Lista 1 - Programação Linear Inteira – 2022.2

Dpto. Engenharia Elétrica, PUC-Rio.
Professor: Alexandre Street (street@ele.puc-rio.br)

PROBLEMA – 1 Considere o seguinte problema:

$$
\begin{aligned}
z^* = \max_{(\boldsymbol{x})} \quad & 6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 && (1)\\
s.a.: \quad & 6 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 \leq 10 && (1.1)\\
& x_i \in \{0,1\} \ \forall\, i = 1,2,3 && (1.2)
\end{aligned}
$$

a) Qual o nome deste problema?
b) Enumere todas as soluções viáveis e os respectivos valores da função objetivo. Indique a solução ótima e o valor de z^*.
c) Formule e resolva a relaxação linear deste problema. Mostre como podemos resolver o problema da relaxação de maneira simples, sem utilizar um método de otimização. Ou seja, crie uma regra para construir a solução ótima a partir dos dados do problema.
d) Compare o valor da função objetivo do problema relaxado (limite superior) com o valor do problema original z^*, mostrando, assim, o gap de integralidade.
e) Esboce a função dual lagrangeana do problema (1) ao selecionarmos a restrição (1.1) para ser relaxada e dualizada. Marque todos os pontos relevantes do gráfico com valores precisos. DICA: Note que a função dual lagrangeana é um problema de otimização (no vetor $\boldsymbol{x}$ de binários) que pode ser resolvido por componente x_i de maneira independente. Os problemas individuais são extremamente simples e seus ótimos podem ser obtidos analiticamente em função do multiplicador lagrangeano.
f) Qual propriedade importante, que ajuda na busca de um ponto ótimo global, que esta função apresenta? Essa propriedade é verdadeira para qualquer função dual lagrangeana? Prove!
g) Encontre o mínimo do problema dual lagrangeano e defina com isso o melhor limite superior para z^*. Compare o gap de integralidade obtido aqui e com o obtido no exercício 1.d.
h) Implemente em Julia e execute o algoritmo de subgradiente para encontrar o ponto ótimo do item f. O algoritmo de subgradiente pode ser encontrado na página 174 do nosso livro texto - Wolsey (capítulo 10). Mostre os passos em pseudocódigo e faça um gráfico com o valor da função objetivo e da folga da restrição da mochila para cada iteração. Mostre também a solução da relaxação $\boldsymbol{x}^*(\lambda^*)$.
i) Implemente o algoritmo de plano de cortes para resolver o mesmo problema dual lagrangeano da questão anterior.

PROBLEMA – 2 Considere uma rede de transmissão de energia elétrica existente, dada por um conjunto de linhas L^{Ex}, com capacidade de transmissão $\{F_l\}_{l \in L^{Ex}}$ (em MW), e um conjunto de barras B. A topologia atual da rede é definida pelos conjuntos $\delta^o(i)$, conjunto de linhas que se originam na barra i, e $\delta^d(i)$, conjunto de linhas que se destinam a barra i. Suponha um conjunto L^C de novas linhas, candidatas de participarem na expansão do sistema, e os respectivos conjuntos $\Delta^o(i)$ e $\Delta^d(i)$ que definem as linhas candidatas com origem e destino, respectivamente, na barra i. O custo de investimento I_l, em MMR$-anualizados, e capacidade

F_l das linhas candidatas são definidos pelo planejador com base em estudos detalhados de engenharia para cada linha $l \in L^C$. Considerando um modelo de transporte para o fluxo de potência (ou seja, somente conservação de fluxo nas barras e capacidades nas linhas), uma demanda de referência futura d_i (em MWmédio) e uma potência máxima de geração P_i (em MW), com custo associado c_i (em R$/MWh), para cada barra i do sistema, mostre como modelar:

a) O problema que minimiza o custo de operação e expansão (seleção) das linhas para o atendimento, a mínimo custo, da carga de referência dentro de um horizonte temporal de um ano. Assuma uma operação de referência constante para as 8760 horas do ano.
b) Considerando que cada linha de transmissão tem uma reatância igual a x_l, mostre como incorporar a segunda lei de Kirchhoff para gerar um modelo de fluxo de potência lineariazado (modelo DC) do sistema de transmissão. Para isso, lembre-se que neste modelo o fluxo que passa em uma dada linha é proporcional à diferença de ângulos de fase das barras conectadas por ela. A constante de proporcionalidade é justamente $1/x_l$. Modele o fato de que os ângulos das barras não conectadas não devem ser amarrados por esta lei. Assim, linhas candidatas que não forem construídas não podem impor essa relação entre os ângulos.
c) Como considerar investimentos conjuntos, ou seja, quando se decide investir em alguma das linhas de um subconjunto $L_k^{C.Conj}$ de linhas candidatas, para $k \in K^{Conj}$, todas as linhas desse subconjunto k devem ser selecionadas pelo plano de expansão.
d) Como considerar investimentos mutuamente exclusivos, ou seja, quando se decide investir em alguma das linhas de um subconjunto $L_k^{C.ME}$ de linhas candidatas, para $k \in K^{ME}$, todas as outras linhas desse subconjunto k não podem ser selecionadas pelo plano de expansão.
e) Como considerar que só podemos investir em linhas de um dos subconjuntos? Utilize os dados do item c.

