Donc, l'axe des abscisses est asymptote en $-\infty$, et la droite d'équation $y = 1$ est asymptote en $+\infty$.

85 **1.**



K a pour coordonnées $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$. Soit M un point de Γ où x est son abscisse et $\Phi(x)$ son ordonnée. Son symétrique M' par rapport à K a pour coordonnées (x', y') telles que :

$$\frac{x + x'}{2} = 0 \text{ et } \frac{y + y'}{2} = \frac{1}{2}\ ;$$

donc $x' = -x$ et $y' = 1 - \Phi(x)$. Or $1 - \Phi(x) = \Phi(-x)$; ainsi $y' = \Phi(x')$, donc M' appartient à Γ.

2. $\Phi'(0) = \varphi(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$. T a donc pour équation :

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}x + \frac{1}{2}.$$

3. a) $h'(x) = \varphi(x) - \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \leqslant 0$. Donc h est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Or $h(0) = 0$, donc $h(x) \geqslant 0$ quand $x \leqslant 0$, et $h(x) \leqslant 0$ quand $x \geqslant 0$.

b) Donc, pour $x \leqslant 0$, $\Phi(x) \geqslant g(x)$: la courbe Γ est au-dessus de la droite T.

Et pour $x \geqslant 0$, $\Phi(x) \leqslant g(x)$: la courbe Γ est au-dessous de la droite T.

Par conséquent, la tangente T traverse la courbe Γ en K.

4. $\Phi'(x) = \varphi(x)$ est maximal quand $x = 0$; donc, le coefficient directeur d'une tangente à Γ est maximal en K.

86 **1.** $\Phi(0) = 0{,}5$, donc la médiane est égale à 0.

2. Dire que $\Phi(q_\alpha) = \alpha$ signifie que q_α est l'antécédent de α par la fonction Φ. Cet antécédent existe et est unique en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, car Φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\lim_{x\to-\infty}\Phi(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\Phi(x) = 1.$$

3. a) $\Phi(q_{0,25}) = 0{,}25$, d'où $q_{0,25} \approx -0{,}674$.
$\Phi(q_{0,75}) = 0{,}75$, d'où $q_{0,75} \approx 0{,}674$.

b)

α	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
q_α	–1,282	–0,842	–0,524	–0,253	0	0,253	0,524	0,842	1,282

c) $\Phi(q_{0,01}) = 0{,}01$, d'où $q_{0,01} \approx -2{,}326$.

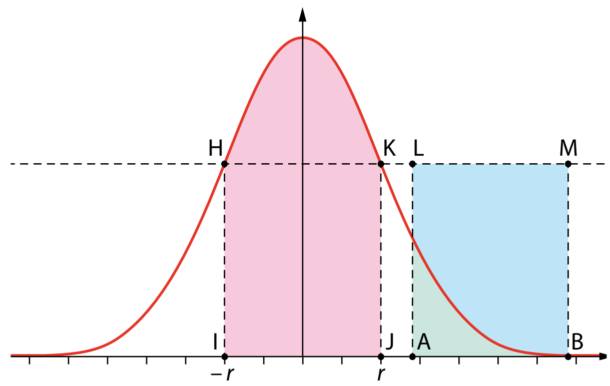
$\Phi(q_{0,99}) = 0{,}99$, d'où $q_{0,99} \approx 2{,}326$.

4. $\Phi(q_\alpha) = \alpha$ implique $\Phi(-q_\alpha) = 1 - \alpha$; donc $-q_\alpha = q_{1-\alpha}$.

5. $\Phi(u_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$, donc $u_\alpha = q_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

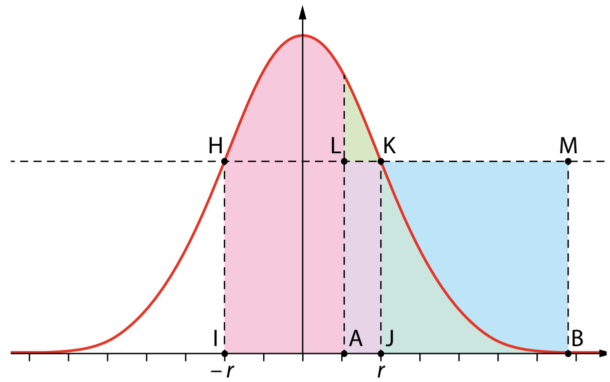
87 Sur l'axe des abscisses :
• I et J ont pour abscisses $-r$ et r ;
• A et B ont pour abscisses a et b.
Sur la courbe de Gauss, H et K ont pour abscisses $-r$ et r. Leur ordonnée $\varphi(r)$ est aussi celle de L et M, d'abscisses a et b.
Traitons le cas où $b > r$ (les autres cas se traitent de façon analogue, par symétrie autour de l'axe des ordonnées).
Alors $a \geqslant -r$, puisque $a = b - 2r$.

• Si $a \geqslant r$:



$P(a < Z < b) < \text{aire}(ABML) = \text{aire}(IJKH) < P(-r < Z < r)$.

• Si $-r < a < r$:



$P(a < Z < b) = P(a < Z < r) + P(r < Z < b)$;
$P(-r < Z < r) = P(-r < Z < a) + P(a < Z < r)$.
Or $P(r < Z < b) < \text{aire}(JBMK) = \text{aire}(IALH) < P(-r < Z < a)$.
Donc $P(a < Z < b) < P(-r < Z < r)$.

88 **1.** $P(F) = P(T > 37{,}8) \approx 0{,}0228$.

2. $P(H) = P(S < 9) \approx 0{,}0668$.

3. Notons R l'événement « Le don est refusé » : $R = F \cup H$.
Or, F et H sont indépendants ; donc :
$$P(F \cap H) = P(F)P(H) \approx 0{,}0228 \times 0{,}0668 \approx 0{,}0015.$$
d'où $P(F \cup H) = P(F) + P(H) - P(F \cap H)$
$$\approx 0{,}022\,8 + 0{,}066\,8 - 0{,}001\,5 \approx 0{,}088\,1.$$

4. a) $P_R(F) = \dfrac{P(F \cap R)}{P(R)} = \dfrac{P(F)}{P(R)} \approx \dfrac{0{,}022\,8}{0{,}088\,1} \approx 0{,}259$.

b) $P_R(H) = \dfrac{P(H \cap R)}{P(R)} = \dfrac{P(H)}{P(R)} \approx \dfrac{0{,}066\,8}{0{,}088\,1} \approx 0{,}758$.

c) $P_R(F \cap H) = \dfrac{P(F \cap H \cap R)}{P(R)} = \dfrac{P(F \cap H)}{P(R)}$
$$\approx \frac{0{,}001\,5}{0{,}088\,1} \approx 0{,}017.$$

89 Appelons X la variable aléatoire indiquant le nombre de gagnants : X suit la loi $\mathcal{B}(100\,;\,0{,}1)$.
$E(X) = 10$; $\sigma(X) = 3$.
Soit B la variable aléatoire indiquant le bénéfice quotidien du forain :
$$B = (100 - X) - 4X = 100 - 5X.$$

1. $E(B) = 100 - 5E(X) = 50$.

2. a) $P(B < 0) = P(100 - 5X < 0) = P(X > 20)$
$$= 1 - P(X \leqslant 20) \approx 1 - 0{,}999 = 0{,}001.$$

b) $P(B > 30) = P(100 - 5X > 30) = P(X < 14)$
$$= P(X \leqslant 13) \approx 0{,}88.$$

On peut obtenir ces résultats par la loi binomiale ou par son approximation normale.

90 **1.** $P(A) = P(246 < X < 254)$
$$= P\left(\frac{246-250}{2} < \frac{X-250}{2} < \frac{254-250}{2}\right)$$
$$= P(-2 < Z < 2),$$
donc $P(A) \approx 0{,}9545$.

2. $P(B) = P(146 < Y < 154)$
$$= P\left(\frac{146-150}{1{,}5} < \frac{Y-150}{1{,}5} < \frac{154-150}{1{,}5}\right)$$
$$= P(-2{,}67 < Z < 2{,}67),$$
donc $P(B) \approx 0{,}996\,2 - 0{,}003\,8 = 0{,}992\,4$.

3. $P(A \cap B) = P(A)P(B) \approx 0{,}947\,2$.

