Proyecto de Ecuaciones Diferenciales - Corte 1

Profesor: Manuel Alejandro Moreno Arévalo

Integrantes:

Laura Natalia Díaz Chavarro

Santiago Julián Contreras Palacios

Nicol Mariana Castro González

Diego Alejandro Cifuentes Hernandez

Jerit Leomar Hernández Andrade

UNIVERSIDAD DE SAN BUENAVENTURA COLOMBIA

Universidad de San Buenaventura

Facultad de Ingeniería (Bogotá)

Ciencias Básicas

Bogotá D.C., Colombia

2025

Resumen:

En el siguiente archivo se encontrará el paso a paso del modelamiento de crecimiento poblacional, centrado en la ciudad de Bucaramanga, donde por medio del crecimiento de la población a través de los años se intentará crear un modelo matemático capaz de predecir poblaciones futuras.

Introducción

En el proyecto trabajamos con la ecuación diferencial poblacional �� ��= �� que afirma que el cambio de la población es proporcional a esta, a la constante � la denominamos constante de crecimiento. A través de esta ecuación modelamos el comportamiento de la función que calcula la población en términos del tiempo, para dar soluciones explícitas hay que considerar valores iniciales que serán escogidos de entre las 20 muestras que tomamos.

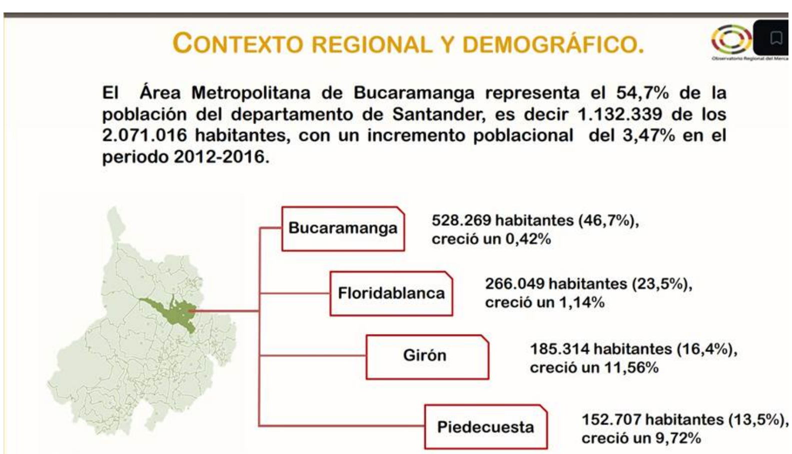
Pero antes de esto se tienen varias cosas en consideración. La primera es que la tabla de la población a través del tiempo se tomó de la página macrotrends donde se muestran entre otros, los siguientes valores:

Bucaramanga, Colombia Metro Area Population 1950-2025

Bucaramanga - Historical Population Data

Year	Population	Growth Rate
2025	1,411,000	1.00%
2024	1,397,000	1.16%
2023	1,381,000	1.10%
2022	1,366,000	1.26%
2021	1,349,000	1.35%
2020	1,331,000	1.37%
2019	1,313,000	1.39%
2018	1,295,000	2.37%
2017	1,265,000	2.35%
2016	1,236,000	2.32%
2015	1,208,000	2.37%

Sin embargo, esto valores hacen referencia al área metropolitana de Bucaramanga lo que abarca Bucaramanga, Florida blanca, Girón y Piedecuesta, pero estamos interesados solo en la ciudad. Por ende, basados en un estudio realizado por el Observatorio Regional del Mercado de Trabajo (Ormet Santander), logramos deducir que del área metropolitana solo el 46,7% de la población total pertenecen a la ciudad de Bucaramanga



En comparación con otras tablas nos dimos cuenta de que ese valor es un tanto meno por lo que en vez de aproximarlo a 46.7% lo dejamos en el 46% así que tomaremos el valor de los datos de la tabla multiplicados por 0.46 y ese es el valor necesario con respecto a años que tomaremos.

