



ARVORES AVL

Professora Cristiane

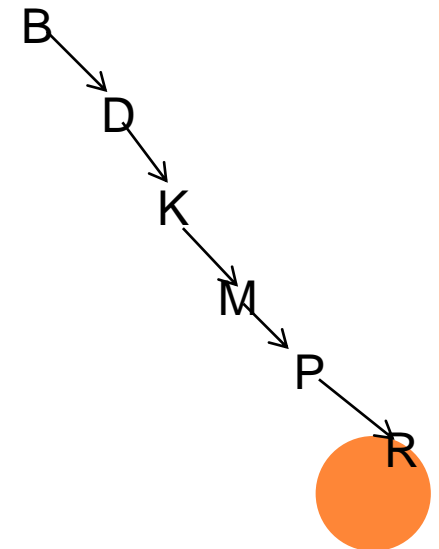
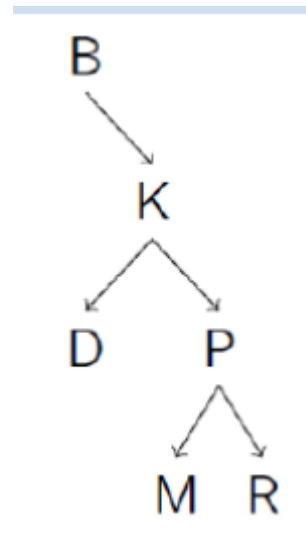
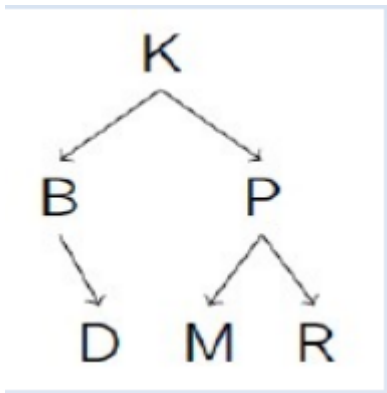
ROTEIRO

- Problema da ABB
- Árvores balanceadas
- Definição das árvores AVL
- Como balancear (rotações)



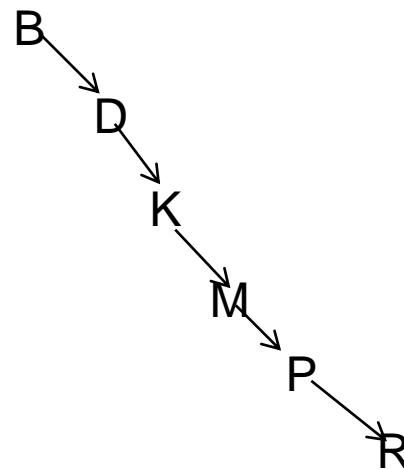
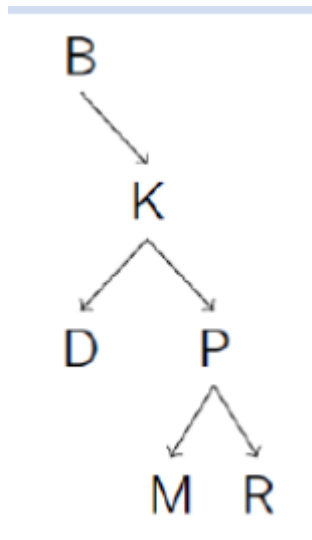
PROBLEMA DA ÁRVORE BINÁRIA DE BUSCA

- A eficiência de uma árvore binária como estrutura de busca depende da disposição de seus elementos.
- Qual o pior caso, para se encontrar R? Determine o número de comparações:



PROBLEMA DA ÁRVORE BINÁRIA DE BUSCA

- Quando a árvore degenera para uma lista encadeada é sempre o pior caso.
- Entretanto, o desempenho da busca já é prejudicado pelo desbalanceamento que se vê antes disso ocorrer também.



COMPLEXIDADE DAS OPERAÇÕES EM ABB

- Tempo médio de uma busca, inserção ou remoção: $O(\log n)$
 - Já no pior caso: $O(n)$
- Solução: Manter a árvore balanceada