4. Notons N l'événement « La pièce n'est pas conforme » :
$$P(N) \approx 1 - 0{,}947\,2 \approx 0{,}052\,8.$$

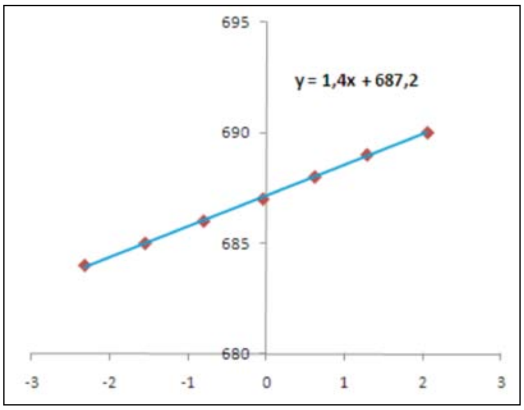
a) $P_N(X < 246) = \dfrac{P(N \text{ et } X < 246)}{P(N)} = \dfrac{P(X < 246)}{P(N)}$
$$\approx \frac{0{,}022\,8}{0{,}052\,8} \approx 0{,}43.$$

b) $P_N(Y > 154) = \dfrac{P(N \text{ et } X > 154)}{P(N)} = \dfrac{P(X > 154)}{P(N)}$
$$\approx \frac{0{,}003\,8}{0{,}052\,8} \approx 0{,}07.$$

PROLONGEMENT DU TP 28

91

mesure x_i	fréquence f_i	fréquence cumulée fc_i	y_i	mesure x_i
684	0,01	0,01	−2,33	684
685	0,05	0,06	−1,55	685
686	0,15	0,21	−0,81	686
687	0,27	0,48	−0,05	687
688	0,25	0,73	0,61	688
689	0,17	0,90	1,28	689
690	0,08	0,98	2,05	690
691	0,02	1,00		691



a) Les points sont sensiblement alignés ; donc une loi normale est adaptée.

b) Sur l'équation de la droite de Henri, on lit :
$$\mu \approx 687{,}2 \text{ et } \sigma \approx 1{,}4.$$

CHAPITRE 15

Statistique Estimation

ACTIVITÉS

(page 436)

Activité 1

1 a) Ensemble des valeurs prises par F :

$$F(\Omega)=\left\{\frac{k}{100},\ k \text{ entier entre } 0 \text{ et } 100\right\}.$$

Étant donné que la probabilité d'apparition du 1 est $\frac{1}{4}$, on peut conjecturer que $\frac{25}{100}$ est la valeur de F la plus probable.

b) X indique le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli d'ordre 100 et de paramètre 0,25 ; donc, la loi de X est la loi binomiale $\mathscr{B}(100 ; 0,25)$.

Donc :

$E(X) = 100 \times 0,25 = 25$ et $V(X) = 100 \times 0,25 \times 0,75 = \frac{75}{4}$.

D'où $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

c) $F = \frac{1}{100}X$, donc $E(F) = \frac{1}{100}E(X) = 0,25$

et $V(F)=\frac{1}{100^2}V(X)=\frac{75}{40\ 000}=\frac{3}{1\ 600}$.

D'où $\sigma(F)=\sqrt{V(F)}=\frac{\sqrt{3}}{40}$.

d) $P(F = 0,25) = P(X = 25) = \binom{100}{25}0,25^{25}\times 0,75^{75}$

$\approx 0,091\ 8$ à 10^{-4} près.

$P(0,24 \leqslant F \leqslant 0,26) = P(24 \leqslant X \leqslant 26)$

$= P(X = 24) + P(X = 25) + P(X = 26)$

$P(0,24 \leqslant F \leqslant 0,26) = \binom{100}{25}0,25^{24}\times 0,75^{76}$

$+\binom{100}{25}0,25^{25}\times 0,75^{75}+\binom{100}{25}0,25^{26}\times 0,75^{74}$;

d'où $P(0,24 \leqslant F \leqslant 0,26) \approx 0,270\ 7$ à 10^{-4} près.

2 a) D'après la calculatrice :

$P(0,245 \leqslant Y \leqslant 0,255) \approx 0,0919$ à 10^{-4} près.

$P(0,235 \leqslant Y \leqslant 0,265) \approx 0,2710$ à 10^{-4} près.

b) Les résultats de la question précédente et ceux obtenus en **1. d)** sont à peu près égaux ; d'où, la conjecture : la loi de F peut être approchée par la loi de Y, c'est-à-dire la loi normale $\mathcal{N}\left(0,25 ; \frac{3}{1\ 600}\right)$.

c) $P(0,2 \leqslant F \leqslant 0,3) = P(20 \leqslant X \leqslant 30) = P(19,5 \leqslant X \leqslant 30,5)$ par correction de continuité.

D'où, $P(0,2 \leqslant F \leqslant 0,3) \approx P(0,195 \leqslant Y \leqslant 0,305) \approx 0,7960$ à 10^{-4} près.

Activité 2

1 La fréquence observée de poissons marqués lors de la recapture n'est pas nécessairement la même que la proportion p de poissons marqués dans l'étang : cela est dû à la fluctuation d'échantillonnage.

2 a) $p-\frac{1}{25}\leqslant F\leqslant p+\frac{1}{25}$ équivaut successivement à :

$p-\frac{1}{25}\leqslant F$ et $F\leqslant p+\frac{1}{25}$; $p\leqslant F+\frac{1}{25}$ et $p\geqslant F-\frac{1}{25}$;

d'où $F-\frac{1}{25}\leqslant p\leqslant F+\frac{1}{25}$.

b) D'après la question précédente, en faisant le pari de l'énoncé, on obtient :

$$\frac{50}{625}-\frac{1}{25}\leqslant p\leqslant\frac{50}{625}+\frac{1}{25}$$

soit $0,04 \leqslant p \leqslant 0,12$.

c) D'après la question précédente, on obtient :

$$0,04\leqslant\frac{200}{N}\leqslant 0,12 \text{ soit } \frac{200}{0,12}\leqslant N\leqslant\frac{200}{0,04};$$

et comme N est un entier : $1\ 667 \leqslant N \leqslant 5\ 000$.

3 a) $0,08-1,96\frac{\sqrt{0,08\times 0,92}}{25}\leqslant\frac{200}{N}\leqslant 0,08+1,96\frac{\sqrt{0,08\times 0,92}}{25}$,

ce qui équivaut à :

$$\frac{200}{0,08+1,96\frac{\sqrt{0,08\times 0,92}}{25}}\leqslant N\leqslant\frac{200}{0,08-1,96\frac{\sqrt{0,08\times 0,92}}{25}};$$

et comme N est un entier : $1\ 975 \leqslant N \leqslant 3\ 405$.

b) L'intervalle qui donne l'encadrement plausible de N le plus précis est donc celui de la question **3. a)**.

PROBLÈMES OUVERTS

1 • Notons F_n la variable aléatoire indiquant la fréquence de l'apparition du 1 au terme de n lancers d'un dé parfait ; alors :

$$I_1 = \left[\frac{1}{6} - 1{,}96\frac{\sqrt{5}}{6\sqrt{n}} ; \frac{1}{6} + 1{,}96\frac{\sqrt{5}}{6\sqrt{n}}\right]$$

est un intervalle de fluctuation de F_n au seuil de 95 % dans le cas du dé cubique (sous les conditions $n \geqslant 30$; $n \times \frac{1}{6} \geqslant 5$; $n \times \frac{5}{6} \geqslant 5$; ce qui se réduit à $n \geqslant 30$).

• De même, $I_2 = \left[\frac{1}{4} - 1{,}96\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{n}} ; \frac{1}{4} + 1{,}96\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de fluctuation de F_n au seuil de 95 % dans le cas du dé tétraédrique (sous les conditions $n \geqslant 30$; $n \times \frac{1}{4} \geqslant 5$; $n \times \frac{3}{4} \geqslant 5$; ce qui se réduit à $n \geqslant 30$).

On peut alors deviner le nombre de faces initialement choisi par le programme, avec un risque d'erreur d'au plus 5 %, si les intervalles de fluctuation I_1 et I_2 sont disjoints, c'est-à-dire si :

$$\frac{1}{6} + 1{,}96\frac{\sqrt{5}}{6\sqrt{n}} < \frac{1}{4} - 1{,}96\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{n}}$$

soit
$$\frac{1{,}96}{\sqrt{n}}\left(\frac{\sqrt{5}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) < \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$$

ou encore $\sqrt{n} > (2\sqrt{5} + 3\sqrt{3}) \times 1{,}96$; et comme n est un entier : $n \geqslant 360$.

Remarque. La condition $n \geqslant 30$ est satisfaite.
La valeur minimale de n recherchée est donc 360.

2 Notons X la variable aléatoire indiquant le nombre de personnes qui choisissent la première pièce.
X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(100 ; 0{,}5)$. Notons N le nombre d'ordinateurs de chacune des deux pièces.
Chaque personne peut trouver un ordinateur disponible dans la salle de son choix si :

$$X \leqslant N \text{ et } 100 - X \leqslant N$$

c'est-à-dire, si : $100 - N \leqslant X \leqslant N$

ou encore : $1 - \frac{N}{100} \leqslant \frac{X}{100} \leqslant \frac{N}{100}$.

On veut donc que :

$$P\left(\frac{X}{100} \in \left[0{,}5 - \left(\frac{N}{100} - 0{,}5\right) ; 0{,}5 + \left(\frac{N}{100} - 0{,}5\right)\right]\right) \geqslant 0{,}95.$$

Or, l'intervalle de fluctuation centré en 0,5 au seuil de 95 % de la variable $\frac{X}{100}$ est :

$$\left[0{,}5 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}5 \times 0{,}5}}{\sqrt{100}} ; 0{,}5 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}5 \times 0{,}5}}{\sqrt{100}}\right] ;$$

les conditions $n = 100 \geqslant 30$, $np = 50 \geqslant 5$ et $n(1 - p) = 50 \geqslant 5$ sont satisfaites.

On veut donc que :

$$\frac{N}{100} - 0{,}5 \geqslant 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}5 \times 0{,}5}}{\sqrt{100}}$$

soit $N \geqslant 60$ (N est un entier).

Le nombre minimal d'ordinateurs dans chacune des deux pièces peut donc être estimé à 60.

EXERCICES Application (page 442)

1 **1.** $n = 900 \geqslant 30$; $np = 900 \times 0{,}9 = 810 \geqslant 5$;
$n(1 - p) = 900 \times 0{,}1 = 90 \geqslant 5$.
Les trois conditions d'approximation sont donc vérifiées.

2. Intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence de consommateurs satisfaits de M sur un échantillon aléatoire de taille 900 :

$$I = \left[0{,}9 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}9 \times 0{,}1}}{\sqrt{900}} ; 0{,}9 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}9 \times 0{,}1}}{\sqrt{900}}\right]$$

soit I = [0,8804 ; 0,9196].

3. $f_{obs} = \frac{774}{900} = 0{,}86$, $f_{obs} \notin I$; donc, l'hypothèse $p = 0{,}9$ est rejetée au seuil de risque de 5 % : les résultats du sondage ne sont pas en accord avec l'annonce publicitaire.

2 **1.** $I = \left[0{,}6 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}6 \times 0{,}4}}{\sqrt{500}} ; 0{,}6 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}6 \times 0{,}4}}{\sqrt{500}}\right]$

soit $I \approx [0{,}557 ; 0{,}643]$.

2. $n = 500 \geqslant 30$; $np = 500 \times 0{,}6 = 300 \geqslant 5$;
$n(1 - p) = 500 \times 0{,}4 = 200 \geqslant 5$.
Les trois conditions d'approximation sont vérifiées ; donc I représente un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de F_{500} et ainsi $P(F_{500} \in I) \approx 0{,}95$.

3. $f_{obs} = \frac{320}{500} = 0{,}64$ donc $f_{obs} \in I$.
On peut donc affirmer que la fréquence observée de canettes recyclées correspond à la proportion $p = 0{,}6$.

3 **1.** • Pour les garçons :

$$n_G = 550,\ n_G p_G = 550 \times 0{,}26 = 143$$

et : $n_G(1 - p_G) = 550 \times 0{,}74 = 407$.

• Pour les filles :

$$n_F = 450,\ n_F p_F = 90$$

et : $n_F(1 - p_F) = 360$.

Dans les deux cas, les trois conditions d'application de la règle de prise de décision sont vérifiées.

2. Pour les garçons :

$$\mathrm{I_G} = \left[0{,}26 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}26\times0{,}74}}{\sqrt{550}}\ ;\ 0{,}26 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}26\times0{,}74}}{\sqrt{550}}\right]$$

soit : $\mathrm{I_G} \approx [0{,}223\ ; 0{,}297]$.

Pour les filles :

$$\mathrm{I_F} = \left[0{,}2 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}2\times0{,}8}}{\sqrt{450}}\ ;\ 0{,}2 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}2\times0{,}8}}{\sqrt{450}}\right]$$

soit : $\mathrm{I_F} \approx [0{,}163\ ; 0{,}237]$.

3. $f_{\mathrm{Gobs}} = \dfrac{178}{550} \approx 0{,}324$ et $f_{\mathrm{Fobs}} = \dfrac{98}{450} \approx 0{,}218$; d'où :

$$f_{\mathrm{Gobs}} \notin \mathrm{I_G} \text{ et } f_{\mathrm{Fobs}} \in \mathrm{I_F}.$$

Donc, au seuil de risque de 5 %, la fréquence observée de jeunes fumeurs quotidiens lillois dans cet échantillon est en accord avec la proportion de jeunes fumeurs quotidiens de la population française pour les filles, mais pas pour les garçons.

4 **1.** La fourchette de sondage à 95 % de confiance de la proportion de personnes envisageant de voter pour M. Lepetit est :

$$\left[0{,}46 - \frac{1}{\sqrt{400}}\ ;\ 0{,}46 + \frac{1}{\sqrt{400}}\right] = [0{,}41\ ; 0{,}51].$$

2. M. Lepetit a raison : d'après la question précédente, il est plausible qu'il gagne avec 51 % des votes.

5 **1.** À partir de cette enquête, l'intervalle de confiance à 95 % de la proportion d'abstentions lors de ce premier tour est :

$$\left[0{,}525 - \frac{1}{\sqrt{1\,000}}\ ;\ 0{,}525 + \frac{1}{\sqrt{1\,000}}\right] \approx [0{,}493\,3\ ; 0{,}556\,7].$$

2. 0,536 4 appartient à la fourchette de sondage de la question précédente ; donc, le sondage de l'énoncé peut être qualifié de « bon ».

3. Un « bon » sondage sur un échantillon de 1 000 personnes vérifie :

$$\frac{\mathrm{N}}{1\,000} - \frac{1}{\sqrt{1\,000}} \leqslant 0{,}5364 \leqslant \frac{\mathrm{N}}{1\,000} + \frac{1}{\sqrt{1\,000}}$$

où N est le nombre de personnes sondées ayant répondu NON. Ainsi :

$$\frac{\mathrm{N}}{1\,000} \leqslant 0{,}5364 + \frac{1}{\sqrt{1\,000}} \text{ et } \frac{\mathrm{N}}{1\,000} \geqslant 0{,}5364 - \frac{1}{\sqrt{1\,000}}$$

et, comme N est un entier, on a : $505 \leqslant \mathrm{N} \leqslant 568$.

6 **1.** Intervalle de confiance à 95 % de la proportion de Pile :

$$\left[\frac{120}{200} - \frac{1}{\sqrt{200}}\ ;\ \frac{120}{200} + \frac{1}{\sqrt{200}}\right] \approx [0{,}529\ ; 0{,}671].$$

Comme 0,5 n'appartient pas à cet intervalle, il est donc vraisemblable que cette pièce ne soit pas équilibrée.

2. Pour pouvoir affirmer au niveau de confiance de 95 % que la pièce est équilibrée, il faut que :

$$\frac{\mathrm{N}}{200} - \frac{1}{\sqrt{200}} \leqslant 0{,}5 \leqslant \frac{\mathrm{N}}{200} + \frac{1}{\sqrt{200}}$$

où N est le nombre de Pile sur les 200 lancers.

Ainsi :

$$\frac{\mathrm{N}}{200} \leqslant 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{200}} \text{ et } \frac{\mathrm{N}}{200} \geqslant 0{,}5 - \frac{1}{\sqrt{200}}$$

et, comme N est entier, on a :

$$86 \leqslant \mathrm{N} \leqslant 114.$$

3. a) $\left[0{,}6 - 1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}6\times0{,}4}}{\sqrt{200}}\ ;\ 0{,}6 + 1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}6\times0{,}4}}{\sqrt{200}}\right]$

$\approx [0{,}532\ ; 0{,}668]$.

Comme précédemment, 0,5 n'appartient pas à cet intervalle ; il est donc vraisemblable que cette pièce ne soit pas équilibrée.

b) D'après la calculatrice, $0{,}5 \in [u_k\ ; v_k]$ pour $87 \leqslant k \leqslant 113$: il s'agit des valeurs possibles du nombre de Pile sur 200 lancers pour pouvoir affirmer au niveau de confiance de 95 % que la pièce est équilibrée.

4. Les deux intervalles de confiance ont donné des résultats quasiment identiques.

7 **1.** L'amplitude de l'intervalle de confiance :

$$\left[f_{\mathrm{obs}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f_{\mathrm{obs}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

au niveau 95 % de la proportion p de boules rouges de l'urne est $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

On cherche donc un entier naturel non nul n qui vérifie $\dfrac{2}{\sqrt{n}} = 0{,}1$. On trouve alors $n = 400$.

8 $\dfrac{2}{\sqrt{\mathrm{N}}} = \dfrac{1}{10}\dfrac{2}{\sqrt{n}}$ équivaut à $\sqrt{\mathrm{N}} = 10\sqrt{n}$ ou encore $\mathrm{N} = 100\,n$.

Ainsi, pour obtenir un intervalle de confiance d'une proportion à 95 % dix fois plus petit, il faut multiplier la taille d'un échantillon par 100.

9 **1.** Le rayon de l'intervalle de confiance :

$$\left[f_{\mathrm{obs}} - \frac{1}{\sqrt{1\,000}}\ ;\ f_{\mathrm{obs}} + \frac{1}{\sqrt{1\,000}}\right]$$

au niveau 95 % est $\dfrac{1}{\sqrt{1\,000}} \approx 3$ %.

Cela explique l'expression « marge d'erreur d'environ ± 3 % au niveau de confiance de 95 % ».

2. $\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}01$ équivaut à $n = 10\,000$. Il suffit donc de sonder 10 000 personnes pour obtenir une marge d'erreur de ± 1 % au niveau de confiance de 95 %.

EXERCICES Activités de recherche (page 448)

14 **Contrôle de fluctuation**

• Les outils

– Intervalles de fluctuation (celui vu en classe de Seconde et celui vu cette année).

• Les objectifs

– Mise en évidence du lien entre le nombre de lancers n et le rayon d'un intervalle de fluctuation de F_n.

1. a) $n \geqslant 30$; $n \times \dfrac{1}{4} \geqslant 5$; $n \times \dfrac{3}{4} \geqslant 5$. Les conditions d'approximation sont vérifiées dès que $n \geqslant 30$.

b) Intervalle de fluctuation asymptotique de F_n au seuil de 95 % :

$$\left[0,25-1,96\frac{\sqrt{0,25\times 0,75}}{\sqrt{n}}\ ;\ 0,25+1,96\frac{\sqrt{0,25\times 0,75}}{\sqrt{n}}\right].$$

c) Le nombre n cherché vérifie donc :

$$1,96\frac{\sqrt{0,25\times 0,75}}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{100},$$

ce qui équivaut à $\sqrt{n} \geqslant 25 \times 1,96\sqrt{3}$; donc $n \geqslant 7\ 203$.

