Proyecto de Ecuaciones Diferenciales - Corte 2

Profesor: Manuel Alejandro Moreno Arévalo

Integrantes:

Laura Natalia Díaz Chavarro

Santiago Julián Contreras Palacios

Nicol Mariana Castro Gonzalez

Diego Alejandro Cifuentes Hernandez

Jerit Leomar Hernández Andrade

UNIVERSIDAD DE SAN BUENAVENTURA COLOMBIA

Universidad de San Buenaventura

Facultad de Ingeniería (Bogotá)

Ciencias Básicas

Bogotá D.C., Colombia

2025

Resumen:

Este segundo corte aborda el modelamiento poblacional de Bucaramanga mediante la ecuación logística: $\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{rP}\left(1 - \frac{P}{k}\right)$, que incorpora un factor limitante al crecimiento exponencial estudiado en el primer corte. Partiendo de los datos censales recopilados, se identifican dos momentos de estabilización poblacional para establecer los valores de K, se resuelve la ecuación diferencial para obtener soluciones explícitas, y se determina una constante de crecimiento óptima que aproxima la población actual con un error menor al 10%. Los resultados se presentan mediante gráficas comparativas que ilustran el comportamiento poblacional bajo este modelo matemático más realista.

Introducción

En el primer corte de este proyecto analizamos el crecimiento poblacional de Bucaramanga mediante la ecuación diferencial exponencial $\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{rP}$, que supone un crecimiento ilimitado. Para este segundo corte, avanzamos hacia un modelo más realista con la ecuación logística $\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{rP}\left(1 - \frac{P}{k}\right)$, donde K representa la constante de soporte que limita el crecimiento cuando la población se aproxima a cierto valor.

La ecuación logística introduce un factor de restricción $\left(1 - \frac{P}{k}\right)$ por lo que este modelo captura mejor la realidad demográfica, donde factores como recursos limitados, espacio habitable o eventos externos afectan la dinámica poblacional son los que impedirán que esta sea totalmente exponencial.

En este trabajo identificaremos momentos de variación baja en los datos censales de Bucaramanga, los utilizaremos como condiciones iniciales para resolver la ecuación logística, y evaluaremos la precisión de nuestros modelos al calcular la población actual.

ECUACIÓN LOGÍSTICA GENERAL:

$$\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{rP}\left(1 - \frac{P}{k}\right) \quad \textbf{(1)}$$

PROCESO DE SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN LOGÍSTICA:

$$\int \frac{\mathrm{dP}}{P\left(1 - \frac{P}{k}\right)} = \int r\,\mathrm{dt}$$

$$\int \frac{1}{P\left(1 - \frac{P}{k}\right)}\mathrm{dP} = \int r\,\mathrm{dt}$$

Fracciones parciales:

$$\frac{A}{P} + \frac{B}{1 - \frac{P}{k}} = 1 \Longrightarrow A\left(1 - \frac{P}{k}\right) + \mathrm{BP} = 1$$

$$P=0 \Longrightarrow A\left(1-\frac{0}{k}\right)+B(0)=1 \Longrightarrow A=1$$

$$P=k \Longrightarrow A\left(1-\frac{k}{k}\right)+\mathrm{Bk}=1 \Longrightarrow B=\frac{1}{k}$$

$$\int \frac{\mathrm{dP}}{P}+\int \frac{\frac{1}{k}\mathrm{dP}}{1-\frac{P}{k}}=r\int \mathrm{dt}$$

$$\ln|P|+\frac{1}{k}\ln\left|1-\frac{P}{k}\right|=\mathrm{rt}+C$$

$$\ln|P|-\ln|k-P|=\mathrm{rt}+C$$

$$e^{\ln}\left(\frac{P}{k-P}\right)=e^{\mathrm{rt}}+C$$

$$\frac{P}{k-P}=Ce^{\mathrm{rt}}$$

Valor inicial: $P(0)=P_0$

$$\frac{P_0}{k-P_0}=Ce^{r(0)} \Longrightarrow C=\frac{P_0}{k-P_0}$$

$$\frac{P}{k-P}=\frac{P_0}{k-P_0}e^{\mathrm{rt}} \Longrightarrow P=(k-P)(Ce^{\mathrm{rt}})=\mathrm{kC}e^{\mathrm{rt}}-\mathrm{PC}e^{\mathrm{rt}}$$

$$P+\mathrm{PC}e^{\mathrm{rt}}=\mathrm{kC}e^{\mathrm{rt}}$$

$$P(1+Ce^{\mathrm{rt}})=\mathrm{kC}e^{\mathrm{rt}}$$

$$P=\frac{\mathrm{kC}e^{\mathrm{rt}}}{1+Ce^{\mathrm{rt}}}$$

$$P=\frac{k}{\frac{1}{Ce^{\mathrm{rt}}+1}}=\frac{k}{\frac{1}{C}e^{-\mathrm{rt}}+1}$$

$$\frac{1}{C}=\frac{k-P_0}{P_0}$$

SOLUCIÓN ECUACIÓN LOGÍSTICA:

$$P(t)=\frac{k}{\left(\frac{k-\mathrm{Po}}{\mathrm{Po}}\right)e^{-\mathrm{rt}}+1} \qquad \textbf{(2)}$$

