Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

ENG1467/ELE2742 – Otimização
Lista 2 – 2022.1 – 04/04/2022

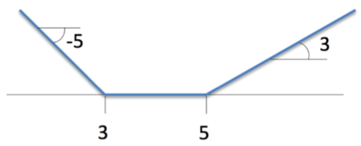
Docente: Alexandre Street
Monitor: Pedro Ferraz
Informações Importantes:

- A solução deve ser entregue antes do início da aula do dia **19/04/2021** via a plataforma EAD.
- A resolução da lista deve ser entregue em PDF com template Latex, Word ou manuscrito. Atenção para caso opte pela modalidade manuscrita, pois será exigida uma maior organização e a plena compreensão do texto/grafia legível.
- Os scripts em Julia também devem ser enviados em anexo.
- **Avaliação individual**.
- Se qualquer um dos pontos for ignorado a lista não será corrigida e a nota será zero.

Questão 1 - N1

Parte I

Considere o problema de minimizar a função, $f : R \to R$, que está especificada na figura abaixo. Formule este problema por programação linear.



Parte II

Considere o problema:

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} \quad & 2x_1 + 3|x_2 - 10| \\ s.a. \quad & |x_1 + 2| + |x_2| \leq 5 \end{aligned}$$

(a) Reformule-o como um problema de programação linear.

(b) Seria possível reformulá-lo por programação linear caso o problema fosse de **maximização**(max)? Justifique sua afirmação.

Questão 2 - N1

Suponha um sistema de transmissão de energia elétrica composto por $n = 3$ barras e $m = 3$ linhas de transmissão conectando os barramentos entre si. Este sistema pode ser associado a um grafo, $G(V, A)$, onde as barras estão associadas aos vértices contidos em $V = \{1, 2, 3\}$ e as linhas às arestas em $A = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$. Na barra 1 existe um gerador termelétrico com custo variável de produção $c_1 = 100$ R\$/MWh e capacidade máxima de $G_1 = 5$ MWh/h e na barra 2 uma outra termelétrica com custo variável $c_2 = 150$ R\$/MWh e capacidade máxima $G_2 = 20$ MWh/h. Na barra 3 existe uma demanda (consumo) de energia de $D_3 = 15$ MWh e um gerador com custo $c_3 = 200$ R\$/MWh e capacidade máxima $G_3 = 12$ MWh/h. O limite de transmissão, F_{ij}, de energia através de cada linha $(i, j) \in A$ é, respectivamente, $F_{12} = 20$ MWh/h, $F_{13} = 20$ MWh/h e $F_{23} = 5$ MWh/h. Considere que o fluxo em uma linha pode fluir nas duas direções.

(a) Formule o problema de despacho econômico para a hora seguinte sujeito às restrições de transporte de energia através das linhas de transmissão. Suponha um custo de déficit igual a 5000 R\$/MWh.

(b) Em um horizonte de uma hora, considere a possibilidade de três cenários de contingência (falhas): no primeiro cenário a linha $(1, 2)$ fica indisponível e todas as demais permanecem disponíveis; no segundo, todas exceto a $(1, 3)$ estão disponíveis; no terceiro cenário, todas exceto a $(2, 3)$ estão disponíveis. Mostre o conjunto de restrições e variáveis adicionais que devemos considerar no problema anterior, despacho econômico com restrições de transporte, de forma que a decisão de geração que for encontrada para o cenário base (ou cenário 0), onde todas as linhas estão disponíveis, seja robusta (se mantenha viável) à ocorrência de qualquer um dos três cenários de contingência. Em outras palavras, mostre como considerar um critério de confiabilidade $n - 1$, em que a sua decisão de despacho da geração precisa se manter ótima e implementável mesmo que um elemento do sistema de transporte falhe. Dica: Para fazer isso, você precisará garantir que existe um novo fluxo nas linhas remanescentes para cada um dos três cenários assumindo que a injeção de energia dos geradores seja igual em todos os cenários.

(c) Modele e resolva os problemas dos itens **a** e **b** em Julia usando o pacote JuMP. Apresente as duas soluções de despacho e os seus custos totais de operação para os itens a e b acima e comente as diferenças.

Questão 3 - N3

Suponha um sistema puramente termelétrico composto de n geradores e uma previsão de carga, d_t (MWh), para cada hora t do dia seguinte. Os geradores apresentam custos variáveis unitários $\{c_i\}_{i=1}^{n}$ (R\$/MWh) e capacidades $\{G_i\}_{i=1}^{n}$ (MWh/h). Considere ainda que os geradores possuem uma capacidade limitada de rampa, ou seja, de aumentar ou diminuir seus níveis de produção entre dois períodos consecutivos, t e $t + 1$. Os limites máximos de rampa de subida e descida de geração entre duas horas consecutivas são, respectivamente, $\{R_i^{up}, R_i^{down}\}_{i=1}^{n}$.

