Técnicas não lineares em Controle

Exercícios

Prof. Dr. Eugênio L. F. Feitosa

Sugestões de soluções por Thiago Tomás de Paula

24/06/2022 — Pontos de Equilíbrio e Linearização

Exercício 1.

a) Determine os pontos de equilíbrio do sistema abaixo.

b) Determine o sistema linearizado tangente de cada ponto de equilíbrio e analise sua instabilidade.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \theta^2 - 2\theta - 10\frac{d\theta}{dt}$$

Exercício 2.

a) Determine os pontos de equilíbrio do sistema abaixo.

b) Determine o sistema linearizado tangente de cada ponto de equilíbrio e analise sua instabilidade.

$$\begin{aligned}\frac{d\theta_1}{dt} &= \theta_1^2 - 2\theta_2\theta_1 - u\\ \frac{d\theta_2}{dt} &= \theta_1 - 3\theta_2 + 2\sin\theta_2 + u\theta_2\end{aligned}$$

Exercício 1 — solução.

a) Primeiro definimos as equações de estado. Pondo $x_1 = \theta$ e $x_2 = \dot{\theta}$, temos

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= x_1^2 - 2x_1 - 10x_2\end{aligned}$$

Seja $(\overline{x_1}, \overline{x_2})$ um ponto de equilíbrio. Por definição,

$$\begin{aligned}0 &= \overline{x_2}\\ 0 &= \overline{x_1}^2 - 2\overline{x_1} - 10\overline{x_2}\end{aligned} \qquad \iff \qquad \overline{x_1} = 0 \text{ ou } \overline{x_1} = 2, \quad \overline{x_2} = 0.$$

Logo, os pontos de equilíbrio são $P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = (2, 0)$.

b) Apenas a segunda equação de estado precisa ser linearizada (como é possível tomar $y = x_1 - \overline{x_1}$, a saída também não precisará ser linearizada). Temos

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) &\approx f_2(\overline{x_1}, \overline{x_2}) + \partial_{x_1} f_2\Big|_{\overline{x_1}, \overline{x_2}}(x_1 - \overline{x_1}) + \partial_{x_2} f_2\Big|_{\overline{x_1}, \overline{x_2}}(x_2 - \overline{x_2})\\ &= (2\overline{x_1} - 2)(x_1 - \overline{x_1}) - 10x_2,\end{aligned}$$

e daí, pela mudança de variável $x_1 - \overline{x_1} \to x_1$, o sistema linearizado é

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= (2\overline{x_1} - 2)(x_1 - \overline{x_1}) - 10x_2\end{aligned} \qquad \iff \qquad \begin{aligned}\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 2\overline{x_1} - 2 & -10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 - \overline{x_1}\\ x_2 - \overline{x_2}\end{pmatrix},\\ y &= \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Considerando os valores dos pontos de equilíbrio, temos

$$\begin{aligned}P_1 &\implies \dot{X} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -10\end{pmatrix}X,\\ P_2 &\implies \dot{X} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 - 2\\ x_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exercício 2 — solução.

a) Seja $(\overline{\theta_1}, \overline{\theta_2})$ um ponto de equilíbrio. Então,

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{\theta_1}^2 - 2\overline{\theta_2} \cdot \overline{\theta_1} - 0 \\ 0 &= \overline{\theta_1} - 3\overline{\theta_2} + 2\sin\overline{\theta_2} + 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} 0 &= \overline{\theta_1}(\overline{\theta_1} - 2\overline{\theta_2}) \\ 0 &= \overline{\theta_1} - 3\overline{\theta_2} + 2\sin\overline{\theta_2} \end{aligned} .$$

Pela primeira equação acima, ou $\overline{\theta_1} = 0$ ou $\overline{\theta_1} - 2\overline{\theta_2} = 0$. Assumindo o primeiro caso, é imediato pela segunda equação que $\sin\overline{\theta_2} = 1,5\overline{\theta_2}$. A série de Taylor do seno ao redor da origem nos diz que a única solução dessa equação é $\overline{\theta_2} = 0$. Por outro lado, assumindo $\overline{\theta_1} = 2\overline{\theta_2}$, encontramos que $\sin\overline{\theta_2} = 0,5\overline{\theta_2}$, que, novamente pela série de Taylor, possuirá 3 soluções. Por auxílio de uma calculadora gráfica, as raízes são $\overline{\theta_2} = 0$ (de novo), $\overline{\theta_2} \approx \pm 1,895$. Os pontos de equilíbrio ficam então

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 3,79 \\ 1,895 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} -3,79 \\ -1,895 \end{pmatrix}.$$

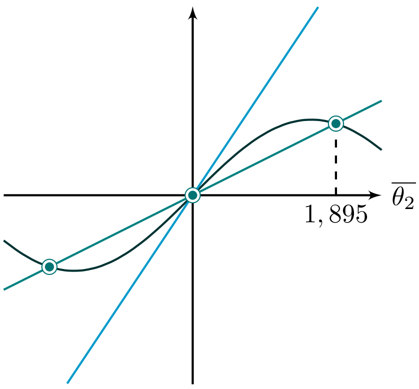


Figura 1 – Gráficos em escala das funções $\sin\overline{\theta_2}$, $0,5\overline{\theta_2}$, e $1,5\overline{\theta_2}$. Destaque para os pontos de interseção.