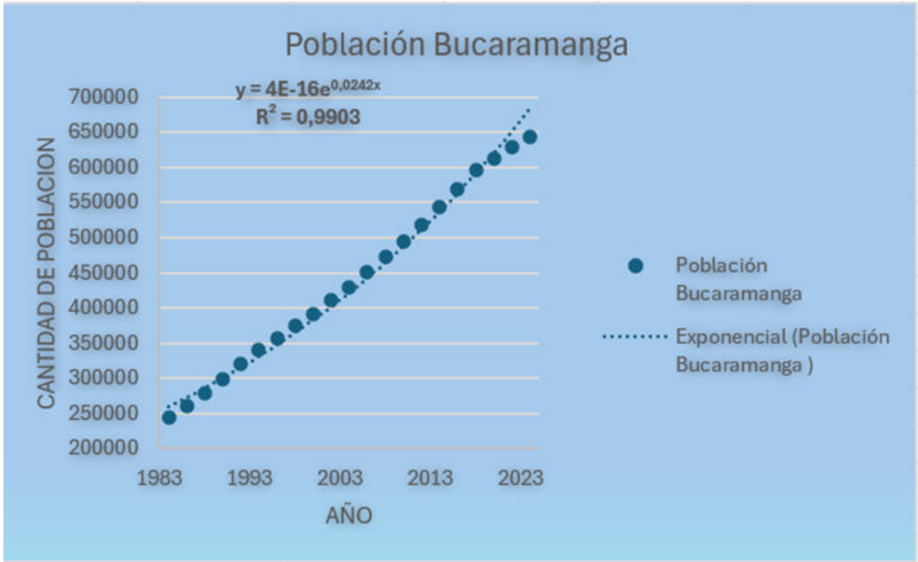
Desarrollo del proyecto

A continuación, tenemos la tabla de Excel con la población del área metropolitana, la población de Bucaramanga y los años de dichas poblaciones:

```
% Datos de la tabla
Poblacion_Area = [1397000; 1366000; 1331000; 1295000; 1236000; 1180000; 1126000;
1075000; 1026000;  979000; ...
                  935000;  892000;  852000;  813000;  776000;  741000;  697000;
650000;  607000;  567000; 532000];

fecha = [2024; 2022; 2020; 2018; 2016; 2014; 2012; 2010; 2008; 2006; ...
         2004; 2002; 2000; 1998; 1996; 1994; 1992; 1990; 1988; 1986; 1984];

Poblacion_Bucaramanga = [642620; 628360; 612260; 595700; 568560; 542800; 517960;
494500; 471960; 450340; ...
                         430100; 410320; 391920; 373980; 355960; 340860; 320620;
299000; 279220; 260820; 244720];

% Crear tabla
tabla = table(Poblacion_Area, fecha, Poblacion_Bucaramanga);

% Mostrar la tabla
disp(tabla);
```

Poblacion_Area	fecha	Poblacion_Bucaramanga
1.397e+06	2024	6.4262e+05
1.366e+06	2022	6.2836e+05
1.331e+06	2020	6.1226e+05
1.295e+06	2018	5.957e+05
1.236e+06	2016	5.6856e+05
1.18e+06	2014	5.428e+05
1.126e+06	2012	5.1796e+05
1.075e+06	2010	4.945e+05
1.026e+06	2008	4.7196e+05
9.79e+05	2006	4.5034e+05
9.35e+05	2004	4.301e+05
8.92e+05	2002	4.1032e+05
8.52e+05	2000	3.9192e+05
8.13e+05	1998	3.7398e+05
7.76e+05	1996	3.5596e+05
7.41e+05	1994	3.4086e+05
6.97e+05	1992	3.2062e+05
6.5e+05	1990	2.99e+05
6.07e+05	1988	2.7922e+05
5.67e+05	1986	2.6082e+05
5.32e+05	1984	2.4472e+05

Con respecto a esta grafica se genera un gráfico de la población en función del tiempo y se traza una línea con el comando de función exponencial para que nos dé una función que moldee los datos utilizados.



Ya con esto generado se procede a por medio de la ecuación mencionada escoger 5 problemas de valor inicial y sacar a mano las ecuaciones de la función exponencial, modelando de esta forma 5 funciones en Matlab que me representen la ecuación de la población de Bucaramanga en un tiempo t en años.

Para esto primero resolvemos la ecuación planteada al inicio de la introducción:

Solución ecuación general:

$$\frac{dp}{dt} = kp$$

- Separación de variables:
- $$\frac{dp}{kp} = dt$$

Integración

$$\int \frac{dp}{kp} = \int dt$$

Solución de la integral

- $$\frac{1}{k}\int \frac{dp}{p} = \int dt$$
- $$\frac{1}{k}\ln|p| = t + c$$

- $$\ln|p| = kt + kc$$

Despejamos p:

- $$p = e^{kt} \cdot e^{kc}$$

Como e^{kc} es una constante entonces queda:

$$p = e^{kt} \cdot c$$

Teniendo ya la función de nuestro interés escogemos 5 parejas de años para tomarlas como Problemas de valor inicial (PVI), las parejas escogidas son: **[1984-2004], [2012-2018], [2000-2008], [1998-2002] y [2010-2020].**

Ahora tomamos los PVI y los solucionamos hallando cada una de las ecuaciones y graficándolas en Matlab

Ecuación pareja 1; [1984-2004] Solución

- **Rango de población respectivo a la pareja : (244720-430100)**

PVI=P(t=0); P (t=10)

Reemplazo población y tiempo en t=0 y se resuelve

- $$P(t = 0) = 244720$$
- $$244720 = e^{k(0)} \cdot c$$
- $$244720 = 1 \cdot c$$
- $$C = 244720$$

Se agarra la nueva ecuación:

$$p = e^{kt} \cdot 244720$$

Se remplaza población t tiempo en t=10

- $$P(t = 10) = 430100$$
- $$430100 = e^{k(10)} \cdot 244720$$

Se despeja k

- $$\frac{430100}{244720} = e^{k(10)}$$

- $$\ln\left(\frac{430100}{244720}\right) = \ln\left(e^{k(10)}\right)$$
- $$0{,}5639 = k(10)$$
- $$\frac{0{,}5639}{10} = k$$
- $$0{,}05639 = k$$

Teniendo $0{,}05639 = k$ **y** $C = 244720$ **nos queda la ecuación:**

- $$p = e^{0{,}05639t} \cdot 244720$$

PROYECCIÓN PAREJA 1

Para el 2025 en la tabla ejecutada el t será igual a 20,5 puesto que cada dos años equivale, a t=1 y nuestro t inicial es 1984. Entonces:

- $$1t = años$$
- $$t(0) = 1984$$
- $$2025 - 1984 = 41$$
- $$\frac{41}{2} = 20{,}5$$
- $$t(20{,}5) = 2025$$

