

Árvores

PROFA. CRISTIANE IMAMURA

Roteiro

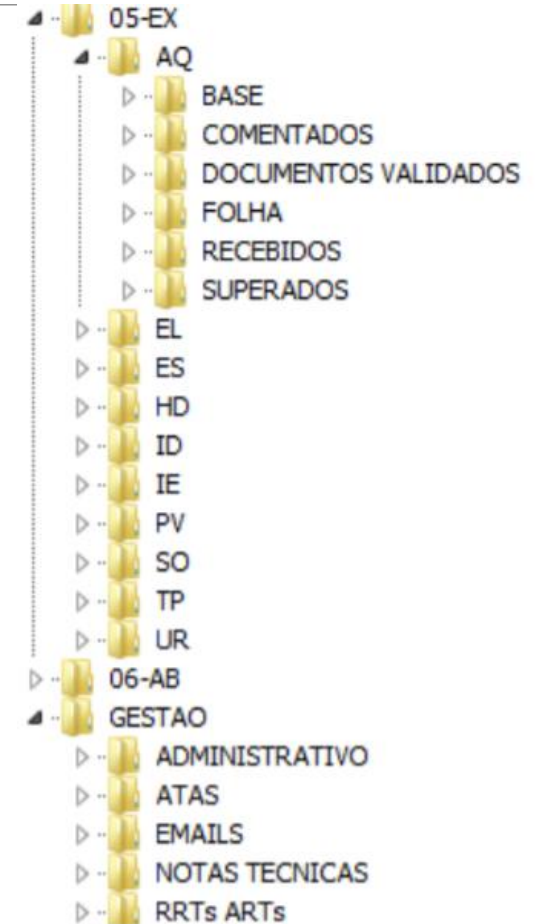
- As estruturas que não são árvores
- Qual a necessidade de outras estruturas?
- Definição de uma árvore
- Outras terminologias a respeito de árvore
- Árvores Binárias

Estruturas que não são árvores

- Vetores e matrizes são estruturas excelentes para acesso rápido, porém devem ter o tamanho limitado em sua definição, assim são inadequadas para prover o armazenamento “justo” dos elementos.
- Listas encadeadas são estruturas bastante interessantes por possibilitar o aumento ou diminuição de elementos em tempo de execução, mas podem dificultar o acesso rápido aos elementos e ordenação.

A necessidade de outras estruturas

- Vetores, matrizes, e listas encadeadas, são estruturas lineares.
- Não são ideais para representar hierarquias entre elementos, como por exemplo, o exigido em um sistema de diretórios de um computador.



Definição

Árvore é uma estrutura de dados
Não Linear nos quais os elementos
Possuem uma hierarquia.

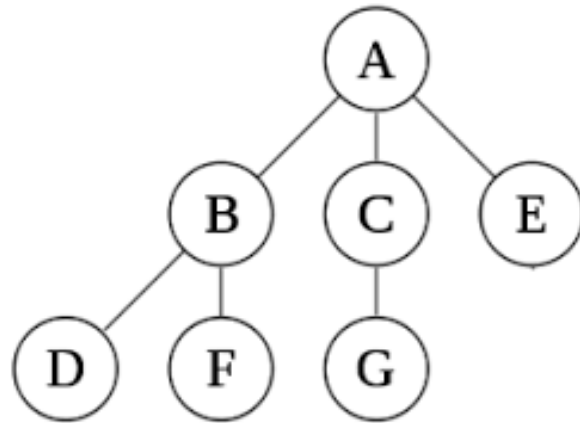


Definições

Os elementos de uma árvore são denominados nós.

Cada nó pode ser unido a outro através de uma aresta de conexão.

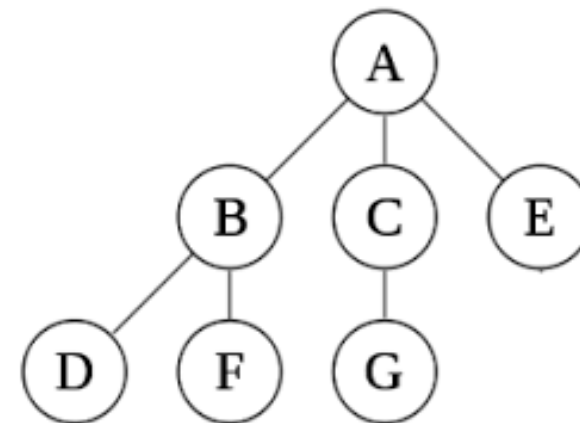
Os nós são acessados de acordo com uma hierarquia.



Definições

Na árvore, os nós são denominados de:

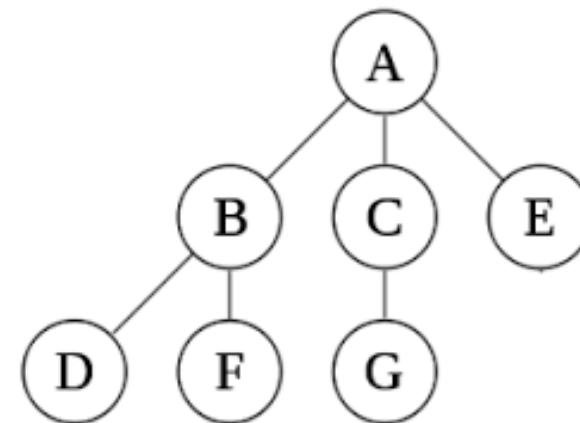
- Pai se for ancestral de outro nó
 - A é pai de B, C, E
 - B é pai de D e F



Definições

Na árvore, os nós são denominados de:

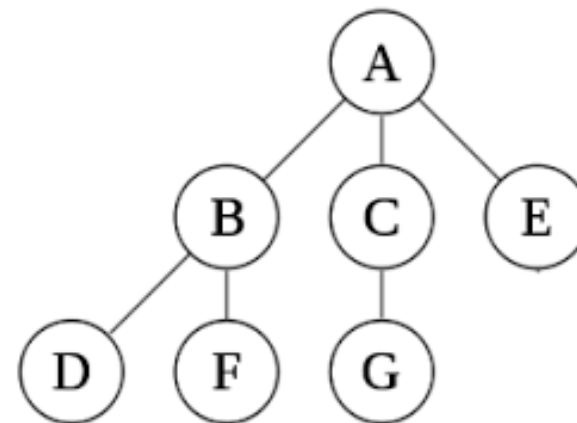
- Filho se for descendente de outro nó.
 - B é filho de A
 - G é filho de C



Definições

Na árvore, os nós são denominados de:

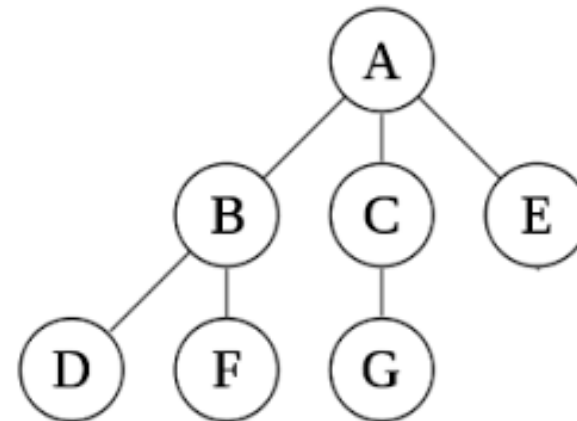
- Raiz da árvore, se for o nó pai do qual se inicia o percurso na árvore
 - A é o nó raiz



Definições

Na árvore, os nós são denominados de:

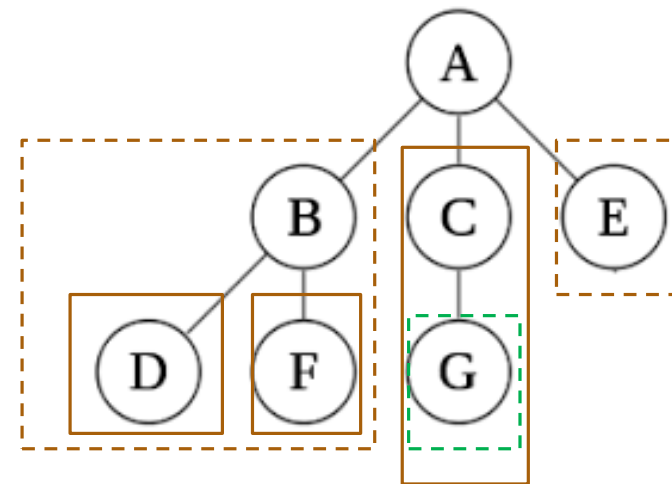
- Folha, se não possui nó filho.
 - D, F e G são nós folhas



Definições

Na árvore, existem subárvores

- Estruturas que podem ser identificadas isoladamente contendo uma raiz e/ou seus nós descendentes.
 - B, D e F formam uma subárvore
 - C e G formam outra
 - E forma uma subárvore que não possui filhos.



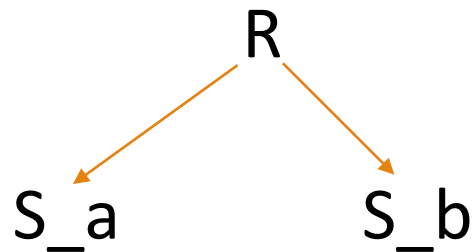
Definição Recursiva

Uma árvore é uma coleção de nós

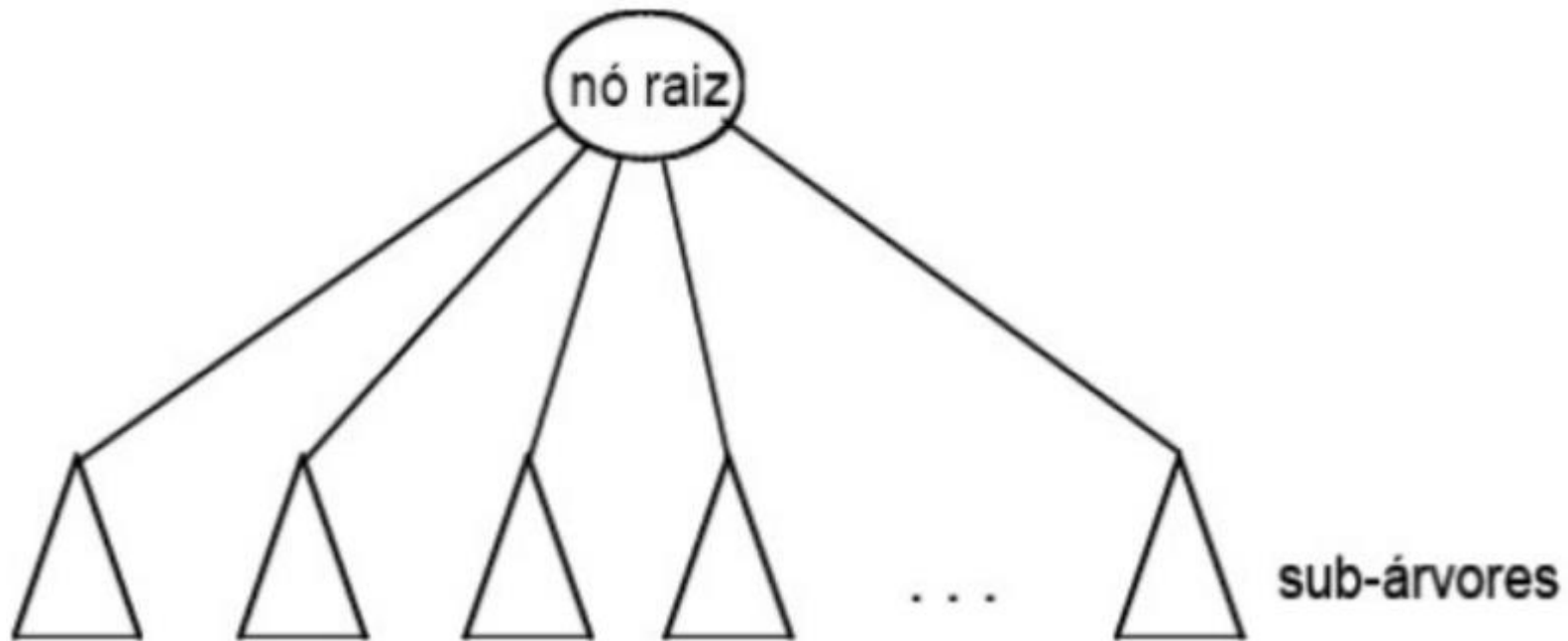
A coleção pode estar vazia, ou consistir de um nó raiz R;

Existe um arco direcionado de R para a raiz de cada subárvore:

- a raiz de cada subárvore é chamada de filho de R,
- da mesma forma R é chamado de pai da raiz de cada subárvore



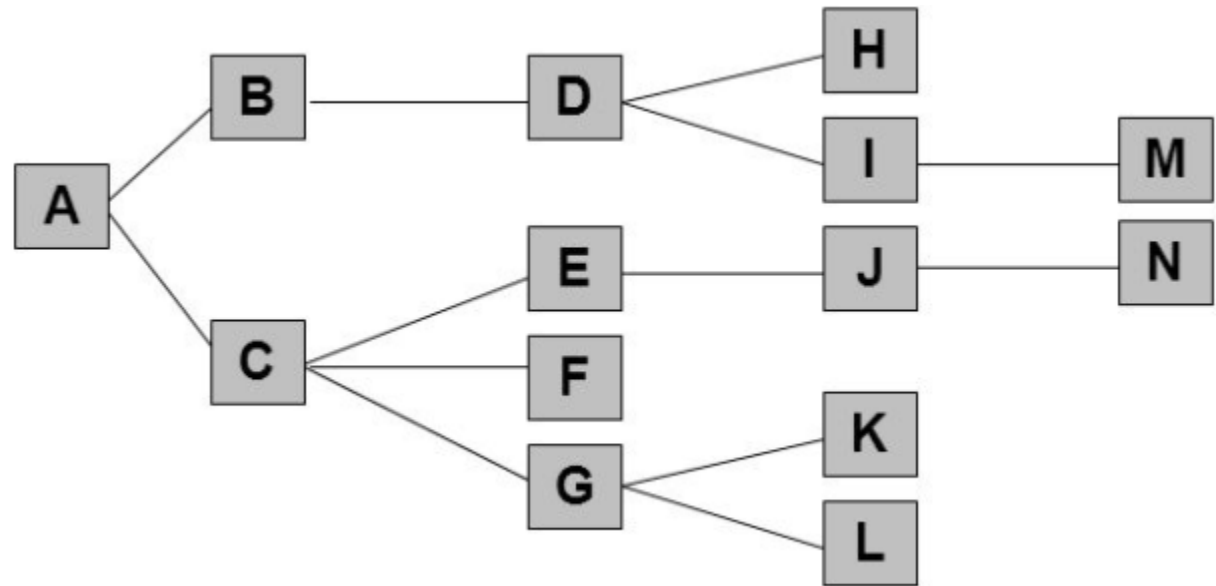
Definição Recursiva



Exercício 1

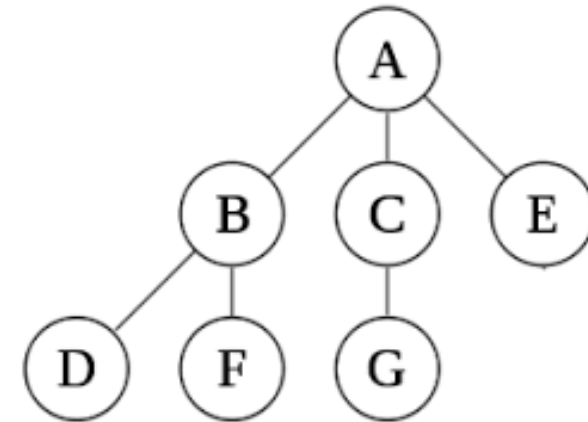
Considerando a árvore a seguir, defina:

- A) A raiz da árvore
- B) Os nós folhas
- C) todas as subárvores



Definições

- Grau de um nó:
 - número de subárvores relacionadas com o nó
 - Exemplo: Grau do nó A: 3
Grau do nó B: 2
- Folha:
 - um nó de grau zero
- Grau de uma árvore:
 - Grau máximo atingido por seus nós.
 - Neste exemplo será 3.



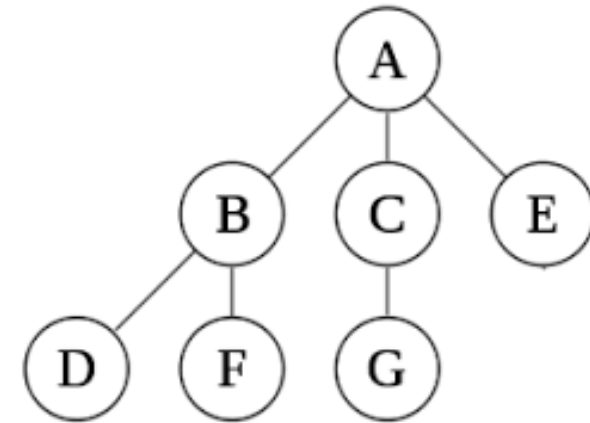
Definições

- Caminho:

- sequência única de arestas que leva a um nó a partir da raiz
- Ex.Caminho para F é A-B-F

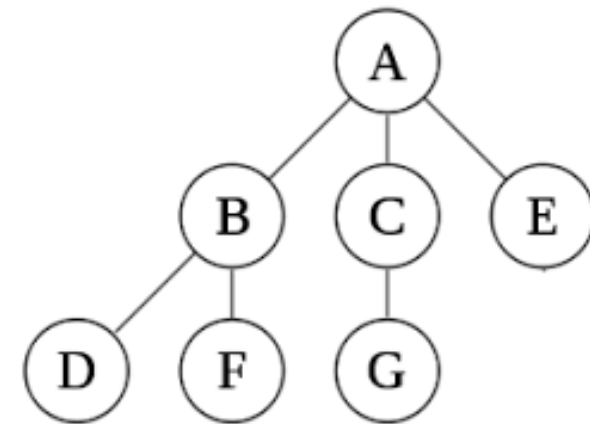
- Comprimento do Caminho:

- número de arestas no caminho.
- Ex.Comprimento do caminho até F é 2



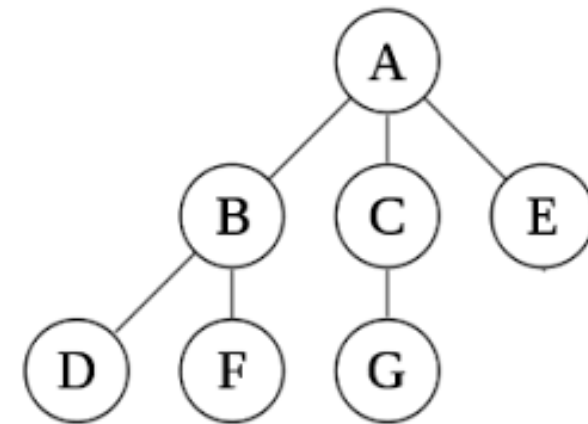
Definições

- **Nível de um nó:**
 - Comprimento do caminho da raiz até o nó, que é o número de arcos no caminho
 - Ex. Nível de A: 0
 - Nível de B: 1
 - Nível de C: 1
 - Nível de D: 2



Definições

- **Altura:**
 - raiz mais o número máximo de descendentes
 - Caminho entre a raiz e a(s) folhas(s) mais distante(s) + 1
- Ex. Altura de D : 1
- Altura de C: 2
- Altura de A : 3