Au risque d'erreur d'environ 5 %, 7 203 lancers suffisent pour que la fréquence d'apparition du 1 soit éloignée d'au plus 0,01 de la valeur théorique 0,25.

2. a) Intervalle de fluctuation de F_n au seuil de 95 % vu en Seconde :

$$\left[0,25-\frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ 0,25+\frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$

b) Le nombre n cherché vérifie donc :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{100} \quad \text{soit } n \geqslant 10\ 000.$$

Au risque d'erreur d'environ 5 %, 10 000 lancers suffisent pour que la fréquence d'apparition du 1 soit éloignée d'au plus 0,01 de la valeur théorique 0,25.

3. D'après les questions précédentes, c'est l'intervalle de fluctuation vu en Terminale (**1. b)**) qui permet d'atteindre l'objectif avec le moins de lancers.

15 **Approximation de π**

• Les outils

– Intervalle de confiance.

• Les objectifs

– Utiliser la méthode de Monte-Carlo pour déterminer une approximation de pi.

1. a) Intervalle de confiance de p au niveau 95 % :

$$\left[\frac{1\ 977}{2\ 500}-\frac{1}{\sqrt{2\ 500}}\ ;\ \frac{1\ 977}{2\ 500}+\frac{1}{\sqrt{2\ 500}}\right]=[0,770\ 8\ ;0,810\ 8].$$

b) $p = \dfrac{\text{Aire du quart de disque}}{\text{Aire du carré}} = \dfrac{\pi}{4}$.

D'après la question précédente, un encadrement de π au niveau de confiance de 95 % est :

$$[0,770\ 8 \times 4\ ;\ 0,810\ 8 \times 4] = [3,083\ 2\ ;\ 3,243\ 2].$$

2. a) Intervalle de confiance de p au niveau de 95 % :

$$\left[0,790\ 8-1,96\frac{\sqrt{0,790\ 8\times 0,209\ 2}}{\sqrt{250\ 0}}\ ;\ 0,790\ 8+1,96\frac{\sqrt{0,790\ 8\times 0,209\ 2}}{\sqrt{25\ 00}}\right]$$

$$\approx[0,774\ 8\ ;0,806\ 8].$$

b) D'après la question précédente, un encadrement de π au niveau de confiance de 95 % est :

$$[0,774\ 8\times 4\ ;0,806\ 8\times 4]=[3,099\ 2\ ;3,227\ 2].$$

3. D'après les questions précédentes, l'intervalle de confiance permettant d'obtenir l'estimation la plus précise de π est celui vu à la question **2.**

Le premier intervalle de confiance donne un encadrement de π d'amplitude :

$$\frac{2}{\sqrt{n}}\times 4 = \frac{8}{\sqrt{n}}.$$

Ainsi, $\dfrac{8}{\sqrt{n}} \leqslant 0,1$ équivaut à $n \geqslant 6\ 400$. À partir de 6 400 points choisis au hasard dans ce carré, on peut obtenir, à l'aide du premier intervalle de confiance, un encadrement de π d'amplitude inférieure ou égale à 0,1.

16 **Narration de recherche**

Notons X la variable aléatoire indiquant le nombre de lycéens ayant choisi la première salle du réfectoire.

X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(600\ ;\ 0,5)$.

Posons N le nombre de places dans chacune des deux salles.

Chaque élève trouve une place dans la salle qu'il a choisie si $X \leqslant N$ et $600 - X \leqslant N$, c'est-à-dire si :

$$600 - N \leqslant X \leqslant N$$

ou encore $1 - \dfrac{N}{600} \leqslant \dfrac{X}{600} \leqslant \dfrac{N}{600}$.

On veut donc que :

$$P\left(\frac{X}{600}\in\left[0,5-\left(\frac{N}{600}-0,5\right)\ ;\ 0,5+\left(\frac{N}{600}-0,5\right)\right]\right)\geqslant 0,99.$$

Or, l'intervalle de fluctuation centré en 0,5 au seuil de 99 % de la variable $\dfrac{X}{600}$ est :

$$\left[0,5-2,58\frac{\sqrt{0,5\times 0,5}}{\sqrt{600}}\ ;\ 0,5+2,58\frac{\sqrt{0,5\times 0,5}}{\sqrt{600}}\right].$$

Les conditions :

$$n = 600 \geqslant 30,\ np = 300 \geqslant 5 \text{ et } n(1-p) \geqslant 300$$

sont donc satisfaites.

On veut donc que :

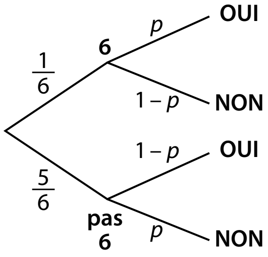
$$\frac{N}{600} - 0,5 \geqslant 2,58\frac{\sqrt{0,5\times 0,5}}{\sqrt{600}},$$

soit $N \geqslant 332$ (N est un entier).

Le nombre minimal de places qu'il doit y avoir dans chaque salle pour que la probabilité que chaque élève trouve une place dans la salle qu'il a choisie soit supérieure à 99 % est 332.

17 **Narration de recherche**

D'après l'arbre probabiliste ci-contre, la proportion de « OUI » avec un tel procédé est :



$$q = \frac{1}{6}p + \frac{5}{6}(1-p)$$

c'est-à-dire $q = \frac{-2}{3}p + \frac{5}{6}$.

Au niveau de confiance de 95 %, on a alors :

$$0{,}425 - \frac{1}{\sqrt{1\,000}} \leqslant q \leqslant 0{,}425 + \frac{1}{\sqrt{1\,000}}$$

$$0{,}425 - \frac{1}{\sqrt{1\,000}} \leqslant \frac{-2}{3}p + \frac{5}{6} \leqslant 0{,}425 + \frac{1}{\sqrt{1\,000}}$$

$$\frac{-3}{2}\left(0{,}425 + \frac{1}{\sqrt{1\,000}} - \frac{5}{6}\right) \leqslant p \leqslant \frac{-3}{2}\left(0{,}425 - \frac{1}{\sqrt{1\,000}} - \frac{5}{6}\right)$$

D'où $p \in [0{,}565 ; 0{,}660]$ au niveau de confiance de 95 %.

18 **TD – Vérification du seuil d'un intervalle de fluctuation**

1. a) Dans la cellule D2, écrire la formule `=B2*B3`

Dans la cellule D3, écrire la formule :

```
= RACINE(B3*(1-B3)/B2)
```

b) Dans la cellule B6, écrire la formule :

```
=SI(B2>=30 ; « OUI » ; « NON »)
```

Dans la cellule B7, écrire la formule :

```
=SI(B2*B3>=5 ; « OUI » ; « NON »)
```

Dans la cellule B8, écrire la formule :

```
=SI(B2*(1-B3)>=5 ; « OUI » ; « NON »)
```

c) Dans la cellule F2, écrire la formule :

```
=CRITERE.LOI.BINOMIALE(B$2 ; B$3 ;
ALEA())/B$2
```

Puis la recopier vers le bas jusqu'à la cellule F1001.

2. a) Dans la cellule D6, écrire la formule :

```
= MOYENNE(F2 : F1001)
```

Dans la cellule D7, écrire la formule :

```
= ECARTYPE(F2 : F1001)
```

b) Dans la cellule G2, écrire la formule :

Excel :

```
=SI(ET(F2>=D$6-1,96*D$7 ;
F2<=D$6+1,96*D$7) ; 1 ; 0)
```

Calc :

```
=SI( (F2>=D$6-1,96*D$7) ET
(F2<=D$6+1,96*D$7) ; 1 ; 0)
```

Puis la recopier vers le bas jusqu'à la cellule `G1001` .

c) Dans la cellule I2, écrire la formule :

```
=SOMME(G2 : G1001)/1000
```

d) On constate que le résultat en I2 reste proche de 95 %, ce qui permet de vérifier ce seuil de 95 % de l'intervalle de fluctuation donné dans l'énoncé.

19 **TD – Un premier tour renversant**

1. a) Fourchettes de sondage à 95 % :

• pour Jacques Chirac :

$$\mathrm{I}_2 = \left[0{,}19 - \frac{1}{\sqrt{1\,000}} ; 0{,}19 + \frac{1}{\sqrt{1\,000}}\right] \approx [15{,}8\ \% ; 22{,}2\ \%] ;$$

• pour Lionel Jospin :

$$\mathrm{I}_2 = \left[0{,}18 - \frac{1}{\sqrt{1\,000}} ; 0{,}18 + \frac{1}{\sqrt{1\,000}}\right] \approx [14{,}8\ \% ; 21{,}2\ \%] ;$$

• pour Jean-Marie Le Pen :

$$\mathrm{I}_3 = \left[0{,}14 - \frac{1}{\sqrt{1\,000}} ; 0{,}14 + \frac{1}{\sqrt{1\,000}}\right] \approx [10{,}8\ \% ; 17{,}2\ \%].$$

b) Oui, les fourchettes obtenues contiennent les valeurs qu'elles sont censées estimer :

$$19{,}88\ \% \in \mathrm{I}_1 ; 16{,}18\ \% \in \mathrm{I}_2 ; 16{,}86\ \% \in \mathrm{I}_3.$$

c) D'après ces fourchettes de sondage, tous les duels entre ces trois candidats étaient plausibles : Chirac / Jospin ; Chirac / Le Pen et Jospin / Le Pen.