En la ecuación resultado reemplazamos el valor del tiempo para hallar la proyección de la población para el 2025

- $$p = e^{(0{,}05639)\cdot(20{,}5)} \cdot 244729$$
- $$p = e^{1{,}155995} \cdot 244729$$
- $$p = 3{,}1771 \cdot 244729$$
- $$p = 777520$$

Calculamos el error en relación con los datos reales

Para esto tenemos en cuenta que en los datos que tenemos contamos con una población para el 2025 de 649060

La fórmula para el error está dada por $Error = \left|\frac{\Delta Población}{Población\, real}\right|$

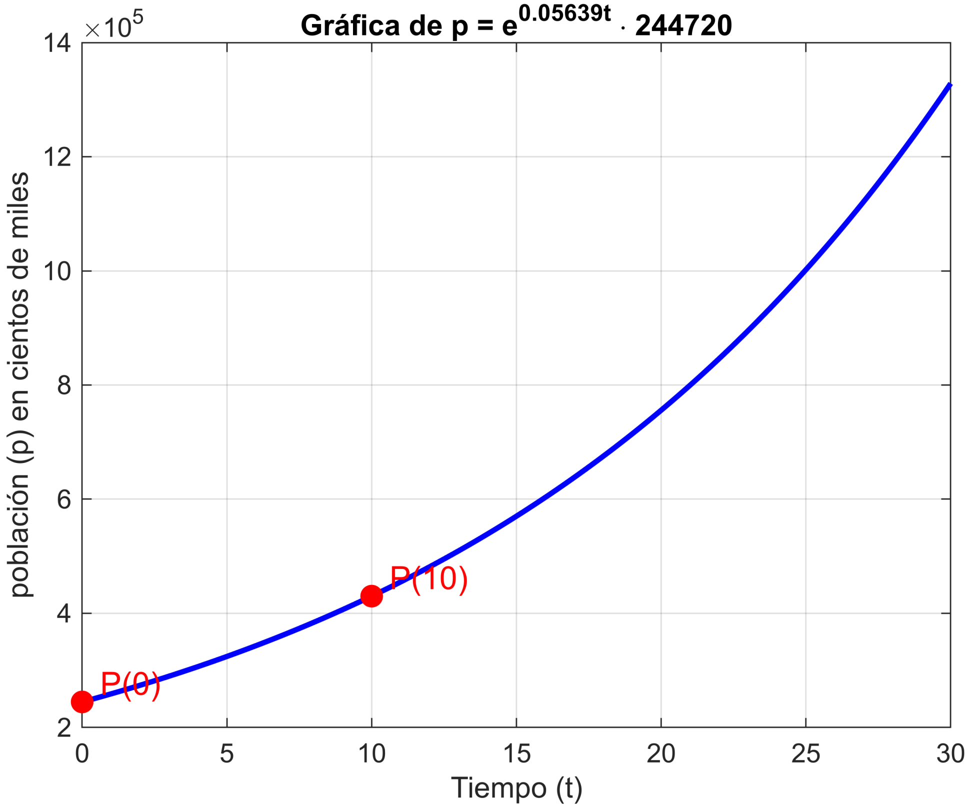
- $$Error = \left|\frac{649060-777520}{649060}\right|$$
- $$Error = \left|\frac{-128460}{649060}\right|$$
- $$Error = |-0{,}1979|$$
- $$Error = 0{,}1979$$

Grafica de la Fubcion hallada 1

```
fprintf('Grafica de [1984-2004] ');
```

```
Grafica de [1984-2004]
```

```
%rango de tiempo
t = linspace(0, 30, 1000);

% ecuación
p = exp(0.05639 * t) * 244720;

% Grafica de la ecuación
figure;
plot(t, p, 'b', 'LineWidth', 2);
xlabel('Tiempo (t)');
ylabel('población (p) en cientos de miles');
title('Gráfica de p = e^{0.05639t} \cdot 244720');
grid on;
% Puntos de interés en t = 0 y t = 10
t_pvi = [0, 10];
p_pvi = exp(0.05639 * t_pvi) * 244720;

% Agregar los puntos a la gráfica
hold on;
plot(t_pvi, p_pvi, 'ro', 'MarkerSize', 8, 'MarkerFaceColor', 'r'); % Puntos en rojo

% Etiquetas de los puntos
text(t_pvi(1), p_pvi(1), '  P(0)', 'FontSize', 12, 'Color', 'r',
'VerticalAlignment', 'bottom');
text(t_pvi(2), p_pvi(2), '  P(10)', 'FontSize', 12, 'Color', 'r',
'VerticalAlignment', 'bottom');
hold off;
```



Ecuación pareja 2; [2010-2020] Solución

- **Rango de población respectivo a la pareja : (494500-612260)**

PVI: P(t=0) =494.500; P(t=5) =612.260

- $$P = e^{kt} \cdot c$$

Aplicando PVI – para despejar "c"

- $$P(t = 0) = 494.500$$
- $$494.500 = e^{k \cdot 0} \cdot c$$
- $$c = 494.500$$

Aplicando PVI – para despejar "k"

- $$P(T = 5) = 612.260$$
- $$612.260 = e^{k \cdot 5} \cdot 494.500$$
- $$\frac{612.260}{494.500} = e^{k \cdot 5}$$