Problema – 3 Um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ descrito por um conjunto finito de restrições lineares $P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$ é chamado de poliedro. De posse desta definição, demonstre as seguintes proposições:

a) Mostre que a envoltória convexa de um conjunto $X \subset \mathbb{Z}^n$ $\left(\text{conv}(X)\right)$ é um poliedro.
b) Mostre que todos os pontos extremos de $\text{conv}(X)$ pertencem a X.

Problema 4 – Suponha que estejamos interessados a alocação ótima de um conjunto $\{1, \dots, 7\}$ investimentos. Contudo, por restrições operacionais da empresa, possuímos as seguintes restrições:

a) Não é permitido selecionar mais do que K investimentos;
b) Pelo menos um dos investimentos deve ser escolhido;
c) Investimento #1 não pode ser escolhido se o investimento #3 for escolhido;
d) Investimento #4 pode ser escolhido somente se o investimento #2 for escolhido;
e) No mínimo um dos investimentos #1 e #5 deve ser escolhido;

f) Devemos escolher pelo menos um dos grupos de investimentos: $\{\#1, \#2, \#3\}$ ou $\{\#2, \#4, \#5, \#6\}$;

Modele as restrições operacionais da empresa através de expressões lineares envolvendo variáveis binárias.

Problema 5 – Apresente um conjunto de restrições lineares inteiras mistas que reproduzam:

a) $\mathrm{u} = \min\{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2\}$, assumindo que $0 \leq \mathrm{x}_\mathrm{j} \leq \mathrm{C}_\mathrm{j}, \mathrm{j} = 1{,}2$.
b) $v = |x_1 - x_2|$ com $0 \leq x_j \leq C, j = 1{,}2$.
c) O conjunto $X\backslash\{x^*\}$, onde $X = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \mid \boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}\}$ e $x^* \in X$.

Problema 6 – Suponha o seguinte problema: Um produtor de grande escala de Armários (produto "A") e Berços (produto "B") tem que decidir qual deve ser sua produção ótima, utilizando os insumos Madeira (insumo "M") e Ferro (insumo "F") tem em estoque. Sabe-se que a receita líquida com a venda de Armários e Berços é respectivamente igual a 4 MM$/unid. e 3 MM$/unid. vendidas. Sabe-se também que a quantidade atual de madeira e Ferro em estoque é de 4 unid. Com o maquinário atual, a relação insumo/produto é a seguinte: 1 unid. de Armário, necessita de 2 unid. de Madeira e 1 unidade de Ferro; 1 unid. de berço necessita de 1 unid. de Madeira e 2 unid. de Ferro. Contudo, existe a possibilidade de investir no maquinário para se chegar à seguinte relação insumo/produto: 1 unid. de Armário, necessita de 1 unid. de Madeira e 0.4 unidade de Ferro; 1 unid. de berço necessita de 0.1 unid. de Madeira e 1 unid. de Ferro. O custo do investimento é C^{inv}. Pede-se

a) Formule o problema de expansão da produção ótima de Armários e Berços;
b) Encontre o valor do custo de investimento tal que seja indiferente para o produtor investir ou não.

Problema 7 – Podemos estender a formulação do Problema 6 para considerarmos um número arbitrário de possibilidades de investimento. Assim, e de maneira geral, suponha que existam K poliedros: $P_k = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_k\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_k\}, k = 1, \dots, K$. Formule o problema que busca maximizar $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ sob a restrição de que a decisão ótima deve pertencer a um dos K poliedros.

