Notes

May 30, 2017

1 Les règles pour les cohérences

$$\frac{\Delta \vdash C : \mathsf{Cat} \qquad \Gamma \vdash^{C}_{\mathsf{ps}} \qquad C : \mathsf{Cat}, \Gamma \vdash A : \mathsf{Type}\ C}{\Delta, \Gamma \vdash \mathsf{coh} : A}$$

lorsque $\mathrm{FV}(A) = \{C\} \cup \mathrm{FV}(\Gamma)$

$$\frac{\begin{array}{c}\Delta \vdash C : \mathsf{Cat} \qquad \Gamma \vdash^{C}_{\mathsf{ps}} \\ C : \mathsf{Cat}, \Gamma \vdash t \to^{C} u : \mathsf{Type}\ C \qquad C : \mathsf{Cat}, \partial^{-}(\Gamma) \vdash t \qquad C : \mathsf{Cat}, \partial^{+}(\Gamma) \vdash u\end{array}}{\Delta, \Gamma \vdash \mathsf{coh} : t \to^{C} u}$$

lorsque $\mathrm{FV}(t) = \{C\} \cup \mathrm{FV}(\partial^{-}(\Gamma))$ et $\mathrm{FV}(u) = \{C\} \cup \mathrm{FV}(\partial^{+}(\Gamma))$

$$\frac{\Delta \vdash C : \mathsf{Cat} \qquad (x : *C) \vdash^{C}_{\mathsf{ps}} \qquad C : \mathsf{Cat}, (x : *C) \vdash A : \mathsf{Type}\ C}{\Delta, \Gamma \vdash \mathsf{coh} : A}$$

lorsque $\mathrm{FV}(A) = \{C\}$

2 Les règles pour les foncteurs

$$\frac{\Delta \vdash F : C \Rightarrow D \qquad \Gamma \vdash^{C}_{\mathsf{ps}} \qquad C : \mathsf{Cat}, D : \mathsf{Cat}, F : C \Rightarrow D, \Gamma \vdash A : \mathsf{Type}\ D}{\Delta, \Gamma \vdash \mathsf{coh} : A}$$

lorsque $\mathrm{FV}(t \to^{D} u) = \{C, D, F\} \cup \mathrm{FV}(\Gamma)$

$$\frac{\begin{array}{c}\Delta \vdash F : C \Rightarrow D \\ \Gamma \vdash^{C}_{\mathsf{ps}} \qquad \Gamma_F, \Gamma \vdash t \to^{D} u : \mathsf{Type}\ D \qquad \Gamma_F, \partial^{-}(\Gamma) \vdash t \qquad \Gamma_F, \partial^{+}(\Gamma) \vdash u\end{array}}{\Delta, \Gamma \vdash \mathsf{coh} : t \to^{D} u}$$

avec $\Gamma_F = C : \mathsf{Cat}, D : \mathsf{Cat}, F : C \Rightarrow D$, et
lorsque $\mathrm{FV}(t) = \{C, D, F\} \cup \mathrm{FV}(\partial^{-}(\Gamma))$ et $\mathrm{FV}(u) = \{C, D, F\} \cup \mathrm{FV}(\partial^{+}(\Gamma))$

$$\frac{\begin{array}{c}\Delta \vdash F : C \Rightarrow D \\ (x : *C) \vdash^{C}_{\mathsf{ps}} \qquad \Gamma_F, (x : *C) \vdash A : \mathsf{Type}\ D \qquad \Gamma_{\mathsf{targ}(F)}, (x : *C) \vdash A\end{array}}{\Delta, \Gamma \vdash \mathsf{coh} : A}$$

lorsque $\mathrm{FV}(A) = \mathrm{FV}(\mathsf{targ} F) \cup \{x\}$

3 Les règles pour les transformations naturelles

$$\frac{\Delta \vdash \tau : C \Rightarrow D | F \to G \qquad \Gamma \vdash^{C}_{\mathsf{ps}} \qquad \Gamma_\tau, \Gamma \vdash A : \mathsf{Type}\ D}{\Delta, \Gamma \vdash \mathsf{coh} : A}$$

lorsque $\mathrm{FV}(t \to^{D} u) = \{C, D, F, G, \tau\} \cup \mathrm{FV}(\Gamma)$

$$\frac{\begin{array}{c}\Delta \vdash \tau : C \Rightarrow D | F \to G \\ \Gamma \vdash^{C}_{\mathsf{ps}} \qquad \Gamma_\tau, \Gamma \vdash t \to^{D} u : \mathsf{Type}\ D \qquad \Gamma_\tau, \partial^-(\Gamma) \vdash t \qquad \Gamma_\tau, \partial^+(\Gamma) \vdash u\end{array}}{\Delta, \Gamma \vdash \mathsf{coh} : t \to^{D} u}$$

lorsque $\mathrm{FV}(t) = \{C, D, F, G, \tau\} \cup \mathrm{FV}(\partial^-(\Gamma))$ et $\mathrm{FV}(u) = \{C, D, F, G, \tau\} \cup \mathrm{FV}(\partial^+(\Gamma))$

$$\frac{\begin{array}{c}\Delta \vdash \tau : C \Rightarrow D | F \to G \qquad (x : *C) \vdash^{C}_{\mathsf{ps}} \qquad \Gamma_F, (x : *C) \vdash t \to^{D} u : \mathsf{Type}\ D \\ \Gamma_{\mathsf{source}(\tau)}, (x : *C) \vdash t \qquad \Gamma_{\mathsf{targ}(\tau)}, (x : *C) \vdash u\end{array}}{\Delta, \Gamma \vdash \mathsf{coh} : t \to^{D} u}$$

lorsque $\mathrm{FV}(t) = \mathrm{FV}(\mathsf{source}(\tau)) \cup \{x\}$ et $\mathrm{FV}(u) = \mathrm{FV}(\mathsf{targ}(\tau)) \cup \{x\}$