- $$\ln|1.2381| = k \cdot 5$$
- $$\frac{0.2135}{5} = k$$
- $$k = 0.0427$$

Las variables son

- $$c = 494.500$$
- $$k = 0.0427$$

Ecuación final

- $$P = e^{0.0427t} \cdot 494.500$$
-
-

PROYECCIÓN PAREJA 2

Para saber cuál sería “t” haciendo la proyección desde el 2010 al 2025:

- $$2025 - 2010 = 15$$
- $$\frac{15}{2} = 7.5$$
- $$t(7.5) = 2025$$

Se reemplaza en la ecuación encontrada para poder hallar la proyección de la población del 2025

- $$P = e^{0.042t} \cdot 494.500$$
- $$P = e^{0.042 \cdot 7.5} \cdot 494.500$$
- $$P = e^{0.3202} \cdot 494.500$$
- $$P = 1.3774 \cdot 494.500$$
- $$P = 681.124$$

La proyección de la población en Bucaramanga para el 2025 es de 681.124 habitantes.

La población real de 2025 es de 649.060 habitantes.

Margen de error

$$Error = \left|\frac{población\ real - proyección}{población\ real}\right|$$

$$Error = \left|\frac{649.060 - 681.124}{649.060}\right|$$

$$Error = \left|\frac{-32.064}{649.060}\right|$$

$$Error = |-0.0494|$$

$$Error = 0.0494 \cdot 100$$

$$Error = 4.94$$

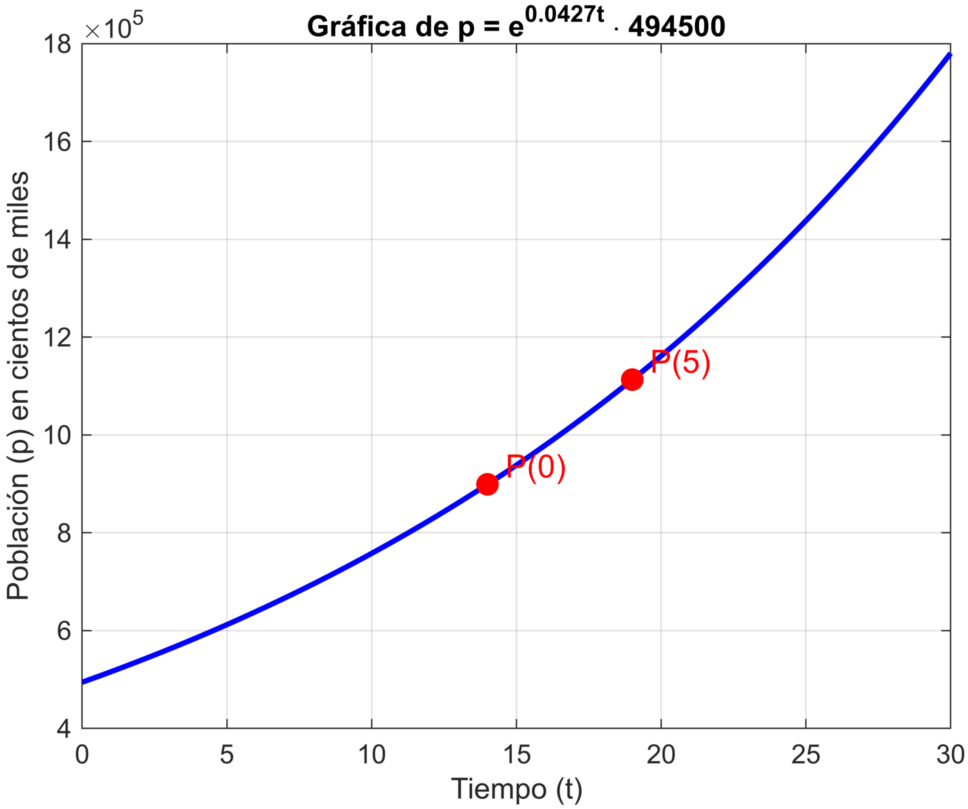
El error de la proyección es de 4.94%

```
fprintf('Grafica de [2010-2020] \n');
```

```
Grafica de [2010-2020]
```

```
% Rango de tiempo
t = linspace(0, 30, 1000);

% Ecuación corregida con multiplicación elemento a elemento
p = exp(0.0427 * t) .* 494500;

% Gráfica de la ecuación
figure;
plot(t, p, 'b', 'LineWidth', 2);
xlabel('Tiempo (t)');
ylabel('Población (p) en cientos de miles');
title('Gráfica de p = e^{0.0427t} \cdot 494500');
grid on;

% Forzar notación científica en Y
ax = gca;
ax.YAxis.Exponent = 5;

% Agregar los puntos a la gráfica
hold on;

% Puntos de interés en t = 14 y t = 19
t_pvi1 = [14, 19];
p_pvi2 = exp(0.0427 * t_pvi1) .* 494500;

plot(t_pvi1, p_pvi2, 'ro', 'MarkerSize', 8, 'MarkerFaceColor', 'r'); % Puntos en
rojo
```

```
% Etiquetas de los puntos
text(t_pvi1(1), p_pvi2(1), '  P(0)', 'FontSize', 12, 'Color', 'r',
'VerticalAlignment', 'bottom');
text(t_pvi1(2), p_pvi2(2), '  P(5)', 'FontSize', 12, 'Color', 'r',
'VerticalAlignment', 'bottom');

hold off;
```