b) Ambas equações de estado precisam ser linearizadas. Temos

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 = f_1(\theta_1, \theta_2; u) &\approx f_1(\overline{\theta_1}, \overline{\theta_2}; u) + \partial_{\theta_1} f_1\Big|_{\overline{\theta_1},\overline{\theta_2}}(\theta_1 - \overline{\theta_1}) + \partial_{\theta_2} f_1\Big|_{\overline{\theta_1},\overline{\theta_2}}(\theta_2 - \overline{\theta_2}) + \partial_u f_1\Big|_{\overline{\theta_1},\overline{\theta_2}} u \\ &= (2\overline{\theta_1} - 2\overline{\theta_2})(\theta_1 - \overline{\theta_1}) - 2\overline{\theta_2}(\theta_2 - \overline{\theta_2}) - u, \\ \dot{\theta}_2 = f_2(\theta_1, \theta_2; u) &\approx f_2(\overline{\theta_1}, \overline{\theta_2}; u) + \partial_{\theta_1} f_2\Big|_{\overline{\theta_1},\overline{\theta_2}}(\theta_1 - \overline{\theta_1}) + \partial_{\theta_2} f_2\Big|_{\overline{\theta_1},\overline{\theta_2}}(\theta_2 - \overline{\theta_2}) + \partial_u f_2\Big|_{\overline{\theta_1},\overline{\theta_2}} u \\ &= (\theta_1 - \overline{\theta_1}) + (-3 - 2\cos\overline{\theta_2})(\theta_2 - \overline{\theta_2}) + \overline{\theta_2} u, \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\overline{\theta_1} - 2\overline{\theta_2} & -2\overline{\theta_2} \\ 1 & -3 + 2\cos\overline{\theta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 - \overline{\theta_1} \\ \theta_2 - \overline{\theta_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ \overline{\theta_2} \end{pmatrix}, u$$

de forma que

$$\begin{aligned} P_1 &\Longrightarrow \dot{\Theta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Theta + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} u, \\ P_2 &\Longrightarrow \dot{\Theta} = \begin{pmatrix} 3,79 & -7,58 \\ 1 & -1,001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 - 3,79 \\ \theta_2 - 1,895 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1,895 \end{pmatrix} u, \\ P_3 &\Longrightarrow \dot{\Theta} = \begin{pmatrix} -3,79 & 7,58 \\ 1 & -1,001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 + 3,79 \\ \theta_2 + 1,895 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1,895 \end{pmatrix} u. \end{aligned}$$

01/07/2022 — Retrato de fase e critério de Lyapunov

Exercício 1. Desenhe e classifique o retrato de fase do sistema descrito por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2\\ \dot{x}_2 &= -0,5x_1 - 3x_2\end{aligned}$$

Exercício 2. Desenhe e classifique o retrato de fase do sistema descrito por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 - 4x_2\\ \dot{x}_2 &= -4x_1 - 2x_2\end{aligned}$$

Exercício 3. Desenhe e classifique o retrato de fase do sistema descrito por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= (1 - x_1^2)x_2 - x_1\end{aligned}$$

chamado *equação de Van der Pol*.

Exercício 4.
Verifique que o sistema massa mola sem atrito é estável pela função de Lyapunov $H(x) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$ (energia do sistema).

Exercício 5.
Verifique que o sistema massa mola com atrito viscoso é assintoticamente estável pela função de Lyapunov $H(x) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$.

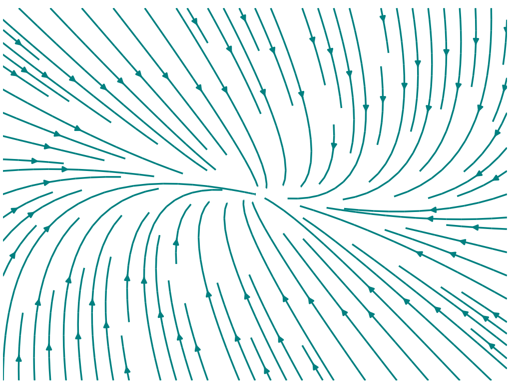
Exercício 1 — solução.
O sistema linear tem único ponto de equilíbrio em $(0, 0)$. Calculando os autovalores, temos

$$\begin{aligned}\det(\lambda\mathbb{I} - A) = 0 \implies \det\begin{pmatrix}\lambda+1 & -1\\ 0,5 & \lambda+3\end{pmatrix} = 0\\ \iff (\lambda+1)(\lambda+3) + \frac{1}{2} = 0 \implies \lambda = -2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Como os autovalores são reais negativos distintos, $(0, 0)$ será um nó estável do retrato de fase. Além disso, temos autovetores lento v_s e rápido v_f dados por

$$\begin{aligned}Av_s &= \left(-2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)v_s \iff v_s = \alpha\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{\sqrt{2}} - 1\end{pmatrix},\\ Av_f &= \left(-2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)v_f \iff v_f = \beta\begin{pmatrix}1\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Logo as trajetórias no retrato partem de retas paralelas a v_f em direção à origem pela reta formada por v_s. Confira o retrato na figura a seguir, gerada através do código abaixo.