(a) Formule o problema de despacho que visa determinar um ponto de operação viável, vetor de produção dos geradores para cada uma das 24 horas do dia seguinte, g_{it}, que atenda às suas restrições técnicas de rampa dos geradores e minimize o custo total de operação do dia seguinte.

(b) Mostre como considerar o custo de déficit de atendimento à demanda em horas do dia em que a demanda supere a capacidade total do sistema. Assuma para isso que o custo unitário para cortar $0.05d$ seja C_1^{def} (R\$/MW) e para cortes de carga acima desse valor o custo seja C_2^{def} (R\$/MW), onde $C_2^{def} > C_1^{def}$.

(c) Mostre como considerar neste problema uma bateria de grande porte que permite armazenar e injetar energia no sistema a cada hora. Suponha que a bateria tenha capacidade finita de armazenamento, G^{bat} (MWh), e custo zero de operação. Observe que devemos considerar o balanço de energia na bateria ao longo das horas do dia, pois a quantidade de energia armazenada em um período pode ser utilizada posteriormente.

(d) Supondo que o custo de instalação desta bateria seja igual a X R\$. Assuma por simplicidade um perfil de demanda típica diária, $\{d_t\}_{t=1}^{24}$, que se repete ao longo de todos os N dias de vida útil desta bateria. Dessa forma, a operação ótima de um dia típico permite calcular o benefício diário do uso da bateria ao longo de sua vida útil. Como poderíamos calcular a viabilidade econômica desta bateria através do problema formulado no item c?

(e) Encontre o menor valor de N, resolvendo os problemas necessários (de acordo com a resposta do item d) através do pacote JuMP, que torne a bateria economicamente viável. Desconsidere, por simplicidade, o custo de oportunidade do capital no tempo (juros = 0). Considere $n = 10$, $c_i = 2i$, $G_i = 22 - 2i$, $R_i^{up} = R_i^{down} = i$, $d_t = 60(1 + sin(t/12))$, $C_2^{def} = 100$, $C_1^{def} = 50$, $G^{bat} = 8$ e $X = 1000$.

Questão 4 - N3

Você deseja investir 10.000,00 R\$ e tem a possibilidade de comprar dois ativos financeiros. Um dos ativos é livre de risco e possui retorno determinístico igual a r^{LR} % no período de investimento. O outro ativo possui risco. Você estudou muita estatística e processos estocásticos e produziu, para o ativo com risco, uma simulação com N cenários de retornos e suas respectivas probabilidades: $\{r_c^{CR}, p_c\}_{c=1}^{N}$.

Para considerar o efeito do imposto de renda (IR) na decisão de quanto investir em cada ativo, você deseja maximizar o valor esperado (média) do lucro da sua carteira após o pagamento do IR. O IR é formado por K faixas de lucro, delimitadas por valores positivos definidos por $\{L_k\}_{k=1}^{K}$, com descontos progressivos e crescentes dados por $\{IR_k\}_{k=1}^{K}$ em %. Assim, se o lucro antes do IR, L_c^A R\$, de um cenário c estiver entre 0 e L_1, o lucro depois do imposto é $L_c^D = L_c^A(100 - IR_1)/100$ para esse cenário. Se o lucro realizado cair na segunda faixa, entre L_1 e L_2, o lucro depois sofre o desconto de IR_1% até o valor L_1 (antes do IR) e o restante é descontado de IR_2%. Se o lucro em um dado cenário for negativo, não há desconto para esse cenário e, portanto, o lucro depois do IR fica igual ao lucro antes do IR.

(a) Desenhe a função de transferência linear por partes que determina o lucro depois, L_c^D, do IR em função do lucro antes do IR, L_c^A.

(b) Formule o problema de decisão sob incerteza descrito acima como um problema de programação linear.

(c) Mostre como alterar a função objetivo do modelo apresentado no item **a** para considerar uma combinação convexa entre a média do lucro depois do IR, função objetivo do item anterior, e o lucro depois do IR no pior dos N cenários (análise de pior caso endógeno). Seu modelo deve continuar sendo um problema de programação linear. Repare que o pior cenário de lucro depende da decisão de investimento. Portanto, você precisará criar uma funções mínimo lucro (entre os cenários) e mostrar como considerá-la no seu problema de otimização de programação linear.