Ecuación pareja 3; [2000-2008] Solución

- **Rango de población respectivo a la pareja : (391920-494500)**

PVI:

- P(t=0) = 391.920 P (t=4) = 494.500
- $P = e^{k \cdot t} \cdot C$

I. Calcular "C" aplicando "PVI P(t=0)"

$$P = e^{k \cdot t} \cdot C$$

$$391920 = e^{k \cdot 0} \cdot C$$

$$391920 = 1 \cdot C$$

$$C = 391920$$

II. Calcular “k” aplicando “PVI P(t=4)”

$$P_0 = e^{k \cdot t} \cdot 391920$$

$$494500 = e^{k \cdot 4} \cdot 391920$$

$$\frac{494500}{391920} = e^{k \cdot 4}$$

$$1.2617 = e^{k \cdot 4}$$

$$\ln(1.2617) = \ln(e^{k \cdot 4})$$

$$0.2324 = k \cdot 4$$

$$\frac{0.2324}{4} = k$$

$$k = 0.0581$$

III. Se construye la ecuación en base a las constantes obtenidas.

$$P_0 = e^{0.0581 \cdot t} \cdot 391920$$

PROYECCIÓN PAREJA 3

- Para saber cuál sería “t” haciendo la proyección desde el 2000 al 2025:

P(t=0) = 2000

$$2025 - 2000 = 25$$

$$\frac{25}{2} = 12.5$$

$$t = 12.5$$

- Se reemplaza en la ecuación encontrada para poder hallar la proyección de la población del 2025

$$P_0 = e^{0.0581 \cdot 12.5} \cdot 391920$$

$$P_0 = 2.0673 \cdot 391920$$

$$P_0 = 810216.216$$

- La proyección de la población en Bucaramanga para el 2025 es de 810.216 habitantes.
- La población real de 2025 es de 649.060 habitantes.
- Margen de error

$$Error = \frac{\Delta \, Población}{Población \, real}$$

$$Error = \frac{649060 - 810221}{649060}$$

$$Error = \frac{-161161}{649060}$$

$$Error = -0.2482$$

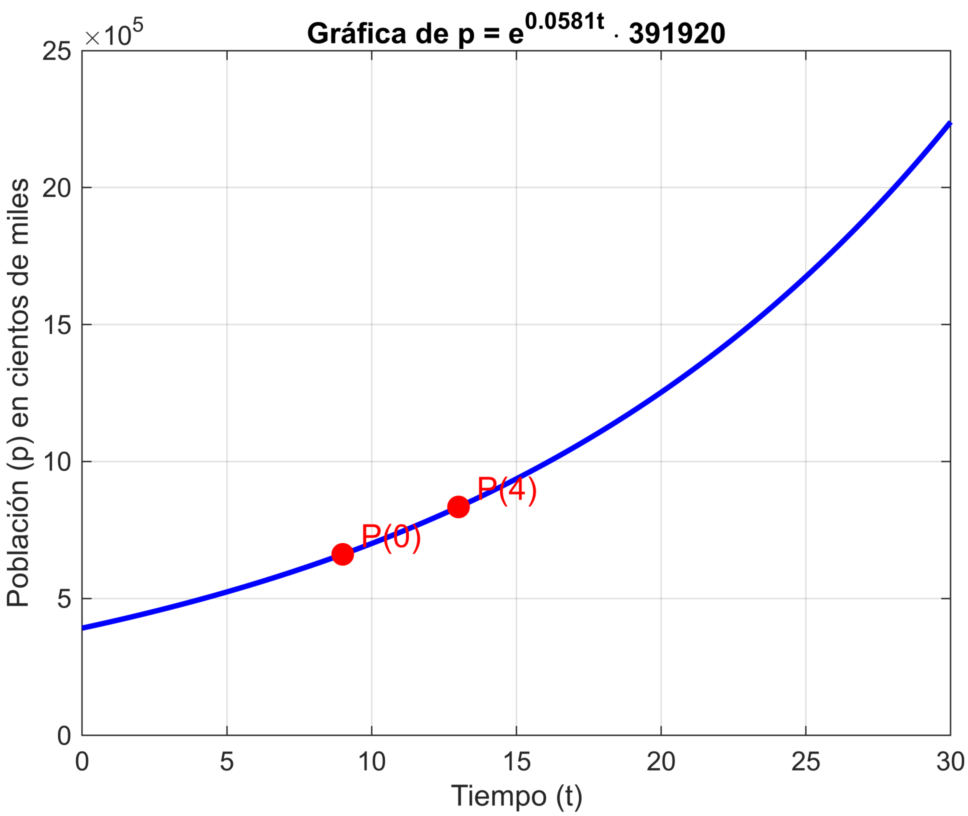
- El error de la proyección es de 0.2482

```
fprintf('Grafica de [2000-2008] \n');
```

```
Grafica de [2000-2008]
```

```
% Rango de tiempo
t = linspace(0, 30, 1000);

% Ecuación corregida con multiplicación elemento a elemento
p = exp(0.0581 * t) .* 391920;

% Gráfica de la ecuación
figure;
plot(t, p, 'b', 'LineWidth', 2);
xlabel('Tiempo (t)');
ylabel('Población (p) en cientos de miles');
title('Gráfica de p = e^{0.0581t} \cdot 391920');
grid on;
```

```
% Forzar notación científica en Y
ax = gca;
ax.YAxis.Exponent = 5;

hold on;

% Puntos de interés en t = 9 y t = 13
t_pvi2 = [9, 13];
p_pvi1 = exp(0.0581 * t_pvi2) .* 391920;

plot(t_pvi2, p_pvi1, 'ro', 'MarkerSize', 8, 'MarkerFaceColor', 'r'); % Puntos en
rojo

% Etiquetas de los puntos
text(t_pvi2(1), p_pvi1(1), '  P(0)', 'FontSize', 12, 'Color', 'r',
'VerticalAlignment', 'bottom');
text(t_pvi2(2), p_pvi1(2), '  P(4)', 'FontSize', 12, 'Color', 'r',
'VerticalAlignment', 'bottom');

hold off;
```