Listing 1 – Código Python para ilustrar o retrato de fase

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# derivada no espaço de estados
def dF(x1, x2):
    return x2, 2*x1 - x2

# plano x1-x2
X1, X2 = np.meshgrid(np.linspace(-6, 6, 30), np.linspace(-6, 6, 30))

# vetores no plano
dx1, dx2 = dF(X1, X2)

# gráfico em si
plt.rcParams["figure.autolayout"] = True

teal = "#008080"
plt.streamplot(X1, X2, dx1, dx2, color=teal, linewidth=1.1, density=1.5)

#plt.grid("on")
plt.axis("off")
plt.show()
```

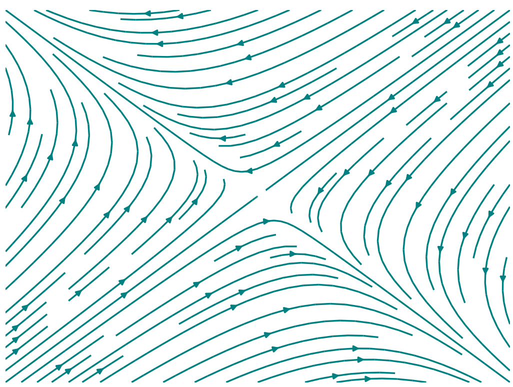
Exercício 2 — solução.
O ponto de equilíbrio é novamente o $(0, 0)$. Na verdade, este é o equilíbrio em todos os exercícios. Calculando os autovalores, temos

$$\det(\lambda\mathbb{I} - A) = 0 \implies \det\begin{pmatrix}\lambda+2 & 4\\ 4 & \lambda+2\end{pmatrix} = 0$$
$$\iff (\lambda+2)(\lambda+2) - 16 = 0 \implies \lambda = -2 \pm 4,$$

isto é, autovalores de sinais distintos. Isso mostra que a origem é ponto de sela do retrato, e a próxima tarefa é encontrar as direções (autovetores) de divergência (v_d) e convergência (v_c) por esse ponto. Daí,

$$Av_d = 2v_d \iff v_d = \alpha\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \quad Av_c = 2v_c \iff v_c = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

O retrato fica



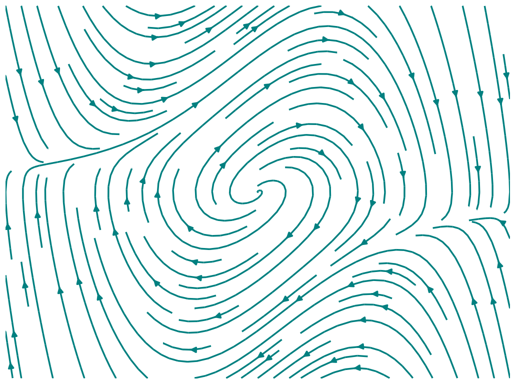
Exercício 3 — solução.
Ao contrário dos exercícios anteriores, estas EDs não são lineares, e o que buscaremos achar é apenas uma tentativa de aproximação local na origem. Linearizando nessa região,

$$\dot{X} \approx \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1-2\overline{x_1 x_2} & 1-\overline{x_1}^2\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix} X,$$

e segue daí que¨

$$\det(\lambda\mathbb{I} - A) = 0 \implies \det\begin{pmatrix}\lambda & -1\\ 1 & \lambda-1\end{pmatrix} = 0$$
$$\iff \lambda(\lambda-1)+1 = 0 \implies \lambda = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como os autovalores têm parte real positiva e parte imaginária não nula, trata-se de um foco instável. O interessante da equação de Van der Pol, entretanto, é que para x_1 suficientemente grade, o sistema deixa de divergir e "entra em loop"; em outras palavras, a instabilidade do foco pode levar o sistema a um comportamento oscilatório. Vide o retrato a seguir.



Exercício 4 — solução.
Em outras palavras, queremos verificar que $H(x) \geqslant 0$, $H(\overline{x}) = 0$ e $\dot{H}(x(t)) \leqslant 0$ para a EDO massa-mola
$$m\ddot{x} + kx = 0.$$

As primeiras duas igualdades são triviais; quanto à última, temos

$$\begin{aligned}\dot{H} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}\right)\\ &= \frac{m}{2}(2\dot{x}\ddot{x}) + \frac{k}{2}(2x\dot{x})\\ &= \dot{x}\underbrace{(m\ddot{x}+kx)}_{=0} \equiv 0.\end{aligned}$$

Logo o sistema é de fato estável e H é uma função de Lyapunov.

Exercício 5 — solução.
Desta vez, tratamos do sistema
$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x}|\dot{x}| + kx = 0,$$
onde α é o coeficiente de atrito viscoso. Prosseguindo de maneira idêntica à questão anterior, encontramos

$$\begin{aligned}\dot{H} &= \dot{x}(m\ddot{x}+kx)\\ &= \dot{x}(-\alpha\dot{x}|\dot{x}| - kx + kx)\\ &= -\alpha\dot{x}^2|\dot{x}| < 0 \quad \forall x \neq 0.\end{aligned}$$

Logo o sistema é assintoticamente estável (desigualdade estrita).

08/07/2022 — Estabilidade local e global