4 Les règles générales

4.1 structure

Pour tout entier n,

$$\frac{}{\vdash \mathsf{Cat}\ n : \mathsf{Cat}\ n+1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash C : \mathsf{Cat}\ n}{\Gamma \vdash \mathsf{HomType}\ C : \mathsf{Cat}\ n+1}$$

$$\frac{}{\vdash \mathsf{HomType}\ (\mathsf{Cat}\ n+1) \equiv \mathsf{Cat}\ n+1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathsf{HomType}\ C}{\Gamma \vdash *_C : \mathsf{HomType}\ C}$$

$$\frac{}{\vdash *_{\mathsf{Cat}\ n+1} \equiv \mathsf{Cat}\ n}$$

$$\frac{\Gamma \vdash C : \mathsf{Cat}\ n \qquad \Gamma \vdash u : *_C \qquad \Gamma \vdash v : *_C}{\Gamma \vdash *_C \mid u \to v : \mathsf{HomType}\ C}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t \mid a \to b : \mathsf{HomType}\ C \qquad \Gamma \vdash u : t \mid a \to b \qquad \Gamma \vdash v : t \mid a \to b}{\Gamma \vdash t \mid a \to b \mid u \to v : \mathsf{HomType}\ C}$$

4.2 cohérences

$$\frac{\Xi \vdash \mathsf{HomType}\ \mathfrak{C} \qquad \Delta \vdash_{\mathsf{ps}}^{\mathfrak{C}} \qquad \Xi, \Delta \vdash C : *_{\mathfrak{C}} \qquad \Xi, \Delta \vdash D : *_{\mathfrak{C}} \qquad \Gamma \vdash_{\mathsf{ps}}^{C} \qquad \Xi, \Delta, \Gamma \vdash A : \mathsf{HomType}\ D}{\Xi, \Delta, \Gamma \vdash \mathsf{coh} : A}$$

Lorsque $\mathrm{FV}(\Delta) \cup \mathrm{FV}(\Gamma) = \mathrm{FV}(A)$

$$\frac{\Xi \vdash \mathsf{HomType}\ \mathfrak{C} \qquad \Delta \vdash_{\mathsf{ps}}^{\mathfrak{C}} \qquad \Xi, \Delta \vdash C : *_{\mathfrak{C}} \qquad \Xi, \Delta \vdash D : *_{\mathfrak{C}} \qquad \Gamma \vdash_{\mathsf{ps}}^{C} \qquad \Xi, \Delta, \Gamma \vdash t \mid u \to v : \mathsf{HomType}\ D \qquad \Xi, \Delta, \partial^{-}(\Gamma) \vdash u \qquad \Xi, \Delta, \partial^{+}(\Gamma) \vdash v}{\Xi, \Delta, \Gamma \vdash \mathsf{coh} : t \mid u \to v}$$

Lorsque $\mathrm{FV}(\Delta) \cup \mathrm{FV}(\partial^{-}(\Gamma)) = \mathrm{FV}(u)$ et $\mathrm{FV}(\Delta) \cup \mathrm{FV}(\partial^{+}(\Gamma)) = \mathrm{FV}(v)$

$$\frac{\Delta \vdash_{\mathsf{ps}}^{\mathsf{Cat}} \qquad \Delta \vdash C : *_{\mathsf{Cat}} \qquad \Delta \vdash D : *_{\mathsf{Cat}} \qquad \Gamma \vdash_{\mathsf{ps}}^{C} \qquad \Delta, \Gamma \vdash t \mid u \to v : \mathsf{HomType}\ D \qquad \partial^{-}(\Delta), \Gamma \vdash u \qquad \partial^{-}(\Delta), \Gamma \vdash v}{\Delta, \Gamma \vdash \mathsf{coh} : t \mid u \to v}$$

Lorsque $\mathrm{FV}(\partial^{-}(\Delta)) \cup \mathrm{FV}(\Gamma) = \mathrm{FV}(u)$ et $\mathrm{FV}(\partial^{+}(\Delta)) \cup \mathrm{FV}(\Gamma) = \mathrm{FV}(v)$

$$\frac{\Delta \vdash_{\mathsf{ps}}^{\mathsf{Cat}} \qquad \Delta \vdash C : *_{\mathsf{Cat}} \qquad \Delta \vdash D : *_{\mathsf{Cat}} \qquad \Delta \vdash *_D : \mathsf{HomType}\ D}{\Delta, (x : *_C) \vdash \mathsf{coh} : *_D}$$

Lorsque $\mathrm{FV}(\partial^{-}(\Delta)) = \mathrm{FV}(*_D)$ et $\mathrm{FV}(\partial^{+}(\Delta)) = \mathrm{FV}(*_D)$

5 Idées de choses à faire

- automatisation (de l'associativité), possibilité de traduire les preuve de/vers Globular
- formalisation de l'implémentation avec arguments implicites
- comment faire des preuves dans le système (e.g. ajouter de la coinduction, etc.). Exemple 0 de preuve : montrer que $cohf$ (= cohérence unaire) est équivalent à f.
- comment ajouter des Π et Σ au système de preuve
- faire la preuve du lien avec la définition de Grothendieck-Maltsiniotis
- définition des foncteurs
- généraliser à la catégorie des catégories