Ecuación pareja 4; [2012-2018] Solución

- **Rango de población respectivo a la pareja : (517690-595700)**

PVI:

- P(t=0) =517.690 P(t=3) =595.700
- Ecuación general: $P = e^{k \cdot t} \cdot C$

I. Calcular "C" aplicando "PVI P(t=0)"

$$P = e^{k \cdot t} \cdot C$$

$$517960 = e^{k \cdot 0} \cdot C$$

$$517960 = 1 \cdot C$$

$$C = 517960$$

II. Calcular "k" aplicando "PVI P(t=3)"

$$P = e^{k \cdot t} \cdot 517960$$

$$595700 = e^{k \cdot 3} \cdot 517960$$

$$\frac{595700}{517960} = e^{k \cdot 3}$$

$$1.1500 = e^{k \cdot 3}$$

$$\ln(1.1500) = \ln(e^{k \cdot 3})$$

$$0.1397 = k \cdot 3$$

$$\frac{0.1397}{3} = k$$

$$k = 0.0465$$

III. Se construye la ecuación en base a las constantes obtenidas.

$$P_0 = e^{0.0465 \cdot t} \cdot 517960$$

PROYECCIÓN PAREJA 4

Para el 2025 en la tabla ejecutada el t será igual a 6,5, ya que:

- $1t = años$
- $t(0) = 2012$

$2025 - 2012 = 13$, como los años van de dos en dos:

- $$\frac{13}{2} = 6.5$$

Se reemplaza en la ecuación encontrada para poder hallar la proyección de la población del 2025:

- $$P_0 = e^{0.0465(6.5)} \cdot 517960$$

$$P_0 = 1.3528 \cdot 517960$$

$$P_0 = 700696{,}288$$

La proyección según este par de tiempos de la población en Bucaramanga para el 2025 es de 700.696 habitantes.

La población real de 2025 es de 649.060 habitantes.

Margen de error:

- $$Error = \frac{\Delta Población}{Población\, real}$$
- $$Error = \left|\frac{649060 - 700696}{649060}\right|$$
- $$Error = \left|\frac{-51636}{649060}\right|$$
- $$Error = |-0.0795|$$

El error de la proyección es de 0.0795

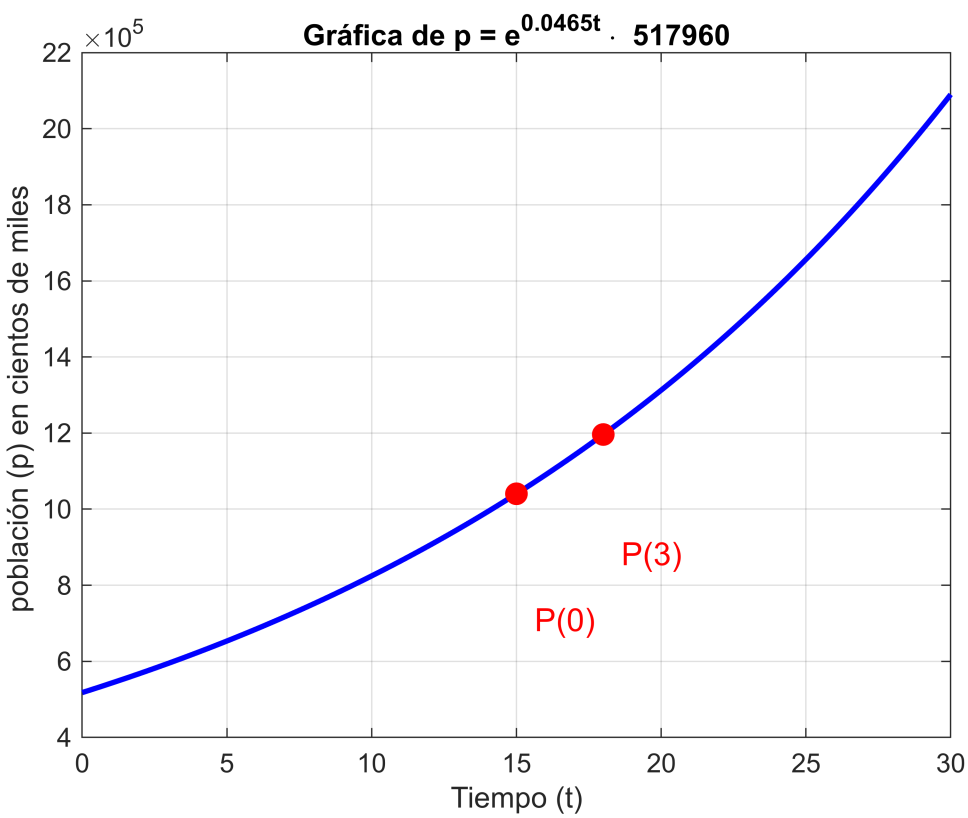
Grafica de la función hallada

```
fprintf('Grafica de [2012-2018] ');
```

```
Grafica de [2012-2018]
```

```
% rango de tiempo
t = linspace(0, 30, 1000);

% ecuación
p = exp(0.0465 * t) *  517960;

% Grafica de la ecuación
figure;
plot(t, p, 'b', 'LineWidth', 2);
xlabel('Tiempo (t)');
```

```
ylabel('población (p) en cientos de miles ');
title('Gráfica de p = e^{0.0465t} \cdot  517960');
grid on;
% Forzar notación científica en Y
ax = gca;
ax.YAxis.Exponent = 5;

hold on;

% Puntos de interés en t = 15 y t = 18
t_pvi3 = [15, 18];
p_pvi3 = exp(0.0465 * t_pvi3) *  517960;

plot(t_pvi3, p_pvi3, 'ro', 'MarkerSize', 8, 'MarkerFaceColor', 'r'); % Puntos en
rojo

% Etiquetas de los puntos
text(t_pvi3(1), p_pvi1(1), '  P(0)', 'FontSize', 12, 'Color', 'r',
'VerticalAlignment', 'bottom');
text(t_pvi3(2), p_pvi1(2), '  P(3)', 'FontSize', 12, 'Color', 'r',
'VerticalAlignment', 'bottom');

hold off;
```