2. b) • L'issue 1 de cette formule se réalise si :

$$\text{ALEA} \leqslant 0{,}1988 ;$$

soit avec une probabilité de 19,88 %.

Il s'agit de la simulation d'un vote pour Jacques Chirac.

• L'issue 2 de cette formule se réalise si :

$$0{,}1988 < \text{ALEA} \leqslant 0{,}3606 ;$$

soit avec une probabilité de 16,18 %.

Il s'agit de la simulation d'un vote pour Lionel Jospin.

• L'issue 3 de cette formule se réalise si :

$$0{,}360\,1 < \text{ALEA} \leqslant 0{,}529\,2 ;$$

soit avec une probabilité de 16,86 %.

Il s'agit de la simulation d'un vote pour Jean-Marie Le Pen.

• L'issue 4 se réalise dans les autres cas : cette issue 4 représente un vote pour l'un des autres candidats à cette élection présidentielle de 2002.

c) Dans la cellule E4, écrire la formule :

```
= NB.SI(B2 : B1001 ; 1) / 1000
```

Dans la cellule F4, écrire la formule :

```
= NB.SI(B2 : B1001 ; 2) / 1000
```

Dans la cellule G4, écrire la formule :

```
= NB.SI(B2 : B1001 ; 3) / 1000
```

d) Dans la cellule E2, écrire la formule :

```
= E4 – 1/RACINE(1000)
```

Dans la cellule E3, écrire la formule :

```
= E4 + 1/RACINE(1000)
```

Puis recopier ces formules vers la droite jusqu'à la colonne G.

f) On n'obtient pas toujours le bon ordre : cela vient du fait que les résultats entre Lionel Jospin et Jean-Marie Le Pen sont très serrés et que la fluctuation d'échantillonnage reste relativement importante dans un échantillon de taille 1 000 (marge d'erreur d'environ ± 3 % au niveau de confiance de 95 %).

20 **TD – Essai thérapeutique**

1. a) D'après l'énoncé, dans chacun des deux cas, les trois conditions d'approximation sont vérifiées. Donc, les lois de F_A et de F_B peuvent être approchées respectivement par les lois normales :

$$\mathcal{N}\left(p\ ;\ \frac{p(1-p)}{n_A}\right) \text{ et } \mathcal{N}\left(p\ ;\ \frac{p(1-p)}{n_B}\right).$$

b) $E(F_A - F_B) = E(F_A) - E(F_B) = p - p$ donc :

$$E(F_A - F_B) = 0.$$

$$V(F_A - F_B) = V(F_A) + V(F_B) = \frac{p(1-p)}{n_A} + \frac{p(1-p)}{n_B}$$

donc :

$$\sigma(F_A - F_B) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n_A} + \frac{p(1-p)}{n_B}}.$$

D'après **1. a)**, $F_A - F_B$ suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type :

$$\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right)}.$$

Donc $X = \dfrac{F_A - F_B}{\sqrt{p(1-p)\left(\dfrac{1}{n_A} + \dfrac{1}{n_B}\right)}}$ suit la loi $\mathcal{N}(0\ ;1)$.

On sait alors que $P(-1{,}96 \leqslant X \leqslant 1{,}96) \approx 0{,}95$.

2. a) $n_A = 80,\ f_A = \dfrac{24}{80} = 0{,}3\ ;\ n_B = 120,\ f_A = \dfrac{30}{120} = 0{,}25\ ;$

$$\widehat{p} = \frac{80 \times 0{,}3 + 120 \times 0{,}25}{80 + 120} = 0{,}27.$$

Donc $x_{obs} = \dfrac{0{,}3 - 0{,}25}{\sqrt{0{,}27 \times 0{,}73\left(\dfrac{1}{80} + \dfrac{1}{120}\right)}} \approx 0{,}78\ ;$

soit $x_{obs} \in [-1{,}96\ ;\ 1{,}96]$.

Ainsi, on peut affirmer à l'aide de la règle de prise de décision que ces deux traitements ont le même taux de guérison.

b) $n_A = 800, f_A = 0{,}3\ ;\ n_B = 1200, f_A = 0{,}25\ ;$

$$\widehat{p} = \frac{800 \times 0{,}3 + 1200 \times 0{,}25}{800 + 1200} = 0{,}27.$$

Donc :

$$x_{obs} = \frac{0{,}3 - 0{,}25}{\sqrt{0{,}27 \times 0{,}73\left(\dfrac{1}{800} + \dfrac{1}{1200}\right)}} \approx 2{,}47\ ;$$

soit $x_{obs} \notin [-1{,}96\ ;1{,}96]$.

Ainsi, on peut affirmer au seuil de 5 %, que dans ce cas-là ces deux traitements n'ont pas le même taux de guérison.

EXERCICES Entraînement (page 453)

DE TÊTE

21 **a)** $\mu = 50$ et $\sigma = 1{,}2$; donc, environ 68 % des 1 000 nourrissons mesurent entre $\mu - \sigma = 48{,}8$ cm et $\mu + \sigma = 51{,}2$ cm, soit 680 nourrissons environ.

b) Il y a environ 0,3 % des 1 000 nourrissons qui ont une taille qui n'est pas comprise entre $\mu - 3\sigma = 46{,}4$ cm et $\mu + 3\sigma = 53{,}6$ cm, soit 3 nourrissons environ.

22 **1.** F_{100} peut modéliser la fréquence de 0 dans une suite de 100 chiffres choisis au hasard entre 0 et 9.

2. $E(F_{100}) = p = 0{,}1$;

$$\sigma(F_{100}) = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{0{,}1 \times 0{,}9}}{\sqrt{100}} = \frac{3}{100} = 0{,}03.$$

3. $n = 100 \geqslant 30$, $np = 10 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 90 \geqslant 5$.

Donc, les conditions permettent d'approcher la loi de F_{100} par la loi normale d'espérance 0,1 et de variance $0{,}03^2 = 0{,}0009$.

23 **1.** $f_{obs} = \dfrac{100}{400} = 0{,}25,\ f_{obs} \notin [0{,}16\ ;0{,}24]$;

donc, les résultats observés sur l'échantillon de 400 mots ne confirment pas l'hypothèse de l'énoncé $p = 0{,}2$ au seuil de risque de 5 %.

2. $f_{obs} \in [0{,}14\ ;0{,}26]$; donc, dans une prise de décision au seuil de 1 %, on accepte l'hypothèse de l'énoncé à partir des résultats observés.

24 Corrigé sur le site élève.

LOI NORMALE ET INTERVALLES

25 $\mu = 10{,}5$ et $\sigma = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$.

Posons X la variable aléatoire indiquant la moyenne de mathématiques d'un élève de Terminale S pris au hasard, alors :

$$P(X \in [\mu - \sigma\ ;\ \mu + \sigma]) \approx 0{,}683$$

et donc :

$$P(X \in [8\ ;13]) \approx \frac{2}{3}.$$

Le proviseur de ce lycée a donc raison.

26 Corrigé sur le site élève.

27

μ	0	**3**	**–0,4**	500
σ	1	4	**0,8**	100
I	**[–2,58 ; 2,58]**	[–1 ; 7]	[–2 ; 1,2]	**[400 ; 600]**
P(X ∈ I)	0,99	**0,683**	0,954	0,683

μ	**5**	0,4	**0**	**–3**
σ	**0,510**	0,1	**5**	**1**
I	[4 ; 6]	**[0,2 ; 0,6]**	[–5 ; 5]	[–6 ; 0]
P(X ∈ I)	0,95	0,954	0,683	0,997

FRÉQUENCE DE SUCCÈS

28 $E(F) = p$; $\sigma(F) = \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$.

Si $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$, alors la loi de F peut être approchée par la loi $\mathcal{N}\left(p\ ;\ \dfrac{p(1-p)}{n}\right)$.

a) $E(F) = 0{,}5$; $\sigma(F) = \dfrac{\sqrt{0{,}5\times 0{,}5}}{\sqrt{400}} = \dfrac{1}{40}$.

$n = 400$, $np = 200$ et $n(1-p) = 200$; donc la loi de F peut être approchée par la loi $\mathcal{N}\left(0{,}5\ ;\ \dfrac{1}{1600}\right)$.

b) $E(F) = \dfrac{12}{32} = 0{,}375$; $\sigma(F) = \dfrac{\sqrt{0{,}375\times 0{,}625}}{\sqrt{100}} = \dfrac{\sqrt{15}}{80}$.

$n = 100$, $np = 37{,}5$ et $n(1-p) = 62{,}5$; donc la loi de F peut être approchée par la loi $\mathcal{N}\left(0{,}375\ ;\ \dfrac{3}{1280}\right)$.

c) $E(F) = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$; $\sigma(F) = \dfrac{\sqrt{5\times 13}}{18\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{26}}{36}$.

$n = 10$; donc on ne peut pas approcher la loi de F par une loi normale.

29 Corrigé sur le site élève.

30 **1.** Les valeurs possibles de la proportion p de boule(s) rouge(s) dans l'urne sont : {0,2 ; 0,4 ; 0,6 ; 0,8}.

2. a) $I = \left[p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$.

b) $1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}2\times 0{,}8}}{\sqrt{n}} < 0{,}1$ équivaut à $\sqrt{n} > 1{,}96\sqrt{16}$ et comme n est entier : $n \geqslant 62$.