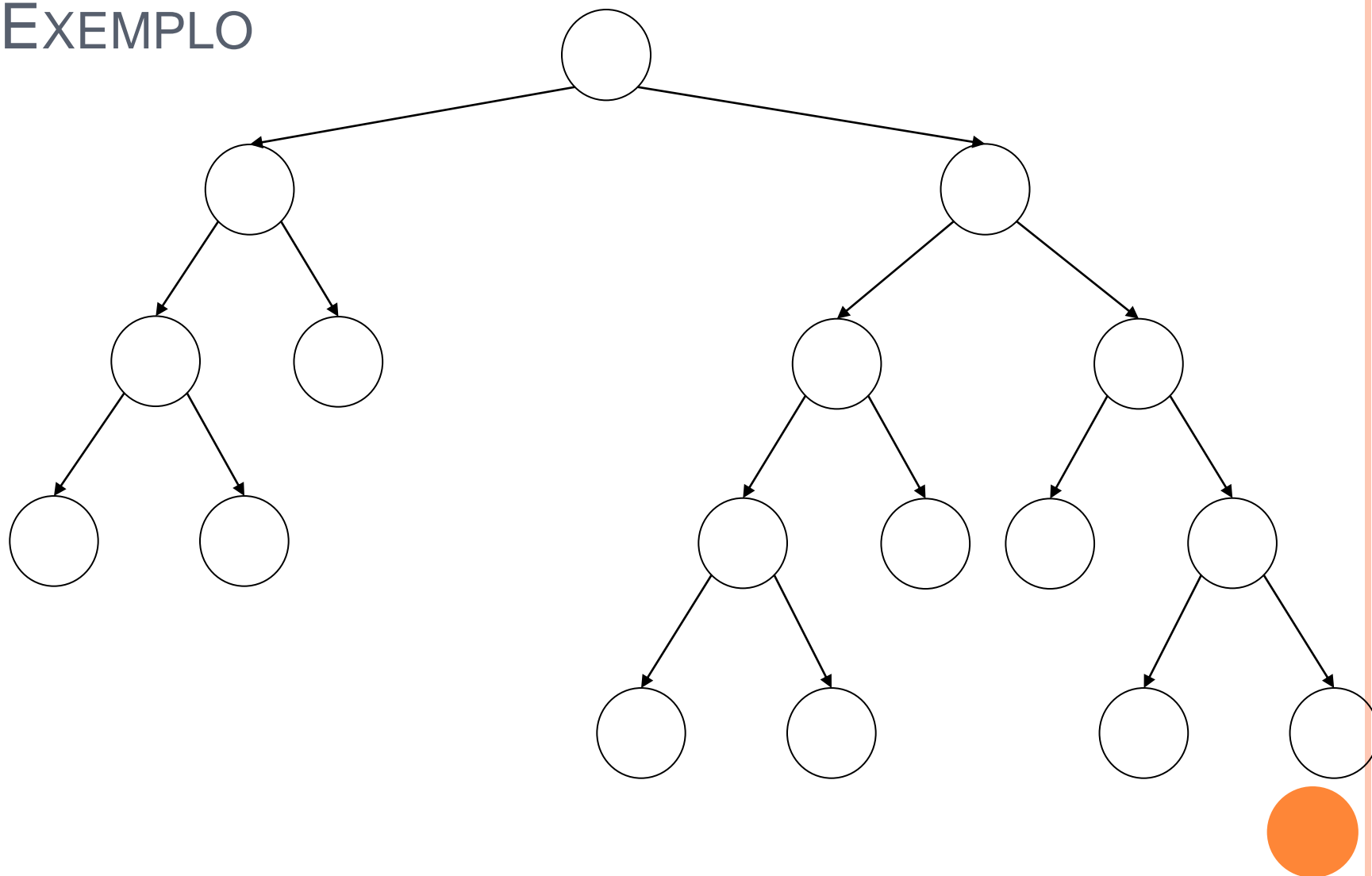


ARVORE BINÁRIA BALANCEADA

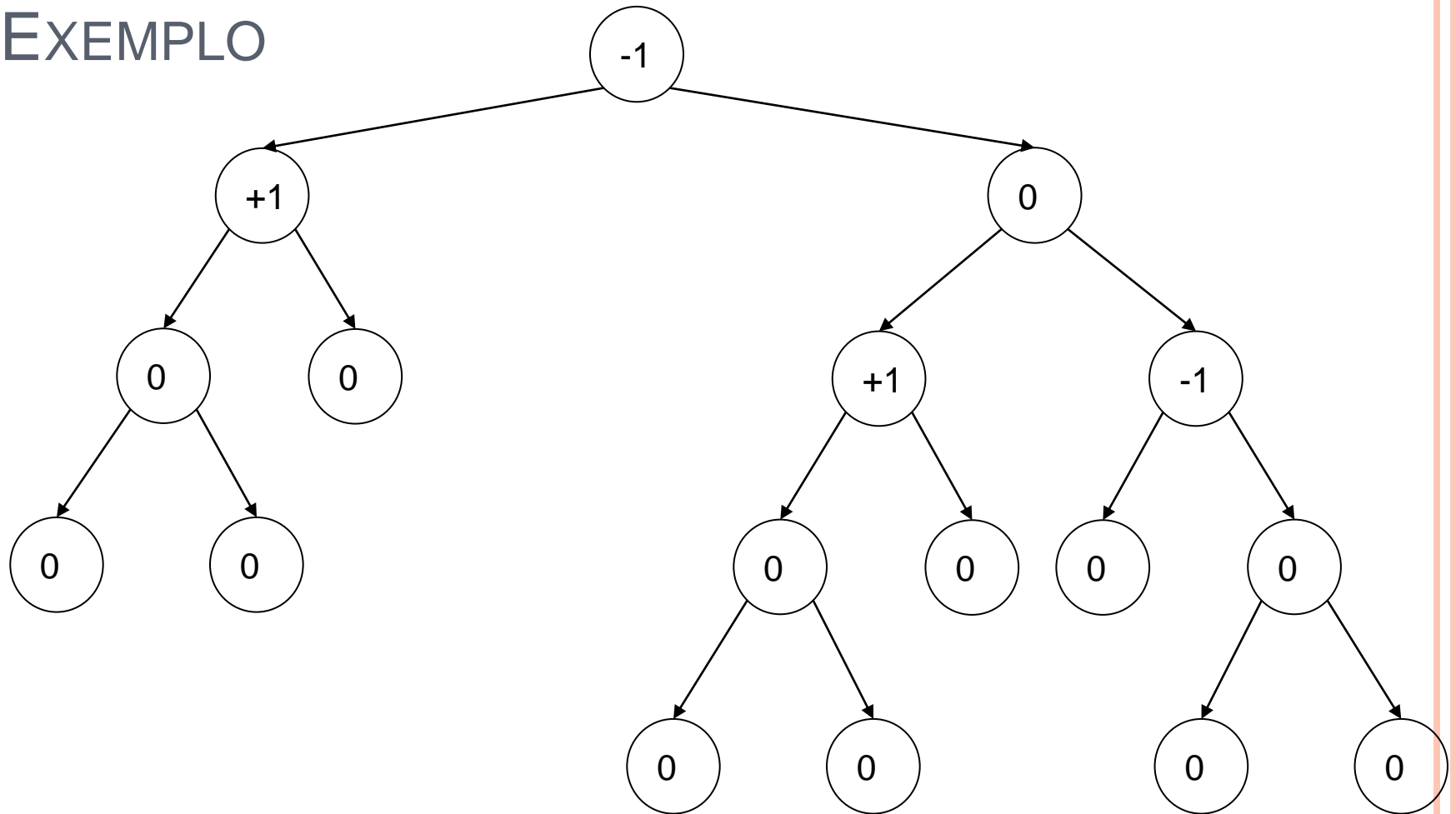
- Diz-se que uma árvore binária é balanceada:
- Se para cada nó a diferença de altura entre o ramo a esquerda(hl) e a direita(hr) for de no máximo 1:
- $|hl-hr| \leq 1$
- hl-hr é conhecido como fator de balanceamento



EXEMPLO

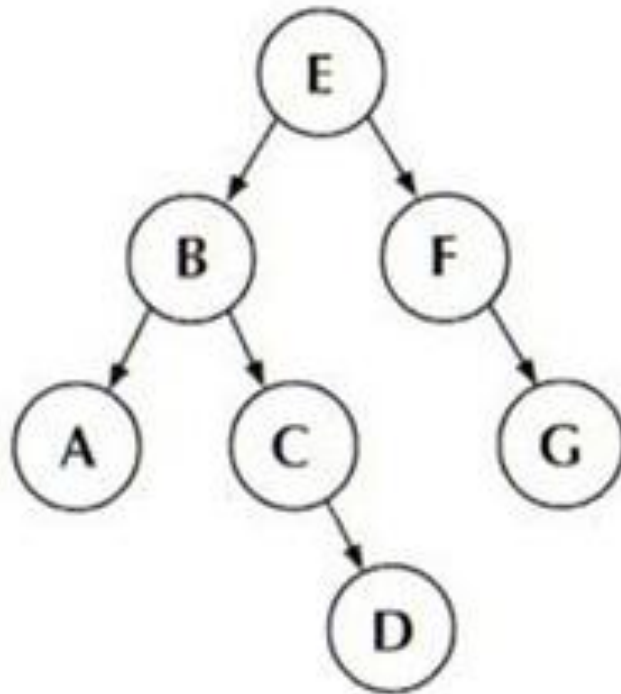


EXEMPLO



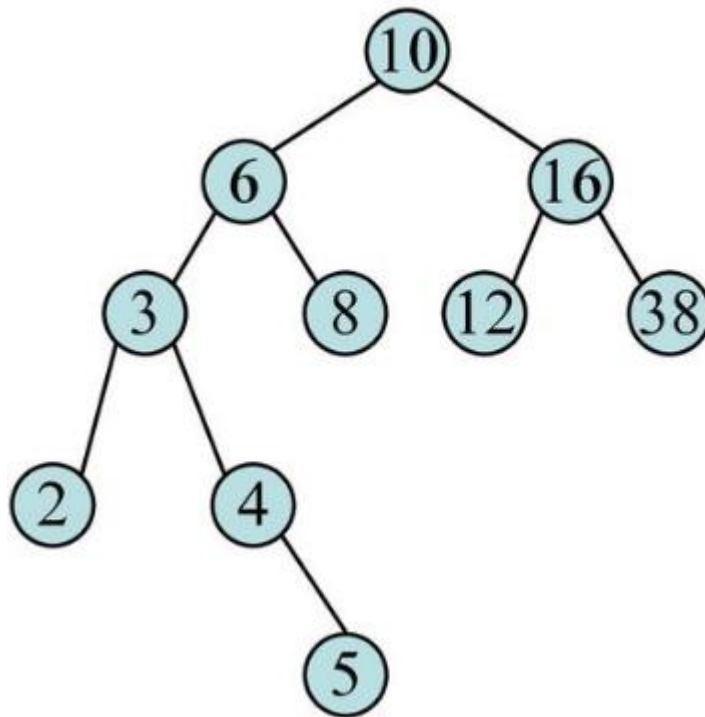
EXERCÍCIO 1

- Calcular o fator de balanceamento para cada nó da árvore:



EXERCÍCIO2

- Calcular o fator de balanceamento para cada nó da árvore:



CONSIDERAÇÕES

- Árvore do exercício 1 está balanceada
- Árvore do exercício 2 está desbalanceada



ÁRVORES AVL

- Árvores de altura balanceada ou de altura equilibrada, introduzidas em 1962 por dois matemáticos russos, G. M. Adel'son-Vel'skii e E. M. Landis.
- Propõe fazer o balanceamento da árvore a cada inserção ou remoção que promover o desbalanceamento



ÁRVORES AVL

- Uma árvore binária vazia é balanceada AVL.
- Uma árvore não-vazia, $T = \{r, Tl, Tr\}$, é balanceada AVL se tanto Tl quanto Tr forem balanceadas AVL e $|Hl - Hr| \leq 1$, onde Hl é a altura de Tl e Hr é a altura de Tr .