Exercício 1. Encontre H de Lyapunov que comprove a estabilidade do sistema descrito por

$$\dddot{x} = -6\ddot{x} - 12\dot{x} - 8x.$$

Exercício 2. Mostre que a equação de Van der Pol,

$$\ddot{x} = -kx - \alpha(1 - x^2)\dot{x}, \quad k, \alpha > 0,$$

é estável para x suficientemente pequeno.

Exercício 3. Analise a estabilidade de Lyapunov do pêndulo com antrito,

$$\ddot{x} = -\sin x - \alpha\dot{x}, \quad \alpha > 0.$$

Exercício 4. Analise a estabilidade do sistema descrito por

$$\ddot{\theta} = -2\theta - 4\dot{\theta} + \theta^3.$$

Exercício 1 — solução.
Existe uma forma geral para encontrar funções/estabilidade de Lyapunov quando o sistema é linear. Ela consiste em determinar matriz $P > 0$ simétrica tal que $H(X) = X^T PX$ é de Lyapunov. Visto que $\dot{X} = AX$, esse último requerimento se traduz em

$$\begin{aligned} 0 > \dot{H} &= \dot{X}^T PX + X^T P\dot{X} \\ &= (AX)^T PX + X^T P(AX) \\ &= X^T A^T PX + X^T PAX \\ &= X^T(A^T P + PA)X \iff A^T P + PA < 0. \end{aligned}$$

Neste exercício, vamos impor $A^T P + PA = -\mathbb{I}$. Primeiro, a matriz A é dada por

$$x_1 := x, \quad x_2 := \dot{x}, \quad x_3 := \ddot{x} \implies \dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Agora, pondo $P = \begin{pmatrix} \alpha & a & b \\ a & \beta & c \\ b & c & \gamma \end{pmatrix}$, vem

$$A^T P = \begin{pmatrix} -8b & -8c & -8\gamma \\ \alpha - 12b & a - 12c & b - 12\gamma \\ a - 6b & \beta - 6c & c - 6\gamma \end{pmatrix}, \quad PA = \begin{pmatrix} -8b & \alpha - 12b & a - 6b \\ -8c & a - 12c & \beta - 6c \\ -8\gamma & b - 12\gamma & c - 6\gamma \end{pmatrix}$$

e assim

$$A^T P + PA = \begin{pmatrix} -16b & \alpha - 12b - 8c & a - 6b - 8\gamma \\ \alpha - 12b - 8c & 2a - 24c & b - 12\gamma + \beta - 6c \\ a - 6b - 8\gamma & b - 12\gamma + \beta - 6c & 2c - 12\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

É óbvio que $b = 1/16$. Substituindo no resto das equações, temos

$$\begin{cases} \alpha & = 8c + 3/4 \\ a & = 8\gamma + 3/8 \\ 2a & = 24c - 1 \\ \beta + 1/16 & = 12\gamma + 6c \\ 2c & = 12\gamma - 1 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha & = 48\gamma - 13/4 \\ a & = 8\gamma + 3/8 \\ 2a & = 144\gamma - 13 \\ \beta + 1/16 & = 48\gamma - 3 \\ 2c & = 12\gamma - 1 \end{cases} \implies (144 - 16)\gamma = 13 + \frac{3}{4}$$

ou seja, $\gamma = 55/128$. Dessa forma,

$$P = \begin{pmatrix} 2224/128 & 392/128 & 8/128 \\ 392/128 & 2248/128 & 266/128 \\ 8/128 & 266/128 & 55/128 \end{pmatrix} = \frac{1}{128}\begin{pmatrix} 2224 & 392 & 8 \\ 392 & 2248 & 266 \\ 8 & 266 & 55 \end{pmatrix}$$

e o sistema é estável, como esperado.

Exercício 2 — solução.
Tomando $H(x) = \frac{kx^2}{2} + \frac{\dot{x}}{2}$, temos

$$\begin{aligned} \dot{H} &= kx\dot{x} + \dot{x}\ddot{x} \\ &= \dot{x}(kx + \ddot{x}) \\ &= -\alpha\dot{x}^2(1 - x^2) \\ \implies \dot{H} \leqslant 0 &\iff |x| \leqslant 1. \end{aligned}$$

Assim, por mais que H seja positiva definida em $\mathbb{R}$, só podemos garantir estabilidade (assintótica) em $[-1, 1]$.

Exercício 3 — solução.
Podemos tomar a energia do sistema como candidata à função de Lyapunov:

$$H(x) = (1 - \cos x) + \frac{\dot{x}^2}{2} \implies \begin{aligned}[t] \dot{H} &= \dot{x}\sin x + \dot{x}\ddot{x} \\ &= \dot{x}(\sin x + \ddot{x}) \\ &= -\alpha\dot{x}^2. \end{aligned}$$