REPRESENTACIÓN ALGEBRAICA Y ANÁLISIS NUMÉRICO

Parejas escogidas de la entrega de primer corte:

PAREJA 1 = [1984-2004]

Rango de población respectivo a la pareja : (244720-430106)

Problemas de valor inicial reconocidos (PVI):

- **PVI1=**P(t=0) =244720
- **PVI2=**P(t=10) =430100

1. Escogemos una k arbitariamente (prueba y error) y en nuestra ecuación **(2)** reemplazamos junto con **PVI1=**P(t=0) =244720

k=2000000

$$P(t) = \frac{2000000}{\left(\frac{2000000 - 244720}{244720}\right)e^{-\mathrm{rt}} + 1}$$

$$P(t) = \frac{2000000}{(7.172605)e^{-\mathrm{rt}} + 1}$$

2. Para hallar "r" empleamos el **PVI2** donde **P=430100 , t=10** y despejamos **"r"**

$$430100 = \frac{2000000}{(7.172605)e^{-r(10)} + 1}$$

$$(7.172605)e^{-10r} = \frac{2000000}{430100}$$

$$7.172605e^{-10r} = 4.650081 - 1$$

$$e^{-10r} = \frac{4.650081 - 1}{7.172605}$$

$$e^{-10r} = 0.508891$$

$$\ln|e^{-10r}| = \ln|0.508891|$$

$$-10r = -0.67552$$

$$r = \frac{-0.675521}{-10}$$

$$r = 0.0675521$$

3. Entonces la ecuación reemplazando r :

$$P(t) = \frac{2000000}{(7.172605)e^{-0.0675521t} + 1}$$

PRIMERA PROYECCIÓN AL AÑO ACTUAL 2025 t=20.5

$$P(20.5) = \frac{2000000}{(7.172605)e^{-0.067552(20.5)} + 1}$$

$$P(20.5) = \frac{2000000}{2.7958041}$$

$$P(20.5) = 715357$$

La proyección para el año 2025 con la ecuación logística= 715.357

4. Calculamos error porcentual de la proyección sabiendo que la **población real** de 2025 es de **649.060** habitantes.

Margen de error:

$$\text{Error} = \frac{\Delta\text{Población}}{\text{Población real}}$$

$$\text{Error} = |\frac{649060 - 715357}{649060}|$$

$$\text{Error} = 1021 * 100$$

$$\text{Error}\,(\%) = 10.21$$

El error de la proyección es de 10.21%

PAREJA 2 = [2010-2020]

Rango de población respectivo a la pareja : (494.500-612.260)

Problemas de valor inicial reconocidos (PVI):

- **PVI1=**P(t=0) =4594.500
- **PVI2=**P(t=3) =612.260

1. Escogemos un valor para "k" y reemplazamos en **(2)** con PVI1

$$k = 2000000$$

$$P(t) = \frac{2000000}{\left(\frac{20000 - 494500}{494500}\right)e^{-\text{rt}} + 1}$$

$$P(t) = \frac{2000000}{3.0444e^{-\text{rt}} + 1}$$

2. Aplicamos PVI2 para hallar "r"

$$612260 = \frac{2000000}{3.0444e^{-r(5)} + 1}$$

$$612260(3.0444e^{-5r} + 1) = 2000000$$

$$3.0444e^{-5r} + 1 = \frac{2000000}{612260}$$

$$3.0444e^{-5r} = 3.2665 - 1$$

$$e^{-5r} = \frac{2.2665}{3.0444}$$

$$-5r = \ln|0.7444|$$

$$r = \frac{-0.2951}{-5}$$

$$r = 0.059$$

3. Por lo tanto la función población es

$$P(t) = \frac{2000000}{3.0444e^{-0.059t} + 1}$$

SEGUNDA PROYECCIÓN AL AÑO ACTUAL 2025 t=7.5

$$P(7.5) = \frac{2000000}{3.0444e^{-0.059t} + 1}$$

$$P(7.5) = \frac{2000000}{2.9558}$$

$$P(7.5) = 676635$$

La proyección para el año 2025 con la ecuación logística es de 676.635 habitantes

