Réponse à la Question Hardcore 3 de Science4All

Thibaut BENJAMIN

9 septembre 2016

Choississons une suite u qui admet une supersommation T, mais qui ne vérifie pas les conditions de la vidéo. Il y a 3 cas :

— La suite u ne vérifie aucune relation de récurrence linéaire. Dans ce cas, T est nécessairement défini sur l'espace $C + \mathbb{R}[e](u)$, où $\mathbb{R}[e](u)$ désigne l'ensemble des polynômes en e appliqués à u. Alors e stabilise les deux espaces C et $\mathbb{R}[e](u)$. Définissons T' de la façon suivante :
— si x est dans C, T'(x)=T(x)=S(x)
— si x est dans R[e](u), T'(x)=2T(x)
Alors T' est encore une supersommation. En fait plus généralement, si T est définie sur $C \oplus B$ et e stabilise C et B, alors cette construction marche toujours, et on n'a jamais unicité de la supersommation (on a au moins une droite de supersommations possibles)

— La suite u vérifie une relation de récurrence à un terme convergent près, mais la somme des coefficients de la récurrence est différente de 1. La relation s'écrit alors $e^n(u) = c + P(e)(u)$ où P est un polynôme de degré $n-1$ et dont la somme des coefficients vaut 1, et en passant à T, on a $T(u) = S(c) + T(u)$, donc $S(c) = 0$. De plus, la fonction T est définie sur l'espace $C \oplus \mathbb{R}_{n-1}[e](u)$, et à nouveau, on peut définir T', en posant :
— si x est dans C, $T'(x) = T(x) = S(x)$
— si x est dans $\mathbb{R}_{n-1}[e](u)$, $T'(x) = 2T(x)$
A nouveau T' est une supersommation régulière, linéaire et stable. Il suffit de vérifier qu'elle est stable, or $T'(e(x)) = T'(c + P(e)(x)) = S(c) + 2T(P(e)(x)) = 2T(x) = T'(x)$ si x est dans $\mathbb{R}_{n-1}[e](u)$

— Le seul cas qui reste à traiter, est le cas où la suite u vérifie une relation de récurrence à un terme près, mais ce terme ne converge pas. C'est la qu'il me semble il y a une subtilité, car je pense que si ce terme lui même est muni d'une supersommation unique, alors on peut définir une supersommation pour la suite u si on suppose que la somme des coefficients est différente de 1 (sinon, il n'y a pas de solution, c'est analogue au cas 2). On obtiendrait alors une suite de sous espaces de plus en plus gros :
— $C_0 = C$, l'ensemble des suites convergentes
— $C_1 = C_0 + A_0$, où A_0 désigne l'ensemble des suites qui vérifient une récurrence linéaire non

barycentrique à un terme de C_0 près

— $C_2 = C_1 + A_1$, où A_1 désigne l'ensemble des suites qui vérifient une récurrence linéaire non barycentrique à un terme de C_1 près, etc...

Ca ferait des extensions successives un peu à la manière des extensions de corps successives. Voilà j'ai pas réfléchi à ce dernier cas plus que ca, en particulier j'ai pas de description plus explicite. Peut être aussi que c'est mieux de le voir comme un espace vectoriel gradué $\bigoplus A_i$, en posant $A_{-1} = C$