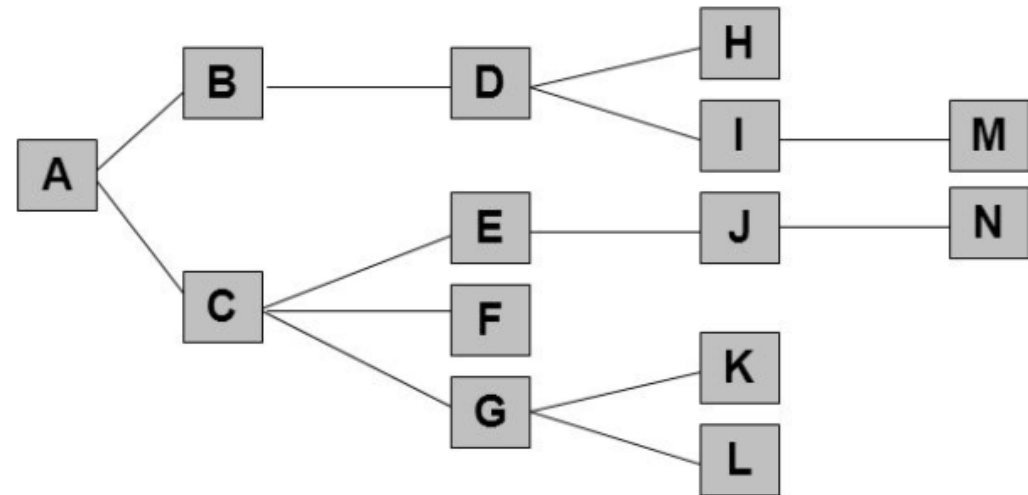


Exercício 2

Defina para cada nó:

O grau, o nível, a altura, o caminho, o comprimento do caminho

Defina para a árvore a altura



Árvores Binárias

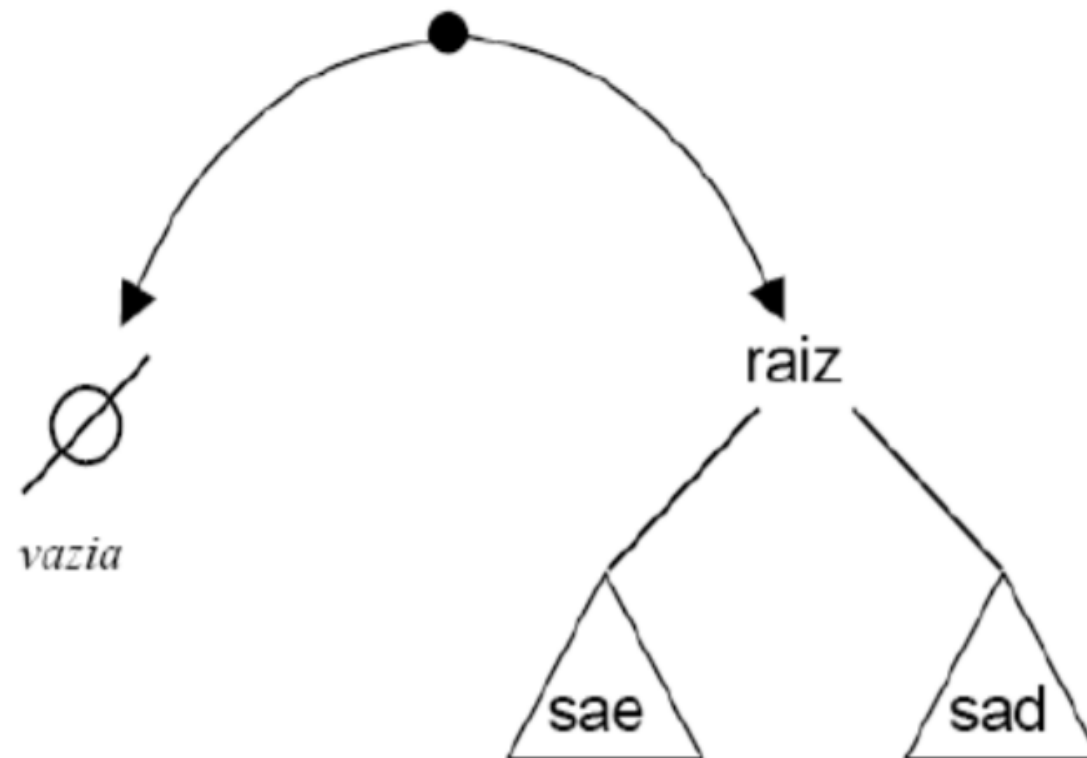
É uma árvore na qual cada nó possui no máximo grau 2.



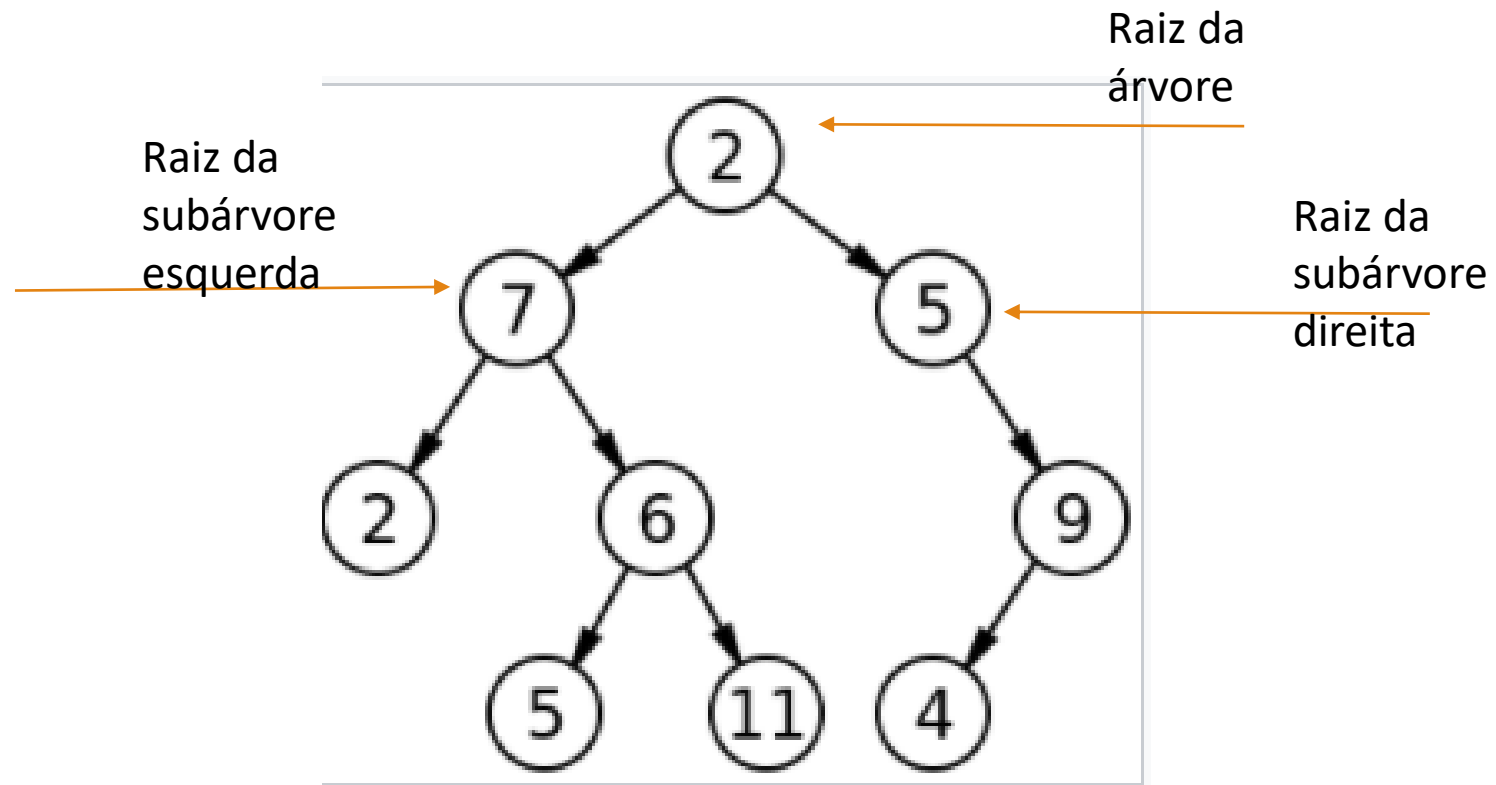
Definição

- Uma árvore binária é um conjunto finito de elementos que está **vazio ou pode** ser particionado em **três subconjuntos** disjuntos:
 - Raiz, um subconjunto que possui um único elemento
 - Subárvore esquerda, que é uma árvore binária
 - Subárvore direita, que também é uma árvore binária

Definição



Exemplo



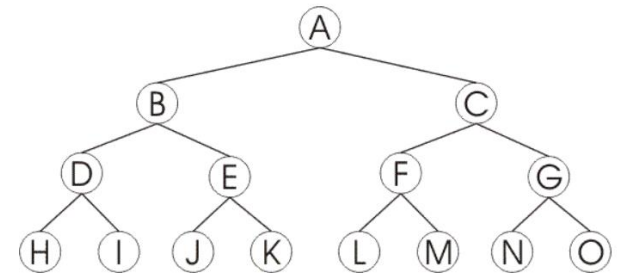
Percursos em árvore

Dependendo da aplicação a que se destina a árvore, deve haver a implementação de um tipo de percurso.

O percurso em um árvore é um processo que determina como serão visitados todos nós de uma árvore para construção (descoberta) de um caminho.

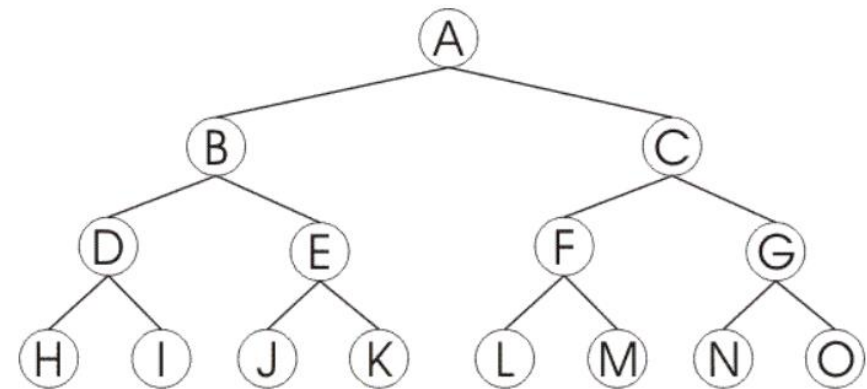
Tipos de Percurso

- Percurso em Largura:
 - Primeiro visitam-se todos os nós do menor nível para seguir para os nós do próximo nível.
 - Ex: A – B – C – D – E – F – G – H – I – J – K – L – M – N – O



Tipos de Percurso

- **Percurso em Profundidade:**
 - Primeiro visitam-se todos os nós da sub-árvore atual
 - Ex: se estiver na subárvore B, primeiro deve explorar todos os nós dela para depois poder ir para C



Tipos de Percurso em Profundidade

- Pré-ordem
- Pós-ordem
- In-ordem

Percurso em Pré-ordem

- Processo que possui os seguintes passos:

1- Visitar a raiz

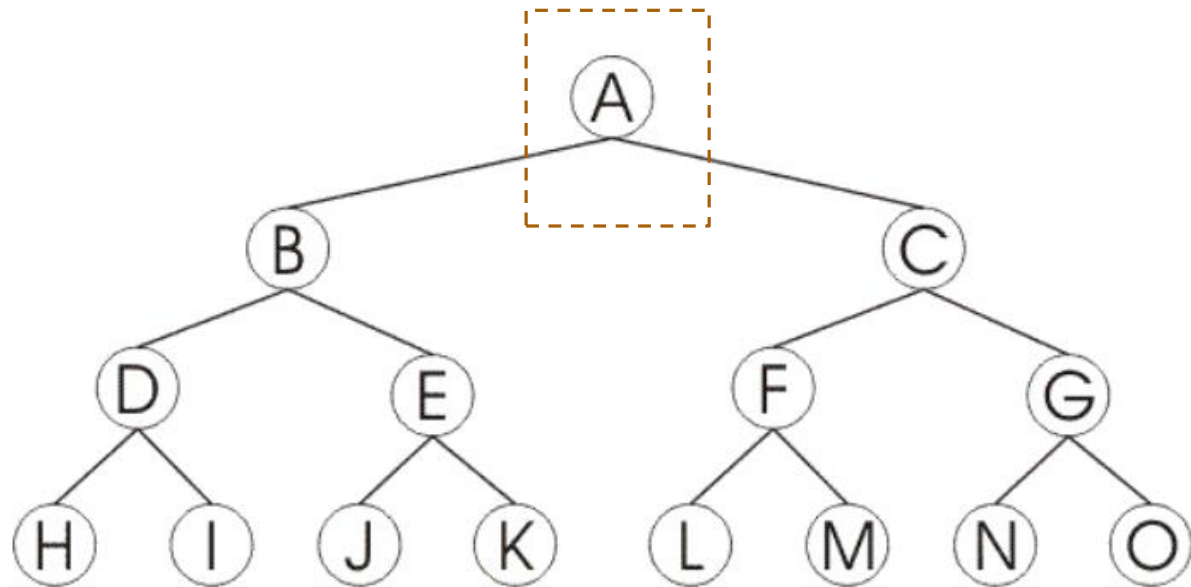
2- Percorrer a sub-árvore esquerda em pré-ordem

3- Percorrer a sub-árvore direita em pré-ordem

Exemplo do Pré-ordem

Percurso resultante:

Visite a raiz



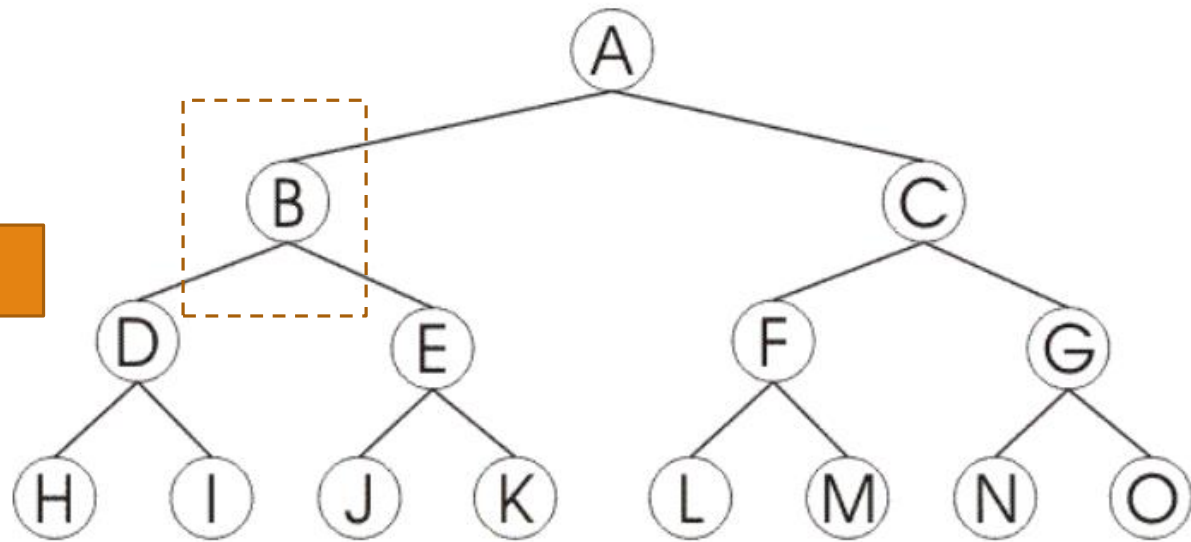
Exemplo do Pré-ordem

Percurso resultante:

A

Processe em pre ordem a
subárvore a esquerda

Visite a raiz



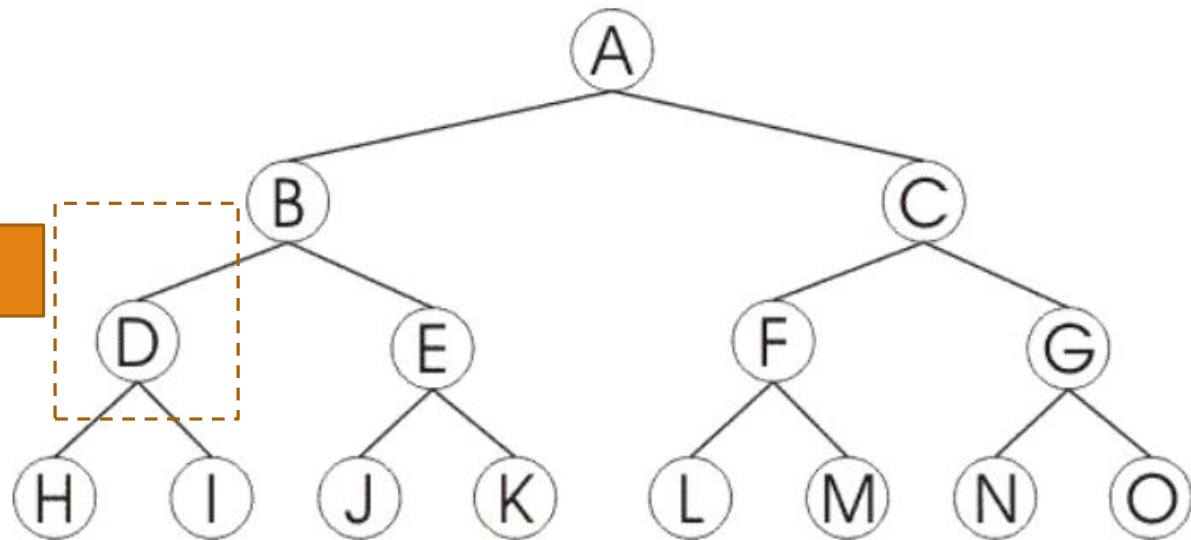
Exemplo do Pré-ordem

Percurso resultante:

A-B

Processe em pre ordem a
subárvore a esquerda

Visite a raiz



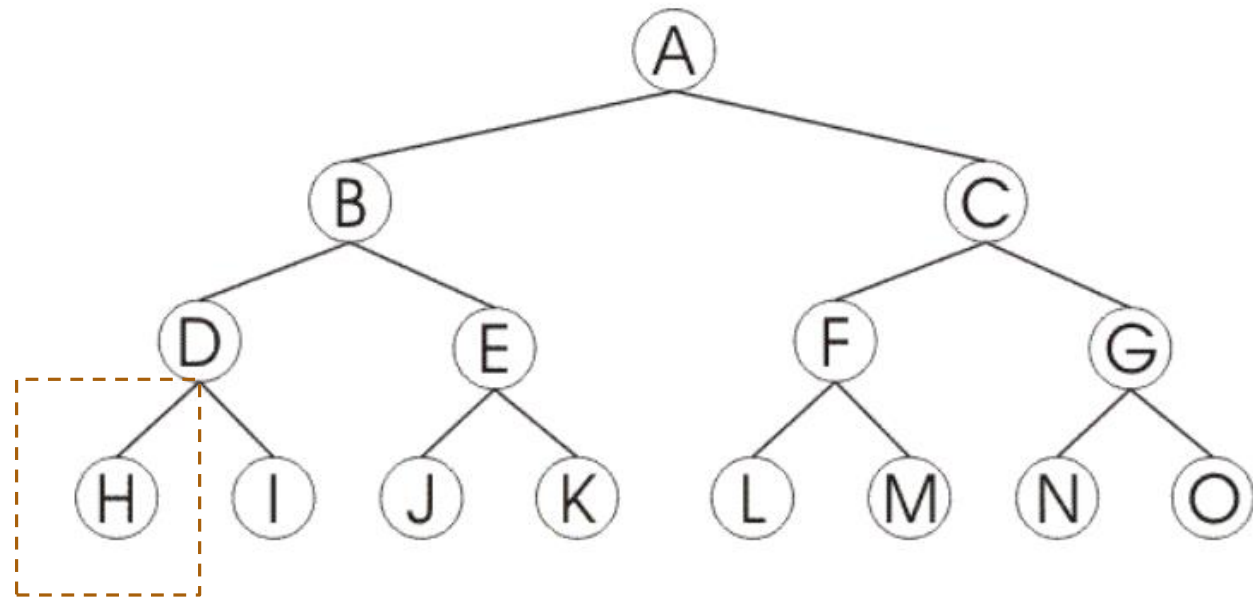
Exemplo do Pré-ordem

Percurso resultante:

A-B-D

Processe em pre ordem a
subárvore a esquerda

Visite a raiz



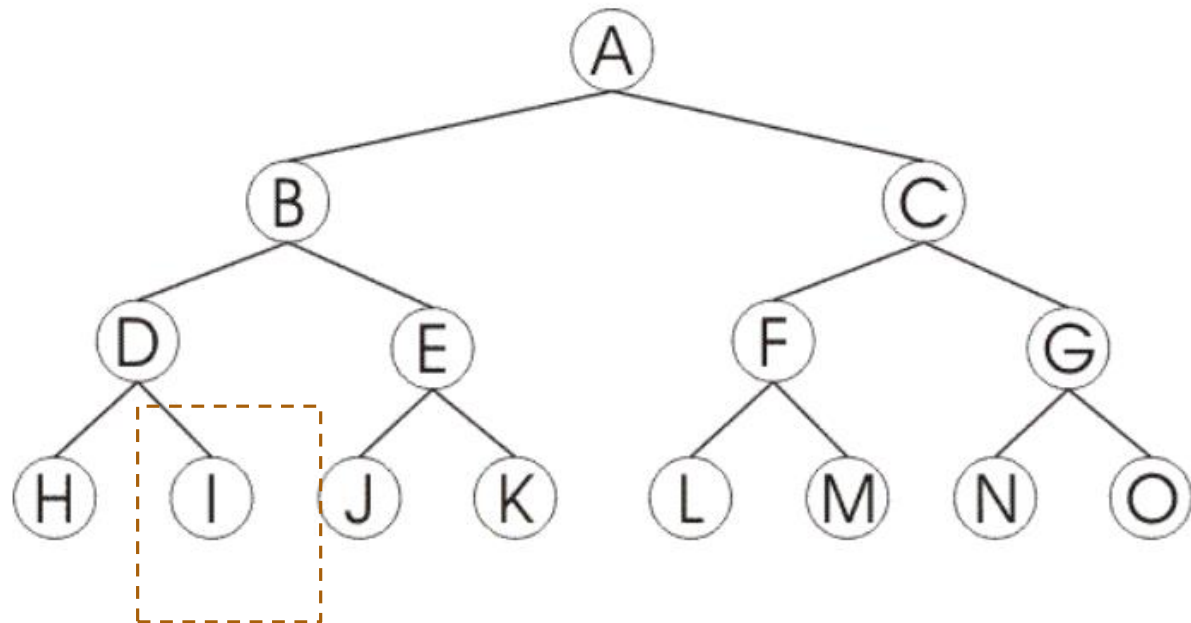
Exemplo do Pré-ordem

Percurso resultante:

A-B-D -H

Processe em pre ordem a
subárvore a direita

Visite a raiz



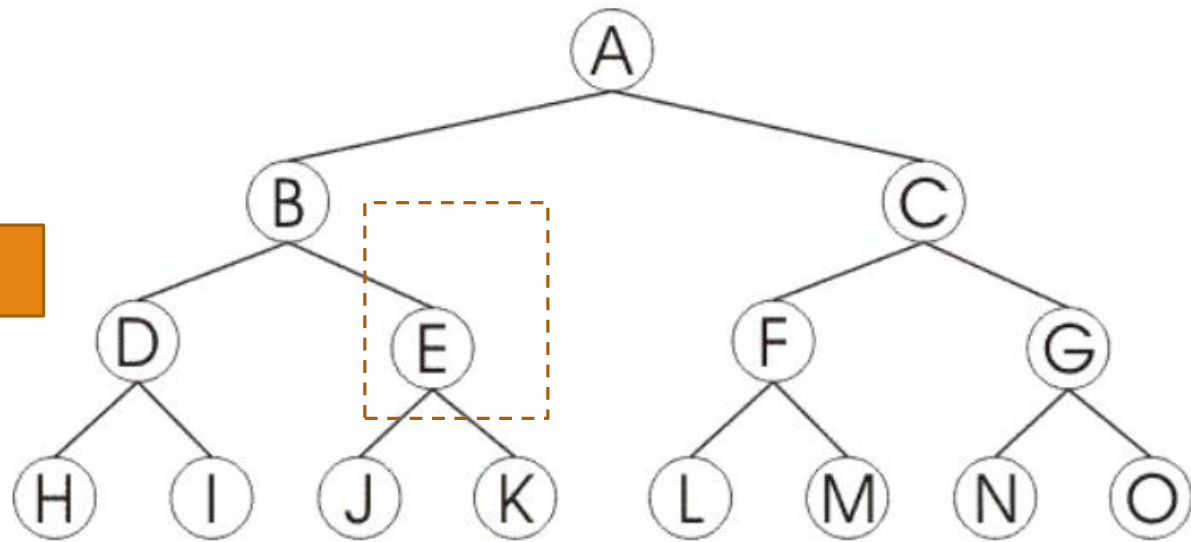
Exemplo do Pré-ordem

Percurso resultante:

A-B-D-H-I

Processe em pre ordem a
subárvore a direita

Visite a raiz



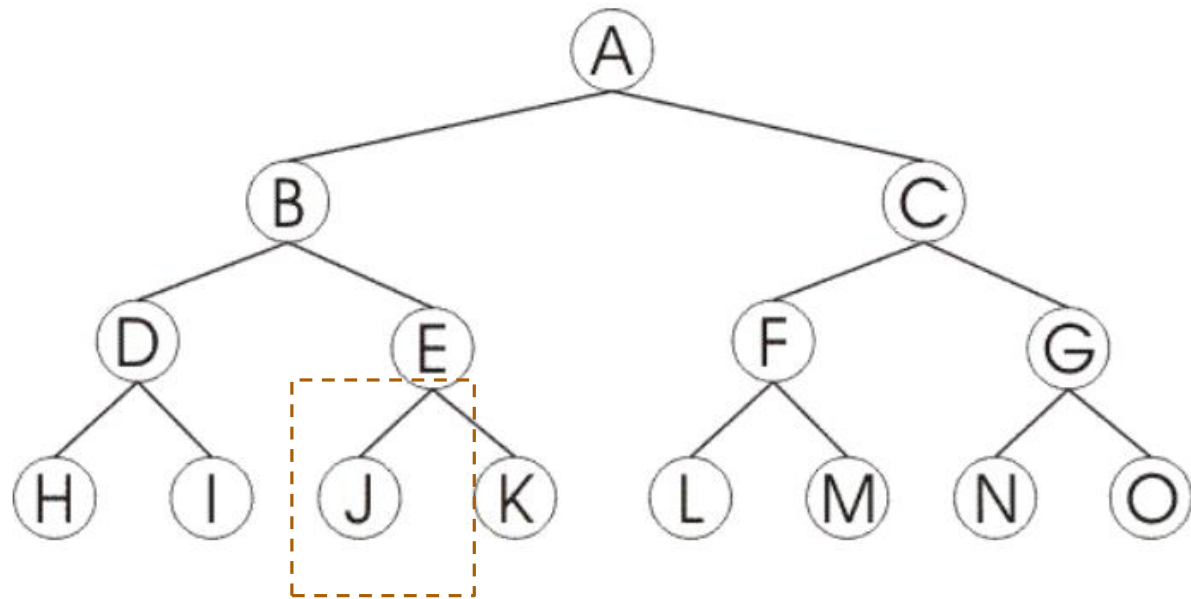
Exemplo do Pré-ordem

Percurso resultante:

A-B-D –H – I- E

Processe em pre ordem a
subárvore a esquerda

Visite a raiz



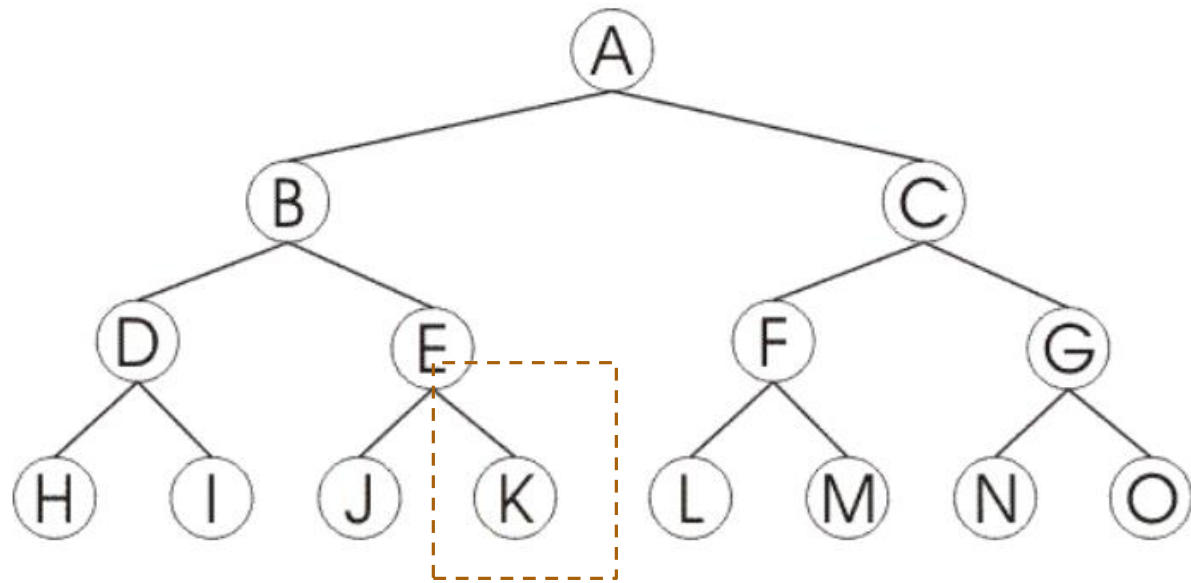
Exemplo do Pré-ordem

Percurso resultante:

A-B-D-H-I-E-J

Processe em pre ordem a
subárvore a direita

Visite a raiz



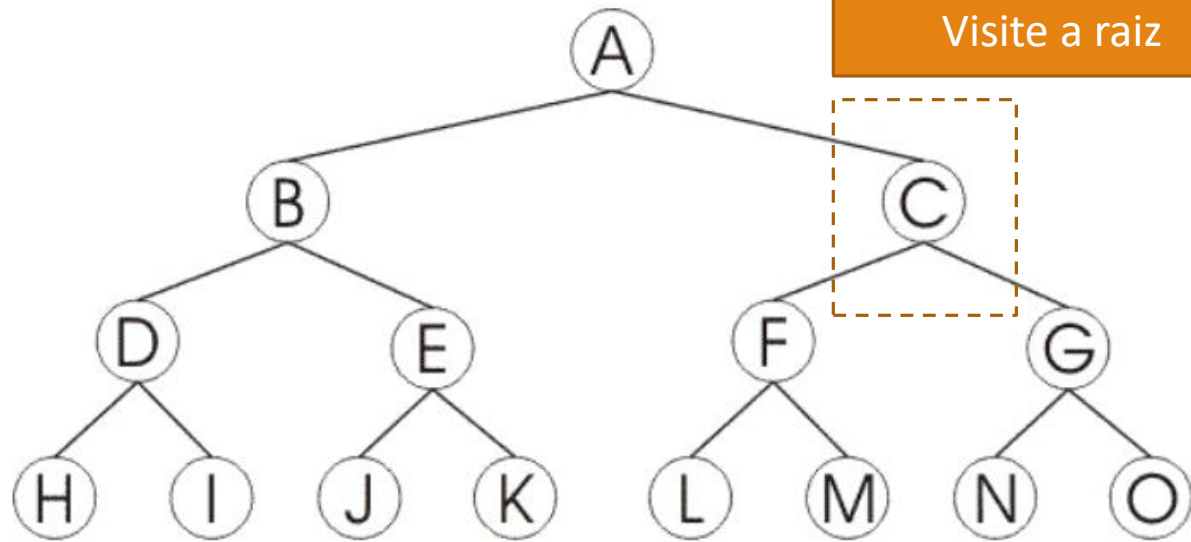
Exemplo do Pré-ordem

Percurso resultante:

A-B-D –H – I- E – J-K

Processe em pre ordem a
subárvore a direita

Visite a raiz

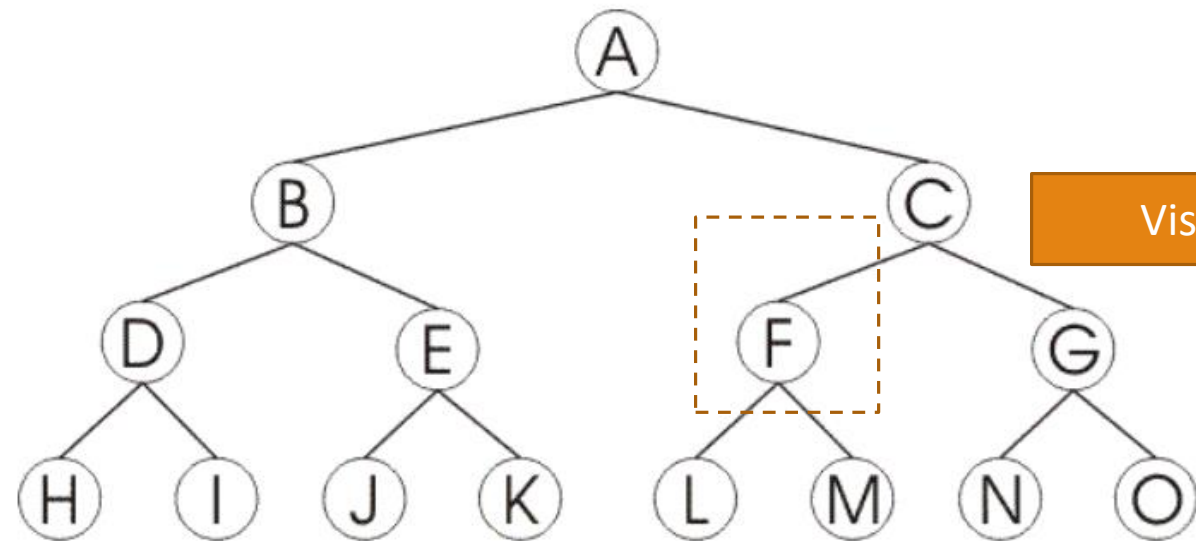


Exemplo do Pré-ordem

Percurso resultante:

A-B-D -H - I- E - J-K -C

Processe em pre ordem a
subárvore a esquerda



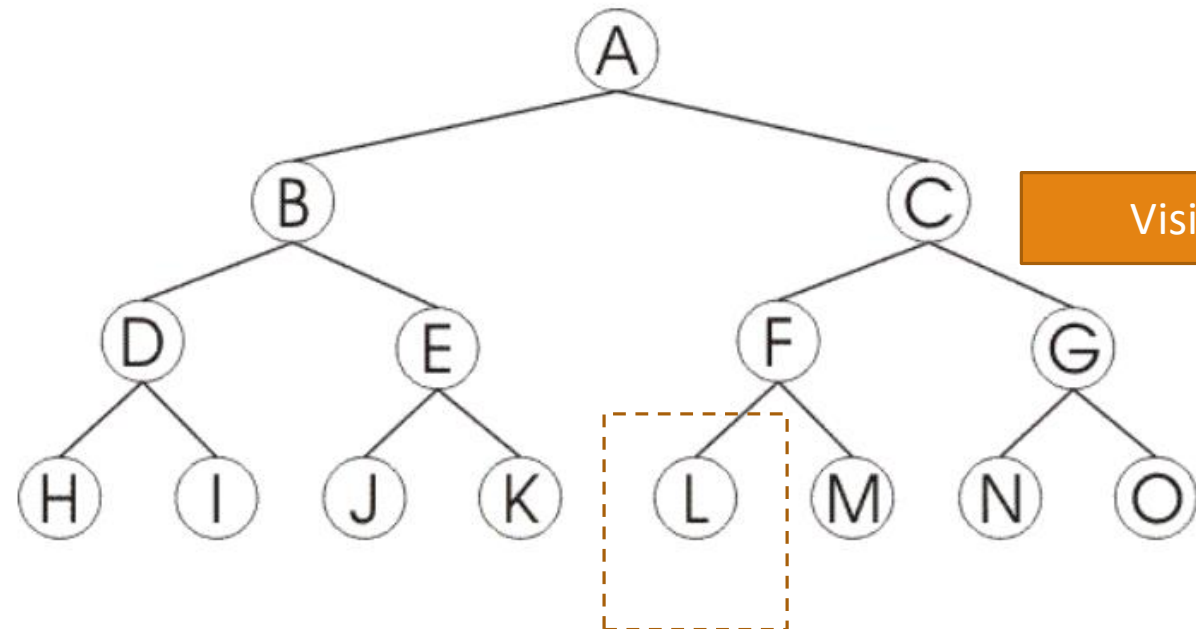
Visite a raiz

Exemplo do Pré-ordem

Percurso resultante:

A-B-D-H-I-E-J-K-C-F

Processe em pre ordem a
subárvore a esquerda



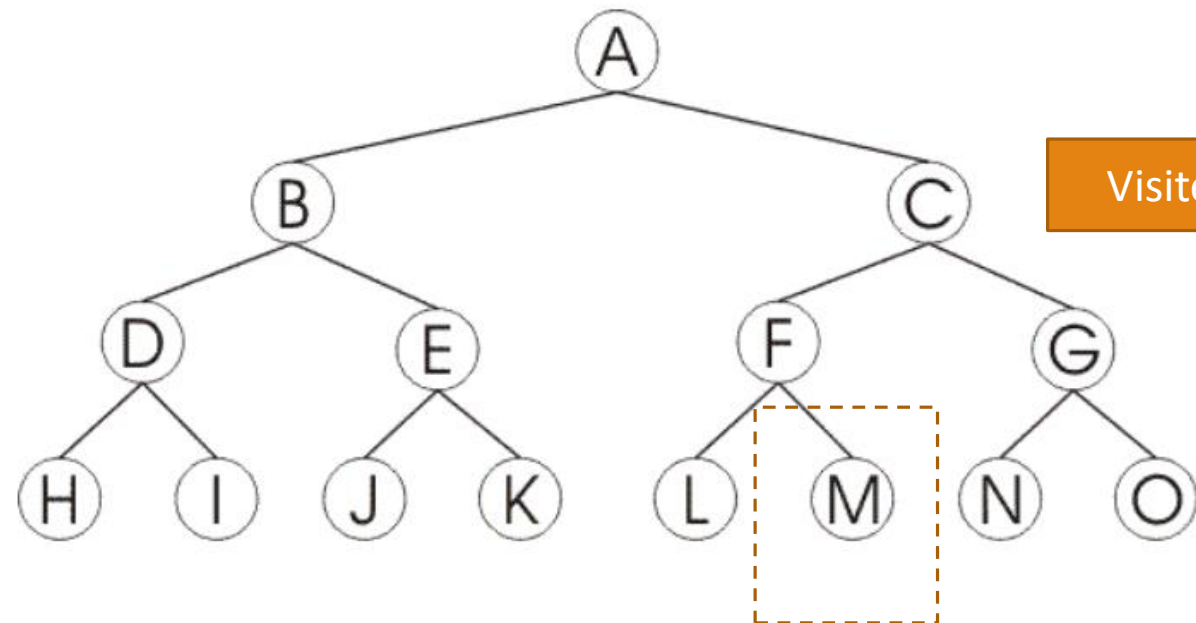
Visite a raiz

Exemplo do Pré-ordem

Percurso resultante:

A-B-D-H-I-E-J-K-C-F-L

Processe em pre ordem a
subárvore a direita



Visite a raiz

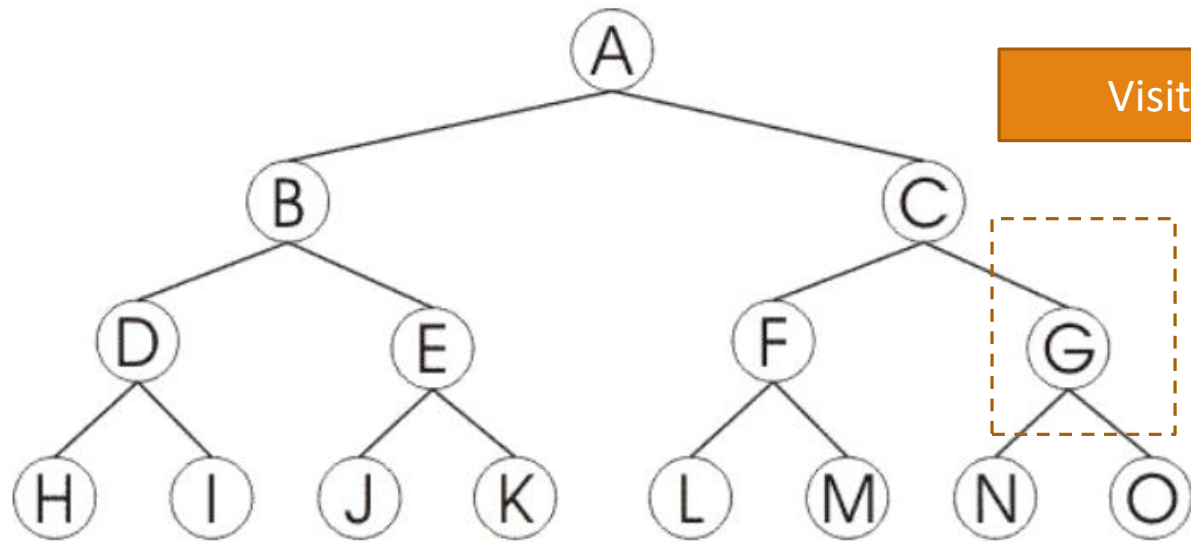
Exemplo do Pré-ordem

Percurso resultante:

A-B-D-H-I-E-J-K-C-F-L-M

Processe em pre ordem a
subárvore a direita

Visite a raiz



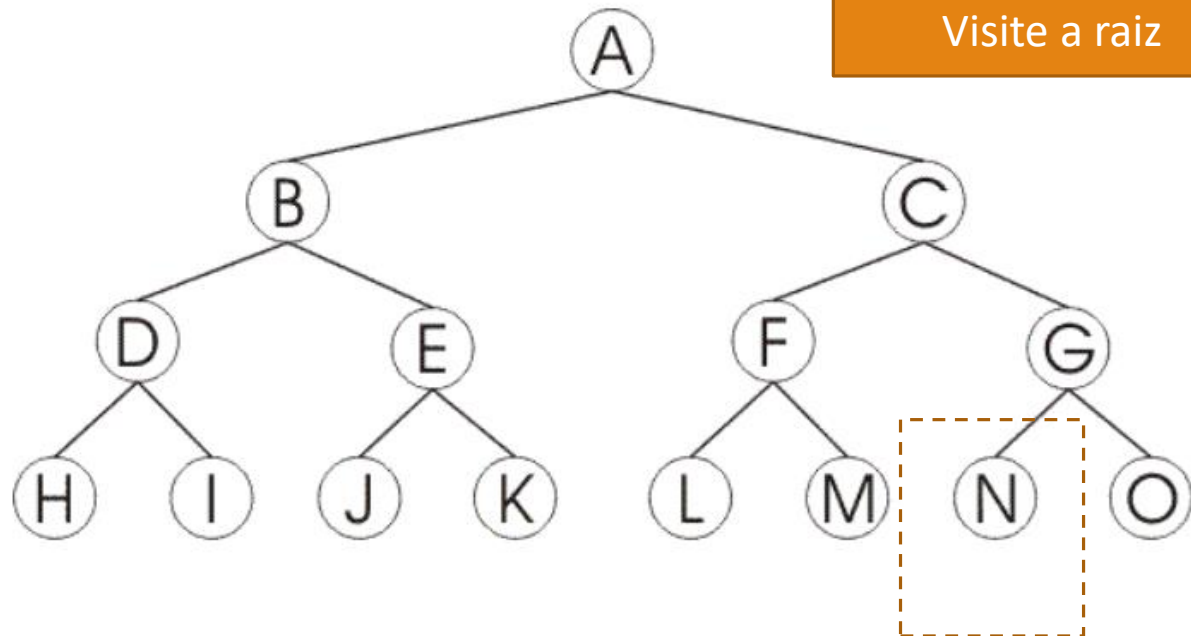
Exemplo do Pré-ordem

Percurso resultante:

A-B-D-H-I-E-J-K-C-F-L-M-G

Processe em pre ordem a
subárvore a esquerda

Visite a raiz



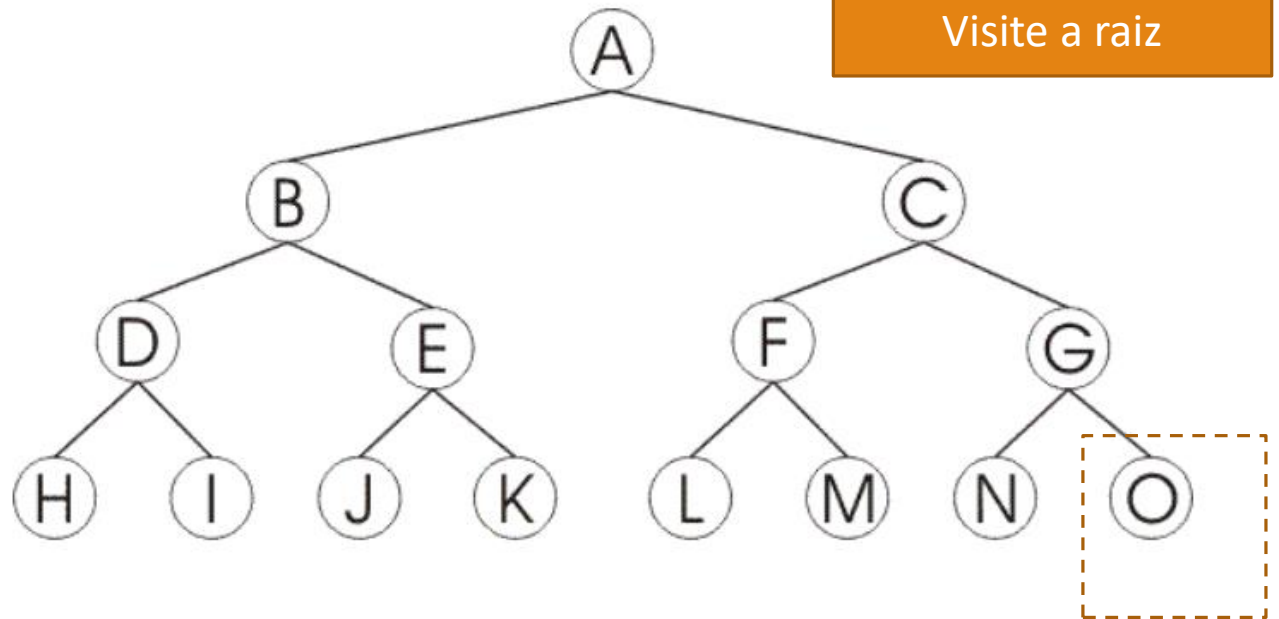
Exemplo do Pré-ordem

Percurso resultante:

A-B-D-H-I-E-J-K-C-F-L-M-G-N

Processe em pre ordem a
subárvore a direita

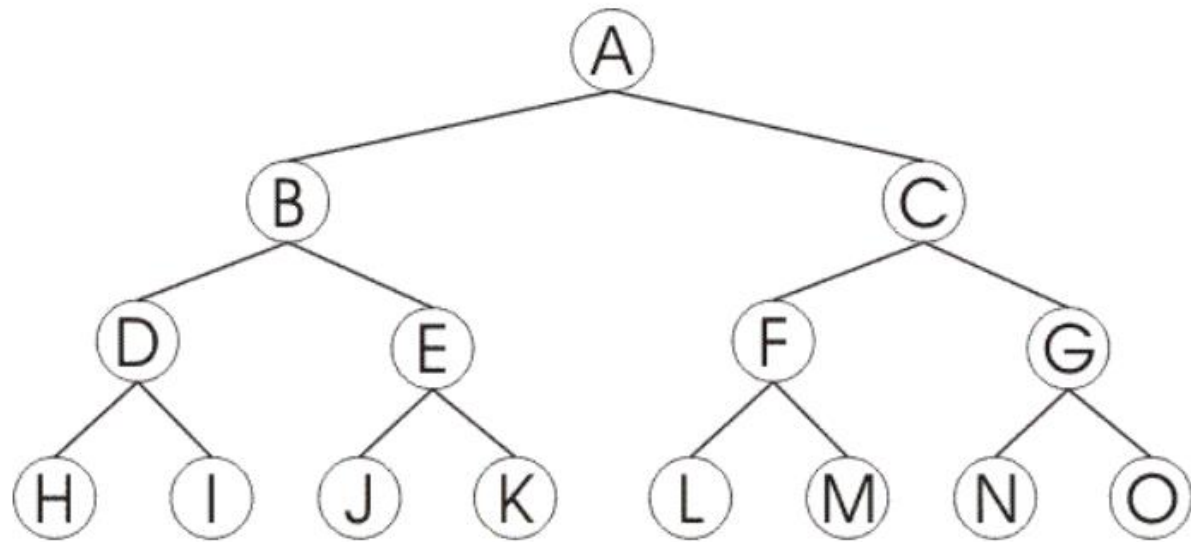
Visite a raiz



Exemplo do Pré-ordem

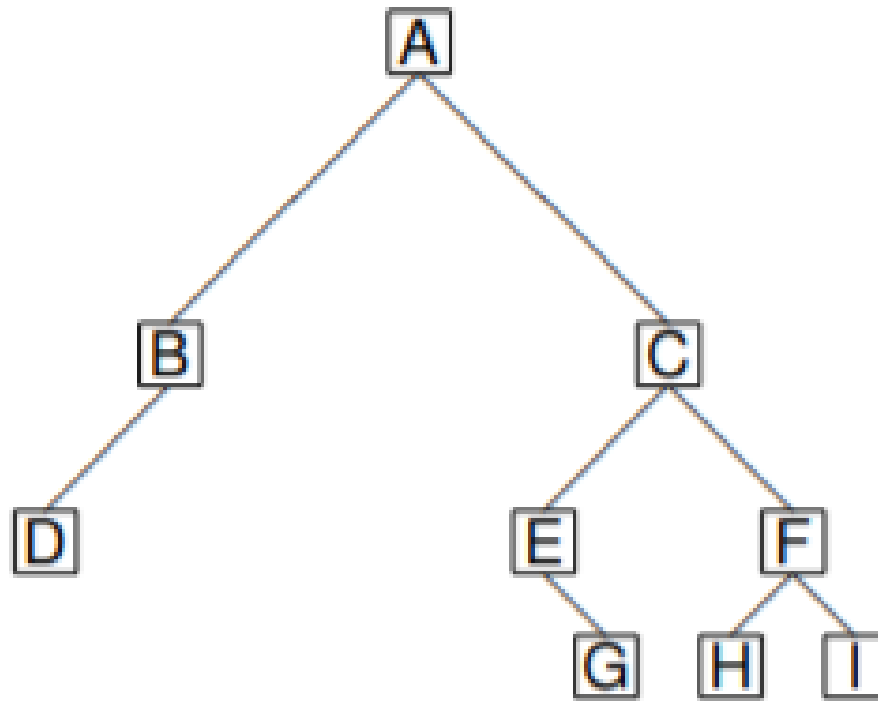
Percurso resultante:

A-B-D-H-I-E-J-K-C-F-L-M-G-N-O



Exercício 3

Determine o percurso em pré-ordem da seguinte árvore binária



Percurso em Pós-Ordem

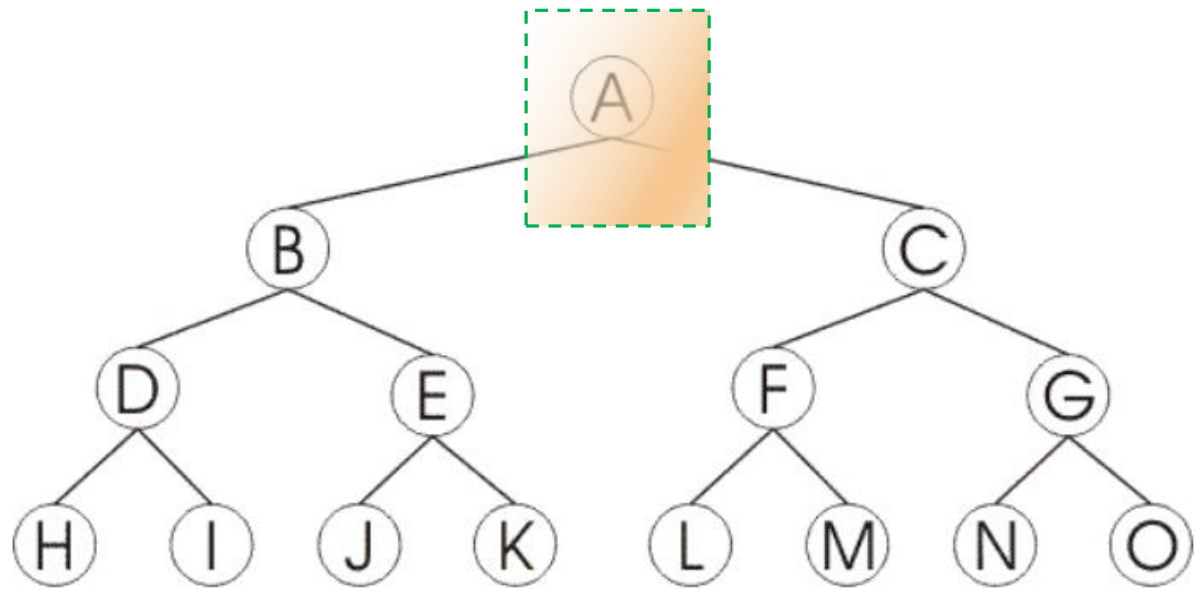
Determina os seguintes passos:

- 1 - Percorrer a sub-árvore esquerda em pós-ordem
- 2- Percorrer a sub-árvore direita em pós-ordem
- 3- Visitar a raiz

Exemplo do Pós-ordem

Percurso resultante:

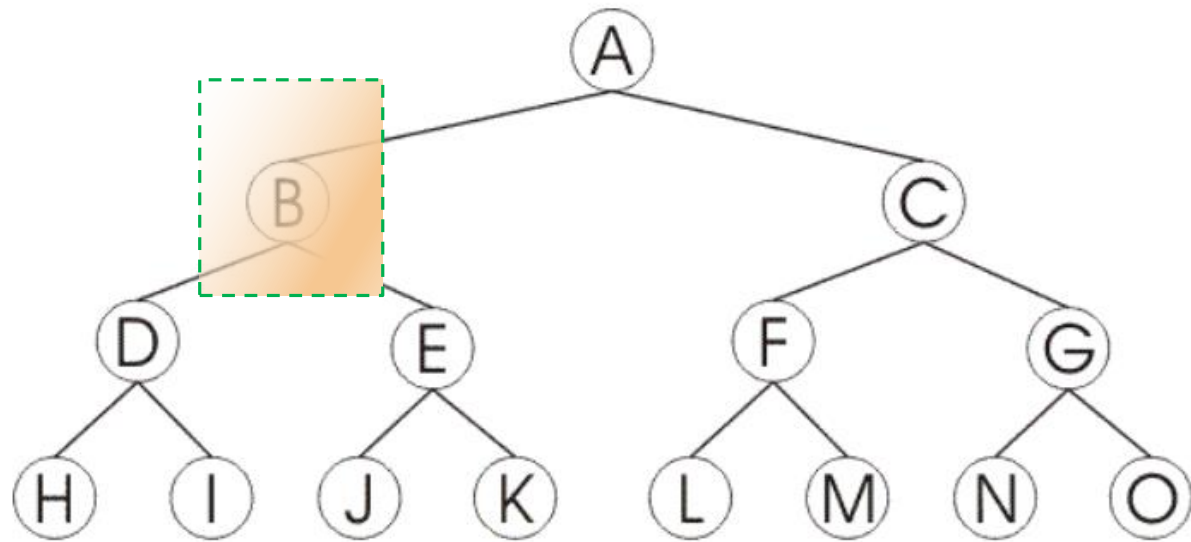
Percorrer em pós ordem a subarvore a esquerda



Exemplo do Pós-ordem

Percurso resultante:

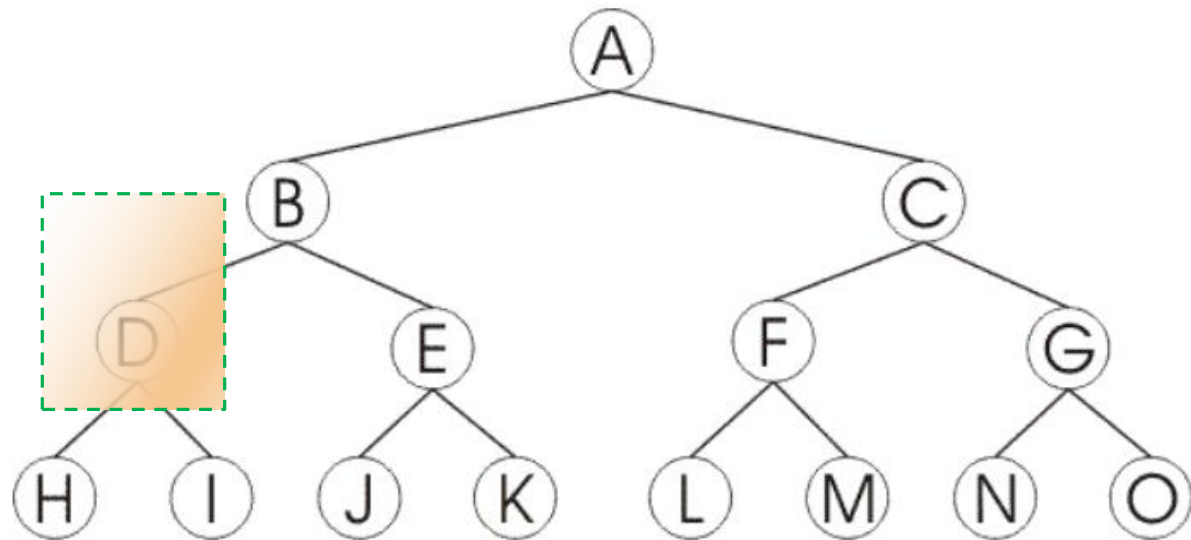
Percorrer em pós ordem a subarvore a esquerda



