Proyecto de Ecuaciones Diferenciales - Corte 3

Profesor: Manuel Alejandro Moreno Arévalo

Integrantes:

Laura Natalia Díaz Chavarro

Santiago Julián Contreras Palacios

Nicol Mariana Castro Gonzalez

Diego Alejandro Cifuentes Hernandez

Jerit Leomar Hernández Andrade

UNIVERSIDAD DE SAN BUENAVENTURA COLOMBIA

Universidad de San Buenaventura

Facultad de Ingeniería (Bogotá)

Ciencias Básicas

Bogotá D.C., Colombia

2025

Ecuación Diferencial Modelo de Población

$$\frac{dP}{dt} = r \cdot P$$

Transformada de Laplace

$$L\left(\frac{dP}{dt}\right) = L\{r \cdot P\}$$

Derivada de Primer Orden

$$L\{f'(x)\} = sF(s) - f(0)$$

$$L\left(\frac{dP}{dt}\right) = r \cdot L\{P\}$$

$$sP(s) - P(0) = r \cdot P(s)$$

$$P(0) = P_0$$

$$sP(s) - P_0 = r \cdot P(s)$$

Despejamos P_0

$$sP(s) - r \cdot P(s) = P_0$$

$$P(s)(s - r) = P_0$$

$$P(s) = \frac{P_0}{s - r}$$

Transformada Inversa

$$L^{-1}\{P(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s - r}\right\} \cdot P_0$$

$$\frac{1}{s - r} = e^{rt}$$

$$P(t) = e^{rt} \cdot P_0$$

Sustituimos PVI-1

$$P(0) = 494.500$$

$$P(5) = 612.260$$

$$612.260 = 494.500 \cdot e^{5r}$$

$$\frac{612.260}{494.500} = e^{5r}$$

$$\ln(1.2381) = \ln(e^{5r})$$

$$0.2135 = 5r$$

$$r = \frac{0.2135}{5}$$

$$r = 0.0427$$

Ecuación Exponencial 1

$$P(t) = 494.500 \cdot e^{0.0427t}$$

Sustituimos PVI-2

$$P(0) = 517.690$$

$$P(3) = 595.700$$

$$595.700 = 517.690 \cdot e^{3r}$$

$$\frac{595.700}{517.690} = e^{3r}$$

$$\ln(1.1506) = \ln(e^{3r})$$

$$0.1402 = 3r$$

$$r = \frac{0.1402}{3}$$

$$r = 0.0467$$

Ecuación Exponencial 2

$$P(t) = 517.690 \cdot e^{0.0467t}$$

Ecuación Diferencial Logística Para Población

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{k}\right)$$

Lineazlización

Sustituimos $u = \frac{1}{P} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{1}{u}$

Derivamos *u* respecto a *t*

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{P^2} \cdot \frac{dP}{dt}$$

Derivamos P respecto a *t*

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt}$$

Reemplazamos $\frac{dP}{dt}$ y P en la ecuación originial:

$$-u^{-2} \cdot \frac{du}{dt} = r \cdot \frac{1}{u}\left(1 - \frac{1}{uk}\right)$$

Dividimos en ambos lados por $-u^{-2}$para eliminar numeradores

$$\frac{du}{dt} = -r \cdot u\left(1 - \frac{1}{uk}\right)$$

$$\frac{du}{dt} = -r \cdot u + \frac{r}{k}$$

$$\frac{du}{dt} + r \cdot u = \frac{r}{k}$$

Transformada de Laplace

$$L\left(\frac{du}{dt}\right) + r * L\{u\} = \frac{r}{k} * L\{1\}$$

$$sU(s) - u(0) + r * U(s) = \frac{r}{k} * \frac{1}{s}$$

Despejamos *U(s)*

$$U(s) = \frac{u(0)}{s+r} + \frac{r}{k} * \frac{1}{s(s+r)}$$

Fracciones Parciales para: $\frac{1}{s(s+r)}$

$$\frac{1}{s(s+r)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+r}$$

Multiplicamos ambos lados por *s(s+r)*

$$1 = A(s + r) + Bs$$

Agrupamos términos con *s* y términos independientes

$$1 = (A + B)s + \mathrm{Ar}$$

Coeficiente de *s*:

$$A + B = 0 \Rightarrow B = -A$$

Término independiente

$$\mathrm{Ar} = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{r}$$

Sustituimos en *U(s)*

$$U(s) = \frac{u(0)}{s+r} + \frac{1}{k}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+r}\right)$$