A rigor, embora a derivada seja não positiva em $\mathbb{R}$, a estabilidade segundo a H tomada só é provada para $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, conjunto onde a função é positiva definida.

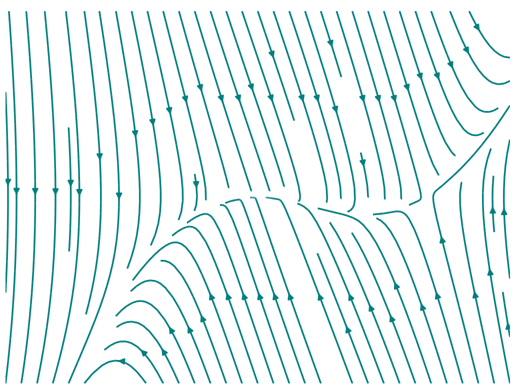
Exercício 4 — solução.
Apenas do termo cúbico em θ, o linearizado tangente da EDO nos diz que o sistema é estável em $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$. Espera-se então que essa convergência seja apenas local; de fato, tomar

$$H(\theta) = 2\frac{\theta^2}{2} + \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{\theta^4}{4}$$

implica em

$$\begin{aligned} \dot{H} &= 2\theta\dot{\theta} + \dot{\theta}\ddot{\theta} - \theta^3\dot{\theta} \\ &= \dot{\theta}(2\theta + \ddot{\theta} - \theta^3) \\ &= -4\dot{\theta}^2, \end{aligned}$$

que é não positiva para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Entretanto, como H não é necessariamente positivo definida, essa estabilidade é local. O retrato de fase da EDO é de fato um tanto estranho (região $[-3, 3] \times [-3, 3]$).



15/07/2022 — Controle por Lyapunov

Exercício 1. Encontre um controle u de Lyapunov que estabilize o pêndulo sem atrito,

$$\ddot{x} = -\sin x + u,$$

em $x = \pi/2$.

Exercício 2. Estabilize o sistema anterior no ponto $x = \pi/4$ com um novo controle mais inteligente.

Exercício 3. Proponha um sistema de controle por Lyapunov para o sistema dinâmico abaixo.

$$\frac{d^2\theta}{d\theta^2} = -2\theta - 4\frac{d\theta}{dt} + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^3 + u$$

Exercício 4. Repita o exercício anterior trocando a parcela -2θ na EDO por $-2\theta^3$.

Exercício 5. Repita o exercício 3 trocando a parcela -2θ na EDO por $-2\theta^2$.

Exercício 1 — solução.
Pensando matematicamente, procuramos um "equilíbrio deslocado", em comparação com os clássicos equilíbrios na origem. Pondo dessa maneira, faz sentido tentar H de Lyapunov dada por

$$H(x) = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2.$$

$\varepsilon > 0$ é posto para garantir a positividade definida da função. Derivando, vem

$$\begin{aligned}\dot{H} &= \dot{x}\ddot{x} + \varepsilon\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\dot{x} \\ &= \dot{x}(\ddot{x} + \varepsilon\left(x - \frac{\pi}{2}\right)) \\ &= \dot{x}(-\sin x + \varepsilon\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + u).\end{aligned}$$

Logo, uma lei de controle que satisfaz $\dot{H} \leqslant 0$ é $u = \sin x - \alpha\dot{x} - \varepsilon\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, $\alpha > 0$.

Exercício 2 — solução.
Trocar $\pi/2$ por $\pi/4$ na H acima resultaria no controle $u = \sin x - \alpha\dot{x} - \varepsilon\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $\alpha > 0$.

O problema com tal u é que pequenos distúrbios no ponto de equilíbrio são amplificados pelo seno antes de serem efetivamente reduzidos pelo "atrito" $-\varepsilon x$. Esse comportamento é precisamente oposto ao da função cosseno, e por causa disso o objetivo será trocar na lei de controle original o seno pelo cosseno.

Realizando a substituição, e a partir daí reconstruindo H, chegamos à seguinte expressão:

$$\begin{aligned}\dot{H} &= \dot{x}(u - \cos x + \varepsilon\left(x - \frac{\pi}{4}\right)) \\ &= \dot{x}(\ddot{x} + \sin x - \cos x + \varepsilon\left(x - \frac{\pi}{4}\right)) \\ &= \dot{x}\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \dot{x}\varepsilon\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \dot{x}\ddot{x} \\ \implies H(\theta) &= \sqrt{2}(c_1 - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)) + \frac{\varepsilon}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\dot{x}^2}{2}.\end{aligned}$$

Escolhendo $c_1 = 1$, H acima se torna positiva definida com derivada $\leqslant 0$ através do controle proposto, e o problema está fechado.

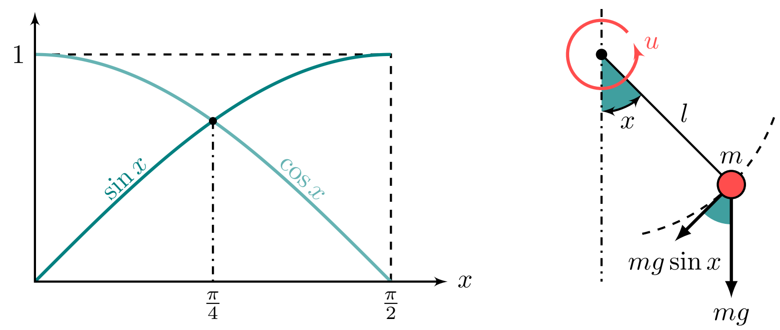


Figura 2 – Quando $x = \pi/4 + \delta$, u com $\sin x$ aumenta, distanciando o pêndulo do equilíbrio, enquanto u com $\cos x$ diminui, facilitando a volta ao equilíbrio pela força peso. Quando $x = \pi/4 - \delta$, u com $\cos x$ aumenta para compensar a força peso, enquanto $\sin x$ relaxa, novamente distanciando o pêndulo do equilíbrio.

Exercício 3 — solução.
Aqui vale tomar H como a consagrada combinação linear entre θ e suas derivadas. Por exemplo, considere

$$H(\theta) = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + 2\frac{\theta^2}{2}.$$

Perceba que a função acima é positiva definida. Derivando-a no tempo, temos

$$\begin{aligned}\dot{H} &= \dot{\theta}\ddot{\theta} + 2\theta\dot{\theta} \\ &= \dot{\theta}(\ddot{\theta} + 2\theta) \\ &= \dot{\theta}(-4\dot{\theta} + \dot{\theta}^3 + u),\end{aligned}$$

de maneira que, para obter $\dot{H} \leqslant 0$, podemos escolher por exemplo $u = -\dot{\theta}^3$.

De fato, tal u nos leva a $\dot{H} = -4\dot{\theta}^2 \leqslant 0$.

Exercício 4 — solução.
Fisicamente, tanto -2θ quanto $-2\theta^3$ podem ser interpretados como coeficientes de atrito à variação de θ, de forma que o novo sistema continua estável como o original.

Entretanto, tomar H como no exercício anterior levaria a uma lei de controle talvez demasiadamente carregada, e assim o desafio aqui será definir H que dê o mesmo u anterior. Conseguimos isso incluindo na função de Lyapunov a integral (em θ) da parcela nova:

$$\begin{aligned}H(\theta) = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + 2\frac{\theta^4}{4} \implies \dot{H} &= \dot{\theta}\ddot{\theta} + 2\theta^3\dot{\theta} \\ &= \dot{\theta}(\ddot{\theta} + 2\theta^3) \\ &= \dot{\theta}(-4\dot{\theta} + \dot{\theta}^3 + u) \leqslant 0 \implies u = -\dot{\theta}^3,\end{aligned}$$

como desejávamos.

Exercício 5 — solução.
Ao contrário dos problemas anteriores, a nova parcela não pode mais ser entendida como um atrito, e sua integral em θ não é positiva definida. Para nos livrarmos desse empecilho, tentativamente tomamos

$$H(\theta) = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + 2\frac{\theta^2|\theta|}{3},$$

de forma que, para $\theta \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\dot{H} &= \dot{\theta}\ddot{\theta} + 2\theta^2\dot{\theta} \\ &= \dot{\theta}(\ddot{\theta} + 2\theta^2) \\ &= \dot{\theta}(-4\dot{\theta} + \dot{\theta}^3 + u) \leqslant 0 \implies u = -\dot{\theta}^3,\end{aligned}$$

e para $\theta < 0$,

$$\begin{aligned}\dot{H} &= \dot{\theta}\ddot{\theta} - 2\theta^2\dot{\theta} \\ &= \dot{\theta}(\ddot{\theta} - 2\theta^2) \\ &= \dot{\theta}(-4\dot{\theta} - 4\theta^2 + \dot{\theta}^3 + u) \leqslant 0 \implies u = -\dot{\theta}^3 + 4\theta^2.\end{aligned}$$

Unindo as leis de controle numa única equação, ficamos com $u(t) = -\dot{\theta}^3 + 2\theta(\theta - |\theta|)$.

22/07/2022 — Introdução a saídas planas

