Lineare Algebra II
Übungsblatt 1

Nico Mexis

14. Juni 2019

Aufgabe 1)

φ isomorph $\Leftrightarrow$ φ bijektiv $\Leftrightarrow$ $det(\varphi) \neq 0 \Leftrightarrow \chi_\varphi(0) \neq 0 \Leftrightarrow \chi_\varphi(x)$ besitzt ein Monom vom Grad 0

Aufgabe 2)

$$det\begin{pmatrix} -x & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & -x & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1}-x \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^n a_0 \cdot det\begin{pmatrix} 1 & -x & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{n-1} a_1 \cdot det\begin{pmatrix} -x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$+(-1)^n a_2 \cdot det\begin{pmatrix} -x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + \cdots + (-1)^n (a_{n-1}+x) \cdot det\begin{pmatrix} -x & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -x \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^n a_0 \cdot 1 + (-1)^{n-1} a_1 \cdot (-x) + (-1)^n a_2 \cdot x^2 + \cdots + (-1)^n (a_{n-1}+x) x^{n-1}$$
$$= (-1)^n a_0 + (-1)^n a_1 x + \cdots + (-1)^n a_{n-1} x^{n-1} + (-1)^n x^n$$
$$= (-1)^n \cdot (x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0)$$

q.e.d.

Aufgabe 3)

$\chi_A(x)$ besitzt Nullstelle 0 $\Rightarrow rk(A) = 3 - 1 = 2$
$\chi_B(x)$ besitzt keine Nullstelle $\Rightarrow det(B) \neq 0 \Rightarrow B$ invertierbar, $rk(B) = 3 \Rightarrow Ker(B) = \{0\}$