Problema 8 – Mostre que

$$
\begin{aligned}
X &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{B}^4 \mid 97x_1 + 32x_2 + 25x_3 + 20x_4 \leq 139\} \\
&= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{B}^4 \mid 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 3\} \\
&= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{B}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 \leq 2, x_1 + x_2 + x_4 \leq 2, x_1 + x_3 + x_4 \leq 2\}
\end{aligned}
$$

Problema 9 – Formule o problema binário que encontra o caminho mais curto entre dois vértices específicos de um grafo $G(V, A)$. Suponha que cada aresta $a \in A$ tenha um comprimento (custo) c_a. Mostre que este problema possui matriz totalmente unimodular e diga qual a consequência em termos de metodologia de solução.

Problema 10 – Formule o problema de posicionar N peças rainha em um tabuleiro de xadrez N por N de tal maneira que duas rainhas não compartilham a mesma linha, coluna e diagonal.

Problema 11 – Um problema (PR) $z^R = \max\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in T \subset \mathbb{R}^n\}$ é uma relaxação de (PI) $z = \{c(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in X \subset \mathbb{R}^n\}$ se: (i) $X \subset T$; e (ii) $f(\boldsymbol{x}) \geq c(\boldsymbol{x}),\ \forall\, \boldsymbol{x} \in X$.

a) Mostre que se PR é uma relaxação de PI, então $z^R \geq z$.
b) Suponha P_1 e P_2 duas relaxações para o problema inteiro $\max\{c^T x \mid x \in X \subset \mathbb{Z}^n\}$ com $P_1 \subset P_2$. Se $z_i^{LP} = \max\{c^T x \mid x \in P_i\}, i = 1,2$, mostre que $z_1^{LP} \leq z_2^{LP}$ seja qual for o valor de c.
c) Mostre que se PR é inviável, então PI é inviável.
d) Mostre que se $\boldsymbol{x}^* \in T$ é a solução ótima para PR e $f(\boldsymbol{x}^*) = c(\boldsymbol{x}^*)$, então $\boldsymbol{x}^*$ é a solução ótima para PI.

Problema 12 – Seja $z = \max\{\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \in X \subset \mathbb{Z}^n\}$.
Seja $z(\boldsymbol{u}) = \max\{\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in X \subset \mathbb{Z}^n\}$.
Mostre que $z(\boldsymbol{u}) \geq z, \forall\, \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0}$.

Problema 13 – Seja (PI) $z = \max\{\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} | \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_+^n\}$.
Mostre que (D) $z_D = \min\{\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} | \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{c}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^m\} \geq z$.
Além disso, mostre que se D é ilimitado, então PI é inviável.

Problema 14 – Considere os seguintes problemas

$$max\left\{\boldsymbol{c^T x} \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = b_i, i = 1, \dots, m, \boldsymbol{x} \in \mathbb{B}^{\boldsymbol{n}}\right\} \ (P_1)$$

$$max\left\{\boldsymbol{c^T x} \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} u_i a_{i,j}\right) x_j = \sum_{i=1}^{m} u_i b_i\,, i = 1, \dots, m, \boldsymbol{x} \in \mathbb{B}^{\boldsymbol{n}}\right\} \ (P_2)$$

com $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$. Mostre que P_2 é uma relaxação de P_1.

Problema 15 – Considere o problema $\min\{log(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \in X \subset \mathbb{R}^T\}$. Formule com variáveis inteiras ou binárias um MILP que aproxima esse problema através de uma função linear por partes com K segmentos.

Problema 16 – Mostre como transformar o seguinte problema de programação não-linear inteiro misto em um problema linear inteiro misto. Explique cada uma dos dois processos de linearização que serão necessários. Evidencie eventuais aproximações.

$$\max_{\substack{x,y \in \mathbb{R}_+, \\ z \in \{0,1\}.}} \{c_1 x + c_2 y + c_3 z \mid xy \leq b, x - yz \leq 0\}.$$

Problema 17 – O jogo Sudoku é um quebra-cabeça baseado na colocação lógica de números. O objetivo do jogo é a colocação de números e 1 a 9 em cada uma das células vazias numa grade de 9x9, constituía por 3x3 sub-blocos, denominadas regiões. O quebra-cabeça contém algumas células iniciais já preenchidas. Cada coluna, linha e região só pode ter um número de cada um dos 1 a 9. Resolver o problema requer apenas raciocínio lógico e algum tempo. O nosso objetivo agora será: mostrar como podemos modelar este problema por programação linear binária. Defina, precisamente e de forma compacta, o modelo que deverá ser resolvido para solucionar o jogo. Escolha umas das instâncias em http://www.7sudoku.com/very-difficult, classificadas como muito difíceis, e tente resolver. Utilize o seu modelo para resolvê-la.

Problema 18 – Mostre que o problema da árvore geradora de mínimo peso é uma relaxação para o problema do caixeiro viajante.