ÁRVORES AVL

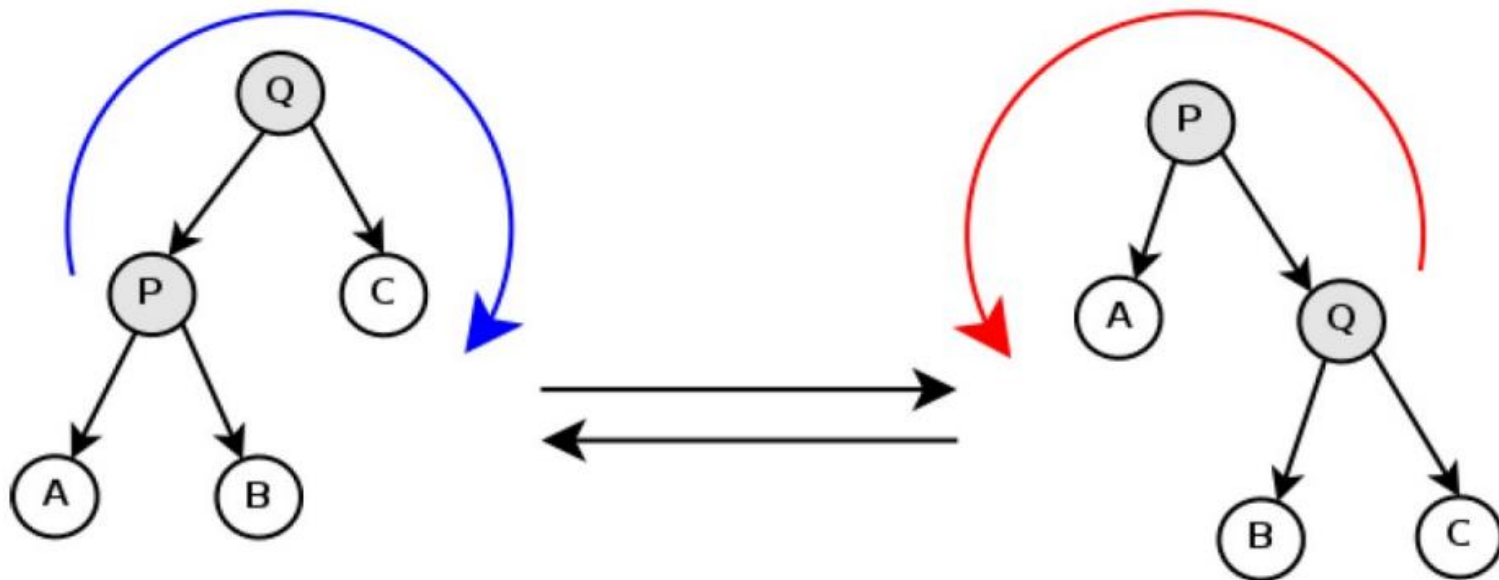
- Idéia básica: cada nó mantém uma informação adicional, chamada fator de balanceamento, que indica a diferença de altura entre as subárvores esquerda e direita.

< 0 se a subárvore da esquerda for maior
0 se forem do mesmo tamanho
 > 0 se a subárvore da direita for maior



ROTAÇÕES

- Nas operações de inserção e remoção de elementos, o balanceamento da árvore resultante é ajustado através da operação de rotação, que preserva a ordenação da árvore.



ROTAÇÕES

- Para o rebalanceamento da árvore é necessário calcular o Fator de Balanceamento para verificar qual rotação deve ser efetuada afim de rebalanceá-la.
 - Se fator de balanceamento é positivo, as rotações são feitas à direita.
 - Se fator de balanceamento é negativo, as rotações são feitas à esquerda.



PROPRIEDADES DA ROTAÇÃO

- A rotação não destrói a propriedade de ordenação dos dados;
- Depois da rotação, os nós rotacionados ficam com fator de balanço zero;
- Depois da rotação, a árvore continua com a mesma altura que tinha anteriormente (antes da inserção que desbalanceou a árvore)



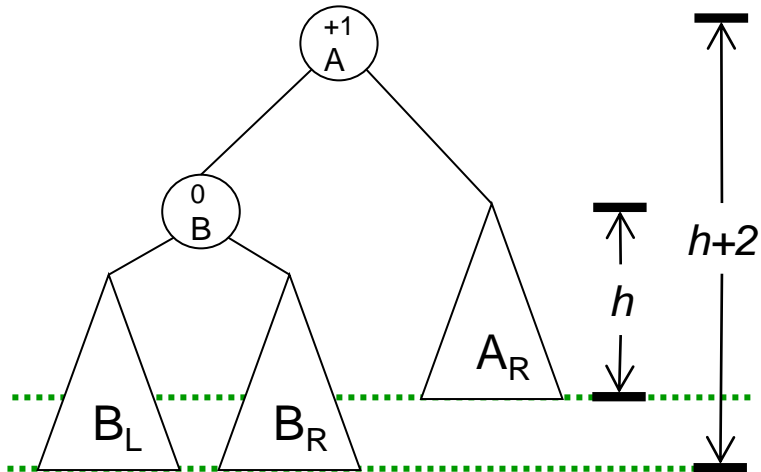
TIPOS DE SITUAÇÕES E ROTAÇÕES

- Situação 1: Nó desbalanceado com um fator de balanço positivo e subárvore da esquerda com fator positivo
 - Rotação à direita simples
 - as duas primeiras arestas no caminho da inserção vão para a direita