Si $p = 0{,}2$ ou si $p = 0{,}8$, le rayon de l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence de boules rouges est inférieur à 0,1 pour un nombre de tirages supérieur ou égal à 62.

c) Si le rayon de l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence de boules rouges est inférieur à 0,1 dans chacun des quatre cas, alors ces 4 intervalles sont disjoints 2 à 2 ; on trouve ainsi la proportion de boules rouges dans l'urne avec un risque d'erreur d'au plus 5 %.

Il reste encore à résoudre l'inégalité :

$1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}4\times 0{,}6}}{\sqrt{n}} < 0{,}1$ ce qui équivaut à $\sqrt{n} > 1{,}96\sqrt{24}$

et comme n est entier : $n \geqslant 93$.

On a $n \geqslant 62$ et $n \geqslant 93$: donc un nombre suffisant de tirages permettant de répondre au problème est 93.

3. a) N représente le nombre de tirages, C compte le nombre de boules rouges obtenues au fil des tirages et P est la proportion de boules rouges dans l'urne.

PRISE DE DÉCISION

31 Corrigé sur le site élève.

32 **1. a)** $n = 11\ 748 \geqslant 30$; $np = 5{,}286\ 6 \geqslant 5$; $n(1-p) = 11\ 742{,}713\ 4 \geqslant 5$.

Les trois conditions d'application de la règle de prise de décision sont remplies.

b) Intervalle de fluctuation de la fréquence de leucémies sur un échantillon aléatoire de 11 748 enfants de moins de 14 ans :

• à 95 %, $I_1 = \left[0{,}000\ 45 - 1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}000\ 45\times 0{,}999\ 55}}{\sqrt{117\ 48}}\ ;\ 0{,}000\ 45 + 1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}000\ 45\times 0{,}999\ 55}}{\sqrt{117\ 48}}\right]$

soit $I_1 \approx [0{,}000\ 06\ ;\ 0{,}000\ 84]$.

• à 99 %, $I_1 = \left[0{,}000\ 45 - 2{,}58\dfrac{\sqrt{0{,}000\ 45\times 0{,}999\ 55}}{\sqrt{117\ 48}}\ ;\ 0{,}000\ 45 + 2{,}58\dfrac{\sqrt{0{,}000\ 45\times 0{,}999\ 55}}{\sqrt{117\ 48}}\right]$

soit $I_2 \approx [0\ ;\ 0{,}000\ 96]$.

La borne inférieure négative a été ramenée à 0 pour éviter les valeurs aberrantes.

2. a) $f_{obs} = \dfrac{12}{11\ 748} \approx 0{,}001\ 02$; donc $f_{obs} \notin I_1$. Ainsi, au seuil de risque de 5 %, la fréquence observée de leucémies, chez les enfants de moins de 14 ans à Woburn, n'est pas en accord avec la proportion de leucémies chez les enfants de moins de 14 ans dans la population américaine.

b) $f_{obs} \notin I_2$; donc, au seuil de 1 %, nous avons la même conclusion que dans la question précédente.

33 Corrigé sur le site élève.

34 **Réciproque**

1. a) Vrai. D'après l'énoncé, $f_{obs} > p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$;

donc $f'_{obs} > f_{obs}$ implique que :

$f'_{obs} > p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$; donc f'_{obs} rejette la proportion p supposée au seuil de 5 %.

b) Faux. Si f'_{obs} rejette la proportion p supposée au seuil de 5 %, alors on peut avoir :

$f'_{obs} < p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$; donc $f'_{obs} < f_{obs}$.

c) Faux. Contre exemple, si $p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} < f'_{obs} < f_{obs}$.

d) Vrai. Si f'_{obs} est en accord avec la proportion p, alors :

$$p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant f'_{obs} \leqslant p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;$$

or, $p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} < f_{obs}$, donc $f'_{obs} < f_{obs}$.

2. a) Vrai.

$p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{2n}} < p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} < f_{obs}$;

donc $f_{obs} \notin \left[p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{2n}}\ ;\ p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{2n}}\right]$.

Ainsi, cela amène au rejet, au seuil de 5 %, de la proportion p supposée.

INTERVALLES DE CONFIANCE

35 Corrigé sur le site élève.

36 **1. a)** Intervalle de confiance de p au niveau 95 % :

$$\left[\frac{51}{500}-\frac{1}{\sqrt{500}}\ ;\ \frac{51}{500}+\frac{1}{\sqrt{500}}\right]\approx[0{,}057\ ;0{,}147].$$

b) Notons S, en km², la superficie du lac d'Annecy. D'après la question précédente, au niveau de confiance de 95 %, on a :

$$0{,}057 \leqslant \frac{S}{20\times 15} \leqslant 0{,}147,$$

soit 17,1 ⩽ S ⩽ 44,1.

2. a) Intervalle de confiance de p au niveau 95 % :

$$\left[0{,}102-1{,}96\frac{\sqrt{0{,}102\times 0{,}898}}{\sqrt{500}}\ ;\ 0{,}102+1{,}96\frac{\sqrt{0{,}102\times 0{,}898}}{\sqrt{500}}\right]$$

$$\approx[0{,}075\ ;0{,}129]$$

Au niveau de confiance de 95 %, on a :

$$0{,}075 \leqslant \frac{S}{300} \leqslant 0{,}129,$$

soit 22,5 ⩽ S ⩽ 38,7.

b) C'est le deuxième intervalle de confiance qui a permis d'obtenir l'estimation la plus précise de la superficie du lac d'Annecy.

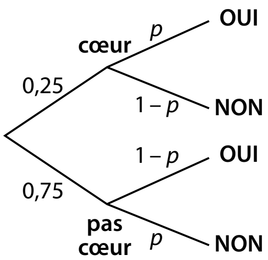
3. Avec le premier intervalle de confiance, l'encadrement de la superficie du lac d'Annecy a une amplitude inférieure ou égale à 1 km² si $\frac{2}{\sqrt{n}}\times 300 \leqslant 1$; soit $\sqrt{n} \geqslant 600$, ou encore $n \geqslant 360\ 000$.

Il faut donc tracer aléatoirement sur cette carte au moins 360 000 points pour avoir une telle précision dans l'encadrement.

37 **1. a)** D'après l'arbre probabiliste ci-dessous :

$$q = 0{,}25p + 0{,}75(1-p),$$

soit $q = -0{,}5p + 0{,}75$.



2. a) Au niveau de confiance de 95 %, on a :

$$q\in\left[\frac{1\ 375}{2\ 500}-\frac{1}{\sqrt{2\ 500}}\ ;\ \frac{1\ 375}{2\ 500}+\frac{1}{\sqrt{2\ 500}}\right],$$

soit $q \in [0{,}53\ ;\ 0{,}57]$.

b) D'après les questions précédentes, au niveau de confiance de 95 %, on a : $0{,}53 \leqslant -0{,}5p + 0{,}75 \leqslant 0{,}57$,

soit : $$\frac{0{,}18}{0{,}5} \leqslant p \leqslant \frac{0{,}22}{0{,}5}.$$

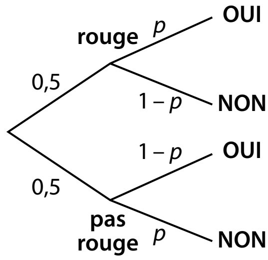
Ainsi, [0,36 ; 0,44] est un intervalle de confiance de p au niveau 95 %.

3. D'après l'arbre probabiliste ci-après :

$$q = 0{,}5p + 0{,}5(1-p),$$

soit $q = 0{,}5$.

Le problème est que le sondeur ne pourra pas retrouver un intervalle de confiance de p à partir de celui de q car q ne dépend pas de p ; il est constant et égal à 0,5.



38 **1. a)** On veut $\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant e$ $(e > 0)$; soit :

$$\sqrt{n} \geqslant \frac{2}{e} \text{ ou encore } n \geqslant \frac{4}{e^2}.$$

b) Si $e = 0{,}1$, alors $n \geqslant 400$; si $e = 0{,}05$, alors $n \geqslant 1\ 600$; si $e = 0{,}01$, alors $n \geqslant 40\ 000$.

2. Pour avoir $\frac{2}{\sqrt{N}}=\frac{2}{k\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{k^2n}}$ $(k > 0)$, il suffit d'avoir $N = k^2n$; pour obtenir un intervalle de confiance d'amplitude k fois plus petite, il faut multiplier la taille de l'échantillon aléatoire par k^2.

AVEC LES TICE

39 **1. b)** Dans la cellule B2 (resp. C2), écrire la formule `=A2-0,1` (resp. `=A2+0,1`) puis recopiez-la vers le bas jusqu'à la ligne 102.

Dans la cellule D2 (resp. E2), écrire la formule :

`=A2-1,96*RACINE(A2*(1-A2))/10`

(resp. `=A2+1,96*RACINE(A2*(1-A2))/10`)

puis recopiez-la vers le bas jusqu'à la ligne 102.

d) Les intervalles de confiance sont centrés en f_{obs} ; donc, lorsque f_{obs} est « trop » proche de 0 ou de 1, on peut retrouver des valeurs aberrantes (valeurs négatives ou supérieures à 1) dans les intervalles de confiance correspondants.

e) D'après les graphiques, l'amplitude de IC2 est plus petite que celle de IC1, ou à peu près égale lorsque f_{obs} est proche de 0,5.

2. a) Pour $x \in [0\ ;\ 1]$, $f(x) = 0{,}392\sqrt{x(1-x)}$.