4. Calcular el error porcentual

$$\% \text{ Error} = \left|\frac{649060 - 676.635}{649060}\right| * 100$$

$$\% \text{ Error} = \frac{27575}{649060} * 100$$

$$\% \text{ Error} = 4.24$$

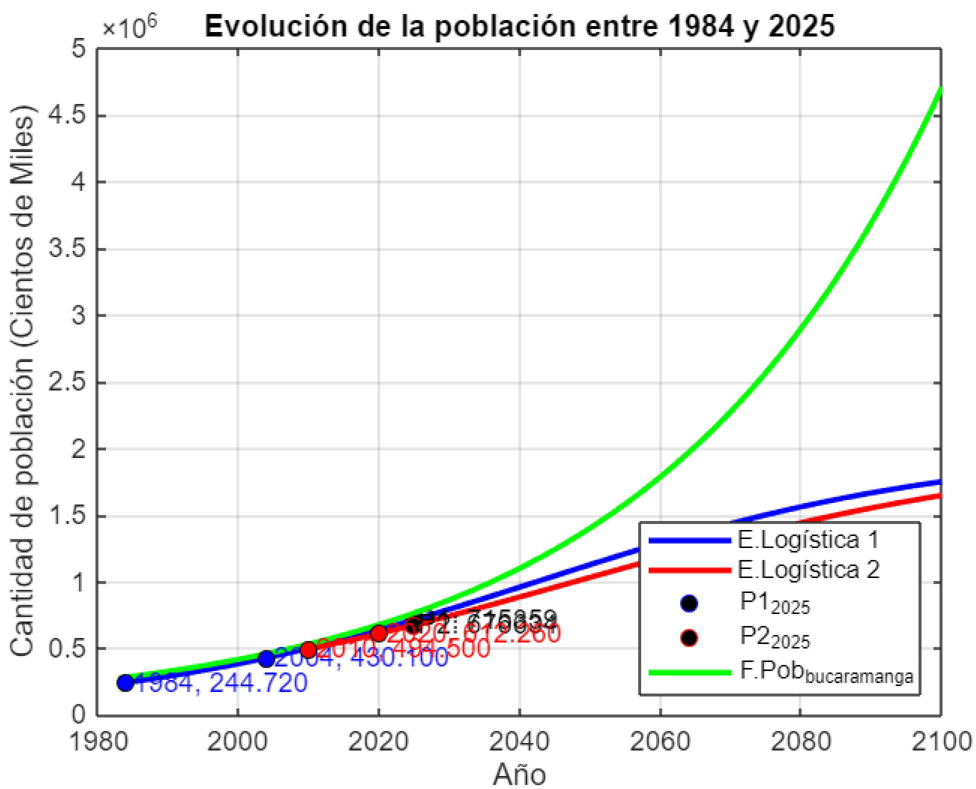
El error de la proyección es de 4.24%

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

```
% --- Rango para P1 y P2 ---
years = 1984:2:2100;
years_2 = 2010:2:2100;

% --- t para P1 y P2 ---
```

```
t = (years - 1984) / 2;
t2 = (years_2 - 2010) / 2;

% --- Funciones logísticas ---
P1 = @(t) 2000000 ./ ((7.172605 * exp(-0.0675521 * t) + 1));
P2 = @(t2) 2000000 ./ ((3.0444 * exp(-0.059 * t2) + 1));

% --- Evaluar las funciones ---
y1 = P1(t);
y2 = P2(t2);

% --- Graficar P1 y P2 ---
figure
plot(years, y1, 'b-', 'LineWidth', 2)
hold on
plot(years_2, y2, 'r-', 'LineWidth', 2)

% --- Marcar puntos de 2025 en ambas curvas ---
t_2025 = (2025 - 1984) / 2;
t2_2025 = (2025 - 2010) / 2;

p1_2025 = P1(t_2025);
p2_2025 = P2(t2_2025);

plot(2025, p1_2025, 'bo', 'MarkerFaceColor', 'k')
plot(2025, p2_2025, 'ro', 'MarkerFaceColor', 'k')

text(2025 + 0.5, p1_2025, sprintf('P1: %.0f', p1_2025), 'Color', 'k')
text(2025 + 0.5, p2_2025, sprintf('P2: %.0f', p2_2025), 'Color', 'k')

% --- Función Bucaramanga ---
p = @(t) 4E-16 * exp(0.0242 * t);

% --- Años y evaluación para Bucaramanga ---
years_buca = 1983:1:2100;
p_values = p(years_buca);

% --- Graficar Bucaramanga ---
plot(years_buca, p_values, 'g-', 'LineWidth', 2)

% --- Marcar puntos específicos ---

% Puntos para P1
plot(1984, 244720, 'ko', 'MarkerFaceColor', 'b')
text(1984 + 1, 244720, '1984, 244.720', 'Color', 'b')

plot(2004, 430100, 'ko', 'MarkerFaceColor', 'b')
text(2004 + 1, 430100, '2004, 430.100', 'Color', 'b')

% Puntos para P2
```

```
plot(2010, 494500, 'ko', 'MarkerFaceColor', 'r')
text(2010 + 1, 494500, '2010, 494.500', 'Color', 'r')

plot(2020, 612260, 'ko', 'MarkerFaceColor', 'r')
text(2020 + 1, 612260, '2020, 612.260', 'Color', 'r')

% --- Etiquetas y estilo ---
xlabel('Año')
ylabel('Cantidad de población (Cientos de Miles)')
title('Evolución de la población entre 1984 y 2025')
legend('E.Logística 1', 'E.Logística 2','P1_2_0_2_5','P2_2_0_2_5'
,'F.Pob_b_u_c_a_r_a_m_a_n_g_a', 'Location', 'southeast')
grid on
hold off
```