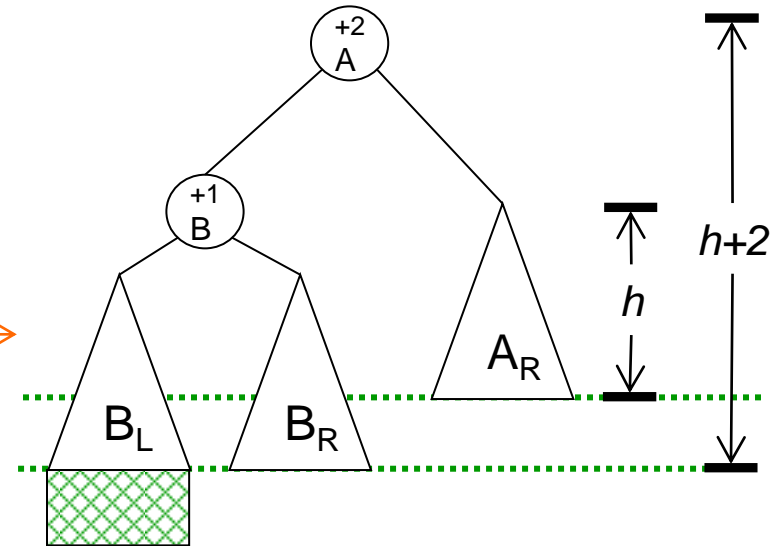


EXEMPLO DE SITUAÇÃO 1

Subárvore balanceada



Subárvore desbalanceada após inserção



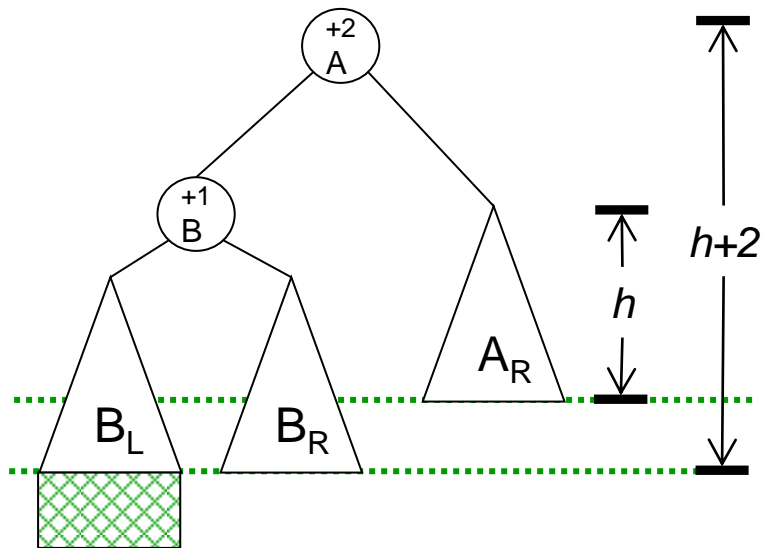
Altura de B_L aumenta para $h+1$

Inserção à esquerda



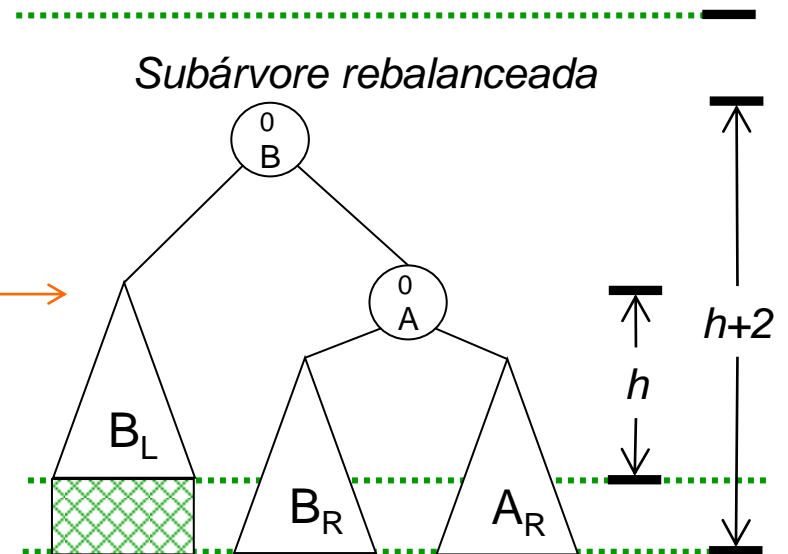
EXEMPLO DE ROTAÇÃO À DIREITA SIMPLES

Subárvore desbalanceada após inserção



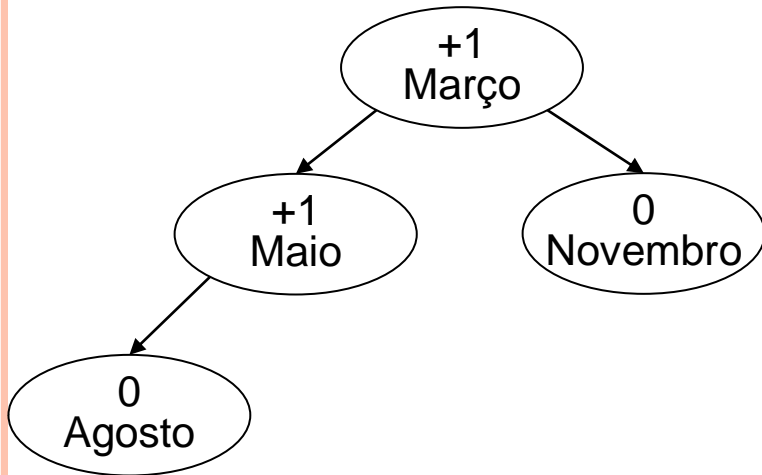
Altura de B_L aumenta para $h+1$

Subárvore rebalanceada

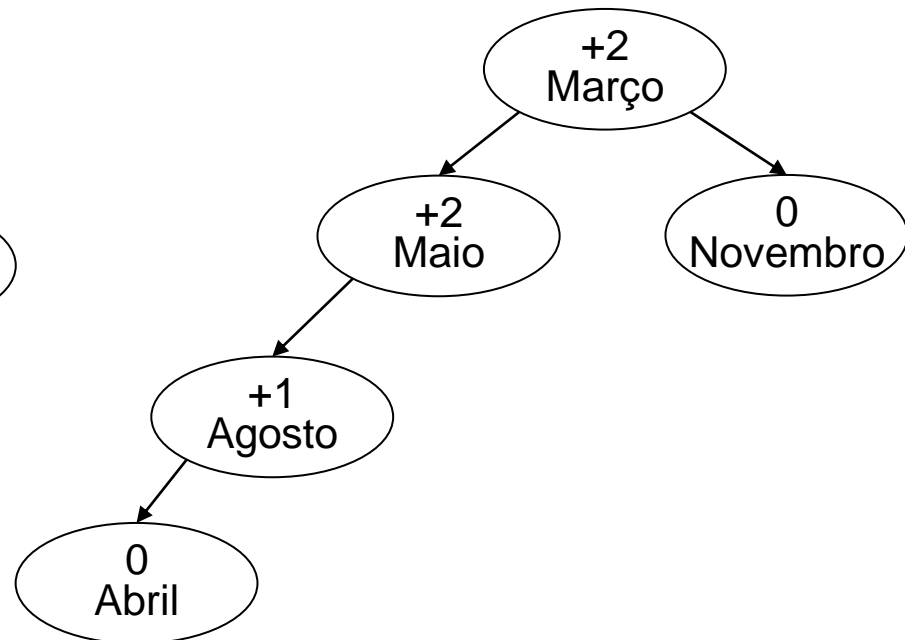


EXEMPLO

Arvore original balanceada

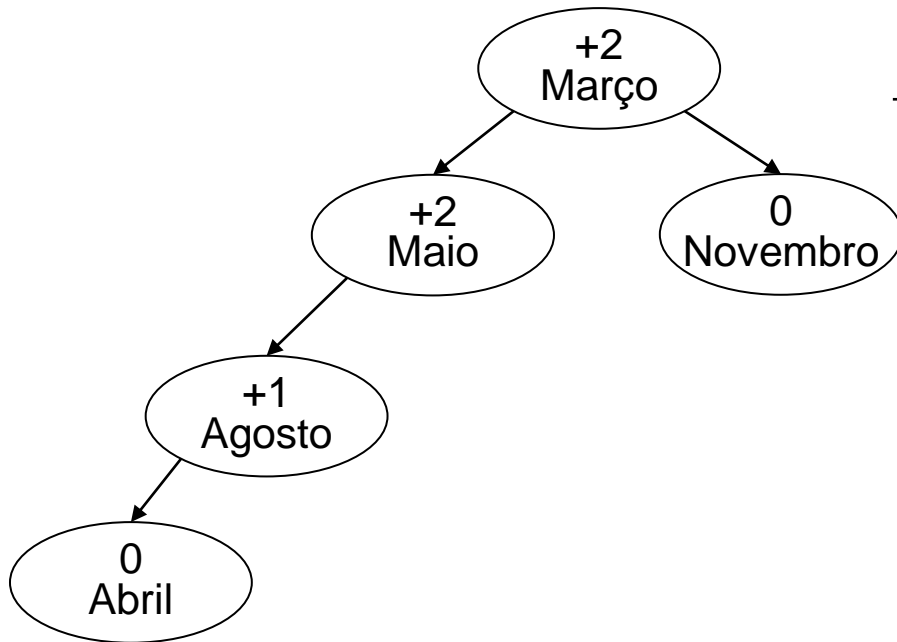


Depois da inserção



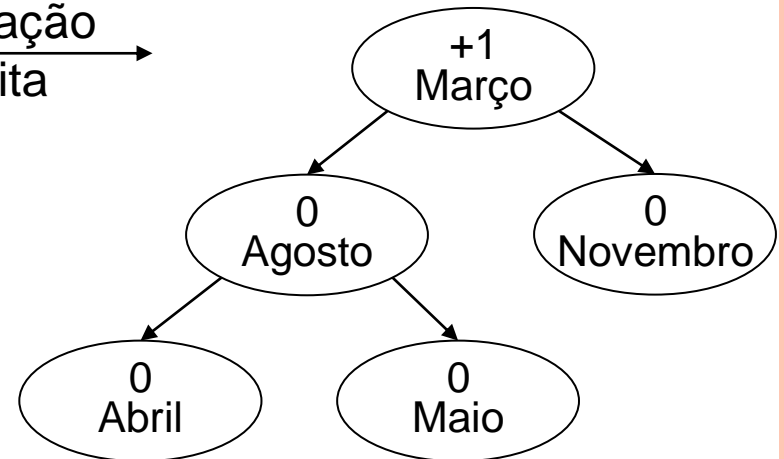
EXEMPLO

Depois da inserção



Rotação
direita

Depois do rebalanceamento



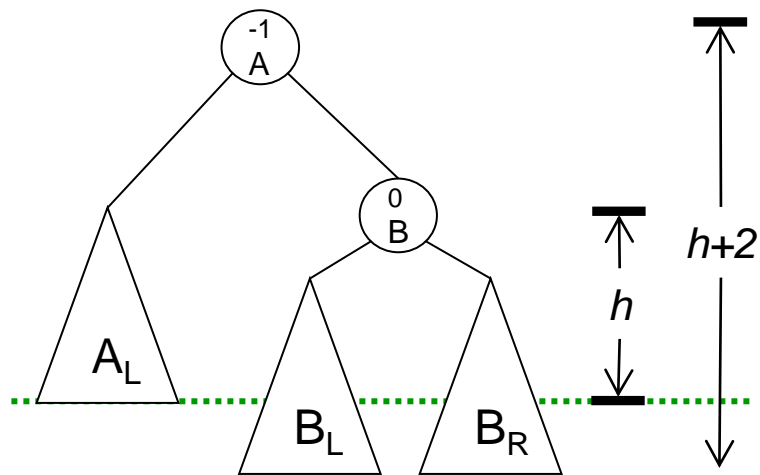
TIPOS DE SITUAÇÕES E ROTAÇÕES

- Situação 2: Nó desbalanceado com um fator de balanço negativo e subárvore da direita com fator negativo
 - Rotação à esquerda simples
 - as duas primeiras arestas no caminho da inserção vão para a esquerda