Exemplo do Pós-ordem

Percurso resultante:

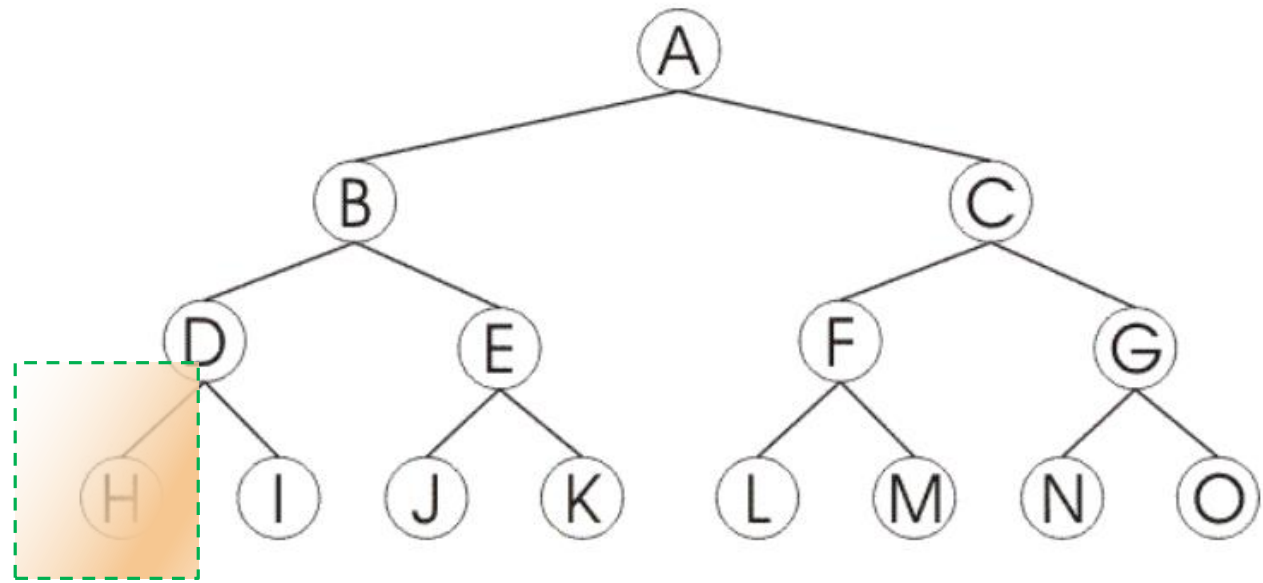
Percorrer em pós ordem a subarvore a esquerda



Exemplo do Pós-ordem

Percurso resultante:

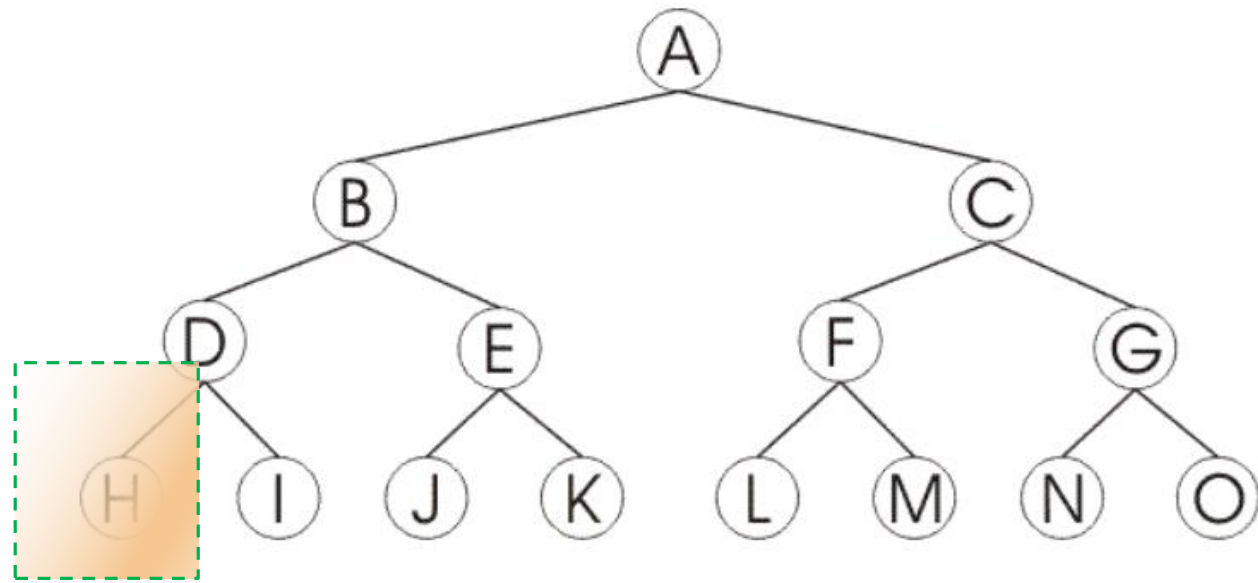
Percorrer em pós ordem a subarvore a esquerda



Exemplo do Pós-ordem

Percurso resultante:

Percorrer em pós ordem a subarvore a direita

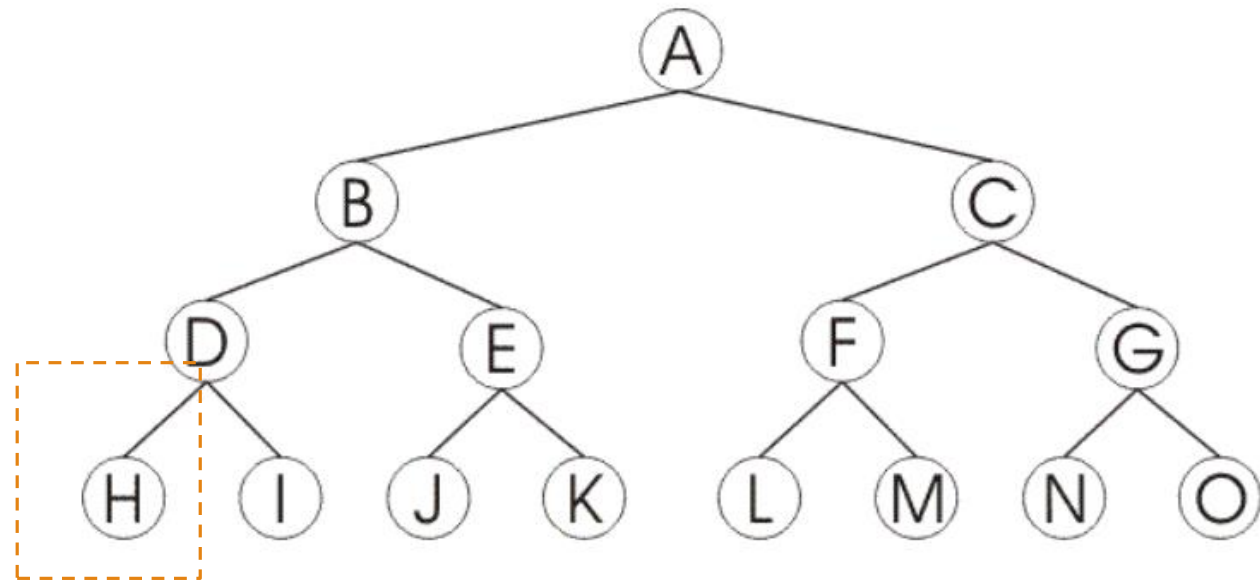


Exemplo do Pós-ordem

Percurso resultante:

H

Visitar raiz

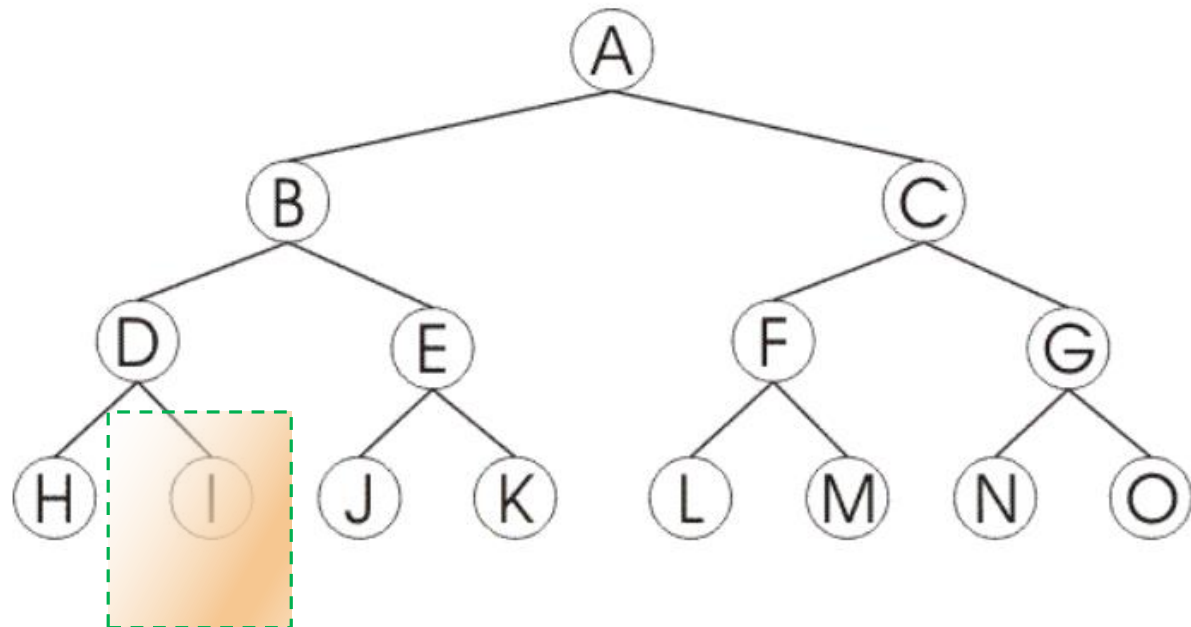


Exemplo do Pós-ordem

Percurso resultante:

H

Percorrer em pós ordem à direita

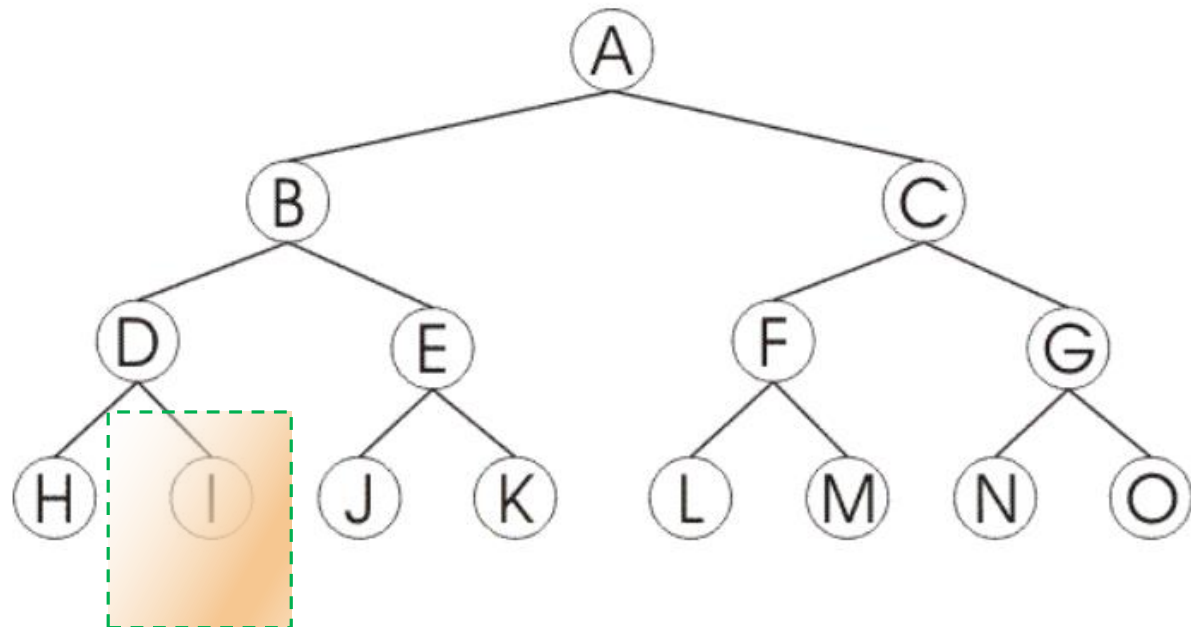


Exemplo do Pós-ordem

Percurso resultante:

H

Percorrer em pós ordem à esquerda

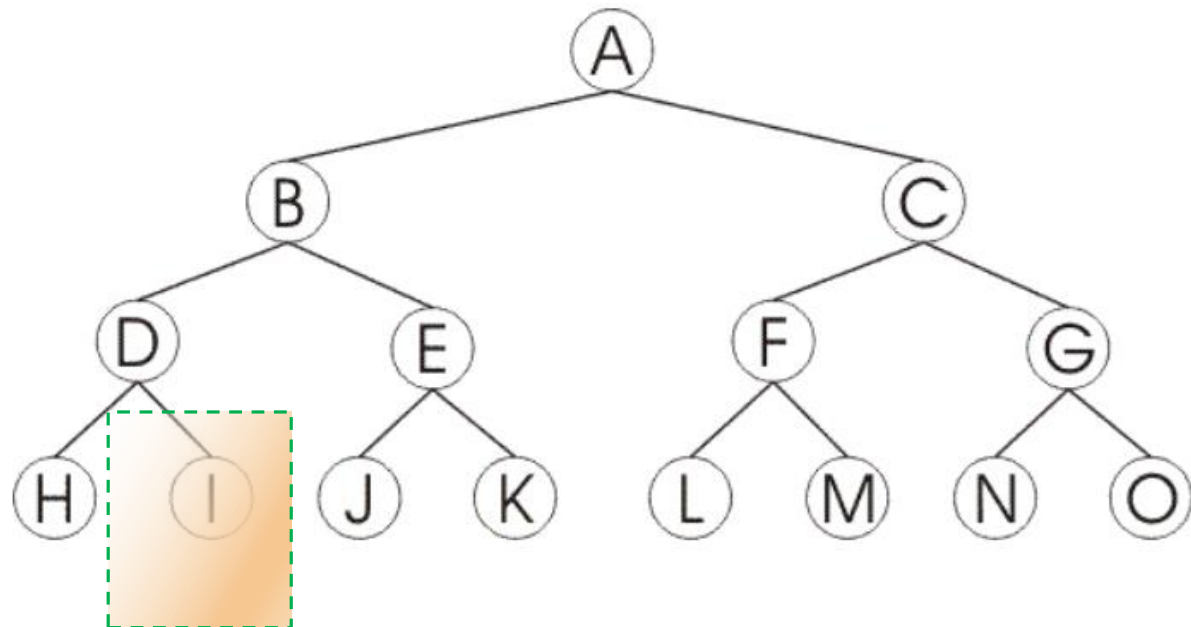


Exemplo do Pós-ordem

Percurso resultante:

H

Percorrer em pós ordem à direita

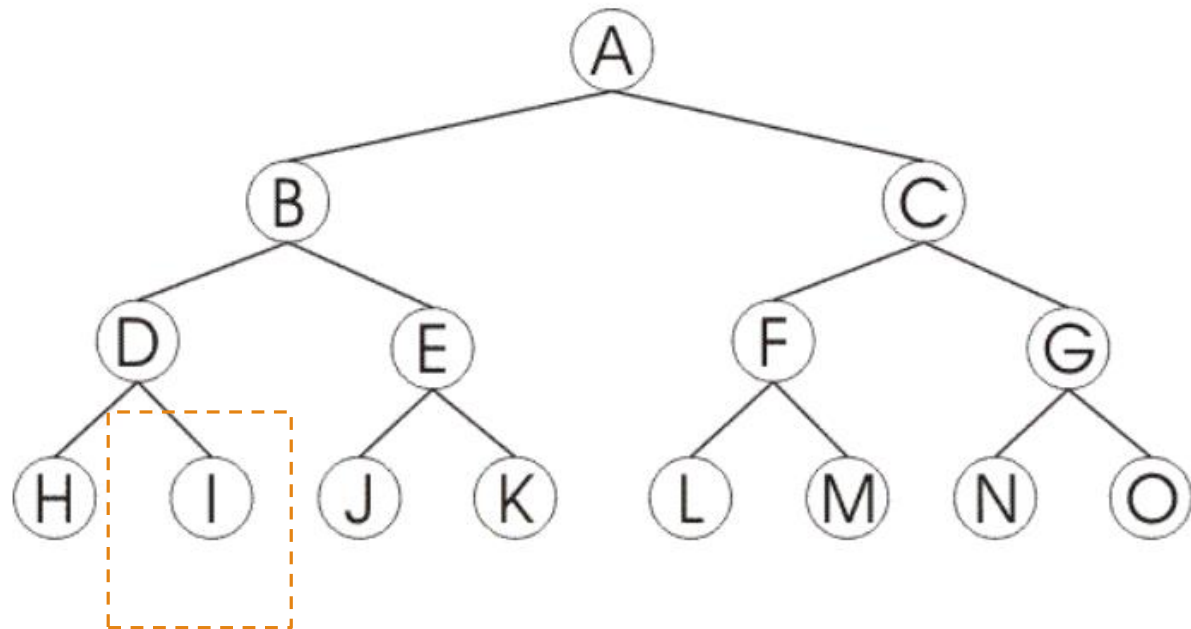


Exemplo do Pós-ordem

Percurso resultante:

H-I

Visitar a raiz

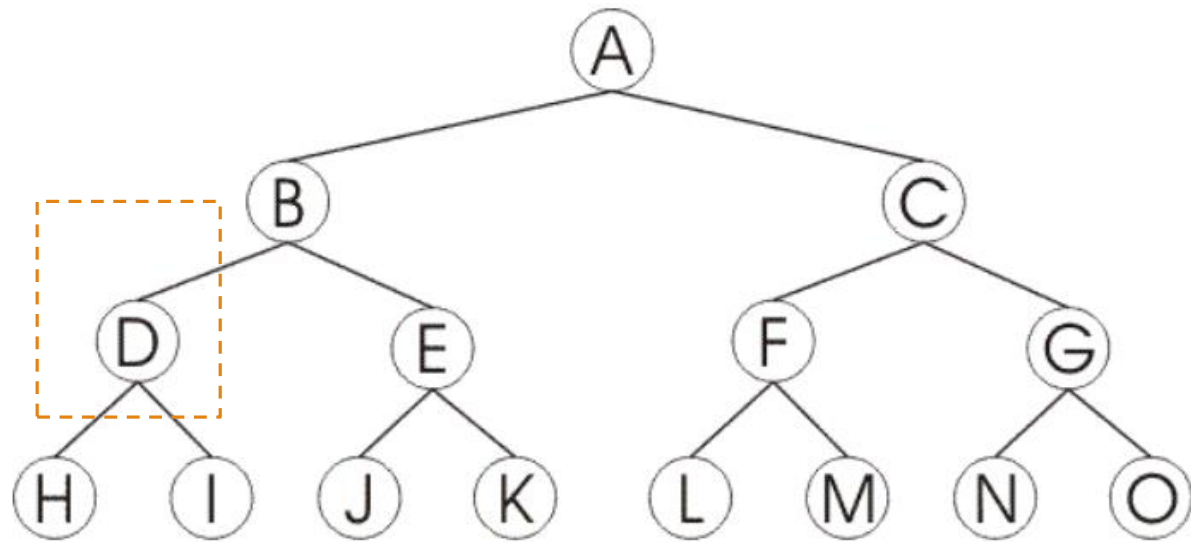


Exemplo do Pós-ordem

Percurso resultante:

H-I-D

Visitar a raiz

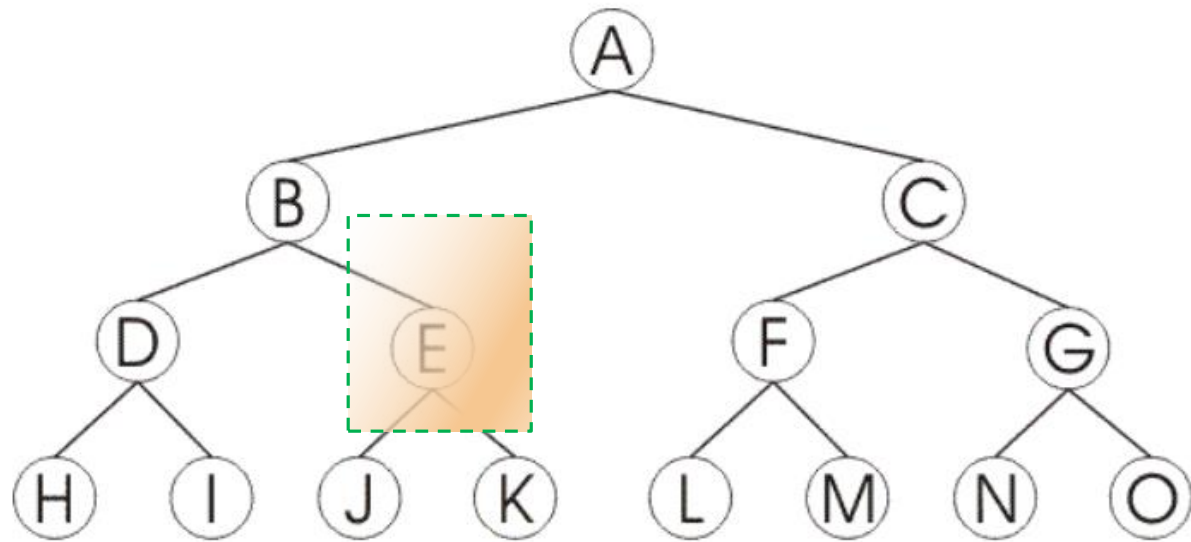


Exemplo do Pós-ordem

Percurso resultante:

H-I-D

Percorrer em pós ordem à direita

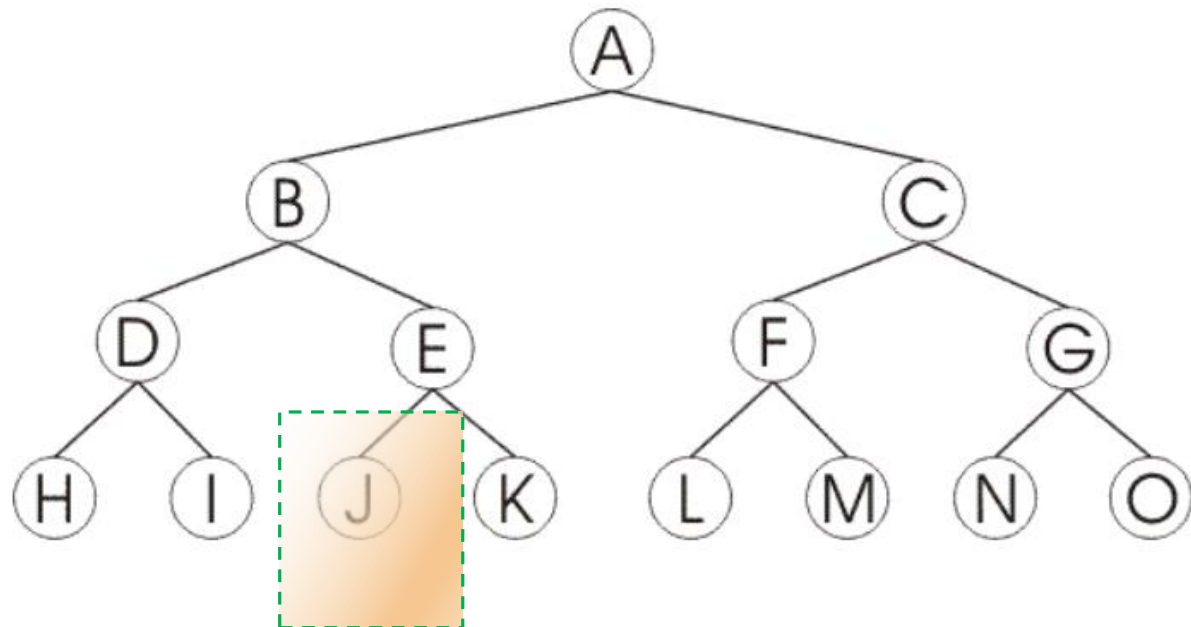


Exemplo do Pós-ordem

Percurso resultante:

H-I-D

Percorrer em pós ordem à esquerda

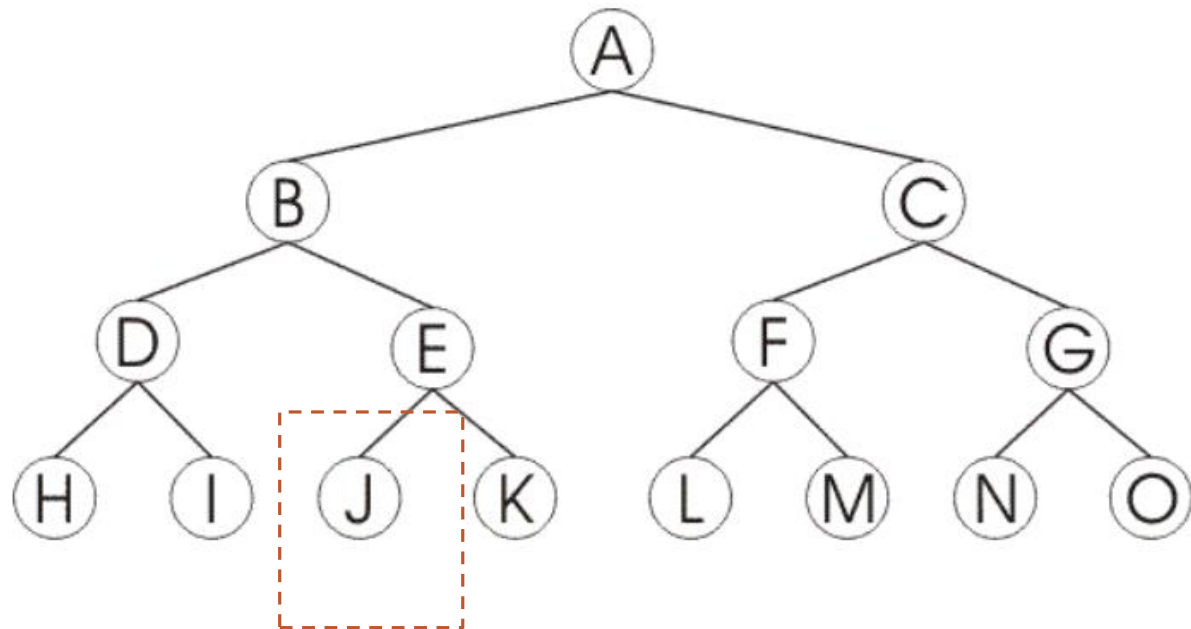


Exemplo do Pós-ordem

Percurso resultante:

H-I-D -J

Visitar raiz

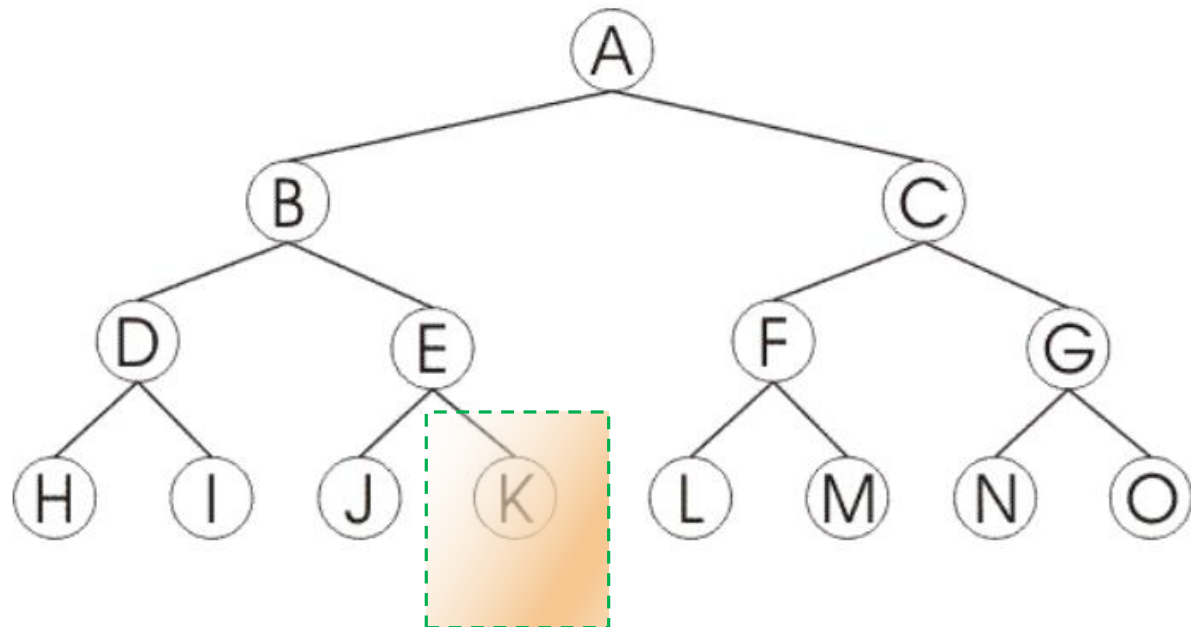


Exemplo do Pós-ordem

Percurso resultante:

H-I-D -J

Percorrer em pós ordem à direita

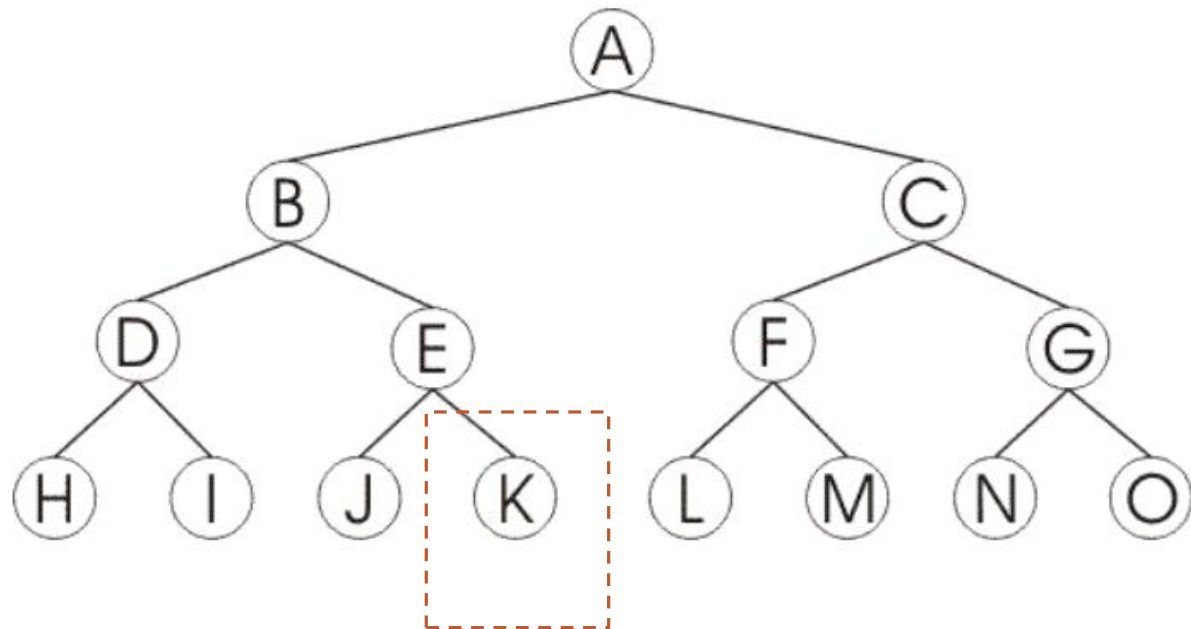


Exemplo do Pós-ordem

Percurso resultante:

H-I-D –J-K

Visitar a raiz

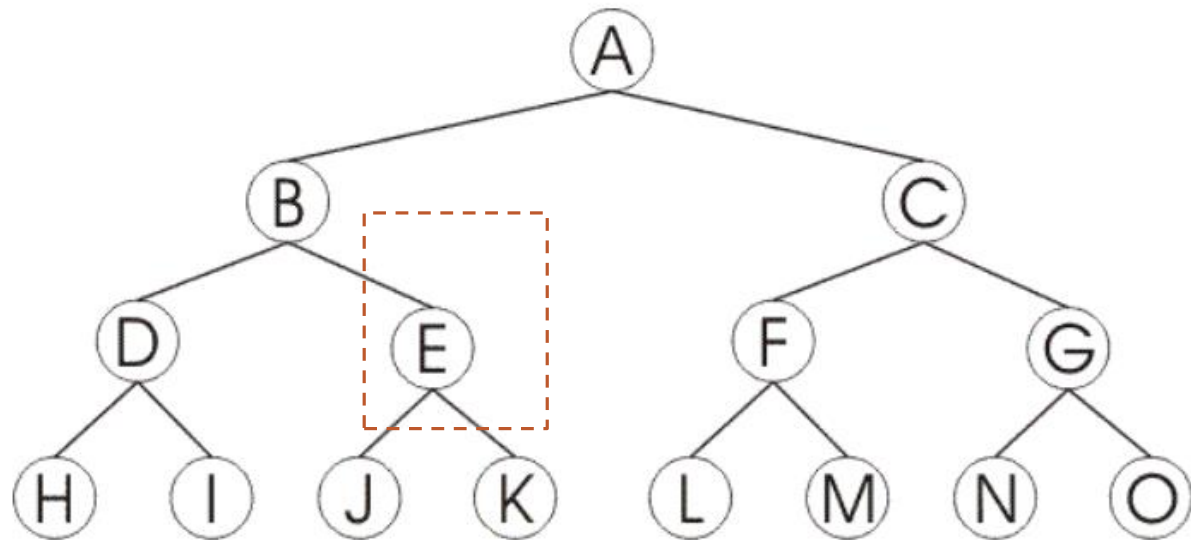


Exemplo do Pós-ordem

Percurso resultante:

H-I-D -J-K - E

Visitar a raiz

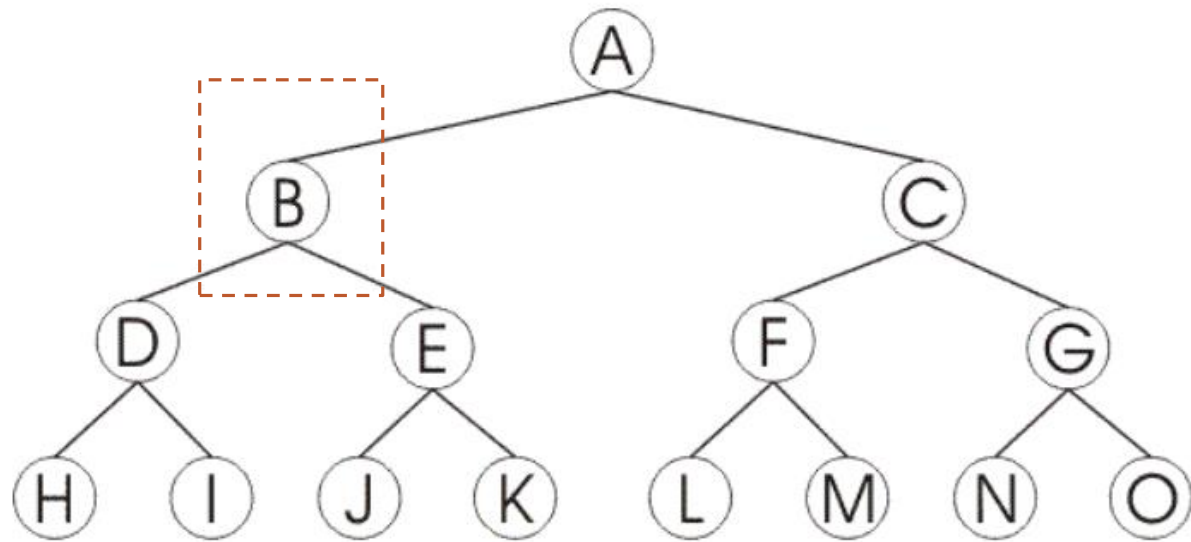


Exemplo do Pós-ordem

Percurso resultante:

H-I-D -J-K - E -B

Visitar a raiz

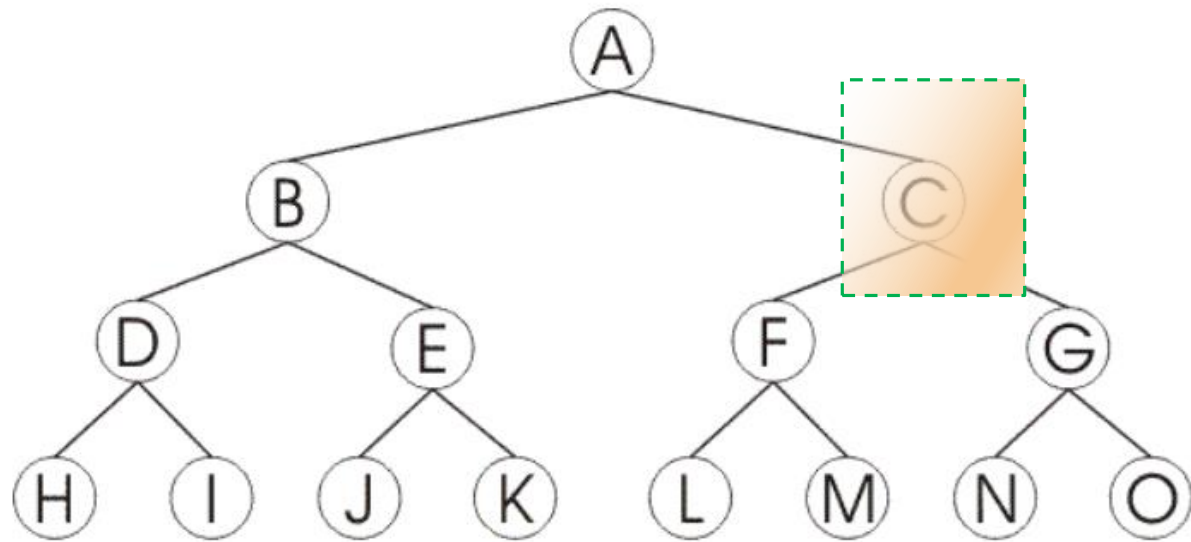


Exemplo do Pós-ordem

Percurso resultante:

H-I-D -J-K - E -B

Percorrer em pós ordem à direita

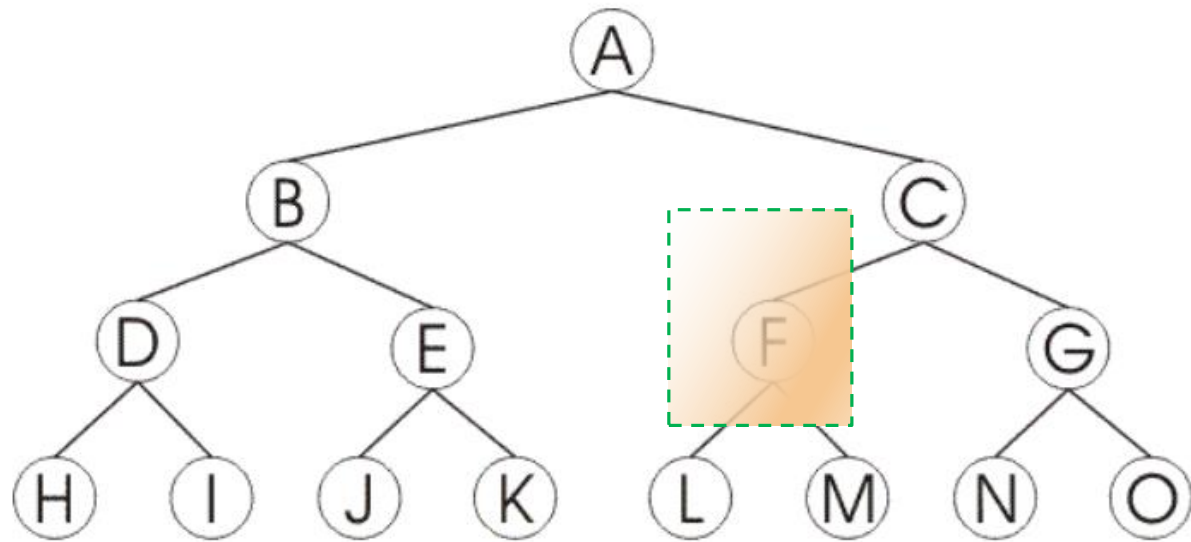


Exemplo do Pós-ordem

Percurso resultante:

H-I-D -J-K - E -B

Percorrer em pós ordem à esquerda

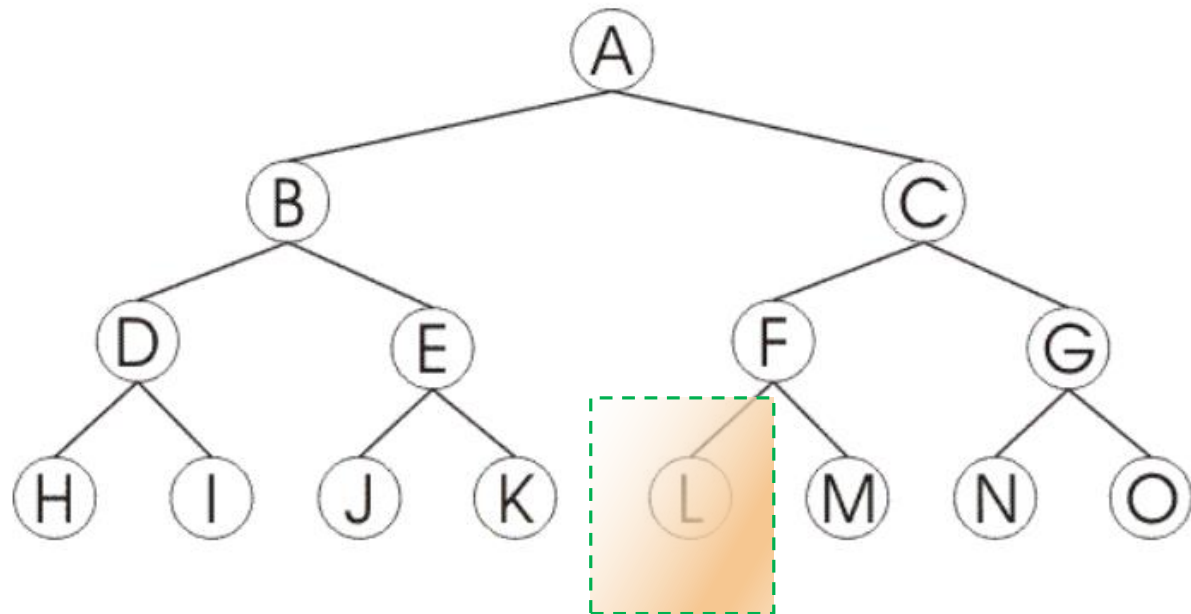


Exemplo do Pós-ordem

Percurso resultante:

H-I-D -J-K - E -B

Percorrer em pós ordem à esquerda

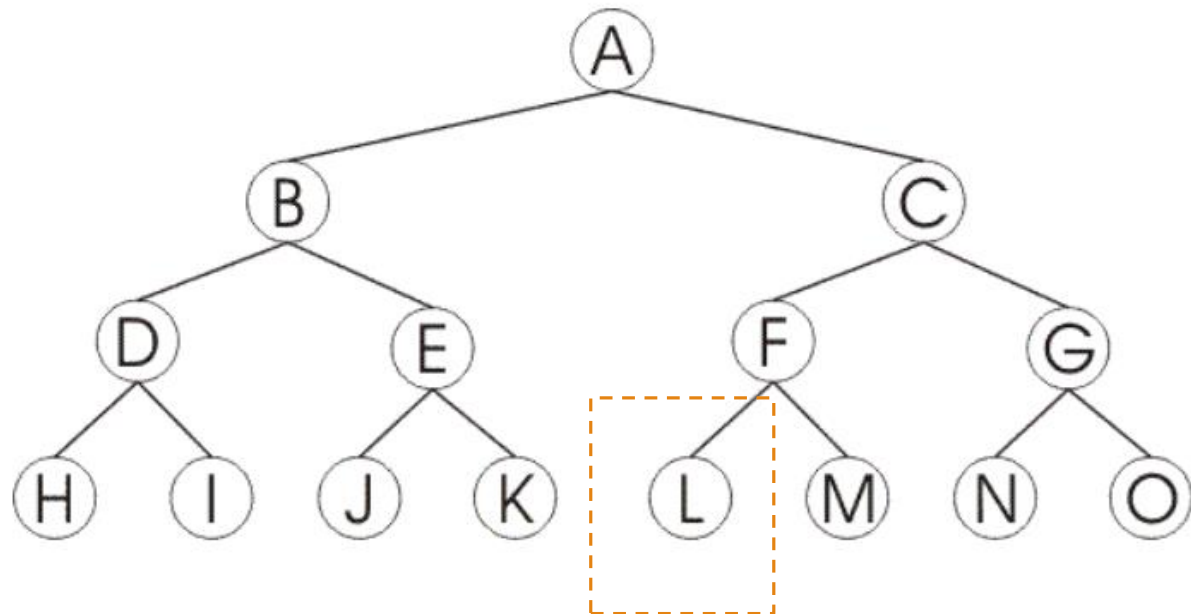


Exemplo do Pós-ordem

Percurso resultante:

H-I-D -J-K - E -B - L

Visitar raiz

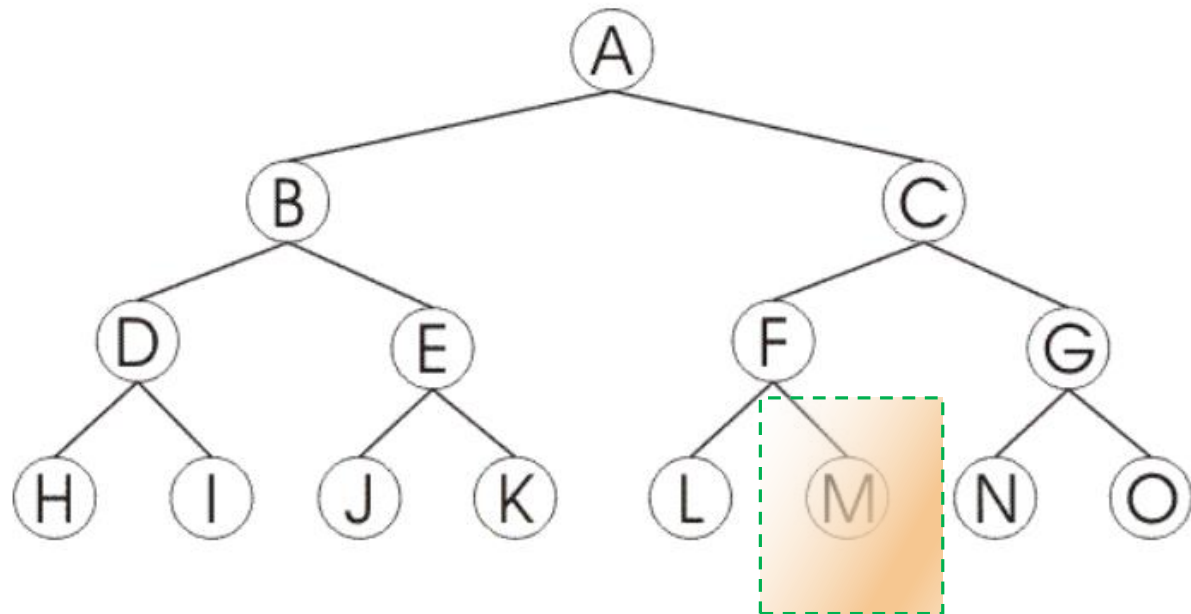


Exemplo do Pós-ordem

Percurso resultante:

H-I-D -J-K - E -B - L

Percorrer em pós ordem à direita

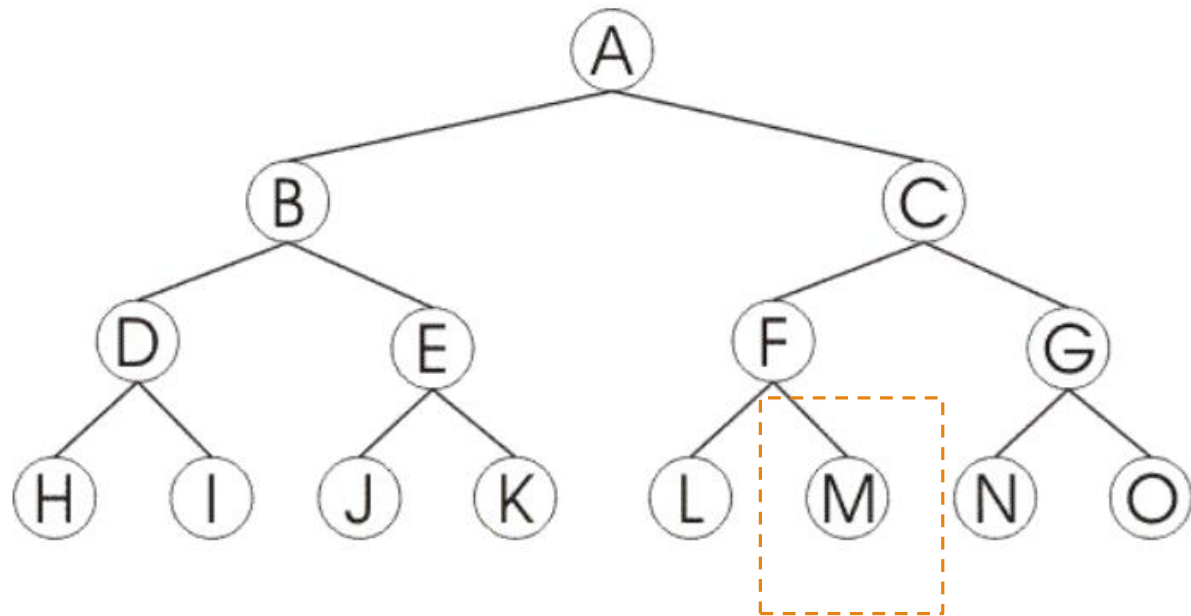


Exemplo do Pós-ordem

Percurso resultante:

H-I-D -J-K - E -B - L-M

Visitar raiz

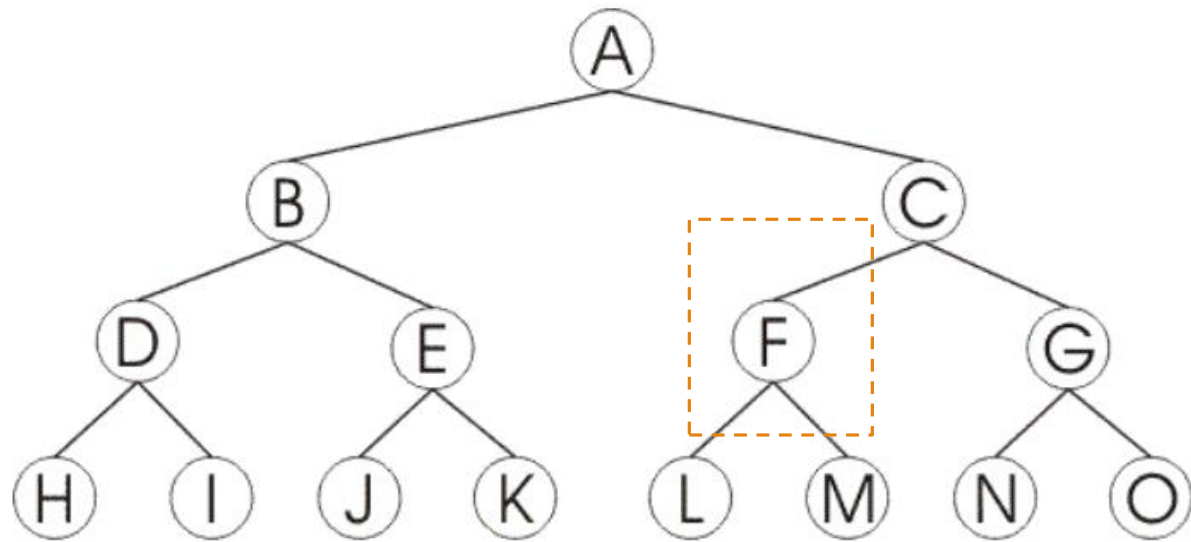


Exemplo do Pós-ordem

Percurso resultante:

H-I-D - J-K - E - B - L-M - F

Visitar raiz

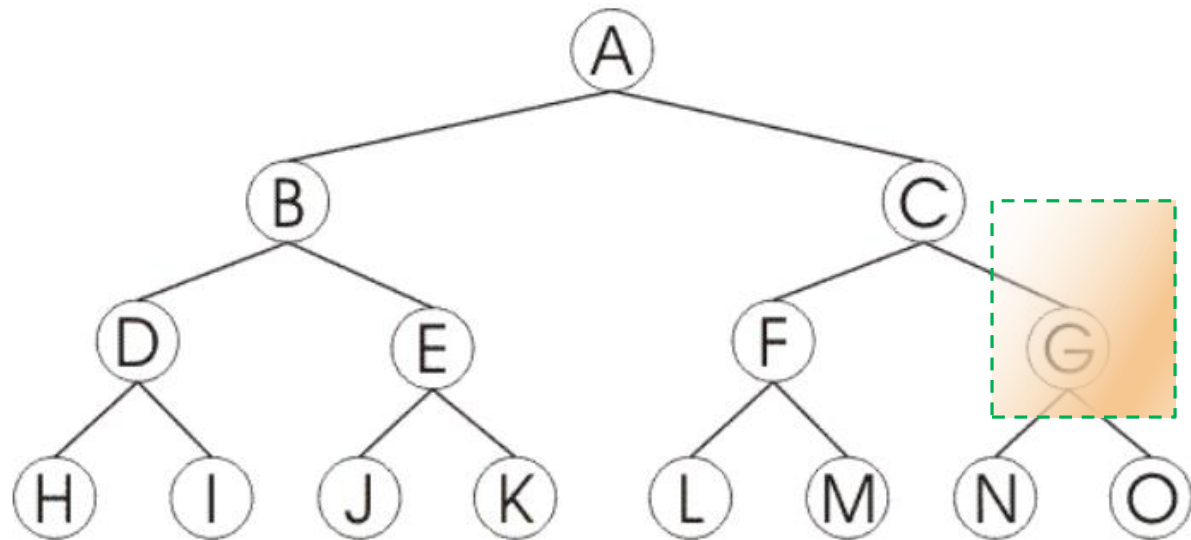


Exemplo do Pós-ordem

Percurso resultante:

H-I-D -J-K - E -B - L-M - F

Percorrer em pós ordem à direita

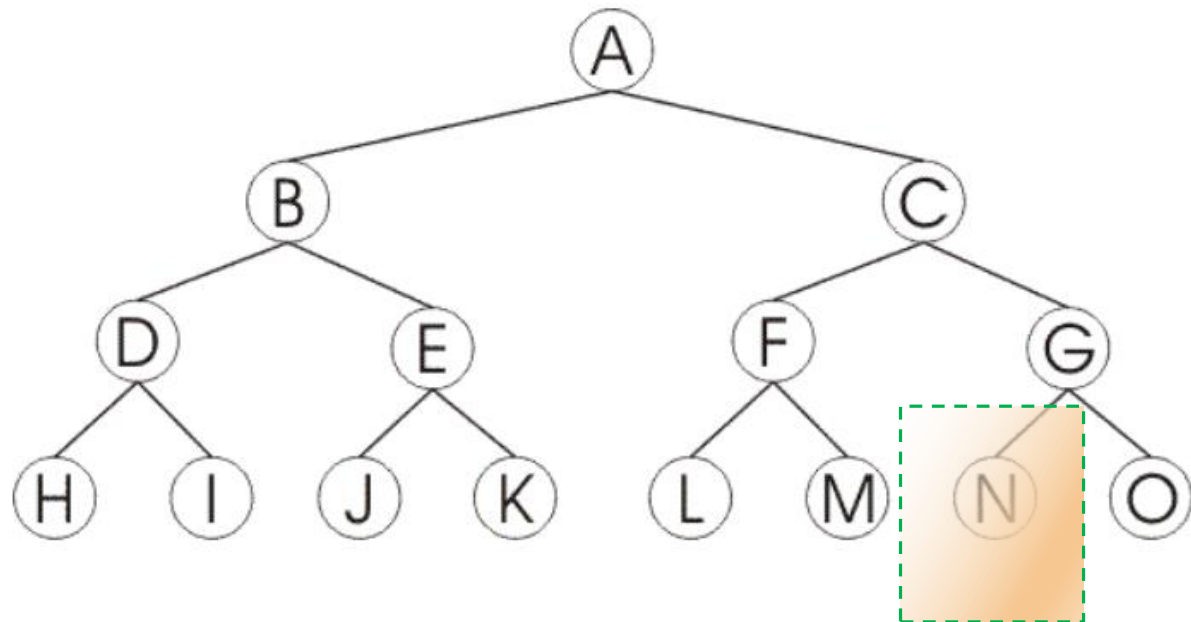


Exemplo do Pós-ordem

Percurso resultante:

H-I-D -J-K - E -B - L-M - F

Percorrer em pós ordem à esquerda

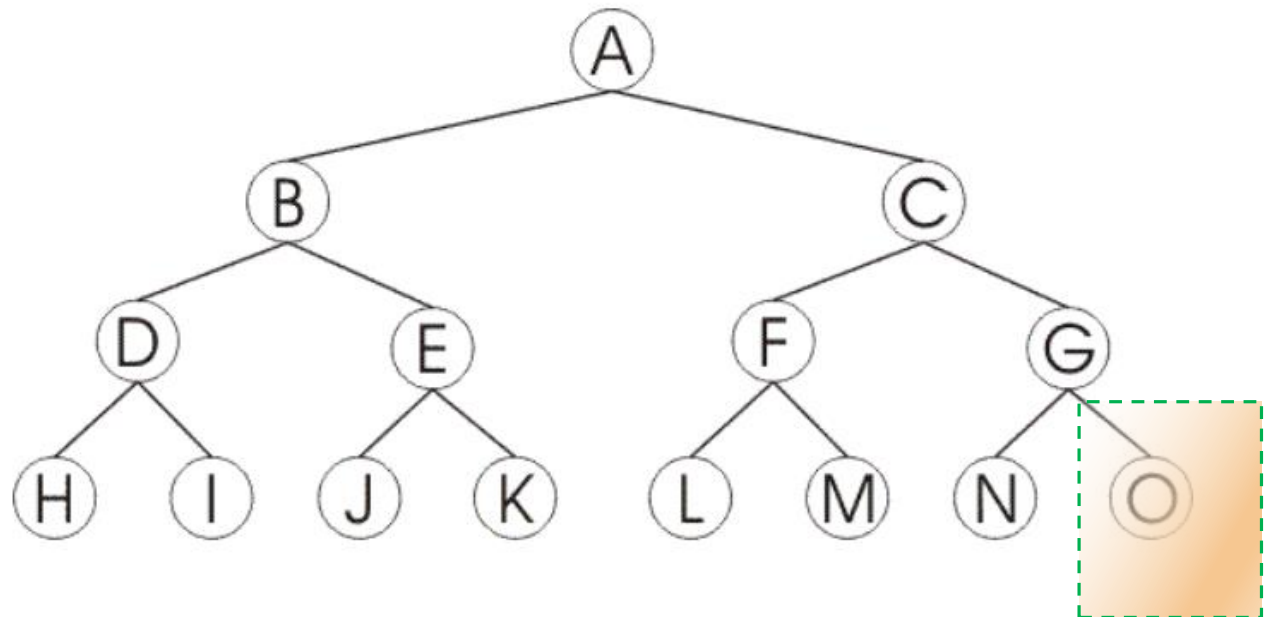


Exemplo do Pós-ordem

Percurso resultante:

H-I-D -J-K - E -B - L-M - F -N

Percorrer em pós ordem à direita

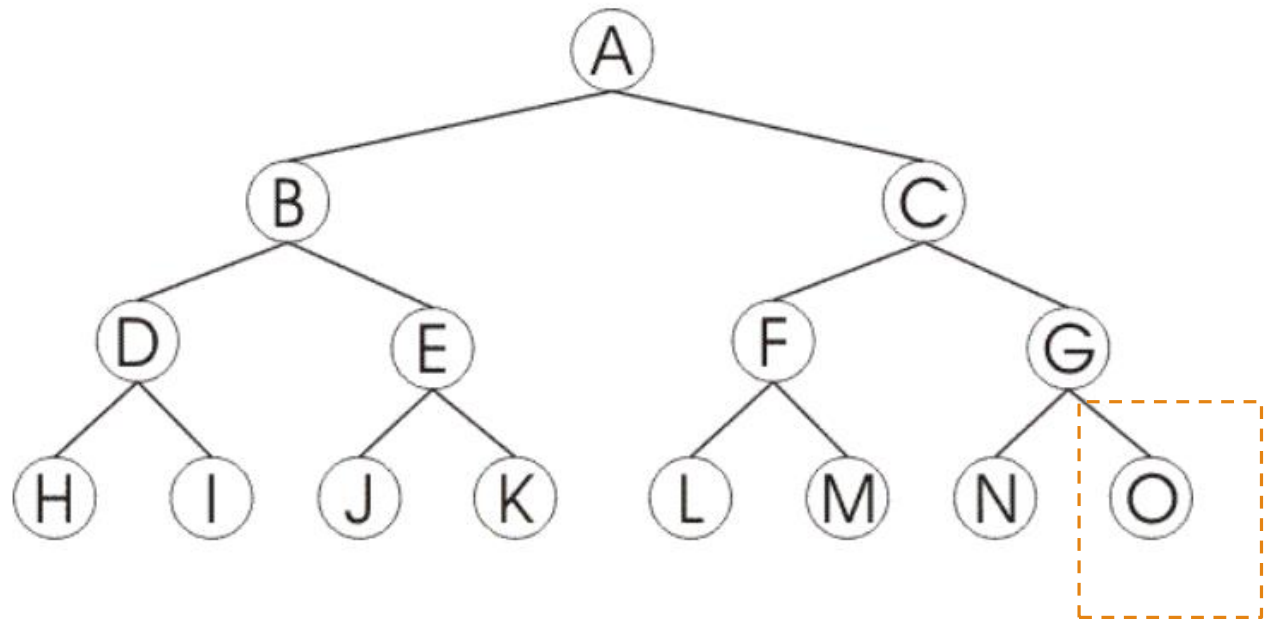


Exemplo do Pós-ordem

Percurso resultante:

H-I-D -J-K - E -B - L-M - F -N -O

Visitar raiz

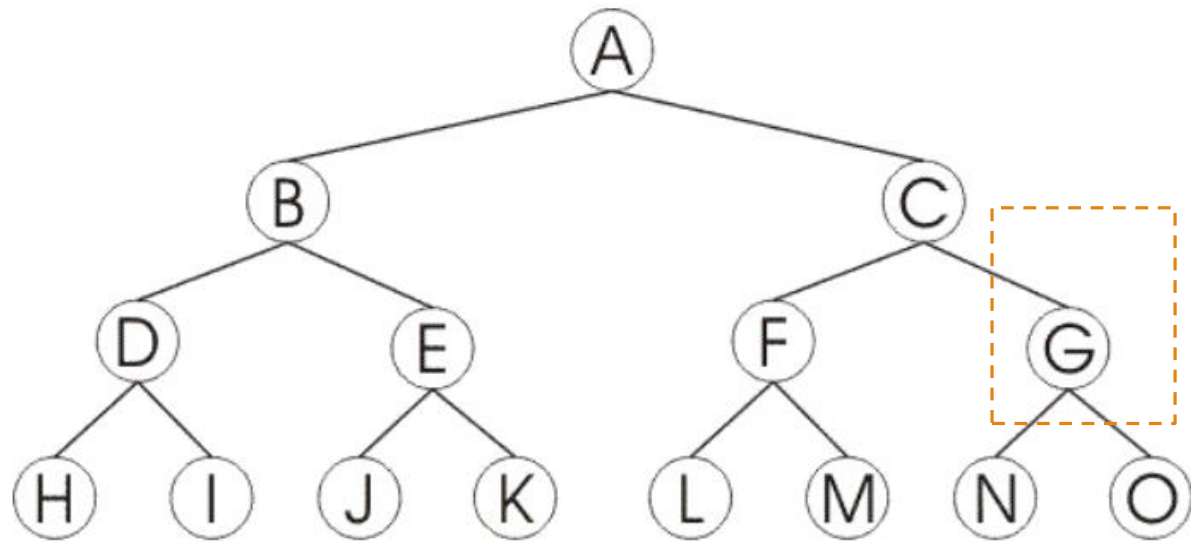


Exemplo do Pós-ordem

Percurso resultante:

H-I-D -J-K - E -B - L-M - F -N -O- G

Visitar raiz

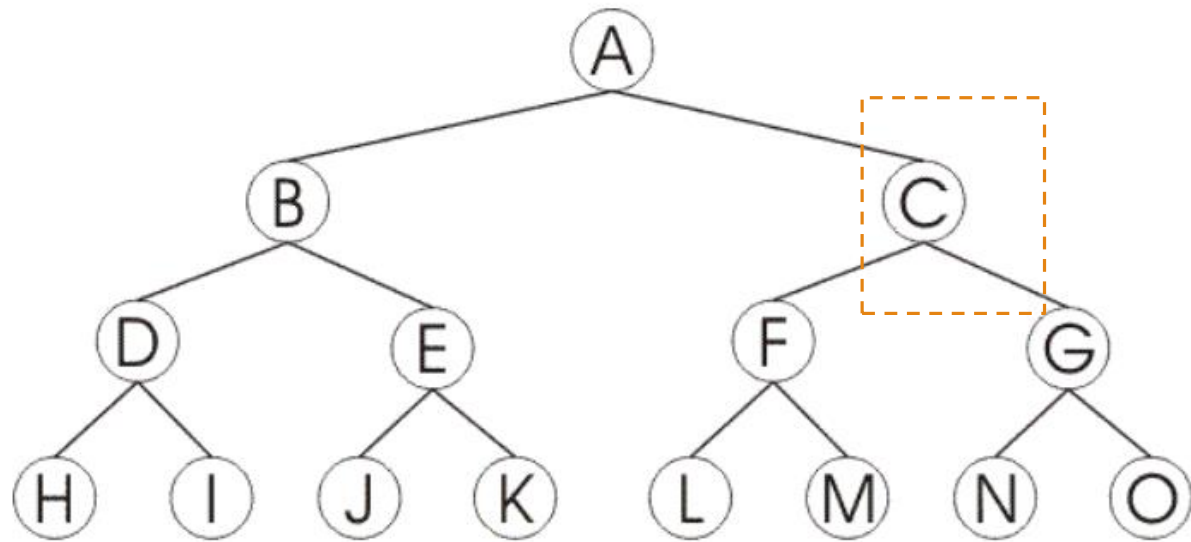


Exemplo do Pós-ordem

Percurso resultante:

Visitar raiz

H-I-D -J-K - E -B - L-M - F -N -O- G - C

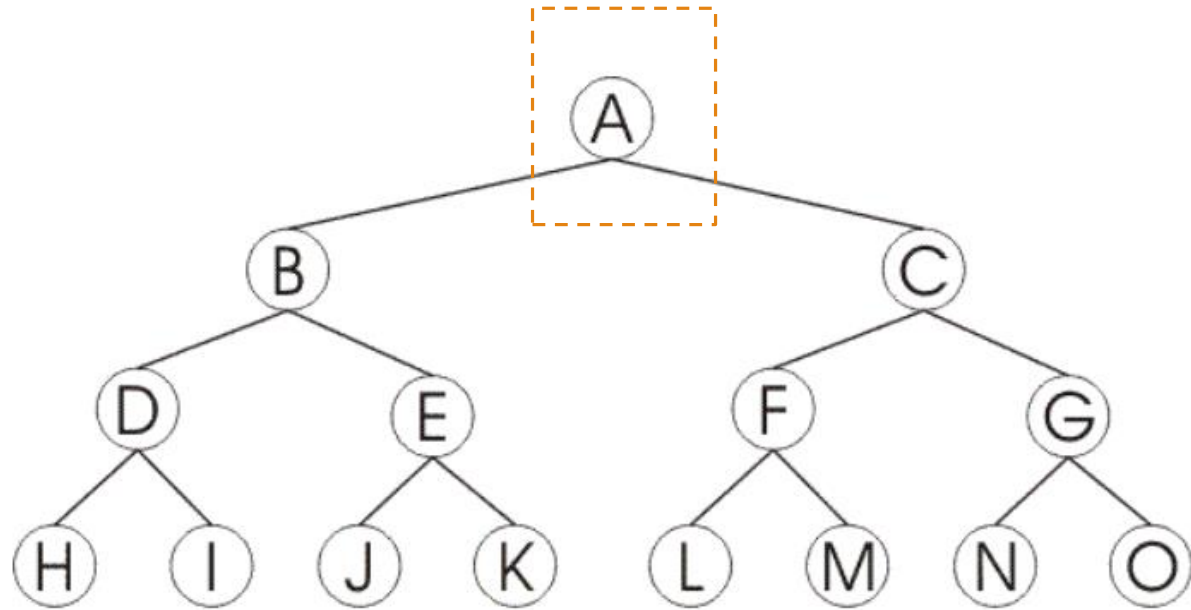


Exemplo do Pós-ordem

Percurso resultante:

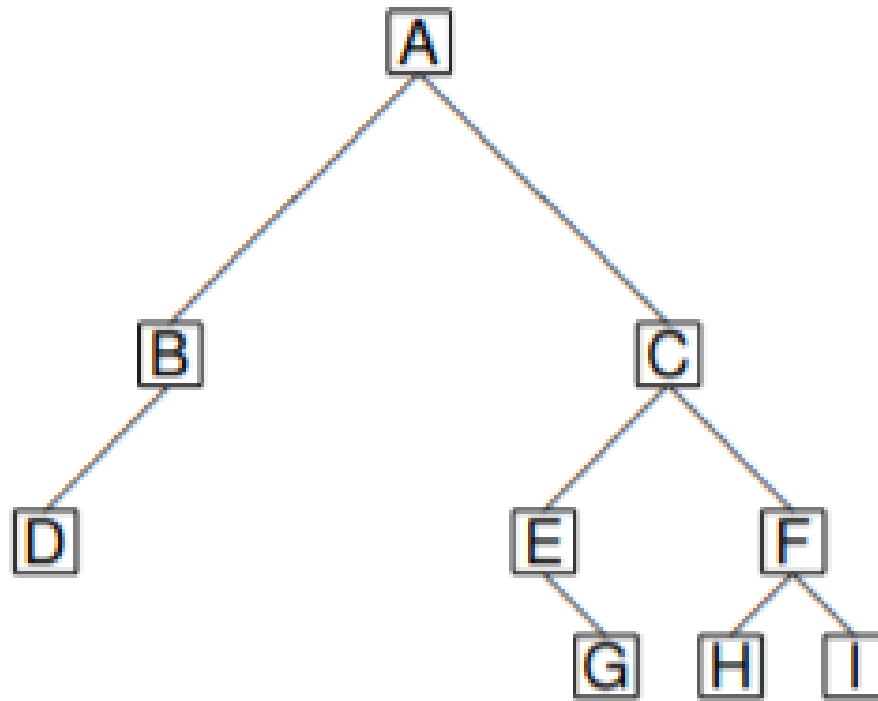
Visitar raiz

H-I-D -J-K - E -B - L-M - F -N -O- G - C - A



Exercício 4

Determine o percurso em pós-ordem da seguinte árvore binária



Percurso In-Ordem

Determina os seguintes passos:

- 1 - Percorrer a sub-árvore esquerda em in-ordem
- 2- Visitar a raiz
- 3- Percorrer a sub-árvore direita em in-ordem

Exemplo de Percurso In-Ordem

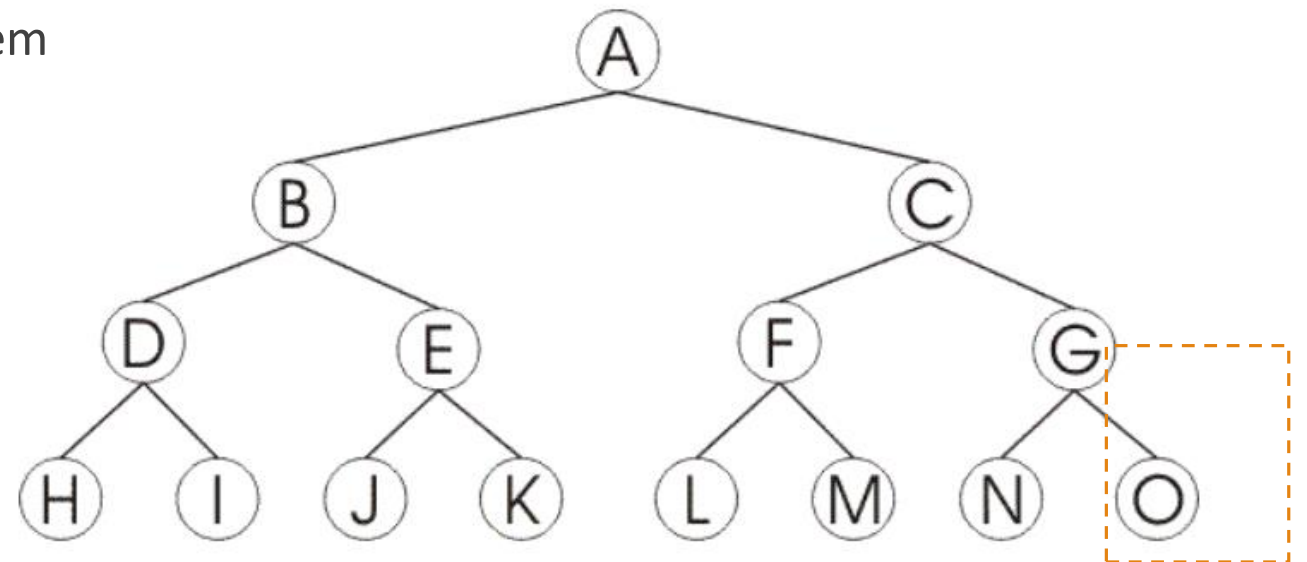
Determina os seguintes passos:

1 - Percorrer a sub-árvore esquerda em in-ordem ←

2- Visitar a raiz

3- Percorrer a sub-árvore direita em in-ordem

H D I B J E K A L F M C N G O



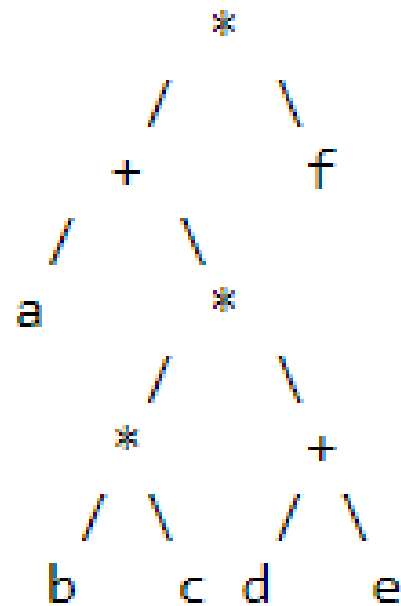
Percurso In-Ordem

Determina os seguintes passos:

- 1 - Percorrer a sub-árvore esquerda em in-ordem
- 2- Visitar a raiz
- 3- Percorrer a sub-árvore direita em in-ordem

Exercícios

1- Mostre como fica o percurso em pré e in-ordem:



Exercícios

2- Declare em C uma estrutura capaz de representar um nó de uma árvore binária que seja capaz de armazenar um valor inteiro.

3- Defina como se declara a raiz dessa árvore

Exercícios

4-Faça uma função que dada a raiz da árvore binária que você definiu faça o percurso em pré-ordem.