On remarque que $x(1-x) > 0$ pour $x \in]0\ ;1[$; donc f est dérivable sur $]0\ ;1[$ et $f'(x) = 0{,}392\frac{1-2x}{2\sqrt{x(1-x)}}$, pour $x \in]0\ ;1[$.

Ainsi $f'(x) \geqslant 0$ si, et seulement si, $1-2x \geqslant 0$ avec $x \in]0\ ;1[$ si, et seulement si, $0 < x \leqslant 0{,}5$.

D'où le tableau de variation de la fonction f sur [0 ; 1] ci-dessous :

x	0		0,5		1
f'	‖	+	0	−	‖
f	0	↗	0,196	↘	0

b) La fonction f de la question **2. a)** représente l'amplitude de IC2 en fonction de x qui joue le rôle de f_{obs}.

L'amplitude de IC1 est constante et égale à $\frac{2}{\sqrt{100}} = 0,2$.

D'après la question **2. a)**, l'amplitude de IC2 est, quelle que soit f_{obs}, inférieure à celle de IC1. On peut également remarquer que lorsque f_{obs} est proche de 0,5, alors l'amplitude de IC2 est proche de celle de IC1.

Prendre toutes les initiatives

40 Notons F_n, la variable aléatoire indiquant la fréquence d'apparition du 1 au terme de n lancers d'un dé parfait ; on obtient :

• $I_1 = \left[\frac{1}{6} - 1,96\frac{\sqrt{5}}{6\sqrt{n}} ; \frac{1}{6} + 1,96\frac{\sqrt{5}}{6\sqrt{n}}\right]$;

I_1 est un intervalle de fluctuation de F_n au seuil de 95 % dans le cas du dé cubique (sous les conditions $n \geqslant 30$; $n \times \frac{1}{6} \geqslant 5$; $n \times \frac{5}{6} \geqslant 5$, ce qui se réduit à $n \geqslant 30$).

• $I_2 = \left[\frac{1}{8} - 1,96\frac{\sqrt{7}}{8\sqrt{n}} ; \frac{1}{8} + 1,96\frac{\sqrt{7}}{8\sqrt{n}}\right]$;

I_2 est un intervalle de fluctuation de F_n au seuil de 95 % dans le cas du dé octaédrique (sous les conditions $n \geqslant 30$; $n \times \frac{1}{8} \geqslant 5$; $n \times \frac{7}{8} \geqslant 5$, ce qui se réduit à $n \geqslant 40$).

• $I_3 = \left[\frac{1}{12} - 1,96\frac{\sqrt{11}}{12\sqrt{n}} ; \frac{1}{12} + 1,96\frac{\sqrt{11}}{12\sqrt{n}}\right]$;

I_3 est un intervalle de fluctuation de F_n au seuil de 95 % dans le cas du dé dodécaédrique (sous les conditions $n \geqslant 30$; $\frac{n}{12} \geqslant 5$; $n \times \frac{11}{12} \geqslant 5$, ce qui se réduit à $n \geqslant 60$).

On peut alors deviner le nombre de faces initialement choisi par le programme, avec un risque d'erreur d'au plus 5 %, si les intervalles de fluctuation I_1 et I_2 et I_3 sont disjoints deux à deux ; c'est-à-dire si :

$$\frac{1}{12} + 1,96\frac{\sqrt{11}}{12\sqrt{n}} < \frac{1}{8} - 1,96\frac{\sqrt{7}}{8\sqrt{n}}$$

et
$$\frac{1}{8} + 1,96\frac{\sqrt{7}}{8\sqrt{n}} < \frac{1}{6} - 1,96\frac{\sqrt{5}}{6\sqrt{n}} ;$$

ce qui équivaut à :

$$\frac{1,96}{\sqrt{n}}\left(\frac{\sqrt{11}}{12} + \frac{\sqrt{7}}{8}\right) < \frac{1}{24} \quad \text{et} \quad \frac{1,96}{\sqrt{n}}\left(\frac{\sqrt{7}}{8} + \frac{\sqrt{5}}{6}\right) < \frac{1}{24} ;$$

soit :

$$\sqrt{n} > \left(2\sqrt{11} + 3\sqrt{7}\right) \times 1,96 \quad \text{et} \quad \sqrt{n} > \left(3\sqrt{7} + 4\sqrt{5}\right) \times 1,96 ;$$

ainsi, avec n entier : $n \geqslant 816$ et $n \geqslant 1095$, c'est-à-dire $n \geqslant 1095$.

La valeur minimale de n recherchée est donc 1 095.

Remarque. La condition $n \geqslant 60$ est satisfaite.

41 $p = \frac{100}{N}$ est la proportion de tortues marquées sur cette île, N représentant le nombre de tortues sur cette île. D'après l'énoncé, la recapture est assimilée à une suite de tirages au hasard et avec remise ; on a alors, au niveau de confiance de 95 %, l'encadrement suivant :

$$\frac{22}{50} - \frac{1}{\sqrt{50}} \leqslant \frac{100}{N} \leqslant \frac{22}{50} + \frac{1}{\sqrt{50}}$$

soit
$$\frac{100}{0,44 + \frac{1}{\sqrt{50}}} \leqslant N \leqslant \frac{100}{0,44 - \frac{1}{\sqrt{50}}}$$

et comme N est un entier : $172 \leqslant N \leqslant 334$.

EXERCICES Le jour du BAC (page 458)

42 Corrigé sur le site élève.

43 **1.** D'après le théorème de Moivre-Laplace :

$$\lim_{x\to\infty} P\left(-1,96 \leqslant \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant 1,96\right) \approx 0,95.$$

Or, $-1,96 \leqslant \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant 1,96$ équivaut successivement à :

$$-1,96\sqrt{np(1-p)} \leqslant X_n - np \leqslant -1,96\sqrt{np(1-p)} ;$$

$$p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

soit, avec $F_n \in I$, on obtient : $\lim_{n\to+\infty} P\left(F_n \in I\right) \approx 0,95$.

2. a) $I = \left[0,5 - 1,96\frac{\sqrt{0,5\times0,5}}{\sqrt{900}} ; 0,5 + 1,96\frac{\sqrt{0,5\times0,5}}{\sqrt{900}}\right] \approx [0,467 ; 0,533]$.

b) $I = \left[0,125 - 1,96\frac{\sqrt{0,125\times0,875}}{\sqrt{100}} ; 0,125 + 1,96\frac{\sqrt{0,125\times0,875}}{\sqrt{100}}\right] \approx [0,060 ; 0,190]$.

c) $I = \left[\frac{1}{6} - 1,96\frac{\sqrt{5}}{6\sqrt{400}} ; \frac{1}{6} + 1,96\frac{\sqrt{5}}{6\sqrt{400}}\right] \approx [0,130 ; 0,204]$.

44 **1. a)** $n = 120 \geqslant 30$, $np = 30 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 90 \geqslant 5$; donc, les trois conditions d'application de la règle de prise de décision sont remplies.

b) Sur un échantillon aléatoire de taille 120, l'intervalle de fluctuation de la fréquence de bonnes réponses à cette question est :

• à 95 % :

$I_1 = \left[0,25 - 1,96\frac{\sqrt{0,25\times0,75}}{\sqrt{120}} ; 0,25 + 1,96\frac{\sqrt{0,25\times0,75}}{\sqrt{120}}\right] \approx [0,172 ; 0,328]$.

• à 99 % :

$$I_2 = \left[0,25 - 2,58\frac{\sqrt{0,25\times 0,75}}{\sqrt{120}}\ ;\ 0,25 + 2,58\frac{\sqrt{0,25\times 0,75}}{\sqrt{120}}\right]$$

$$\approx [0,148\ ;0,352].$$

2. $f_{obs} = \dfrac{42}{120} = 0,35$, $f_{obs} \notin I_1$ et $f_{obs} \in I_2$; donc, les résultats observés sur l'échantillon rejettent l'hypothèse $p = 0,25$ au seuil de risque de 5 %, mais l'acceptent au seuil de 1 %.

45 **1.** • Si $\alpha_1 = \alpha_2$, alors on a clairement $u_{\alpha_1} = u_{\alpha_2}$.

• Si $\alpha_1 < \alpha_2$, alors $1 - \alpha_1 > 1 - \alpha_2$.

Donc $P\left(Z \in \left[-u_{\alpha_1}\ ;\ u_{\alpha_1}\right]\right) > P\left(Z \in \left[-u_{\alpha_2}\ ;\ u_{\alpha_2}\right]\right)$ (1).

Supposons $u_{\alpha_1} \leqslant u_{\alpha_2}$; alors $[-u_{\alpha_1} ; u_{\alpha_1}] \subset [-u_{\alpha_2} ; u_{\alpha_2}]$. Donc, $P(Z \in [-u_{\alpha_1} ; u_{\alpha_1}]) \leqslant P(Z \in [-u_{\alpha_2} ; u_{\alpha_2}])$ ce qui contredit (1).

Donc, notre supposition est fausse et $u_{\alpha_1} > u_{\alpha_2}$.

Réponse exacte : **b)**.

2. Si $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$, alors, d'après **1.**, $u_{\alpha_1} \geqslant u_{\alpha_2}$.

Donc, $u_{\alpha_1}\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \geqslant u_{\alpha_2}\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$ et $I_{\alpha_2} \subset I_{\alpha_1}$.

Réponse exacte : **b)**.