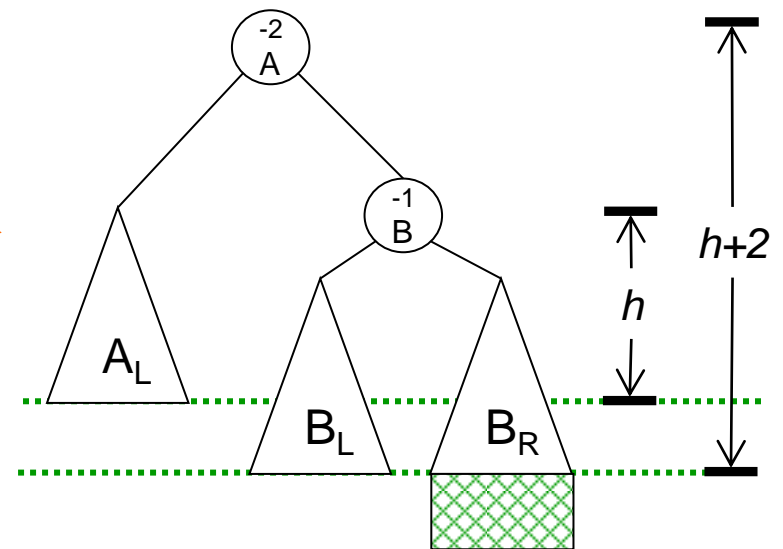


EXEMPLO DE SITUAÇÃO 2

Subárvore balanceada



Subárvore desbalanceada após inserção



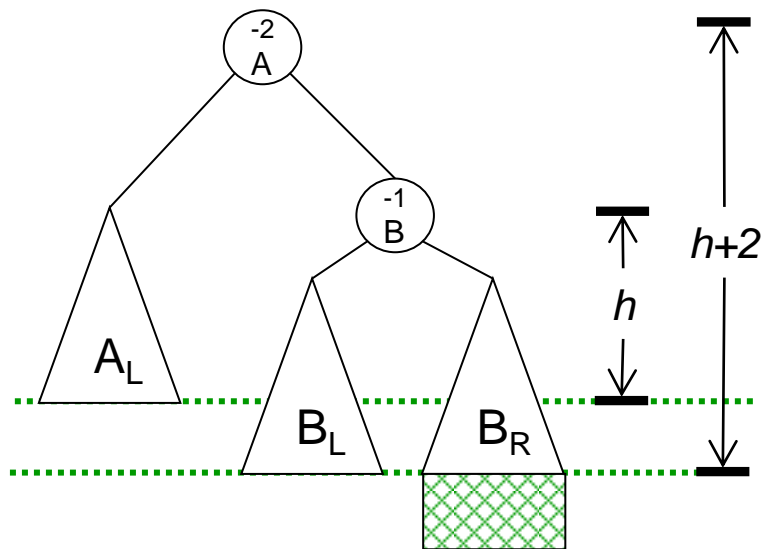
Altura de B_R aumenta para $h+1$

Inserção à direita



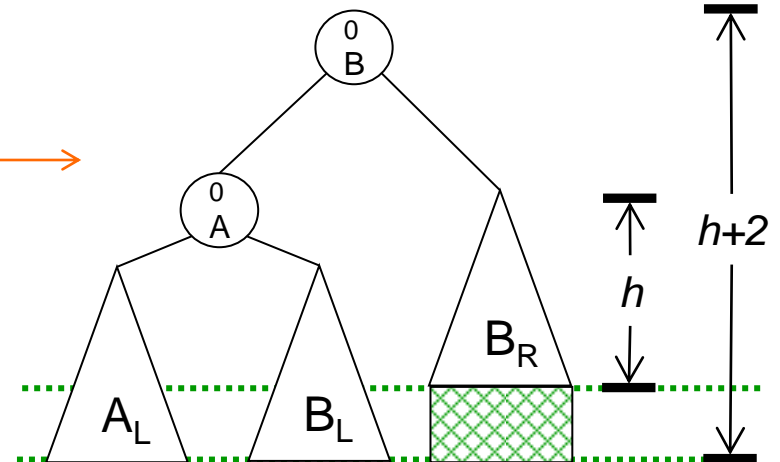
EXEMPLO DE ROTAÇÃO À ESQUERDA SIMPLES

Subárvore desbalanceada após inserção



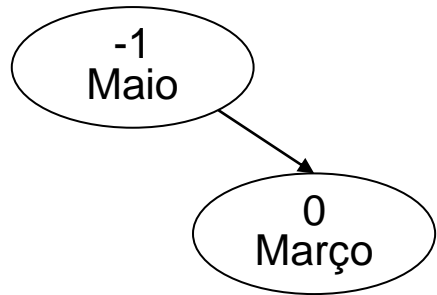
Altura de B_R aumenta para $h+1$

Subárvore rebalanceada

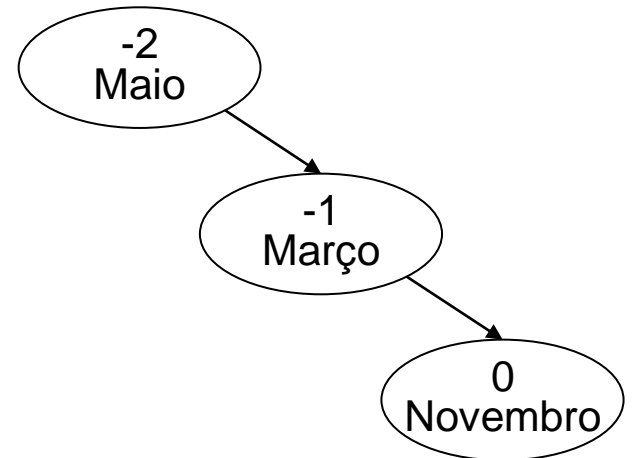


EXEMPLO

Arvore original balanceada

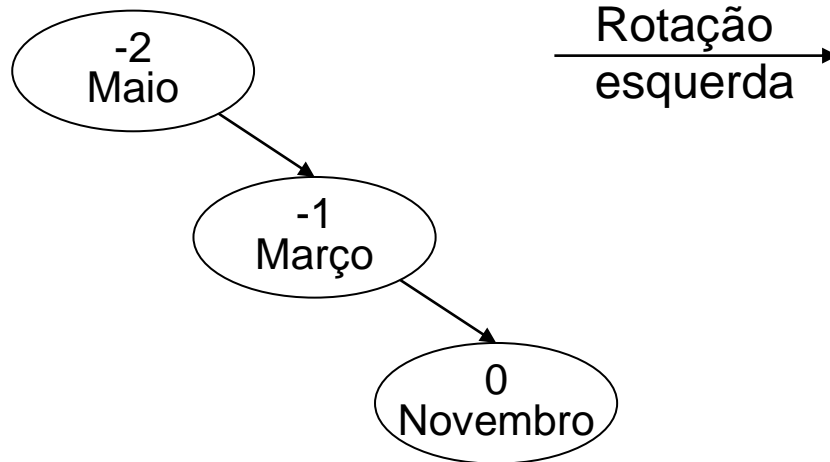


Depois da inserção

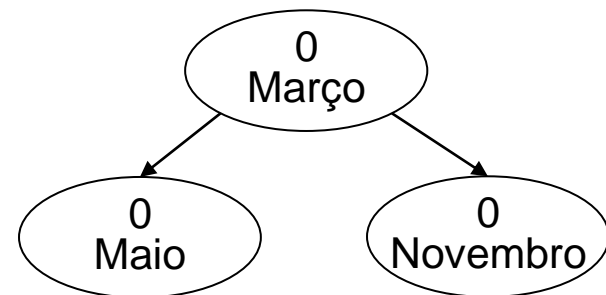


EXEMPLO

Depois da inserção



Depois do rebalanceamento



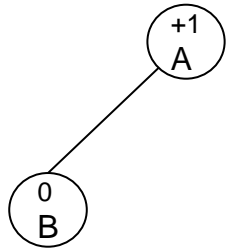
TIPOS DE SITUAÇÕES E ROTAÇÕES

- Situação 3: Nó desbalanceado com um fator de balanço positivo e subárvore da esquerda com fator negativo
 - Necessário realizar duas rotações (Esquerda-Direita):
 - Primeiro: No nó negativo, aplicar a rotação à esquerda simples.
 - Segundo: No nó positivo, aplicar a rotação à direita simples