(d) Mostre que os problemas do item **b** e **c** são problemas de otimização convexos.

(e) **SOMENTE PARA A PÓS:** Suponha que se tenha um histórico de retornos realizados do ativo arriscado dentro de uma janela de tempo: $\{r_t^{CR}\}_{t=1}^{T}$. Supondo que estamos em $t = T$, mostre como introduzir no modelo formulado em **b** restrições que limitem a perda máxima da carteira a um valor de P R\$ caso um dos retornos observados no passado ocorra novamente em $T+1$. Neste exemplo, assumimos que, por melhor que sejam os cenários criados pelos modelos estatísticos, os retornos passados podem conter alguma estrutura não capturada por eles. Assim, é uma prática comum o emprego de um teste de estresse, onde a decisão que está sendo criada pelo analista, através do seu modelo, seja validada por retornos reais já observados antes. Para isso, é exigido da solução que ela não produza uma perda superior à permitida por um comitê de risco ($P = 1.000,00$ R\$ neste caso) para todos os retornos observados em um histórico recente. Se essas restrições forem introduzidas na otimização, o seu modelo encontrará a melhor solução, segundo o seu critério, que passe no teste de estresse do comitê de risco.

(f) **SOMENTE PARA A PÓS:** modele e resolva o problema do item **b**, considerando a restrição de teste de estresse definida em **e**, em Julia usando o pacote JuMP. Considere $r^{LR} = 0.05$, $N = 4$ e o pares $\{r_c^{CR}, p_c\}$ iguais a $(0.4, 0.1), (-0.1, 0.2), (+0.2, 0.3), (-0.05, 0.4)$, $K = 2$, $IR_1 = 15\%$, $IR_2 = 27\%$, $L_1 = 3500$, $r_t^{CR} = 0.1sin(t/6)$.

Questão 5 - N4

José é um jornaleiro que toda manhã compra uma quantidade x de jornais na distribuidora a um custo c em R\$/unidade. Essa quantidade x é limitada superiormente por um valor, fixo e conhecido, X, pois José tem um poder de compra finito. Ele vende seus jornais a um preço $p > c$ em R$/unidade. A distribuidora possui um acordo com os jornaleiros: qualquer jornal não vendido será recomprado pela distribuidora a um preço $r < c$.

O dilema de José diz respeito a demanda diária por jornal, que é incerta. Se ele comprar um número muito grande de jornais corre o risco de não vendê-los e perder dinheiro com isso. Por outro lado, se comprar pouco jornal, José pode não atender a demanda e deixar de faturar dinheiro (perda de oportunidade de lucro). Vamos supor que a demanda de jornais para o dia seguinte é uma variável aleatória não-negativa, discreta e definida pelo conjunto de cenários e probabilidades $\{d_c, \pi_c\}_{c=1}^{N}$, ou seja, há N possíveis demandas e a demanda d_c ocorre com probabilidade π_c.

(a) Formule o problema em que José deve determinar a quantidade ótima de jornais encomendados, x, para o dia seguinte de maneira a maximizar a receita líquida esperada (média). Note que a quantidade x de jornais que José deve encomendar é uma decisão que deve ser tomada **sob incerteza**, ou seja, de manhã bem cedo, antes de observar a demanda do dia. Assim, a quantidade de jornais compradas por José é a mesma qualquer que seja o cenário de demanda observado ao longo do dia de trabalho. A receita líquida é igual a receita de venda ou devolução menos os custos de compra. O valor esperado de uma variável aleatória é dado pela soma dos cenários ponderada pelas probabilidades.

(b) Mostre as restrições adicionais que devem ser incluídas no modelo acima para que o valor esperado do prejuízo seja limitado a um valor P (R$) de capital que José dispõe em caixa. Note que o $prejuízo = \max\{-lucro, 0\}$.

(c) **SOMENTE PARA A PÓS:** Suponha que a demanda seja uma variável aleatória contínua com função de distribuição de probabilidade acumulada $F(d)$. Desenvolva a solução analítica para x^* em função dos parâmetros do problema: p, r, c, $F(\cdot)$.

Questão 6 - N2

Suponha um conjunto de pacientes com tumor, $T = M \cup B$, classificados como malignos (M) e benignos, (B). Cada paciente, $i \in T$, possui um vetor, $x_i \in R^N$, contendo informações numéricas de N propriedades extraídas de amostras de suas células tumorais.