Ecuación pareja 5; [1998-2002] Solución

- **Rango de población respectivo a la pareja : (373980-410320)**

PVI:

- P(t=0) = 373.980 P(t=2) = 410.320
- Ecuación general: $P = e^{k \cdot t} \cdot C$

I. Calcular "C" aplicando "PVI P(t=0)"

$$P = e^{k \cdot t} \cdot C$$

$$373980 = e^{k \cdot 0} \cdot C$$

$$373980 = 1 \cdot C$$

$$C = 373980$$

II. Calcular "K" aplicando "PVI P(t=2)"

$$P_0 = e^{k \cdot t} \cdot 373980$$

$$410320 = e^{k \cdot t} \cdot 373980$$

$$\frac{410320}{373980} = e^{k \cdot 2}$$

$$1.0972 = e^{k \cdot 2}$$

$$\ln(1.0972) = \ln(e^{k \cdot 2})$$

$$0.0927 = k \cdot 2$$

$$k = 0.0464$$

III. Se construye la ecuación en base a las constantes obtenidas.

$$P_0 = e^{0.0464 \cdot t} \cdot 373980$$

PROYECCIÓN PAREJA 5

- Para saber cuál sería "t" haciendo la proyección desde el 2000 al 2025:

P(t=0) = 1998

$$2025 - 1998 = 27$$

$$\frac{27}{2} = 13.5$$

$$t = 13.5$$

- Se reemplaza en la ecuación encontrada para poder hallar la proyección de la población del 2025

$$P_0 = e^{0.0464 \cdot 13.5} \cdot 373980$$

$$P_0 = 1.8709 \cdot 373980$$

$$P_0 = 699665.4694$$

La proyección de la población en Bucaramanga para el 2025 es de 810.216 habitantes.

La población real de 2025 es de 649.060 habitantes

Margen de error

- $$Error = \left|\frac{\Delta Población}{Población\ real}\right| \times 100$$
- $$Error = \left|\frac{649060 - 699665}{649060}\right| \times 100$$
- $$Error = \left|\frac{-50605}{649060}\right| \times 100$$
- $$Error = |-0.0780| \times 100$$
- $$Error = 0.0780 \times 100$$
- $$Error = 7.8\%$$

El error de la proyección es de 7.8%

```
fprintf('Grafica de [1998-2002]');
```

```
Grafica de [1998-2002]
```

```
% rango de tiempo
t = linspace(0, 30, 1000);

% ecuación
p = exp(0.0464 * t) *  373980;

% Grafica de la ecuación
figure;
plot(t, p, 'b', 'LineWidth', 2);
xlabel('Tiempo (t)');
ylabel('población (p) en cientos de miles ');
```

```
title('Gráfica de p = e^{0.0.0464t} \cdot  373980');
grid on;
% Forzar notación científica en Y
ax = gca;
ax.YAxis.Exponent = 5;
hold on;

% Puntos de interés en t = 8 y t = 10
t_pvi4 = [8, 10];
p_pvi4 = exp(0.0464 * t_pvi4) *  373980;

plot(t_pvi4, p_pvi4, 'ro', 'MarkerSize', 8, 'MarkerFaceColor', 'r'); % Puntos en
rojo

% Etiquetas de los puntos
text(t_pvi4(1), p_pvi1(1), '  P(0)', 'FontSize', 12, 'Color', 'r',
'VerticalAlignment', 'bottom');
text(t_pvi4(2), p_pvi1(2), '  P(3)', 'FontSize', 12, 'Color', 'r',
'VerticalAlignment', 'bottom');

hold off;
```