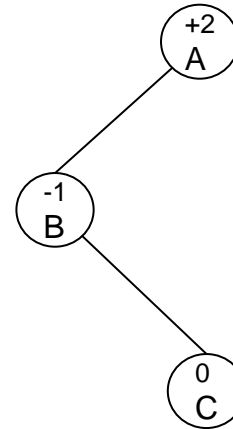


EXEMPLO DE SITUAÇÃO 3

Subárvore balanceada

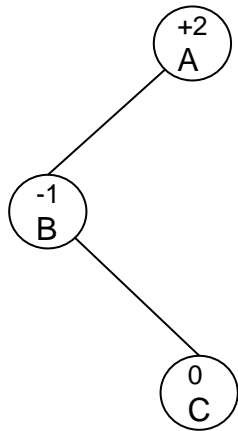


Subárvore desbalanceada após inserção

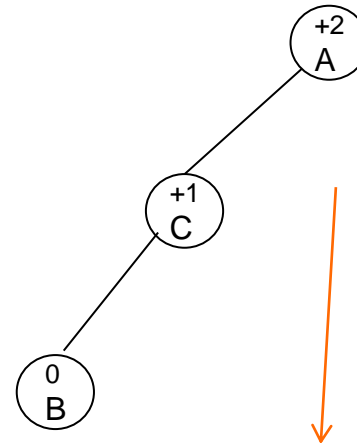


EXEMPLO DE ROTAÇÃO ESQUERDA-DIREITA

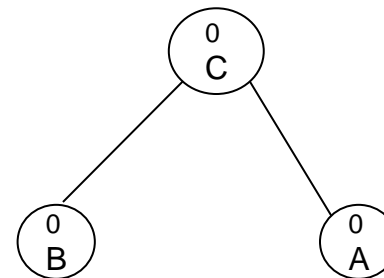
Subárvore desbalanceada após inserção



Primeira rotação à esquerda

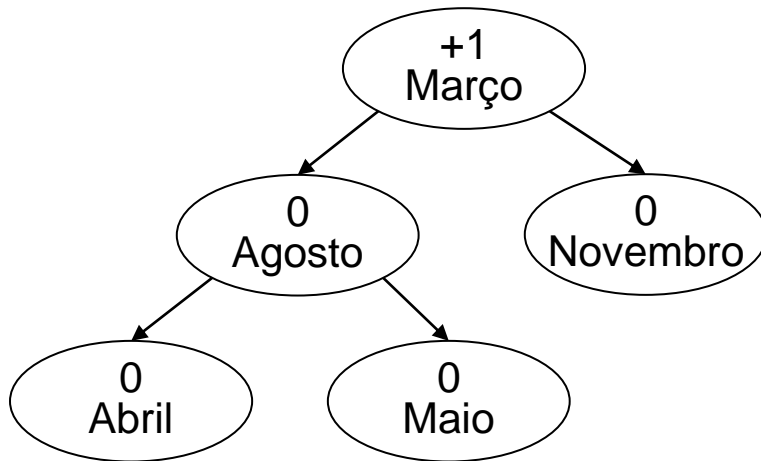


Segunda rotação à direita

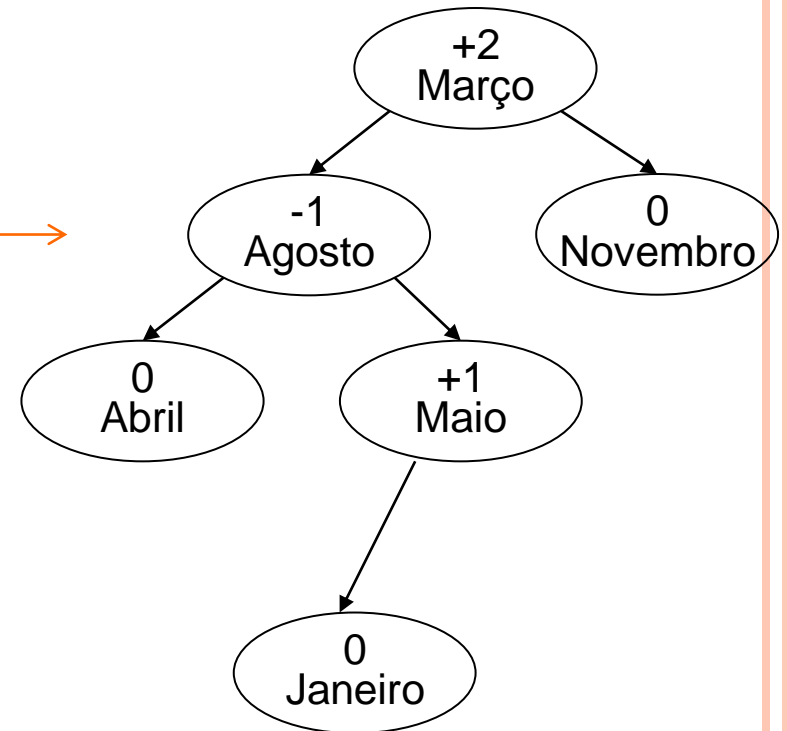


EXEMPLO

Arvore original balanceada

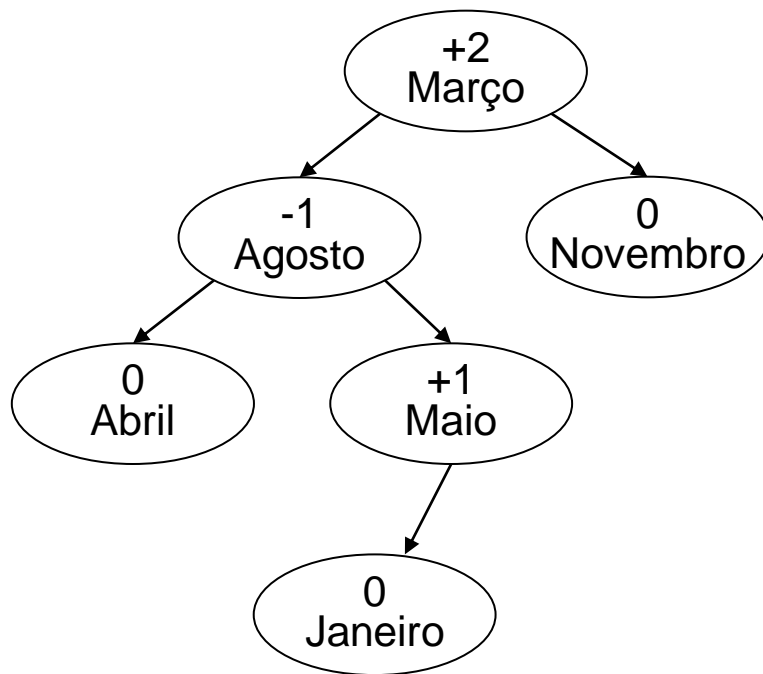


Depois da inserção

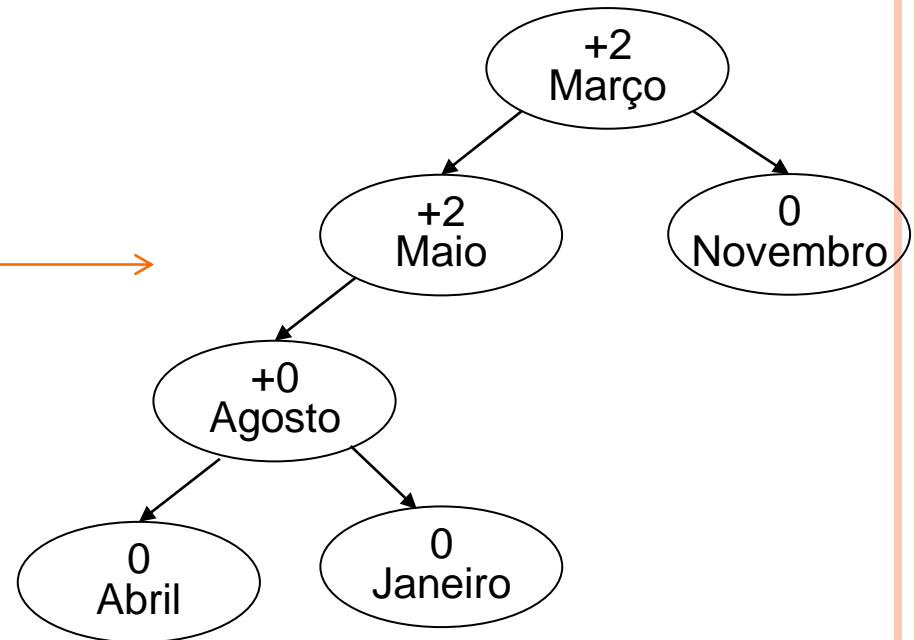


EXEMPLO

Depois da inserção

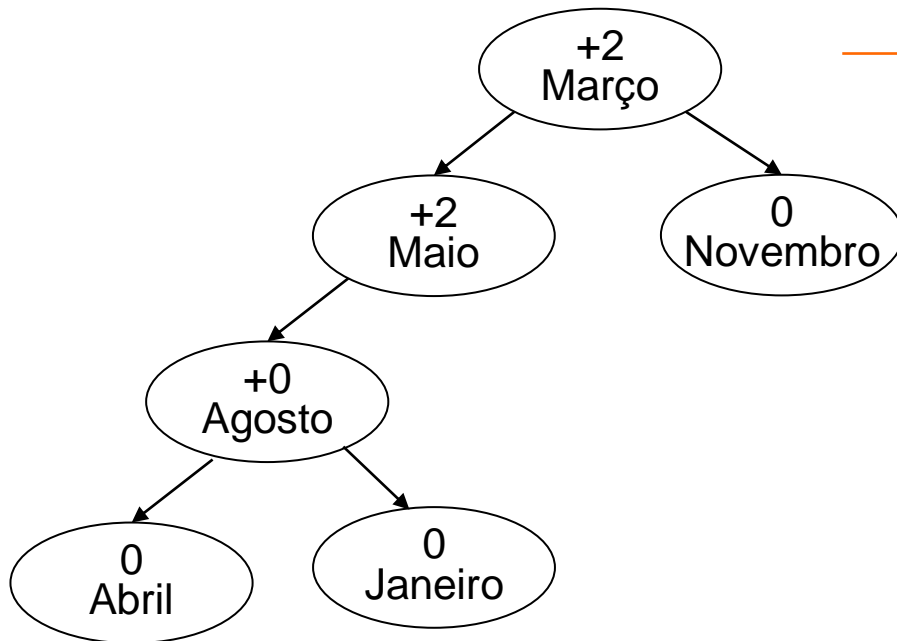


*Primeiro Rotação Esquerda
em Agosto*

