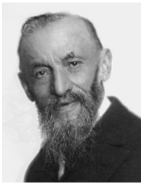
SUITES (Partie 1)

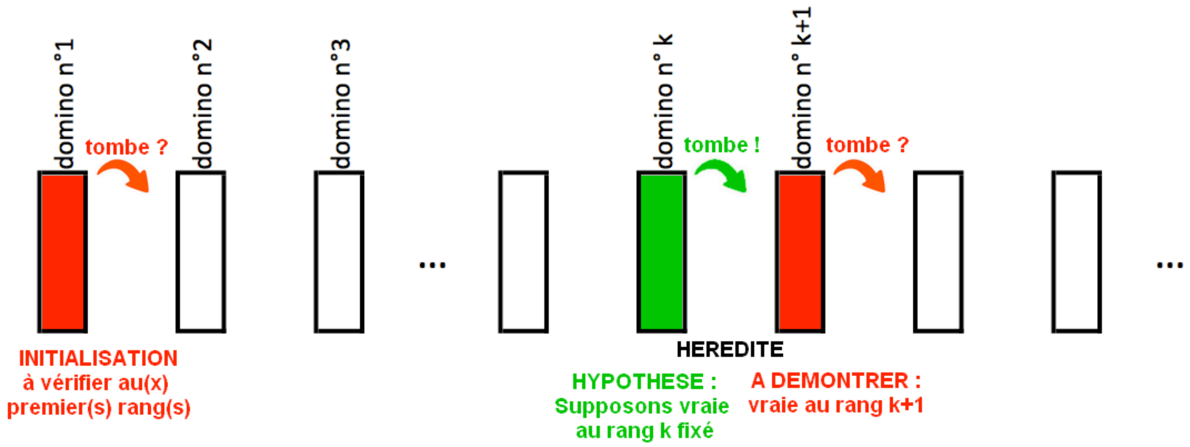
I. Raisonnement par récurrence

1) Le principe



C'est au mathématicien italien Giuseppe Peano (1858 ; 1932), ci-contre, que l'on attribue le principe du raisonnement par récurrence. Le nom a probablement été donné par Henri Poincaré (1854 ; 1912).

On considère une file illimitée de dominos placés côte à côte. La règle veut que lorsqu'un domino tombe, alors il fait tomber le domino suivant et ceci à n'importe quel niveau de la file. Alors, si le premier domino tombe, on est assuré que tous les dominos de la file tombent.



Définition : Une propriété est dite héréditaire à partir du rang n_0 si lorsque pour un entier $k \geq n_0$, la propriété est vraie, alors elle est vraie pour l'entier $k+1$.

Dans l'exemple, si on suppose qu'un domino (k) tombe alors le domino suivant ($k+1$) tombe également.

Principe du raisonnement par récurrence :
Si la propriété P est : - vraie au rang n_0 (Initialisation),
- héréditaire à partir du rang n_0 (Hérédité),
alors la propriété P est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Dans l'exemple, le premier domino tombe (initialisation). Ici $n_0 = 1$.
L'hérédité est vérifiée (voir plus haut).
On en déduit que tous les dominos tombent.

Remarque : Une démonstration par récurrence sur les entiers est mise en œuvre lorsque toute démonstration "classique" est difficile.

2) Exemples avec les suites

Méthode : Démontrer par récurrence l'expression générale d'une suite

Vidéo https://youtu.be/H6XJ2tB1_fg

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel *n* par $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ et $u_0 = 1$.

Démontrer par récurrence que : $u_n = (n+1)^2$.

- **Initialisation :** *→ Le premier domino tombe.*

$u_0 = 1$ et $(0+1)^2 = 1$.
La propriété est donc vraie pour *n* = 0.

- **Hérédité :**

  - Hypothèse de récurrence : *→ On suppose que le k-ième domino tombe.*
  Supposons qu'il existe un entier *k* tel que la propriété soit vraie : $u_k = (k+1)^2$.
  - Démontrons que : *→ Le k+1-ième domino tombe-t-il ?*
  La propriété est vraie au rang *k*+1 : $u_{k+1} = (k+2)^2$.

  $u_{k+1} = u_k + 2k + 3$, par définition
  $= (k+1)^2 + 2k + 3$, par hypothèse de récurrence
  $= k^2 + 2k + 1 + 2k + 3$
  $= k^2 + 4k + 4$ *→ Le k+1-ième domino tombe.*
  $= (k+2)^2$

- **Conclusion :** *→ Tous les dominos tombent.*

La propriété est vraie pour *n* = 0 et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel *n*, soit : $u_n = (n+1)^2$.

Méthode : Démontrer la monotonie par récurrence

Vidéo https://youtu.be/nMnLaE2RAGk

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel *n* par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$.

Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

On démontre que pour tout entier naturel *n*, on a : $u_{n+1} \geq u_n$

- **Initialisation :** $u_0 = 2$

$u_1 = \frac{1}{3} \times u_0 + 2 = \frac{1}{3} \times 2 + 2 = \frac{8}{3} > 2$

donc $u_0 < u_1$

- **Hérédité :**

  - Hypothèse de récurrence :

  Supposons qu'il existe un entier *k* tel que la propriété soit vraie : $u_k < u_{k+1}$.

  - Démontrons que : La propriété est vraie au rang *k*+1 : $u_{k+1} < u_{k+2}$.

On a $u_k < u_{k+1}$ donc : $\frac{1}{3}u_k < \frac{1}{3}u_{k+1}$ et donc $\frac{1}{3}u_k + 2 < \frac{1}{3}u_{k+1} + 2$ soit $u_{k+1} < u_{k+2}$.

- **Conclusion :**

La propriété est vraie pour *n* = 0 et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel *n*, soit : $u_n < u_{n+1}$ et donc la suite (u_n) est croissante.

3) Inégalité de Bernoulli

Soit un nombre réel a strictement positif.
Démontrons que pour tout entier naturel *n*, on a : $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Démonstration :

Vidéo https://youtu.be/H6XJ2tB1_fg

- **Initialisation :**

- La propriété est vraie pour *n* = 0.
En effet, $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$

- **Hérédité :**

  - Hypothèse de récurrence :

Supposons qu'il existe un entier *k* tel que la propriété soit vraie : $(1+a)^k \geq 1 + ka$

  - Démontrons que : La propriété est-elle vraie au rang *k*+1 ?

Démontrons alors que : $(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a$.

$(1+a)^{k+1} = (1+a)(1+a)^k \geq (1+a)(1+ka)$, d'après l'hypothèse de récurrence.

Donc : $(1+a)^{k+1} \geq 1 + ka + a + ka^2 \geq 1 + ka + a$, car $ka^2 \geq 0$.

Et donc : $(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a$.

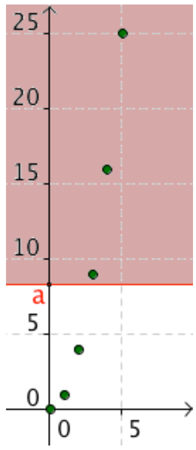
- **Conclusion :**

La propriété est vraie pour n = 0 et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

Remarque : L'initialisation est indispensable.
En effet, démontrons par exemple que la propriété "2^n est divisible par 3" est héréditaire sans vérifier l'initialisation.
Supposons qu'il existe un entier k tel que 2^k est divisible par 3.
$2^{k+1} = 2^k \times 2 = 3p \times 2$, où p est un entier (d'après l'hypothèse de récurrence).
$= 6p$
Donc 2^{k+1} est divisible par 3. L'hérédité est vérifiée et pourtant la propriété n'est jamais vraie.

II. Limite finie ou infinie d'une suite

1) Limite infinie



Exemple :
La suite (u_n) définie sur ℕ par $u_n = n^2$ a pour limite $+\infty$.
En effet, les termes de la suite deviennent aussi grand que l'on souhaite à partir d'un certain rang.
Si on prend un réel a quelconque, l'intervalle $]a;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Définitions : - On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle $]a;+\infty[$, a réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note :
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- On dit que la suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ si tout intervalle $]-\infty;b[$, b réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Algorithme permettant de déterminer un rang à partir duquel une suite croissante de limite infinie est supérieure à un nombre réel A :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 4u_n$.
Cette suite est croissante et admet pour limite $+\infty$.

Voici un algorithme écrit en langage naturel :

Langage naturel

Entrée
Saisir le réel A
 	
Initialisation
Affecter à n la valeur 0
Affecter à u la valeur 2
 	
Traitement des données
Tant que u < A
    Faire
        Affecter à n la valeur n + 1
        Affecter à u la valeur 4u
 	
Sortie
Afficher n

En appliquant cet algorithme avec A = 100, on obtient en sortie n = 3.
A partir du terme u_3, la suite est supérieure à 100.

En langage calculatrice, cela donne :

Vidéos dans la Playlist :
https://www.youtube.com/playlist?list=PLVUDmbpupCarZdaGUMO7DV35pi1l8zIJZ

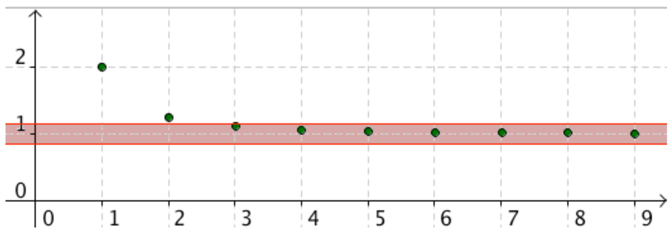
TI	CASIO
PROGRAM:SEUIL	======SEUIL
:Input A	"A="?→A↵
:0→N	0→N↵
:2→U	2→U↵
:While U<A	While U<A↵
:N+1→N	N+1→N↵
:4*U→U	4×U→U↵
:End	WhileEnd↵
:Disp N	N

2) Limite finie

Exemple :

La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ a pour limite 1.