AVANCE DE LA ENTREGA FINAL

RECURSO GRÁFICO

Juego Interactivo "Adivina el Año"

Como parte del proyecto final para el curso de Ecuaciones Diferenciales, se ha diseñado un juego didáctico tipo **Picas y Fijas** titulado **"Adivina el Año"**. El objetivo principal de esta actividad es aplicar el modelo logístico de crecimiento poblacional de manera dinámica y entretenida, incentivando la participación de los estudiantes y reforzando el análisis matemático detrás del modelo.

¿En qué consiste?

El juego consiste en que el participante debe **adivinar el año en que la población de Bucaramanga alcanzará un número específico de habitantes** (previamente calculado usando la ecuación logística). Al ingresar su intento, el sistema le indicará cuántas cifras son correctas y están en la posición adecuada (**fijas**) y cuántas cifras son correctas pero están en una posición diferente (**picas**).

Bosquejo visual del Juego

La interfaz del juego está basada en una pantalla simple e intuitiva, donde el usuario puede ingresar su intento de año y recibir retroalimentación. Se incluye además un botón para conocer el proceso matemático detrás del número objetivo, permitiendo que los jugadores comprendan cómo se llega a dicho valor.

Diagrama de Flujo

Se agrego un anexo en el PDF para vizualizar el diagrama de flujo, ya que aqui se alteraba su calidad.

PLAN DE ACCIÓN PARA LA REALIZACIÓN DEL PROYECTO

Se agrego un anexo en el PDF para vizualizar el cronograma, ya que aqui se alteraba su calidad.

INICIO/FIN
PROCESOS
DECISIONES
ENTRADA DE USUARIO
Inicio
Generar año secreto (2010-2070)
Calcular población
Mostrar población proyectada y mensaje de inicio
Vidas = 10
Intentos = 0
Entrada: Usuario ingresa intento
Repetir ciclo
¿Entrada es 4 dígitos?
NO
Reducir vidas en 2
SI
¿Año entre 2010 y 2070?
NO
Mostrar mensaje
"El año debe estar entre 2010 y 2070.
Pierdes 1 vida"
Reducir vidas en 1
SI
Incrementar intentos y Reducir 1 vida
Contar Fijas y Picas
¿Fijas = 4?
NO
¿Vidas < 5 y pista no activada?
¿Vidas < 5 y pista no activada?
NO
SI
Activar modo fácil
Mostrar pista (un dígito correcto)
¿Vidas > 0?
SI
NO
SI
SI
SI
Fin
Mensaje de consuelo

DIAGRAMA DE GANTT

ACTIVIDADES	TIEMPO DE DURACIÓN															
	FEBRERO				MARZO				ABRIL				MAYO			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Semana 1: Inducción al curso y presentación del proyecto																
Semana 2: Introducción a ecuaciones diferenciales y socialización del proyecto																
Semana 3: Distribución de tareas y desarrollo del documento y archivo .mlx																
Semana 4: Revisión con profesor y correcciones																
Semana 5: Entrega de la primera parte del proyecto																
Semana 6: Introducción a nuevos temas para el segundo corte																
Semana 7: Explicación de la ecuación logística																
Semana 8: Resolución de la ecuación logística y boceto multimedia																
Semana 9: Diseño del juego 'Picas y Fijas' e interfaz																
Semana 10: Entrega final del segundo corte																