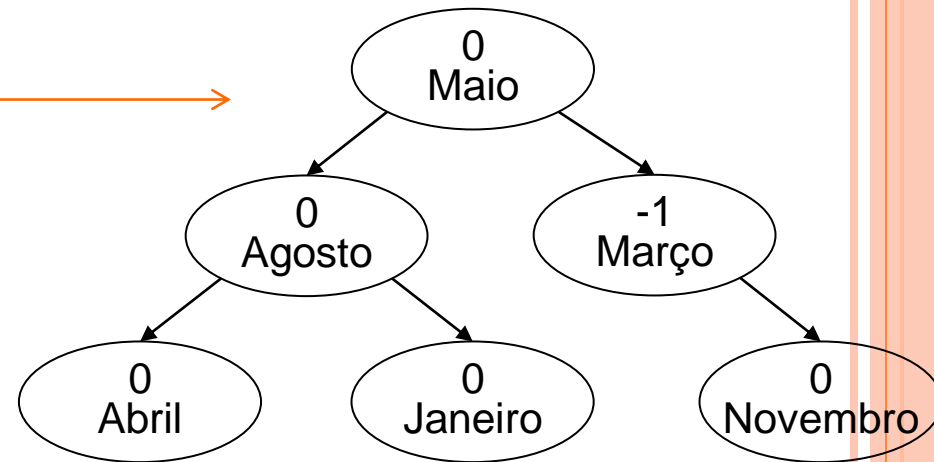


EXEMPLO

*Primeiro Rotação Esquerda
em Agosto*



*Depois Rotação Direita em
Março*



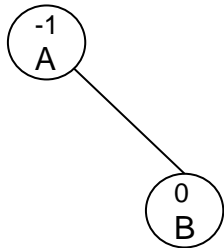
TIPOS DE SITUAÇÕES E ROTAÇÕES

- Situação 4: Nó desbalanceado com um fator de balanço negativo e subárvore da direita com fator positivo
 - Necessário realizar duas rotações (Direita-Esquerda):
 - Primeiro: No nó positivo, aplicar o rotacionar à direita simples.
 - Segundo: No nó negativo, aplicar a rotação à esquerda simples

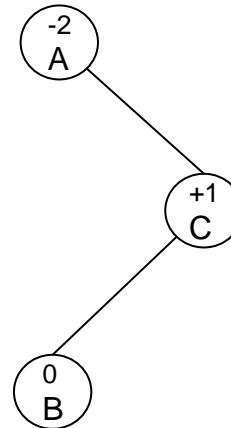


EXEMPLO DE SITUAÇÃO 4

Subárvore balanceada

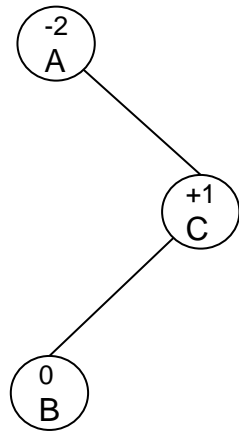


Subárvore desbalanceada após inserção

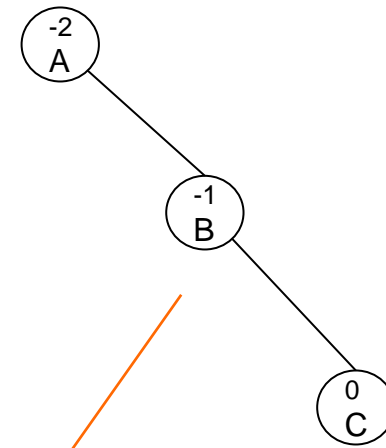


EXEMPLO DE ROTAÇÃO (DIREITA-ESQUERDA)