En effet, les termes de la suite se resserrent autour de 1 à partir d'un certain rang.
Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 1, tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle à partir d'un certain rang.



Définition : On dit que la suite (u_n) admet pour limite L si tout intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$.
Une telle suite est dite convergente.

Définition : Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Remarque :
Une suite qui est divergente n'admet pas nécessairement de limite infinie.
Par exemple, la suite de terme générale $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs -1 et 1. Elle n'admet donc pas de limite finie, ni infinie. Elle est donc divergente.

3) Limites des suites usuelles

Propriétés :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Démonstration de $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$:

Soit un intervalle ouvert $\left]-a;a\right[$, a réel positif non nul, contenant 0.

Pour tout *n*, tel que : $n > \frac{1}{a}$, on a : $0 < \frac{1}{n} < a$ et donc $\frac{1}{n} \in \left]-a;a\right[$

Ainsi, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $\left]-a;a\right[$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

III. Opérations sur les limites

Vidéo https://youtu.be/v7hD6s3thp8

1) Limite d'une somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	*L*	*L*	*L*	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	*L'*	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) =$	*L + L'*	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

* Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

Exemple : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2 + n\right)$?

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.

D'après la règle sur la limite d'une somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2 + n\right) = +\infty$

2) Limite d'un produit

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	*L*	*L* > 0	*L* < 0	*L* > 0	*L* < 0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	*L'*	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) =$	*L L'*	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Exemple : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right)\left(n^2+3\right)$?

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right)=1$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2+3\right)=+\infty$

D'après la règle sur la limite d'une produit : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right)\left(n^2+3\right)=+\infty$

3) Limite d'un quotient

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=$	L	L	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=$	$L'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 avec $v_n>0$	0 avec $v_n>0$	0 avec $v_n<0$	0 avec $v_n<0$	0	$L'>0$	$L'<0$	$L'>0$	$L'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Exemple : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{-n^2-3}$?

$\lim\limits_{n\to+\infty}n^2=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-n^2\right)=-\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-n^2-3\right)=-\infty$

D'après la règle sur la limite d'un quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{-n^2-3}=0$

Remarque :
Tous ces résultats sont intuitifs. On retrouve par exemple, un principe sur les opérations de limite semblable à la règle des signes établie sur les nombres relatifs.
Il est important cependant de reconnaître les formes indéterminées pour lesquelles il faudra utiliser des calculs algébriques afin de lever l'indétermination ou utiliser d'autres propriétés sur les calculs de limites.

Les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture :

$$"\infty-\infty", "0\times\infty", "\frac{\infty}{\infty}" \text{ et } "\frac{0}{0}".$$

Méthode : Lever une indétermination

Vidéo https://youtu.be/RQhdU7-KLMA
Vidéo https://youtu.be/wkMleHBnyqU
Vidéo https://youtu.be/loytWsU4pdQ
Vidéo https://youtu.be/9fEHRHdbnwQ

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n-3\sqrt{n}\right)$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5n^2+4}{4n^2+3n}$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n^2+n}{n+3}$ d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\sqrt{n}=+\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\infty-\infty$".

$$n-3\sqrt{n}=n\left(1-\frac{3\sqrt{n}}{n}\right)=n\left(1-\frac{3}{\sqrt{n}}\right)$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{\sqrt{n}}\right)=1$ donc par limite d'un produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1-\dfrac{3}{\sqrt{n}}\right)=+\infty$.

Et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n-3\sqrt{n}\right)=+\infty$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(5n^2+4\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(4n^2+3n\right)=+\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\dfrac{\infty}{\infty}$".

$$\frac{5n^2+4}{4n^2+3n}=\frac{n^2}{n^2}\times\frac{5+\frac{4}{n^2}}{4+\frac{3}{n}}=\frac{5+\frac{4}{n^2}}{4+\frac{3}{n}}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(5+\dfrac{4}{n^2}\right)=5$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(4+\dfrac{3}{n}\right)=4$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5+\frac{4}{n^2}}{4+\frac{3}{n}}=\dfrac{5}{4}$.

Et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5n^2+4}{4n^2+3n}=\dfrac{5}{4}$.

c) Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\dfrac{\infty}{\infty}$".

$$\frac{3n^2+n}{n+3}=\frac{n^2}{n}\times\frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}=n\times\frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)=3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)=1$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}=3$

Et donc par limite d'un produit $\lim\limits_{n\to+\infty} n\times\frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}=+\infty$.

Soit $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n^2+n}{n+3}=+\infty$.

d) Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\infty-\infty$".

$\sqrt{n+2}-\sqrt{n}=\frac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$, on a multiplié par l'expression conjuguée.

$=\frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$.

Or par limite d'une somme $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n+2}+\sqrt{n}=+\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=0$.

Soit $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)=0$.