Transformada Inversa

$$L^{-1}\{U(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{u(0)}{s+r}\right\} + \frac{1}{k}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s+r}\right\}$$

$$U(t) = u(0) + e^{-\mathrm{rt}} + \frac{1}{k}(1 - e^{-\mathrm{rt}}) \longrightarrow u = \frac{1}{P}$$

$$\boldsymbol{P(t)} = \frac{\boldsymbol{k}}{1 + \left(\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{P}(0)} - 1\right)\boldsymbol{e}^{-\mathbf{rt}}}$$

Sustituimos PVI-1

$$P(0) = 244.720$$

$$r = 0.0675$$

$$k = 2.000.000$$

$$\mathbf{P(t)} = \frac{2.000.000}{1 + 7.1726 \cdot \mathbf{e}^{-0.0675\mathbf{t}}}$$

Sustituimos PVI-2

$P(0) = 494.500$

$r = 0.059$

$k = 2.000.000$

$$\mathbf{P(t)} = \frac{2.000.000}{1 + 3.0444 \cdot \mathbf{e}^{-0.059\mathbf{t}}}$$

```
% Parámetros Iniciales
% Definir el rango de tiempo extendido (0 a 1500 años)
t = 0:0.1:100;  % Incrementos de 0.1 años

% Modelos Exponenciales
P_exp1 = 494500 * exp(0.0427 * t);   % Caso PVI₁ (494,500 inicial)
P_exp2 = 517690 * exp(0.0467 * t);   % Caso PVI₂ (517,690 inicial)

% Modelos Logísticos
% Capacidad de carga (k)
k = 2000000;

% PVI 1: P(0) = 244,720, r = 0.0675
P_log1 = k ./ (1 + 7.1726 * exp(-0.0675 * t));

% PVI 2: P(0) = 494,500, r = 0.059
P_log2 = k ./ (1 + 3.0444 * exp(-0.059 * t));

% Visualización Comparativa
figure('Color','white','Position',[100 100 900 700])

% gráfico 1: Modelos Exponenciales
subplot(2,1,1)
plot(t, P_exp1, 'r--', 'LineWidth', 1.2)
hold on
plot(t, P_exp2, 'b-.', 'LineWidth', 1.2)
title('Crecimiento Exponencial','FontSize',12)
xlabel('Tiempo (años)','FontWeight','bold')
ylabel('Población (DdM)','FontWeight','bold')
legend({'P_0 = 494,500; r = 0.0427',...
       'P_0 = 517,690; r = 0.0467'},...
       'Location','northwest')
grid on

set(gca,'FontSize',10)

% gráfico 2: Modelos Logísticos
subplot(2,1,2)
plot(t, P_log1, 'g', 'LineWidth', 2)
hold on
plot(t, P_log2, 'm', 'LineWidth', 2)
```

```
yline(k, '--k', 'Capacidad de Carga (k = 2,000,000)',...
       'LineWidth',1.5,...
       'LabelVerticalAlignment','middle',...
       'FontSize',10)

title('Crecimiento Logístico','FontSize',12)
xlabel('Tiempo (años)','FontWeight','bold')
ylabel('Población (Millones)','FontWeight','bold')
legend({'P_0 = 244,720; r = 0.0675',...
        'P_0 = 494,500; r = 0.059'},...
        'Location','southeast')
grid on
xlim([0 100])  % Rango
ylim([0 2200000])  % Límite
set(gca,'FontSize',10)

%% 5. Ajustes Finales
sgtitle('Comparación de Modelos de Población',...
        'FontSize',14,...
        'FontWeight','bold')
```

Este juego tipo "Picas y Fijas - Nivel Bucaramanga" fue desarrollado como una expresión multimedia interactiva y dinámica, con el propósito de mostrar de manera creativa y atractiva los resultados obtenidos durante el proyecto. A través de una interfaz visual amigable, el juego permite al usuario participar activamente en la resolución de retos relacionados con modelos de crecimiento poblacional y ecuaciones diferenciales, aplicando el razonamiento lógico y la interpretación de gráficas. Esta herramienta integra diversos elementos que fortalecen el aprendizaje y la divulgación científica, entre ellos:

Gráficas dinámicas y manipulables mediante GeoGebra, que permiten visualizar los comportamientos poblacionales a lo largo del tiempo bajo diferentes parámetros.

Cuestionarios tipo test que refuerzan los conceptos teóricos abordados en clase y promueven la autoevaluación a través de una experiencia lúdica.

En conjunto, esta propuesta busca no solo evidenciar los avances técnicos y académicos del proyecto, sino también ofrecer una experiencia accesible, educativa y entretenida para diferentes tipos de públicos.

Link para la pagina: https://thiago0914.github.io/Ecuaciones_Diferenciales/