Exercício 1.
Dado uma trajetória polinomial $x(t)$ tal que

$$x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = \dot{x}(10) = \ddot{x}(10) \quad \text{e} \quad x(10) = 1,$$

encontre u que satisfaça

$$\ddot{x} = -\sin(x - u).$$

Exercício 1 — solução.
Exitem 6 equações acerca de $x(t)$, de foma que este é polinômio de ordem 5 ou maior. Tomemos x de grau 5 genérico, i.e., com c_i, $0 \leqslant i \leqslant 5$, tais que

$$x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + c_5 t^5$$

satisfaça às equações no enunciado. Substituindo, temos

$$\begin{cases} 0 &= x(0) \\ 0 &= \dot{x}(0) \\ 0 &= \ddot{x}(0) \\ 0 &= \dot{x}(10) \\ 0 &= \ddot{x}(10) \\ 1 &= x(10) \end{cases} \implies \begin{cases} 0 &= c_0 \\ 0 &= c_1 \\ 0 &= c_2 \\ 0 &= 3 \cdot 10^2 c_3 + 4 \cdot 10^3 c_4 + 5 \cdot 10^4 c_5 \\ 0 &= 6 \cdot 10 c_3 + 12 \cdot 10^2 c_4 + 20 \cdot 10^3 c_5 \\ 1 &= 10^3 c_3 + 10^4 c_4 + 10^5 c_5 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/100 \\ -3/2000 \\ 3/50000 \end{pmatrix}.$$

Conclui-se então que

$$u(t) = \arcsin(\ddot{x}(t)) + x(t) = \arcsin\left(\frac{6}{100}t - \frac{36}{2000}t^2 + \frac{60}{50000}t^3\right) + \frac{1}{100}t^3 - \frac{3}{2000}t^4 + \frac{3}{50000}t^5.$$

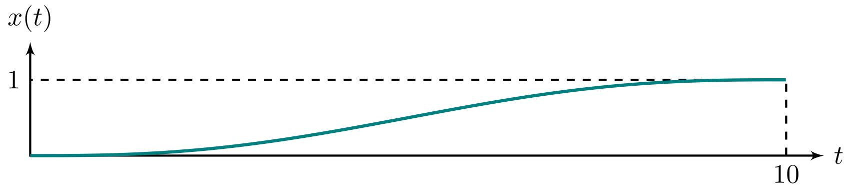


Figura 3 – Gráfico em escala de $x(t)$ para $0 \leqslant t \leqslant 1$.

29/07/2022 — SBPC

Não houve aula.

05/08/2022 — Prova 1

Questões

1) Considerando os sistemas abaixo trace o retrato de fase dos mesmos e defina seus tipos.

   a) $$\frac{d^2x}{dt^2} = 2x - \frac{dx}{dt} + u$$ (1.5)

   b) $$\frac{d^2x}{dt^2} = -2x + \frac{dx}{dt} + u$$ (1.5)

2) Considerando o sistema abaixo, determine o(s) ponto(s) de equilíbrio do mesmo e o(s) sistema(s) linearizado(s) tangente(s) associado(s). (3.0)

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1(1 - 2x_2^2) - x_2 + ux_1$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - 1$$

3) Determine uma função de Lyapunov e sua região de estabilidade do sistema abaixo. (2.0)
   Proponha um controle por Lyapunov para melhorar a performance do sistema (2.0)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x - \frac{dx}{dt} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^3 + u + 1$$

Soluções

1) Tomando a clássica escolha de estados $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, temos para o sistema (a)

$$\dot{X} = AX + BU = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u.$$

Calculando os autovalores

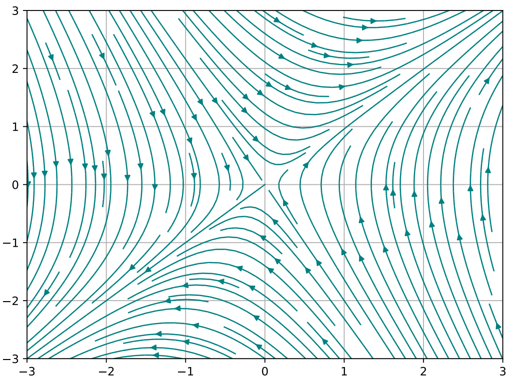
$$\begin{aligned} 0 = \det(\lambda \mathbb{I} - A) &\iff 0 = \lambda(\lambda + 1) - 2 \\ &\iff 0 = \lambda^2 + \lambda - 2 \\ &\iff \lambda = \lambda_1 = 1 \quad \vee \quad \lambda = \lambda_2 = -2. \end{aligned}$$

Calculando os autovetores

$$\begin{aligned} Av_1 = \lambda_1 v_1 &\iff v_1 = x \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T, \quad x \in \mathbb{R} \\ Av_2 = \lambda_1 v_2 &\iff v_2 = y \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}^T, \quad y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Esboço do retrato de fase

Como $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, o RF será uma sela, e mais do que isso, os autovetores nos dizem que essa sela tem eixo instável na reta $x_2 = x_1$ e estável na reta $x_2 = -2x_1$. Segue o esboço.

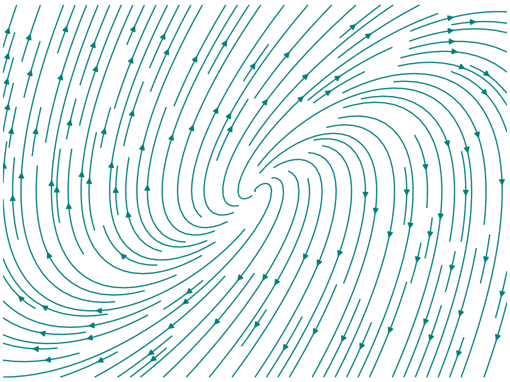