Subárvore desbalanceada após inserção

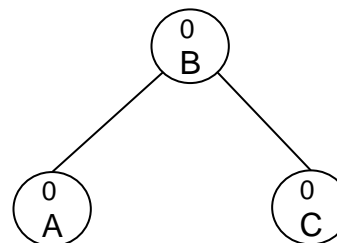


Rotação à direita em B



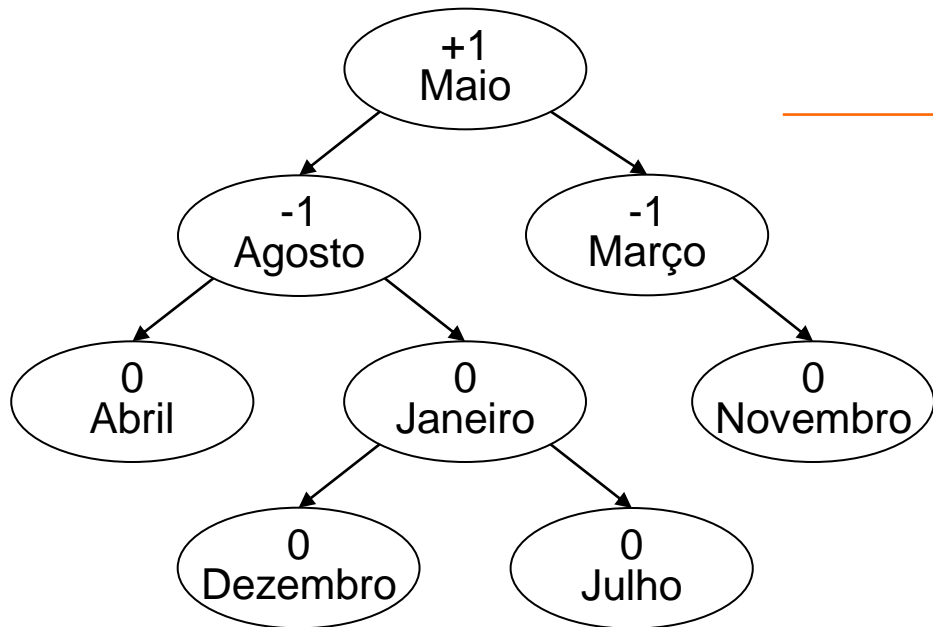
Rotação à esquerda em A

Subárvore rebalanceada

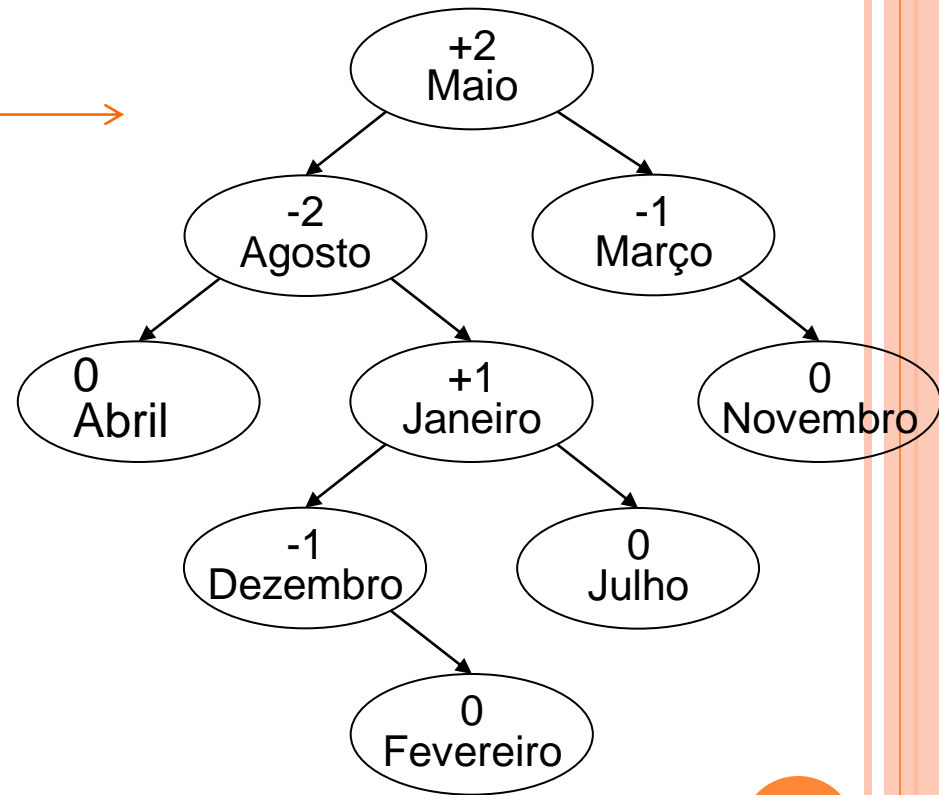


EXEMPLO

Arvore original

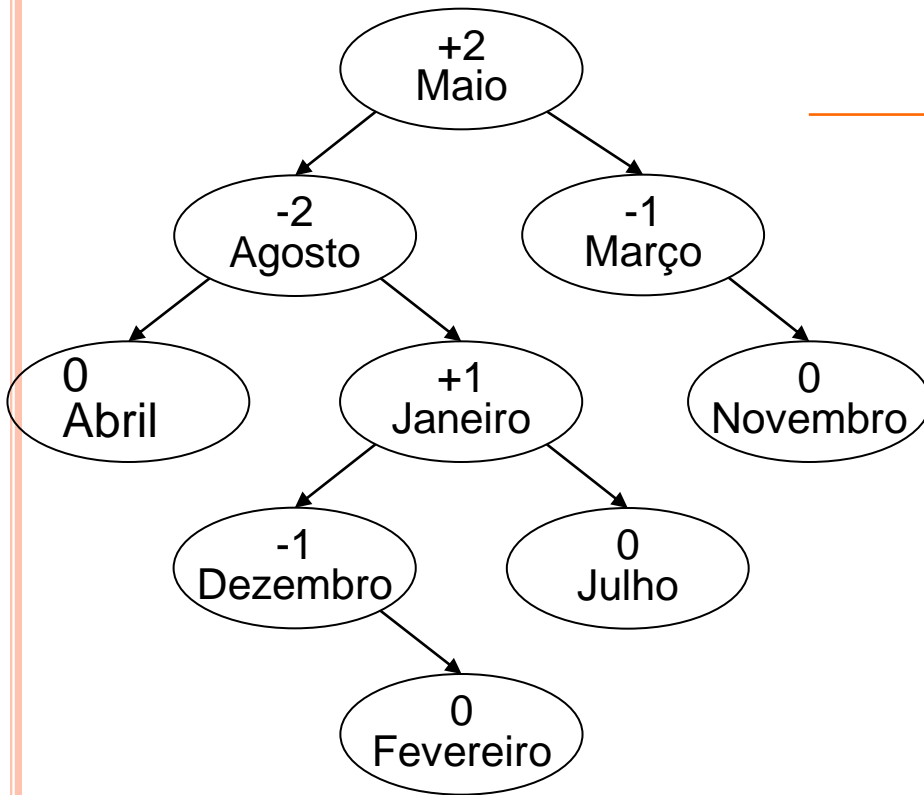


Depois da inserção

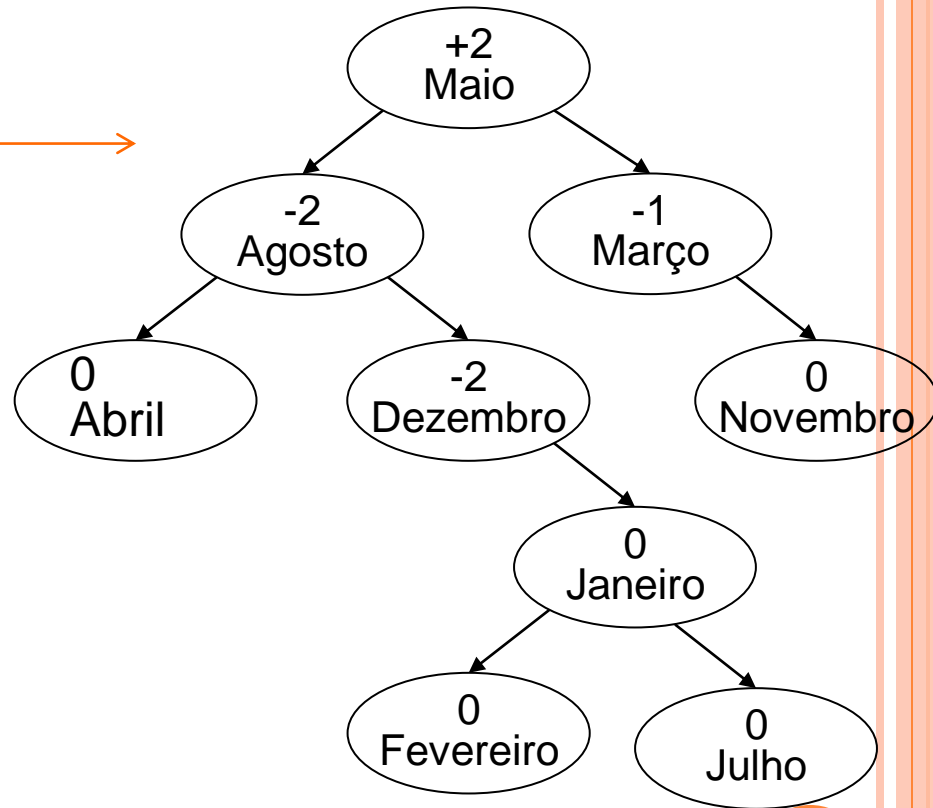


EXEMPLO

Depois da inserção



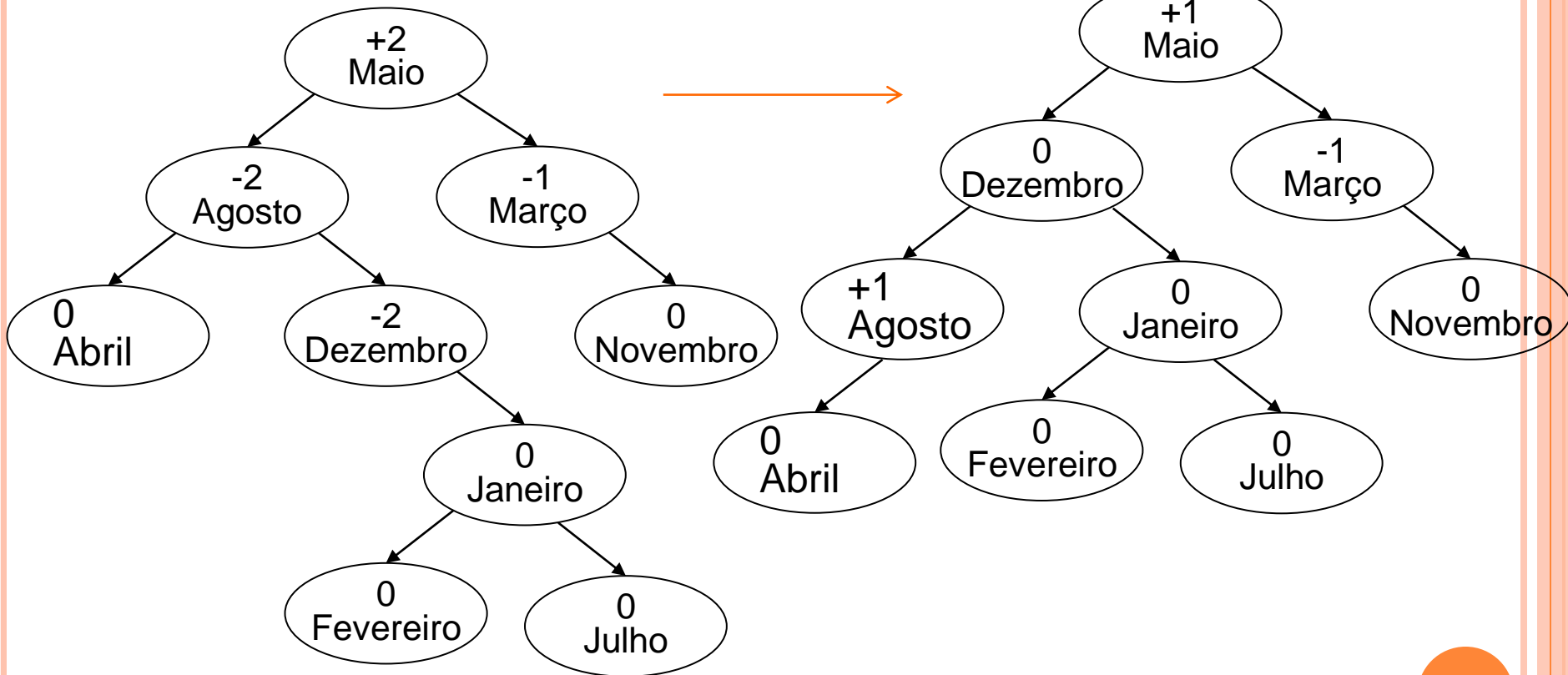
*Depois de Janeiro
para a direita*



EXEMPLO

*Depois de Janeiro
para a direita*

*Depois de Agosto
para a esquerda*



A IMPORTÂNCIA DA ÁRVORE BALANCEADA

- O custo da maioria das operações depende diretamente da altura da árvore, por isso o desejo de se ter a menor altura possível

| Altura | Nós em um nível | Total de nós |
|--------|-----------------|--------------|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 3 |
| 3 | 4 | 7 |
| 4 | 8 | 15 |
| 11 | 1024 | 2047 |
| 14 | 8192 | 16383 |
| h | 2^{h-1} | $2^h - 1$ |

h é o número máximo de testes a serem feitos



EXERCÍCIO 3