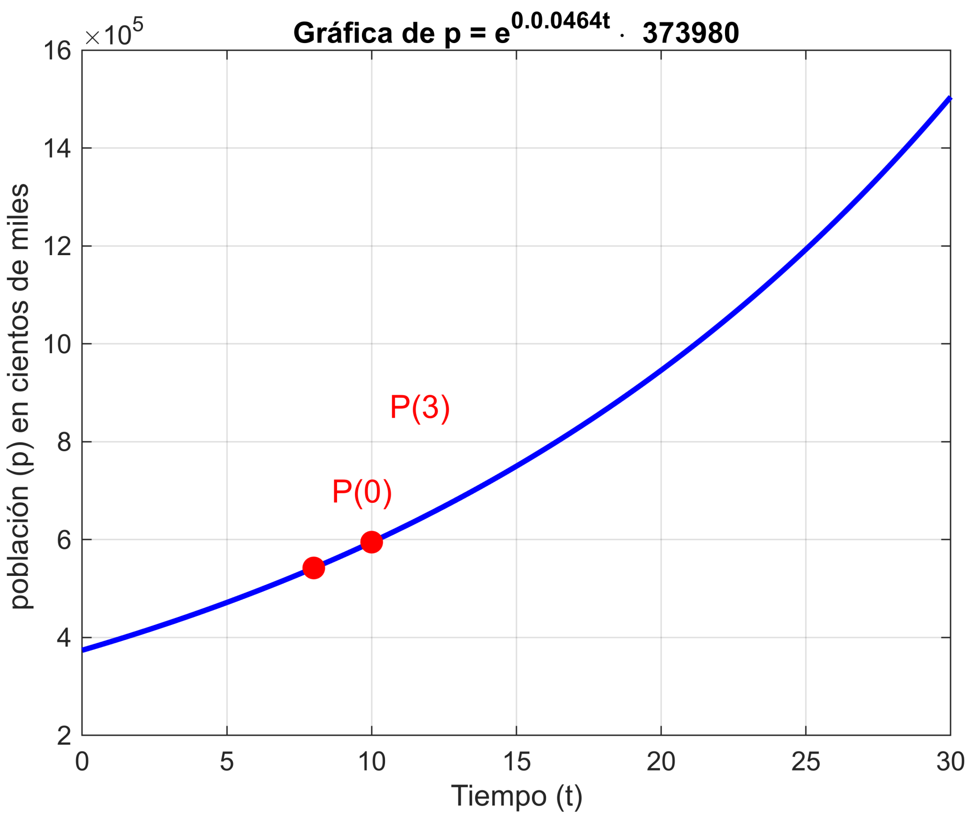


Tabla de comparación para la proyección

(El orden de la tabla es arbitario respecto al planteamiento de las ecuaciones por pareja de tiempo)

Pareja	Ecuación	Proyección	Real	Error (%)
$P(t=0)=244720$ $P(t=10)=430100$	$p=e^{0{,}05639t}\cdot 244720$	777520	649060	0,1979
$P(t=0)=517690$ $P(t=3)=595700$	$\mathrm{P}=e^{0.0465\cdot t}\cdot 517960$	700696	649060	0.0795
$P(t=0)=391920$ $P(t=4)=494500$	$P=e^{0.0581t}\cdot 391920$	810221	649060	0.2482
$P(t=0)=373980$ $P(T=2)=391920$	$P_0=e^{0.0464\cdot t}\cdot 373980$	699665	649060	0.078
$P(t=0)=494500$ $P(t=5)=612260$	$P=e^{0.0427t}\cdot 494.500$	681124	649060	0.0494

Recta tangente en 2020 en nuestra función original

```
% Definir la función de población de Bucaramanga
p = @(t) 4E-16 * exp(0.0242 * t);

% Rango de años
years = 1983:1:2025; % Años absolutos en el eje X

% Evaluar la función en estos años
p_values = p(years);

% Año de interés para la tangente
te = 2020;  % Año real donde queremos la tangente
p0 = p(te); % Población en 2020

% Calcular la derivada de p(t)
dp = @(t) (0.0242) * (4E-16) * exp(0.0242 * t);
m = dp(te); % Pendiente en el año 2020

% Ecuación de la recta tangente: y = m*(t - te) + p(te)
tangent = @(t) m * (t - te) + p0;

% Graficar la función de población
figure;
plot(years, p_values, 'b', 'LineWidth', 2); hold on;

% Graficar la recta tangente
plot(years, tangent(years), 'g', 'LineWidth', 2);

% Marcar el punto de tangencia
plot(te, p0, 'ko', 'MarkerFaceColor', 'k', 'MarkerSize', 8);

% Etiquetas y título
xlabel('Año');
ylabel('Población');
title('Funcion con la tangente ')
```

```
legend('Población Bucaramanga', 'Tangente en 2020', 'Punto de tangencia',
'Location', 'northwest');
grid on;

% Agregar la ecuación de la función en el gráfico
eqn = 'p(t) = 4E-16 * exp(0.0242 * (t)'; % Ecuación a mostrar
text(1985, max(p_values)*0.8, eqn, 'FontSize', 12, 'Color', 'black', 'FontWeight',
'bold');
% Agregar la ecuación de la recta tangente en el gráfico
eqn_tangente = sprintf('Tangente: y = %.2f(t - 2020) + %.0f', m, p0);
text(1985, max(p_values)*0.7, eqn_tangente, 'FontSize', 12, 'Color', 'red',
'FontWeight', 'bold');
```