Para o sistema (b), $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculando os autovalores

$$\begin{aligned} 0 = \det(\lambda\mathbb{I} - A) &\iff 0 = \lambda(\lambda - 2) + 2 \\ &\iff 0 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 \\ &\iff \lambda = \lambda_1 = 1 + i \quad \vee \quad \lambda = \lambda_2 = 1 - i. \end{aligned}$$

Esboço do retrato de fase
Como $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$, o RF será um foco instável. Segue o esboço.



2) No ponto de equilíbrio $(\overline{x_1}, \overline{x_2})$, $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = u = \overline{u} = 0$. Substituindo nas EDOs, vem

$$\begin{cases} 0 = -\overline{x_1}(1 - 2\overline{x_2}^2) - \overline{x_2} \\ 0 = \overline{x_1} - 1 \end{cases} \implies \overline{x_1} = 1, \quad 2\overline{x_2}^2 - \overline{x_2} - 1.$$

Resolvendo a quadrática, chegamos a dois possíveis pontos de equilíbrio: $P_1 = (1, 1)^T$ e $P_2 = (1, -1/2)^T$. Prosseguindo, linearizamos $f_1(X; u) := \dot{x}_1$ e $f_2(X; u) := \dot{x}_2$. Veja que

$$\begin{array}{lll} \partial_{x_1} f_1|_{(\overline{x_1},\overline{x_2})} = 2\overline{x_2}^2 - 1 & \partial_{x_2} f_1|_{(\overline{x_1},\overline{x_2})} = 4\overline{x_1}\overline{x_2} - 1 & \partial_u f_1|_{(\overline{x_1},\overline{x_2})} = \overline{x_1} \\ \partial_{x_1} f_2|_{(\overline{x_1},\overline{x_2})} = 1 & \partial_{x_2} f_2|_{(\overline{x_1},\overline{x_2})} = 0 & \partial_u f_2|_{(\overline{x_1},\overline{x_2})} = 0 \end{array}$$

e portanto o linearizado em cada P_j fica

$$\begin{aligned} (\overline{x_1}, \overline{x_2}) = P_1 &\implies \dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (X - P_1) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u, \\ (\overline{x_1}, \overline{x_2}) = P_2 &\implies \dot{X} = \begin{pmatrix} -1/2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (X - P_2) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u. \end{aligned}$$

3) Primeiro estabelecemos a estabilidade do sistema. Como este tem ponto de emquilíbrio $(x, \dot{x}) = (1, 0)$, tentamos H de Lyapunov dada por

$$H(x(t)) = \frac{(x - 1)^2}{2} + \frac{\dot{x}^2}{2}. \tag{1}$$

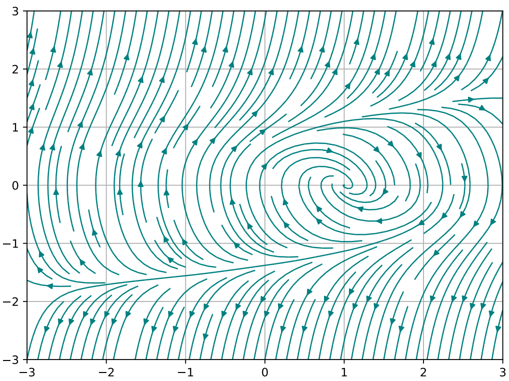
É fácil ver que H acima é positiva para os pontos diferentes do equilíbrio e nula nele. O próximo passo é verificar a derivada de H do tempo; temos

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \dot{x}(x - 1) + \dot{x}\ddot{x} \\ &= \dot{x}(x - 1 + \ddot{x}) \\ &= \dot{x}(-\dot{x} + \dot{x}^3), \end{aligned}$$

função nula no equilíbrio mas não necessariamente negativa fora dele. Assim sendo, procuremos saber a região onde a estabilidade é garantida, isto é, $\dot{H} < 0$ com $\dot{x} \neq 0$. Vem

$$\dot{x}(-\dot{x} + \dot{x}^3) < 0 \iff \dot{x}^2(\dot{x}^2 - 1) < 0 \iff \dot{x}^2 - 1 < 0 \quad \therefore \quad 0 < |\dot{x}| < 1.$$

A inequação acima define a região de estabilidade. O retrato de fase do sistema mosrta que, realmente, esse intervalo abrange quase toda a região estável do sistema, embora não seja condição suficiente para a estabilidade.



Agora, propomos controle de Lyapunov. Tomando a mesma H de (1), a derivada se torna

$$\begin{aligned}\dot{H} &= \dot{x}(x - 1 + \ddot{x}) \\ &= \dot{x}(-\dot{x} + \dot{x}^3 + u),\end{aligned}$$

e está claro que $u = -\dot{x}^3$, por exemplo, estabilizaria globalmente o sistema, melhorando sua performance.