(a) Formule o problema de otimização linear que classifique os pacientes de forma a minimizar o erro absoluto de classificação. Ver livro do Bertimas, capítulo 1.

(b) **SOMENTE PARA A PÓS:** Mostre como considerar incluir um termos de na função objetivo que vise regularizar o modelo através de uma penalidade da norma 1 dos parâmetros do modelo.

(c) **DESAFIO:** Implementar o modelo em Julia usando o pacote JuMP e testá-lo para a base de dados disponível em: ftp://ftp.cs.wisc.edu/math-prog/cpo-dataset/machine-learn/cancer/WDBC/ . Neste caso, uma sugestão seria: apresente os resultados utilizando os 400 primeiros pacientes como amostra para o "treinamento" e deixe o restante para realizar o teste fora da amostra. Calcule o número de falsos positivos (pacientes classificados com tumor maligno pelo seu modelo, mas que possuem tumor benigno) e falsos negativos. Anexe à lista o código implementado e os resultados obtidos.

Questão 7 - N4

Parte I

Defina:

(a) Função convexa.

(b) Conjunto convexo (para um conjunto pertencente ao R^N).

(c) Envoltória convexa de um conjunto.

(d) Epigrafo de uma função

(e) Ponto extremo de um conjunto

(f) Vértice de um conjunto

(g) Poliedro

(h) Um simplex, um simplex unitário e um simplex de probabilidade.

(i) Direção e raio Extremos de um conjunto

Parte II

Mostre que:

(a) (N3) O ótimo de um problema de programação linear, caso exista, está em um de seus pontos extremos. Para isso, utilize o fato de que qualquer ponto de um poliedro compacto pode ser descrito pela combinação convexa de seus pontos extremos, ou vértice (assumidos conhecidos para efeitos da demonstração).

(b) (N3) Mostre como estender a prova acima para o caso de um problema de otimização que maximiza uma função convexa dentro de um poliedro. Utilize para isso a definição de convexidade para uma função.

(c) (N3) O máximo entre funções afins é uma função convexa.

(d) (N2) Intercessão de conjuntos convexos é um conjunto convexo. Use a definição de convexidade.

(e) (N5) Que o epigrafo de uma função é um conjunto convexo se e somente se tal função for convexa. Faça utilizando diretamente a definição de epigrafo e convexidade de funções.

(f) (N3) Refaça o exercício **c)** utilizando os resultados provados em **d)** e **e)**.

(g) (N4) Mostre, para um problema irrestrito, que se o problema for convexo, um ótimo local é também um ótimo global. Você pode usar o fato de que a expansão de Taylor de primeira ordem em um dado ponto x está sempre por baixo da função para qualquer outro ponto y.

(h) (Desafio) Mostre que se X é uma variável aleatória discreta e f é uma função convexa, $f(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[f(X)]$.

Questão 8 - N2

Parte I

Considere o conjunto $C = \{x \in R^2 | x_1 + x_2 \leq 1, x \geq 0\}$

(a) Desenhe o conjunto.

(b) Mostre que C é um conjunto convexo.

(c) Quais são os pontos extremos de C.

(d) C é um politopo especial? Com alguma classificação conhecida? Ver livro do Boyd, capítulo 2.

(e) Descreva C através da combinação convexa de seus pontos extremos.

Parte II

Seja $f : R^n \to R$ uma função côncava e seja c uma constante.

(a) Prove que o conjunto $S = \{x \in R^n | f(x) \geq c\}$ é convexo.

(b) Faça um desenho representativo para S no R^2 para diferentes valores de c, ou seja, $n = 2$.

Questão 9 - N2

Mostre a solução $x^* \in R^n$ e z^* para os seguintes problemas de otimização linear. Diga quando esse problemas são inviáveis, ilimitados ou viáveis com solução ótima limitada.

(a) $z^* = \min_x \{c^T x | b \leq x \leq h\}$, com $h > b$. Primeiro faça o caso $n = 2$ e depois faça para n genérico.

(b) $z^* = \min_x \{c^T x | 0 \leq x \leq h, e^T x = d\}$ onde $e = [1, 1, \ldots, 1]$. Primeiro faça o caso $n = 2$ e depois faça para n genérico (Esse problema parece o despacho térmico).

Questão 10 - N3

Desenhe a função $f(x) = min\{ln(x), 2 - x, 4 - x^2\}$.
Qual o domínio em que f está bem definida? Isso é para quais valores de x, podemos dar sentido para $f(x)$?
f é convexa ou côncava? Justifique sua resposta com base nas provas já realizadas nesta lista.