3. D'après la question précédente, $I_{0,05} \subset I_{0,01}$.

• Si $f_{obs} \in I_{0,05}$, alors $f_{obs} \in I_{0,01}$. Réponse exacte : **a)**.

• Si $f_{obs} \notin I_{0,05}$, alors on ne peut pas savoir si $f_{obs} \in I_{0,01}$ ou $f_{obs} \notin I_{0,01}$.

Réponse exacte : **c)**.

46 **1.** Intervalle de confiance de p au niveau 95 % :

$$\left[\frac{864}{900} - \frac{1}{\sqrt{900}}\ ;\ \frac{864}{900} + \frac{1}{\sqrt{900}}\right] \approx [0,926\ ;0,994].$$

2. Intervalle de confiance de p au niveau 95 % :

$$\left[0,96 - 1,96\frac{\sqrt{0,96\times 0,04}}{\sqrt{900}}\ ;\ 0,96 + 1,96\frac{\sqrt{0,96\times 0,04}}{\sqrt{900}}\right]$$

$$\approx [0,947\ ;0,973].$$

3. C'est le second intervalle de confiance qui a permis d'obtenir l'estimation la plus précise.

EXERCICES Pour aller plus loin (page 460)

47 **1. a)** Si $u_\alpha \leqslant u_\beta$, alors $\sigma u_\alpha \leqslant \sigma u_\beta$ et $I_\alpha \subset I_\beta$ ($\sigma > 0$).

Ainsi, $P(X \in I_\alpha) \leqslant P(X \in I_\beta)$, soit $1 - \alpha \leqslant 1 - \beta$ ou encore $\alpha \geqslant \beta$.

b) La contraposée de « si $\alpha < \beta$ alors $u_\alpha > u_\beta$ » est « si $u_\alpha \leqslant u_\beta$ alors $\alpha \geqslant \beta$ ».

c) D'après les questions précédentes, on sait que, si $0 < \alpha < \beta < 1$ alors $u_\alpha > u_\beta$.

Cela signifie que la fonction $\alpha \in]0 ; 1[\mapsto u_\alpha$ est strictement décroissante sur]0 ; 1[.

2. a) $n = 400 \geqslant 30$, $np = 40 \geqslant 5$ et $n(1 - p) = 360 \geqslant 5$.

Les trois conditions d'application de la règle de prise de décision sont donc remplies.

b) Les résultats de cette étude sont en accord avec l'annonce publicitaire lors d'une prise de décision au seuil de risque α si, et seulement si :

$$0,1 - u_\alpha\frac{\sqrt{0,1\times 0,9}}{\sqrt{400}} \leqslant f_{obs} \leqslant 0,1 + u_\alpha\frac{\sqrt{0,1\times 0,9}}{\sqrt{400}}\ ;$$

ce qui revient à $0,1 - u_\alpha\dfrac{\sqrt{0,1\times 0,9}}{\sqrt{400}} \leqslant \dfrac{28}{400}$ (la deuxième inégalité est vérifiée quelle que soit α) ; soit :

$$u_\alpha \geqslant \frac{0,1 - 0,07}{0,015} \text{ ou encore } u_\alpha \geqslant 2.$$

c) Or, on sait que $u_{0,046} \approx 2$. Donc, $u_\alpha \geqslant 2$ équivaut à $u_\alpha \geqslant u_{0,046}$. Ainsi, d'après la question **1. c)** : $\alpha \leqslant 0,046$.

Alors, pour que les résultats de cette étude soient en accord avec l'annonce publicitaire lors d'une prise de décision au seuil α, il faut que $\alpha \leqslant \alpha_0$, avec $\alpha_0 \approx 4,6$ %.

d) D'après la question précédente, les résultats de cette étude sont en accord avec l'annonce publicitaire lors d'une prise décision au seuil 1 % ; mais ce n'est pas le cas au seuil de 5 %.

48 **1.** $n = 100 \geqslant 30$, $np = 12,5 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 87,5 \geqslant 5$.

Les trois conditions d'approximation sont vérifiées. Donc, la loi de F peut être approchée par la loi $\mathcal{N}\left(\dfrac{1}{8}\ ;\ \dfrac{\frac{1}{8}\times\frac{7}{8}}{100}\right)$

soit $\mathcal{N}\left(\dfrac{1}{8}\ ;\ \dfrac{7}{6\,400}\right)$.

2. D'après la calculatrice, $P(F \leqslant t) = 0,95$ pour $t \approx 0,179\,4$.

3. $f_{obs} = 0,2$, donc $f_{obs} > t$. Donc, au seuil de 5 %, on peut présumer que Léo a triché.

4. D'après la calculatrice, $P(F \leqslant t) = 0,99$ pour $t \approx 0,201\,9$: $f_{obs} \leqslant t$. Donc, au seuil de 1 %, Léo n'est pas considéré comme un tricheur.

49 **1.** D'après la calculatrice, un intervalle I centré en 92,5 tel que $P(X \in I) = 0,95$, est : $I \approx [92,441 ; 92,559]$.

2. $m_{obs} = \dfrac{3\times 92,1 + 2\times 92,2 + \ldots + 2\times 92,9}{30} \approx 92,453$ cm.

3. $m_{obs} \in I$. Donc, au vu des résultats de cet échantillon, on accepte l'hypothèse $m = 92,5$ cm au seuil de risque de 5 %.

50 **1.** $\overline{S}$ suit la loi $\mathcal{N}\left(\mu\ ;\ \dfrac{49}{25}\right)$; donc :

$$P\left(\mu - 1,96\sqrt{\frac{49}{25}} \leqslant \overline{S} \leqslant \mu + 1,96\sqrt{\frac{49}{25}}\right) \approx 0,95.$$

Soit $P\left(\mu \leqslant \overline{S} + 1,96\times\dfrac{7}{5} \text{ et } \mu \geqslant \overline{S} - 1,96\times\dfrac{7}{5}\right) \approx 0,95$, ou encore $P\left(\mu \in \left[\bar{S} - 1{,}96 \times \frac{7}{5}\ ;\ \bar{S} + 1{,}96 \times \frac{7}{5}\right]\right) \approx 0{,}95.$

2. Intervalle de confiance de μ au niveau de confiance de 95 % :

$$\left[137{,}7 - 1{,}96 \times \frac{7}{5}\ ;\ 137{,}7 + 1{,}96 \times \frac{7}{5}\right] = [134{,}956\ ;140{,}444].$$

PROLONGEMENT DU TD 20

51 **1.** A (fumeurs) : $n_A = 1240$, $f_A = \dfrac{347}{1\,240}$;

B (non fumeurs) : $n_B = 1510$, $f_B = \dfrac{484}{1\,510}$.

Donc $x_{obs} = \dfrac{\dfrac{347}{1\,240} - \dfrac{484}{1\,510}}{\sqrt{\widehat{p}\left(1-\widehat{p}\right)\left(\dfrac{1}{1\,240} + \dfrac{1}{1\,510}\right)}}$ avec

$\widehat{p} = \dfrac{347+484}{1\,240+1\,510} = \dfrac{831}{2\,750}$. Ainsi $x_{obs} \approx -2{,}312$.

a) $x_{obs} \notin [-1{,}96\ ;\ 1{,}96]$; donc l'hypothèse de l'énoncé est rejetée au seuil de 5 %.

b) $x_{obs} \in [-2{,}58\ ;\ 2{,}58]$; donc on accepte l'hypothèse de l'énoncé au seuil de 1 %.

3. **Casio Graph 35+**

Ti 83 Plus

52 **1. a)** $x_{obs} = \dfrac{0{,}15 - 0{,}2}{\sqrt{\widehat{p}\left(1-\widehat{p}\right)\left(\dfrac{1}{400} + \dfrac{1}{300}\right)}}$

avec $\widehat{p} = \dfrac{400 \times 0{,}15 + 300 \times 0{,}2}{400+300} = \dfrac{120}{700}$.

Ainsi $x_{obs} \approx -1{,}737$.

b) $x_{obs} \in [-1{,}96\ ;\ 1{,}96]$: dans ce cas, au seuil de 5 %, on accepte l'hypothèse $p_A = p_B$.

2. Si les effectifs n_A et n_B sont multipliés par k, alors $\widehat{p}$ ne varie pas :

$$\frac{kn_A f_A + kn_B f_B}{kn_A + kn_B} = \frac{n_A f_A + n_B f_B}{n_A + n_B}$$

et la valeur x_{obs} devient alors :

$$\frac{f_A - f_B}{\sqrt{\widehat{p}\left(1-\widehat{p}\right)\left(\dfrac{1}{kn_A} + \dfrac{1}{kn_B}\right)}} = \sqrt{k}\,x_{obs}.$$

3. Si les effectifs sont multipliés par 2, alors x_{obs} devient $\sqrt{2}x_{obs}$, soit environ $-2{,}456$.

$-2{,}456$ n'appartient pas à l'intervalle $[-1{,}96\ ;\ 1{,}96]$.

Dans ce cas, au seuil de 5 %, on rejette l'hypothèse $p_A = p_B$.

4. On aboutit à un rejet de l'égalité des proportions au seuil de 1 %, si $\sqrt{k}\,x_{obs} < -2{,}58$ soit :

$$\sqrt{k} > \frac{-2{,}58}{x_{obs}} \quad (x_{obs} < 0).$$

On obtient $k \geqslant 2{,}3$ (à 0,1 près). Il faut multiplier les effectifs par 2,3 (à 0,1 près) au minimum pour répondre à l'objectif demandé.